

# Modi projekt 1

## zadanie 5

Jakub Ciemięga

16.04.2020

Obiekt dynamiczny opisany jest ciągłym modelem w przestrzeni stanu:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(t) + x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2} (a_1 u(t) + a_2 u^2(t) + a_3 u^3(t) + a_4 u^4(t))$$

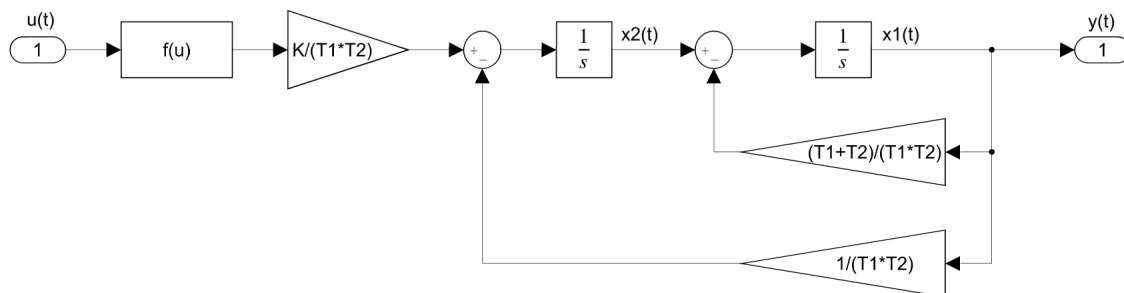
$$y(t) = x_1(t)$$

gdzie:  $K = 4$ ,  $T_1 = 4$ ,  $T_2 = 10$ ,  $a_1 = 0,56$ ,  $a_2 = -0,8$ ,  $a_3 = -0,25$ ,  $a_4 = 0,2$ , sygnał sterujący spełnia warunek  $-1 \leq u \leq 1$ .

Wszystkie symulacje w projekcie zostały wykonane dla czasu 100s. Czas taki pozwalał na osiągnięcie w każdym przypadku stanu ustalonego obiektu.

**Zad 1. Narysować reprezentację graficzną dynamicznego modelu ciągłego.**

Reprezentację graficzną przedstawiono na rysunku 1.



Rysunek 1: Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego gdzie  $f(u) = a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4$ .

**Zad 2. Wyznaczyć równania dynamicznego modelu dyskretnego, narysować jego reprezentację graficzną.**

Model z czasem ciągłym można przekształcić do postaci dyskretniej z wykorzystaniem metody Eulera „do przodu”, w której pochodne przybliżone są wyrażeniem:

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{T}$$

gdzie  $k$  to dyskretna chwila próbkowania a  $T$  to okres próbkowania.

Wówczas otrzymujemy:

$$\frac{x_1(k+1) - x_1(k)}{T} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(k) + x_2(k)$$

$$\frac{x_2(k+1) - x_2(k)}{T} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(k) + \frac{K}{T_1 T_2} (a_1 u(k) + a_2 u^2(k) + a_3 u^3(k) + a_4 u^4(k))$$

$$y(k) = x_1(k)$$

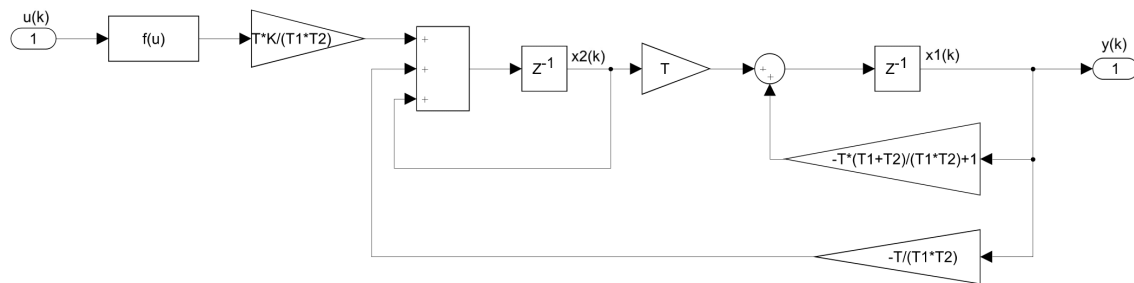
Po przekształceniu otrzymujemy równania dynamicznego modelu dyskretnego:

$$x_1(k+1) = \left( -\frac{(T_1 + T_2)T}{T_1 T_2} + 1 \right) x_1(k) + T x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -\frac{T}{T_1 T_2} x_1(k) + x_2(k) + \frac{KT}{T_1 T_2} (a_1 u(k) + a_2 u^2(k) + a_3 u^3(k) + a_4 u^4(k))$$

$$y(k) = x_1(k)$$

Reprezentację graficzną powyższego modelu przedstawiono na rysunku 2.



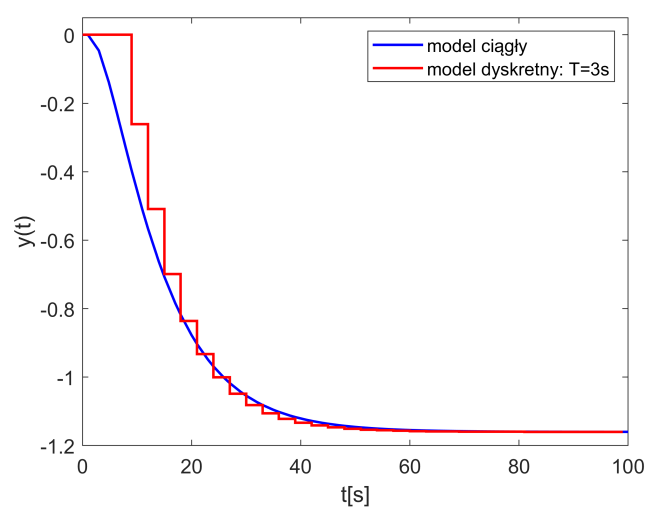
Rysunek 2: Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu dyskretnego gdzie  $f(u) = a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4$ .

**Zad 3.** Zasyмуляować dynamiczny model ciągły i dyskretny dla tego samego skoku sygnału sterującego (np. od wartości 0 do 1 w chwili 1 sek.) przy zerowych warunkach początkowych. Porównać otrzymane odpowiedzi dla 3 okresów próbkowania: „małego”, „średniego” oraz „dużego” (tzn. podać na jednym rysunku odpowiedzi obu układów, sporządzić oddzielne rysunki dla kolejnych okresów próbkowania).

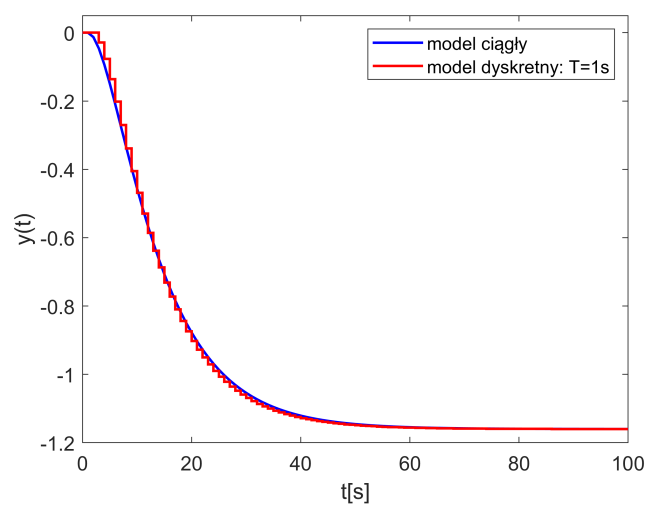
Wartości okresu próbkowania zostały dobrane metodą prób i błędów. Jako „mały” okres próbkowania został wybrany taki, dla którego dalsze zmniejszanie go nie wpływało na widoczne zwiększenie jakości wykresu wynikowego. Jako „duży” okres próbkowania został wybrany taki, dla którego wyraźnie widać na wykresie „stopnie”. Wartość „średniego” okresu próbkowania została dobrana „gdzieś po środku”. Według tej metody otrzymano następujące wartości okresu próbkowania:

Okres próbkowania T	Wartość T
duży	3s
średni	1s
mały	0,1s

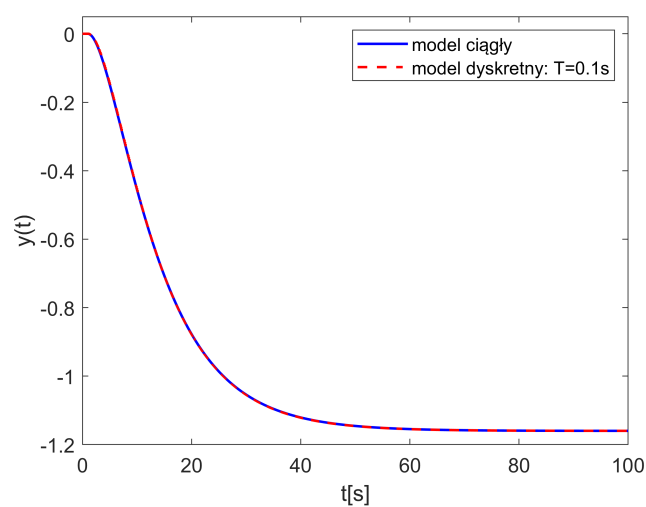
Zostały przeprowadzone symulacje dla skoku sygnału wejściowego od 0 do 1 w chwili 1s. Wyniki przeprowadzonych symulacji zostały pokazane na rysunku 3. Można zauważyć, że zmniejszanie okresu próbkowania widocznie wpływa na większe „wypłaszczenie” wykresu wyjściowego i tym samym poprawia jego dokładność. Dla odpowiednio małych okresów próbkowania wykres dla modelu dyskretnego jest taki sam jak dla modelu ciągłego, co dowodzi, że przy odpowiednio dobranym okresie próbkowania oba typy modeli pozwalają osiągać praktycznie takie same wyniki.



(a) duży okres próbkowania



(b) średni okres próbkowania



(c) mały okres próbkowania

Rysunek 3: Wykres  $y(t)$  dla modeli dynamicznego ciągłego oraz dynamicznego dyskretnego dla różnych wartości okresu próbkowania.

**Zad 4. Na podstawie dynamicznego modelu dyskretnego wyznaczyć wzór i narysować charakterystykę statyczną  $y(u)$ .**

W modelu statycznym sygnały są takie same niezależnie od chwili dyskretniej ( $k$  lub  $k+1$ ), indeksy czasu można zatem pominąć. Z równań modelu dynamicznego dyskretnego

$$x_1(k+1) = \left( -\frac{(T_1+T_2)T}{T_1T_2} + 1 \right) x_1(k) + Tx_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -\frac{T}{T_1T_2}x_1(k) + x_2(k) + \frac{KT}{T_1T_2}(a_1u(k) + a_2u^2(k) + a_3u^3(k) + a_4u^4(k))$$

$$y(k) = x_1(k)$$

otrzymujemy:

$$x_1 = \left( -\frac{(T_1+T_2)T}{T_1T_2} + 1 \right) x_1 + Tx_2$$

$$x_2 = -\frac{T}{T_1T_2}x_1 + x_2 + \frac{KT}{T_1T_2}(a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4)$$

$$y = x_1$$

Po przekształceniu drugiego równania:

$$0 = -\frac{T}{T_1T_2}x_1 + \frac{KT}{T_1T_2}(a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4)$$

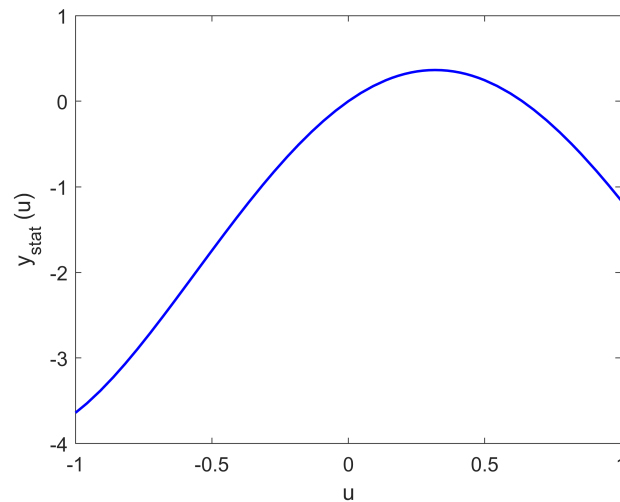
A zatem:

$$x_1 = \frac{KTT_1T_2}{TT_1T_2}(a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4) = K(a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4)$$

W ten sposób otrzymujemy następujący wzór charakterystyki statycznej  $y(u)$  :

$$y = K(a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4)$$

Wykres tej charakterystyki statycznej przy założeniu  $-1 \leq u \leq 1$  przedstawiono na rysunku 4.



Rysunek 4: Charakterystyka statyczna  $y(u)$ .

**Zad 5.** Wyznaczyć analitycznie charakterystykę statyczną zlinearyzowaną w dowolnym punkcie  $\bar{u}$ .

Ze wzoru Taylora:

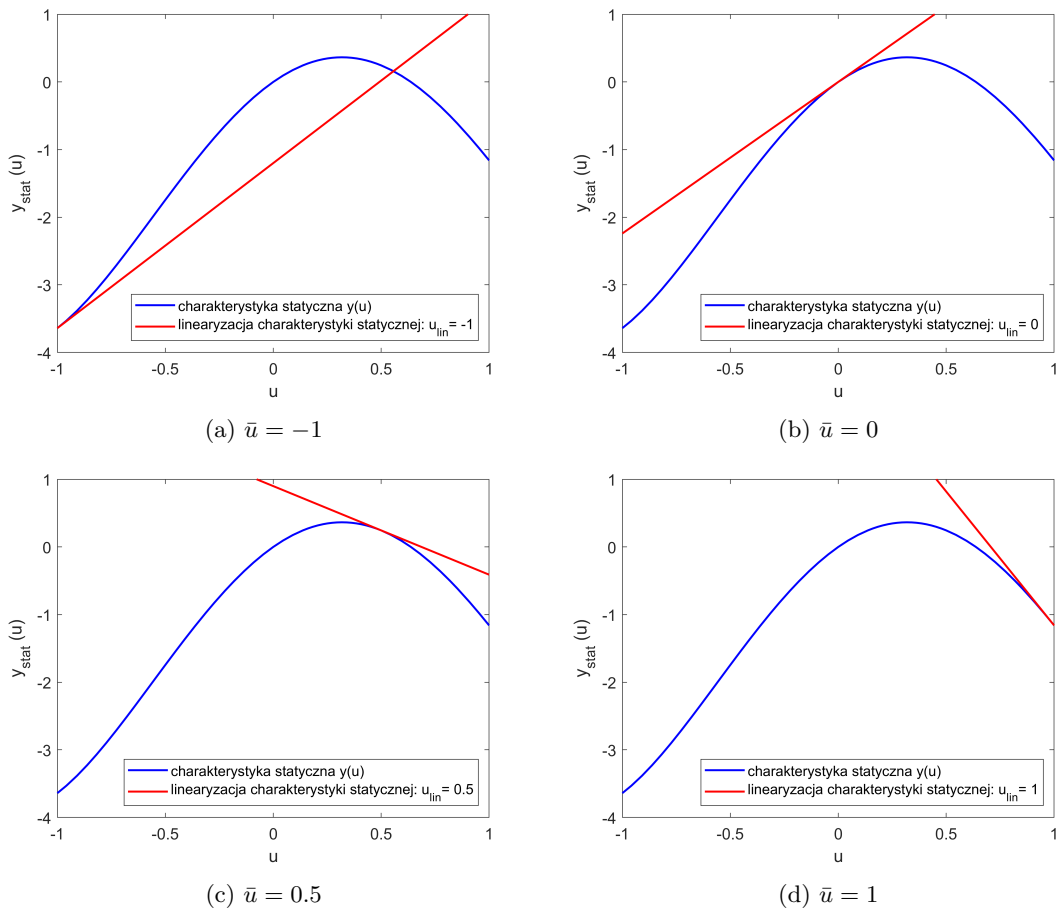
$$y(u) = y(\bar{u}) + \left. \frac{dy(u)}{du} \right|_{u=\bar{u}} (u - \bar{u})$$

A zatem:

$$y(u) = K(a_1\bar{u} + a_2\bar{u}^2 + a_3\bar{u}^3 + a_4\bar{u}^4) + K(a_1 + 2a_2\bar{u} + 3a_3\bar{u}^2 + 4a_4\bar{u}^3)(u - \bar{u})$$

**Zad 6.** Narysować zlinearyzowaną charakterystykę statyczną na tle charakterystyki nieliniowej dla 4 punktów linearyzacji (sporządzić osobne rysunki dla kolejnych punktów linearyzacji).

Odpowiednie wykresy zostały przedstawione na rysunku 5. Można zauważyć, że charakterystyka zlinearyzowana przyjmuje wartości zbliżone do charakterystyki nieliniowej jedynie w bliskim otoczeniu punktu linearyzacji  $\bar{u}$ . Z tego powodu charakterystyki zlinearyzowanej warto używać jedynie, gdy z dużą dokładnością można określić wartość sygnału wejściowego oraz sygnał ten jest stały (lub zmienia się w bardzo małym stopniu).



Rysunek 5: Wykres zlinearyzowanej charakterystyki statycznej na tle charakterystyki nieliniowej dla czterech wartości  $\bar{u}$ .

**Zad 7. Wyznaczyć analitycznie dynamiczny dyskretny model zlinearyzowany w dowolnym punkcie  $\bar{u}$ .**

Aby zlinearyzować równania modelu dynamicznego dyskretnego

$$x_1(k+1) = \left( -\frac{(T_1+T_2)T}{T_1T_2} + 1 \right) x_1(k) + Tx_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -\frac{T}{T_1T_2}x_1(k) + x_2(k) + \frac{KT}{T_1T_2}(a_1u(k) + a_2u^2(k) + a_3u^3(k) + a_4u^4(k))$$

$$y(k) = x_1(k)$$

wystarczy zlinearyzować wyrażenie:

$$g(u) = a_1u(k) + a_2u^2(k) + a_3u^3(k) + a_4u^4(k)$$

Korzystając ze wzoru Taylora:

$$g(u) = (a_1\bar{u} + a_2\bar{u}^2 + a_3\bar{u}^3 + a_4\bar{u}^4) + (a_1 + 2a_2\bar{u} + 3a_3\bar{u}^2 + 4a_4\bar{u}^3)(u(k) - \bar{u})$$

gdzie  $\bar{u}$  to punkt linearyzacji. Po uproszczeniu i podstawieniu równania dynamicznego dyskretnego modelu zlinearyzowanego wyglądają następująco:

$$x_1(k+1) = \left( -\frac{(T_1+T_2)T}{T_1T_2} + 1 \right) x_1(k) + Tx_2(k)$$

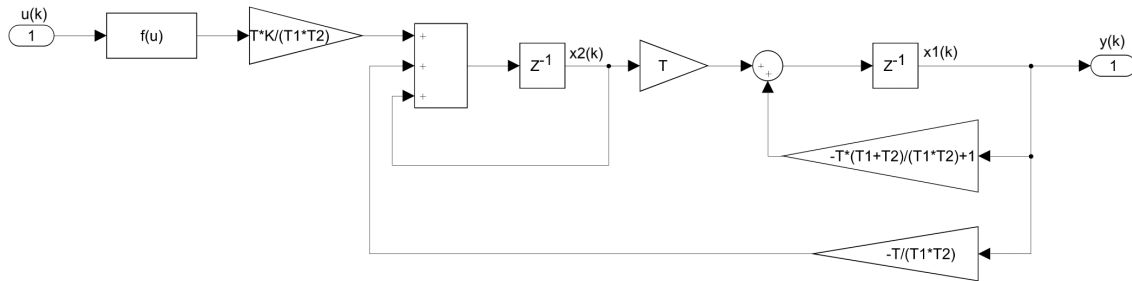
$$x_2(k+1) = -\frac{T}{T_1T_2}x_1(k) + x_2(k) + \frac{KT}{T_1T_2}((-a_2\bar{u}^2 - 2a_3\bar{u}^3 - 3a_4\bar{u}^4) + (a_1 + 2a_2\bar{u} + 3a_3\bar{u}^2 + 4a_4\bar{u}^3)u(k))$$

$$y(k) = x_1(k)$$

gdzie  $\bar{u}$  to dowolny punkt linearyzacji.

**Zad 8. Narysować reprezentację graficzną zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego.**

Odpowiedni schemat został przedstawiony na rysunku 6. Można zauważyć, że jest on taki sam jak schemat modelu niezlinearyzowanego z rysunku 2 z wyjątkiem wnętrza bloku  $f(u)$ .



Rysunek 6: Reprezentacja graficzna zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego gdzie  $f(u) = (-a_2\bar{u}^2 - 2a_3\bar{u}^3 - 3a_4\bar{u}^4) + (a_1 + 2a_2\bar{u} + 3a_3\bar{u}^2 + 4a_4\bar{u}^3)u(k)$ .

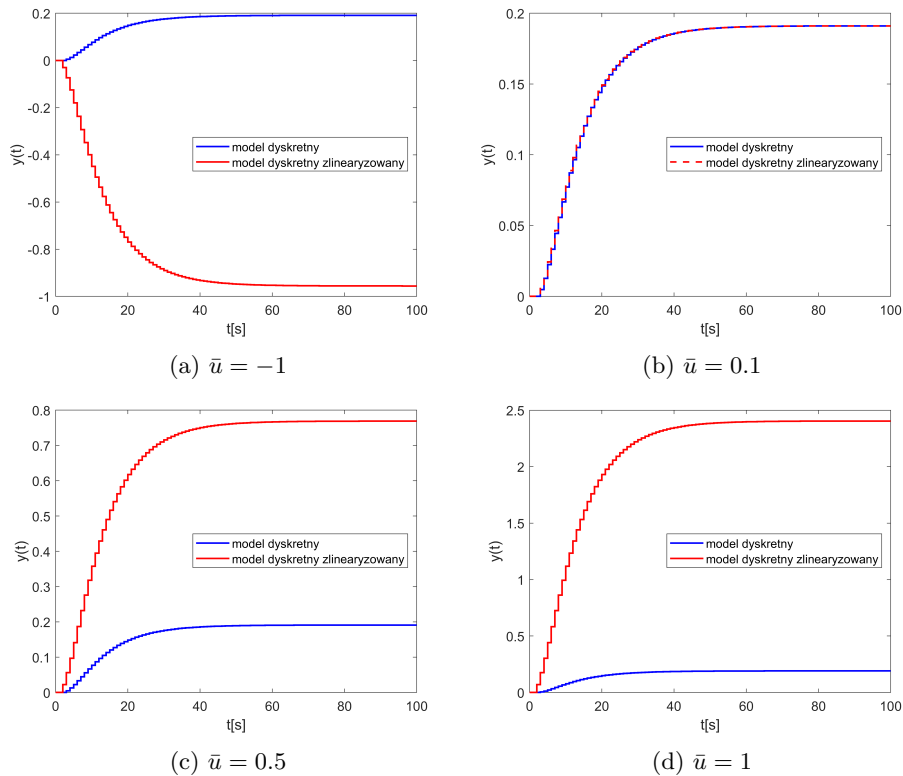
**Zad 9.** Zasymulować dynamiczny model dyskretny w wersji nieliniowej i zlinearyzowanej dla kilku skoków sygnału sterującego („małego”, „średniego” i „dużego”), przy 4 różnych punktach linearyzacji, przyjąc okres próbkowania 1 sek. Porównać otrzymane odpowiedzi (tzn. podać na jednym rysunku odpowiedzi obu układów, sporządzić oddzielne rysunki dla różnych punktów linearyzacji).

Po wzięciu pod uwagę założenia  $-1 \leq u \leq 1$  zostały wybrane następujące wartości skoków oraz punktów linearyzacji  $\bar{u}$ :

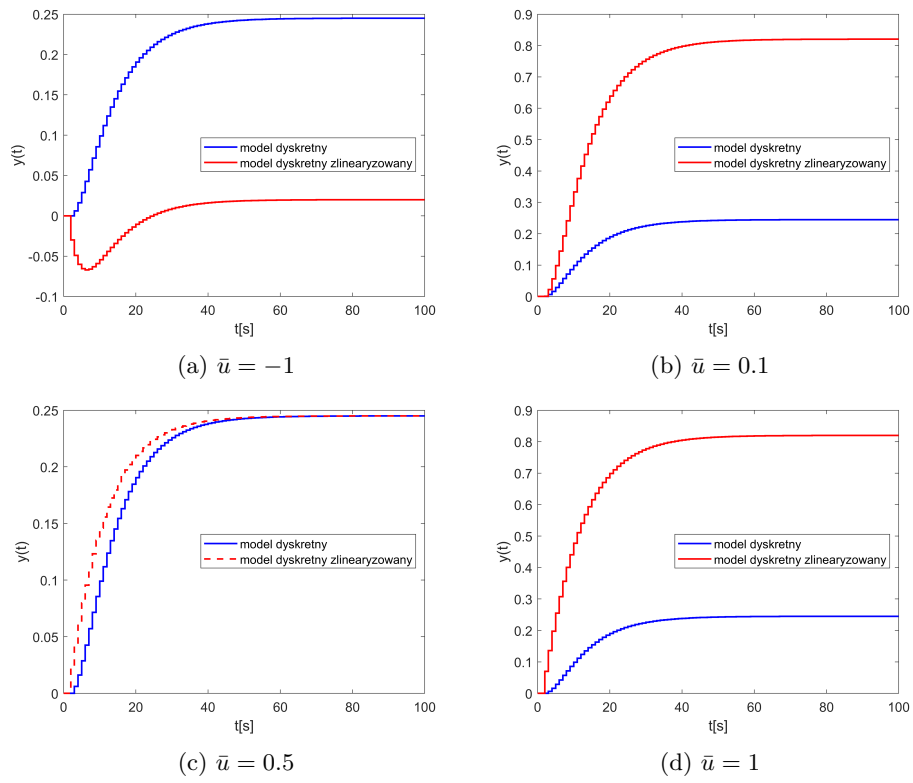
Skok	Wartość
mały	od 0 do 0.1
średni	od 0 do 0.5
duży	od -1 do 1

Numer $\bar{u}$	1	2	3	4
Wartość $\bar{u}$	-1	0.1	0.5	1

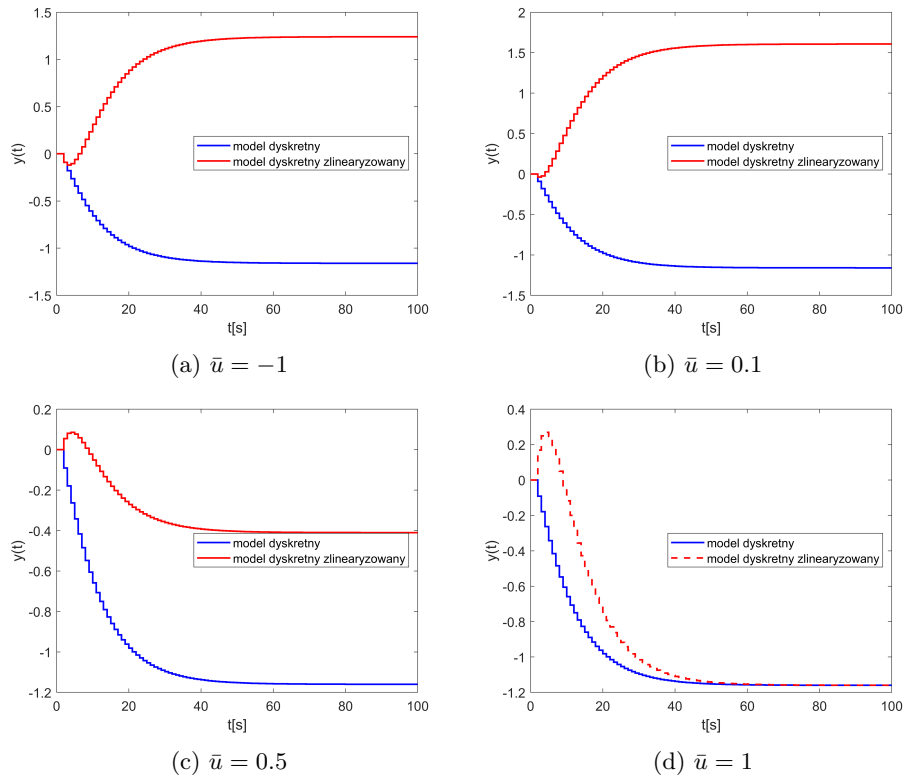
Teoretycznie wartości  $\bar{u}$  nie muszą spełniać warunku  $-1 \leq \bar{u} \leq 1$ , jednak można spodziewać się, że wyniki symulacji dla danego punktu  $\bar{u}$  będą zbliżone do wyniku symulacji modelu zlinearyzowanego jedynie w przypadku, gdy  $\bar{u} \approx u$ . Wyniki symulacji zostały przedstawione na rysunkach 7-9. Zgodnie z przewidywaniami, przebiegi obu odpowiedzi są zbliżone jedynie gdy  $\bar{u} \approx u$ , gdzie  $u$  to wartość wejścia po skoku. W każdym innym przypadku odpowiedź modelu zlinearyzowanego znacząco odbiega od odpowiedzi modelu nieliniowego. Dla przypadków gdy  $\bar{u} \approx u$  można zauważyć, że, choć dla wszystkich wartości skoku wartości ustalone obu odpowiedzi są takie same, zwiększanie wartości skoku powoduje zwiększanie różnicy w przebiegu odpowiedzi modelu zlinearyzowanego względem modelu nieliniowego.



Rysunek 7: Wykres odpowiedzi dynamicznego modelu dyskretnego w wersji nieliniowej i zlinearyzowanej w punkcie  $\bar{u}$  na skok od 0 do 0.1 w chwili  $t = 1$ .



Rysunek 8: Wykres odpowiedzi dynamicznego modelu dyskretnego w wersji nieliniowej i zlinearyzowanej w punkcie  $\bar{u}$  na skok od 0 do 0.5 w chwili  $t = 1$ .



Rysunek 9: Wykres odpowiedzi dynamicznego modelu dyskretnego w wersji nieliniowej i zlinearyzowanej w punkcie  $\bar{u}$  na skok od  $-1$  do  $1$  w chwili  $t = 1$ .



**Zad 10.** Na podstawie zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego wyznaczyć odpowiadającą mu transmitancję w punkcie  $\bar{u}$ .

Równania zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego

$$x_1(k+1) = \left( -\frac{(T_1+T_2)T}{T_1T_2} + 1 \right) x_1(k) + Tx_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -\frac{T}{T_1T_2} x_1(k) + x_2(k) + \frac{KT}{T_1T_2} ((-a_2\bar{u}^2 - 2a_3\bar{u}^3 - 3a_4\bar{u}^4) + (a_1 + 2a_2\bar{u} + 3a_3\bar{u}^2 + 4a_4\bar{u}^3)u(k))$$

$$y(k) = x_1(k)$$

można zapisać w postaci:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Otrzymujemy zatem następujące wartości macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{(T_1+T_2)T}{T_1T_2} + 1 & T \\ -\frac{T}{T_1T_2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{KT}{T_1T_2} ((-a_2\bar{u}^2 - 2a_3\bar{u}^3 - 3a_4\bar{u}^4) + (a_1 + 2a_2\bar{u} + 3a_3\bar{u}^2 + 4a_4\bar{u}^3)u(k)) \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 0], \quad D = 0.$$

Wykorzystując wzór:

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

obliczono w MATLABie transmitancję w punkcie  $\bar{u}$  odpowiadającą zlinearyzowanemu modelowi dyskretnemu:

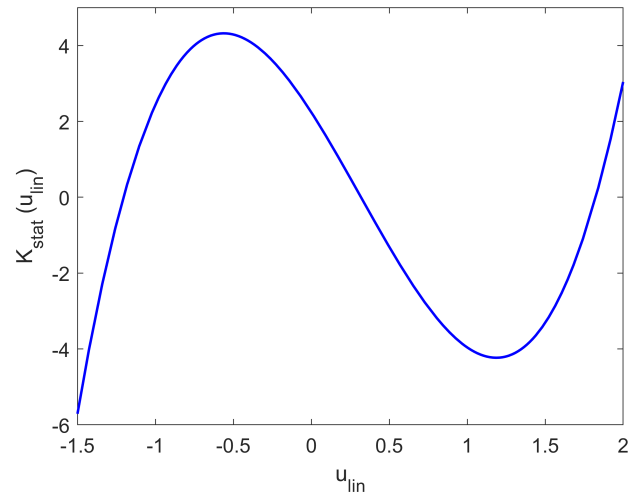
$$G(z) = \frac{40(0.08\bar{u}^3 - 0.075\bar{u}^2 - 0.16\bar{u} + 0.056)}{40z^2 - 66z + 27}$$

**Zad 11.** Wyznaczyć wzmocnienie statyczne  $K_{stat}$  transmitancji w zależności od punktu linearyzacji  $\bar{u}$ , narysować zależność  $K_{stat}(\bar{u})$ .

Wzmocnienie statyczne transmitancji zależne od punktu linearyzacji wynosi:

$$K_{stat} = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = 3.2\bar{u}^3 - 3\bar{u}^2 - 6.4\bar{u} + 2.24$$

Zależność  $K_{stat}(\bar{u})$  została przedstawiona na rysunku 10.



Rysunek 10: Wykres zależności wzmocnienia statycznego zlinearyzowanego modelu dyskretnego  $K_{stat}$  od punktu linearyzacji  $\bar{u}$ .