CAŁKI NIEOZNACZONE

Definicja 1. *Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale A, jeżeli*

$$\bigwedge_{x\in A} F'(x) = f(x).$$

Zauważmy, że

$$[\sin x]' = \cos x, \quad [\sin x + 3]' = \cos x, \qquad [\sin x - \pi]' = \cos x.$$

Zatem funkcją pierwotną funkcji $f(x) = \cos x$ jest każda funkcja postaci: $F(x) = \sin x + C, C \in R$.

Twierdzenie 1. *Jeżeli F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale A, to*

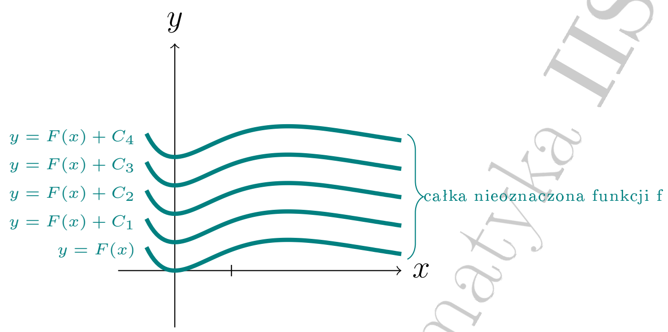
- *funkcja $G(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ jest też funkcją pierwotną funkcji f na A;*
- *każdą funkcję pierwotną G funkcji f na A można przedstawić w postaci $F(x)+C_0$, $C_0 \in \mathbb{R}$ jest stosownie dobraną stałą.*

Wszystkie funkcje pierwotne funkcji f w przedziale A mają zatem postać $F(x) + C$, gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f w przedziale A, C jest dowolną stałą, i tylko takie funkcje są funkcjami pierwotnymi funkcji f.

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale A, to ma funkcję pierwotną na tym przedziale.*

Definicja 2. *Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale A. Całką nieoznaczoną z funkcji f na przedziale A nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f i oznaczmy*

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$



Z definicji wynikają następujące własności:

- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
- $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

PODSTAWOWE WZORY RACHUNKU CAŁKOWEGO:

☞ $\displaystyle\int 0\, dx = C;\ x \in \mathbb{R};$

☞ $\displaystyle\int 1\, dx = x + C;\ x \in \mathbb{R};$

- ☞ $\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$; zakres zmiennej x zależy od α;
- ☞ $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$; $x \neq 0$;
- ☞ $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; $a > 0, a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$;
- ☞ $\int e^x \, dx = e^x + C$; $x \in \mathbb{R}$;
- ☞ $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$; $x \in \mathbb{R}$;
- ☞ $\int \cos x \, dx = \sin x + C$; $x \in \mathbb{R}$;
- ☞ $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$; $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- ☞ $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + C$; $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- ☞ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$; $x \in (-1, 1)$;
- ☞ $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C$; $x \in \mathbb{R}$.

W powyższych wzorach symbol C oznacza dowolną stałą rzeczywistą.

Twierdzenie 3. *Niech funkcje f i g mają funkcje pierwotne oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas:*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

Uwaga 1. *Wzór ten jest prawdziwy dla dowolnej liczby składników.*

Twierdzenie 4. *Niech funkcja F będzie funkcją pierwotną funkcji f. Wówczas:*

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C,$$

gdzie symbol C oznacza dowolną stałą rzeczywistą.

Twierdzenie 5 (Całkowanie przez części)**.** *Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to*

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx.$$

Twierdzenie 6 (Całkowanie przez podstawienie)**.** *Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to R$ ma funkcję pierwotną F, a funkcja $g : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ jest różniczkowalna, to funkcją pierwotną funkcji $f(g(x))g'(x)$ jest funkcja $F \circ g$ oraz*

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(t) dt, \qquad \text{gdzie} \quad t = g(x).$$

Uwaga 2. *Czasem w obliczeniu całki $\int f(x)dx$ wygodne jest podstawienie $x = g(t)$ i wtedy*

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

Ponadto z powyższego twierdzenia wynikają następujące, ważne w zastosowaniach, wzory:

☞ Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale A oraz $f(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in A$, to

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C.$$

☞ Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale A oraz $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in A$, to

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

W powyższych wzorach symbol C oznacza dowolną stałą rzeczywistą.

Całkowanie funkcji wymiernych

Przypomnimy teraz definicje rzeczywistych ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju .

Funkcja wymierną postaci

$$\frac{A}{(x-a)^n},$$

gdzie $A, a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ nazywamy rzeczywistym ułamkiem prostym pierwszego rodzaju.

Funkcję wymierną postaci

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$$

gdzie $A, B, p, q \in \mathbb{R}$, $p^2 - 4q < 0$, zaś $n \in \mathbb{N}$ nazywamy rzeczywistym ułamkiem prostym drugiego rodzaju.

✓ Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \begin{cases} A\ln|t| + C = A\ln|x-a| + C, & n = 1; \\ A\dfrac{t^{1-n}}{1-n} + C = \dfrac{A}{1-n}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} + C, & n > 1. \end{cases}$$

Powyższą całkę obliczamy stosując podstawienie $t = x - a$.

✓ Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

Dla $n = 1$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}dx.$$

Pierwszą z całek obliczamy przez podstawienie $t = x^2 + px + q$ otrzymując

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \ln|x^2+px+q| + C.$$

Aby obliczyć drugą całkę zauważmy, że

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{\triangle}{4}.$$

Zatem kładąc $x+\frac{p}{2}=\sqrt{-\frac{\triangle}{4}}t$ mamy

$$\int\frac{1}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\sqrt{-\frac{\triangle}{4}}}{\left(-\frac{\triangle}{4}\right)(t^2+1)}dt$$

$$=\left(-\frac{\triangle}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\int\frac{1}{t^2+1}dt=\left(-\frac{\triangle}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{arc\,tg}t+C$$

$$=\left(-\frac{\triangle}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{-\frac{\triangle}{4}}}+C$$

gdzie $\triangle=p^2-4q$.

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{2\sqrt{4q-p^2}}{4q-p^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Dla $n>1$

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx.$$

Pierwszą z całek obliczamy analogicznie jak wyżej stosując podstawienie $t=x^2+px+q$. Mamy

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{1}{1-n}(x^2+px+q)^{1-n}+C.$$

Podobnie obliczamy drugą całkę, tzn. stosujemy podstawienie $x+\frac{p}{2}=\sqrt{-\frac{\triangle}{4}}t$

$$\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{\sqrt{-\frac{\triangle}{4}}}{\left(-\frac{\triangle}{4}\right)^n(t^2+1)^n}dt$$

$$=\left(-\frac{\triangle}{4}\right)^{\frac{1}{2}-n}\int\frac{1}{(t^2+1)^n}dt$$

gdzie $\triangle=p^2-4q$. Następnie obliczamy ostatnią całkę stosując wzór rekurencyjny

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}},n\geq 2.$$

Rozważmy funkcję wymierną

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

gdzie P i Q są wielomianami (odpowiednio stopni r i m), określoną dla x takich, że $Q(x)\neq 0$. Jeżeli

- $r<m$, to f nazywamy funkcją wymierną właściwą

- $r \geq m$, to f nazywamy funkcją wymierną niewłaściwą; wtedy dzieląc wielomian P przez Q otrzymujemy rozkład:
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$
gdzie S jest wielomianem stopnia $r - m$, a R jest wielomianem stopnia mniejszego niż m.

Przypomnijmy następujące twierdzenie

Twierdzenie 7. *Niech $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ będzie niezerową funkcją wymierną właściwą. Załóżmy, że mianownik Q ma następujący rozkład na rzeczywiste czynniki nierozkładalne:*

$$Q(x) = a_n(x - a_1)^{k_1}...(x - a_m)^{k_m} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}...(x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}.$$

Wówczas $f(x)$ jest sumą $n_1 = k_1 + ... + k_m$ rzeczywistych ułamków pierwszego rodzaju oraz sumą $n_2 = l_1 + ... + l_s$ rzeczywistych ułamków drugiego rodzaju,
to znaczy:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{A_{11}}{x - a_1} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} + ... + \frac{A_{m1}}{x - a_m} + ... + \frac{A_{mk_m}}{(x - a_m)^{k_m}} + \\ & + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + ... + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + ... \\ & + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2 + p_sx + q_s} + ... + \frac{B_{sl_s}x + C_{sl_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}}. \end{aligned}$$

Powyższy rozkład jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności składników.

☞ Jeżeli $r < m$, to zgodnie z powyższym rozkładem oraz na mocy addytywności całki, całkę z funkcji f sprowadza się do obliczenia całek

$$\int \frac{A}{(x - a)^n} dx \qquad \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} dx.$$

☞ Jeżeli $r \geq m$, to funkcja wymierna f sprowadza się do sumy wielomianu S i funkcji wymiernej właściwej $\frac{R}{Q}$. Obliczenie całki z funkcji f, na mocy addytywności całki, sprowadza się wówczas do obliczenia całek postaci:

$$\int S(x)dx \qquad \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

czyli do obliczenia całki z wielomianu oraz całki z funkcji wymiernej właściwej.

Całkowanie pewnych funkcji niewymiernych

✓ Całka typu $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx$; $ad - bc \neq 0$, gdzie $R(u, v)$ jest funkcją wymierną względem zmiennych u, v. Do całki tej stosujemy podstawienie:

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}},$$

w wyniku którego otrzymujemy całkę funkcji wymiernej t, którą potrafimy już obliczyć.

✓ Całkę typu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

znajdujemy przekształcając trójmian będący w mianowniku do postaci kanonicznej oraz korzystając z wzoru

- $a<0, \triangle \neq 0$:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k-t^2}} = \arcsin \frac{t}{\sqrt{k}} + C; k>0.$$

–

- $a>0, \triangle \neq 0$:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k}} = \ln|t+\sqrt{t^2+k}| + C; k \neq 0.$$

Powyższą całkę uzyskujemy stosując podstawienie Eulera, informacje na temat tego podstawienia dostępne są w literaturze.

Całkowanie funkcji trygonometrycznych

✓ **Całka typu** $\int R(\sin x, \cos x)dx$, gdzie jest $R(u,v)$ funkcją wymierną zmiennych u, v.
Przez podstawienie

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad (-\pi < x < \pi)$$

sprowadzamy całkę $\int R(\sin x, \cos x)dx$ do całki z funkcji wymiernej zmiennej t.
Korzystamy przy tym z następujących tożsamości:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

✓ **Całka typu** $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)dx$, gdzie jest $R(u,v,z)$ funkcją wymierną trzech zmiennych.
Przez podstawienie

$$t = \operatorname{tg} x, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

sprowadzamy tę całkę do całki z funkcji wymiernej zmiennej t.
Korzystamy przy tym z następujących tożsamości:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

✓ **Całka typu** $\displaystyle\int \sin^m x \cos^n x dx$, m, n – liczby naturalne.
Oznaczmy powyższą całkę przez $I_{m,n}$. W zależności od parzystości m i n, mamy następujące przypadki:

- m i n są liczbami parzystymi – całki typu 2.
- $m = 2k+1$, tzn. jest liczbą nieparzystą

$$I_{m,n} = \int \sin^{2k} x \sin x \cos^n x dx = \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \sin x dx$$

i stosujemy podstawienie $t = \cos x$;

- $n = 2k+1$ jest liczbą nieparzystą, wtedy

$$I_{m,n} = \int \cos^{2k} x \cos x \sin^m x dx = \int (1-\sin^2 x)^k \sin^m x \cos x dx$$

i stosujemy postawienie $t = \sin x$.

✓ **Całka typu** $\int \sin(mx)\cos(nx)dx$, $\int \sin(mx)\sin(nx)dx$, **i** $\int \cos(mx)\cos(nx)dx$, gdzie m, n są stałymi, wyznaczamy wykorzystując tożsamości:

- $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right];$
- $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right];$
- $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right].$

ZADANIA

Zadanie 1. Wyznaczyć całki nieoznaczone:

1. $\int \left(x^5 - 3x^4 + x^2 + x - 4\right) dx,$
2. $\int \left(x^2 - 3x + 1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx,$
3. $\int \left(e^x - \frac{2}{x} + \frac{3}{1+x^2}\right) dx,$
4. $\int \left(x\sqrt[5]{x} - \frac{2}{\sqrt{x^3}}\right) dx,$
5. $\int \frac{x - x^2\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}{x^2} dx,$
6. $\int \operatorname{tg}^2 x dx,$
7. $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \sin x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx.$

Zadanie 2. Wyznaczyć całki korzystając ze twierdzenia o całkowaniu przez części

1. $\int x \ \sin x \ dx,$
2. $\int x \ \sin 5x \ dx,$
3. $\int x \ \cos 3x \ dx,$
4. $\int x^2 \ \cos x \ dx,$
5. $\int x \ e^x \ dx,$
6. $\int x \ e^{4x} \ dx,$
7. $\int x \ e^{-2x} \ dx,$
8. $\int x^2 \ e^x \ dx,$
9. $\int x \ \ln x \ dx,$
10. $\int \ln x \ dx,$
11. $\int x^2 \ \ln x \ dx,$
12. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx,$
13. $\int \sqrt{x} \ \ln x \ dx,$
14. $\int \operatorname{arctg} x \ dx,$
15. $\int x \operatorname{arctg} x \ dx,$
16. $\int \arcsin x \ dx,$
17. $\int e^x \sin x \ dx,$
18. $\int \frac{x}{\sin^2 x} \ dx,$
19. $\int \sin(\ln x) \ dx,$
20. $\int x \ln^3 x \ dx,$
21. $\int \ln(1+x) \ dx.$

Jeżeli w odpowiedzi jest $+C$, to znaczy że brak jest odpowiedzi. **Odpowiedzi:** **1)** $-x\cos x + \sin x + C$ **2)** $-\frac{x}{5}\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x + C$ **3)** $+C$ **4)** $x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$, **5)** $e^x(x-1)+C$ **6)** $+C$ **7)** $+C$ **8)** $e^x(x^2-2x+2)+c$ **9)** $\frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1)+C$ **10)** $x\ln x - x + C$ **11)** $\frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1)+C$ **12)** $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C$ **13)** $+C$ **14)** $x\operatorname{arctg} x - \ln(x^2+1) + C$ **15)** $\frac{1}{2}(x^2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x - x) + C$ **16)** $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$ **17)** $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$ **18)** $-x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C$ **19)** $\frac{1}{2}x\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C$ **20)** $\frac{1}{2}x^2\ln^3 x - \frac{3}{4}x^2\ln^2 x + \frac{3}{4}x^2 \ln x - \frac{3}{8}x^2 + C$

Zadanie 3. Wyznaczyć całki korzystając ze twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie

1. $\int \cos x \ e^{\sin x} \ dx,$
2. $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \ dx,$
3. $\int x^2 \ e^{x^3} \ dx,$
4. $\int \operatorname{tg} x \ dx,$
5. $\int x^5 \operatorname{tg}(x^6) \ dx,$
6. $\int \frac{x^3}{\cos^2 x^4} \ dx,$

7. $\int \frac{dx}{x\ln x}$,

8. $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$,

9. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)}\, dx$,

10. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$,

11. $\int e^x\ (e^x-1)^9\ dx$,

12. $\int x\sqrt{1+x^2}\ dx$,

13. $\int x\ \sin(x^2+1)\ dx$,

14. $\int x^4\ \cos(x^5+8)\ dx$,

15. $\int \sqrt{2x+1}\ dx$,

16. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\ dx$,

17. $\int \cos(4x+5)\ dx$,

18. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\ dx$,

19. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}\ dx$,

20. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\ dx$,

21. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+1)}$,

22. $\int \frac{1+\ln x}{x\ln x} dx$,

23. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x+5}}{2\cos^2 x} dx$,

24. $\int \frac{\ln^3(\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{ctg} x \sin^2 x} dx$,

25. $\int 2\sin 2x e^{\cos x}\ dx$,

26. $\int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2} dx$,

27. $\int x\ e^{x^2+3}(x^2+3)\ dx$,

28. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x e^{\operatorname{arc\,tg}}}{1+x^2}\ dx$,

29. $\int x^3 \ln(1+x^2)\ dx$.

Jeżeli w odpowiedzi jest $+C$, to znaczy że brak jest odpowiedzi. **Odpowiedzi: 1)** $e^{\sin x}+C$, **2)** $e^{-\frac{1}{x}}+C$ **3)** $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$ **4)** $-\ln|\cos x|+C$ **5)** $-\ln|\cos x^6|+C$ **6)** $\frac{1}{4}\operatorname{tg} x^4+C$ **7)** $\ln|\ln x|+C$ **8)** $\frac{\ln^2 x}{2}+C$ **9)** $\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+C$ **10)** $\ln|\operatorname{arctg} x|+C$ **11)** $\frac{1}{10}(e^x-1)^{10}+C$ **12)** $\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ **13)** $-\frac{1}{2}\cos(x^2+1)+C$ **14)** $\frac{1}{5}\sin(x^5+8)+C$ **15)** $\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C$ **16)** $\frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}+C$ **17)** $\frac{1}{4}\sin(4x+5)+C$ **18)** $2\sqrt{x^2+4}+C$ **19)** $\frac{1}{2}(x^3-1)^{\frac{2}{3}}+C$ **20)** $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+C$ **21)** $\operatorname{arctg}(\ln x)+C$, **22)** $\ln|\ln x|+\ln|x|+C$ **23)** $\frac{1}{3}\sqrt{(\operatorname{tg} x+5)^3}+C$ **24)** $-\frac{1}{4}\ln^4(\operatorname{ctg} x)+C.$ **25)** $-4e^{\cos x}(\cos x-1)+C$ **26)** $\operatorname{arctg} x\,(\ln(\operatorname{arctg} x)-1)+C$ **27)** $\frac{1}{2}e^{x^2+3}(x^2+2)+C$ **28)** $e^{\operatorname{arctg} x}(\operatorname{arctg} x-1)+C$, **29)** $\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)\left[\left(\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)-1\right)\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{4}(1+x^2)+1\right]+C.$

Zadanie 4. Wyznaczyć całki nieoznaczone z funkcji wymiernych właściwych

1. $\int \frac{6dx}{x+14}$,

2. $\int \frac{dx}{4x^2-12x+9}$,

3. $\int \frac{5x+7dx}{x^2+2x-3}$,

4. $\int \frac{5x+11}{x^2+8x+7}dx$,

5. $\int \frac{2x-8}{x^2-8x+19}dx$,

6. $\int \frac{x-4}{x^2-8x+19}dx$,

7. $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$,

8. $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$,

9. $\int \frac{2x-10}{x^2-8x+19}dx$,

10. $\int \frac{4x-6}{x^2+4x+13}dx$.

Odpowiedzi: 1) $6\ln|x+14|+C$ **2)** $\frac{1}{2(2x-3)}+C$ **3)** $3\ln|x-1|+2\ln|x+3|+C$ **4)** $\ln|x+1|+4\ln|x+7|+C$ **5)** $\ln|x^2-8x+19|+C$ **7)** $\operatorname{arctg}(x-3)+C$ **8)** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+C$

9) $\ln|x^2-8x+19| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{\sqrt{3}} + C$ **10)** $2\ln|x^2+4x+13| - \frac{14}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C.$

Zadanie 5. Wyznacz całki z funkcji wymiernych właściwych– cd.

1. $\int \frac{1}{x(x+1)} dx,$
2. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4+x^2} dx,$
3. $\int \frac{dx}{x^4+3x^2},$
4. $\int \frac{7x^2-1}{(x^2-1)(x^2+5)} dx,$
5. $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+1)},$
6. $\int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx,$
7. $\int \frac{7x^2+7x-176}{(x-4)(x^2-5x-14)} dx,$
8. $\int \frac{3x^2-5x+2}{(x^2+3)(x-2)} dx,$
9. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x^3-x^2)} dx.$

Odpowiedzi:

1) $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$ **2)** $\ln|x| - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg}(x) + C$ **3)** $-\frac{1}{3x} - \frac{\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$ **4)** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{6}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C$ **5)** $\frac{\sqrt{2}}{12} \ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x + C$ **6)** $\frac{1}{1-x} + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + C$ **7)** $-3\ln|x+2| + 2\ln|x-4| + 8\ln|x-7| + C$, **8)** $\frac{4}{7}\ln|x-2| + \frac{17}{14}\ln|x^2+3| - \frac{1}{7\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

Zadanie 6. Wyznaczyć całki z funkcji wymiernych niewłaściwych

1. $\int \frac{x^3+1}{x^2+2} dx,$
2. $\int \frac{x^3+4x-14}{x-2} dx,$
3. $\int \frac{x^3+3x^2+7x+4}{x^2+2x+5} dx,$
4. $\int \frac{x^4+x^3-x^2+x-3}{x^2+x-2} dx,$
5. $\int \frac{x^3-2x^2-3}{x^2-1} dx,$
6. $\int \frac{2x^4+8x^3+11x^2+8x+12}{x^2+4x+5} dx,$
7. $\int \frac{x^5+2}{x^4-1} dx,$
8. $\int \frac{x^3-4}{x^3-4x} dx,$
9. $\int \frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)} dx.$

Odpowiedzi:

1) $\frac{x^2}{2} - \ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$ **2)** $\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x + 2\ln|x-2| + C$ **3)** $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C$ **4)** $\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + C$ **5)** $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2\ln|x-1| + 3\frac{7}{2}\ln|x+1| + C$, **6)** $\frac{2}{3}x^3 + x + 2\ln|x^2+4x+5| - \operatorname{arctg}(x+2) + C.$

Zadanie 7. Obliczyć całki:

1. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$,
2. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{3x+1}}dx$,
3. $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x}}dx$,
4. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$,
5. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\frac{dx}{(x-1)^2}$,
6. $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx$,
7. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$,
8. $\int \frac{1}{\sqrt{2-2x-x^2}}dx$,
9. $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

Odpowiedzi:
1) $2\sqrt{x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$ **2)** $\frac{2}{135}(3x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{81}(3x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{20}{27}(3x+1)^{\frac{1}{2}}+C$ **3)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\right|+C$ **4)** $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right|-\ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right|+C$ **5)** $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C$, **6)** $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C$, **7)** $\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$, **8)** $\arcsin(x+1)+C$, **9)** $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+\frac{3}{2}\arcsin 2x+C$.

Zadanie 8. Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

1. $\int \cos^2 x dx$,
2. $\int \frac{dx}{(1+\cos x)\sin x}$,
3. $\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+1}$,
4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$,
5. $\int \sin^3 x dx$,
6. $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$,
7. $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$,
8. $\int \sin 3x\cos 5x dx$,
9. $\int \cos 3x\cos 6x dx$,
10. $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$,
11. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$,
12. $\int \frac{dx}{\sin x}$,
13. $\int \frac{dx}{\cos x}$,
14. $\int \sqrt{\cos x}\sin^3 x dx$,
15. $\int \frac{dx}{4+\sin^2 x}$,
16. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx$,
17. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$,
18. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$,
19. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$.

Jeżeli w odpowiedzi jest $+C$, to znaczy że brak jest odpowiedzi. **Odpowiedzi:**
2) $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+\frac{1}{4}(\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2+C$ **3)** $-\frac{1}{3}\ln\frac{|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2|}{|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1|}+C$ **4)** $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$ **5)** $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$ **6)** $+C$ **7)** $\frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x-5)+C$ **8)** $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$ **9)** $\frac{1}{18}\sin 9x+\frac{1}{6}\sin 3x+C$ **10)** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{3}\right)+C$ **11)** $\arcsin(\sin x)+C$ **12)** $\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+C$ **13)** $\ln|\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})|+C$ **14)** $\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}}x-\frac{2}{7}\cos^{\frac{7}{2}}x+C$ **15)** $\frac{\sqrt{5}}{10}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{tg}x)+C$ **16)** $-\frac{1}{4}(\sin x)^{-4}+\frac{1}{2}(\sin x)^{-2}+C$ **17)** $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2})+C$ **18)** $3(\sin x)^{\frac{1}{3}}+C$ **19)** $\ln|\operatorname{tg}x|-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2 x}+C$.