Matematyka dyskretna
Teoria grafów

Adam Gregosiewicz

6 listopada 2019 r.

Kontakt

Adam Gregosiewicz

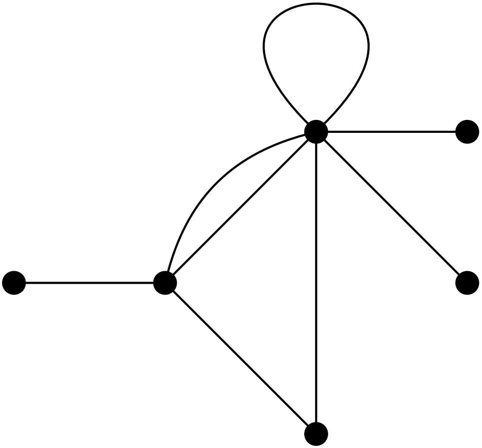
a.gregosiewicz@pollub.pl

Konsultacje: czwartek, 13.00-15.00, DS II, pok. 107

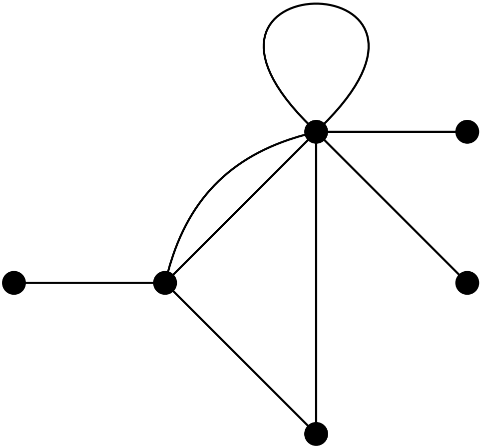
Moodle: Matematyka dyskretna (2019/2020)
Hasło: mdyskretnA1920

Teoria grafów

Grafy



Grafy



Grafem nazywamy zbiór wierzchołków połączonych krawędziami.

Grafy

Definicja (Graf)

Grafem nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie

- V jest zbiorem wierzchołków,
- E jest rodziną krawędzi.

Grafy

Definicja (Graf)

Grafem nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie

- V jest zbiorem wierzchołków,
- E jest rodziną krawędzi.

Uwaga

Krawędzie w grafie mogą się powtarzać oraz mogą łączyć wierzchołek z samym sobą.

Grafy

Definicja (Graf prosty)

Grafem prostym nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie

- V jest zbiorem wierzchołków,
- E jest zbiorem krawędzi między różnymi wierzchołkami.

Grafy

Definicja (Graf prosty)

Grafem prostym nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie

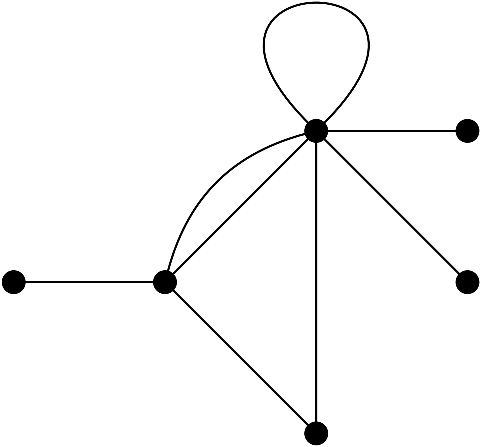
- V jest zbiorem wierzchołków,
- E jest zbiorem krawędzi między różnymi wierzchołkami.

Uwaga

Graf prosty nie ma krawędzi wielokrotnych i pętli.

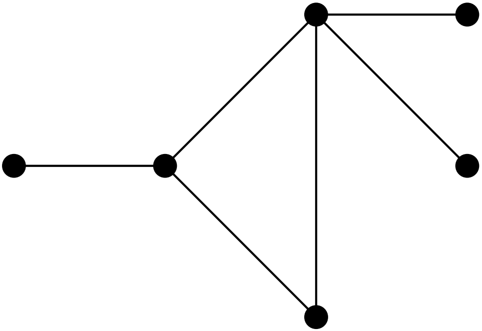
Grafy

Graf (ogólny)



Grafy

Graf prosty



Grafy

$$G = (V, E), \qquad V(G) := V, \qquad E(G) = E.$$

Graf ogólny:

$$E \subset \{vw \colon v, w \in V\} \text{ – multizbiór.}$$

Graf prosty:

$$E \subset \{vw \colon v, w \in V,\ v \neq w\}, \qquad vw = wv.$$

Grafy

Definicja (Krawędź incydentna)

Jeżeli w grafie G wierzchołki v i w są połączone krawędzią e, to mówimy, że v i w są wierzchołkami **sąsiednimi**, a e krawędzią **incydentną** z v i w.

Grafy

Definicja (Krawędź incydentna)

Jeżeli w grafie G wierzchołki v i w są połączone krawędzią e, to mówimy, że v i w są wierzchołkami **sąsiednimi**, a e krawędzią **incydentną** z v i w.

Definicja (Stopień wierzchołka)

Stopniem wierzchołka $v \in V$ w grafie $G = (V, E)$ nazywamy liczbę krawędzi incydentnych z v i oznaczamy

$$\deg v.$$

Grafy

Twierdzenie

Dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ *mamy*

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

Grafy

Twierdzenie

Dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ *mamy*

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

$\sum_{v \in V} \deg v$ jest sumą wszystkich stopni wierzchołków, a przez $|E|$ oznaczamy liczebność zbioru E.

Grafy

Twierdzenie

Dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ *mamy*

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

$\sum_{v \in V} \deg v$ jest sumą wszystkich stopni wierzchołków, a przez $|E|$ oznaczamy liczebność zbioru E.

Wniosek

W dowolnym grafie liczba wierzchołków o nieparzystym stopniu jest parzysta.

Grafy

Twierdzenie

Dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ *mamy*

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

$\sum_{v \in V} \deg v$ jest sumą wszystkich stopni wierzchołków, a przez $|E|$ oznaczamy liczebność zbioru E.

Wniosek

W dowolnym grafie liczba wierzchołków o nieparzystym stopniu jest parzysta.

Dowód. Gdyby liczba takich wierzchołków była nieparzysta, to suma $\sum_{v \in V} \deg v$ byłaby nieparzysta, co powoduje sprzeczność.

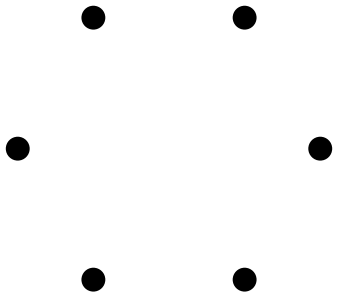
Grafy - podstawowe konstrukcje

Niech $G = (V, E)$, $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$.

- **Suma grafów**: $G_1 \cup G_2 := (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.
- **Przecięcie grafów**: $G_1 \cap G_2 := (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$.
- **Różnica grafów**: $G_1 - G_2 := (V_1 \setminus V_2, E_1 \setminus E_2)$.
- **Podgraf** H: $V(H) \subset V(G)$, $E(H) \subset E(G)$.
- **Obcięcie** G **do** $X \subset V$:
  $G_{|X} := (X, \{vw \in E \colon v, w \in X\})$.
- **Podgraf indukowany**: dowolne obcięcie grafu G.

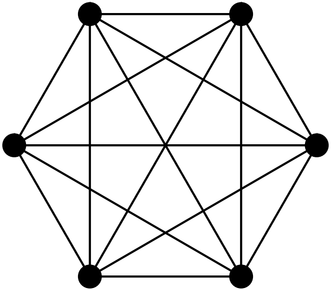
Grafy - podstawowe klasy

Graf pusty: graf bez krawędzi.



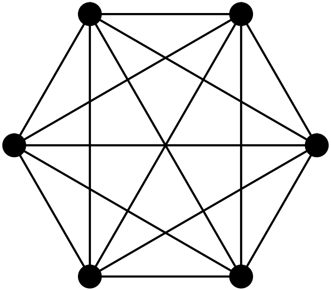
Grafy - podstawowe klasy

Graf pełny lub **klika**: każde dwa wierzchołki połączone są krawędzią.



Grafy - podstawowe klasy

Graf pełny lub **klika**: każde dwa wierzchołki połączone są krawędzią.



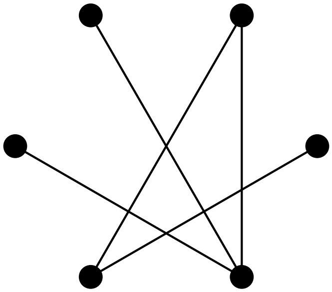
Graf pełny o n wierzchołkach oznaczamy K_n.

Liczba krawędzi grafu pełnego to

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Grafy - podstawowe klasy

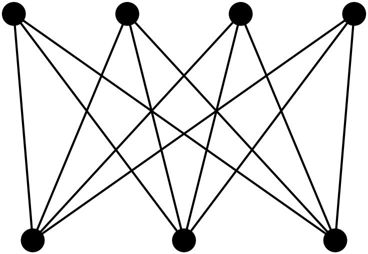
Graf dwudzielny: zbiór wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne podzbiory V_1 i V_2 w ten sposób, że żadne dwa wierzchołki ze zbioru V_i nie są połączone krawędzią.



Grafy - podstawowe klasy

Pełny graf dwudzielny: zbiór wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne podzbiory V_1 i V_2 w ten sposób, że

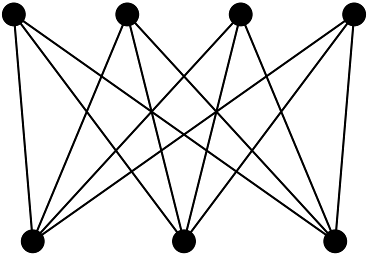
$$E = \{vw \colon v \in V_1,\ w \in V_2\}.$$



Grafy - podstawowe klasy

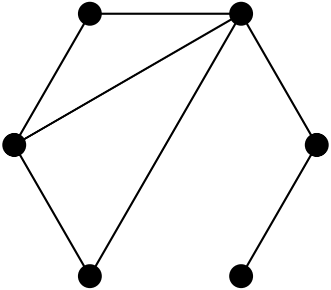
Pełny graf dwudzielny: zbiór wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne podzbiory V_1 i V_2 w ten sposób, że

$$E = \{vw \colon v \in V_1,\ w \in V_2\}.$$



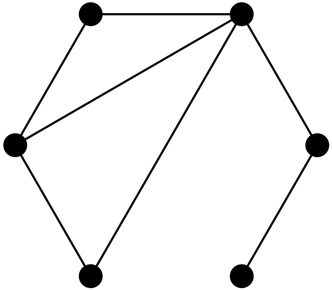
Graf dwudzielny oznaczamy $K_{n,m}$, gdzie $n = |V_1|$ i $m = |V_2|$.

Graf płaski: rysunek grafu na płaszczyźnie, przy czym żadne dwie krawędzie nie mogą się przecinać.



Grafy - podstawowe klasy

Graf płaski: rysunek grafu na płaszczyźnie, przy czym żadne dwie krawędzie nie mogą się przecinać.



Graf planarny: graf, który da się narysować jako graf płaski.

Grafy - podstawowe definicje

- **Ścieżka** od v do w - ciąg krawędzi postaci

$$vv_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}w.$$

Ścieżkę oznaczamy przez

$$v \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_{k-1} \longrightarrow w.$$

Grafy - podstawowe definicje

- **Ścieżka** od v do w - ciąg krawędzi postaci

$$vv_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}w.$$

  Ścieżkę oznaczamy przez

$$v \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_{k-1} \longrightarrow w.$$

- **Długością** ścieżki jest liczba jej krawędzi.

Grafy - podstawowe definicje

- **Ścieżka** od v do w - ciąg krawędzi postaci

$$vv_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}w.$$

  Ścieżkę oznaczamy przez

$$v \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_{k-1} \longrightarrow w.$$

- **Długością** ścieżki jest liczba jej krawędzi.
- **Ścieżka zamknięta** - $v = w$.

Grafy - podstawowe definicje

- **Droga** od v do w - ścieżka, w której nie powtarzających się wierzchołków poza być może v i w.

Grafy - podstawowe definicje

- **Droga** od v do w - ścieżka, w której nie powtarzających się wierzchołków poza być może v i w.
- **Cykl** lub **droga zamknięta** - droga od v do v.

Grafy - podstawowe definicje

- **Graf spójny** - graf, w którym między każdymi dwoma wierzchołkami istnieje droga.

Grafy - podstawowe definicje

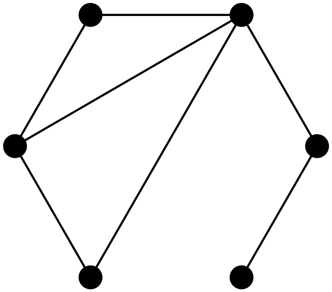
- **Graf spójny** - graf, w którym między każdymi dwoma wierzchołkami istnieje droga.
- **Spójna składowa grafu** $G = (V, E)$ - maksymalny w sensie inkluzji podzbiór $X \subset V$ indukujący graf spójny $G_{|X}$.

Grafy - podstawowe definicje

- **Graf spójny** - graf, w którym między każdymi dwoma wierzchołkami istnieje droga.
- **Spójna składowa grafu** $G = (V, E)$ - maksymalny w sensie inkluzji podzbiór $X \subset V$ indukujący graf spójny $G_{|X}$.
- **Wierzchołek izolowany** - wierzchołek bez sąsiadów.

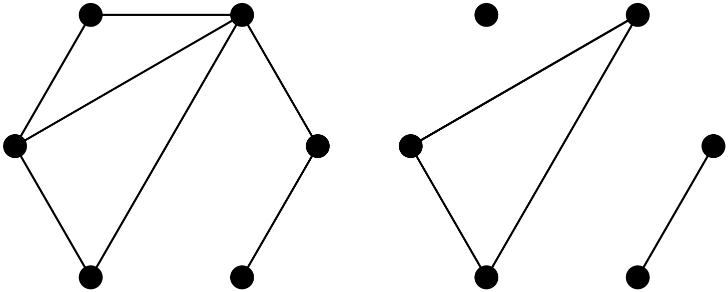
Grafy - podstawowe definicje

- **Graf spójny** - graf, w którym między każdymi dwoma wierzchołkami istnieje droga.
- **Spójna składowa grafu** $G = (V, E)$ - maksymalny w sensie inkluzji podzbiór $X \subset V$ indukujący graf spójny $G_{|X}$.
- **Wierzchołek izolowany** - wierzchołek bez sąsiadów.



Grafy - podstawowe definicje

- **Graf spójny** - graf, w którym między każdymi dwoma wierzchołkami istnieje droga.
- **Spójna składowa grafu** $G = (V, E)$ - maksymalny w sensie inkluzji podzbiór $X \subset V$ indukujący graf spójny $G_{|X}$.
- **Wierzchołek izolowany** - wierzchołek bez sąsiadów.



Grafy - podstawowe definicje

Uwaga

Każdy graf G można rozłożyć jednoznacznie na spójne składowe, które tworzą podział zbioru $V(G)$.

Uwaga

Wierzchołki izolowane są jednoelementowymi spójnymi składowymi.

Spójne składowe

Ile krawędzi musi mieć graf spójny?

Spójne składowe

Ile krawędzi musi mieć graf spójny?

Nie za dużo! Graf, który jest drogą ma tylko $|V(G)| - 1$ krawędzi.

Spójne składowe

Ile krawędzi musi mieć graf spójny?

Nie za dużo! Graf, który jest drogą ma tylko $|V(G)| - 1$ krawędzi.

Ile krawędzi wystarcza, aby graf był spójny?

Spójne składowe

Ile krawędzi musi mieć graf spójny?

Nie za dużo! Graf, który jest drogą ma tylko $|V(G)| - 1$ krawędzi.

Ile krawędzi wystarcza, aby graf był spójny?

Okazuje się, że wystarcza

$$\frac{|V(G)|(|V(G)| - 1)}{2}.$$

Spójne składowe

Twierdzenie

Jeżeli $G = (V, E)$ *jest grafem prostym o* k *spójnych składowych, to*

$$|V| - k \leqslant |E| \leqslant \frac{(|V| - k)(|V| - k + 1)}{2}.$$

Spójne składowe

Twierdzenie

Jeżeli $G = (V, E)$ jest grafem prostym o k spójnych składowych, to

$$|V| - k \leqslant |E| \leqslant \frac{(|V| - k)(|V| - k + 1)}{2}.$$

Dowód. Oznaczmy $n = |V|$ i $m = |E|$.

Spójne składowe

Twierdzenie

Jeżeli $G = (V, E)$ jest grafem prostym o k spójnych składowych, to

$$|V| - k \leqslant |E| \leqslant \frac{(|V| - k)(|V| - k + 1)}{2}.$$

Dowód. Oznaczmy $n = |V|$ i $m = |E|$.Chcemy wykazać, że

$$n - k \leqslant m.$$

Spójne składowe

Twierdzenie

Jeżeli $G = (V, E)$ *jest grafem prostym o* k *spójnych składowych, to*

$$|V| - k \leqslant |E| \leqslant \frac{(|V| - k)(|V| - k + 1)}{2}.$$

Dowód. Oznaczmy $n = |V|$ i $m = |E|$.Chcemy wykazać, że

$$n - k \leqslant m.$$

Indukcja względem m.

Spójne składowe

Twierdzenie

Jeżeli $G = (V, E)$ jest grafem prostym o k spójnych składowych, to

$$|V| - k \leqslant |E| \leqslant \frac{(|V| - k)(|V| - k + 1)}{2}.$$

Dowód. Oznaczmy $n = |V|$ i $m = |E|$.Chcemy wykazać, że

$$n - k \leqslant m.$$

Indukcja względem m. Dla $m = 0$ (brak krawędzi) mamy $k = n$ i $n - k = 0 \leqslant m$.

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$n - k \leqslant m.$$

- Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla pewnego $m \geqslant 0$.

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$n - k \leqslant m.$$

- Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla pewnego $m \geqslant 0$.
- W grafie o n wierzchołkach i $m + 1$ krawędziach usuwamy dowolną krawędź.

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$n - k \leqslant m.$$

- Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla pewnego $m \geqslant 0$.
- W grafie o n wierzchołkach i $m + 1$ krawędziach usuwamy dowolną krawędź.
- Liczba spójnych składowych mogła się nie zmienić lub zwiększyła się o jeden.

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$n - k \leqslant m.$$

- Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla pewnego $m \geqslant 0$.
- W grafie o n wierzchołkach i $m + 1$ krawędziach usuwamy dowolną krawędź.
- Liczba spójnych składowych mogła się nie zmienić lub zwiększyła się o jeden.
- Jeżeli się nie zmieniła, to oczywiście $n - k \leqslant m < m + 1$.

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$n - k \leqslant m.$$

- Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla pewnego $m \geqslant 0$.
- W grafie o n wierzchołkach i $m + 1$ krawędziach usuwamy dowolną krawędź.
- Liczba spójnych składowych mogła się nie zmienić lub zwiększyła się o jeden.
- Jeżeli się nie zmieniła, to oczywiście $n - k \leqslant m < m + 1$.
- Jeżeli zwiększyła się o jeden, to z założenia indukcyjnego

  $$n - (k + 1) \leqslant m,$$

  czyli $n - k \leqslant m + 1$.

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Załóżmy, że G ma maksymalnie dużo krawędzi,

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Załóżmy, że G ma maksymalnie dużo krawędzi,

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Załóżmy, że G ma maksymalnie dużo krawędzi, to znaczy, że nie istnieje graf o k spójnych składowych, który ma więcej krawędzi.
- Wtedy każda ze spójnych składowych jest grafem pełnym (dlaczego?).

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Załóżmy, że G ma maksymalnie dużo krawędzi, to znaczy, że nie istnieje graf o k spójnych składowych, który ma więcej krawędzi.
- Wtedy każda ze spójnych składowych jest grafem pełnym (dlaczego?).
- Okazuje się, że tylko jedna spójna składowa może mieć więcej niż jeden wierzchołek.

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Załóżmy, że G ma maksymalnie dużo krawędzi, to znaczy, że nie istnieje graf o k spójnych składowych, który ma więcej krawędzi.
- Wtedy każda ze spójnych składowych jest grafem pełnym (dlaczego?).
- Okazuje się, że tylko jedna spójna składowa może mieć więcej niż jeden wierzchołek.
- Załóżmy bowiem, że składowe V_1 i V_2 mają odpowiednio n_1 i n_2 wierzchołków, przy czym $n_1 \geqslant n_2 \geqslant 2$.

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Liczba krawędzi w $G_{|V_1}$ to $\binom{n_1}{2}$, a w $G_{|V_2}$ to $\binom{n_2}{2}$.

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Liczba krawędzi w $G_{|V_1}$ to $\binom{n_1}{2}$, a w $G_{|V_2}$ to $\binom{n_2}{2}$.
- Przenosimy jeden wierzchołek z V_2 do V_1 z zachowaniem pełności nowych składowych.

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Liczba krawędzi w $G_{|V_1}$ to $\binom{n_1}{2}$, a w $G_{|V_2}$ to $\binom{n_2}{2}$.
- Przenosimy jeden wierzchołek z V_2 do V_1 z zachowaniem pełności nowych składowych.
- W zmienionych składowych mamy co najmniej $\binom{n_1+1}{2} + \binom{n_2-1}{2}$ krawędzi.

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Liczba krawędzi w $G_{|V_1}$ to $\binom{n_1}{2}$, a w $G_{|V_2}$ to $\binom{n_2}{2}$.
- Przenosimy jeden wierzchołek z V_2 do V_1 z zachowaniem pełności nowych składowych.
- W zmienionych składowych mamy co najmniej $\binom{n_1+1}{2} + \binom{n_2-1}{2}$ krawędzi.
- Jednak

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Liczba krawędzi w $G_{|V_1}$ to $\binom{n_1}{2}$, a w $G_{|V_2}$ to $\binom{n_2}{2}$.
- Przenosimy jeden wierzchołek z V_2 do V_1 z zachowaniem pełności nowych składowych.
- W zmienionych składowych mamy co najmniej $\binom{n_1+1}{2} + \binom{n_2-1}{2}$ krawędzi.
- Jednak

$$\binom{n_1+1}{2} + \binom{n_2-1}{2} - \binom{n_1}{2} - \binom{n_2}{2} =$$

$$= \frac{(n_1+1)n_1 + (n_2-1)(n_2-2) - n_1(n_1-1) - n_2(n_2-1)}{2} =$$

$$= n_1 - n_2 + 1 \geqslant 1.$$

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Zatem liczba krawędzi nowe grafu jest większa niż liczba krawędzi wyjściowego grafu.

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Zatem liczba krawędzi nowe grafu jest większa niż liczba krawędzi wyjściowego grafu.
- Ale graf G miał mieć maksymalnie dużo krawędzi.

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Zatem liczba krawędzi nowe grafu jest większa niż liczba krawędzi wyjściowego grafu.
- Ale graf G miał mieć maksymalnie dużo krawędzi.
- Sprzeczność dowodzi, że graf G może mieć tylko jedną składową o więcej niż jednym wierzchołku.

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Zatem liczba krawędzi nowe grafu jest większa niż liczba krawędzi wyjściowego grafu.
- Ale graf G miał mieć maksymalnie dużo krawędzi.
- Sprzeczność dowodzi, że graf G może mieć tylko jedną składową o więcej niż jednym wierzchołku.
- Wtedy mamy $k-1$ wierzchołków izolowanych i jedną składową spójną o $n-(k-1)$ wierzchołkach.

Spójne składowe

Dowód cd. Chcemy wykazać, że

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

- Zatem liczba krawędzi nowe grafu jest większa niż liczba krawędzi wyjściowego grafu.
- Ale graf G miał mieć maksymalnie dużo krawędzi.
- Sprzeczność dowodzi, że graf G może mieć tylko jedną składową o więcej niż jednym wierzchołku.
- Wtedy mamy $k-1$ wierzchołków izolowanych i jedną składową spójną o $n-(k-1)$ wierzchołkach.
- Stąd

$$m = \binom{n-k+1}{2} = \frac{(n-k+1)(n-k)}{2}.$$

Spójne składowe

Uwaga

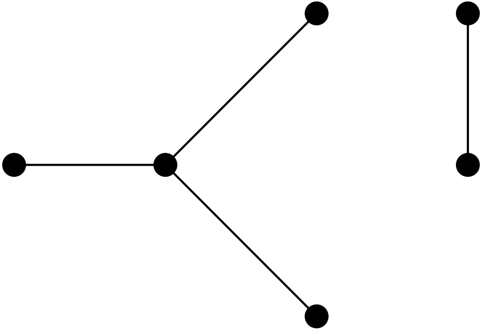
Oszacowań z poprzedniego twierdzenia nie można poprawić.

Definicje

Las - graf, który nie zawiera cykli jako podgrafy.

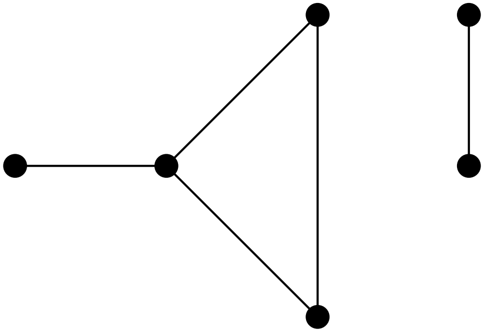
Definicje

Las - graf, który nie zawiera cykli jako podgrafy.



Definicje

Las - graf, który nie zawiera cykli jako podgrafy.



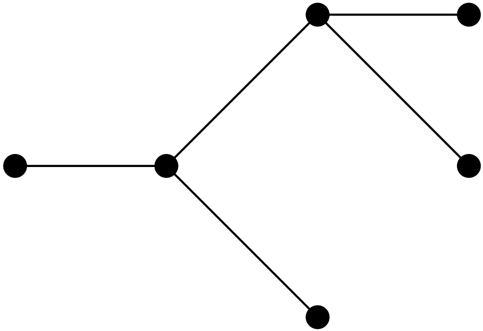
To nie jest las.

Definicje

Drzewo - spójny las.

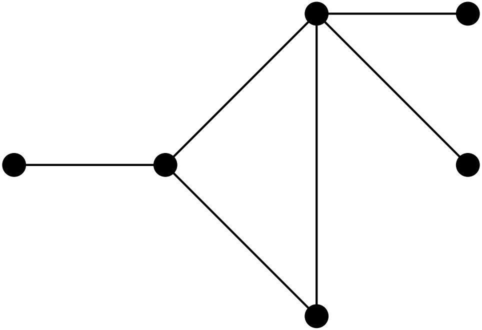
Definicje

Drzewo - spójny las.



Definicje

Drzewo - spójny las.



To nie jest drzewo.

Definicje

- **Liść** - wierzchołek drzewa o stopniu 1.

Definicje

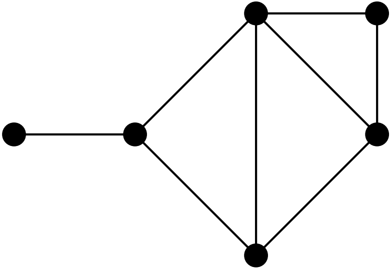
- **Liść** - wierzchołek drzewa o stopniu 1.
- **Gwiazda** - drzewo, w którym co najwyżej jeden wierzchołek nie jest liściem.

Definicje

Drzewo rozpinające - podgraf grafu G, który jest drzewem i zawiera wszystkie wierzchołki grafu G.

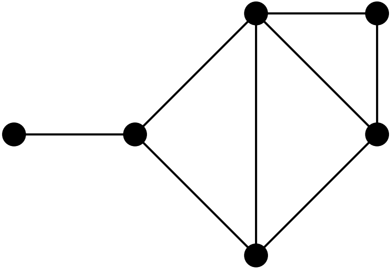
Definicje

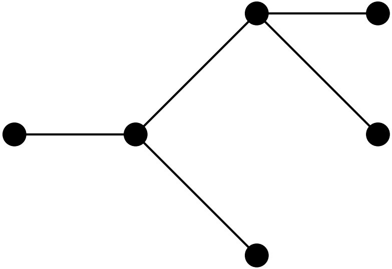
Drzewo rozpinające - podgraf grafu G, który jest drzewem i zawiera wszystkie wierzchołki grafu G.



Definicje

Drzewo rozpinające - podgraf grafu G, który jest drzewem i zawiera wszystkie wierzchołki grafu G.





Charakteryzacja drzew

Twierdzenie

Dla grafu $G = (V, E)$ następujące warunki są równoważne:

1. *G jest drzewem.*
2. *G nie zawiera cykli i ma $|V| - 1$ krawędzi.*
3. *G jest spójny i ma $|V| - 1$ krawędzi.*
4. *G jest spójny, a usunięcie dowolnej krawędzi tworzy dokładnie dwie spójne składowe.*
5. *Dowolne dwa wierzchołki grafu G są połączone dokładnie jedną drogą.*
6. *G nie zawiera cykli, ale dodanie dowolnej nowej krawędzi tworzy dokładnie jeden cykl.*

Charakteryzacja drzew

Dowód. Indukcja względem liczby wierzchołków.

- $1 \Rightarrow 2$. Usuwamy jedną krawędź.
- $2 \Rightarrow 3$. Gdyby były dwie spójne składowe, to graf miałby za mało krawędzi.
- $3 \Rightarrow 4$. Usunięcie jednej krawędzi tworzy graf, który ma za mało krawędzi, aby był spójny.
- $4 \Rightarrow 5$. Gdyby istniały dwie różne drogi od v do w, to usunięcie jednej krawędzi z cyklu $v \to w \to v$ nie tworzyłoby nowej składowej spójnej.

Charakteryzacja drzew

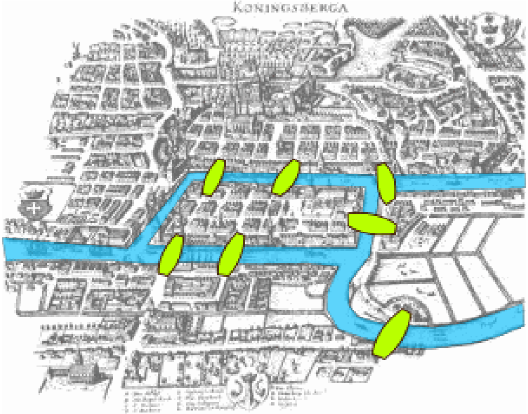
- $5 \Rightarrow 6$. Gdyby cykl był, to każda para wierzchołków tego cyklu byłaby połączona dwiema drogami.
- Ponadto, jeżeli dodamy krawędź vw, to utworzony zostanie cykl $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow u$.
- Gdyby powstały dwa nowe cykle, to istniałby również cykl w G.
- $6 \Rightarrow 1$. Gdyby G nie był spójny, to dodanie nowej krawędzi pomiędzy spójnymi składowymi nie utworzyłoby cyklu.

Charakteryzacja drzew

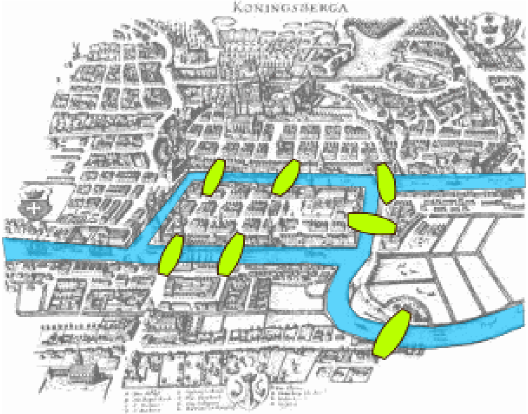
Wniosek

Każdy las $G = (V, E)$ o k składowych spójnych ma $|V| - k$ krawędzi.

Mosty królewieckie

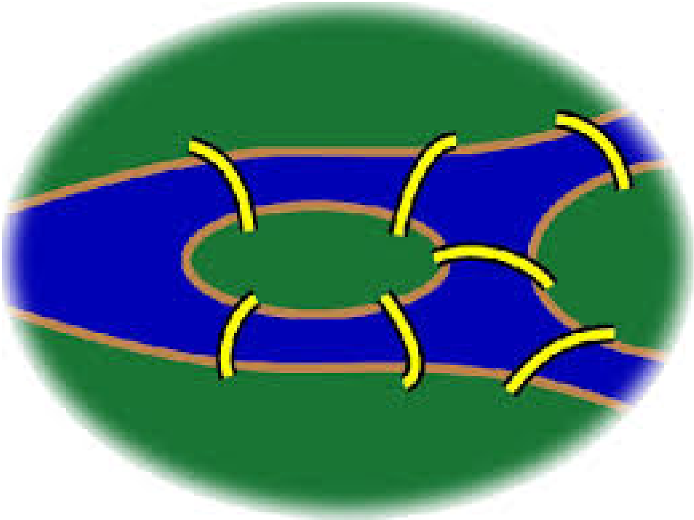


Mosty królewieckie

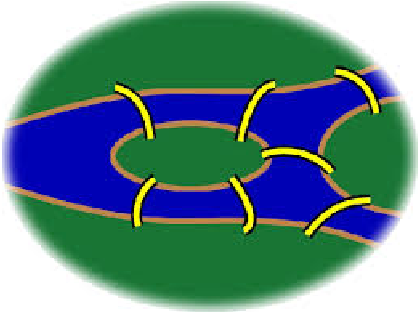


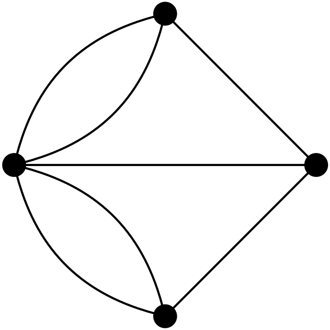
Czy można przejść się po Królewcu, przechodząc przez każdy most dokładnie jeden raz, i wrócić do punkty wyjścia?

Mosty królewieckie

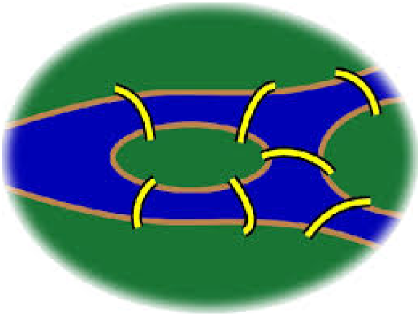


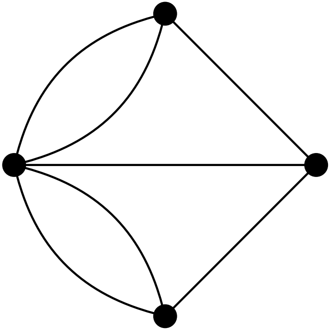
Mosty królewieckie





Mosty królewieckie





Czy istnieje ścieżka zamknięta przechodząca przez każdą krawędź dokładnie jeden raz?

Cykl Eulera

Definicja (Cykl Eulera)

Ścieżkę zamkniętą, która przechodzi przez każdą krawędź grafu dokładnie jeden raz nazywamy **cyklem Eulera**. Graf, który posiada cykl Eulera, nazywamy **grafem eulerowskim**.

Cykl Eulera

Definicja (Cykl Eulera)

Ścieżkę zamkniętą, która przechodzi przez każdą krawędź grafu dokładnie jeden raz nazywamy **cyklem Eulera**. Graf, który posiada cykl Eulera, nazywamy **grafem eulerowskim**.

Uwaga

W grafie eulerowskim każdy wierzchołek jest stopnia parzystego.

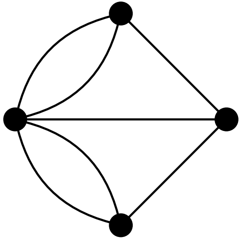
Cykl Eulera

Definicja (Cykl Eulera)

Ścieżkę zamkniętą, która przechodzi przez każdą krawędź grafu dokładnie jeden raz nazywamy **cyklem Eulera**. Graf, który posiada cykl Eulera, nazywamy **grafem eulerowskim**.

Uwaga

W grafie eulerowskim każdy wierzchołek jest stopnia parzystego.



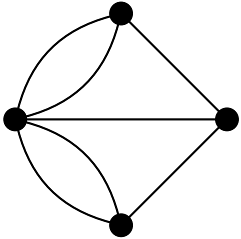
Cykl Eulera

Definicja (Cykl Eulera)

Ścieżkę zamkniętą, która przechodzi przez każdą krawędź grafu dokładnie jeden raz nazywamy **cyklem Eulera**. Graf, który posiada cykl Eulera, nazywamy **grafem eulerowskim**.

Uwaga

W grafie eulerowskim każdy wierzchołek jest stopnia parzystego.



W Królewcu nie ma cyklu Eulera!

Twierdzenie Eulera

Twierdzenie

Graf spójny, w którym każdy wierzchołek ma stopień parzysty, ma cykl Eulera.

Twierdzenie Eulera

Twierdzenie

Graf spójny, w którym każdy wierzchołek ma stopień parzysty, ma cykl Eulera.

Dowód. Załóżmy, że każdy wierzchołek w spójnym grafie $G = (V, E)$ jest stopnia parzystego i $|V| \geqslant 2$.

1. W grafie G istnieje cykl (droga zamknięta).

Twierdzenie Eulera

Twierdzenie

Graf spójny, w którym każdy wierzchołek ma stopień parzysty, ma cykl Eulera.

Dowód. Załóżmy, że każdy wierzchołek w spójnym grafie $G = (V, E)$ jest stopnia parzystego i $|V| \geqslant 2$.

1. W grafie G istnieje cykl (droga zamknięta).
   - Zaczynamy od dowolnego wierzchołka v_0 i przechodzimy do sąsiedniego wierzchołka v_1.

Twierdzenie Eulera

Twierdzenie

Graf spójny, w którym każdy wierzchołek ma stopień parzysty, ma cykl Eulera.

Dowód. Załóżmy, że każdy wierzchołek w spójnym grafie $G = (V, E)$ jest stopnia parzystego i $|V| \geqslant 2$.

1. W grafie G istnieje cykl (droga zamknięta).
    - Zaczynamy od dowolnego wierzchołka v_0 i przechodzimy do sąsiedniego wierzchołka v_1.
    - Z v_1 przechodzimy (po innej krawędzi niż $v_0 v_1$) do sąsiedniego wierzchołka v_2.

Twierdzenie Eulera

Twierdzenie

Graf spójny, w którym każdy wierzchołek ma stopień parzysty, ma cykl Eulera.

Dowód. Załóżmy, że każdy wierzchołek w spójnym grafie $G = (V, E)$ jest stopnia parzystego i $|V| \geqslant 2$.

1. W grafie G istnieje cykl (droga zamknięta).
   - Zaczynamy od dowolnego wierzchołka v_0 i przechodzimy do sąsiedniego wierzchołka v_1.
   - Z v_1 przechodzimy (po innej krawędzi niż v_0v_1) do sąsiedniego wierzchołka v_2.
   - Z v_2 przechodzimy (po innej krawędzi niż v_1v_2) do sąsiedniego wierzchołka $v_3, \ldots$

Twierdzenie Eulera

Twierdzenie

Graf spójny, w którym każdy wierzchołek ma stopień parzysty, ma cykl Eulera.

Dowód. Załóżmy, że każdy wierzchołek w spójnym grafie $G = (V, E)$ jest stopnia parzystego i $|V| \geqslant 2$.

1. W grafie G istnieje cykl (droga zamknięta).
   - Zaczynamy od dowolnego wierzchołka v_0 i przechodzimy do sąsiedniego wierzchołka v_1.
   - Z v_1 przechodzimy (po innej krawędzi niż v_0v_1) do sąsiedniego wierzchołka v_2.
   - Z v_2 przechodzimy (po innej krawędzi niż v_1v_2) do sąsiedniego wierzchołka $v_3, \ldots$
   - Powtarzamy tak długo, aż jeden z wierzchołków się powtórzy.

Twierdzenie Eulera

Twierdzenie

Graf spójny, w którym każdy wierzchołek ma stopień parzysty, ma cykl Eulera.

Dowód. Załóżmy, że każdy wierzchołek w spójnym grafie $G = (V, E)$ jest stopnia parzystego i $|V| \geqslant 2$.

1. W grafie G istnieje cykl (droga zamknięta).
   - Zaczynamy od dowolnego wierzchołka v_0 i przechodzimy do sąsiedniego wierzchołka v_1.
   - Z v_1 przechodzimy (po innej krawędzi niż $v_0 v_1$) do sąsiedniego wierzchołka v_2.
   - Z v_2 przechodzimy (po innej krawędzi niż $v_1 v_2$) do sąsiedniego wierzchołka $v_3, \ldots$
   - Powtarzamy tak długo, aż jeden z wierzchołków się powtórzy.
   - Musi to kiedyś nastąpić (dlaczego?).

Twierdzenie Eulera

2. Indukcja względem $|E|$.

Twierdzenie Eulera

2. Indukcja względem $|E|$.
    - Wybierzmy w grafie G cykl C.

Twierdzenie Eulera

2. Indukcja względem $|E|$.
   - Wybierzmy w grafie G cykl C.
   - Jeżeli jest to cykl Eulera, to kończymy.

Twierdzenie Eulera

2. Indukcja względem $|E|$.
   - Wybierzmy w grafie G cykl C.
   - Jeżeli jest to cykl Eulera, to kończymy.
   - Jeżeli nie, to usuwamy ten cykl razem z krawędziami i wierzchołkami (jeżeli już nie mają innych krawędzi), otrzymując nowy graf G'.

Twierdzenie Eulera

2. Indukcja względem $|E|$.
   - Wybierzmy w grafie G cykl C.
   - Jeżeli jest to cykl Eulera, to kończymy.
   - Jeżeli nie, to usuwamy ten cykl razem z krawędziami i wierzchołkami (jeżeli już nie mają innych krawędzi), otrzymując nowy graf G'.
   - Graf G' nie musi być spójny, ale każdy jego wierzchołek ma stopień parzysty.

Twierdzenie Eulera

2. Indukcja względem $|E|$.
   - Wybierzmy w grafie G cykl C.
   - Jeżeli jest to cykl Eulera, to kończymy.
   - Jeżeli nie, to usuwamy ten cykl razem z krawędziami i wierzchołkami (jeżeli już nie mają innych krawędzi), otrzymując nowy graf G'.
   - Graf G' nie musi być spójny, ale każdy jego wierzchołek ma stopień parzysty.
   - W każdej spójnej składowej grafu G' znajdziemy cykl Eulera (być może pusty).

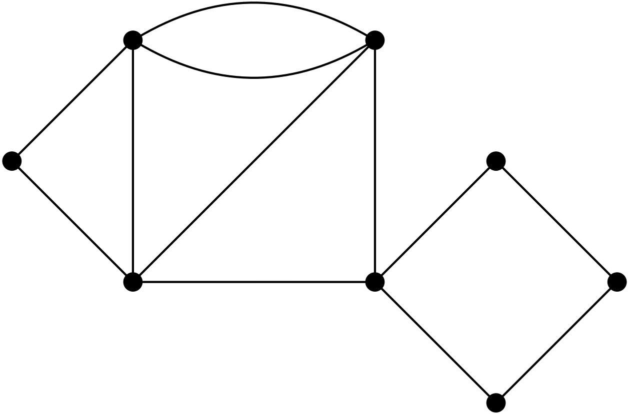
Twierdzenie Eulera

2. Indukcja względem $|E|$.
    - Wybierzmy w grafie G cykl C.
    - Jeżeli jest to cykl Eulera, to kończymy.
    - Jeżeli nie, to usuwamy ten cykl razem z krawędziami i wierzchołkami (jeżeli już nie mają innych krawędzi), otrzymując nowy graf G'.
    - Graf G' nie musi być spójny, ale każdy jego wierzchołek ma stopień parzysty.
    - W każdej spójnej składowej grafu G' znajdziemy cykl Eulera (być może pusty).
    - Cykl C musi mieć wierzchołki w każdej spójnej składowej G'.

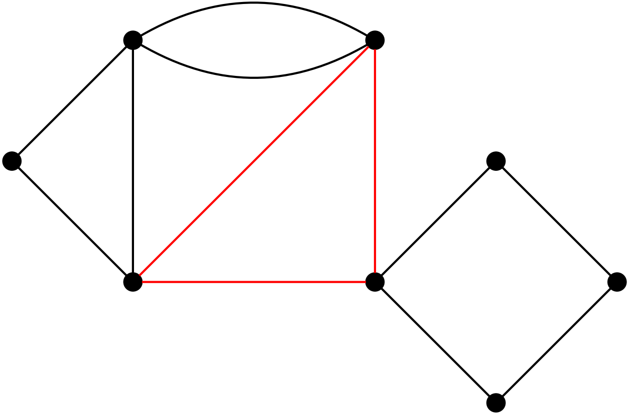
Twierdzenie Eulera

2. Indukcja względem $|E|$.
   - Wybierzmy w grafie G cykl C.
   - Jeżeli jest to cykl Eulera, to kończymy.
   - Jeżeli nie, to usuwamy ten cykl razem z krawędziami i wierzchołkami (jeżeli już nie mają innych krawędzi), otrzymując nowy graf G'.
   - Graf G' nie musi być spójny, ale każdy jego wierzchołek ma stopień parzysty.
   - W każdej spójnej składowej grafu G' znajdziemy cykl Eulera (być może pusty).
   - Cykl C musi mieć wierzchołki w każdej spójnej składowej G'.
   - Wystarczy teraz iść po cyklu C i w razie napotkania wierzchołka ze spójnej składowej G' przejść po cyklu Eulera w tej składowej.

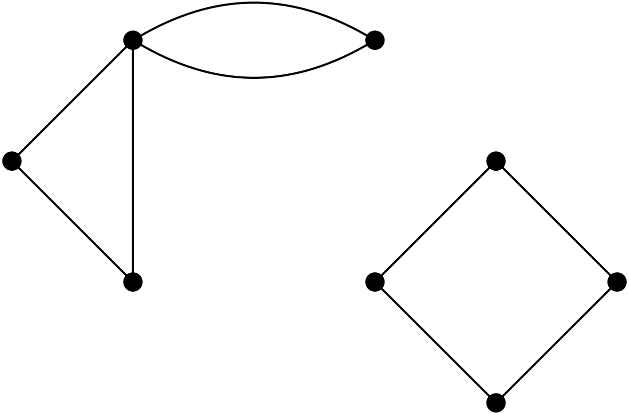
Twierdzenie Eulera



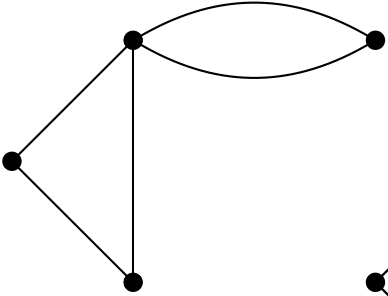
Twierdzenie Eulera

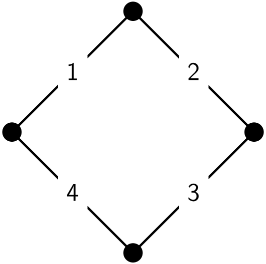


Twierdzenie Eulera

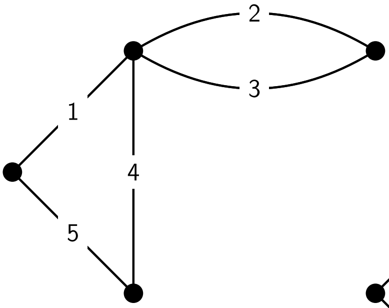


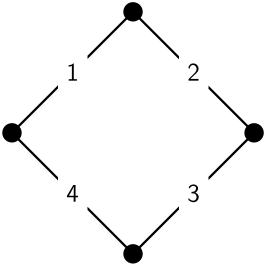
Twierdzenie Eulera



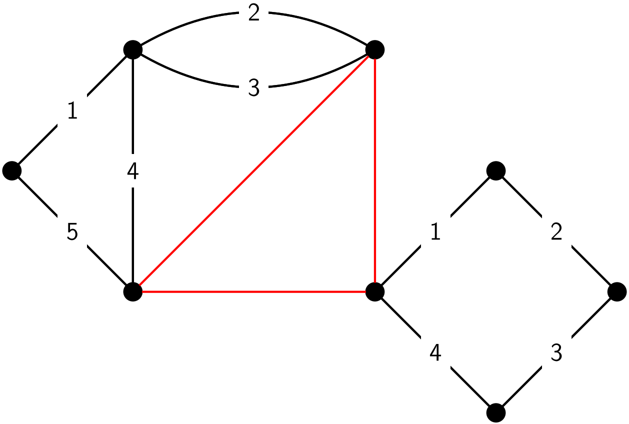


Twierdzenie Eulera

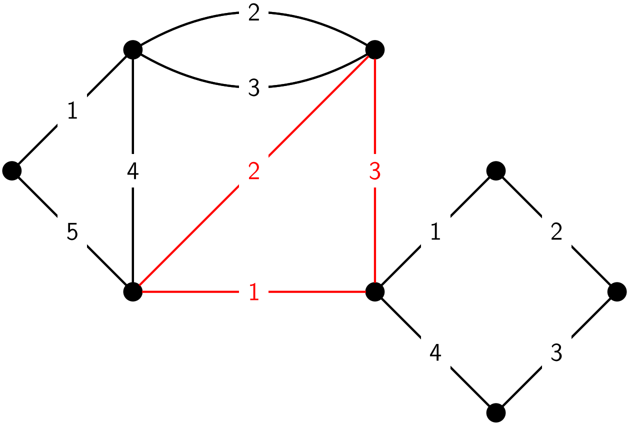




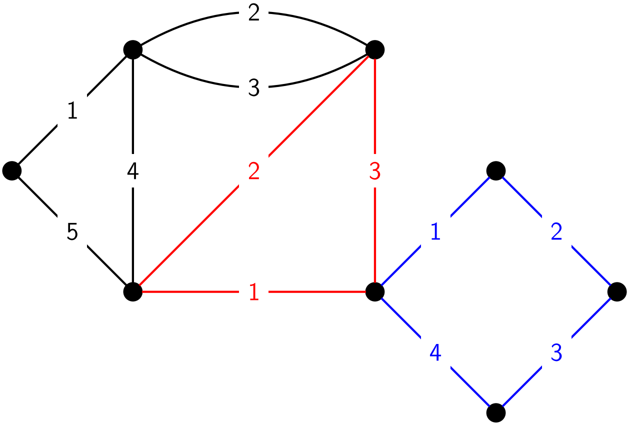
Twierdzenie Eulera



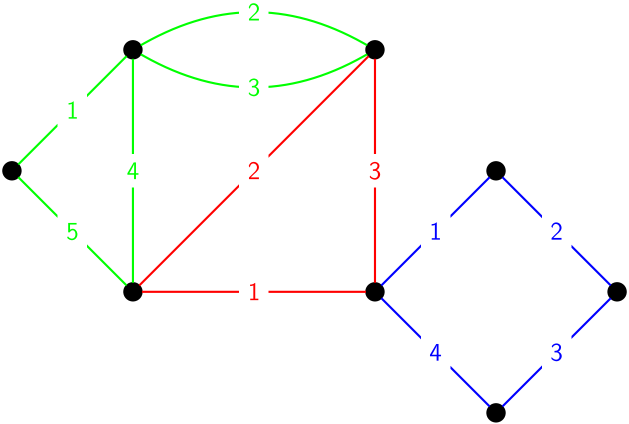
Twierdzenie Eulera



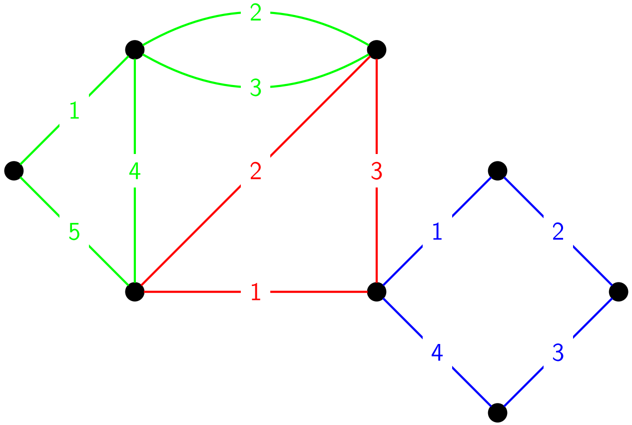
Twierdzenie Eulera



Twierdzenie Eulera



Twierdzenie Eulera



$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 1 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

Twierdzenie Eulera

Twierdzenie

Graf jest grafem eulerowskim wtedy i tylko wtedy, gdy jest spójny i każdy jego wierzchołek jest stopnia parzystego.

Ścieżka Eulera

Definicja (Ścieżka Eulera)

Ścieżkę, która przechodzi przez wszystkie krawędzie dokładnie jeden raz nazywamy **ścieżką Eulera**.

Ścieżka Eulera

Definicja (Ścieżka Eulera)

Ścieżkę, która przechodzi przez wszystkie krawędzie dokładnie jeden raz nazywamy **ścieżką Eulera**.

Uwaga

Zamknięta ścieżka Eulera jest cyklem Eulera.

Ścieżka Eulera

Definicja (Ścieżka Eulera)

Ścieżkę, która przechodzi przez wszystkie krawędzie dokładnie jeden raz nazywamy **ścieżką Eulera**.

Uwaga

Zamknięta ścieżka Eulera jest cyklem Eulera.

Jak w praktyce znaleźć ścieżkę/cykl Eulera?

Algorytm Fleury'ego

1. $G = (V, E)$, V_E - poszukiwany ciąg wierzchołków, E_E - poszukiwany ciąg krawędzi.

Algorytm Fleury'ego

1. $G = (V, E)$, V_E - poszukiwany ciąg wierzchołków, E_E - poszukiwany ciąg krawędzi.
2. Jeżeli w grafie istnieje jakiś wierzchołek v stopnia nieparzystego, to go wybierz. Jeżeli taki wierzchołek nie istnieje, to wybierz dowolny wierzchołek v. Podstaw $V_E = v$.

Algorytm Fleury'ego

1. $G = (V, E)$, V_E - poszukiwany ciąg wierzchołków, E_E - poszukiwany ciąg krawędzi.
2. Jeżeli w grafie istnieje jakiś wierzchołek v stopnia nieparzystego, to go wybierz. Jeżeli taki wierzchołek nie istnieje, to wybierz dowolny wierzchołek v. Podstaw $V_E = v$.
   - Jeżeli z wierzchołka v nie wychodzi żadna krawędź, to przerwij.

Algorytm Fleury'ego

1. $G = (V, E)$, V_E - poszukiwany ciąg wierzchołków, E_E - poszukiwany ciąg krawędzi.
2. Jeżeli w grafie istnieje jakiś wierzchołek v stopnia nieparzystego, to go wybierz. Jeżeli taki wierzchołek nie istnieje, to wybierz dowolny wierzchołek v. Podstaw $V_E = v$.
   - Jeżeli z wierzchołka v nie wychodzi żadna krawędź, to przerwij.
   - Jeżeli pozostała dokładnie jedna krawędź $e = vw$ wychodząca z wierzchołka v do w, to usuń ten wierzchołek i tę krawędź.

Algorytm Fleury'ego

1. $G = (V, E)$, V_E - poszukiwany ciąg wierzchołków, E_E - poszukiwany ciąg krawędzi.
2. Jeżeli w grafie istnieje jakiś wierzchołek v stopnia nieparzystego, to go wybierz. Jeżeli taki wierzchołek nie istnieje, to wybierz dowolny wierzchołek v. Podstaw $V_E = v$.
   - Jeżeli z wierzchołka v nie wychodzi żadna krawędź, to przerwij.
   - Jeżeli pozostała dokładnie jedna krawędź $e = vw$ wychodząca z wierzchołka v do w, to usuń ten wierzchołek i tę krawędź.
   - Jeżeli pozostała więcej niż jedna krawędź wychodząca z v, to wybierz taką krawędź $e = vw$, po usunięciu której graf pozostanie spójny, a następnie usuń tę krawędź.

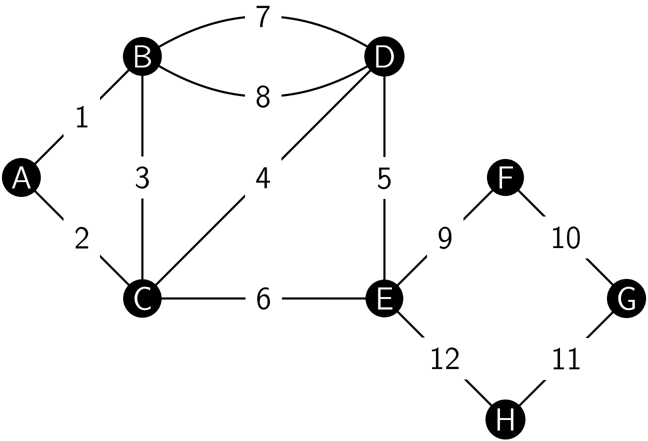
Algorytm Fleury'ego

1. $G = (V, E)$, V_E - poszukiwany ciąg wierzchołków, E_E - poszukiwany ciąg krawędzi.
2. Jeżeli w grafie istnieje jakiś wierzchołek v stopnia nieparzystego, to go wybierz. Jeżeli taki wierzchołek nie istnieje, to wybierz dowolny wierzchołek v. Podstaw $V_E = v$.
   - Jeżeli z wierzchołka v nie wychodzi żadna krawędź, to przerwij.
   - Jeżeli pozostała dokładnie jedna krawędź $e = vw$ wychodząca z wierzchołka v do w, to usuń ten wierzchołek i tę krawędź.
   - Jeżeli pozostała więcej niż jedna krawędź wychodząca z v, to wybierz taką krawędź $e = vw$, po usunięciu której graf pozostanie spójny, a następnie usuń tę krawędź.
3. Dodaj w do V_E, a e do E_E.

Algorytm Fleury'ego

1. $G = (V, E)$, V_E - poszukiwany ciąg wierzchołków, E_E - poszukiwany ciąg krawędzi.
2. Jeżeli w grafie istnieje jakiś wierzchołek v stopnia nieparzystego, to go wybierz. Jeżeli taki wierzchołek nie istnieje, to wybierz dowolny wierzchołek v. Podstaw $V_E = v$.
   - Jeżeli z wierzchołka v nie wychodzi żadna krawędź, to przerwij.
   - Jeżeli pozostała dokładnie jedna krawędź $e = vw$ wychodząca z wierzchołka v do w, to usuń ten wierzchołek i tę krawędź.
   - Jeżeli pozostała więcej niż jedna krawędź wychodząca z v, to wybierz taką krawędź $e = vw$, po usunięciu której graf pozostanie spójny, a następnie usuń tę krawędź.
3. Dodaj w do V_E, a e do E_E.
4. Zastąp v przez w i wróć do kroku 2.

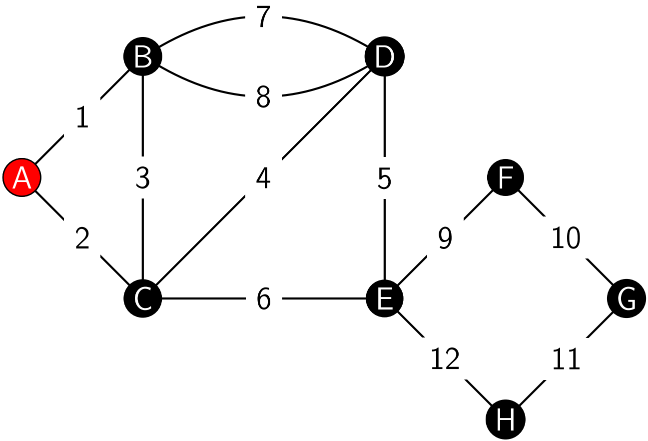
Algorytm Fleury'ego



$V_E =$

$E_E =$

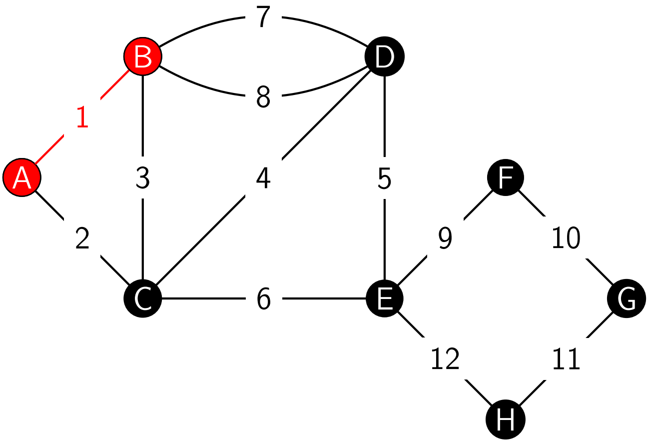
Algorytm Fleury'ego



$V_E =$

$E_E =$

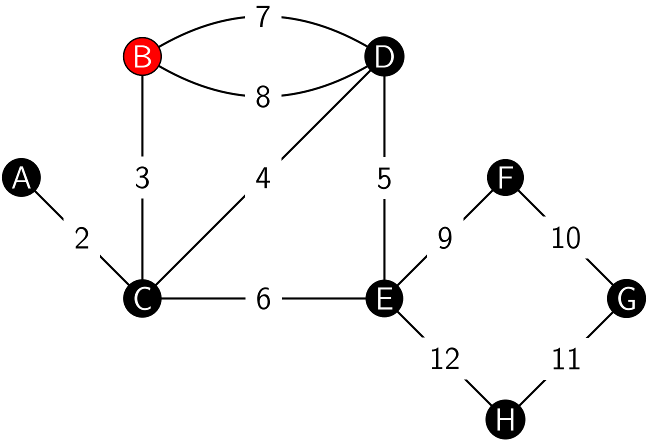
Algorytm Fleury'ego



$V_E = A$

$E_E =$

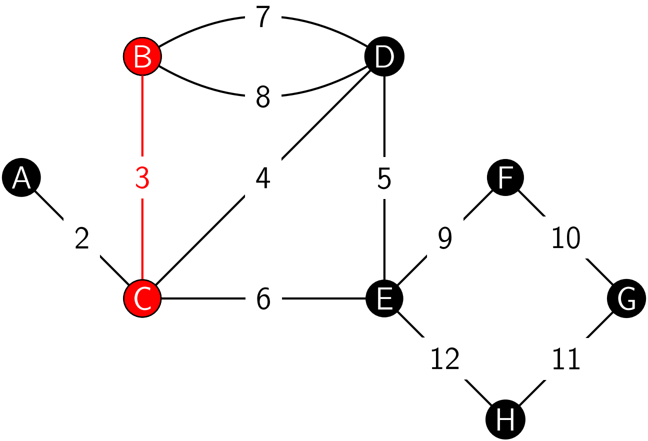
Algorytm Fleury'ego



$V_E = A, B$

$E_E = 1$

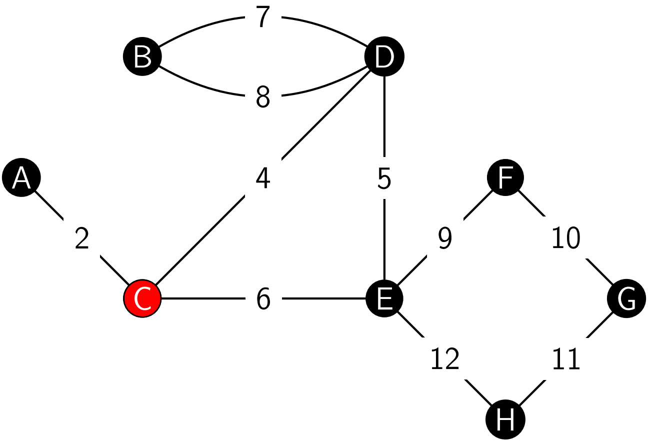
Algorytm Fleury'ego



$V_E = A, B$

$E_E = 1$

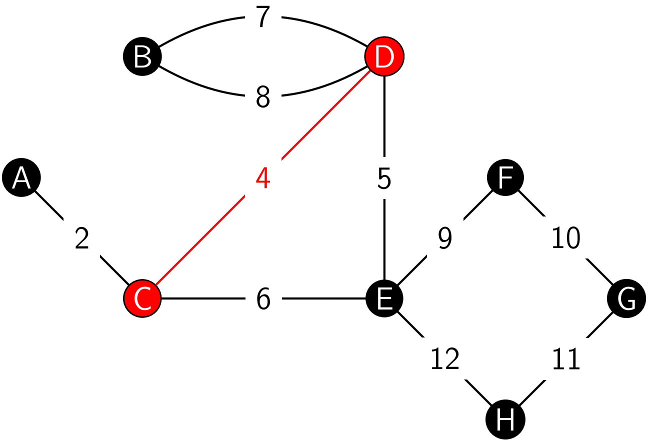
Algorytm Fleury'ego



$V_E = A, B, C$

$E_E = 1, 3$

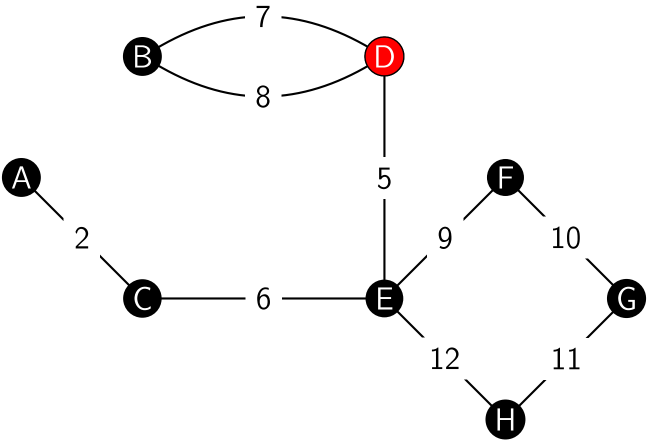
Algorytm Fleury'ego



$V_E = A, B, C$

$E_E = 1, 3$

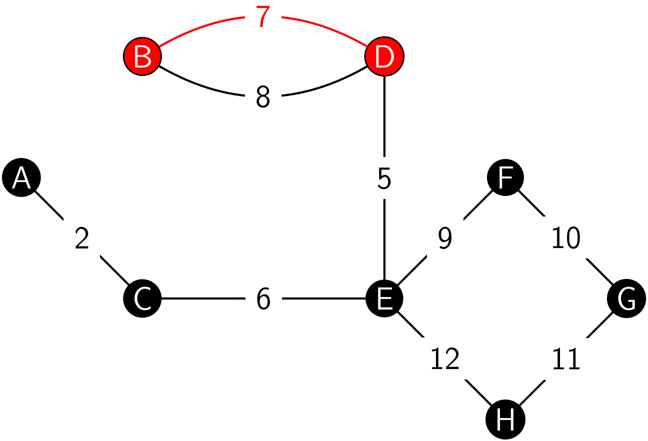
Algorytm Fleury'ego



$V_E = A, B, C, D$

$E_E = 1, 3, 4, 7$

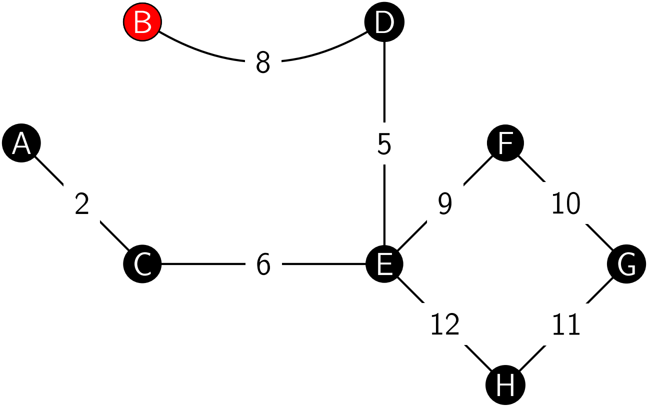
Algorytm Fleury'ego



$V_E = A, B, C, D$

$E_E = 1, 3, 4, 7$

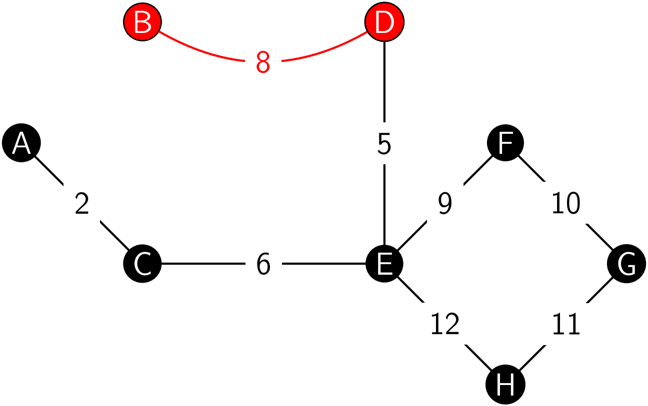
Algorytm Fleury'ego



$V_E = A, B, C, D, B$

$E_E = 1, 3, 4, 7$

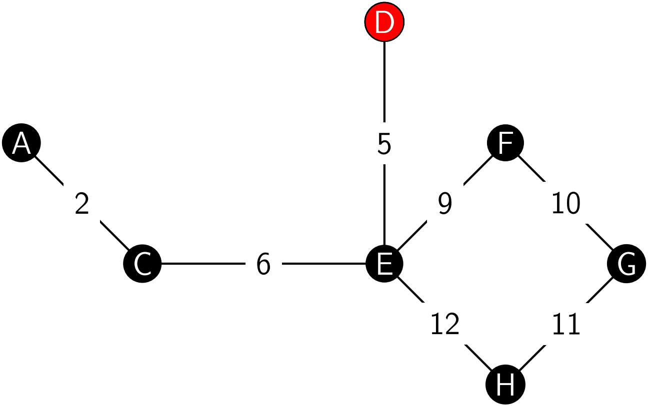
Algorytm Fleury'ego



$V_E = A, B, C, D, B$

$E_E = 1, 3, 4, 7$

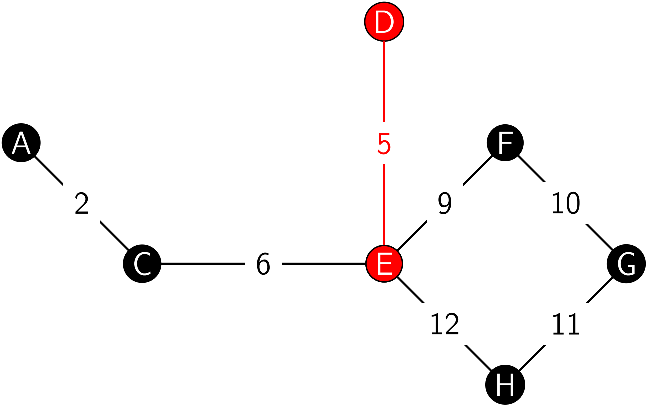
Algorytm Fleury'ego



$V_E = A, B, C, D, B, D$

$E_E = 1, 3, 4, 7, 8$

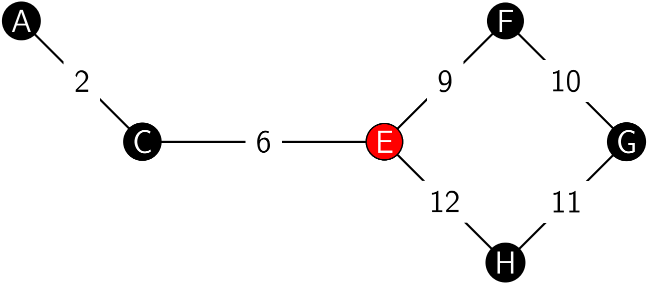
Algorytm Fleury'ego



$V_E = A, B, C, D, B, D$

$E_E = 1, 3, 4, 7, 8$

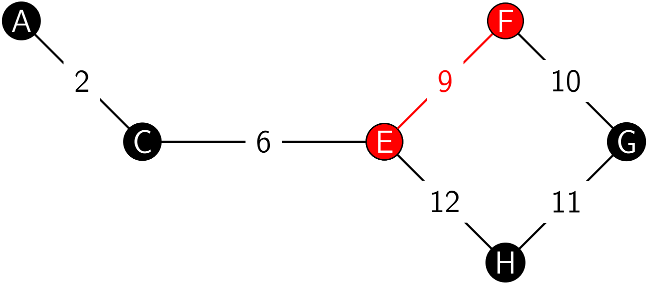
Algorytm Fleury'ego



$$V_E = A, B, C, D, B, D, E$$

$$E_E = 1, 3, 4, 7, 8, 5$$

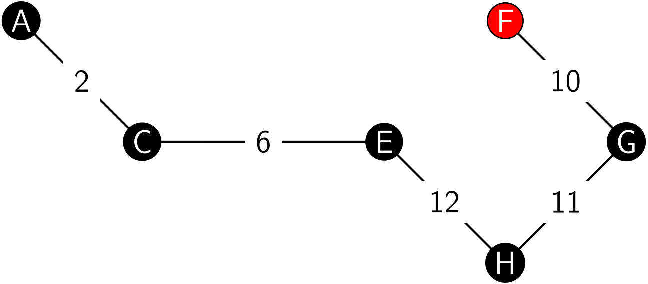
Algorytm Fleury'ego



$$V_E = A, B, C, D, B, D, E$$

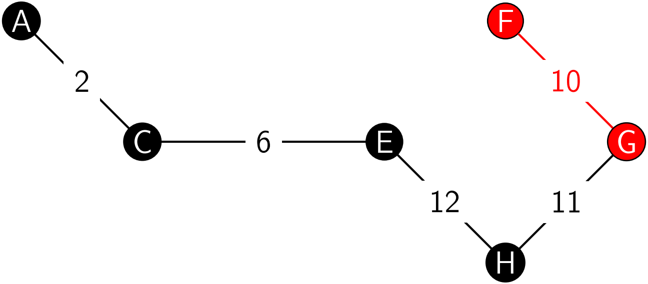
$$E_E = 1, 3, 4, 7, 8, 5$$

Algorytm Fleury'ego



$$V_E = A, B, C, D, B, D, E, F$$
$$E_E = 1, 3, 4, 7, 8, 5, 9$$

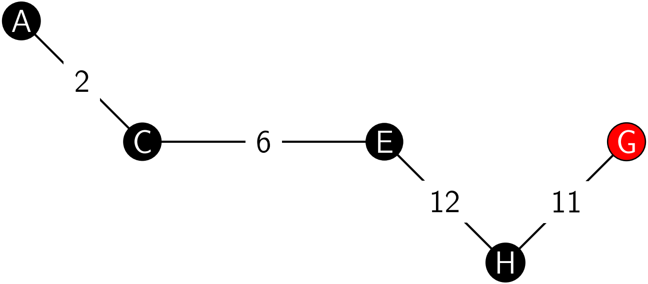
Algorytm Fleury'ego



$V_E = A, B, C, D, B, D, E, F$

$E_E = 1, 3, 4, 7, 8, 5, 9$

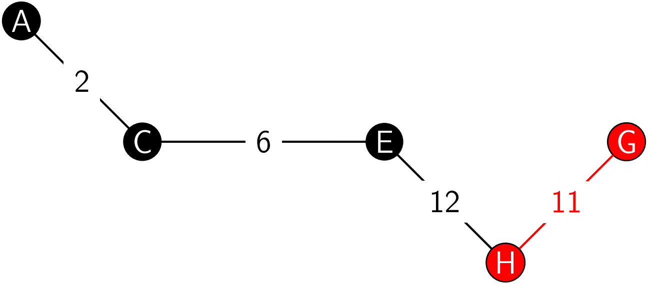
Algorytm Fleury'ego



$V_E = A, B, C, D, B, D, E, F, G$

$E_E = 1, 3, 4, 7, 8, 5, 9, 10$

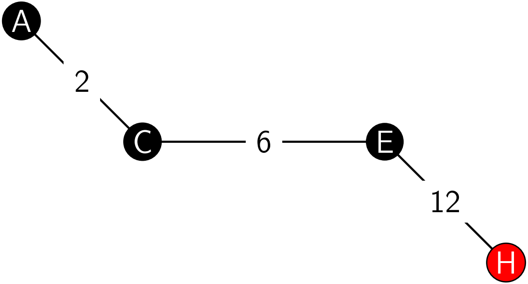
Algorytm Fleury'ego



$V_E = A, B, C, D, B, D, E, F, G$

$E_E = 1, 3, 4, 7, 8, 5, 9, 10$

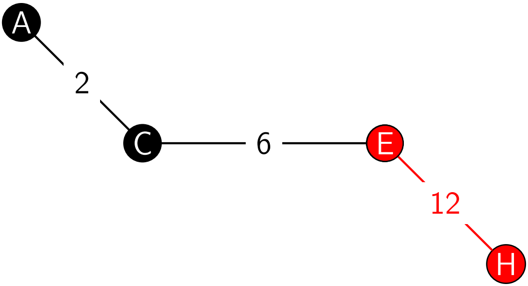
Algorytm Fleury'ego



$$V_E = A, B, C, D, B, D, E, F, G, H$$

$$E_E = 1, 3, 4, 7, 8, 5, 9, 10, 11$$

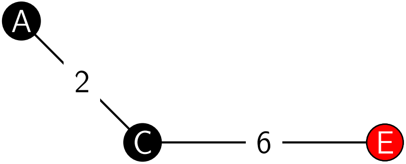
Algorytm Fleury'ego



$V_E = A, B, C, D, B, D, E, F, G, H$

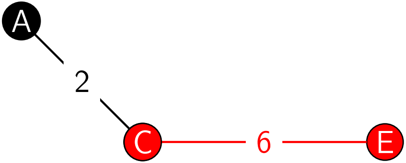
$E_E = 1, 3, 4, 7, 8, 5, 9, 10, 11$

Algorytm Fleury'ego



$$V_E = A, B, C, D, B, D, E, F, G, H, E$$
$$E_E = 1, 3, 4, 7, 8, 5, 9, 10, 11, 12$$

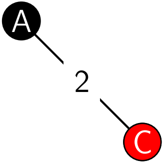
Algorytm Fleury'ego



$$V_E = A, B, C, D, B, D, E, F, G, H, E$$

$$E_E = 1, 3, 4, 7, 8, 5, 9, 10, 11, 12$$

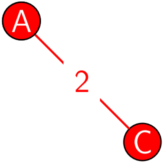
Algorytm Fleury'ego



$$V_E = A, B, C, D, B, D, E, F, G, H, E, C$$

$$E_E = 1, 3, 4, 7, 8, 5, 9, 10, 11, 12, 6$$

Algorytm Fleury'ego



$$V_E = A, B, C, D, B, D, E, F, G, H, E, C$$

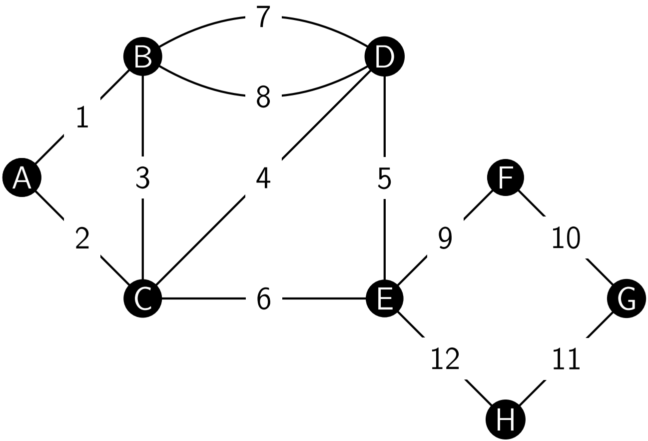
$$E_E = 1, 3, 4, 7, 8, 5, 9, 10, 11, 12, 6$$

Algorytm Fleury'ego

$$V_E = A, B, C, D, B, D, E, F, G, H, E, C, A$$

$$E_E = 1, 3, 4, 7, 8, 5, 9, 10, 11, 12, 6, 2$$

Algorytm Fleury'ego



$$V_E = A, B, C, D, B, D, E, F, G, H, E, C, A$$

$$E_E = 1, 3, 4, 7, 8, 5, 9, 10, 11, 12, 6, 2$$

Cykl Hamiltona

Definicja (Cykl Hamiltona)

Ścieżkę zamkniętą w grafie, która przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz nazywamy cyklem Hamiltona. Graf, w którym istnieje cykl Hamiltona nazywamy **grafem hamiltonowskim**.

Cykl Hamiltona

Definicja (Cykl Hamiltona)

Ścieżkę zamkniętą w grafie, która przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz nazywamy cyklem Hamiltona. Graf, w którym istnieje cykl Hamiltona nazywamy **grafem hamiltonowskim**.

Definicja (Ścieżka Hamiltona)

Ścieżkę, niekoniecznie zamkniętą, która przechodzi przez każdy wierzchołek grafu dokładnie jeden raz nazywamy **ścieżką Hamiltona**.

Cykl Hamiltona

Uwaga

Nie jest znana charakteryzacja grafów hamiltonowskich tak prosta, jak dla grafów eulerowskich.

Cykl Hamiltona

Uwaga

Nie jest znana charakteryzacja grafów hamiltonowskich tak prosta, jak dla grafów eulerowskich.

Twierdzenie (Twierdzenie Orego)

Jeżeli graf prosty $G = (V, E)$ ma przynajmniej trzy wierzchołki oraz dla każdej pary niesąsiednich wierzchołków v i w zachodzi

$$\deg v + \deg w \geqslant |V|,$$

to graf G jest hamiltonowski.

Twierdzenie Orego

Twierdzenie

$G = (V, E)$, $|V| = n \geqslant 3$,

$$\deg v + \deg w \geqslant n, \qquad vw \notin E,$$

to graf G jest hamiltonowski.

Twierdzenie Orego

Twierdzenie

$G = (V, E)$, $|V| = n \geqslant 3$,

$$\deg v + \deg w \geqslant n, \qquad vw \notin E,$$

to graf G jest hamiltonowski.

Dowód. Załóżmy, że teza nie zachodzi, to znaczy, że

$$\deg v + \deg w \geqslant n, \qquad vw \notin E,$$

a graf G nie jest hamiltonowski.

- Możemy założyć, że graf G ma maksymalnie dużo krawędzi, to znaczy, że po dodaniu jakiejkolwiek nowej krawędzi, nowy graf będzie hamiltonowski.

Twierdzenie Orego

Twierdzenie

$G = (V, E)$, $|V| = n \geqslant 3$,

$$\deg v + \deg w \geqslant n, \qquad vw \notin E,$$

to graf G jest hamiltonowski.

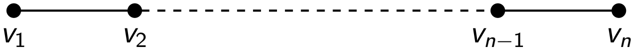
Dowód. Załóżmy, że teza nie zachodzi, to znaczy, że

$$\deg v + \deg w \geqslant n, \qquad vw \notin E,$$

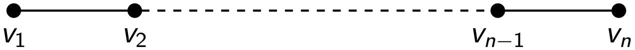
a graf G nie jest hamiltonowski.

- Możemy założyć, że graf G ma maksymalnie dużo krawędzi, to znaczy, że po dodaniu jakiejkolwiek nowej krawędzi, nowy graf będzie hamiltonowski.
- Istnieje zatem w grafie G ścieżka Hamiltona $v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_n$.

Twierdzenie Orego

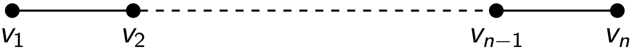


Twierdzenie Orego



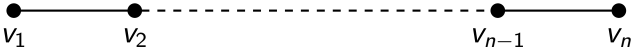
- Na mocy założenia mamy $\deg v_1 + \deg v_n \geqslant n$.

Twierdzenie Orego



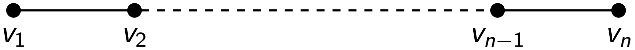
- Na mocy założenia mamy $\deg v_1 + \deg v_n \geqslant n$.
- v_1 ma $\deg v_1 - 1$ sąsiadów wśród $v_3, \ldots, v_{n-1}$.

Twierdzenie Orego



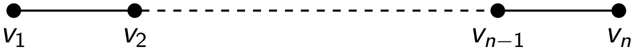
- Na mocy założenia mamy $\deg v_1 + \deg v_n \geqslant n$.
- v_1 ma $\deg v_1 - 1$ sąsiadów wśród $v_3, \ldots, v_{n-1}$.
- v_n ma $\geqslant n - \deg v_1 - 1$ sąsiadów wśród $n - 3$ wierzchołków $v_2, \ldots, v_{n-2}$.

Twierdzenie Orego

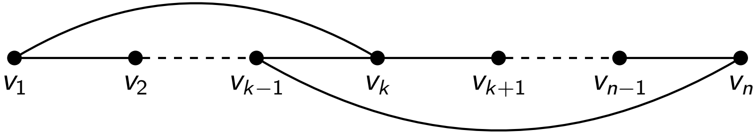


- Na mocy założenia mamy $\deg v_1 + \deg v_n \geqslant n$.
- v_1 ma $\deg v_1 - 1$ sąsiadów wśród $v_3, \ldots, v_{n-1}$.
- v_n ma $\geqslant n - \deg v_1 - 1$ sąsiadów wśród $n - 3$ wierzchołków $v_2, \ldots, v_{n-2}$.
- Musi zatem istnieć (dlaczego?) taki indeks k, że v_1 jest sąsiadem v_k, a v_n jest sąsiadem v_{k-1}.

Twierdzenie Orego



- Na mocy założenia mamy $\deg v_1 + \deg v_n \geqslant n$.
- v_1 ma $\deg v_1 - 1$ sąsiadów wśród $v_3, \dots, v_{n-1}$.
- v_n ma $\geqslant n - \deg v_1 - 1$ sąsiadów wśród $n - 3$ wierzchołków $v_2, \dots, v_{n-2}$.
- Musi zatem istnieć (dlaczego?) taki indeks k, że v_1 jest sąsiadem v_k, a v_n jest sąsiadem v_{k-1}.



- $v_1 \longrightarrow v_k \longrightarrow v_{k+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_n \longrightarrow v_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_1$ jest cyklem Hamiltona. Sprzeczność.

Twierdzenie Diraca

Wniosek

Jeżeli w grafie $G = (V, E)$ dla dowolnego wierzchołka $v \in V$ zachodzi

$$\deg v \geqslant \frac{|V|}{2},$$

to graf G jest hamiltonowski.

Grafy hamiltonowskie

Uwaga

Problem znajdowanie cykli Hamiltona jest znacznie trudniejszy od problemu znajdowania cykli Eulera.

Grafy hamiltonowskie

Uwaga

Problem znajdowanie cykli Hamiltona jest znacznie trudniejszy od problemu znajdowania cykli Eulera.

Problem komiwojażera

Znaleźć najkrótszą drogę Hamiltona w zadanym grafie z wagami.

Grafy hamiltonowskie

Uwaga

Problem znajdowanie cykli Hamiltona jest znacznie trudniejszy od problemu znajdowania cykli Eulera.

Problem komiwojażera

Znaleźć najkrótszą drogę Hamiltona w zadanym grafie z wagami.

Uwaga

$$\begin{aligned} P = NP \quad &\Leftrightarrow \quad SAT \\ &\Leftrightarrow \quad \text{(decyzyjny) problem komiwojażera} \end{aligned}$$

Skojarzenia w grafach dwudzielnych

Załóżmy, że $G = (V, E) = (V_1 \cup V_2, E)$ jest grafem dwudzielnym.

Skojarzenia w grafach dwudzielnych

Załóżmy, że $G = (V, E) = (V_1 \cup V_2, E)$ jest grafem dwudzielnym.

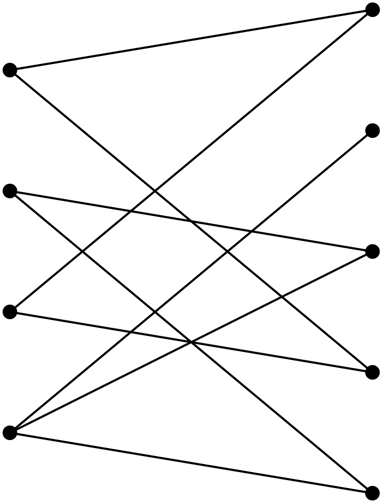
Definicja (Skojarzenie)

Skojarzeniem w grafie G nazywamy taki podzbiór $M \subset E$, że nie istnieją dwie krawędzie w M wychodzące z tego samego wierzchołka, czyli

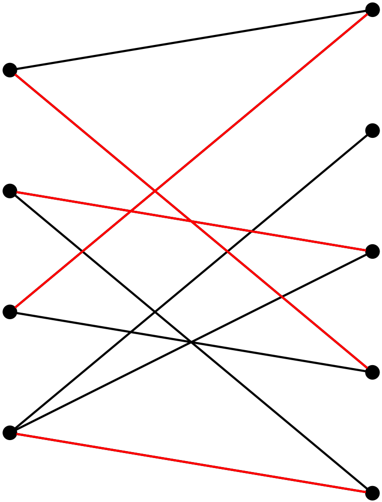
$$v_1 v_2 \in M \wedge w_1 w_2 \in M \Rightarrow v_1 \neq w_1 \wedge v_2 \neq w_2.$$

Skojarzeniem pełnym nazwiemy takie skojarzenie, w którym każdy wierzchołek z V_1 jest skojarzony (istnieje w M krawędź incydentna do tego wierzchołka).

Skojarzenia w grafach dwudzielnych



Skojarzenia w grafach dwudzielnych



Twierdzenie o kojarzeniu małżeństw

Twierdzenie (Twierdzenie Halla)

W grafie dwudzielnym $G = (V_1 \cup V_2, E)$ *istnieje pełne skojarzenie* V_1 *z* V_2 *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $A \subset V_1$ *mamy*

$$|A| \leqslant |B|,$$

gdzie B *jest zbiorem wszystkich wierzchołków, które są sąsiadami z jakimś wierzchołkiem ze zbioru* A*.*

Twierdzenie o kojarzeniu małżeństw

Twierdzenie (Twierdzenie Halla)

W grafie dwudzielnym $G = (V_1 \cup V_2, E)$ *istnieje pełne skojarzenie* V_1 *z* V_2 *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $A \subset V_1$ *mamy*

$$|A| \leqslant |B|,$$

gdzie B *jest zbiorem wszystkich wierzchołków, które są sąsiadami z jakimś wierzchołkiem ze zbioru* A*.*

Niestety założenia tego twierdzenia ciężko w praktyce sprawdzić.

Twierdzenie o kojarzeniu małżeństw

Twierdzenie

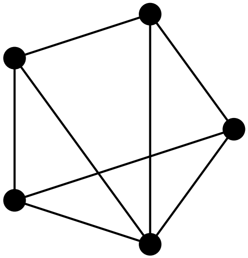
Jeżeli w grafie dwudzielnym $G = (V_1 \cup V_2, E)$ *zachodzi warunek*

$$\deg v \geqslant \deg w, \qquad v \in V_1,\ w \in V_2,$$

to w grafie G *istnieje pełne skojarzenie* V_1 *z* V_2.

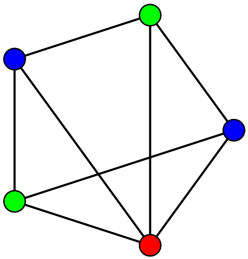
Kolorowanie grafów

Czy da się pokolorować trzema kolorami (R,G,B) wierzchołki grafu w ten sposób, żeby sąsiednie wierzchołki miały różne kolory?



Kolorowanie grafów

Czy da się pokolorować trzema kolorami (R,G,B) wierzchołki grafu w ten sposób, żeby sąsiednie wierzchołki miały różne kolory?



Kolorowanie grafów

Definicja (Kolorowanie)

Kolorowaniem grafu G nazywamy takie przyporządkowanie pewnej liczby kolorów wierzchołkom tego grafu, że każde dwa sąsiednie wierzchołki mają różne kolory.

Kolorowanie grafów

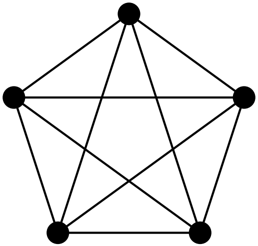
Definicja (Kolorowanie)

Kolorowaniem grafu G nazywamy takie przyporządkowanie pewnej liczby kolorów wierzchołkom tego grafu, że każde dwa sąsiednie wierzchołki mają różne kolory.

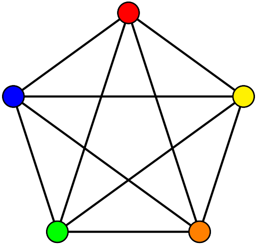
Definicja (Liczba chromatyczna)

Najmniejszą liczbę kolorów wystarczającą do utworzenia kolorowania grafu G nazywamy **liczbą chromatyczną** grafu G i oznaczamy $\chi(G)$.

Kolorowanie grafów

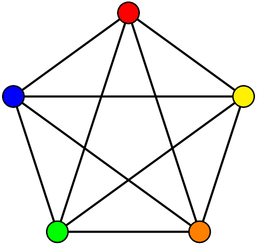


Kolorowanie grafów



$$\chi(K_5) = 5$$

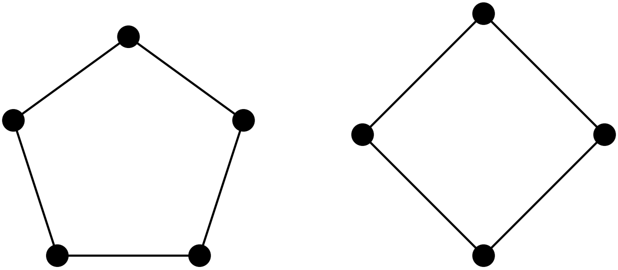
Kolorowanie grafów



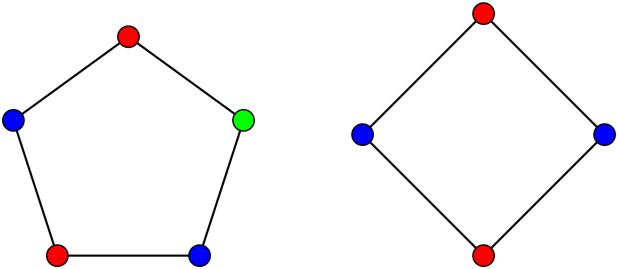
$$\chi(K_5) = 5$$

$$\chi(K_n) = n$$

Kolorowanie grafów

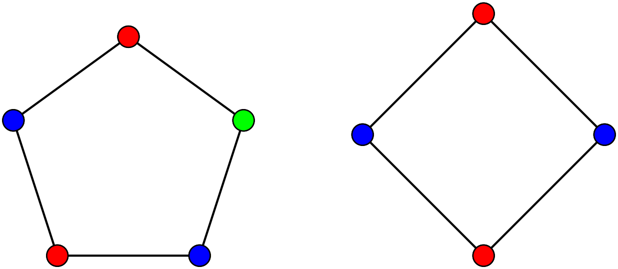


Kolorowanie grafów



$$\chi(C_5) = 3, \qquad \chi(C_4) = 2$$

Kolorowanie grafów



$$\chi(C_5) = 3, \qquad \chi(C_4) = 2$$

$$\chi(C_{2n+1}) = 3, \qquad \chi(C_{2n}) = 2$$

Kolorowanie grafów

Twierdzenie

Graf G, który ma co najmniej jedną krawędź, jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi(G) = 2$.

Kolorowanie grafów

Twierdzenie

Graf G*, który ma co najmniej jedną krawędź, jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy* $\chi(G) = 2$.

Twierdzenie

Jeżeli w grafie G *maksymalny stopień wierzchołków wynosi* k*, to* $\chi(G) \leqslant k + 1$.

Kolorowanie się przydaje

- Zagadnienie planu zajęć.
- Propagacja update'ów.
- Przypisanie częstotliwości.
- Alokacja rejestrów pamięci.
- Zagadnienie czterech barw.

Kolorowanie się przydaje

- Zagadnienie planu zajęć.
- Propagacja update'ów.
- Przypisanie częstotliwości.
- Alokacja rejestrów pamięci.
- Zagadnienie czterech barw.

Twierdzenie

Jeżeli graf G jest planarny, to

$$\chi(G) \leqslant 4.$$

Kolorowanie grafów

$$
\begin{aligned}
P = NP \quad &\Leftrightarrow \quad SAT \\
&\Leftrightarrow \quad \text{(decyzyjny) problem komiwojażera} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{znalezienie } \chi(G) \\
&\Leftrightarrow \quad \chi(\text{planarny}) = 3?
\end{aligned}
$$

Teoria Ramsey'a

Niech K_N będzie grafem pełnym o N wierzchołkach.
Kolorujemy każdą jego krawędź jednym z dwóch kolorów: czerwonym lub niebieskim (R,B).

Teoria Ramsey'a

Niech K_N będzie grafem pełnym o N wierzchołkach. Kolorujemy każdą jego krawędź jednym z dwóch kolorów: czerwonym lub niebieskim (R,B).

Czy, dla danych $n, k \geqslant 2$, istnieje takie N, że w grafie K_N znajdziemy podgraf K_n koloru czerwonego lub podgraf K_k koloru niebieskiego?

Teoria Ramsey'a

Niech K_N będzie grafem pełnym o N wierzchołkach. Kolorujemy każdą jego krawędź jednym z dwóch kolorów: czerwonym lub niebieskim (R,B).

Czy, dla danych $n, k \geqslant 2$, istnieje takie N, że w grafie K_N znajdziemy podgraf K_n koloru czerwonego lub podgraf K_k koloru niebieskiego?

Definicja (Liczba Ramsey'a)

Najmniejszą liczbę N (jeśli istnieje), która ma powyższą własność nazywamy **liczbą Ramsey'a** i oznaczamy

$$R(n, k).$$

Teoria Ramsey'a

Twierdzenie

$$R(n, k) < +\infty.$$

Teoria Ramsey'a

Twierdzenie

$$R(n, k) < +\infty.$$

Dowód. Indukcja względem (n, k).

Teoria Ramsey'a

Twierdzenie

$$R(n, k) < +\infty.$$

Dowód. Indukcja względem (n, k).

- $R(n, 2) = \quad , R(2, k) = \quad .$

Teoria Ramsey'a

Twierdzenie

$$R(n, k) < +\infty.$$

Dowód. Indukcja względem (n, k).

- $R(n, 2) = n$, $R(2, k) = k$.
- Załóżmy, że $R(n-1, k)$ i $R(n, k-1)$ są skończone.

Teoria Ramsey'a

Twierdzenie

$$R(n,k) < +\infty.$$

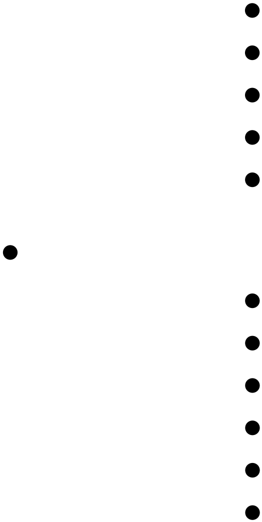
Dowód. Indukcja względem (n,k).

- $R(n,2) = n$, $R(2,k) = k$.
- Załóżmy, że $R(n-1,k)$ i $R(n,k-1)$ są skończone.
- Wykażemy, że $R(n,k)$ musi być skończone i

$$R(n,k) \leqslant R(n-1,k) + R(n,k-1) =: N.$$

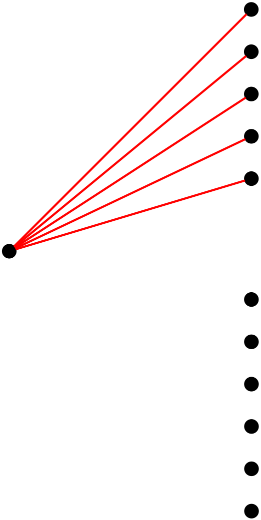
Teoria Ramsey'a

Teoria Ramsey'a



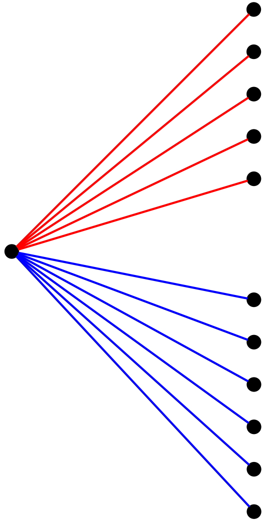
- Wybieramy dowolny wierzchołek v.

Teoria Ramsey'a



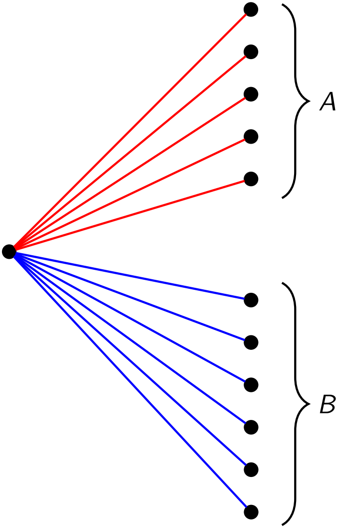
- Wybieramy dowolny wierzchołek v.

Teoria Ramsey'a



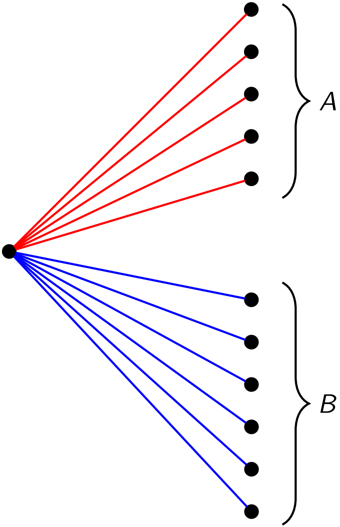
- Wybieramy dowolny wierzchołek v.

Teoria Ramsey'a



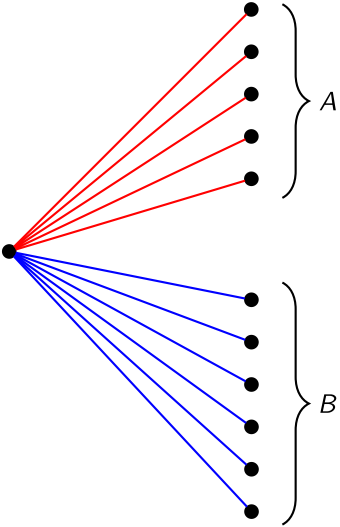
- Wybieramy dowolny wierzchołek v.
- Tworzymy zbiory A i B.

Teoria Ramsey'a



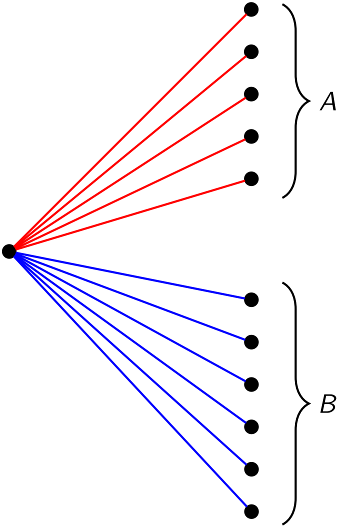
- Wybieramy dowolny wierzchołek v.
- Tworzymy zbiory A i B.
- $|A| + |B| = N - 1 = R(n-1, k) + R(n, k-1)$.

Teoria Ramsey'a



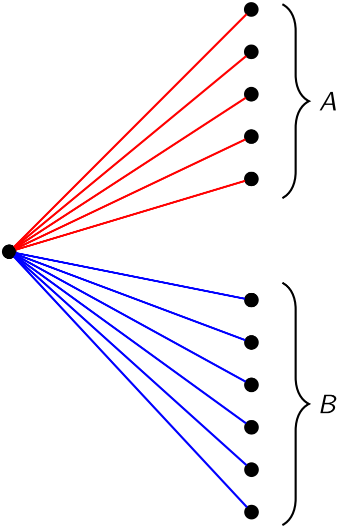
- Wybieramy dowolny wierzchołek v.
- Tworzymy zbiory A i B.
- $|A| + |B| = N - 1 = R(n-1, k) + R(n, k-1)$.
- $|A| \geqslant R(n-1, k)$ (lub $|B| \geqslant R(n, k-1)$).

Teoria Ramsey'a



- Wybieramy dowolny wierzchołek v.
- Tworzymy zbiory A i B.
- $|A| + |B| = N - 1 = R(n-1, k) + R(n, k-1)$.
- $|A| \geqslant R(n-1, k)$ (lub $|B| \geqslant R(n, k-1)$).
- W A znajdziemy czerwony K_{n-1} lub niebieski K_k.

Teoria Ramsey'a



- Wybieramy dowolny wierzchołek v.
- Tworzymy zbiory A i B.
- $|A| + |B| = N - 1 = R(n-1, k) + R(n, k-1)$.
- $|A| \geqslant R(n-1, k)$ (lub $|B| \geqslant R(n, k-1)$).
- W A znajdziemy czerwony K_{n-1} lub niebieski K_k.
- Zatem jest niebieski K_k lub (razem z v) czerwony K_n.

Teoria Ramsey'a

[

Pytanie]

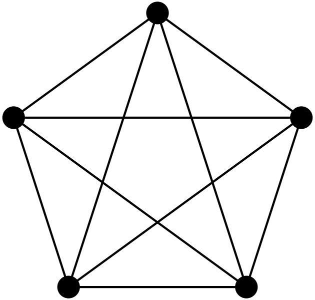
$$R(3,3) = ?$$

Teoria Ramsey'a

[

Pytanie]

$$R(3,3) = ?$$



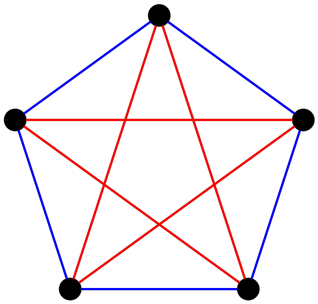
$$R(3,3) > 5.$$

Teoria Ramsey'a

[

Pytanie]

$$R(3,3) = ?$$



$$R(3,3) > 5.$$

Teoria Ramsey'a

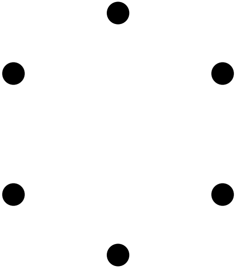
Twierdzenie

$$R(3,3) = 6.$$

Teoria Ramsey'a

Twierdzenie

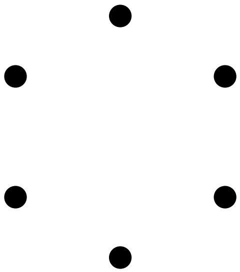
$$R(3,3) = 6.$$



Teoria Ramsey'a

Twierdzenie

$$R(3,3) = 6.$$

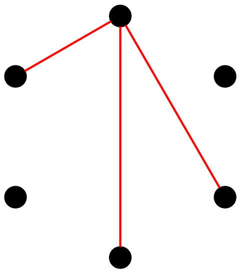


- Wybieramy dowolny wierzchołek.

Teoria Ramsey'a

Twierdzenie

$$R(3,3) = 6.$$

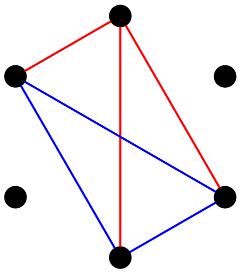


- Wybieramy dowolny wierzchołek.
- Ma on 5 sąsiadów, więc przynajmniej 3 krawędzie muszę być jednakowego koloru.

Teoria Ramsey'a

Twierdzenie

$$R(3,3) = 6.$$

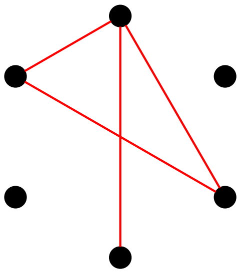


- Wybieramy dowolny wierzchołek.
- Ma on 5 sąsiadów, więc przynajmniej 3 krawędzie muszę być jednakowego koloru.
- Te trzy sąsiednie wierzchołki muszą być niebieskim trójkątem, lub

Teoria Ramsey'a

Twierdzenie

$$R(3,3) = 6.$$



- Wybieramy dowolny wierzchołek.
- Ma on 5 sąsiadów, więc przynajmniej 3 krawędzie muszę być jednakowego koloru.
- Te trzy sąsiednie wierzchołki muszą być niebieskim trójkątem, lub
- musi między pewnymi dwoma z nich istnieć krawędź czerwona.
- Mamy jednokolorowy K_3.

Teoria Ramsey'a

$$R(3,3) = 6$$

Teoria Ramsey'a

$$R(3,3) = 6$$

$$R(4,4) = 18$$

Teoria Ramsey'a

$$R(3,3) = 6$$

$$R(4,4) = 18$$

$$43 \leqslant R(5,5) \leqslant 48$$

Teoria Ramsey'a

$$R(3,3) = 6$$

$$R(4,4) = 18$$

$$43 \leqslant R(5,5) \leqslant 48$$

$$\vdots$$

Grafy planarne

Graf płaski – rysunek grafu na płaszczyźnie, w którym żadne dwie krawędzie się nie przecinają.

Grafy planarne

Graf płaski – rysunek grafu na płaszczyźnie, w którym żadne dwie krawędzie się nie przecinają.

Graf planarny – graf, który da się narysować jako graf płaski.

Grafy planarne

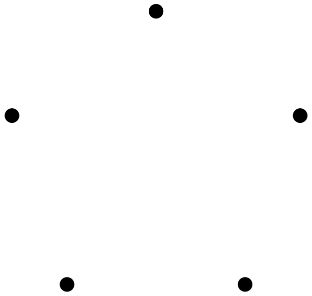
Twierdzenie

Grafy K_5 *i* $K_{3,3}$ *nie są planarne.*

Grafy planarne

Twierdzenie

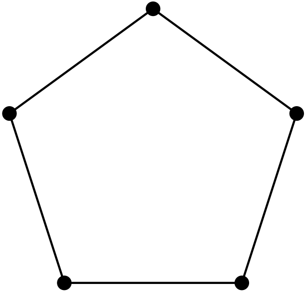
Grafy K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne.



Grafy planarne

Twierdzenie

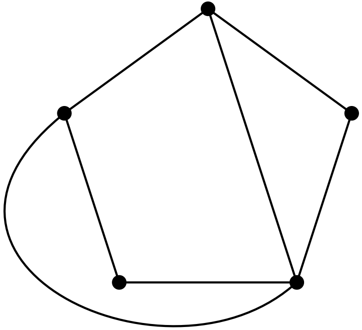
Grafy K_5 *i* $K_{3,3}$ *nie są planarne.*



Grafy planarne

Twierdzenie

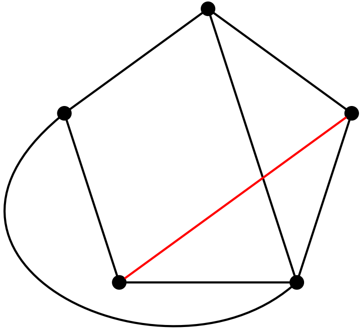
Grafy K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne.



Grafy planarne

Twierdzenie

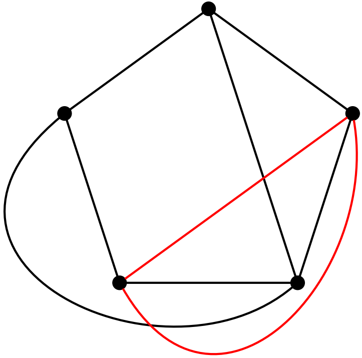
Grafy K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne.



Grafy planarne

Twierdzenie

Grafy K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne.



Grafy planarne

Definicja (Grafy homeomorficzne)

Dwa grafy G_1 i G_2 nazywamy **homeomorficznymi**, jeżeli z jednego z nich otrzymamy drugi po wykonaniu skończenie wielu operacji:

1. dodanie wierzchołka stopnia dwa do istniejącej krawędzi, to znaczy na istniejącej krawędzi vw dodajemy nowy wierzchołek u:
$$(V(G_1) \cup \{u\}), \qquad E(G_1) \cup \{vu, uw\} \setminus \{vw\},$$
2. usunięcie wierzchołka stopnia dwa: $\deg v = 2$, $vu, vw \in E(G_1)$
$$V(G_1) \setminus \{v\}, \qquad E(G_1) \cup \{uw\} \setminus \{vu, vw\}.$$

Grafy planarne

Twierdzenie (Twierdzenie Kuratowskiego)

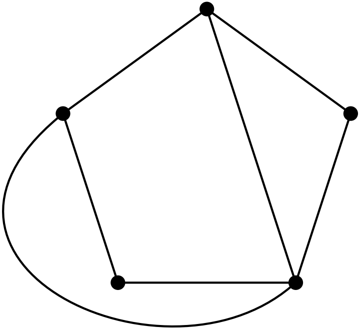
Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy żaden jego podgraf nie jest hemeomorficzny z K_5 *ani z* $K_{3,3}$.

Grafy planarne

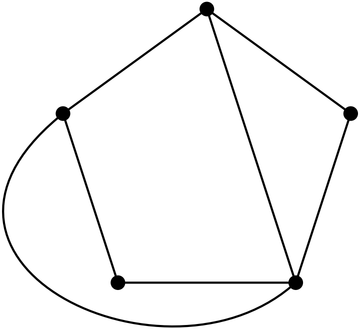
Definicja (Ściana)

W grafie płaskim **ścianą** nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, które da się połączyć krzywą, która nie przecina żadnej krawędzi.

Grafy planarne

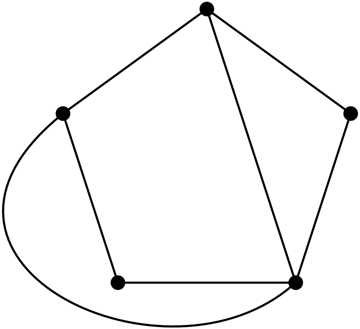


Grafy planarne



Ten graf ma cztery ściany (w tym jedną nieskończoną).

Grafy planarne



Ten graf ma cztery ściany (w tym jedną nieskończoną).
Zauważmy, że

$$|V| - |E| + 4 = 2.$$

Grafy planarne

Twierdzenie (Twierdzenie Eulera)

Niech f będzie liczbą ścian w grafie płaskim $G = (V, E)$, a k liczbą jego spójnych składowych. Wtedy

$$|V| - |E| + f = k + 1.$$

Grafy planarne

Twierdzenie (Twierdzenie Eulera)

Niech f będzie liczbą ścian w grafie płaskim $G = (V, E)$, a k liczbą jego spójnych składowych. Wtedy

$$|V| - |E| + f = k + 1.$$

Dowód. Indukcja ze względu na liczbę krawędzi.

- Jeżeli $|E| = 0$, to $|V| = k$, $f = 1$ i

$$|V| - |E| + f = k - 0 + 1 = k + 1.$$

- Załóżmy, że każdy graf, który ma mniej niż $|E|$ krawędzi spełnia podaną równość.

Grafy planarne

- Wybierzmy dowolną krawędź $vw \in E$.

Grafy planarne

- Wybierzmy dowolną krawędź $vw \in E$.
- Jeżeli nie należy ona do żadnego cyklu, to po usunięciu tej krawędzi

Grafy planarne

- Wybierzmy dowolną krawędź $vw \in E$.
- Jeżeli nie należy ona do żadnego cyklu, to po usunięciu tej krawędzi
  - nie zmieni się liczba ścian,

Grafy planarne

- Wybierzmy dowolną krawędź $vw \in E$.
- Jeżeli nie należy ona do żadnego cyklu, to po usunięciu tej krawędzi
  - nie zmieni się liczba ścian,
  - liczba spójnych składowych wzrośnie o 1,

Grafy planarne

- Wybierzmy dowolną krawędź $vw \in E$.
- Jeżeli nie należy ona do żadnego cyklu, to po usunięciu tej krawędzi
  - nie zmieni się liczba ścian,
  - liczba spójnych składowych wzrośnie o 1,
  - z założenia indukcyjnego

$$|V| - (|E| - 1) + f = (k + 1) + 1.$$

Grafy planarne

- Wybierzmy dowolną krawędź $vw \in E$.
- Jeżeli nie należy ona do żadnego cyklu, to po usunięciu tej krawędzi
  - nie zmieni się liczba ścian,
  - liczba spójnych składowych wzrośnie o 1,
  - z założenia indukcyjnego

$$|V| - (|E| - 1) + f = (k + 1) + 1.$$

- Jeżeli vw należy do pewnego cyklu C, to po usunięciu tej krawędzi

Grafy planarne

- Wybierzmy dowolną krawędź $vw \in E$.
- Jeżeli nie należy ona do żadnego cyklu, to po usunięciu tej krawędzi
  - nie zmieni się liczba ścian,
  - liczba spójnych składowych wzrośnie o 1,
  - z założenia indukcyjnego

$$|V| - (|E| - 1) + f = (k + 1) + 1.$$

- Jeżeli vw należy do pewnego cyklu C, to po usunięciu tej krawędzi
  - liczba ścian zmaleje o 1,

Grafy planarne

- Wybierzmy dowolną krawędź $vw \in E$.
- Jeżeli nie należy ona do żadnego cyklu, to po usunięciu tej krawędzi
  - nie zmieni się liczba ścian,
  - liczba spójnych składowych wzrośnie o 1,
  - z założenia indukcyjnego

$$|V| - (|E| - 1) + f = (k + 1) + 1.$$

- Jeżeli vw należy do pewnego cyklu C, to po usunięciu tej krawędzi
  - liczba ścian zmaleje o 1,
  - nie zmieni się liczba spójnych składowych,

Grafy planarne

- Wybierzmy dowolną krawędź $vw \in E$.
- Jeżeli nie należy ona do żadnego cyklu, to po usunięciu tej krawędzi
  - nie zmieni się liczba ścian,
  - liczba spójnych składowych wzrośnie o 1,
  - z założenia indukcyjnego

$$|V| - (|E| - 1) + f = (k + 1) + 1.$$

- Jeżeli vw należy do pewnego cyklu C, to po usunięciu tej krawędzi
  - liczba ścian zmaleje o 1,
  - nie zmieni się liczba spójnych składowych,
  - z założenia indukcyjnego

$$|V| - (|E| - 1) + (f - 1) = k + 1.$$

Grafy skierowane

Graf skierowany to graf, w którym krawędzie mają określony kierunek.

Grafy skierowane

Graf skierowany to graf, w którym krawędzie mają określony kierunek.

Definicja (Graf skierowany)

Parę uporządkowaną $G = (V, E)$ nazywamy **grafem skierowanym** (lub **digrafem**), jeżeli V jest dowolnym zbiorem, a E jest multizbiorem skierowanych krawędzi, to znaczy

$$E \subset V \times V,$$

przy czym elementy w E mogą się powtarzać.

Grafy skierowane

Graf skierowany to graf, w którym krawędzie mają określony kierunek.

Definicja (Graf skierowany)

Parę uporządkowaną $G = (V, E)$ nazywamy **grafem skierowanym** (lub **digrafem**), jeżeli V jest dowolnym zbiorem, a E jest multizbiorem skierowanych krawędzi, to znaczy

$$E \subset V \times V,$$

przy czym elementy w E mogą się powtarzać.

Jeżeli $e = (v, w) \in E$, to v nazywamy **początkiem** krawędzi e, a w jej **końcem**.

Macierze

Macierzą wymiaru $n \times m$ (o n wierszach i m kolumnach) nazywamy tablicę liczb rzeczywistych

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Piszemy również

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

lub

$$A = [a_{ij}].$$

Macierze

Macierzą wymiaru $n \times m$ (o n wierszach i m kolumnach) nazywamy tablicę liczb rzeczywistych

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Piszemy również

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

lub

$$A = [a_{ij}].$$

Element a_{ij} jest liczbą znajdującą się w i-tym wierszu i j-tej kolumnie.

Macierze

Macierzą wymiaru $n \times m$ (o n wierszach i m kolumnach) nazywamy tablicę liczb rzeczywistych

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Piszemy również

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

lub

$$A = [a_{ij}].$$

Element a_{ij} jest liczbą znajdującą się w i-tym wierszu i j-tej kolumnie.
Zbiór macierzy wymiaru $n \times m$ oznaczamy $\mathbb{R}_{n \times m}$.

Dodawanie i odejmowanie macierzy

Jeżeli $A, B \in \mathbb{R}_{n \times m}$ (czyli macierze A i B są dokładnie tego samego wymiaru), to definiujemy $A \pm B$ wzorem

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm a_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \pm b_{n1} & \dots & a_{nm} \pm b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Dodawanie i odejmowanie macierzy

Jeżeli $A, B \in \mathbb{R}_{n\times m}$ (czyli macierze A i B są dokładnie tego samego wymiaru), to definiujemy $A \pm B$ wzorem

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm a_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \pm b_{n1} & \dots & a_{nm} \pm b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Inaczej mówiąc,

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Mnożenie macierzy przez liczbę

Niech $c \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & \dots & ca_{nm} \end{bmatrix}.$$

Mnożenie macierzy przez liczbę

Niech $c \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & \dots & ca_{nm} \end{bmatrix}.$$

Inaczej mówiąc,

$$cA = c[a_{ij}] = [ca_{ij}].$$

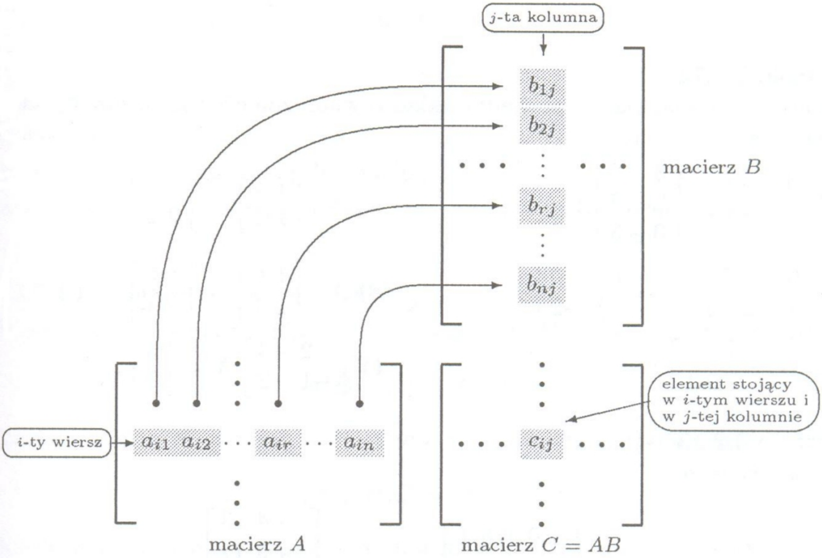
Własności

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $c(A + B) = cA + cB$
- $(c + d)A = cA + dA$
- $(cd)A = c(dA)$

Mnożenie macierzy

Niech $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $B \in \mathbb{R}_{m\times k}$. Wtedy definiujemy iloczyn $C = A \cdot B$ wzorem

$$C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}_{n\times k}, \qquad c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj}.$$



j-ta kolumna
b_{1j}
b_{2j}
b_{rj}
b_{nj}
macierz B
i-ty wiersz
a_{i1} a_{i2} $\cdots$ a_{ir} $\cdots$ a_{in}
element stojący w i-tym wierszu i w j-tej kolumnie
c_{ij}
macierz A
macierz $C = AB$

Własności iloczynu

- $A(B + C) = AB + AC$ dla $A \in \mathbb{R}_{n \times m}$ i $B, C \in \mathbb{R}_{m \times k}$

Własności iloczynu

- $A(B+C) = AB + AC$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $B, C \in \mathbb{R}_{m\times k}$
- $(A+B)C = AC + BC$ dla $A, B \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $C \in \mathbb{R}_{m\times k}$

Własności iloczynu

- $A(B+C) = AB + AC$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $B, C \in \mathbb{R}_{m\times k}$
- $(A+B)C = AC + BC$ dla $A, B \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $C \in \mathbb{R}_{m\times k}$
- $c(AB) = (cA)B = A(cB)$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}_{m\times k}$ i $c \in \mathbb{R}$

Własności iloczynu

- $A(B+C) = AB + AC$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $B, C \in \mathbb{R}_{m\times k}$
- $(A+B)C = AC + BC$ dla $A, B \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $C \in \mathbb{R}_{m\times k}$
- $c(AB) = (cA)B = A(cB)$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}_{m\times k}$ i $c \in \mathbb{R}$
- $(AB)C = A(BC) = ABC$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}_{m\times k}$ i $C \in \mathbb{R}_{k\times \ell}$

Własności iloczynu

- $A(B + C) = AB + AC$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $B, C \in \mathbb{R}_{m\times k}$
- $(A + B)C = AC + BC$ dla $A, B \in \mathbb{R}_{n\times m}$ i $C \in \mathbb{R}_{m\times k}$
- $c(AB) = (cA)B = A(cB)$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}_{m\times k}$ i $c \in \mathbb{R}$
- $(AB)C = A(BC) = ABC$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}_{m\times k}$ i $C \in \mathbb{R}_{k\times \ell}$
- $AI_m = I_nA$ dla $A \in \mathbb{R}_{n\times m}$, gdzie I_n jest **macierzą jednostkową** wymiaru n (macierz $\mathbb{R}_{n\times n}$) n jedynkami na przekątnej i zerami poza przekątną

Reprezentacje grafu

Definicja (Macierz sąsiedztwa)

Macierzą sąsiedztwa grafu

$$G = (\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E)$$

nazywamy macierz $A(G) = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ zdefiniowaną następująco

$$a_{ij} := \text{liczba krawędzi od } v_i \text{ do } v_j.$$

Macierz sąsiedztwa

- Macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego jest macierzą symetryczną, to znaczy wyrazy położone symetrycznie względem przekątnej są równe.

Macierz sąsiedztwa

- Macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego jest macierzą symetryczną, to znaczy wyrazy położone symetrycznie względem przekątnej są równe.
- Suma wyrazów w każdym wierszu i każdej kolumnie jest równa stopniowi odpowiedniego wierzchołka.

Macierz sąsiedztwa

- Macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego jest macierzą symetryczną, to znaczy wyrazy położone symetrycznie względem przekątnej są równe.
- Suma wyrazów w każdym wierszu i każdej kolumnie jest równa stopniowi odpowiedniego wierzchołka.
- Jeżeli w grafie nie ma pętli, to na przekątnej są same zera.

Macierz sąsiedztwa

- Macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego jest macierzą symetryczną, to znaczy wyrazy położone symetrycznie względem przekątnej są równe.
- Suma wyrazów w każdym wierszu i każdej kolumnie jest równa stopniowi odpowiedniego wierzchołka.
- Jeżeli w grafie nie ma pętli, to na przekątnej są same zera.
- Jeżeli graf jest prosty (nie ma pętli i krawędzi wielokrotnych), to wyrazami macierzy sąsiedztwa są wyłącznie zera i jedynki.

Grafy izomorficzne

Definicja (Grafy izomorficzne)

Grafy $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeżeli istnieje funkcja $f \colon V_1 \to V_2$, która jest różnowartościowa i „na" (bijekcja) oraz w grafie G_1 istnieje krawędź od v do w wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G_2 istnieje krawędź od $f(v)$ do $f(w)$.

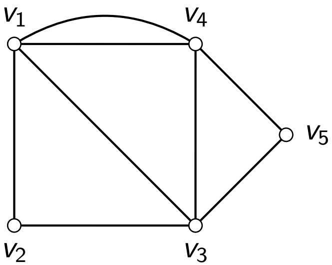
Grafy izomorficzne

Definicja (Grafy izomorficzne)

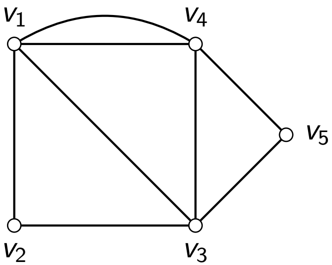
Grafy $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeżeli istnieje funkcja $f\colon V_1 \to V_2$, która jest różnowartościowa i „na" (bijekcja) oraz w grafie G_1 istnieje krawędź od v do w wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G_2 istnieje krawędź od $f(v)$ do $f(w)$.

- Grafy izomorficzne możemy uważać za identyczne.
- Macierze sąsiedztwa grafów izomorficznych różnią się tylko kolejnością wierszy/kolumn.

Reprezentacje grafu

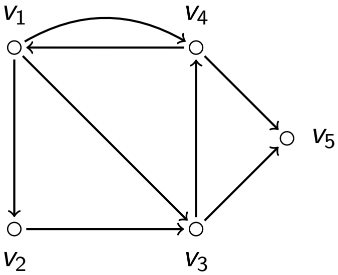


Reprezentacje grafu

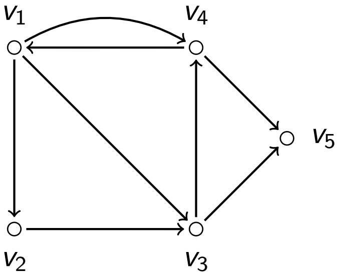


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Reprezentacje grafu

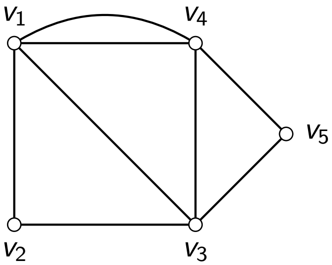


Reprezentacje grafu



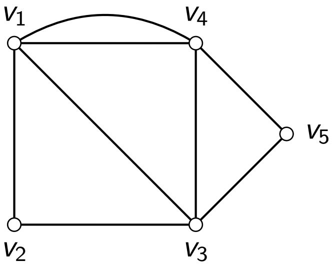
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Liczba ścieżek



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

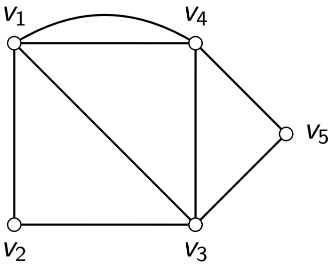
Liczba ścieżek



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Liczba ścieżek od v_1 do v_5 o długości 2 jest równa

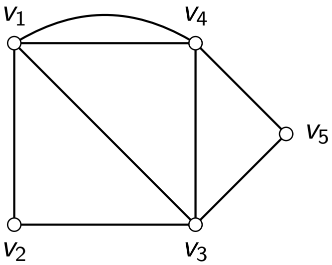
Liczba ścieżek



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Liczba ścieżek od v_1 do v_5 o długości 2 jest równa 3.

Liczba ścieżek

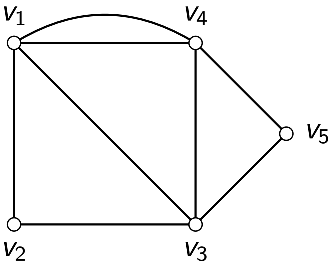


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Liczba ścieżek od v_1 do v_5 o długości 2 jest równa 3.

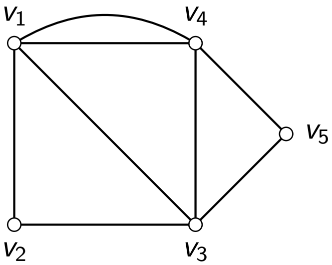
$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 1 & \color{red}{3} \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 1 \\ \color{red}{3} & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Liczba ścieżek



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

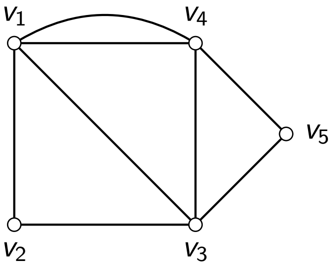
Liczba ścieżek



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Liczba ścieżek od v_2 do v_5 o długości 3 jest równa

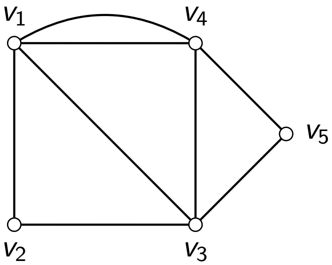
Liczba ścieżek



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Liczba ścieżek od v_2 do v_5 o długości 3 jest równa 4.

Liczba ścieżek

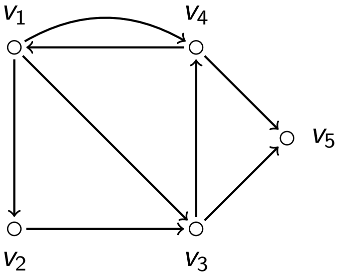


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Liczba ścieżek od v_2 do v_5 o długości 3 jest równa 4.

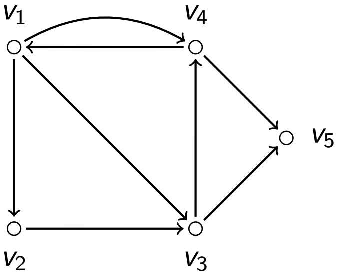
$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 11 & 18 & 4 \\ 9 & 2 & 7 & 4 & \color{red}{4} \\ 11 & 7 & 8 & 11 & 7 \\ 18 & 4 & 11 & 6 & 9 \\ 4 & \color{red}{4} & 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Liczba ścieżek



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

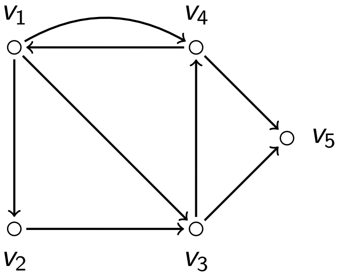
Liczba ścieżek



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Liczba ścieżek od v_1 do v_5 o długości 2 jest równa

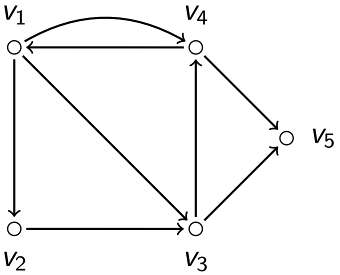
Liczba ścieżek



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Liczba ścieżek od v_1 do v_5 o długości 2 jest równa 2.

Liczba ścieżek



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Liczba ścieżek od v_1 do v_5 o długości 2 jest równa 2.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Liczba ścieżek

Twierdzenie

Niech $G = (\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E)$ *będzie dowolnym grafem (skierowanym lub nie). Liczba ścieżek o długości* $k \geqslant 1$ *od wierzchołka* v_i *do wierzchołka* v_j *jest równa wyrazowi w* i*-tym wierszu i* j*-tej kolumnie macierzy* $A(G)^k$*.*

Liczba ścieżek

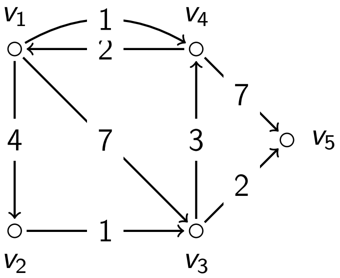
Twierdzenie

Niech $G = (\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E)$ *będzie dowolnym grafem (skierowanym lub nie). Liczba ścieżek o długości* $k \geqslant 1$ *od wierzchołka* v_i *do wierzchołka* v_j *jest równa wyrazowi w* i*-tym wierszu i* j*-tej kolumnie macierzy* $A(G)^k$.

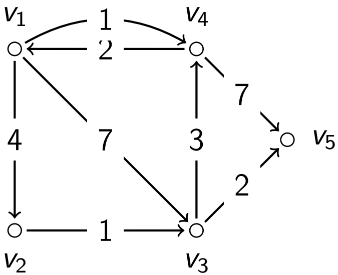
Wniosek

Aby znaleźć najkrótszą ścieżkę łączącą wierzchołek v_i *z* v_j *w grafie* G*, wystarczy znaleźć najmniejszą potęgę* k *macierzy sąsiedztwa* $A(G)$*, dla której wyraz w* i*-tym wierszu i* j*-tej kolumnie macierzy* $A(G)^k$ *jest dodatni. Wtedy najkrótsza ścieżka ma długość* k.

Liczba ścieżek



Liczba ścieżek

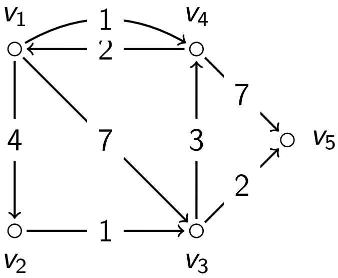


W	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1		4	7	1	
v_2		1			
v_3				3	2
v_4	2				7
v_5					

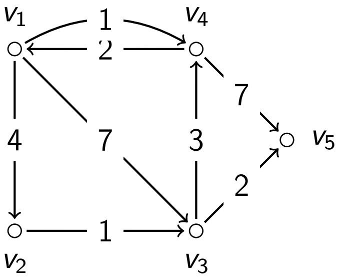
Algorytm Dijkstry

```
input: prosty graf skierowany G = ({1,2,...,n},E)
       wagi dodatnie W = W(v,w)
output: najkrotsza sciezka D(j) 1->j, j = 2,...,n
L := ∅, V := {2,...,n}
for i ∈ V do
    D(i) := W(1,i)
while V \ L ≠ ∅ do
    wybierz k ∈ V \ L o minimalnym D(k)
    L := L ∪ {k}
    for j ∈ V \ L do
        if D(j) > D(k) + W(k,j) then
            D(j) := D(k) + W(k,j)
```

Liczba ścieżek

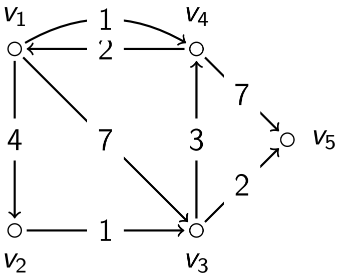


Liczba ścieżek



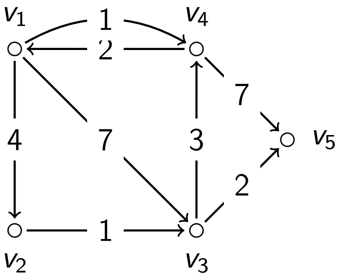
L	$D(2)$	$D(3)$	$D(4)$	$D(5)$

Liczba ścieżek



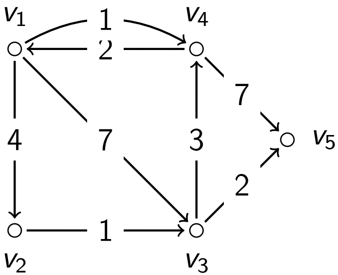
L	$D(2)$	$D(3)$	$D(4)$	$D(5)$
$\emptyset$	4	7	1	

Liczba ścieżek



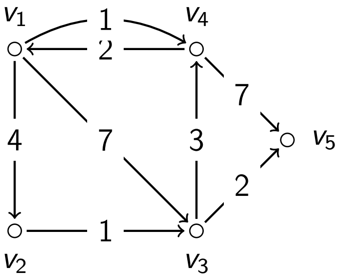
L	$D(2)$	$D(3)$	$D(4)$	$D(5)$
$\emptyset$	4	7	1	
$\{4\}$	4	7	1	

Liczba ścieżek



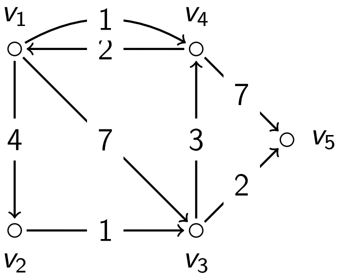
L	$D(2)$	$D(3)$	$D(4)$	$D(5)$
$\emptyset$	4	7	1	
$\{4\}$	4	7	1	
$\{2,4\}$	4	5	1	

Liczba ścieżek



L	$D(2)$	$D(3)$	$D(4)$	$D(5)$
$\emptyset$	4	7	1	
$\{4\}$	4	7	1	
$\{2,4\}$	4	5	1	
$\{2,3,4\}$	4	5	1	7

Liczba ścieżek



L	$D(2)$	$D(3)$	$D(4)$	$D(5)$
$\emptyset$	4	7	1	
$\{4\}$	4	7	1	
$\{2,4\}$	4	5	1	
$\{2,3,4\}$	4	5	1	7
$\{2,3,4,5\}$	4	5	1	7

Algorytm Dijkstry

```
input: G = ({1,2,...,n},E), W = W(v,w)
output: D(j)
L := ∅, V := {2,...,n}
for i ∈ V do D(i) := W(1,i)
# 1. dla i w L, D(i) jest dlugoscia najkrotszej
#    sciezki 1->i
# 2. dla i ∉ L, D(i) jest dlugoscia najkrotszej
#    sciezki 1->i w L
while V \ L ≠ ∅ do
    wybierz k ∈ V \ L o minimalnym D(k)
    L := L ∪ {k}
    for j ∈ V \ L do
        if D(j) > D(k) + W(k,j) then
            D(j) := D(k) + W(k,j)
```

Algorytm Dijkstry - dowód poprawności

1. Dla $i \in L$, $D(i)$ jest długością najkrótszej ścieżki $1 \to j$.
2. Dla $i \in V \setminus L$, $D(i)$ jest długością najkrótszej ścieżki $1 \to i$ przez wierzchołki w L.

Algorytm Dijkstry - dowód poprawności

1. Dla $i \in L$, $D(i)$ jest długością najkrótszej ścieżki $1 \to j$.
2. Dla $i \in V \setminus L$, $D(i)$ jest długością najkrótszej ścieżki $1 \to i$ przez wierzchołki w L.

- W momencie dodawania i do L, na mocy 2., do i nie da się dojść od 1 ścieżką krótszą niż $D(i)$ przez wierzchołki w L.

Algorytm Dijkstry - dowód poprawności

1. Dla $i \in L$, $D(i)$ jest długością najkrótszej ścieżki $1 \to j$.
2. Dla $i \in V \setminus L$, $D(i)$ jest długością najkrótszej ścieżki $1 \to i$ przez wierzchołki w L.

- W momencie dodawania i do L, na mocy 2., do i nie da się dojść od 1 ścieżką krótszą niż $D(i)$ przez wierzchołki w L.
- Ponadto wierzchołek i miał minimalną odległość od 1 z $V \setminus L$.

Algorytm Dijkstry - dowód poprawności

1. Dla $i \in L$, $D(i)$ jest długością najkrótszej ścieżki $1 \to j$.
2. Dla $i \in V \setminus L$, $D(i)$ jest długością najkrótszej ścieżki $1 \to i$ przez wierzchołki w L.

- W momencie dodawania i do L, na mocy 2., do i nie da się dojść od 1 ścieżką krótszą niż $D(i)$ przez wierzchołki w L.
- Ponadto wierzchołek i miał minimalną odległość od 1 z $V \setminus L$.
- Dołączając i do L zachowujemy prawdziwość pkt. 1.

Algorytm Dijkstry - dowód poprawności

1. Dla $i \in L$, $D(i)$ jest długością najkrótszej ścieżki $1 \to j$.
2. Dla $i \in V \setminus L$, $D(i)$ jest długością najkrótszej ścieżki $1 \to i$ przez wierzchołki w L.

- W momencie dodawania i do L, na mocy 2., do i nie da się dojść od 1 ścieżką krótszą niż $D(i)$ przez wierzchołki w L.
- Ponadto wierzchołek i miał minimalną odległość od 1 z $V \setminus L$.
- Dołączając i do L zachowujemy prawdziwość pkt. 1.
- Gdyby się okazało, że dla jakiegoś $j \in V \setminus L$ najkrótsza ścieżka w L prowadzi przez i, to i musi być ostatnim wierzchołkiem na tej ścieżce (przed j).

Algorytm Dijkstry - dowód poprawności

1. Dla $i \in L$, $D(i)$ jest długością najkrótszej ścieżki $1 \to j$.
2. Dla $i \in V \setminus L$, $D(i)$ jest długością najkrótszej ścieżki $1 \to i$ przez wierzchołki w L.

- W momencie dodawania i do L, na mocy 2., do i nie da się dojść od 1 ścieżką krótszą niż $D(i)$ przez wierzchołki w L.
- Ponadto wierzchołek i miał minimalną odległość od 1 z $V \setminus L$.
- Dołączając i do L zachowujemy prawdziwość pkt. 1.
- Gdyby się okazało, że dla jakiegoś $j \in V \setminus L$ najkrótsza ścieżka w L prowadzi przez i, to i musi być ostatnim wierzchołkiem na tej ścieżce (przed j).
- Jest to konsekwencją faktu, że do każdego wierzchołka z L da się dojść od 1 ścieżką krótszą niż $D(i)$.

Algorytm Dijkstry - dowód poprawności

1. Dla $i \in L$, $D(i)$ jest długością najkrótszej ścieżki $1 \to j$.
2. Dla $i \in V \setminus L$, $D(i)$ jest długością najkrótszej ścieżki $1 \to i$ przez wierzchołki w L.

- W momencie dodawania i do L, na mocy 2., do i nie da się dojść od 1 ścieżką krótszą niż $D(i)$ przez wierzchołki w L.
- Ponadto wierzchołek i miał minimalną odległość od 1 z $V \setminus L$.
- Dołączając i do L zachowujemy prawdziwość pkt. 1.
- Gdyby się okazało, że dla jakiegoś $j \in V \setminus L$ najkrótsza ścieżka w L prowadzi przez i, to i musi być ostatnim wierzchołkiem na tej ścieżce (przed j).
- Jest to konsekwencją faktu, że do każdego wierzchołka z L da się dojść od 1 ścieżką krótszą niż $D(i)$.
- Zatem długość takiej ścieżki jest równa $D(i) + W(i, j)$ i zachowujemy prawdziwość pkt. 2.