Relacje

ostatnia aktualizacja: 8 stycznia 2020 r.

Adam Gregosiewicz

Zadanie 1. Niech
$$m = 2^{13} \cdot 3^5 \cdot 17^{21} \cdot 31^4 \cdot 59^{1000}, \qquad n = 2^4 \cdot 5^{12^3} \cdot 31^{52} \cdot 59^{14}.$$
Znaleźć $\mathrm{NWD}(m,n)$ oraz $\mathrm{NWW}(m,n)$, gdzie NWW jest najmniejszą wspólną wielokrotnością.

Zadanie 2. Rozkładając liczby na czynniki pierwsze, znaleźć $\mathrm{NWD}(m,n)$, gdzie

a) $m = 120$, $n = 162$,
b) $m = 289$, $n = 850$,
c) $m = 2000$, $n = 987$.

Zadanie 3. Wykorzystując algorytm Euklidesa, znaleźć $\mathrm{NWD}(m,n)$, gdzie

a) $m = 72$, $n = 17$,
b) $m = 2000$, $n = 987$,
c) $m = 3000$, $n = 999$,
d) $m = 8359$, $n = 9373$,
e) $m = 21212121$, $n = 12121212$.

Zadanie 4. Wykorzystując rozszerzony algorytm Euklidesa, znaleźć $\mathrm{NWD}(m,n)$ oraz takie liczby s i t, że
$$\mathrm{NWD}(m,n) = s \cdot m + t \cdot n,$$
gdzie

a) $m = 20$, $n = 30$,
b) $m = 35$, $n = 96$,
c) $m = 320$, $n = 30$,
d) $m = 14259$, $n = 3521$.

Zadanie 5. Załóżmy, że
$$k = s \cdot m + t \cdot n$$
dla pewnych liczb całkowitych k, m, n, s, t. Wykazać, że

a) $\mathrm{NWD}(m,n)|k$,
b) wszystkie liczby całkowite a i b spełniające równość
$$k = a \cdot m + b \cdot n$$
są postaci
$$a = s + i \cdot \frac{n}{\mathrm{NWD}(m,n)}, \qquad b = t - i \cdot \frac{m}{\mathrm{NWD}(m,n)}$$
dla $i \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 6. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite a i b, dla których

a) $8a + 3b = 1$,
b) $7a - 11b = 1$,
c) $8a + 3b = 4$,
d) $9a + 6b = 5$,
e) $9a + 3b = 39$,
f) $5a - 3b = 4$.

Zadanie 7. Wykazać, że
$$\mathrm{NWD}(13m + 8n, 5m + 3n) = \mathrm{NWD}(m,n)$$
dla dowolnych $m, n \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 8. Niech m i n będą liczbami całkowitymi. Wykazać, że

a) każdy wspólny dzielnik m i n jest również dzielnikiem $\mathrm{NWD}(m, n)$,
b) $\mathrm{NWD}(km, kn) = k \cdot \mathrm{NWD}(m, n)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$,
c) jeżeli $k|mn$ oraz $\mathrm{NWD}(k, m) = 1$, to $k|n$,
d) jeżeli p jest liczbą pierwszą oraz $p|mn$, to $p|m$ lub $p|n$,
e) jeżeli k jest najmniejszą dodatnią wartością wyrażenia

$$s \cdot m + t \cdot n,$$

to $k = \mathrm{NWD}(m, n)$.

Zadanie 9. Wykazać, że

$$\mathrm{NWD}(m^5, n^5) = \mathrm{NWD}(m, n)^5$$

dla dowolnych $m, n \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 10. Wyznaczyć resztę z dzielenia liczby

$$1^{100} + 2^{100} + 3^{100} + 4^{100} + 5^{100} + 6^{100} + 7^{100} + 8^{100} + 9^{100}$$

przez 5.

Zadanie 11. Wyznaczyć resztę z dzielenia liczby

$$9876^{3456789}(9^{99})^{5555} - 6789^{3414259}$$

przez 14.

Zadanie 12. Sprawdzić, że liczba

a) $5^{36} - 1$ jest podzielna przez 13,
b) $53^{53} - 33^{33}$ jest podzielna przez 10,
c) $7^{222} + 1$ jest podzielna przez 5,
d) $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ jest podzielna przez 13.

Zadanie 13. Wyznaczyć dwie ostatnie cyfry liczby

a) 2^{999},
b) $76^{57} - 57^{76}$.

Zadanie 14. Wyznaczyć ostatnią cyfrę liczby $7^{7^{7^{7}}}$.

Zadanie 15. Wykazać, że liczba naturalna jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr w zapisie dziesiętnym jest podzielna przez 3.

Zadanie 16. Znaleźć regułę podzielności przez 11.

Zadanie 17. Znaleźć liczbę odwrotną do m modulo p, gdzie

a) $m = 22$, $p = 2$,
b) $m = 8$, $p = 21$,
c) $m = 21$, $p = 8$,
d) $m = 50$, $p = 7$.

Zadanie 18. Rozwiązać kongruencję

a) $5x \equiv 1 \pmod{26}$,
b) $17x \equiv 1 \pmod{26}$,
c) $8x \equiv 4 \pmod{13}$,
d) $3x \equiv 59 \pmod{100}$,
e) $99x \equiv 1 \pmod{13}$,
f) $4x \equiv 6 \pmod{7}$,
g) $16x \equiv 8 \pmod{24}$,
h) $12x \equiv 8 \pmod{2}$,

i) $2000x \equiv 1 \pmod{643}$,
j) $788x \equiv 24 \pmod{1647}$.

Zadanie 19. Rozwiązać układy kongruencji

a) $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{5}, \\ x \equiv 6 \pmod{11}, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{13}, \\ x \equiv 65 \pmod{99}, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{13}, \\ x \equiv 96 \pmod{99}, \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4}, \\ x \equiv 4 \pmod{5}, \\ x \equiv 1 \pmod{7}, \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{4}, \\ x \equiv 3 \pmod{9}, \\ x \equiv 5 \pmod{1}. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 2 \pmod{7}, \\ x \equiv 1 \pmod{8}. \end{cases}$