LICZBY ZESPOLONE

Definicja 1. *Liczbą zespoloną nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych* (x, y). *Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy symbolem* $\mathbb{C}$, *tzn.*

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Niech $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$ będą liczbami zespolonymi. Określmy

- równość liczb zespolonych: $z_1 = z_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} x_1 = x_1 \wedge y_1 = y_2$;
- sumę liczb zespolonych: $z_1 + z_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- iloczyn liczb zespolonych : $z_1 \cdot z_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Własności dodawania liczb zespolonych:

- dodawanie liczb zespolonych jest przemienne i łączne, tzn.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3);$$

- istnieje element neutralny dodawania: jest nim liczba $\mathbf{0} = (0, 0)$, która dla każdej liczby zespolonej spełnia warunek $z + \mathbf{0} = z$;
- dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y)$ istnieje liczba zespolona $-z = (-x, -y)$ spełniająca równość: $z + (-z) = \mathbf{0}$ ($-z$ nazywamy elementem przeciwnym do z).

Własności mnożenia liczb zespolonych:

- mnożenie liczb zespolonych jest przemienne i łączne, tzn.

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3);$$

- istnieje element neutralny mnożenia: jest nim liczba $\mathbf{1} = (1, 0)$, która dla każdej liczby zespolonej spełnia warunek $z \cdot \mathbf{1} = z$;
- dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y)$ istnieje liczba zespolona $\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ spełniająca równość: $z \cdot \frac{1}{z} = \mathbf{1}$ ($\frac{1}{z}$ nazywamy elementem odwrotnym do z).

Ponadto mnożenie liczb zespolonych jest rozdzielne względem dodawania, tzn.

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Definicja 2.
- *Różnicę liczb zespolonych* z_1 *i* z_2 *definiujemy następująco*

$$z_1 - z_2 \overset{def}{=} z_1 + (-z_2);$$

- *iloraz liczb zespolonych* z_1 *i* z_2 *definiujemy następująco:*

$$\frac{z_1}{z_2} \overset{def}{=} z_1 \cdot \frac{1}{z_2}, z_2 \neq (0, 0).$$

Uwaga 1. *Zbiór* $\{(x, 0),\ x \in R\}$ *będziemy utożsamiać ze zbiorem liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$. *Zamiast* $(x, 0)$ *będziemy pisać krótko* x. *Zbiór liczb rzeczywistych jest podzbiorem zbioru liczb zespolonych:* $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Definicja 3. *Liczbę zespoloną* $(0, 1)$ *nazywamy jednostką urojoną i oznaczmy symbolem* i.

$$i \overset{def}{=} (0, 1).$$

Zauważmy, że

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1.$$

Twierdzenie 1. *Każdą liczbę zespoloną $z = (x, y)$ można jednoznacznie zapisać jako $z = x+iy,\ \ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$. Taką postać nazywamy postacią algebraiczną liczby zespolonej.*

- Liczbę x nazywamy częścią rzeczywistą liczby zespolonej z

$$\operatorname{Re} z \overset{def}{=} x.$$

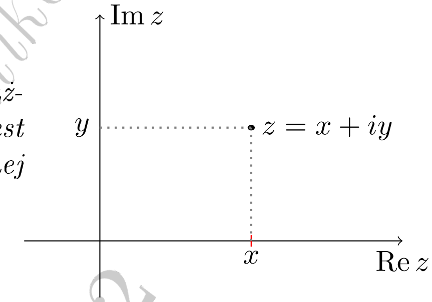
- Liczbę y nazywamy częścią urojoną liczby zespolonej z

$$\operatorname{Im} z \overset{def}{=} y.$$

Liczby zespolone postaci $x + 0i$ zapisujemy jako x i utożsamiamy z liczbami rzeczywistymi. Liczba zespolona jest równa zero, wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Re} z = 0$ i $\operatorname{Im} z = 0$.

Definicja 4. *Płaszczyzną zespoloną nazywamy taką płaszczyznę, w której obieramy układ prostopadłych osi liczbowych: oś poziomą zwaną osią rzeczywista i oznaczaną $\operatorname{Re} z$ oraz oś pionową zwaną osią urojoną i oznaczaną $\operatorname{Im} z$.*

Uwaga 2. *W interpretacji geometrycznej każdej liczbie zespolonej $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, jest przyporządkowany punkt płaszczyzny zespolonej o współrzędnych (x, y) i na odwrót.*



Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają one równe części rzeczywiste i równe części urojone, tzn.

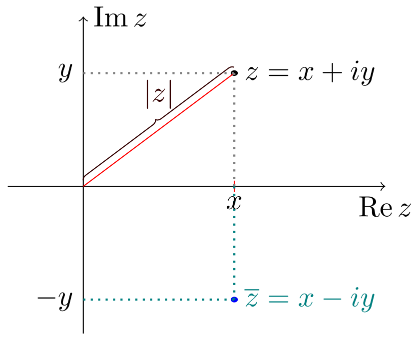
$$z_1 = z_2 \iff (\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2).$$

Definicja 5. *Liczbą sprzężoną liczby zespolonej $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę $\overline{z}$ określoną wzorem:*

$$\overline{z} \overset{def}{=} x - iy.$$

Definicja 6. *Modułem liczby zespolonej $z = x + iy\ \ x, y \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę rzeczywistą $|z|$ określoną wzorem:*

$$|z| \overset{def}{=} \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Własności sprzężenia i modułu liczb zespolonych:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
- $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ \ z_2 \neq 0$,
- $\overline{\overline{z}} = z$,
- $|z| = |\overline{z}| = |-z|$,
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$,
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0$.

Niech będą dane dwie liczby zespolone w postaci algebraicznej $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczby zespolone wykonywane jest tak, jak dodawanie, odejmowanie i mnożenie wyrażeń algebraicznych pamiętając, że $i^2 = -1$. Tak więc:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

W przypadku dzielenia, stosujemy wzór: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ i doprowadzamy ilorazu $\frac{z_1}{z_2}$ do postaci $\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$, oczywiście zakładając, że $z_2 \neq 0$. Mamy

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|z_2|^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{|z_2|^2}.$$

Definicja 7. *Argumentem liczby zespolonej (oznaczenie* $\arg z$*)* $z = x + iy \neq 0,\ \ x, y \in \mathbb{R}$ *nazywamy każdą liczbę* $\varphi \in \mathbb{R}$ *spełniającą warunki*

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} \quad i \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Uwaga 3. *Przyjmujemy, że argumentem liczby* $z = 0$ *jest każda liczba* $\varphi \in \mathbb{R}$.

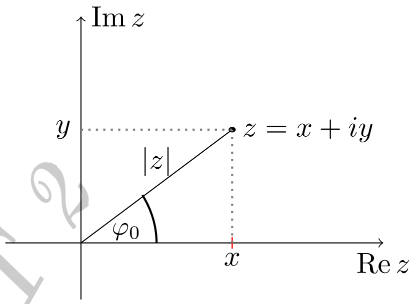
Definicja 8. *Argumentem głównym liczby zespolonej* $z \neq 0$ *nazywamy ten argument* φ *liczby* z*, który spełnia warunek* $\varphi \in < 0, 2\pi)$ *i stosujemy oznaczenie* $\operatorname{Arg} z = \varphi_0$.

Uwaga 4. *Przyjmujemy, że argumentem głównym liczby* $z = 0$ *jest* 0.

Każdy argument liczby zespolonej $z \neq 0$ można zapisać

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ przy czym } \quad \operatorname{Arg} z \in < 0, 2\pi).$$

Uwaga 5. *Argument główny liczby zespolonej* z *można interpretować geometrycznie jako kąt* φ_o *jaki wektor* $\overrightarrow{Oz}$ *tworzy z dodatnim kierunkiem osi rzeczywistej.*



Argument główny liczby zespolonej można wyznaczyć także ze wzoru:

- Jeśli $x \neq 0$

$$\varphi_o = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + k\pi,$$

  gdzie

$$k = \begin{cases} 0 & \text{dla } x > 0 \text{ i } y \geq 0, \\ 1 & \text{dla } x < 0 \text{ i dowolnego } y, \\ 2 & \text{dla } x > 0 \text{ i } y < 0. \end{cases}$$

- Jeśli $x = 0$ i $y \neq 0$, to $\varphi_o = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{dla } y > 0, \\ \frac{3\pi}{2} & \text{dla } y < 0. \end{cases}$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Twierdzenie 2. *Każdą liczbę zespoloną* z *można przedstawić w postaci trygonometrycznej:*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie liczba φ *jest jednym z argumentów.*

Twierdzenie 3. *Liczby zespolone* z_1 *i* z_2 *są równe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$|z_1| = |z_2| = 0 \quad \textit{albo} \quad |z_1| = |z_2| \quad \textit{oraz} \quad \arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi, \textit{ dla pewnego } k \in \mathbb{Z}.$$

Twierdzenie 4. *Niech* $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *oraz* $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ *będą dowolnymi liczbami zespolonymi. Wówczas:*

- $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right];$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right].$

Twierdzenie 5 (Wzór de Moivre'a). *Niech* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *będzie dowolna liczba zespoloną oraz niech* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy*

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

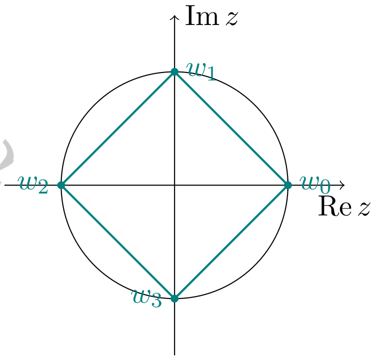
Definicja 9. *Pierwiastkiem stopnia* $n \in \mathbb{N}$ *nazywamy każdą liczbę zespolona* w *spełniająca warunek* $w^n = z$.

Twierdzenie 6. *Każda liczba zespolona* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *ma dokładnie* n *pierwiastków stopnia* n. *Mają one postać*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

Uwaga 6.

- *Pierwiastek, który otrzymujemy z powyższego wzoru dla* $k = 0$ *będziemy nazywać głównym pierwiastkiem stopnia* n *z liczby* z.
- *Zbiór pierwiastków nie zależy od wyboru argumentu liczby zespolonej* z.
- *Zbiór wszystkich pierwiastków z liczby zespolonej* z *oznaczamy symbolem* $\sqrt[n]{z}$.
- *Zbiór pierwiastków stopnia* $n \geq 3$ *z liczby zespolonej* z *w interpretacji geometrycznej pokrywa się ze zbiorem wierzchołków* n*-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu* $\sqrt[n]{|z|}$ *i środku w punkcie* $(0, 0)$.



Postać wykładnicza liczby zespolonej

Definicja 10. *Dla* $\varphi \in \mathbb{R}$ *liczbę zespoloną* $\cos\varphi + i\sin\varphi$ *oznaczamy krótko przez* $e^{i\varphi}$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Twierdzenie 7. *Każdą liczbę zespoloną* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *gdzie* $|z| \geq 0$ *oraz* $\varphi \in \mathbb{R}$ *można zapisać w postaci wykładniczej*

$$z = |z|e^{i\varphi}.$$

Twierdzenie 8. *Niech* $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$ *i* $z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$, *gdzie* $|z_1|, |z_2| \geq 0$ *i* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ *będą liczbami zespolonymi. Ponadto niech* k *będzie liczbą całkowitą. Wtedy:*

- $z_1 = z_2$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $|z_1| = |z_2| = 0$ *albo* $|z_1| = |z_2|$ *i* $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\overline{z_1} = |z_1|e^{-i\varphi_1}$,
- $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{|z_1|}e^{-i\varphi_1}, z_1 \neq 0,$
- $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$
- $-z_1 = |z_1|e^{i(\varphi_1+\pi)},$
- $z_1^k = |z_1|^k e^{ik\varphi_1},$

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$, $z_2 \neq 0$.

Wielomian zespolony

Definicja 11. *Wielomianem zespolonym stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazywamy funkcję $W : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ określoną wzorem:*

$$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + ... + c_1 z + c_0,$$

gdzie $c_k \in \mathbb{C}$ dla $0 \leq k \leq n$ oraz $c_n \neq 0$. Liczby c_k, gdzie $0 \leq k \leq n$ nazywamy współczynnikami wielomianu W.

Przypominamy, że

Definicja 12. *Liczba z_0 jest pierwiastkiem wielomianu $W(z)$, jeśli $W(z_0) = 0$.*

Twierdzenie 9. *Każdy wielomian zespolony stopnia dodatniego ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.*

Twierdzenie 10. *Każdy wielomian zespolony stopnia $n \in N$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (uwzględniając pierwiastki wielokrotne.)*
Niech wielomian W stopnia $n \in N$ na pierwiastki zespolone z_j o krotnościach odpowiednio k_j, gdzie $k_j \in \mathbb{N}$ dla $1 \leq j \leq m$ oraz $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$. Wtedy

$$W(z) = c_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} ... (z - z_m)^{k_m},$$

gdzie c_n jest współczynnikiem przy z^n w wielomianie W.

W szczególności wielomian zespolony $W(z) = az^2 + bz + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$ oraz $a \neq 0$ na dwa pierwiastki zespolone:

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad z_1 = \frac{-b + \delta}{2a},$$

gdzie $\Delta = \delta^2 = b^2 - 4ac$.
Dla współczynników rzeczywistych a, b, c możliwe są trzy przypadki:

- jeżeli $\Delta > 0$, to wielomian W ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste,
- jeżeli $\Delta = 0$, to wielomian W ma jeden dwukrotny pierwiastek rzeczywisty $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$,
- jeżeli $\Delta < 0$, to wielomian W nie ma pierwiastków rzeczywistych, ma natomiast dwa pierwiastki zespolone z_1, z_2 spełniające związek $z_1 = \overline{z_2}$,

ZADANIA

Zadanie 1. Wyznaczyć

a) $\operatorname{Re}\left[(1-3i)(3+2i)\right]$, *odp.* 9; **b)** $\operatorname{Im}\left[\frac{1-3i}{1+2i}\right]$, *odp.* -1;

c) $\operatorname{Re}\left[\frac{(i+1)^2+2i}{(1-i)^2-2i}\right]$, *odp.* -1;. **d)** $\operatorname{Re}\left[(2+i)(-3i+4)-2i-5\right]$, *odp.* 6;

e) $\operatorname{Im}\left[(3-2i)^2 - \frac{1+2i}{1-4i}\right]$, *odp.* $-\frac{210}{17}$.

Zadanie 2. Niech $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Wyznaczyć

a) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$, *odp.* $\frac{x}{x^2+y^2}$; **b)** $\operatorname{Im}(z^2)$, *odp.* $2xy$;

c) $\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)$, *odp.* $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; **d)** $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z-i}\right)$, *odp.* $\frac{x}{x^2+(y-1)^2}$.

Zadanie 3. Wykazać, że suma i iloczyn liczb zespolonych sprzężonych jest liczba rzeczywistą.

Zadanie 4. Udowodnić, że

a) $\mathrm{Re}\,(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Re}\,(\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2)$, **b)** Jeżeli $|z| = 1$ to $\bar{z} = \frac{1}{z}$. **c)** $\mathrm{Im}\, z = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0,\ z \neq -1.$

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie z dla, których wyrażenie $w = \frac{z}{z+i}$ jest

a) liczbą rzeczywistą, **b)** liczbą urojoną.

Zadanie 6. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:

a) $\overline{z}(z+1) - \mathrm{Im}(-z) + 4i^{10} = \frac{2+2i}{1-i}$; *odp.* $z = -2 - 2i \vee z = 1 - 2i$;

b) $|z| - z = 1 + 2i$; *odp.* $z = \frac{3}{2} - 2i$;

c) $z \cdot \overline{z} + 3(z - \overline{z}) = 4 - 3i$; *odp.* $z = \frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2}i \vee z = -\frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2}i$;

d) $|z| + 2iz = 11 + 8i$; *odp.* $z = 4 - 3i$.

Zadanie 7. Naszkicować zbiory liczb zespolonych spełniające podane warunki:

a) $|z - 2i| \le \sqrt{2}\,\mathrm{Im}(z - 2i)$, **b)** $|i - z| \le 4 \wedge \mathrm{Re}(z+1) < 0$, **c)** $|z - 2i| \le 3 \wedge \mathrm{Arg}(z) \le \frac{\pi}{3}$,

Zadanie 8. Podane liczby zespolone przedstawić w postaci trygonometrycznej i wykładniczej:

a) $7 + 7i$, **b)** $-\sqrt{3} - i$, **c)** $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$, **d)** $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, **e)** $-3i$, **f)** $\sqrt{5}$, **g)** $\frac{1}{1+\sqrt{3}i}$.

Zadanie 9. Obliczyć wartość podanych wyrażeń (wynik przedstawić w postaci algebraicznej)

a) $(1 + i\sqrt{3})^6$, *odp.* 2^6; **b)** $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9$, *odp.* 1;

c) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{20}$, *odp.* $2^9(1 - \sqrt{3}i)$; **d)** $\mathrm{Im}\left[\frac{(1+i)^{22}}{(-1-\sqrt{3}i)^6}\right]$, *odp.* -32;

f) $\mathrm{Re}\left[(3+\sqrt{3}i)^6(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)^9\right]$, *odp.* 54; **g)** $\frac{(-1+\sqrt{3}i)^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-\sqrt{3}i)^{15}}{(1+i)^{20}}$, *odp.* -64;

Zadanie 10. Korzystając ze wzoru Moivre'a wyrazić podane funkcje przez $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$:

a) $\cos 3\varphi$, **b)** $\sin 4\varphi$, **c)** $\cos 6\varphi$.

Zadanie 11. Jeśli $z = \cos t + i \sin t$, pokazać, że $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos nt$. Ponadto korzystając z wyprowadzonego wzoru wyrazić funkcję $\cos^5 t$ przez $\cos nt$, .

Zadanie 12. Wyznaczyć wszystkie pierwiastki n-tego stopnia z liczby z, gdzie

a) $z = 3 - 4i$, $n = 2$ *odp.* $\{-2+i, 2-i\}$;

b) $z = -3 - 3\sqrt{3}i$, $n = 4$ *odp.* $\left\{\sqrt[4]{6}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[4]{6}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right), \sqrt[4]{6}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[4]{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right\}$.

c) $z = 64$, $n = 6$ *odp.* $\left\{2,\ 1+\sqrt{3}i,\ -1+\sqrt{3}i,\ -2,\ -1-\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i\right\}$;

d) $z = \frac{8}{i}$, $n = 3$ *odp.* $\left\{2i,\ -\sqrt{3} - i,\ \sqrt{3} - i\right\}$.

Podać interpretację geometryczną na płaszczyźnie zespolonej.

Zadanie 13. Rozwiązać równania

a) $z^2 + 16 = 0$ *odp.* $z_{0,1} = \pm 4i$;

b) $z^3 = (1-i)^4$, *odp.* $z_0 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; $z_1 = -\sqrt[3]{4}$, $z_2 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;

c) $z^3 - 1 = 0$, *odp.* $z_0 = 1$; $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.