Granica Funkcji

Definicja 1. • Sąsiedztwem o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$S(x_0, r) \stackrel{def}{=} (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}.$$

- Sąsiedztwem lewostronnym o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$S^-(x_0, r) \stackrel{def}{=} (x_0 - r, x_0).$$

- Sąsiedztwem prawostronnym o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$S^+(x_0, r) \stackrel{def}{=} (x_0, x_0 + r).$$

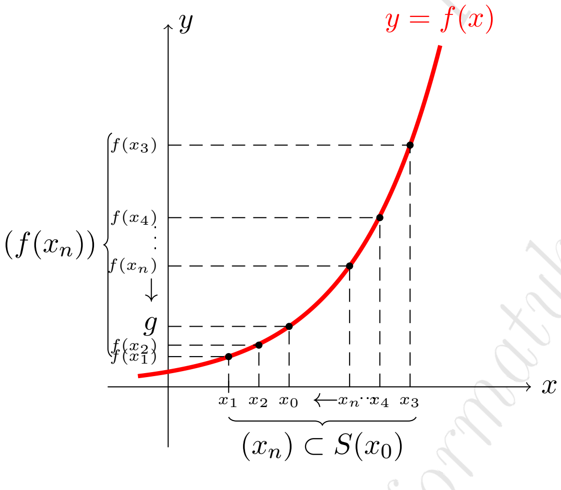
Uwaga 1. Jeżeli promień sąsiedztwa nie będzie istotny w rozważaniach, to $S(x_0, r)$, $S^-(x_0, r)$ oraz $S^+(x_0, r)$ będziemy oznaczali $S(x_0)$, $S^-(x_0)$ oraz $S^+(x_0)$ odpowiednio.

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$.

Definicja 2 (Heinego granicy właściwej funkcji w punkcie)**.** Mówimy, że liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie x_0 i piszemy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) takiego, że

- wyrazy $x_n \in S(x_0)$,
- $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$,

ciąg wartości funkcji $(f(x_n))$ jest zbieżny do g to znaczy $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$.



Rys. 1. Granica Heinego funkcji f w punkcie x_0.

Definicja 3 (Cauchy'ego granicy właściwej funkcji w punkcie)**.** *Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie x_0 co zapisujemy*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S(x_0)} \left[(|x - x_0| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - g| < \varepsilon) \right].$$

Uwaga 2. *Definicja Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji f w punkcie x_0 są równoważne, tzn. funkcja posiada w punkcie x_0 granice g w sensie Heinego wtedy i tylko wtedy gdy posiada w tym punkcie granicę g w sensie definicji Cauchy'ego.*

Definicja 4. *Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą $+\infty$ lub $-\infty$ i piszemy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) takiego, że*

- *wyrazy $x_n \in S(x_0)$,*
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,

ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny odpowiednio do $+\infty$ lub $-\infty$.

Uwaga 3. *(Nieistnienie granicy funkcji w punkcie) Jeżeli istnieją ciągi (x'_n) i (x''_n) spełniające warunki:*

- $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x_0$, *gdzie* $x'_n \neq x_0$ *dla każdego* $n \in N$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = g'$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = x_0$, *gdzie* $x''_n \neq x_0$ *dla każdego* $n \in N$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = g''$,
- $g' \neq g''$,

to granica (właściwa lub niewłaściwa) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nie istnieje.

Granice Jednostronne

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie $S^-(x_0)$.

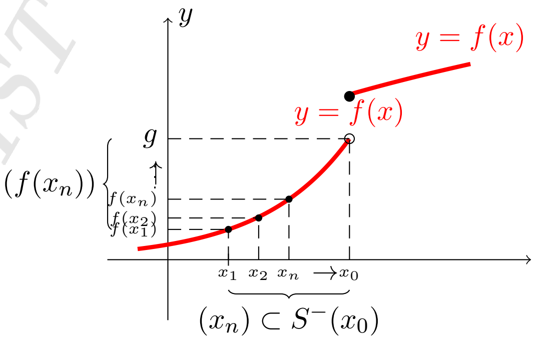
Definicja 5. *Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0*
a) granicę lewostronną właściwą g
albo
b) granicę niewłaściwą $+\infty$ lub $-\infty$,
wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) takiego, że

- *wyrazy $x_n \in S^-(x_0)$,*
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,

ciąg $(f(x_n))$ jest odpowiednio

a) zbieżny do g; piszemy wtedy $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g$,

b) rozbieżny do $+\infty$ lub $-\infty$ i piszemy wtedy $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, lub $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$.



Rys. 2. Granica lewostronna funkcji f w punkcie x_0.

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie $S^+(x_0)$.

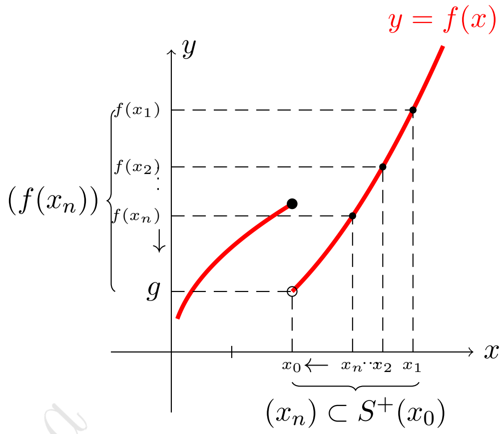
Definicja 6. *Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0*
a) granicę prawostronną właściwą g
albo
b) granicę niewłaściwą $+\infty$ lub $-\infty$,
wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) takiego, że

- *wyrazy $x_n \in S^+(x_0)$,*
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

ciąg $(f(x_n))$ jest odpowiednio

a) zbieżny do g; piszemy wtedy $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g$,

b) rozbieżny do $+\infty$ lub $-\infty$ i piszemy wtedy $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$, lub $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$.



Rys. 3. Granica prawostronna funkcji f w punkcie x_0.

Definicja 7. *Granice lewostronne i prawostronne funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicami jednostronnymi.*

Twierdzenie 1. *Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą albo niewłaściwą wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Wspólna wartość granic jednostronnych jest wtedy granicą funkcji.

Niech f będzie określona w (a, ∞).

Definicja 8. *Mówimy, ze funkcja f ma w $+\infty$*

a) granicę właściwą g,
albo

b) granicę niewłaściwą $+\infty$ lub $-\infty$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) takiego, że

- *wyrazy $x_n \in (a, \infty)$,*
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

ciąg $(f(x_n))$ jest odpowiednio

a) zbieżny do g; piszemy wtedy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$,

b) rozbieżny do $+\infty$ lub $-\infty$ i piszemy wtedy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, lub $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

Uwaga 4. *Definicja Heinego granicy właściwej i niewłaściwej funkcji w $-\infty$ jest analogiczna do definicji podanej wyżej.*

Twierdzenia o granicach właściwych

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcje f i h mają granice właściwe w punkcie x_0 tzn. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$ i $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = p$ to*

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + h(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = g + p;$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - h(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = g - p;$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot h(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = g \cdot p;$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (cf(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c \cdot g, \quad c \in R;$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} h(x)} = \dfrac{g}{p},\ p \neq 0;$
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{h(x)} = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^{\lim\limits_{x\to x_0} h(x)} = g^p;$ *(o ile działania po obu stronach mają sens.)*

Twierdzenie 3 (O Granicy Funkcji Złożonej)**.** *Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0,$
2. $f(x) \neq y_0$ *dla każdego* $x \in S(x_0),$
3. $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = p,$

to $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = p.$

Twierdzenie 4 (O Trzech Funkcjach)**.** *Jeżeli funkcje f, g, h spełniają warunki:*

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *dla każdego* $x \in S(x_0),$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = g,$

to $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g$

Uwaga 5. *Powyższe twierdzenia są także prawdziwe dla granic jednostronnych oraz granic w nieskończoności.*

Poniższa tabelka zawiera TWIERDZENIA DOTYCZĄCE NIEWŁAŚCIWYCH GRANIC FUNKCJI.

Jeżeli	to
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^+$	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^-$	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
$(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^+ \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b > 0)$ albo $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^- \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b < 0)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$
$(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^+ \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b < 0)$ albo $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^- \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b > 0)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b > 0$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b < 0$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \mp\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) =?$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)-g(x)) = [\infty-\infty] =?$ $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = [\frac{\infty}{\infty}] =?$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)-g(x)) = [\infty-\infty] =?$ $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = [\frac{\infty}{\infty}] =?$
$\bigwedge\limits_{x} \lvert f(x)\rvert \le M,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} =?$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ 0<a<1,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = 0$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ a>1,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ 0<a<1,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ a>1,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = 0$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = [1^\infty] =?$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a,\ 0<a\le+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a,\ -\infty\le a<0$	$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = 0$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0,$	$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = [\infty^0] =?$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0,$	$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = [0^0] =?$

UWAGA 6. *Zapis:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$$

będziemy stosować gdy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ *oraz* $f(x) < 0$ *w pewnym sąsiedztwie punktu* x_0. *Podobnie, zapis:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$$

będziemy stosować gdy $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *oraz* $f(x) > 0$ *w pewnym sąsiedztwie punktu* x_0.

Uwaga 7. *Analogiczne relacje zachodzą dla granic właściwych w punktach niewłaściwych oraz dla granic jednostronnych.*

Należy zapamiętać GRANICE PEWNYCH FUNKCJI SPECJALNYCH

- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = 1,$
- $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a, a \in R,$
- $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$
- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,\ a > 0,$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$

Z twierdzenia o granicy funkcji złożonej wynika, że:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1, \qquad \text{o ile } \lim_{x\to x_0} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to x_0} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e \qquad \text{o ile } \lim_{x\to x_0} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \qquad \text{o ile } \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty.$$

Granice funkcji - Zadania

Zadanie 1. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie pokazać, że

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3,$
2. $\lim_{x\to -2} \frac{1}{x} = -\frac{1}{2},$
3. $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0.$

Zadanie 2. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie pokazać, że nie istnieją granice funkcji

1. $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x},$,
2. $\lim_{x\to\infty} \sin\sqrt{x},$
3. $\lim_{x\to 2} 2^{\frac{1}{x-2}}.$

Zadanie 3. Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \\ \frac{2x}{|x|}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Obliczyć granicę tej funkcji w punkcie $x_0 = 0$.

Zadanie 4. Obliczyć granice (granice jednostronne) o ile istnieją

1. $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{9x^2-1}{3x+1},$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 - x^4 + 3x - 2 - 8}{-2x^5 + x^3 + x^2 - 12},$
3. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20},$
4. $\lim_{x\to 25} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25},$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$,

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}$,

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 4x}{2x}$,

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}$,

9. $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$,

10. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}$,

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x\sqrt{x+4}}-\frac{1}{x}\right)$,

12. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{1+2x}}{2-\sqrt{x}}$,

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$,

14. $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x+2}+x)$,

15. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x}{2}(\sqrt{4x^2+1}+2x)$,

16. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{tg} 3x}{x^3}$,

17. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2^x+3^x}{3^x+1}$,

18. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}$,

19. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$,

20. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2x-1}$,

21. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{3x+5}{3x+7}\right)^{x+1}$,

22. $\lim\limits_{x\to \infty} x[\ln(x+4)-\ln(x+1)]$,

23. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{2x+1}$,

24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$,

25. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$,

26. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$,

27. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}$,

28. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{4x^2+3}{\sqrt{16+x^4}}$,

29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$,

30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{\operatorname{tg} x+1}}$,

31. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}$,

32. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$,

33. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{2x}$,

34. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$,

35. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$,

36. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{(3x-2)\sin(x^2+1)}{2x^3+4x+5}$,

37. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arcsin(x-1)}{x^2-1}$,

38. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{\arcsin(x+2)}$,

39. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-1}{x}$,

40. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5^{x-1}-1}{x^2-1}$.

Zadanie 5. Obliczając granice jednostronne, zbadać, czy istnieją granice funkcji:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}$,

2. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{9}{x^3-27}\right)$,

3. $\lim\limits_{x\to 4}2^{\frac{1}{x-4}}$,

4. $\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{1}{1-x^2}}$,

5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x-1|^5}{x^5-x^3}$,

6. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{3-x}}}$,

7. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x^2-4}$,

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{tg} x}$,

9. $\lim\limits_{x\to 0}3^{-\frac{1}{x^2}}$.

Zadanie 6. Obliczyć granice jednostronne w punkcie $x_0=\frac{\pi}{2}$ funkcji $f(x)=\left(x-\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{2\pi-4x}\right)$.

Ciągłość Funkcji

Definicja 1.
- *Otoczeniem o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór*

$$O(x_0, r) \overset{def}{=} (x_0 - r, x_0 + r).$$

- *Otoczeniem lewostronnym o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór*

$$O^-(x_0, r) \overset{def}{=} (x_0 - r, x_0\rangle.$$

- *Otoczeniem prawostronnym o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór*

$$O^+(x_0, r) \overset{def}{=} \langle x_0, x_0 + r).$$

Uwaga 1. *Jeżeli promień otoczenia nie będzie istotny w rozważaniach, to $O(x_0, r)$, $O^-(x_0, r)$ oraz $O^+(x_0, r)$ będziemy oznaczali $O(x_0)$, $O^-(x_0)$ oraz $O^+(x_0)$ odpowiednio.*

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona w otoczeniu $O(x_0)$.

Definicja 2. *Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Uwaga 2. *Inaczej mówiąc: funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, jeżeli:*

- *funkcja jest określona w pewnym otoczeniu $O(x_0)$;*
- *istnieje skończona granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ to znaczy $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$;*
- *$f(x_0) = g$.*

Definicja 3 (Heinego ciągłości funkcji)**.** *Mówimy, że funkcja f określona w pewnym otoczeniu $O(x_0)$, jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in O(x_0)$, zbieżnego do x_0, ciąg wartości funkcji $(f(x_n))$ jest zbieżny do $f(x_0)$*

Nieciągłość funkcji

Definicja 4. *Punktem nieciągłości funkcji f nazywamy taki punkt x_0, w którym funkcja nie jest ciągła.*

Definicja 5. *Jeżeli x_0 jest punktem nieciągłości funkcji f ciągłej w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$, to nazywamy go odosobnionym.*

Odosobnione punkty nieciągłości dzielimy na dwa rodzaje:

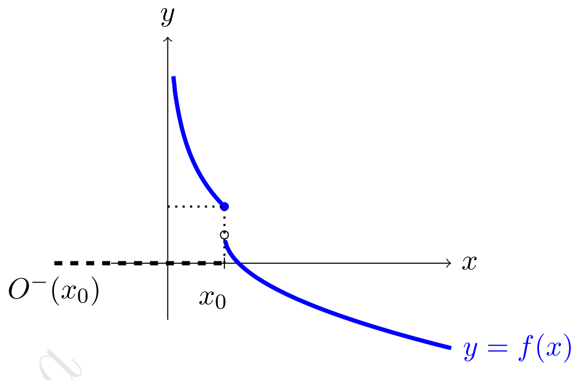
- punkty nieciągłości pierwszego rodzaju to znaczy takie, w których istnieją jednostronne granice właściwe; $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$
- punkty nieciągłości drugiego rodzaju to znaczy takie, w których nie istnieją granice lub granice jednostronne są niewłaściwe lub jedna z granic jednostronnych jest właściwa a druga niewłaściwa.

Uwaga 3. *Jeżeli funkcja f jest nieciągła w punkcie x_0 i istnieje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, to można tę nieciągłość usunąć.*

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona w otoczeniu $O^-(x_0)$.

Definicja 6. *Funkcja f jest lewostronnie ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

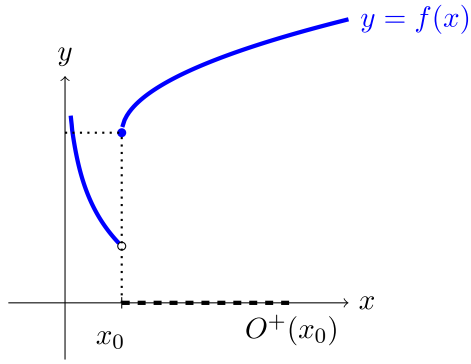


Rys. 4. Funkcja lewostronnie ciągła w punkcie x_0

Analogicznie niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona w otoczeniu $O^+(x_0)$.

Definicja 7. *Funkcja f jest prawostronnie ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$



Rys. 5. Funkcja prawostronnie ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie 1. *Funkcja jest ciągła w punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła lewostronnie i prawostronnie.*

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0 to:*

- *funkcja $f + g$ jest ciągła w punkcie x_0;*
- *funkcja $f - g$ jest ciągła w punkcie x_0;*
- *funkcja $f \cdot g$ jest ciągła w punkcie x_0;*
- *funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0, o ile $g(x_0) \neq 0$.*

Uwaga 4. *Powyższe twierdzenie jest prawdziwe dla funkcji ciągłych jednostronnie.*

Definicja 8.
- *Funkcja jest ciągła w przedziale otwartym (a, b), gdzie $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału*
- *Funkcja jest ciągła w przedziale domkniętym $< a, b >$, gdzie $-\infty < a < b < +\infty$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału (a, b) oraz prawostronnie ciągła w punkcie a i lewostronnie ciągła w punkcie b.*

Twierdzenie 3. *Funkcje elementarne są ciągłe na swoich dziedzinach.*

Twierdzenie 4. *Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej i malejącej (rosnącej) jest ciągła i malejąca (rosnąca).*

Twierdzenie 5 (O ciągłości funkcji złożonej). *Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 oraz funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$ to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0.*

Twierdzenie 6 (O wprowadzaniu granicy do argumentu funkcji ciągłej). *Jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ i funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = a$, to*

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = g[\lim_{x \to x_0} f(x)] = g(a).$$

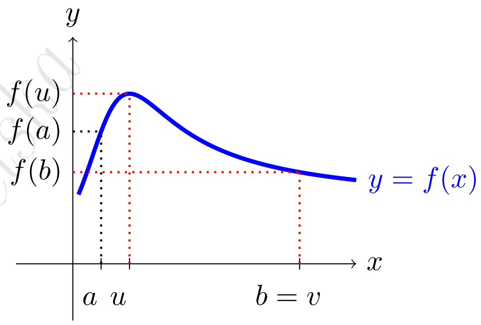
Uwaga 5. *Twierdzenie powyższe pozostaje prawdziwe dla granic jednostronnych oraz dla granic właściwych funkcji $y = f(x)$, gdy $x \to \infty$ oraz gdy $x \to -\infty$.*

Twierdzenie 7 (Twierdzenie Weierstrassa). *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $< a, b >$, to*

1. *f jest ograniczona na przedziale $< a, b >$,*
2. *istnieją takie liczby u, v, że*

$$f(v) = \inf_{a \le x \le b} f(x), \qquad f(u) = \sup_{a \le x \le b} f(x),$$

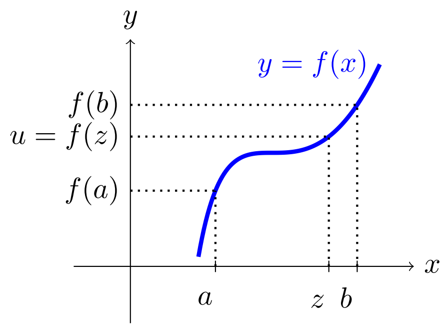
tzn. funkcja ciągła na przedziale domkniętym osiąga na tym przedziale kres dolny i kres górny zbioru swoich wartości.



Rys. 6. Ilustracja graficzna twierdzenie Weierstrassa.

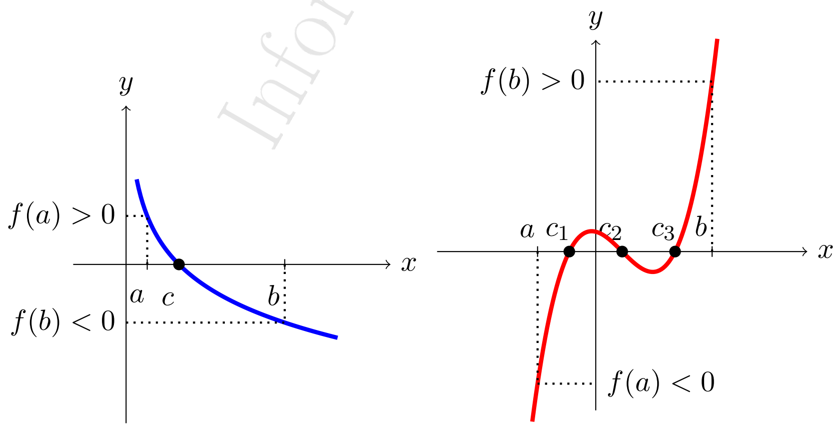
Uwaga 6.
- *Funkcja ciągła na przedziale otwartym może nie być ograniczona, a więc kresy zbioru jej wartości na tym przedziale mogą w ogóle nie istnieć.*
- *Jeżeli funkcja ciągła na przedziale otwartym jest ograniczona, to może nie osiągać na tym przedziale kresu dolnego i kresu górnego zbioru swych wartości.*

Twierdzenie 8 (Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich). *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $< a, b >$, $f(a) \neq f(b)$ oraz liczba u jest zawarta między $f(a)$ i $f(b)$, to istnieje taki punkt $z \in (a, b)$, że $f(z) = u$.*



Rys. 7. Ilustracja graficzna twierdzenie Darboux.

Twierdzenie 9. *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $< a, b >$, a ponadto $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje punkt $c \in (a, b)$, że $f(c) = 0$.*



Rys. 8. Ilustracja graficzna powyższego twierdzenie.

Ciągłość Funkcji - Zadania

Zadanie 1. Zbadać ciągłość funkcji określonych poniższymi wzorami:

1. $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x\le 1,\\ 4-x, & 1<x<2,\\ x^2+2x, & x\ge 2,\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0,\\ \frac{x}{x-1}, & 0<x<1,\\ x^2-4, & x\ge 1,\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & |x|\le \frac{\pi}{2},\\ 4\left(\frac{x}{\pi}\right)^2, & |x|>\frac{\pi}{2},\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1,\\ |x-1|, & |x|>1,\end{cases}$

Zadanie 2. Dobrać tak wartość parametru k i b, aby podane funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ były ciągłe.

1. $f(x)=\begin{cases} -x^2+6, & x\le 1,\\ x+2k, & x>1,\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} \ln(x^2+1)-e^x, & x<0,\\ x^2+x+k, & 0\le x<2,\\ b\cos(x-2) & x\ge 2,\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} 3+e^{\frac{2}{x}}, & x<0,\\ 3, & x=0,\\ \frac{\sin kx}{3x}, & x>0,\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x}, & x<0,\\ \dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}, & 0\le x<1,\\ c & x=1,\\ \dfrac{x^2+(b-1)x-b}{x-1}, & x>1,\end{cases}$

Zadanie 3. Dobrać wartości parametrów a,b,c i p tak, aby podane funkcje były ciągłe we wskazanych punktach.

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-27}{x-3}, & x\ne 3,\\ p, & x=3,\end{cases}$ $\qquad x_0=3$

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x\ne 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ $\qquad x_0=0,$

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x}, & x<0,\\ \dfrac{x^4-1}{x^2-4x+3}, & 0\le x<1,\\ c, & x=1,\\ 2-2^{bx}, & x>1.\end{cases}$ $\qquad x_0=0, x_0'=1$

4. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\},\\ \frac{1}{2}\ln^2 a-\frac{1}{3}\ln a, & x=2,\\ \dfrac{1}{3}\sin b & x=-2,,\end{cases}$ $\qquad x_0=-2, x_0'=2.$

Zadanie 4. Wykorzystując twierdzenie Darboux, uzasadnić, że:

1. $f(x) = \sin x + \cos x$ w przedziale $[0, \pi]$ przyjmuje wartość $\frac{1}{3}$.
2. $f(x) = \frac{2}{\pi}x - \sin x$ w przedziale $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ przyjmuje wartość 0.
3. $f(x) = \ln x + x^2 - 1$ w przedziale $[1, e]$ przyjmuje wartość π.

Zadanie 5. Uzasadnić, że

1. funkcja $f(x) = e^{2x^2+x} - \frac{2}{x}$ ma co najmniej jeden pierwiastek na przedziale $\left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$;
2. równanie $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{x+1}{x-2} = \sqrt{x}$ ma co najmniej jedno rozwiązanie należące do przedziału $\langle 3, 5 \rangle$;
3. równanie $4^x = \dfrac{2}{x}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie należące do przedziału $\left\langle \dfrac{1}{2}, 1 \right\rangle$.