Politechnika Warszawska
Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych

Modelowanie i identyfikacja (MODI): materiały dydaktyczne

Ćwiczenia 11

Maciej Ławryńczuk

Warszawa, 2020

1. Identyfikacja modeli dynamicznych metodą najmniejszych kwadratów

1.1. Modele liniowe

Rozważmy zadanie identyfikacji modelu dynamicznego procesu o jednym wejściu u oraz jednym wyjściu y. Analogicznie jak w przypadku identyfikacji modeli statycznych, zadanie polega na znalezieniu najlepszej struktury modelu, umożliwiającej osiągnięcie minimalnego błędu (oraz oczywiście jego parametrów). W tym celu znajdziemy parametry kilku modeli, a następnie wybierzemy najlepszy model na podstawie błędu dla zbioru weryfikującego.

Jako pierwszy rozważmy model liniowy o dynamice pierwszego rzędu

$$y(k) = bu(k-1) + ay(k-1) \tag{1}$$

Wypiszmy równanie modelu dla wszystkich możliwych próbek, tzn. od próbki $k = 2$ do próbki $k = P$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(P) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u(1) & y(1) \\ u(2) & y(2) \\ \vdots & \vdots \\ u(P-1) & y(P-1) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{w}} \tag{2}$$

Rozwiązaniem zadania minimalizacji błędu modelu

$$E = \sum_{k=k_0}^{P} (y^{\mathrm{mod}}(k) - y(k))^2 \tag{3}$$

jest optymalny wektor parametrów modelu

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \tag{4}$$

$$= \boldsymbol{M} \backslash \boldsymbol{y} \tag{5}$$

W przypadku modelu pierwszego rzędu $k_0 = 2$.

Dla modelu drugiego stopnia dynamiki

$$y(k) = b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + a_1y(k-1) + a_2y(k-2) \tag{6}$$

otrzymujemy równania

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(3) \\ y(4) \\ \vdots \\ y(P) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u(2) & u(1) & y(2) & y(1) \\ u(3) & u(2) & y(3) & y(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(P-1) & u(P-2) & y(P-1) & y(P-2) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{w}} \tag{7}$$

Również w tym przypadku rozwiązaniem zadania minimalizacji błędu modelu (3) jest wektor optymalny dany wzorem (4) lub (5). W przypadku modelu drugiego rzędu $k_0 = 3$.

Dla modelu trzeciego stopnia dynamiki

$$y(k) = b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + b_3u(k-3) + a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + a_3y(k-3) \tag{8}$$

otrzymujemy równania

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(4) \\ y(5) \\ \vdots \\ y(P) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u(3) & u(2) & u(1) & y(3) & y(2) & y(1) \\ u(4) & u(3) & u(2) & y(4) & y(3) & y(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(P-1) & u(P-2) & u(P-3) & y(P-1) & y(P-2) & y(P-3) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{w}} \tag{9}$$

W przypadku modelu trzeciego rzędu $k_0 = 4$.

Sprawdzenie (weryfikację) modeli możemy przeprowadzić **w trybie bez rekurencji (modele typu jeden krok do przodu, AutoRegressive with Exogenous input, ARX)**. Wyjścia modelu obliczane w kolejnych chwilach dyskretnych zależą wyłącznie od pomiarów sygnałów wejściowego i wyjściowego procesu (ze zbioru uczącego lub weryfikującego). Na przykład, dla modelu trzeciego rzędu dynamiki (8) obliczamy wyjścia w kolejnych chwilach dyskretnych

$$y^{\mathrm{mod}}(4) = b_1u(3) + b_2u(2) + b_3u(1) + a_1y(3) + a_2y(2) + a_3y(1) \tag{10}$$

$$y^{\mathrm{mod}}(5) = b_1u(4) + b_2u(3) + b_3u(2) + a_1y(4) + a_2y(3) + a_3y(2) \tag{11}$$

$$\vdots$$

$$y^{\mathrm{mod}}(P) = b_1u(P-1) + b_2u(P-2) + b_3u(P-3) + a_1y(P-1) + a_2y(P-2) + a_3y(P-3) \tag{12}$$

Na podstawie obliczonych sygnałów wyjściowych modelu ($y^{\mathrm{mod}}(4), \ldots, y^{\mathrm{mod}}(P)$ oraz danych $y(4), \ldots, y(P)$) można obliczyć ze wzoru (3) błąd modelu.

Weryfikację modeli możemy również przeprowadzić **w trybie rekurencyjnym (modele typu wiele kroków do przodu, Output Error, OE)**. Wyjścia modelu obliczane w kolejnych chwilach dyskretnych zależą od pomiarów sygnałów wejściowego (ze zbioru uczącego lub weryfikującego), natomiast w miejsce sygnału wyjściowego podstawia się wyjście modelu w poprzednich chwilach dyskretnych (rekurencja). Na przykład, dla modelu trzeciego rzędu dynamiki (8) obliczamy wyjścia w kolejnych chwilach dyskretnych

$$y^{\mathrm{mod}}(4) = b_1u(3) + b_2u(2) + b_3u(1) + a_1y^{\mathrm{mod}}(3) + a_2y^{\mathrm{mod}}(2) + a_3y^{\mathrm{mod}}(1) \tag{13}$$

$$y^{\mathrm{mod}}(5) = b_1u(4) + b_2u(3) + b_3u(2) + a_1y^{\mathrm{mod}}(4) + a_2y^{\mathrm{mod}}(3) + a_3y^{\mathrm{mod}}(2) \tag{14}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} y^{\mathrm{mod}}(P) &= b_1u(P-1) + b_2u(P-2) \\ &\quad + b_3u(P-3) + a_1y^{\mathrm{mod}}(P-1) + a_2y^{\mathrm{mod}}(P-2) + a_3y^{\mathrm{mod}}(P-3) \end{aligned} \tag{15}$$

Uwaga: należy zainicjalizować model rekurencyjny. Dla modelu trzeciego rzędu

$$y^{\mathrm{mod}}(1) = y(1) \tag{16}$$

$$y^{\mathrm{mod}}(2) = y(2) \tag{17}$$

$$y^{\mathrm{mod}}(3) = y(3) \tag{18}$$

gdzie sygnały $y(1), y(2), y(3)$ pochodzą ze zbioru uczącego lub weryfikującego.

1.2. Modele nieliniowe (liniowo zależne od parametrów)

Przypomnijmy, że metoda najmniejszych kwadratów umożliwia również identyfikację modeli nieliniowych, jedynym warunkiem jest liniowa zależność wyjścia modelu od jego parametrów.

Rozważmy model pierwszego stopnia dynamiki, przy nieliniowości drugiego stopnia (bez wyrazów mieszanych)

$$\begin{aligned} y(k) &= w_1 u(k-1) + w_2 u^2(k-1) \\ &\quad + w_3 y(k-1) + w_4 y^2(k-1) \end{aligned} \tag{19}$$

otrzymujemy równania

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(P) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u(1) & u^2(1) & y(1) & y^2(1) \\ u(2) & u^2(2) & y(2) & y^2(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(P-1) & u^2(P-1) & y(P-1) & y^2(P-1) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{w}} \tag{20}$$

Rozważmy model drugiego stopnia dynamiki, przy nieliniowości drugiego stopnia (bez wyrazów mieszanych)

$$\begin{aligned} y(k) &= w_1 u(k-1) + w_2 u^2(k-1) \\ &\quad + w_3 u(k-2) + w_4 u^2(k-2) \\ &\quad + w_5 y(k-1) + w_6 y^2(k-1) \\ &\quad + w_7 y(k-2) + w_8 y^2(k-2) \end{aligned} \tag{21}$$

otrzymujemy równania

$$\begin{aligned} &\underbrace{\begin{bmatrix} y(3) \\ y(4) \\ \vdots \\ y(P) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} u(2) & u^2(2) & u(1) & u^2(1) & y(2) & y^2(2) & y(1) & y^2(1) \\ u(3) & u^2(3) & u(2) & u^2(2) & y(3) & y^2(3) & y(2) & y^2(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(P-1) & u^2(P-1) & u(P-2) & u^2(P-2) & y(P-1) & y^2(P-1) & y(P-2) & y^2(P-2) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \\ &\times \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{w}} \end{aligned} \tag{22}$$

We wszystkich przypadkach rozwiązaniem zadania minimalizacji błędu modelu (3) jest wektor optymalny dany wzorem (4) lub (5).