Rozdział 4

TEORIA GRAFÓW

4.1. Podstawowe pojęcia

Definicja 4.1.1. **Grafem** nazywamy trójkę $\mathcal{G} = (V, E, \Psi)$, gdzie V jest skończonym zbiorem elementów zwanych **wierzchołkami**, E jest skończonym zbiorem elementów zwanych **krawędziami**, natomiast **funkcja incydencji** Ψ określa sposób przyporządkowania krawędzi wierzchołkom.

Ze względu na sposób przyporządkowania krawędzi wierzchołkom grafy dzielimy na:

✓ **nieskierowane**, jeśli $\Psi : E \to \mathcal{P}(V)$ oraz $\bigwedge\limits_{e \in E} 0 <\mid \Psi(e) \mid \leqslant 2$,

✓ **skierowane** (digrafy), jeśli $\Psi : E \to V \times V$.

Definicja 4.1.2. Krawędzie grafu skierowanego nazywa się **łukami**.

Definicja 4.1.3. **Rzędem grafu** $\mathcal{G} = (V, E, \Psi)$ nazywamy liczbę jego wierzchołków, czyli moc zbioru V, a **rozmiarem grafu** nazywamy liczbę jego krawędzi, czyli moc zbioru E.

Definicja 4.1.4. **Rysunkiem grafu** lub **diagramem** nazywamy wykres składający się z punktów odpowiadających elementom zbioru V oraz łuków lub odcinków zakończonych strzałką (graf skierowany) lub nie (graf nieskierowany) odpowiadających elementom zbioru E takich, że jeśli $\Psi(e) = (v, w)$ lub odpowiednio $\Psi(e) = \{v, w\}$, to punkty v i w są połączone odcinkiem bądź łukiem.

Definicja 4.1.5. Graf (V', E', Ψ') nazywamy **podgrafem** grafu (V, E, Ψ) jeśli $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, $\bigwedge\limits_{e \in E'} \Psi'(e) = \Psi(e)$.

Definicja 4.1.6. Jeśli $v \in \Psi(e)$, to krawędź e nazywa się **incydentną** do wierzchołka v.
Jeśli $\Psi(e) = \{v, w\}$ lub odpowiednio $\Psi(e) = (v, w)$, to wierzchołki v i w nazywamy **sąsiednimi**, a o krawędzi e mówimy, że łączy wierzchołki v i w.
Jeśli $\Psi(e) = (u, v)$, to u nazywa się początkiem krawędzi e, a v jej końcem i mówi się, że krawędź e wychodzi z wierzchołka u i wchodzi do wierzchołka v.
Jeśli nie istnieje krawędź incydentna do wierzchołka v, to taki wierzchołek nazywa się **izolowanym**.
Jeśli wierzchołek jest incydentny tylko do jednej krawędzi, to nazywamy go **liściem**.
Jeśli $\Psi(e') = \Psi(e'')$, to e' i e'' nazywamy **krawędziami równoległymi**.
Jeśli $\mid \Psi(e) \mid = 1$, tzn. $\Psi(e) = \{v\}$ lub odpowiednio $\Psi(e) = (v, v)$, to e nazywamy **pętlą**.
Liczbę $d(v)$ krawędzi incydentnych z wierzchołkiem v nazywa się **stopniem wierzchołka** v, przy czym pętle zlicza się dwukrotnie.
Ciąg liczb wierzchołków kolejnych stopni jest to ciąg, w którym n-ty element równy jest liczbie wierzchołków grafu stopnia n.

Niech e będzie krawędzią, a v wierzchołkiem grafu $\mathcal{G}$. Wprowadźmy oznaczenia.

$\mathcal{G} - e$ =graf otrzymany z grafu $\mathcal{G}$ po usunięciu krawędzi e bez wierzchołków do niej incydentnych,

$\mathcal{G} - v$ =graf otrzymany z grafu $\mathcal{G}$ przez usunięcie wierzchołka v razem z krawędziami do niego incydentnymi,

$\mathcal{G} \setminus e$ =graf otrzymany w wyniku ściągnięcia krawędzi e, tj. przez usuniecie e i utożsamienie jej końców v i w w taki sposób, że otrzymany wierzchołek jest incydentny z krawędziami, które były incydentne z v i w z wyjątkiem usuniętej krawędzi e,

$\mathcal{G}_+$ =graf otrzymany z grafu prostego $\mathcal{G}$ przez dodanie krawędzi między dowolnymi dwoma niesąsiednimi wierzchołkami,

$\mathcal{G}_-$ =graf otrzymany z grafu prostego $\mathcal{G}$ przez scalenie dwóch niesąsiednich wierzchołków i zastąpienie krawędzi równoległych pojedynczymi.

Przykłady grafów:

✓ **Graf zerowy** = graf, którego zbiór wierzchołków jest pusty, $V = \emptyset$.

✓ **Graf pusty** = graf, którego zbiór krawędzi jest pusty, $E = \emptyset$, oznaczamy go N_n, gdzie $n =| V |$; każdy wierzchołek w grafie pustym jest izolowany.

✓ **Graf prosty** = graf, który nie zawiera pętli i krawędzi równoległych.

✓ **Graf pełny o n wierzchołkach** = graf prosty, w którym każde dwa różne wierzchołki są sąsiednie, oznaczamy go K_n.

✓ **Graf regularny stopnia** r = graf prosty, w którym każdy wierzchołek ma stopień równy r. Grafy regularne stopnia 3 nazywa się **grafami kubicznymi**.

✓ n**-wierzchołkowy obwód** = graf regularny stopnia dwa, oznaczamy go C_n. (zob. rys. 4.1)

✓ n**-wierzchołkowe koło** = graf, który powstaje z obwodu C_{n-1} przez dołożenie jednego wierzchołka sąsiedniego do wszystkich wierzchołków obwodu C_{n-1}, oznaczamy go W_n. (zob. rys. 4.1)

✓ **Graf dwudzielny** = graf, w którym zbiór wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne podzbiory V_1 i V_2 w taki sposób, że każda krawędź grafu łączy dowolny wierzchołek podzbioru V_1 z dowolnym wierzchołkiem podzbioru V_2. Jeśli każdy wierzchołek podzbioru V_1 jest połączony krawędzią z każdym wierzchołkiem podzbioru V_2 i graf jest prosty, to nazywamy go **grafem pełnym dwudzielnym**.

✓ n**-wierzchołkowa gwiazda** = graf pełny dwudzielny, w którym jeden z podzbiorów wierzchołków jest zbiorem jednoelementowym, oznaczamy go S_n. (zob. rys. 4.1)

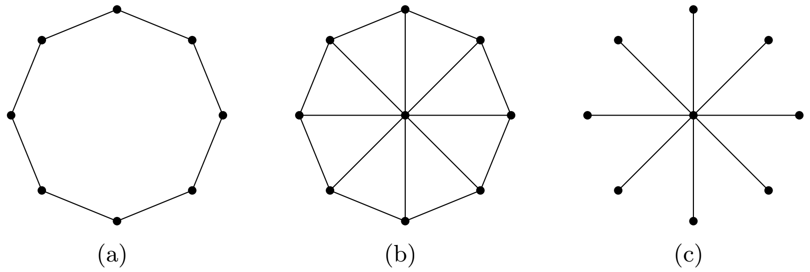
✓ **Grafy platońskie** = grafy regularne utworzone z wierzchołków i krawędzi pięciu wielościanów foremnych: czworościanu, sześcianu, ośmiościanu, dwunastościanu i dwudziestościanu. (zob. rys. 4.2)

✓ **Graf Petersena** = graf regularny stopnia 3 o dziesięciu wierzchołkach, którego diagram znajduje się na rysunku 4.3(a).

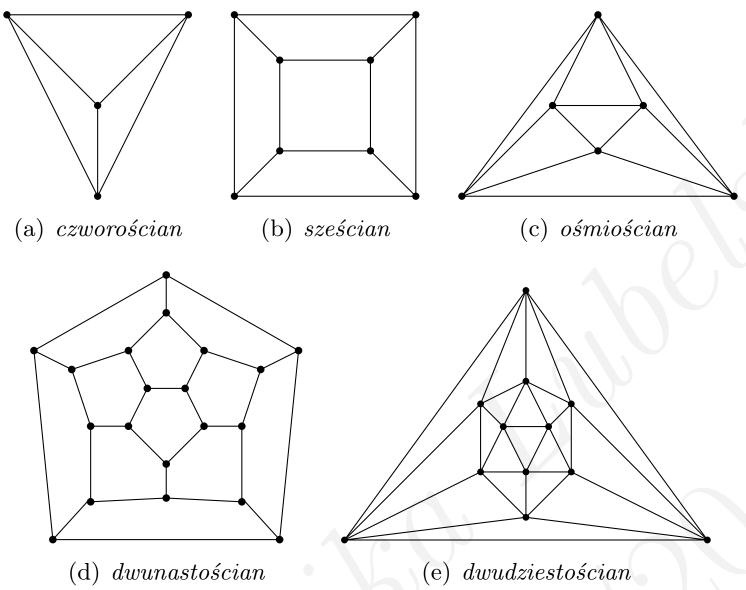
✓ **Pryzmatoid** = graf regularny stopnia 4 o ośmiu wierzchołkach, którego diagram znajduje się na rysunku 4.3(b).

✓ **graf Grötzscha**= graf o 11 wierzchołkach i 20 krawędziach, którego diagram znajduje się 4.3(c).

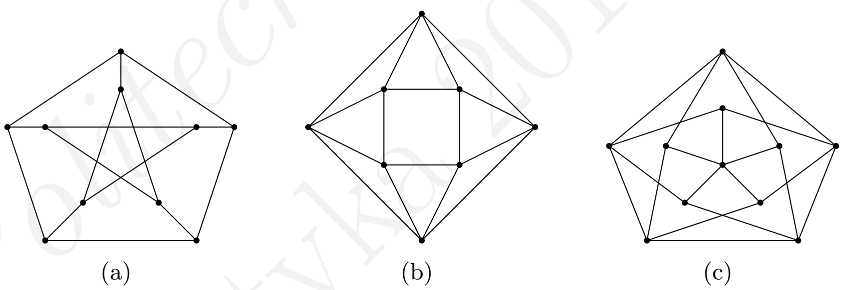
✓ **Graf krawędziowy** $L(\mathcal{G})$ grafu prostego $\mathcal{G}$ = graf, którego wierzchołkom odpowiadają wzajemnie jednoznacznie krawędzie grafu $\mathcal{G}$, a dwa wierzchołki grafu $L(\mathcal{G})$ są incydentne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie krawędzie grafu $\mathcal{G}$ są incydentne. □



Rysunek 4.1. Diagramy (a) obwodu C_8, (b) koła W_9, (c) gwiazdy S_9.



Rysunek 4.2. Diagramy grafów platońskich.



Rysunek 4.3. Diagramy (a) grafu Petersena , (b) pryzmatoidu, (c) grafu Grötzscha.

Definicja 4.1.7. Drogą w grafie nazywamy skończony ciąg następujących po sobie wierzchołków i krawędzi takich, że każda krawędź jest incydentna do wierzchołka poprzedzającego ją i następującego po niej, np.

$$v_1\ e_1\ v_2\ e_2\ v_3\ \ldots v_{n-1}\ e_{n-1}\ v_n$$

Czasami dla uproszczenia podaje się tylko ciąg wierzchołków lub tylko ciąg krawędzi.
Długością drogi nazywamy liczbę krawędzi jakie w niej występują.
Drogą zamkniętą nazywamy drogę, która zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku.
Drogą prostą nazywamy drogę, w której każda krawędź grafu pojawia się co najwyżej raz. (W drodze prostej wszystkie krawędzie są różne)

Ścieżka to droga niezamknięta, w której każdy wierzchołek grafu pojawia co najwyżej raz. (W ścieżce wszystkie wierzchołki są różne).
Cykl to zamknięta ścieżka. W szczególności każda pętla jest cyklem długości jeden, a dwie krawędzie równoległe są cyklem długości dwa.
Graf, w którym nie występuje żaden cykl nazywamy **grafem acyklicznym**.

Definicja 4.1.8. Dwa grafy nieskierowane $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1, \Psi_1)$ i $\mathcal{G}_2 = (V_2, E_2, \Psi_2)$ nazywamy **izomorficznymi** jeśli istnieją różnowartościowe i „na" odwzorowania $f : V_1 \to V_2$ i $g : E_1 \to E_2$ takie, że

$$\bigwedge_{v,w \in V_1} \bigwedge_{e \in E_1} \Psi_1(e) = \{v, w\} \Leftrightarrow \Psi_2(g(e)) = \{f(v), f(w)\}.$$

Parę funkcji f i g o podanych własnościach nazywa się **izomorfizmem grafów $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$**.

Twierdzenie 4.1.9. Relacja R określona na zbiorze grafów następująco:
$\mathcal{G}_1 \; R \; \mathcal{G}_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{G}_1$ jest izomorficzny do $\mathcal{G}_2$,
jest relacją równoważności.

Wniosek 4.1.10. Grafy izomorficzne mają takie same własności, między innymi mają

- ✓ tyle samo wierzchołków i krawędzi.
- ✓ tyle samo pętli i krawędzi równoległych.
- ✓ takie same ciągi liczb wierzchołków kolejnych stopni.
- ✓ taką samą ilość wierzchołków o tym samym stopniu,
- ✓ taką samą ilość dróg o tej samej długości.

Zadanie 4.1. Narysuj diagram grafu o zbiorze wierzchołków $\{0, 1\}^3$, w którym wierzchołki u, v są połączone krawędzią, jeśli różnią się na dwóch lub trzech współrzędnych. Podaj rząd i rozmiar oraz ciąg liczb wierzchołków kolejnych stopni tego grafu. Czy ten graf jest prosty? Czy jest acykliczny? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4.2. Narysuj diagram grafu o zbiorze wierzchołków $\{0, 1\}^3$, w którym wierzchołki u, v są połączone krawędzią, jeśli różnią się tylko na jednej współrzędnej. Podaj rząd i rozmiar oraz ciąg liczb wierzchołków kolejnych stopni tego grafu. Czy ten graf jest prosty? Czy jest acykliczny? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4.3. Niech $\mathcal{G}$ będzie grafem prostym z co najmniej dwoma wierzchołkami. Wykazać, że w $\mathcal{G}$ istnieją co najmniej dwa wierzchołki tego samego stopnia.

Zadanie 4.4. Na rysunku 4.4 wskaż grafy izomorficzne. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4.5. Na rysunku 4.5 znajdują się dwie pary grafów izomorficznych. Wskaż te pary. Odpowiedź uzasadnij.

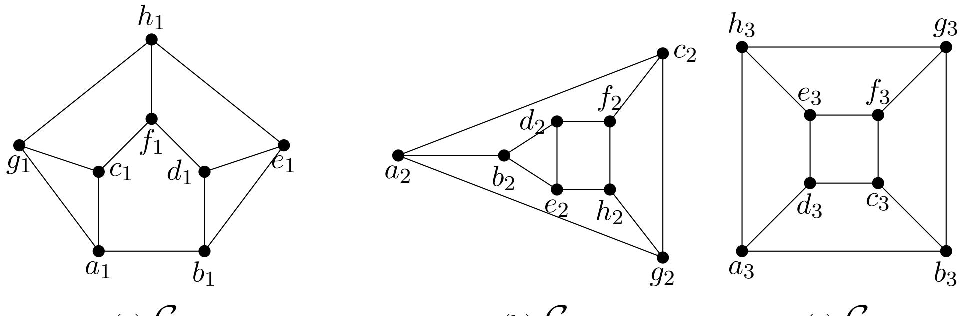
4.2. Reprezentacje macierzowe grafów nieskierowanych

Niech $\mathcal{G}$ będzie grafem nieskierowanym o n wierzchołkach i m krawędziach.

Definicja 4.2.1. Macierz $\mathbf{I}(\mathcal{G}) = [a_{ij}]$ o n wierszach i m kolumnach zdefiniowaną następująco

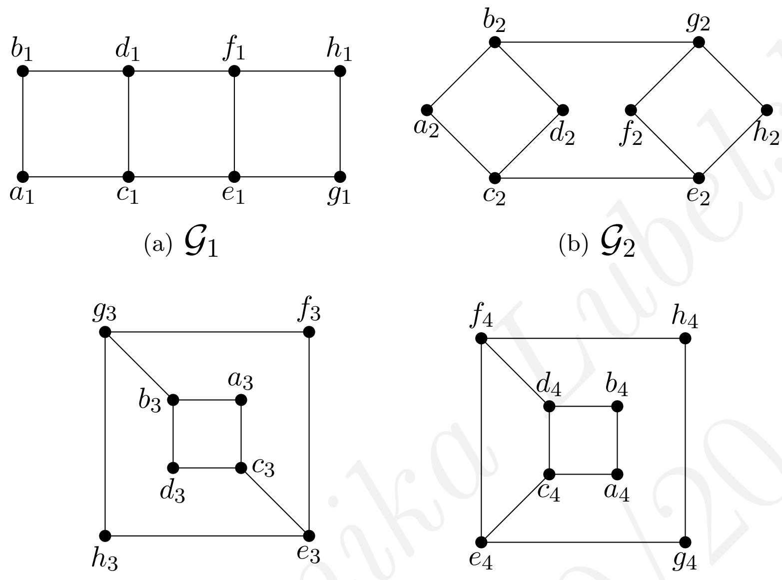
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } j\text{-ta krawędź jest incydentna do } i\text{-tego wierzchołka} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

nazywamy **macierzą incydencji** grafu $\mathcal{G}$.



(a) $\mathcal{G}_1$ (b) $\mathcal{G}_2$ (c) $\mathcal{G}_3$

Rysunek 4.4. Diagramy grafów z zadania 4.4.



(a) $\mathcal{G}_1$ (b) $\mathcal{G}_2$

(c) $\mathcal{G}_3$ (d) $\mathcal{G}_4$

Rysunek 4.5. Diagramy grafów z zadania 4.5.

Własności macierzy incydencji

- ✓ Macierze incydencji grafów izomorficznych różnią się kolejnością wierszy lub kolumn.
- ✓ W macierzy incydencji grafu nieskierowanego poszczególne wiersze odpowiadają wierzchołkom grafu, a kolumny - krawędziom.
- ✓ Każda kolumna macierzy incydencji grafu prostego zawiera dokładnie dwie jedynki.
- ✓ Kolumna odpowiadająca pętli zawiera jedną jedynkę.
- ✓ W grafie bez pętli liczba jedynek w każdym wierszu równa się stopniowi odpowiadającego mu wierzchołka.
- ✓ Wiersz samych zer reprezentuje wierzchołek izolowany.
- ✓ Krawędzie równoległe tworzą identyczne kolumny.

Definicja 4.2.2. Macierz kwadratową $\mathbf{S}(\mathcal{G}) = [a_{ij}]$ o n wierszach zdefiniowaną następująco

a_{ij} = liczba krawędzi łączących wierzchołek v_i z wierzchołkiem v_j, przy czym pętle zliczamy dwukrotnie, nazywamy **macierzą sąsiedztwa** grafu $\mathcal{G}$.

Własności macierzy sąsiedztwa

- ✓ Macierze sąsiedztwa grafów izomorficznych różnią się kolejnością wierszy lub kolumn.
- ✓ Wiersze i kolumny macierzy sąsiedztwa odpowiadają wierzchołkom grafu.
- ✓ Macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego jest kwadratową macierzą symetryczną.
- ✓ Suma elementów w każdym wierszu i każdej kolumnie równa jest stopniowi odpowiedniego wierzchołka.
- ✓ Jeśli w grafie nie występują pętle, to na przekątnej są zera.
- ✓ Jeśli graf jest grafem prostym, to elementami macierzy sąsiedztwa są zera i jedynki.

Zadanie 4.6. Dane są macierze sąsiedztwa

a) $$\begin{bmatrix} 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 0&1&1&1&0\\ 1&0&0&0&1\\ 1&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 0&1&1&0&0\\ 1&2&1&0&0\\ 1&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&2 \end{bmatrix}$$

d) $$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Narysować grafy o podanych macierzach sąsiedztwa i ich grafy krawędziowe, a następnie wyznaczyć ciągi liczb wierzchołków kolejnych stopni tych grafów. Podać kilka przykładów drogi długości 3 i ścieżki długości 5. Czy istnieją cykle w tych grafach?

Zadanie 4.7. Dane są macierze incydencji

a) $$\begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&1 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&1 \end{bmatrix}$$

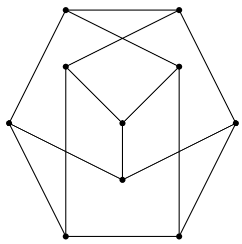
d) $$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&1&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Narysować grafy o podanych macierzach incydencji i ich grafy krawędziowe, a następnie wyznaczyć ciągi liczb wierzchołków kolejnych stopni tych grafów. Podać kilka przykładów drogi długości 5 i ścieżki długości 3. Czy istnieją cykle w tych grafach?

Zadanie 4.8. Podaj macierze sąsiedztwa i incydencji oraz ciąg liczb wierzchołków kolejnych stopni grafów o diagramach podanych na rysunkach 4.1 - 4.3.

Zadanie 4.9. Narysować wszystkie nieizomorficzne grafy o czterech wierzchołkach i trzech krawędziach, a następnie skonstruować macierze incydencji i sąsiedztwa dla każdego grafu.

Zadanie 4.10. Pokazać, że graf na rysunku 4.6 jest izomorficzny z grafem Petersena, a następnie podać macierz sąsiedztwa, incydencji oraz ciąg liczb wierzchołków kolejnych stopni tych grafów.



Rysunek 4.6. Diagram grafu z zadania 4.10.

Zadanie 4.11. Narysuj graf o pięciu wierzchołkach i ośmiu krawędziach, który jest

a) prosty,

b) nie jest prosty, ale nie ma pętli,

c) nie jest prosty, ale nie ma krawędzi równoległych.

Podaj macierze sąsiedztwa i incydencji narysowanych grafów.

Zadanie 4.12. Narysuj grafy pełne o 3, 4, 5 wierzchołkach i podaj ich macierze incydencji i sąsiedztwa.

Zadanie 4.13. Narysuj graf pełny dwudzielny o pięciu wierzchołkach, w którym jeden ze zbiorów wierzchołków zawiera tylko dwa wierzchołki. Podaj macierze sąsiedztwa i incydencji tego grafu.

Zadanie 4.14. Narysuj graf o podanej funkcji incydencji, a następnie wypisz jego macierz incydencji i sąsiedztwa.

a) $\Psi(e_1) = \{v_1, v_2\}, \quad \Psi(e_2) = \{v_2, v_3\}, \quad \Psi(e_3) = \{v_3, v_5\},$
$\Psi(e_4) = \{v_4, v_2\}, \quad \Psi(e_5) = \{v_5, v_4\}$

b) $\Psi(e_1) = \{v_1, v_1\}, \quad \Psi(e_2) = \{v_1, v_2\}, \quad \Psi(e_3) = \{v_2, v_3\},$
$\Psi(e_4) = \{v_3, v_4\}, \quad \Psi(e_5) = \{v_4, v_2\}, \quad \Psi(e_6) = \{v_1, v_1\}.$

c) $\Psi(e_1) = \{a, b\}, \quad \Psi(e_2) = \{b, c\}, \quad \Psi(e_3) = \{c, d\}, \quad \Psi(e_4) = \{d, f\},$
$\Psi(e_5) = \{f, a\}, \quad \Psi(e_6) = \{b, d\}, \quad \Psi(e_7) = \{d, a\}, \quad \Psi(e_8) = \{d, d\}$

d) $\Psi(e_1) = \{a, b\}, \quad \Psi(e_2) = \{b, c\}, \quad \Psi(e_3) = \{c, d\}, \quad \Psi(e_4) = \{d, e\},$
$\Psi(e_5)) = \{e, f\}, \quad \Psi(e_6) = \{f, a\}, \quad \Psi(e_7) = \{f, b\}, \quad \Psi(e_8) = \{b, d\},$
$\Psi(e_9) = \{d, f\}, \quad \Psi(e_{10}) = \{e, a\} \quad \Psi(e_{11}) = \{a, c\}, \quad \Psi(e_{12}) = \{c, e\}$

Zadanie 4.15. Podać macierz sąsiedztwa, macierz incydencji oraz ciąg liczb wierzchołków kolejnych stopni grafów o diagramach na rysunkach 4.4 i 4.5.

Lemat o uściskach dłoni
W dowolnym grafie $\mathcal{G} = (V, E)$ suma stopni wszystkich wierzchołków jest dwa razy większa od liczby krawędzi, tzn. $\sum\limits_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$.

Zadanie 4.16. Udowodnić, że liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest w dowolnym grafie liczbą parzystą.

Zadanie 4.17. Które z następujących ciągów są ciągami liczb wierzchołków kolejnych stopni grafu? W każdym przypadku albo narysuj graf albo wyjaśnij dlaczego taki graf nie istnieje.

a) $(1,1,0,3,1,0,0,\dots)$, **b)** $(4,1,0,3,1,0,0,\dots)$,
c) $(0,1,0,2,1,0,0,\dots)$, **d)** $(0,0,2,2,1,0,0,\dots)$,
e) $(0,0,1,2,1,0,0,\dots)$, **f)** $(0,1,0,1,1,1,0,0,\dots)$,
g) $(0,0,0,4,0,0,\dots)$, **h)** $(0,0,0,0,5,0,0,\dots)$.

Zadanie 4.18. Niech d_k oznacza liczbę wierzchołków stopnia k. Udowodnić, że

$$d_1 + 2d_2 + 3d_3 + \cdots = 2|E|.$$

Zadanie 4.19. Udowodnić, że dla dowolnego grafu $\mathcal{G}$

$$2|E(\mathcal{G})| - |V(\mathcal{G})| = -d_0 + d_2 + 2d_3 + 3d_4 + \cdots + (k-1)d_k + \dots,$$

gdzie d_k oznacza liczbę wierzchołków stopnia k.

Zadanie 4.20. Graf o 13 krawędziach ma po trzy wierzchołki stopnia pierwszego, drugiego i trzeciego. Pozostałe wierzchołki są stopnia czwartego. Ile wierzchołków ma ten graf?

Zadanie 4.21. Dany jest graf $\mathcal{G}$, który ma tylko wierzchołki drugiego i czwartego stopnia w jednakowej ilości. Ponadto liczba krawędzi tego grafu równa jest kwadratowi liczby wierzchołków stopnia drugiego. Obliczyć ile wierzchołków ma ten graf.

Zadanie 4.22. Pewien graf ma tylko wierzchołki trzeciego i czwartego stopnia, przy czym wierzchołków czwartego stopnia ma o jeden więcej niż wierzchołków stopnia trzeciego. Ponadto liczba krawędzi tego grafu równa jest kwadratowi liczby wierzchołków stopnia czwartego. Ile wierzchołków ma ten graf?

4.3. Grafy spójne

Definicja 4.3.1. Graf nieskierowany nazywamy **spójnym**, jeśli dla każdej pary jego wierzchołków istnieje droga łącząca te wierzchołki.

Dowolny graf można rozbić na rozłączne podgrafy spójne zwane **składowymi**. Graf spójny ma tylko jedną składową.

Twierdzenie 4.3.2. *Niech $\mathcal{G} = (V, E, \Psi)$ będzie grafem prostym o n wierzchołkach i k składowych. Liczba krawędzi grafu $\mathcal{G}$ spełnia nierówność*

$$n - k \leqslant |E| \leqslant \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1). \tag{4.1}$$

Definicja 4.3.3. Zbiorem rozspajającym grafu spójnego $\mathcal{G}$ nazywamy podzbiór zbioru E złożony z tych krawędzi, których usunięcie zwiększa liczbę składowych.

Definicja 4.3.4. Rozcięciem grafu spójnego $\mathcal{G}$ nazywamy taki zbiór rozspajający, którego żaden podzbiór właściwy nie jest rozspajający.

Definicja 4.3.5. Zbiorem rozdzielającym (separującym) grafu spójnego $\mathcal{G}$ nazywamy zbiór wierzchołków których usunięcie zwiększa liczbę składowych grafu.

Definicja 4.3.6. Separatorem grafu spójnego $\mathcal{G}$ nazywamy taki zbiór rozdzielający (separujący), którego żaden podzbiór właściwy nie jest rozdzielający (separujący).

Definicja 4.3.7. Spójnością krawędziową $\lambda(\mathcal{G})$ grafu spójnego $\mathcal{G}$ nazywamy najmniejszą liczbę krawędzi, których usunięcie powoduje, że graf $\mathcal{G}$ jest niespójny.

Definicja 4.3.8. **Spójnością wierzchołkową** $\mu(\mathcal{G})$ grafu spójnego $\mathcal{G}$ nazywamy najmniejszą liczbę wierzchołków, których usunięcie czyni graf $\mathcal{G}$ niespójnym lub zredukuje go do jednego wierzchołka.

Twierdzenie 4.3.9. **(Nierówność Whitney'a)** *W każdym grafie spójnym $\mathcal{G}$ prawdziwe są nierówności*

$$\mu(\mathcal{G}) \leqslant \lambda(\mathcal{G}) \leqslant \delta(\mathcal{G}),$$

gdzie $\delta(\mathcal{G})$ oznacza najmniejszy stopień wierzchołka grafu $\mathcal{G}$.

Zadanie 4.23. Udowodnić, że dowolny graf prosty o n wierzchołkach i więcej niż $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ krawędziach jest spójny.

Zadanie 4.24. Znaleźć spójność wierzchołkową i spójność krawędziową następujących grafów

a) n-wierzchołkowej gwiazdy,

b) n-wierzchołkowego obwodu,

c) n-wierzchołkowego koła,

d) grafu pełnego o n wierzchołkach.

Zadanie 4.25. Wyznaczyć spójność krawędziową i wierzchołkową grafów danych na rysunkach 4.1 - 4.3.

Zadanie 4.26. Dla grafów podanych w zadaniach 4.1, 4.2, 4.6, 4.7, 4.13, 4.14 wyznaczyć spójność krawędziową i wierzchołkową.

Zadanie 4.27. Podaj przykład grafu, w którym spójność wierzchołkowa jest mniejsza niż spójność krawędziowa.

4.4. Droga Hamiltona

Definicja 4.4.1. Drogę prostą przechodzącą przez każdy wierzchołek grafu dokładnie raz nazywamy **drogą Hamiltona**.
Drogę zamkniętą przechodzącą przez każdy wierzchołek grafu dokładnie raz, za wyjątkiem wierzchołka początkowego i końcowego, nazywamy **cyklem Hamiltona**.
Graf, w którym istnieje cykl Hamiltona nazywa się **grafem Hamiltona**.

Twierdzenie 4.4.2. **(Orego)**
Jeśli

1. *graf $\mathcal{G}$ jest prosty,*

2. $\mid V(\mathcal{G}) \mid = n \geqslant 3$,

3. *dla każdej pary wierzchołków v i w niepołączonych krawędzią $d(v) + d(w) \geqslant n$,*

to graf $\mathcal{G}$ jest grafem Hamiltona.

Twierdzenie 4.4.3. **(Diraca)**
Jeśli

1. *graf $\mathcal{G}$ jest prosty,*

2. $\mid V(\mathcal{G}) \mid = n \geqslant 3$,

3. $\bigwedge_{v \in V(\mathcal{G})} d(v) \geqslant \frac{n}{2}$,

to graf $\mathcal{G}$ jest grafem Hamiltona.

Twierdzenie 4.4.4. (o liczbie krawędzi)
Jeśli

1. *graf* $\mathcal{G}$ *jest prosty,*

2. $\mid V(\mathcal{G}) \mid = n \geqslant 3$,

3. $\mathcal{G}$ *ma co najmniej* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$ *krawędzi,*

to graf $\mathcal{G}$ *jest grafem Hamiltona.*

Definicja 4.4.5. Kodem Graya długości n nazywa się ciąg wszystkich 2^n różnych ciągów cyfr dwójkowych, ustawionych w taki sposób, że dwa kolejne ciągi różnią się dokładnie jedną cyfrą oraz ostatni ciąg różni się dokładnie jedną cyfrą od pierwszego ciągu.

Przykład 4.4.6. 00*,* 01*,* 11*,* 10 *jest kodem Graya długości 2.* □

Zadanie 4.28. Dla $n \geqslant 4$ niech P_n będzie grafem powstałym z grafu pełnego K_{n-1} przez dodanie jednego wierzchołka w środku jakiejś krawędzi grafu K_{n-1}. Uzasadnij, że P_n jest grafem Hamiltona.

Zadanie 4.29. Sprawdzić, czy założenia twierdzenia Orego, Diraca i o liczbie krawędzi są spełnione w

a) grafach podanych na rysunkach 4.1 - 4.5,

b) grafach w zadaniach 4.1, 4.2, 4.6, 4.7, 4.13, 4.14,

c) grafach pełnych,

d) grafach platońskich,

e) n-wierzchołkowym kole,

f) n-wierzchołkowym obwodzie.

Wskazać co najmniej jedną drogę Hamiltona w tych grafach, o ile istnieje.

Zadanie 4.30. Narysuj diagram grafu Hamiltona, w którym nie są spełnione żadne z założeń twierdzeń Orego, Diraca i o liczbie krawędzi.

4.5. Droga Eulera

Definicja 4.5.1. Drogę prostą przechodzącą przez każdą krawędź grafu dokładnie raz nazywamy **drogą Eulera**.
Drogę zamkniętą przechodzącą przez każdą krawędź grafu dokładnie raz nazywamy **cyklem Eulera**.
Graf, w którym istnieje cykl Eulera nazywa się **grafem Eulera**.

Twierdzenie 4.5.2. (Eulera)
W skończony grafie spójnym istnieje cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.
W skończony grafie spójnym istnieje droga Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego.

Jednym z efektywnych algorytmów wyznaczających drogę Eulera w grafie spójnym jest następujący **algorytm Fleury'ego**

Krok 1: Jeśli w grafie istnieje wierzchołek stopnia nieparzystego, to zmiennej v nadajemy nazwę jednego (dowolnego) z tych wierzchołków, w przeciwnym przypadku zmiennej v nadajemy nazwę dowolnego z wierzchołków rozważanego grafu.

Krok 2: Kładziemy $VS := v$ oraz $ES := \varepsilon$.

Krok 3: Jeśli v jest wierzchołkiem izolowanym, to zatrzymujemy się.

Krok 4: Jeśli pozostała dokładnie jedna krawędź incydentna z wierzchołkiem v, to nadajemy zmiennej e nazwę tej krawędzi, a zmiennej w nazwę drugiego wierzchołka incydentnego z krawędzią e i usuwamy krawędź e za zbioru $E(\mathcal{G})$ oraz wierzchołek v ze zbioru $V(\mathcal{G})$,

w przeciwnym przypadku nadajemy zmiennej e nazwę jednej z tych krawędzi incydentnych z wierzchołkiem v, której usunięcie z grafu nie spowoduje niespójności otrzymanego grafu, a zmiennej w nazwę drugiego wierzchołka incydentnego z krawędzią e i usuwamy krawędź e ze zbioru $E(\mathcal{G})$.

Krok 5: Dołączamy wierzchołek w do ciągu VS, a krawędź e do ciągu ES, zastępujemy wierzchołek v wierzchołkiem w i przechodzimy do kroku 3.

Zadanie 4.31. Dla grafów podanych

a) na rysunkach 4.1 - 4.5,

b) w zadaniach 4.1, 4.2, 4.6, 4.7, 4.13, 4.14

sprawdzić, czy istnieje droga Eulera i w przypadku odpowiedzi pozytywnej wyznaczyć tę drogę z wykorzystaniem algorytmu Fleury'ego.

Zadanie 4.32. Narysuj wszystkie nieizomorficzne spójne grafy proste o pięciu krawędziach i pięciu wierzchołkach, w których istnieje cykl Eulera.

Zadanie 4.33. Czy jest możliwe, aby biedronka poruszająca się wzdłuż krawędzi sześcianu przeszła każdą krawędź dokładnie raz? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4.34. Czy jest możliwe, aby mrówka poruszająca się wzdłuż krawędzi czworościanu przeszła każdą krawędź dokładnie raz? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4.35. Które grafy pełne mają drogi Eulera? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4.36. Które z grafów platońskich posiadają drogi Eulera. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4.37. Podać przykład grafu, w którym

a) nie istnieje cykl Hamiltona, ale istnieje cykl Eulera,

b) istnieje cykl Hamiltona, ale nie istnieje cykl Eulera,

c) istnieje cykl Hamiltona i cykl Eulera,

d) nie istnieje cykl Hamiltona i cykl Eulera.

4.6. Drzewa

Definicja 4.6.1. **Drzewem** nazywamy graf spójny i acykliczny.
Graf, którego każda składowa jest drzewem nazywamy **lasem**.

Twierdzenie 4.6.2. *Niech $\mathcal{G}$ będzie grafem prostym mającym więcej niż jeden wierzchołek. Następujące warunki są równoważne:*

(a) *$\mathcal{G}$ jest drzewem,*

(b) *każde dwa różne wierzchołki są połączone dokładnie jedną drogą prostą,*

(c) *$\mathcal{G}$ jest spójny, a po usunięciu dowolnej krawędzi przestaje być spójny,*

(d) *$\mathcal{G}$ jest acykliczny, a po dodaniu jednej krawędzi przestaje być acykliczny.*

Twierdzenie 4.6.3. *Drzewo skończone, mające co najmniej jedną krawędź, ma co najmniej dwa liście.*

Twierdzenie 4.6.4. *Drzewo mające n wierzchołków ma dokładnie $n-1$ krawędzi.*

Twierdzenie 4.6.5. *Niech $\mathcal{G}$ będzie grafem prostym o n wierzchołkach. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(a) *$\mathcal{G}$ jest drzewem,*

(b) *$\mathcal{G}$ jest grafem acyklicznym mającym $n-1$ krawędzi,*

(c) *$\mathcal{G}$ jest spójnym mającym $n-1$ krawędzi.*

Definicja 4.6.6. Maksymalny podgraf spójnego grafu $\mathcal{G}$ nazywamy **drzewem spinającym** lub **dendrytem**.
Każdą krawędź drzewa spinającego $\mathcal{T}$ nazywamy **gałęzią**.
Krawędź grafu $\mathcal{G}$, która nie jest gałęzią drzewa spinającego $\mathcal{T}$ nazywamy **cięciwą** względem drzewa spinającego $\mathcal{T}$

Twierdzenie 4.6.7. *Każdy skończony graf spójny ma co najmniej jedno drzewo spinające.*

Algorytm wyznaczania dendrytu

DANE: dowolny wierzchołek v skończonego grafu $\mathcal{G}$
WYNIKI: zbiór krawędzi E drzewa spinającego składowej grafu $\mathcal{G}$ zawierającej wierzchołek v
Zmienna pomocnicza: ciąg V odwiedzanych wierzchołków ()ostatecznie $V = V(\mathcal{G})$)

- $V := \{v\}$, $E := \varepsilon$
- **Dopóki** istnieją krawędzie w grafie $\mathcal{G}$ łączące wierzchołki zbioru V z wierzchołkami nie należącymi do V,

  wykonuj wybierz taką krawędź $\{u, w\}$ łączącą $u \in V$ z wierzchołkiem $w \notin V$,

  dołącz w do V i $\{u, w\}$ do E.

Definicja 4.6.8. Drzewo, którego wierzchołkami są dodatnie liczby całkowite nazywamy **drzewem oznakowanym**.

Dla danego drzewa oznakowanego $\mathcal{T}$ tworzymy dwa ciągi: ciąg liczb $P_T = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ zwany **kodem Prüfera** oraz ciąg drzew $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_{n-1}$ spełniające warunki:

(1) $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}$,

(2) dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ liczba a_i jest wierzchołkiem drzewa $\mathcal{T}_i$ sąsiednim do wierzchołka b_i tego drzewa, który jest wierzchołkiem stopnia pierwszego o najmniejszej wartości,

(3) drzewo $\mathcal{T}_{i+1}$ powstaje z drzewa $\mathcal{T}_i$ przez usunięcie wierzchołka b_i oraz krawędzi łączącej ten wierzchołek z wierzchołkiem a_i.

Algorytm wyznaczania drzewa o danym kodzie Prüfera

DANE: n, $P_T = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$
WYNIKI: drzewo o danym kodzie Prüfera

1. Kładziemy $V_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$.

2. Dla kolejnych wartości $i = 1, 2, \dots, n-2$ wykonujemy następujące czynności:

2.1. kładziemy b_i równe najmniejszemu elementowi zbioru V_i, który nie jest elementem ciągu A_i,

2.2. łączymy wierzchołki a_i oraz b_i,

2.3. kładziemy $V_{i+1} = V_i - \{b_i\}$ oraz usuwamy element a_i z ciągu A_i,

3. łączymy ze sobą pozostałe wierzchołki tworzące zbiór V_{n-1}.

Twierdzenie 4.6.9. Cayleya
Istnieje n^{n-2} różnych drzew oznakowanych mających n wierzchołków.

Definicja 4.6.10. Drzewo, w którym wyróżniono jeden z wierzchołków nazywamy **drzewem z wyróżnionym korzeniem**, a ten wyróżniony wierzchołek nazywa się **korzeniem**.
Drzewo z wyróżnionym korzeniem, w którym oprócz korzenia i liści pozostałe wierzchołki mają stopień równy trzy nazywa się **drzewem przeszukiwań binarnych**.

Drzewo z wyróżnionym korzeniem jako graf skierowany ma następujące własności:

✓ liście są wierzchołkami nie będącymi początkiem żadnej krawędzi,

✓ korzeń jest wierzchołkiem nie będącym końcem żadnej krawędzi,

✓ jeśli (v, w) jest krawędzią, to v nazywamy **rodzicem** lub **przodkiem**, a w nazywamy **dzieckiem** lub **potomkiem**,

✓ każdy wierzchołek poza korzeniem ma jednego rodzica,

✓ każdy rodzic może mieć kilkoro dzieci, a w drzewie przeszukiwań binarnych co najwyżej dwoje.

Definicja 4.6.11. Numer poziomu wierzchołka - długość drogi prostej od korzenia do wierzchołka.
Wysokość drzewa - największy numer poziomu wierzchołka.

Rodzaje drzew z wyróżnionym korzeniem

✓ **Drzewo o m rozgałęzieniach** - drzewo, w którym każdy rodzic, ma co najwyżej m dzieci.

✓ **Pełne drzewo o m rozgałęzieniach** - wszystkie liście mają ten sam numer poziomu.

✓ **Drzewo binarne** - pełne drzewo o dwóch rozgałęzieniach.

Definicja 4.6.12. Drzewo z wyróżnionym korzeniem, w którym każdemu liściowi przyporządkowano liczbę rzeczywistą zwaną **wagą** nazywa się **drzewem z wagami**.

Wagą drzewa o n liściach nazywa się liczbę daną wzorem $W(T) = \sum_{i=1}^{n} w_i l_i$, gdzie w_i oznacza wagę i-tego liścia, a l_i-numer jego poziomu.

Definicja 4.6.13. Kodem prefiksowym nazywamy kod, w którym żadne słowo kodowe nie jest początkiem (prefiksem) żadnego innego słowa kodowego.

Kod prefiksowy można otrzymać poprzez konstrukcję drzewa binarnego o możliwie najmniejszej wadze, spełniającego warunki:

1. krawędzie łączące dowolnego rodzica z jego dziećmi mają etykiety 0 oraz 1,

2. każdy liść o numerze poziomu n ma etykietę $b_1 b_2 \dots b_n$, która jest ciągiem etykiet kolejnych krawędzi w drodze od korzenia do tego liścia.

Do konstrukcji drzewa o możliwie najmniejszej wadze z zadanymi wagami liści można wykorzystać następujący **algorytm Huffmana**.

DANE: $t \geqslant 2$, $(w_1, w_2, \ldots, w_t)$ niemalejący ciąg liczb nieujemnych
WYNIKI: optymalne drzewo binarne $T(w_1, \ldots, w_t)$

- Jeżeli $t = 2$, to optymalnym drzewem binarnym jest drzewo z dwoma liśćmi o wagach w_1 i w_2,

  w przeciwnym razie wykonujemy następujące kroki:

I$_t$ tworzymy ciąg $(w_1+w_2, w_3, \ldots, w_t)$ i porządkujemy go niemalejąco, otrzymując ciąg $(u_1, u_2, \ldots, u_{t-1})$,

II$_t$ wykonujemy algorytm Huffmana $\mathbf{H}(t-1, u_1, u_2, \ldots, u_{t-1})$,

III$_t$ przekształcamy drzewo $T(u_1, \ldots, u_{t-1})$ w drzewo $T(w_1, \ldots, w_t)$, zastępując w $T(u_1, \ldots, u_{t-1})$ liść o wadze $w_1 + w_2$ poddrzewem mającym dwa liście o wagach w_1 i w_2,

- Wychodzimy z algorytmu $\mathbf{H}(t, w_1, \ldots, w_t)$.

Zadanie 4.38. Wiadomo,że pewien graf, spójny i acykliczny, ma trzy wierzchołki stopnia siódmego, pięć - stopnia drugiego, czterdzieści jeden - stopnia pierwszego i resztę wierzchołków stopnia ósmego. Ile wierzchołków ma ten graf?

Zadanie 4.39. Pewne drzewo ma dwa wierzchołki stopnia 5, trzy wierzchołki stopnia 3, dwa wierzchołki stopnia 2 i resztę wierzchołków stopnia 1. Oblicz ile wierzchołków jest w tym grafie?

Zadanie 4.40. Pokazać, że jeśli graf spójny ma n wierzchołków i m krawędzi, to każde jego drzewo spinające ma $n-1$ gałęzi i $m-n+1$ cięciw.

Zadanie 4.41. Wyznacz liczbę dendrytów w grafie o podanej macierzy sąsiedztwa, a następnie narysuj diagram każdego z dendrytów

$$\textbf{a)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.42. Dany jest graf o funkcji incydencji $\Psi(e_1) = \{v_1, v_2\}, \Psi(e_2) = \{v_2, v_3\}, \Psi(e_3) = \{v_3, v_5\}$, $\Psi(e_4) = \{v_4, v_2\}, \Psi(e_5) = \{v_5, v_4\}$. Wyznaczyć liczbę dendrytów w tym grafie, a następnie naszkicować diagramy wszystkich tych dendrytów.

Zadanie 4.43. Narysować diagramy oraz wyznaczyć macierze sąsiedztwa i incydencji drzew oznakowanych o następujących kodach Prüfera

a) $(3, 3, 3, 3, 9, 3, 3, 3)$, **b)** $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 9)$,
c) $(9, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, **d)** $(1, 2, 3, 4)$.

Zadanie 4.44. Dany jest graf **G** o macierzy sąsiedztwa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wierzchołki tego grafu oznaczono liczbami naturalnymi w następujący sposób: wierzchołkowi odpowiadającemu pierwszemu wierszowi macierzy nadano numer 3, drugiemu-2, trzeciemu-1, czwartemu-5, piątemu-4.

a) Wyznaczyć liczbę dendrytów w grafie $\mathcal{G}$, a następnie narysować diagram każdego z dendrytów.

b) Podać kody Prüfera wszystkich dendrytów.

Zadanie 4.45. Dane jest drzewo $\mathcal{T}$ o kodzie Prüfera $(1, 1, 2, 2, 2, 1)$.

a) Zbudować graf $\mathcal{T}$ o podanym kodzie.

b) Zbudować nowy graf $\mathcal{G}$ z drzewa $\mathcal{T}$ łącząc krawędzią, każdego liścia z niesąsiednim wierzchołkiem najwyższego stopnia.

c) Zbadać, czy w grafie $\mathcal{G}$ istnieje droga Eulera i w przypadku odpowiedzi pozytywnej wykorzystując algorytm Fleury'ego wyznaczyć tę drogę.

d) Sprawdzić, czy spełnione są wszystkie założenia twierdzenia Orego i Diraca, a następnie wyznaczyć, o ile istnieje, drogę Hamiltona w grafie $\mathcal{G}$.

Zadanie 4.46. Obliczyć ile rodziców i ile liści ma pełne drzewo regularne o m rozgałęzieniach i wysokości h.

Zadanie 4.47. Obliczyć ile wierzchołków i ile liści ma pełne drzewo binarne o wysokości h.

Zadanie 4.48. Udowodnić, że jeśli t jest liczbą liści, a p liczbą rodziców w drzewie pełnym o m rozgałęzieniach, to $t = (m-1)p + 1$ niezależnie od wysokości drzewa.

Zadanie 4.49. Zbudować optymalne drzewo binarne dla następujących zbiorów wag i obliczyć wagi tych drzew.

a) $(1, 3, 4, 6, 9, 13)$,

b) $(2, 4, 5, 8, 13, 15, 18, 25)$,

c) $(1, 1, , 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34)$.

Zadanie 4.50. Wyznaczyć optymalny kod prefiksowy dla tekstu

a) KOBYŁA MA MAŁY BOK,

b) MOŻE JEŻ ŁŻE JEŻOM,

fc KORALE KOLORU KORALOWEGO,

d) KOD PRÜFERA,

e) RELACJA REKURENCYJNA,

f) RELACJA PORZĄDKU.

4.7. Kolorowanie grafów

Definicja 4.7.1. Mówimy, że graf bez pętli jest k-**kolorowalny**, jeśli każdemu wierzchołkowi możemy przypisać jeden z pośród k kolorów, w taki sposób by sąsiednie dwa wierzchołki miały różne kolory.

Będziemy mówić, że graf został **pokolorowany w sposób właściwy**, jeśli każdemu wierzchołkowi przypisano kolor, w taki sposób, że sąsiednie dwa wierzchołki są różnokolorowe.

Definicja 4.7.2. Jeśli graf $\mathcal{G}$ jest k-kolorowalny, ale nie jest $(k-1)$-kolorowalny, to mówimy, że jest on k-**chromatyczny** i że jego **liczba chromatyczna** równa jest k i piszemy $\chi(\mathcal{G}) = k$.

Uwaga 4.7.3. Z definicji 4.7.2 wynika, że liczba chromatyczna grafu jest najmniejszą liczbą kolorów jakie trzeba użyć do pokolorowania wierzchołków grafu w sposób właściwy.

Twierdzenie 4.7.4 (Brooksa)**.** *Jeśli $\mathcal{G}$ jest spójnym grafem prostym nie będącym grafem pełnym i jeśli największy stopień wierzchołka równy jest δ, $\delta \geqslant 3$, to $\mathcal{G}$ jest δ-kolorowalny.*

Definicja 4.7.5. Graf $\mathcal{G}$ nazywamy **k-kolorowalnym krawędziowo**, jeśli jego krawędzie można pokolorować k kolorami w taki sposób, aby żadne dwie sąsiednie krawędzie nie miały tego samego koloru.

Definicja 4.7.6. Jeśli graf jest k-kolorowalny krawędziowo, ale nie jest $(k-1)$-kolorowalny krawędziowo, to mówimy, że jego **indeks chromatyczny** wynosi k i piszemy $\chi'(\mathcal{G}) = k$.

Twierdzenie 4.7.7 (Vizinga)**.** *Jeśli graf $\mathcal{G}$ jest grafem prostym, w którym największy stopień wierzchołka wynosi δ, to*

$$\delta \leqslant \chi'(\mathcal{G}) \leqslant \delta + 1.$$

Zadanie 4.51. Wyznaczyć liczbę chromatyczną

a) n-wierzchołkowego grafu pustego,

b) n-wierzchołkowego drzewa,

c) n-wierzchołkowego obwodu,

d) n-wierzchołkowego koła,

e) n-wierzchołkowej gwiazdy,

f) grafu pełnego o n wierzchołkach.

Zadanie 4.52. Wyznaczyć liczby i indeksy chromatyczne, grafów o podanych macierzach sąsiedztwa

$$\textbf{a)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{c)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.53. Wyznaczyć indeks chromatyczny

a) n-wierzchołkowego obwodu,

b) n-wierzchołkowego koła,

c) n-wierzchołkowego grafu pełnego,

d) grafu Petersena,

e) grafu Grötzscha.

Zadanie 4.54. Porównaj ograniczenia dolne i górne indeksu chromatycznego podane w twierdzeniu Vizinga z rzeczywistą jego wartością dla

a) obwodu o n wierzchołkach,

b) grafu pełnego o n wierzchołkach.

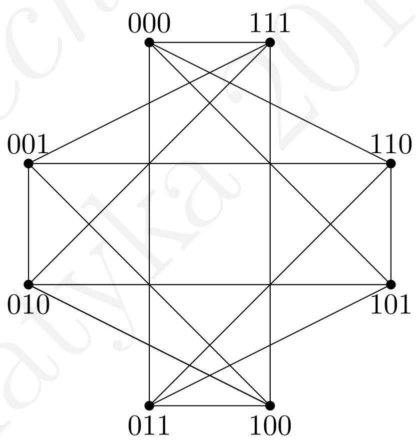
Zadanie 4.55. Należy ułożyć plan zajęć dla grupy studentów studiujących przedmioty, z których tylko niektóre są wspólne. W poniższej tabeli symbol $\times$ wskazuje, które pary wykładów nie mogą odbywać się w tym samym czasie. Ile terminów należy zarezerwować w planie zajęć dla tych wykładów?

	a	b	c	d	e	f	g
a		×	×	×			×
b	×		×	×	×		×
c	×	×		×		×	
d	×	×	×			×	
e		×					
f			×	×			×
g	×	×				×	

Zadanie 4.56. Należy ułożyć plan zajęć dla grupy studentów studiujących przedmioty, z których tylko niektóre są wspólne. W poniższej tabeli symbol × wskazuje, które pary ćwiczeń nie mogą odbywać się w tym samym czasie. Ile terminów należy zarezerwować w planie zajęć dla tych ćwiczeń?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		×										×
2	×		×									
3		×		×					×	×		
4			×		×				×	×		
5				×		×						
6					×		×					
7						×		×				
8							×		×			
9			×	×				×		×		
10			×	×					×		×	
11										×		×
12	×										×	

4.8. Odpowiedzi i wskazówki do zadań



Rysunek 4.7. Przykład diagramu grafu z zadania 4.1

4.1 $(0, 0, 0, 0, 8, 0, \dots)$, przykład diagramu można znaleźć na rysunku 4.7.

4.4 Izomorficzne są grafy $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$.

4.17 Ciągi (c) i (f) **nie** są ciągami liczb kolejnych stopni, bo nie spełniają lematu o uściskach dłoni.

4.20 11, 4.21 6, 4.22 5,

4.24 (a) $\lambda(S_n) = 1$, $\mu(S_n) = 1$, (b) $\lambda(C_n) = 2$, $\mu(C_n) = 2$, (c) $\lambda(W_n) = 3$, $\mu(W_n) = 3$ (d) $\lambda(K_n) = n - 1$, $\mu(K_n) = n - 1$

4.33 i 4.34 Nie, bo $\bigwedge\limits_{v \in V} d(v) = 3$.

4.35 Cykl Eulera istnieje jesli każdy wierzchołek jest parzystego stopnia. ponieważ w K_n każdy wierzchołek ma stopień równy $n - 1$, to $n - 1$ musi być liczbą parzystą. Stąd wynika, że tylko w grafach pełnych o nieparzystej liczbie wierzchołków istnieje cykl Eulera.

4.36 Droga Eulera istnieje tylko w grafie ośmiościanu foremnego, w pozostałych grafach platońskich wszystkie wierzchołki mają stopień nieparzysty.

4.38 53, 4.39 16, 4.41 (a) 3, (b) 7, 4.42 4,

4.44 (a) 3, (b) (2,1,1), (2,1,4), (2,1,5).

4.45 (c) Ponieważ są dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, tj. o etykietach 1 i 2, to istnieje w grafie $\mathcal{G}$ droga Eulera.

(d) Ponieważ $d(4)+d(5) = 4 < 8$, to założenia twierdzenia Orego nie są spełnione. Założenia twierdzenia Diraca też nie są spełnione, bo np. $d(4) = 2 < 4$. Można zauważyć, że droga Hamiltona w grafie $\mathcal{G}$ nie istnieje (oczywiście nie jest to wniosek z faktu, że założenia twierdzeń Orego i Diraca nie są spełnione).

4.46 $\frac{m^h-1}{m-1}$ - rodziców, m^h - liści,

4.48 Na mocy zadania 4.46 mamy $(m - 1)p + 1 = m^h - 1 + 1 = m^h = t$.

4.51 **a)** $\chi(N_n) = 1$, **b)** $\chi(\mathcal{T}_n) = 2$, **c)** $\chi(C_{2k}) = 2$, $\chi(C_{2k-1}) = 3$, $k \in \mathbb{N}$,

d) $\chi(W_{2k-1}) = 3$, $\chi(W_{2k}) = 4$, **e)** $\chi(S_n) = 2$, **f)** $\chi(K_n) = n$.

4.54 **a)** oszacowanie z twierdzenia Vizinga: $2 \leqslant \chi'(C_n) \leqslant 3$; dla n parzystych $\chi'(C_n) = 2$, dla n nieparzystych $\chi'(C_n) = 3$

b) oszacowanie z twierdzenia Vizinga: $n-1 \leqslant \chi'(\mathcal{K}_n) \leqslant n$; dla n parzystych $\chi'(\mathcal{K}_n) = n-1$, dla n nieparzystych $\chi'(\mathcal{K}_n) = n$

4.53 **a)** $\chi'(C_{2k}) = 2$, $\chi'(C_{2k-1}) = 3$, **b)** $\chi'(W_n) = n-1$, **c)** $\chi'(K_{2k}) = 2k-1$, $\chi'(K_{2k-1}) = 2k-2$, **d)** $\chi'(\text{graf Petersena}) = 4$, **e)** $\chi'(\text{graf Grötzscha}) = 5$.

4.55 Należy znaleźć liczbę chromatyczną grafu $\mathcal{G} = (V, E)$, gdzie V jest zbiorem przedmiotów. Krawędzią połączone są wierzchołki odpowiadające zajęciom, które nie mogą odbywać się w tym samym czasie. Podaną w zadaniu tabelkę można potraktować jak macierz sąsiedztwa grafu prostego. W tym przypadku otrzymamy $\chi(\mathcal{G}) = 3$.

4.56 4.