MACIERZE; WYZNACZNIKI I UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

ZADANIA

Zadanie 1. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wykonać (jeśli to możliwe) działania: $B + C^T$, $3C - B^T$, $A \cdot B$, $B \cdot A$, A^3.

Zadanie 2. Wyznaczyć macierz $C = A \cdot B$, gdzie

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -12 & 6 & -3 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$.

Zadanie 3. Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć

a) $C \cdot A \cdot B$, **b)** $5B^2 + C \cdot A$, **c)** $C^T \cdot B - 5A$ **d)** $2A - (B \cdot C)^T$.

Zadanie 4. Korzystając z własności wyznacznika obliczyć

a) $\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, ($odp$, -40); **b)** $\det \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ (odp, 0); **c)** $\det \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, ($odp$, 0).

Zadanie 5. Obliczyć wyznaczniki korzystając z twierdzenia Laplace'a:

a) $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, ($odp$, -24); **b)** $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, ($odp$, -415);

c) $\det \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, ($odp$, -24); **d)** $\det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ (odp, -200);

Zadanie 6. Niech A i B będą macierzami kwadratowymi stopnia 2. Wyznaczyć $\det(A)$ i $\det(A^2 \cdot B)$, jeśli $(2A)^T = -B^2$ i $\det(B) = 6$.

Zadanie 7. Wyznaczyć $\det[(A \cdot B)^2]$ jeśli $A \cdot A^T = I$ i $\det(B) = 2$.

Zadanie 8. Wyznaczyć macierze odwrotne do danych

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

odp.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -1 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{19} & \frac{4}{19} & -\frac{1}{19} \\ \frac{6}{19} & -\frac{11}{19} & -\frac{2}{19} \\ -\frac{5}{19} & \frac{6}{19} & \frac{8}{19} \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{-11}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

Zadanie 9. Obliczyć $\det A$, $\det B$ $\det A \cdot B$ oraz $\det A^{-1}$ gdy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix},$$

$$(odp.\ det\, A = 27;\ det\, B = -18;\ det A \cdot B = -486;\ det A^{-1} = \frac{1}{27}.)$$

Zadanie 10. Dla jakiej liczby zespolonej z macierz

$$A = \begin{bmatrix} z & z^2 & 1 \\ 1 & z & 1 \\ z^2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa. Wyznaczyć A^{-1} w przypadku gdy $z = i$.

$$odp.\, z \in \mathbb{C} \backslash \{1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\} \;\; A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{i-1}{2} & 1 & -\frac{1+i}{2} \\ -1 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 11. Wiadomo jest, że $B = 2A$ i $A \cdot B = I$. Wyznaczyć $\det(A^{-1})$, jeśli A i B są nieosobliwymi macierzami stopnia 4.

Zadanie 12. Rozwiązać podane układy równań liniowych:

$$\textbf{a)} \begin{cases} x + y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 1 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = -1, \end{cases} \qquad \textbf{b)} \begin{cases} x + 6y - z = 0 \\ -x - 4y + 5z = 6 \\ 3x + 17y = 2 \\ 2x + 13y + 5z = 8, \end{cases}$$

$$\textbf{c)} \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 1, \end{cases} \qquad \textbf{d)} \begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$\textbf{e)} \begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ 3x + y + z - t = 2 \\ 5x - y + 5z + t = 4, \end{cases} \qquad \textbf{f)} \begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x - y - z + 4t = 2 \\ 5x + 5y + 2z + 7t = 1, \end{cases}$$

$$\textbf{g)} \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 5z = 10 \\ 5x - 6y + 8z = 19, \end{cases} \qquad \textbf{h)} \begin{cases} x + 2y + 3z - t = -1 \\ 3x + 6y + 7z + t = 5 \\ 2x + 4y + 7z - 4t = -6. \end{cases}$$

$$\textbf{i)} \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x + 4y - z + 2t = 2 \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 2. \end{cases}$$

Odp. **a)** ukł. nieoznaczony- 3 parametry; **b)** ukł. oznaczony;**c)** ukł. nieoznaczony- 1 parametr; **d)** ukł. nieoznaczony- 1 parametr;**e)** ukł. nieoznaczony- 2 parametry; **f)** ukł. sprzeczny; **g)** ukł. oznaczony; **h)** ukł. nieoznaczony- 2 parametry; **i)**ukł. sprzeczny.

Zadanie 13. Przedyskutować rozwiązalność układu równań w zależności od parametru p i (w przykładzie a)) q.

$$\textbf{a)}\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & - & 2y & + & z & = & p \\ 5x & - & 8y & + & 9z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & qz & = & -1, \end{array}\right.$$

$$\textbf{b)}\left\{\begin{array}{ccccccc} px & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & py & + & z & = & p \\ x & + & y & + & pz & = & p^2, \end{array}\right.$$

$$\textbf{c)}\left\{\begin{array}{ccccccc} px & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & py & + & z & = & 4p \\ x & + & y & + & pz & = & 4p^2, \end{array}\right.$$

$$\textbf{d)}\left\{\begin{array}{ccccc} 3x & + & 4y & = & 5 \\ (4+p)x & + & (6+p)y & = & 12-p \\ px & + & (4-p)y & = & p+1, \end{array}\right.$$