Teoria grafów

ostatnia aktualizacja: 19 stycznia 2020 r.

Adam Gregosiewicz

Zadanie 1. Wykazać, że w dowolnym grafie prostym, który ma przynajmniej dwa wierzchołki, pewne dwa wierzchołki mają ten sam stopień.

Zadanie 2. Załóżmy, że dla grafu prostego G istnieje taka liczba całkowita $k \geqslant 2$, że dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$ zachodzi $\deg v \geqslant k$. Wykazać, że graf G zawiera cykl o długości co najmniej $k+1$.

Zadanie 3. Niech G będzie grafem prostym, który nie zawiera jako podgrafu K_3. Załóżmy, że $|V(G)| = 2k$ dla pewnego $k \geqslant 1$. Wykazać, że $|E(G)| \leqslant k^2$ i sprawdzić, że tego oszacowania nie można poprawić.

Zadanie 4. Załóżmy, że graf G jest drzewem i $|V(G)| \geqslant 2$. Wykazać, że w grafie G istnieją co najmniej dwa wierzchołki o stopniu równym 1.

Zadanie 5. Wykazać, że w dowolnym drzewie istnieje dokładnie jedno centrum, albo dwa sąsiednie centra.

Uwaga. Dla grafu spójnego *centrum* nazywamy dowolny wierzchołek, którego maksymalna odległość do dowolnego innego wierzchołka tego grafu jest możliwie najmniejsza.

Zadanie 6. Czy każde drzewo o przynajmniej dwóch wierzchołkach jest grafem dwudzielnym?

Zadanie 7. Narysuj graf, który ma 5 wierzchołków oraz

a) nie jest hamiltonowski i nie jest eulerowski,
b) nie jest hamiltonowski, ale jest eulerowski,
c) jest hamiltonowski i nie jest eulerowski,
d) jest hamiltonowski i eulerowski.

Zadanie 8. Niech G będzie prostym, planarnym grafem spójnym. Wykazać, że jeżeli $|V(G)| \geqslant 3$, to

$$|E(G)| \leqslant 3|V(G)| - 6.$$

Zadanie 9. Załóżmy, że graf G jest spójny i planarny. Wykazać, że jeżeli $|V(G)| \geqslant 1$, to istnieje taki $v \in V(G)$, że $\deg v \leqslant 5$.

Zadanie 10. Załóżmy, że graf planarny G nie ma podgrafu, który jest trójkątem K_3. Wykazać, że $\chi(G) \leqslant 4$.

Zadanie 11. Na wymyślonych przez siebie grafach wykonać algorytmy Fleury'ego i Dijkstry.