

Modi projekt 2

zadanie 5

Jakub Ciemięga

05.06.2020

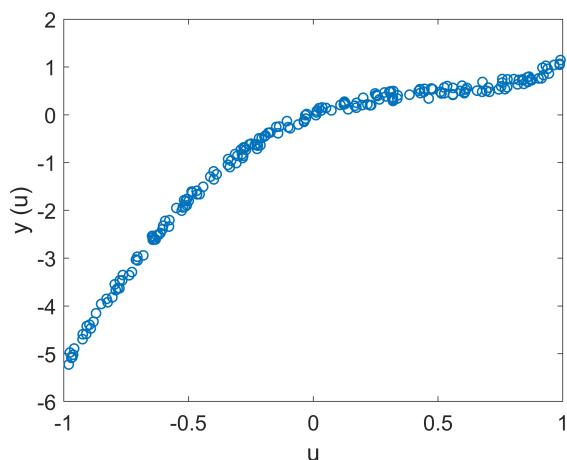
W pliku www.ia.pw.edu.pl/~maciek/modi/danestat5.zip znajdują się dane statyczne zarejestrowane podczas pracy procesu (pierwsza kolumna - sygnał wejściowy u , druga kolumna - sygnał wyjściowy y , w kolejnych wierszach podane są kolejne próbki).

Dane dynamiczne znajdują się w plikach www.ia.pw.edu.pl/~maciek/modi/danedynucz5.zip - zbiór uczący, www.ia.pw.edu.pl/~maciek/modi/danedynwer5.zip - zbiór weryfikujący (pierwsza kolumna - sygnał wejściowy u , druga kolumna - sygnał wyjściowy y , w kolejnych wierszach podane są próbki w kolejnych chwilach próbkowania).

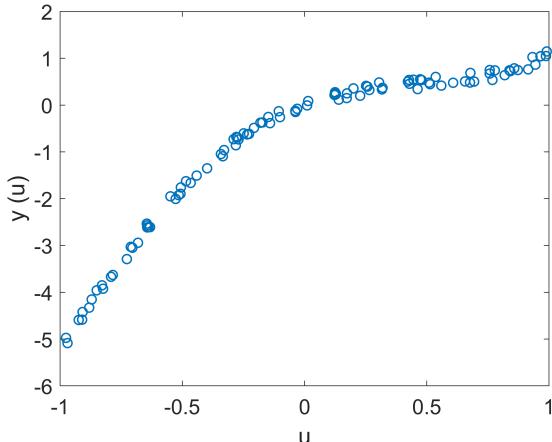
Zad 1. Identyfikacja modeli statycznych:

a) Narysować dane statyczne. Podzielić dane statyczne na zbiór uczący i weryfikujący, narysować te zbiory na oddzielnych rysunkach.

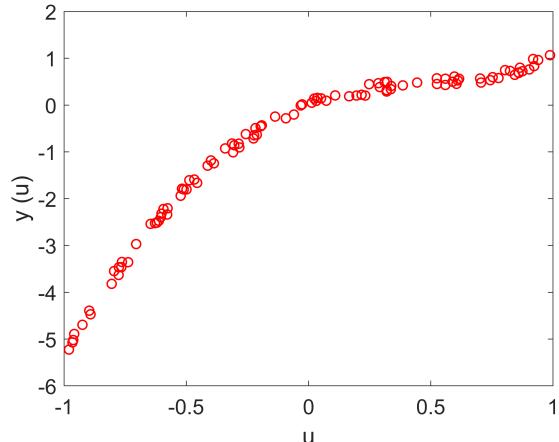
Dane statyczne zostały przedstawione na rysunku 1. Za pomocą przypisywania co drugiego wiersza danych statycznych do poszczególnych grup, uzyskano zbiory: uczący i weryfikujący. Przedstawiono je na rysunkach 2a i 2b. Można zauważyć, że choć da się wyszczególnić miejsca większego lub mniejszego nagromadzenia punktów w obu zbiorach, reprezentują one wyraźnie bardzo zbliżony przebieg.



Rysunek 1: Dane statyczne.



(a) Zbiór uczący.



(b) Zbiór weryfikujący.

Rysunek 2: Zbiór uczący i weryfikujący dla danych statycznych.

b) Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć statyczny model liniowy postaci

$$y(u) = a_0 + a_1 u$$

Narysować charakterystykę $y(u)$, obliczyć błędy modelu dla zbioru uczącego i weryfikującego. Pokazać na rysunkach wyjście modelu na tle dwóch zbiorów danych. Skomentować rezultaty.

Za pomocą MATLABa obliczono współczynniki:

$$a_0 = -0.7900$$

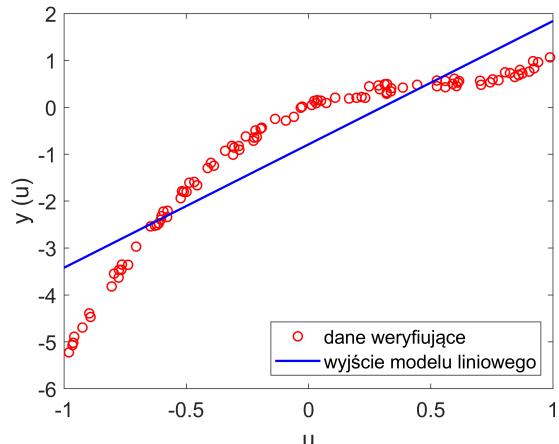
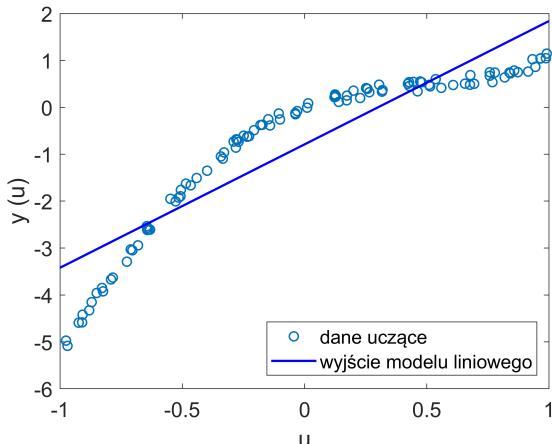
$$a_1 = 2.6308$$

Charakterystykę modelu $y(u) = -0.7900 + 2.6308u$ na tle zbioru uczącego i weryfikującego przedstawiono na rysunku 3. W MATLABie obliczono również średnie błędy kwadratowe dla obu zbiorów. Wyniosły one kolejno:

$$E_{ucz} = 0.4719$$

$$E_{wer} = 0.4930$$

Może cieszyć fakt, że wartości błędów kwadratowych dla obu zbiorów są do siebie zbliżone. Co prawda oba błędy są dość duże, jednak nie jest to zaskoczeniem. Już optyczna ewaluacja danych pozwalała bowiem stwierdzić, że model liniowy nie będzie ich dobrym przybliżeniem (co potwierdzają wykresy z rysunku 3). Można zatem powiedzieć, że dla danych warunków zadania wyniki są zadowalające.



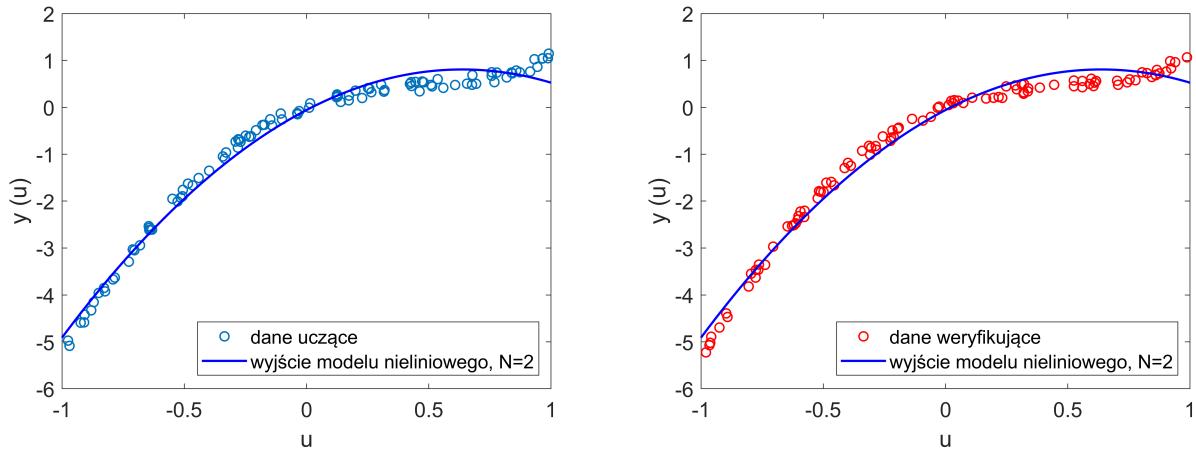
Rysunek 3: Wyjście modelu liniowego na tle zbioru uczącego i weryfikującego.

c) Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć statyczne modele nieliniowe postaci

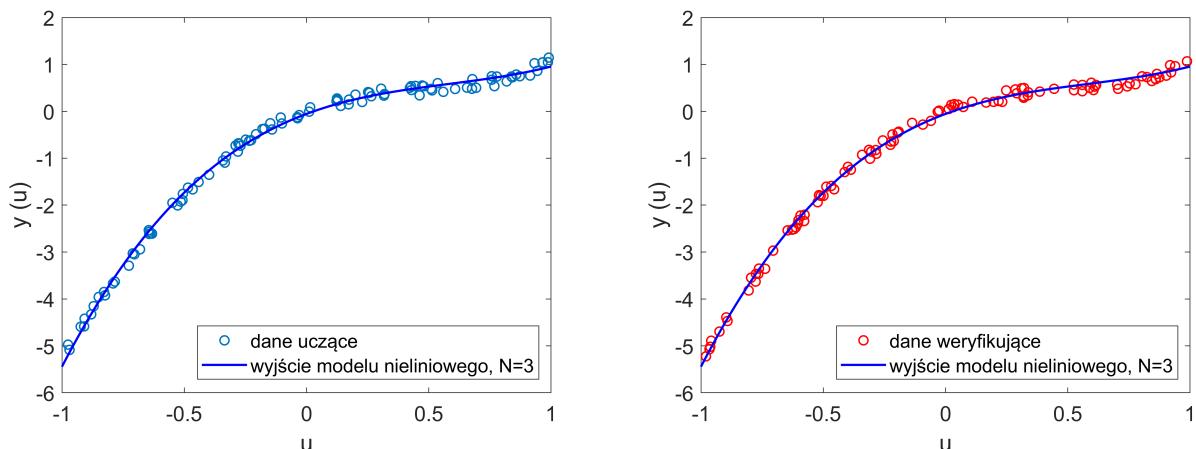
$$y(u) = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i u^i$$

dla różnych stopni wielomianu N . W każdym przypadku narysować charakterystykę $y(u)$, obliczyć błędy modelu dla zbioru uczącego i weryfikującego (podać je w tabeli) oraz pokazać na rysunkach wyjście modelu na tle dwóch zbiorów danych. Skomentować rezultaty. Wybrać najlepszy model statyczny. Uzasadnić wybór.

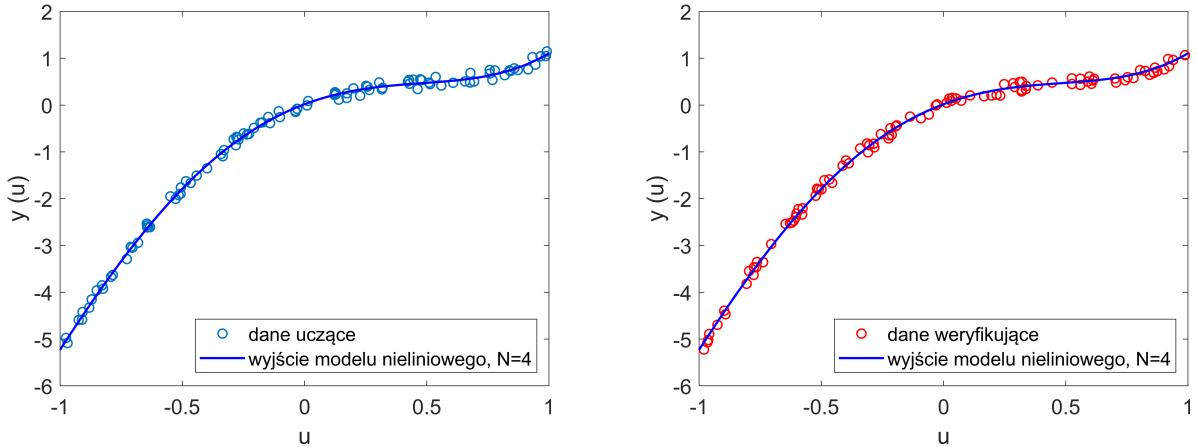
Wszystkie współczynniki modeli dla różnych stopni wielomianu N obliczono przy pomocy MATLABa. Na rysunkach 4-7 przedstawiono wyjścia kolejnych modeli na tle danych uczących i weryfikujących.



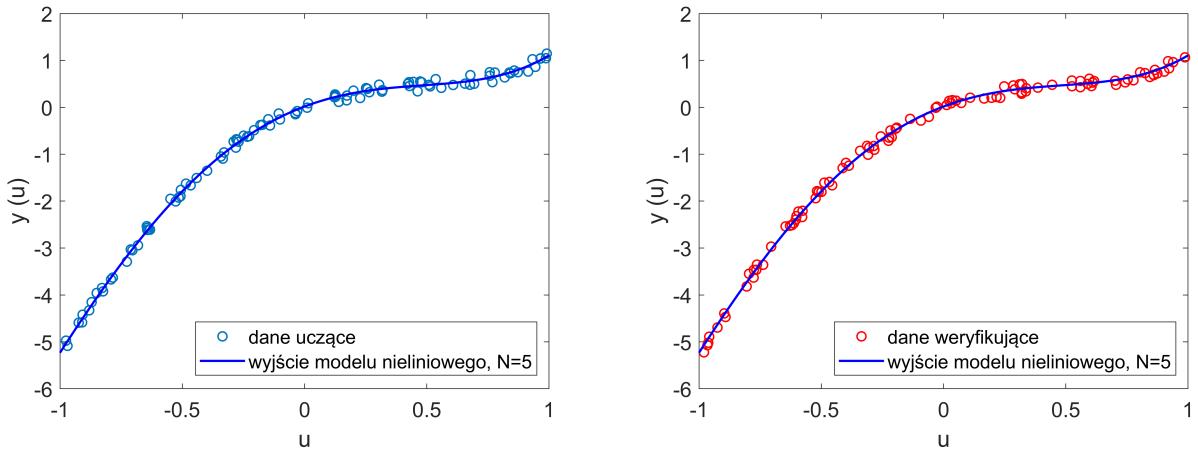
Rysunek 4: Wyjście modelu nieliniowego dla stopnia wielomianu $N=2$ na tle zbioru uczącego i weryfikującego.



Rysunek 5: Wyjście modelu nieliniowego dla stopnia wielomianu $N=3$ na tle zbioru uczącego i weryfikującego.



Rysunek 6: Wyjście modelu nieliniowego dla stopnia wielomianu $N=4$ na tle zbioru uczącego i weryfikującego.



Rysunek 7: Wyjście modelu nieliniowego dla stopnia wielomianu $N=5$ na tle zbioru uczącego i weryfikującego.

Obliczone wartości średnich błędów kwadratowych dla zbioru uczącego E_{ucz} i weryfikującego E_{wer} oraz dla różnych stopni wielomianu N przedstawiono w tabeli 1.

Stopień wielomianu	E_{ucz}	E_{wer}
2	0.0457	0.0437
3	0.0086	0.0080
4	0.0048	0.0055
5	0.0048	0.0055

Tabela 1: Porównanie średnich błędów kwadratowych statycznych modeli nieliniowych.

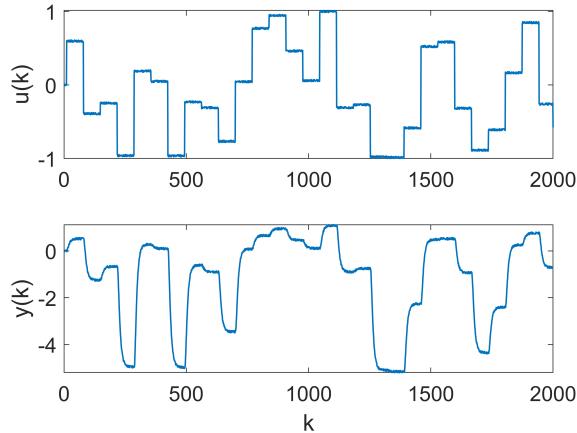
W celu oceny jakości modeli porównane zostały błędy dla zbioru weryfikującego. Można zauważyć, że dla wartości N od 2 do 4 jej zwiększanie prowadzi do widocznego zmniejszania E_{wer} . Z kolei dla $N = 5$ błąd jest taki sam (z dokładnością do zaokrągleń) jak dla $N = 4$. Optyczne porównanie odpowiednich wykresów potwierdza te spostrzeżenia; dla $N = 2-4$ każdy kolejny model jest widocznie lepiej dopasowany do danych zbioru weryfikującego a dla $N = 5$ wyjście modelu jest praktycznie nieroróżnialne z tym dla $N = 4$. Z tego powodu jako najlepszy nieliniowy model statyczny został wybrany model dla $N=4$ o postaci:

$$y(u) = 0.0169 + 1.9653u - 2.9078u^2 + 1.2044u^3 + 0.8281u^4$$

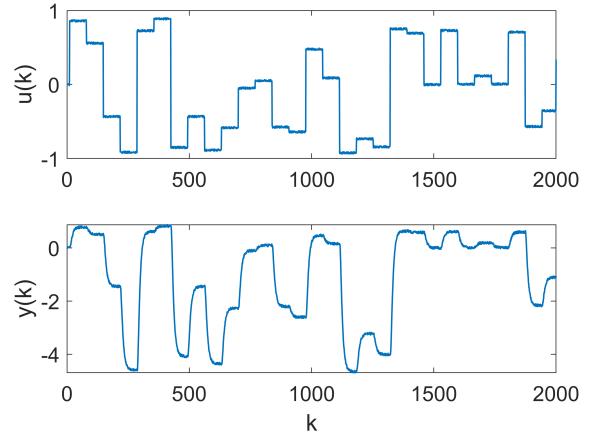
Zad 2. Identyfikacja modeli dynamicznych:

a) Narysować dane dynamiczne: zbiór uczący i weryfikujący (na oddzielnych rysunkach).

Zbiór uczący i weryfikujący danych dynamicznych pokazano na rysunku 8.



(a) zbiór uczący



(b) zbiór weryfikujący

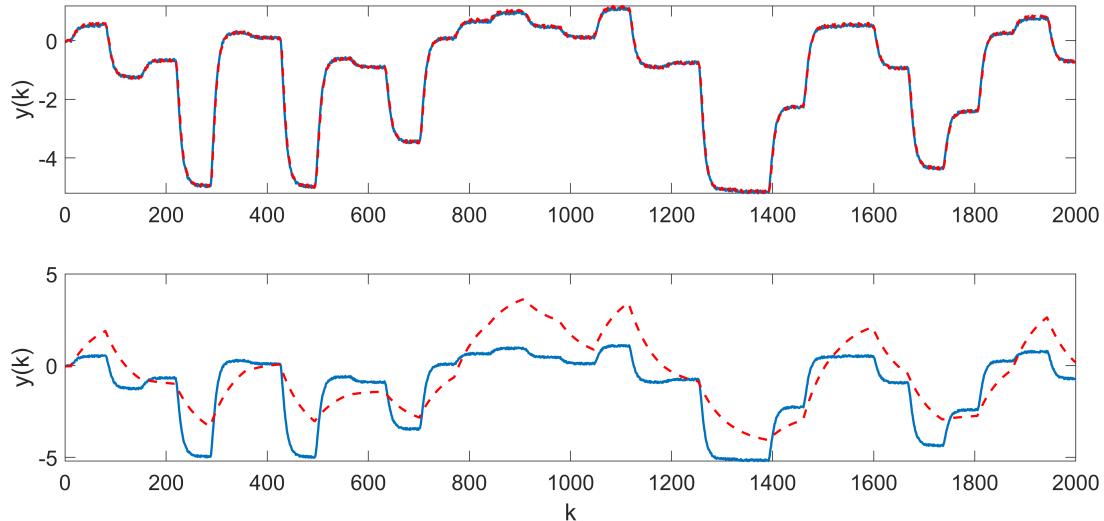
Rysunek 8: Wykresy wejścia układu dynamicznego u oraz jego wyjścia y w zależności od chwili próbkowania k dla zbioru uczącego i weryfikującego.

b) Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć dynamiczne modele liniowe postaci

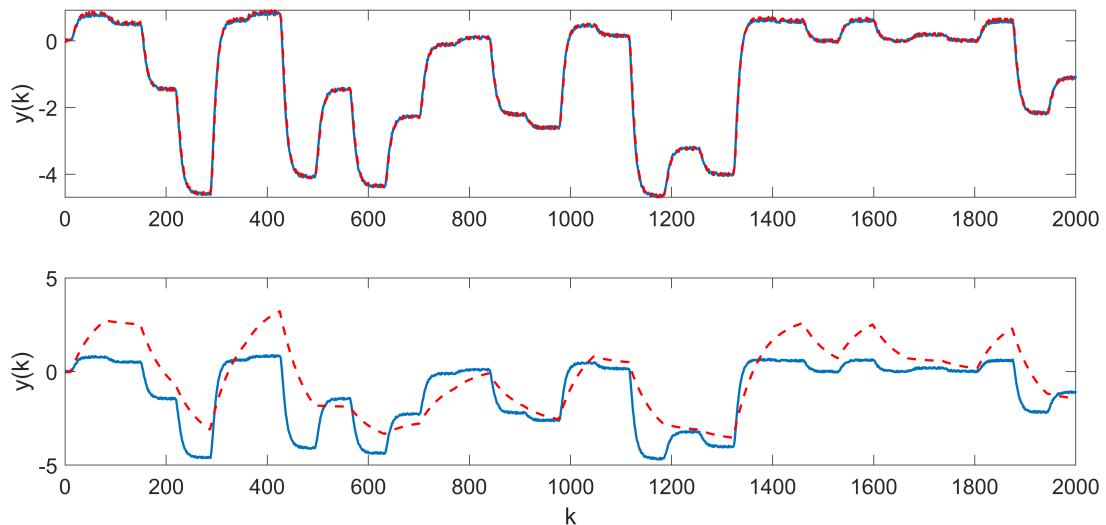
$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(k-i) + \sum_{i=1}^{n_A} a_i y(k-i)$$

pierwszego ($n_A = n_B = 1$), drugiego ($n_A = n_B = 2$) i trzeciego rzędu ($n_A = n_B = 3$). Dla każdego modelu obliczyć błędy dla zbioru uczącego i weryfikującego w trybie bez rekurencji i z rekurencją (podać je w tabeli) oraz pokazać na rysunkach wyjście modelu na tle dwóch zbiorów danych (w trybie bez rekurencji i z rekurencją). Skomentować rezultaty. Wybrać najlepszy model liniowy z punktu widzenia dokładności (w trybie rekurencyjnym).

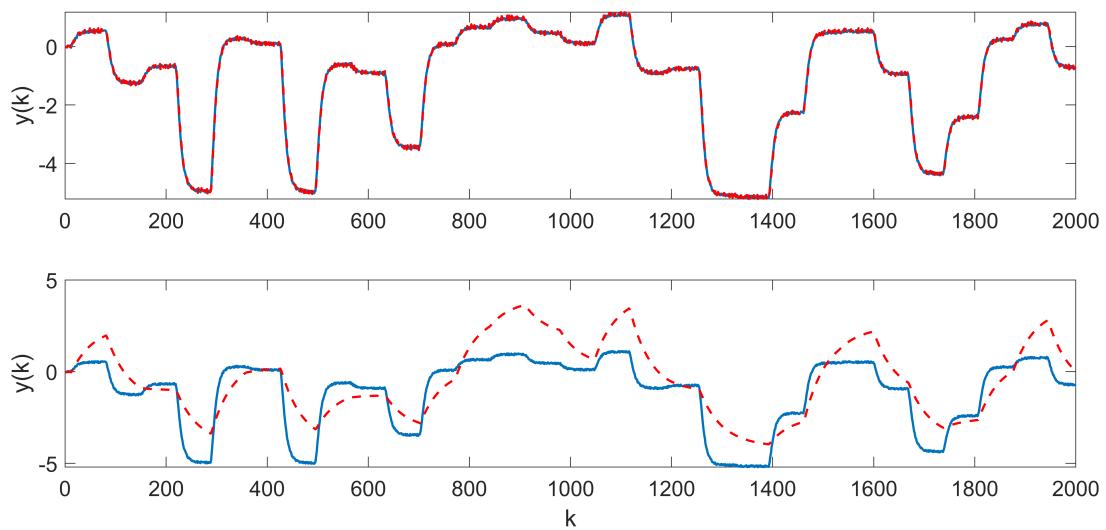
W zadaniu zostało przyjęte oznaczenie $n_A = n_B = D$. Wszystkie modele zostały wyznaczone z pomocą MATLABa. Na rysunkach 9-14 przedstawiono wyjście poszczególnych wariantów modelu na tle danych uczących i weryfikujących.



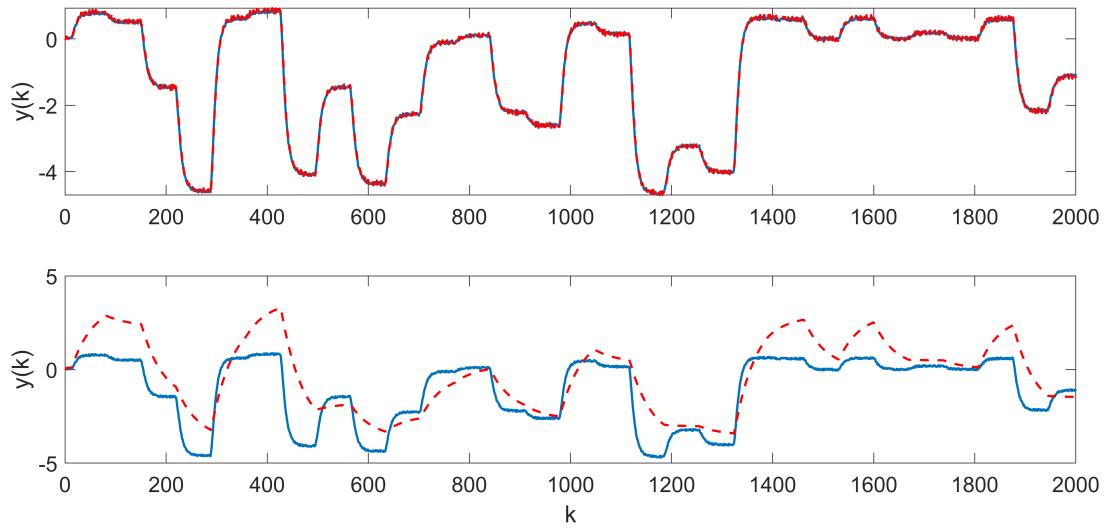
Rysunek 9: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 1$ na tle zbioru uczącego.



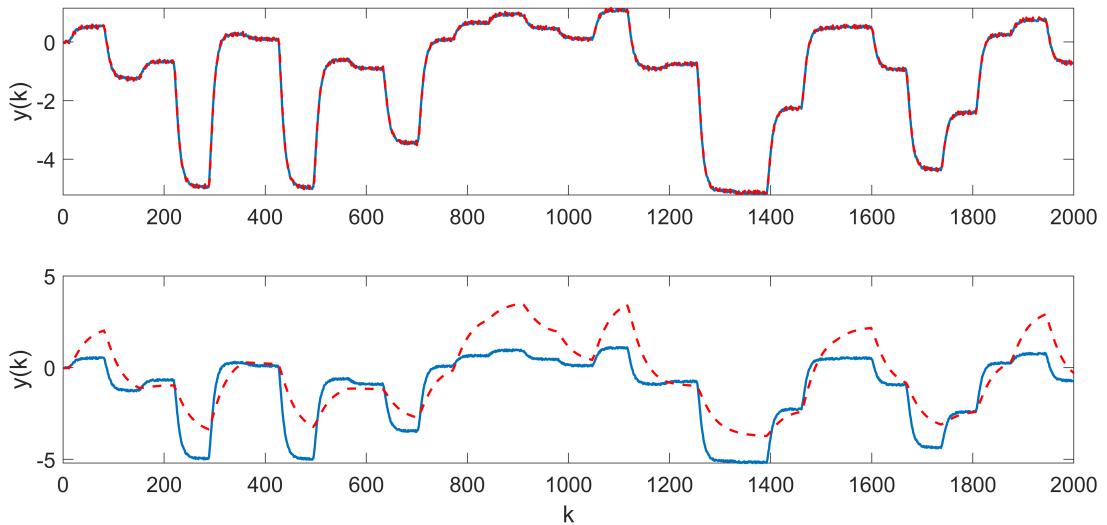
Rysunek 10: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 1$ na tle zbioru weryfikującego.



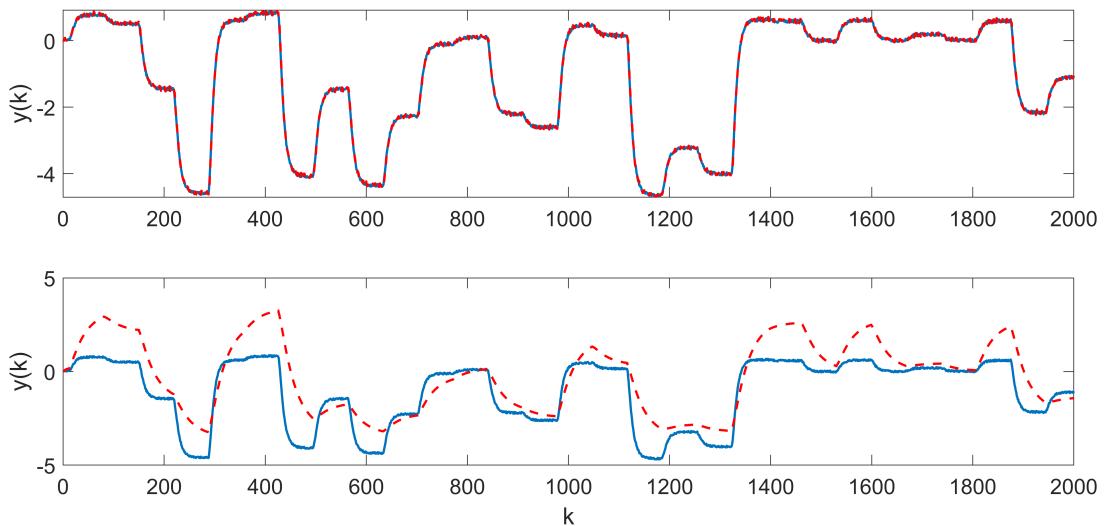
Rysunek 11: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 2$ na tle zbioru uczącego.



Rysunek 12: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 2$ na tle zbioru weryfikującego.



Rysunek 13: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 3$ na tle zbioru uczącego.



Rysunek 14: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 3$ na tle zbioru weryfikującego.

Optyczna ewaluacja powyższych rysunków pozwala stwierdzić, że algorytm bez rekurencji jest zdecydowanie bardziej skuteczny od algorytmu z rekurencją. W żadnym z powyższych przypadków model z rekurencją nie stanowi dobrego przybliżenia zbioru weryfikującego przez co cięko ocenić ich jakość. W tym celu należy przyjrzeć się średnim błędem kwadratowym.

Rząd dynamiki D	Zbiór uczący		Zbiór weryfikujący	
	Bez rekurencji	Z rekurencją	Bez rekurencji	Z rekurencją
1	0.0049	1.9812	0.0042	1.9124
2	0.0038	1.8746	0.0034	1.8250
3	0.0029	1.6738	0.0026	1.6335

Tabela 2: Porównanie średnich błędów kwadratowych modeli nieliniowych, pierwszy stopień wielomianu.

Na podstawie tabeli 2 można stwierdzić, że najlepszy model liniowy w trybie rekurencyjnym udało się uzyskać dla $D = 3$. Warto również odnotować, że (zgodnie z oceną optyczną wykresów) błędy modeli rekurencyjnych są znaczco większe od błędów modeli bez rekurencji. Jest to prawdopodobnie spowodowane tym, że algorytm bez rekurencji korzysta ze wszystkich wartości $y(k)$ zbioru, zaś algorytm rekurencyjny jedynie z kilku pierwszych. Aby algorytm rekurencyjny działał lepiej należy zastosować model dynamiczny nieliniowy.

c) Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć szereg wielomianowych dynamicznych modeli nieliniowych. Rozważyć modele o różnym rzędzie dynamiki i strukturze nieliniowości, np. modele o dynamice pierwszego rzędu i różnym stopniu wielomianów

$$\begin{aligned}y(k) &= w_1 u(k-1) + w_2 u^2(k-1) + w_3 y(k-1) + w_4 y^2(k-1) \\y(k) &= w_1 u(k-1) + w_2 u^2(k-1) + w_3 u^3(k-1) \\&\quad + w_4 y(k-1) + w_5 y^2(k-1) + w_6 y^3(k-1) \\y(k) &= w_1 u(k-1) + w_2 u^2(k-1) + w_3 u^3(k-1) + w_4 u^4(k-1) \\&\quad + w_5 y(k-1) + w_6 y^2(k-1) + w_7 y^3(k-1) + w_8 y^4(k-1)\end{aligned}$$

itd.

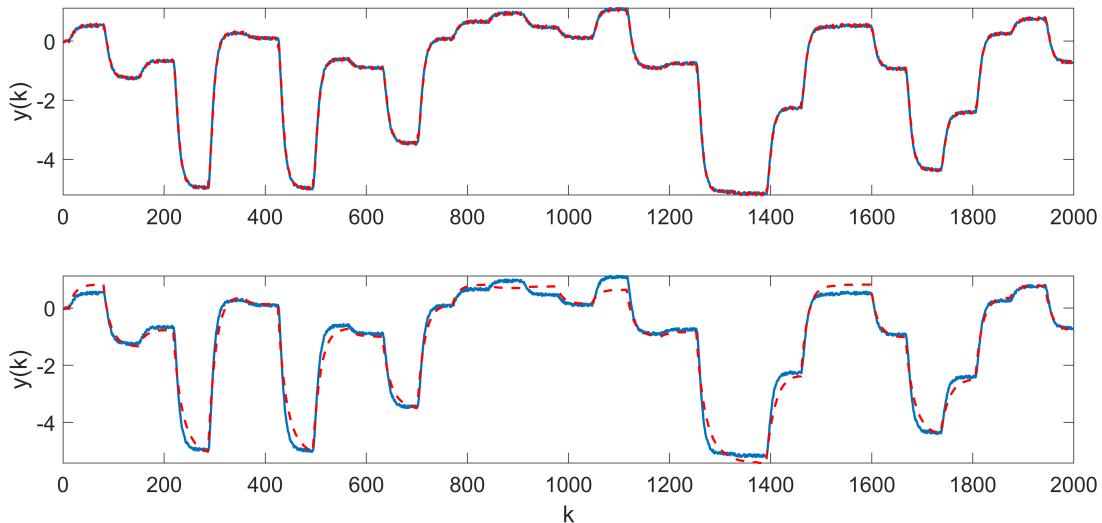
modele o dynamice drugiego rzędu i różnym stopniu wielomianów

$$\begin{aligned}y(k) &= w_1 u(k-1) + w_2 u^2(k-1) \\&\quad + w_3 u(k-2) + w_4 u^2(k-2) \\&\quad + w_5 y(k-1) + w_6 y^2(k-1) \\&\quad + w_7 y(k-2) + w_8 y^2(k-2) \\y(k) &= w_1 u(k-1) + w_2 u^2(k-1) + w_3 u^3(k-1) \\&\quad + w_4 u(k-2) + w_5 u^2(k-2) + w_6 u^3(k-2) \\&\quad + w_7 y(k-1) + w_8 y^2(k-1) + w_9 y^3(k-1) \\&\quad + w_{10} y(k-2) + w_{11} y^2(k-2) + w_{12} y^3(k-2) \\y(k) &= w_1 u(k-1) + w_2 u^2(k-1) + w_3 u^3(k-1) + w_4 u^4(k-1) \\&\quad + w_5 u(k-2) + w_6 u^2(k-2) + w_7 u^3(k-2) + w_8 u^4(k-2) \\&\quad + w_9 y(k-1) + w_{10} y^2(k-1) + w_{11} y^3(k-1) + w_{12} y^4(k-1) \\&\quad + w_{13} y(k-2) + w_{14} y^2(k-2) + w_{15} y^3(k-2) + w_{16} y^4(k-2)\end{aligned}$$

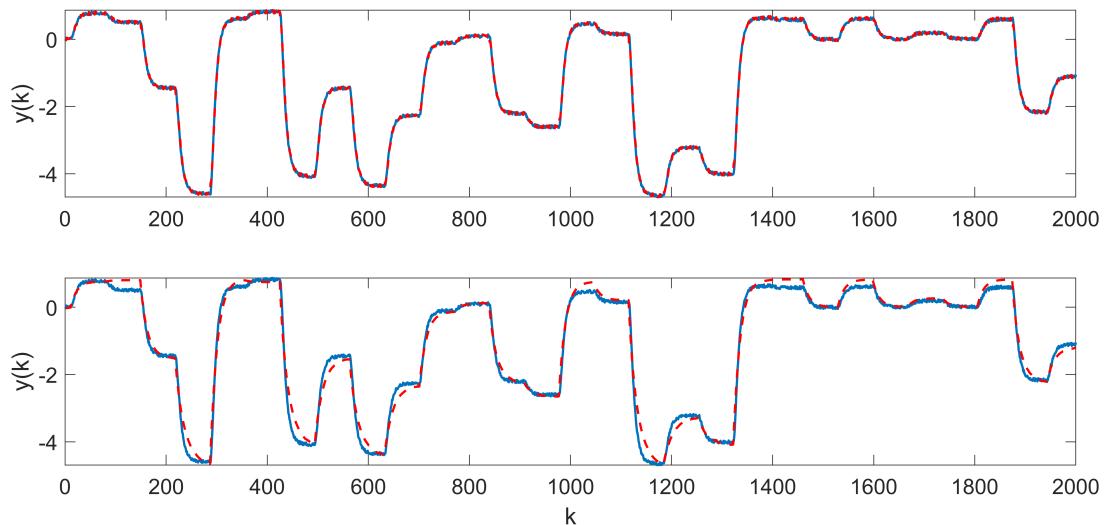
itd.

modele o dynamice trzeciego rzędu itd. Ewentualnie uwzględnić wyrazy mieszane, np. postaci $u(k-1)y(k-1)$, $u^2(k-1)y(k-1)$, $u(k-2)y(k-1)$, itd. Dla każdego modelu obliczyć błędy dla zbioru uczącego i weryfikującego w trybie bez rekurencji i z rekurencją (podać je w tabeli) oraz pokazać na rysunkach wyjście modeli na tle dwóch zbiorów danych (w trybie bez rekurencji i z rekurencją). Skomentować rezultaty. Wybrać najlepszy model nieliniowy z punktu widzenia dokładności (w trybie rekurencyjnym) i ewentualnie liczby parametrów.

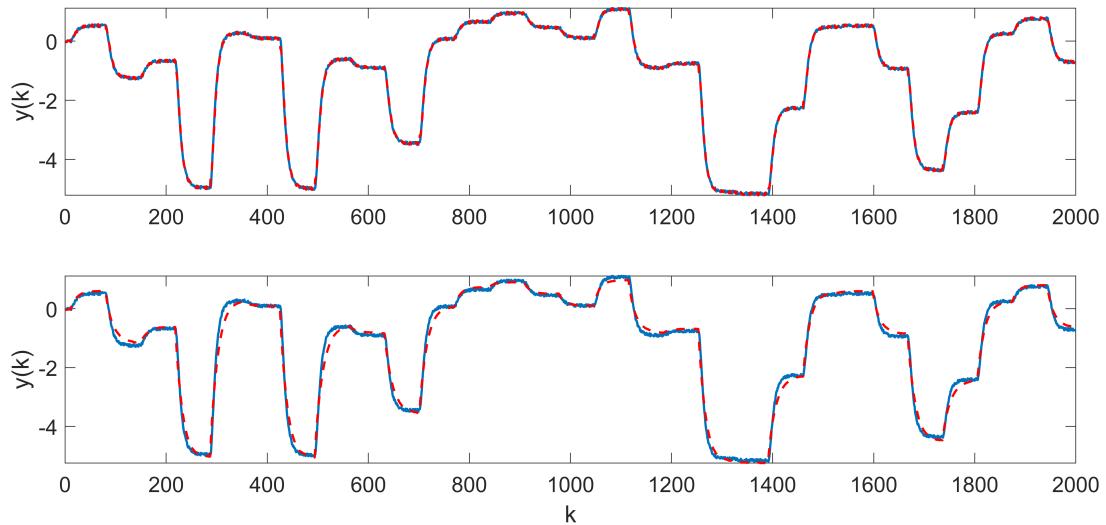
W zadaniu zostały przyjęte oznaczenia rzędu dynamiki macierzy: D oraz stopnia wielomianu: N. Wszystkie modele zostały wyznaczone z pomocą MATLABa. Na rysunkach 15-46 przedstawiono wyjścia poszczególnych wariantów modelu na tle danych uczących i weryfikujących.



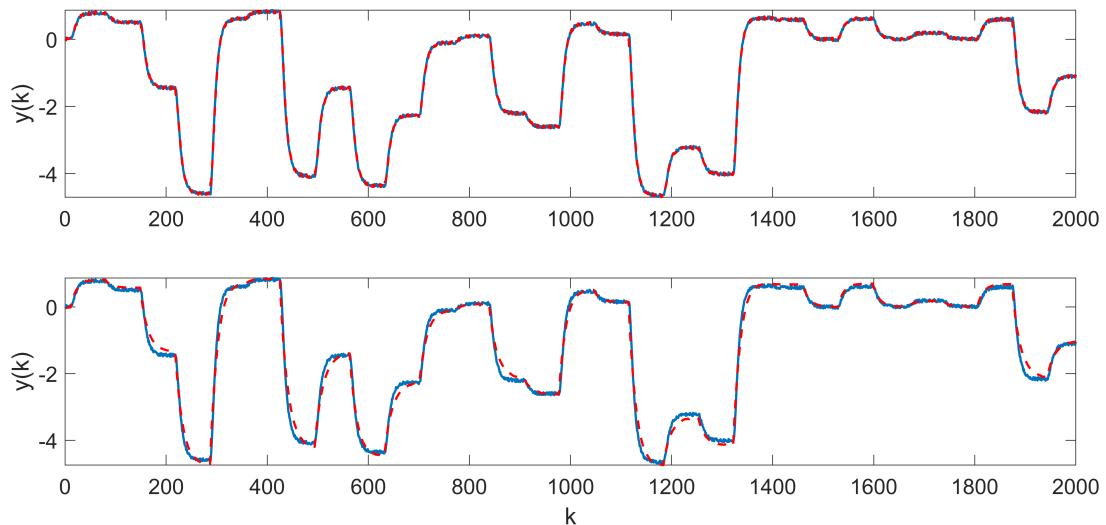
Rysunek 15: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 1$, $N = 2$ na tle zbioru uczącego.



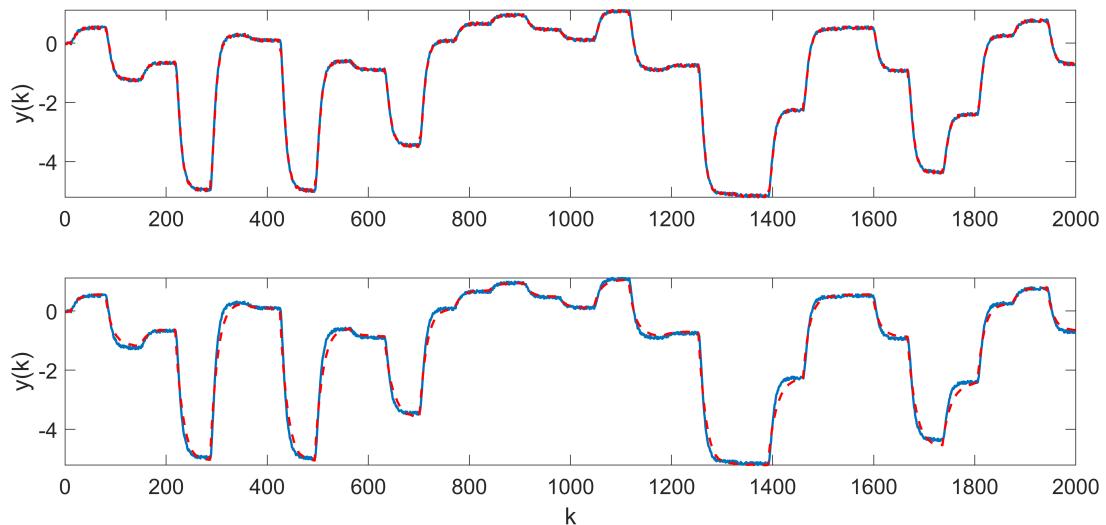
Rysunek 16: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 1$, $N = 2$ na tle zbioru weryfikującego.



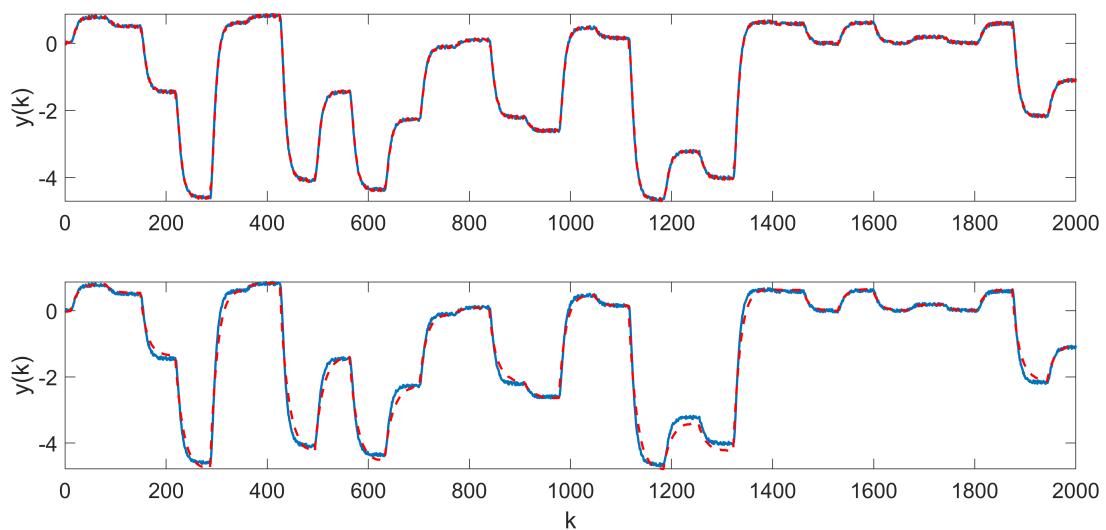
Rysunek 17: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 1$, $N = 3$ na tle zbioru uczącego.



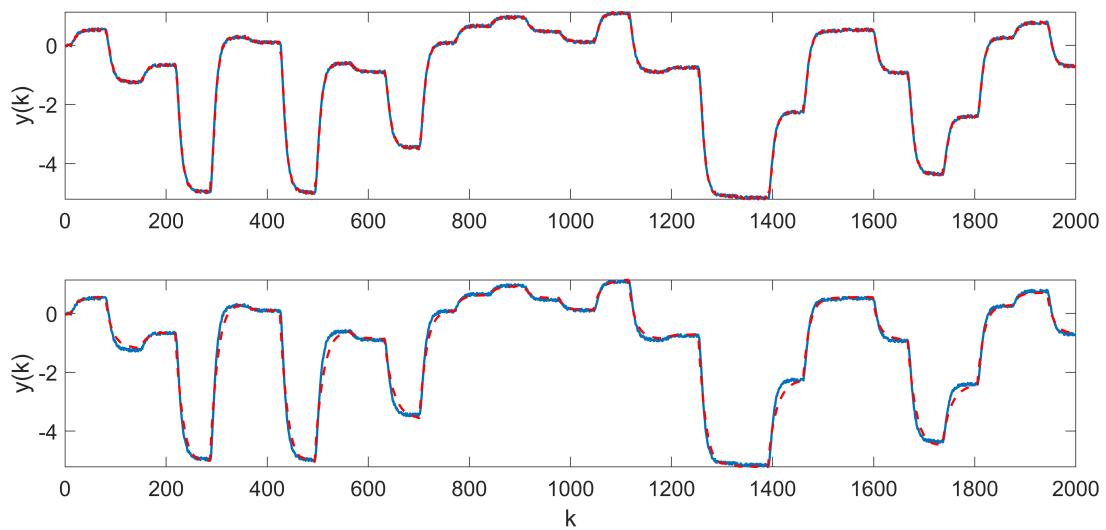
Rysunek 18: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 1$, $N = 3$ na tle zbioru weryfikującego.



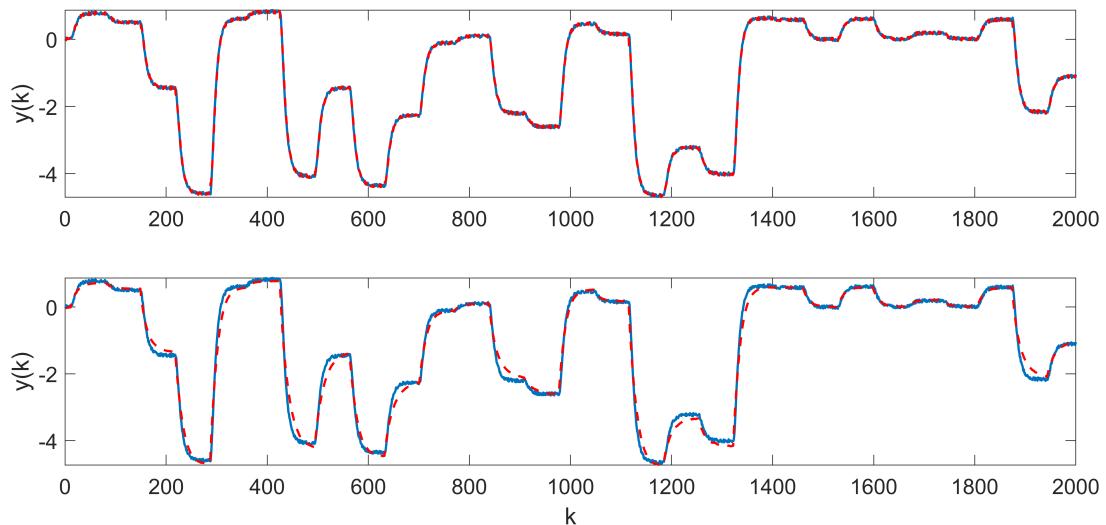
Rysunek 19: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 1$, $N = 4$ na tle zbioru uczącego.



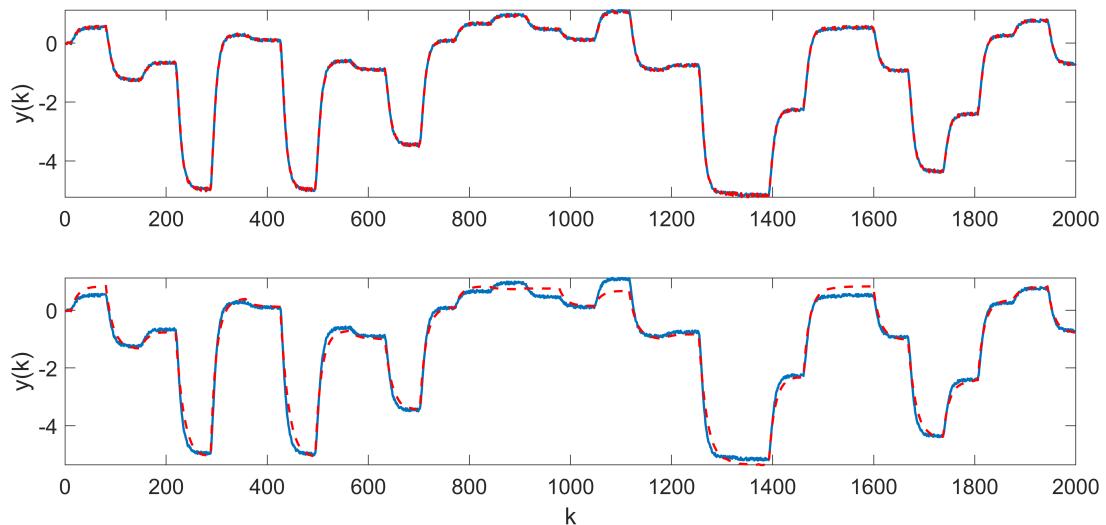
Rysunek 20: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 1$, $N = 4$ na tle zbioru weryfikującego.



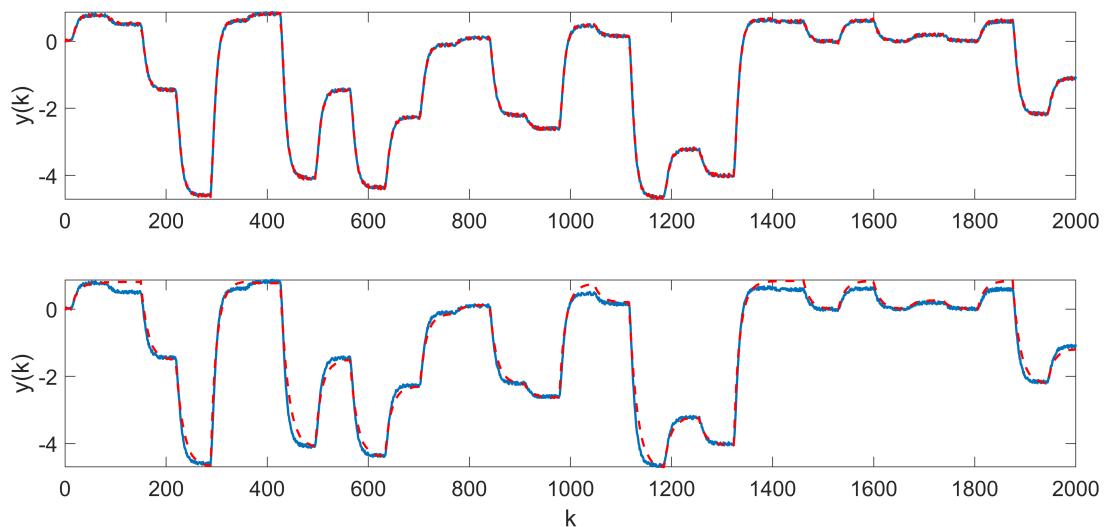
Rysunek 21: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 1$, $N = 5$ na tle zbioru uczącego.



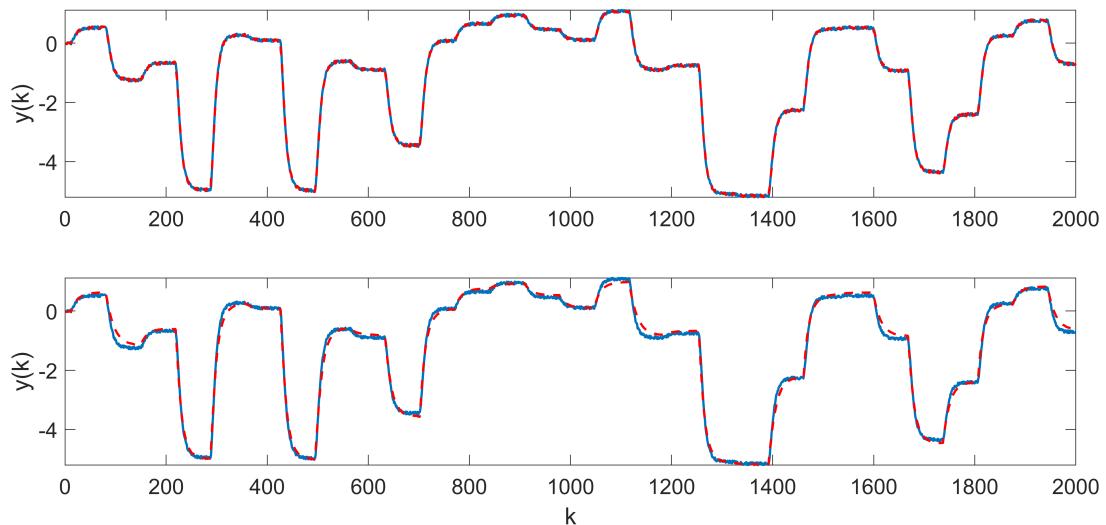
Rysunek 22: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 1$, $N = 5$ na tle zbioru weryfikującego.



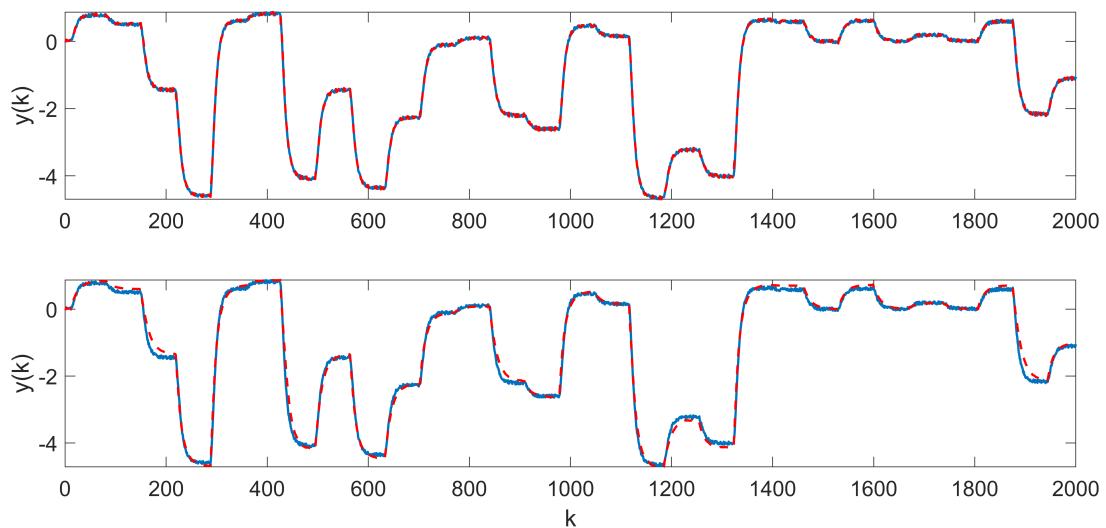
Rysunek 23: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 2$, $N = 2$ na tle zbioru uczącego.



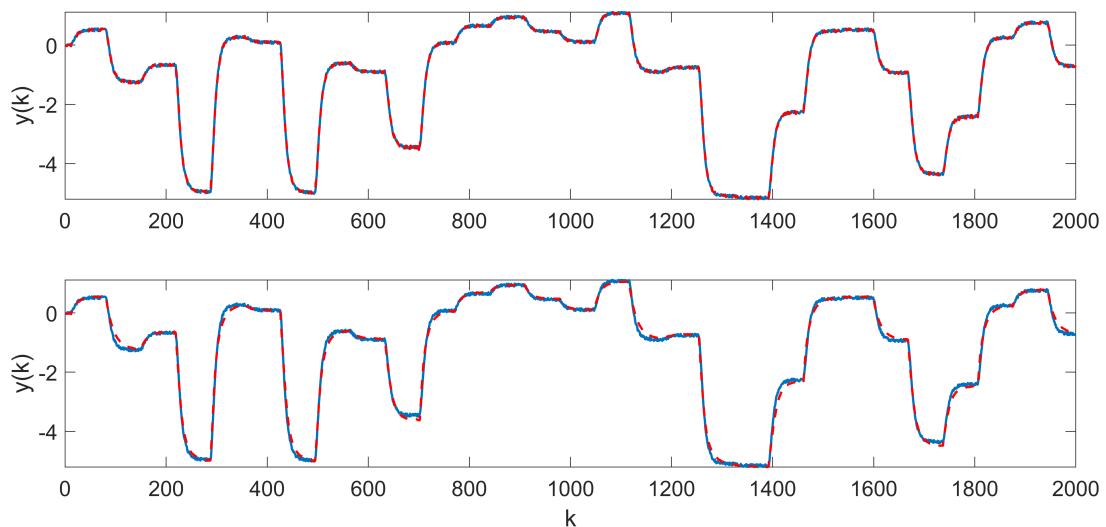
Rysunek 24: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 2$, $N = 2$ na tle zbioru weryfikującego.



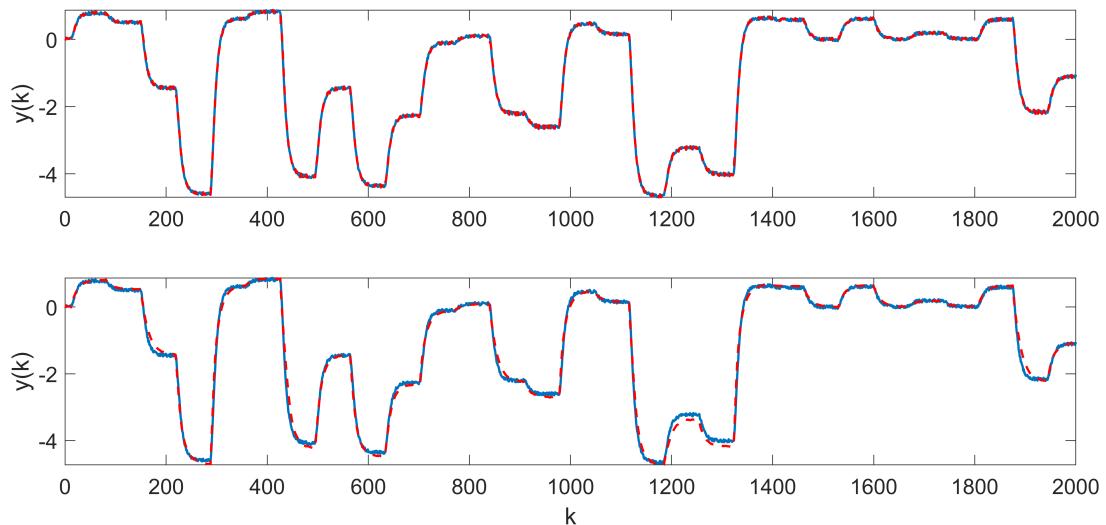
Rysunek 25: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 2, N = 3$ na tle zbioru uczącego.



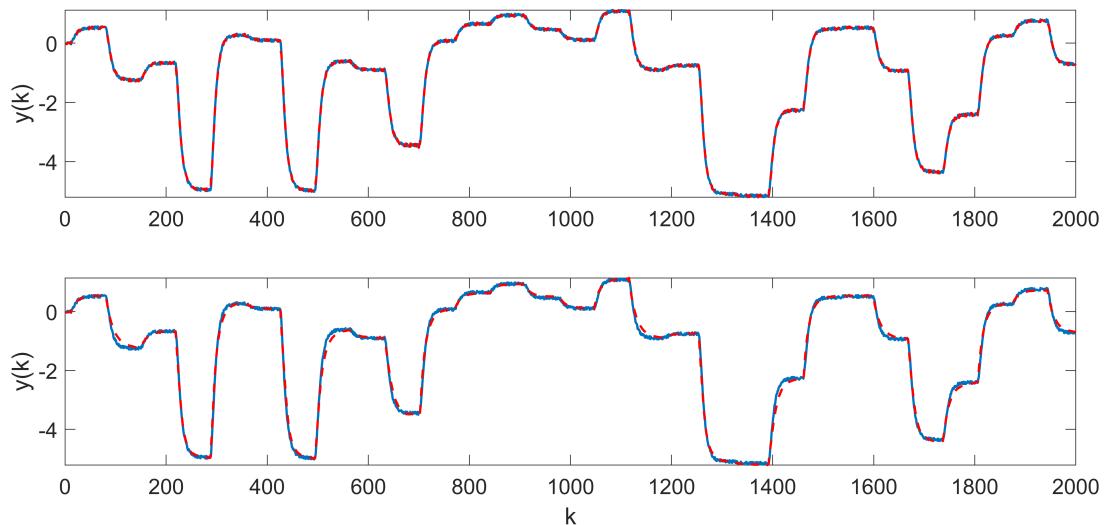
Rysunek 26: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 2, N = 3$ na tle zbioru weryfikującego.



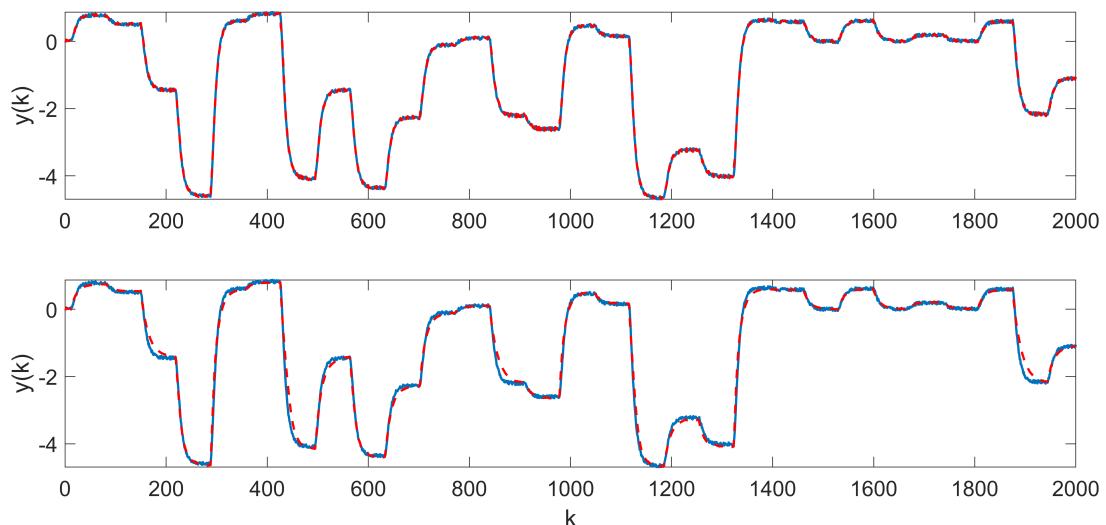
Rysunek 27: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 2, N = 4$ na tle zbioru uczącego.



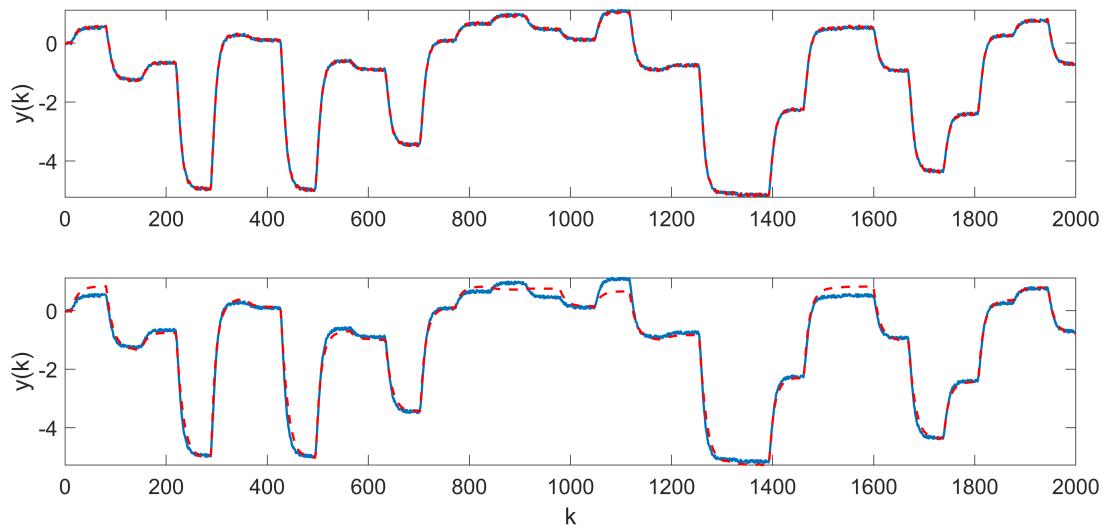
Rysunek 28: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 2, N = 4$ na tle zbioru weryfikującego.



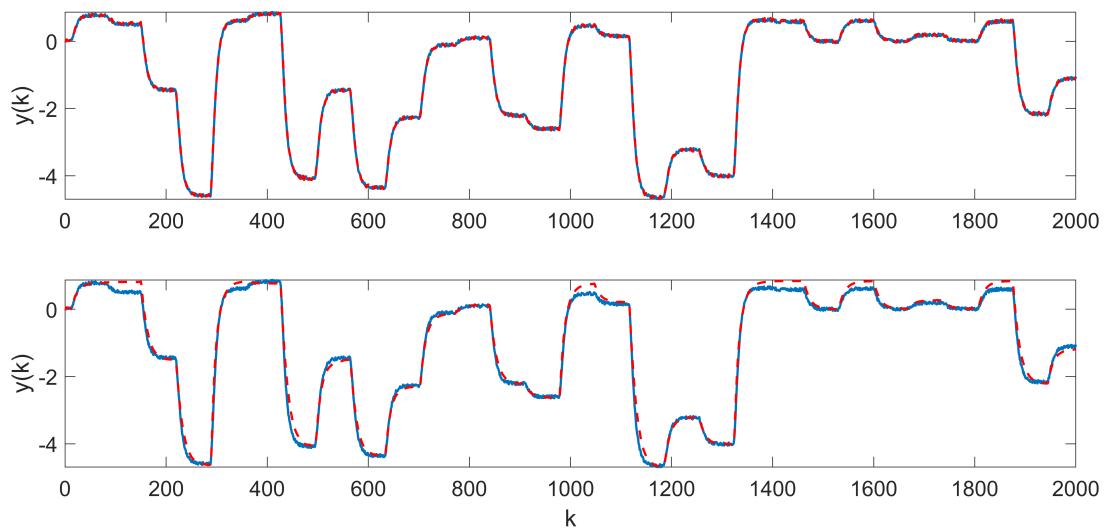
Rysunek 29: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 2, N = 5$ na tle zbioru uczącego.



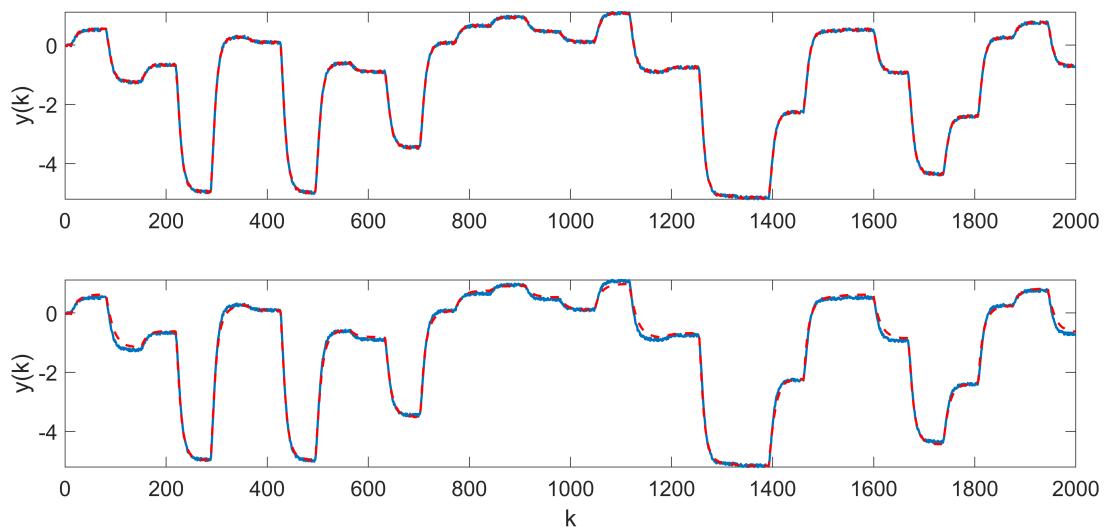
Rysunek 30: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 2, N = 5$ na tle zbioru weryfikującego.



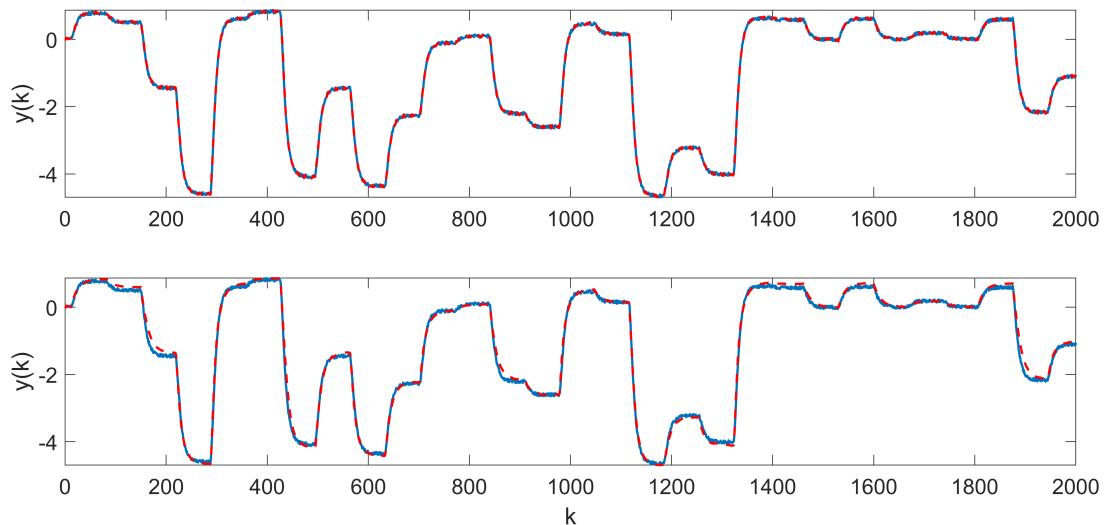
Rysunek 31: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 3$, $N = 2$ na tle zbioru uczącego.



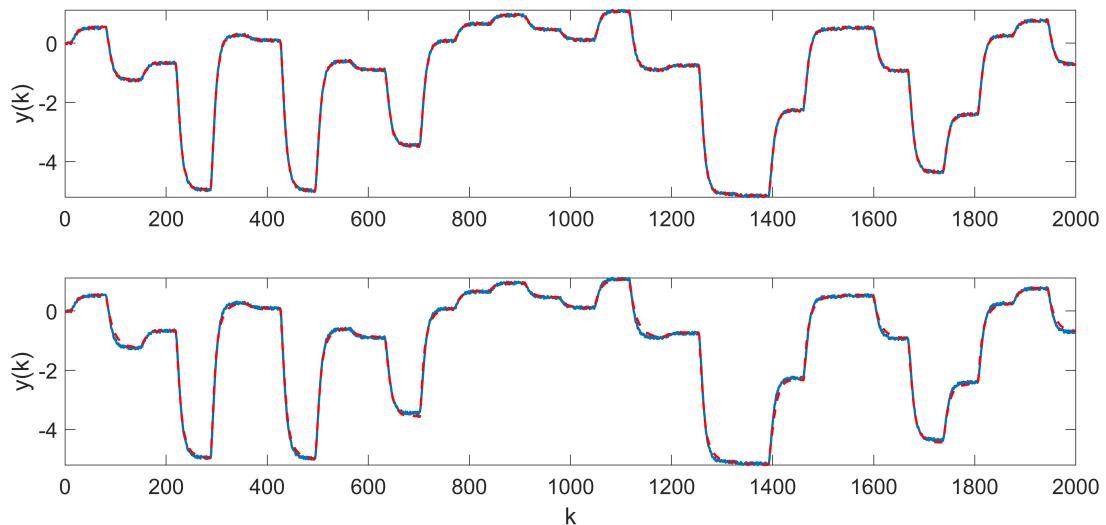
Rysunek 32: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 3$, $N = 2$ na tle zbioru weryfikującego.



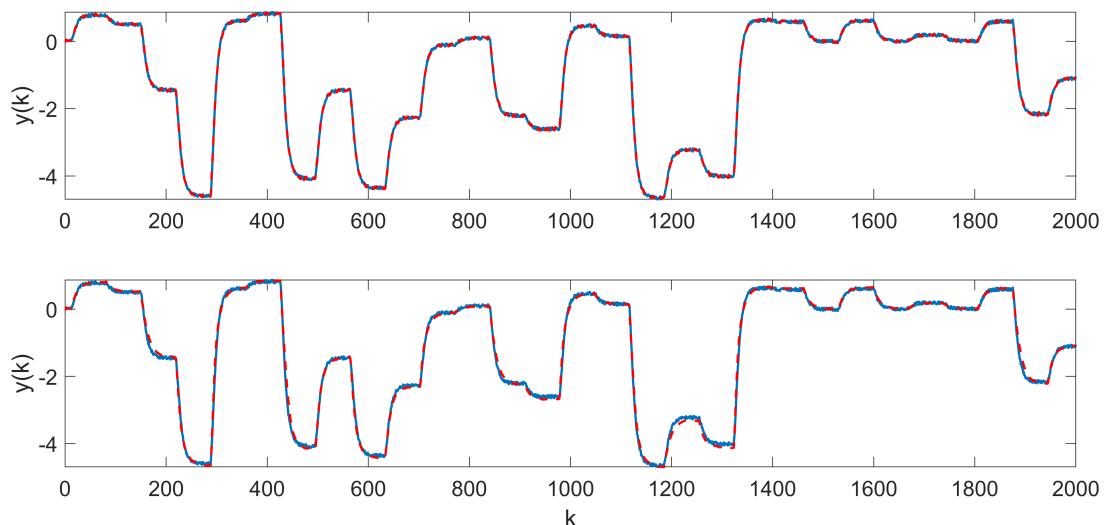
Rysunek 33: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 3$, $N = 3$ na tle zbioru uczącego.



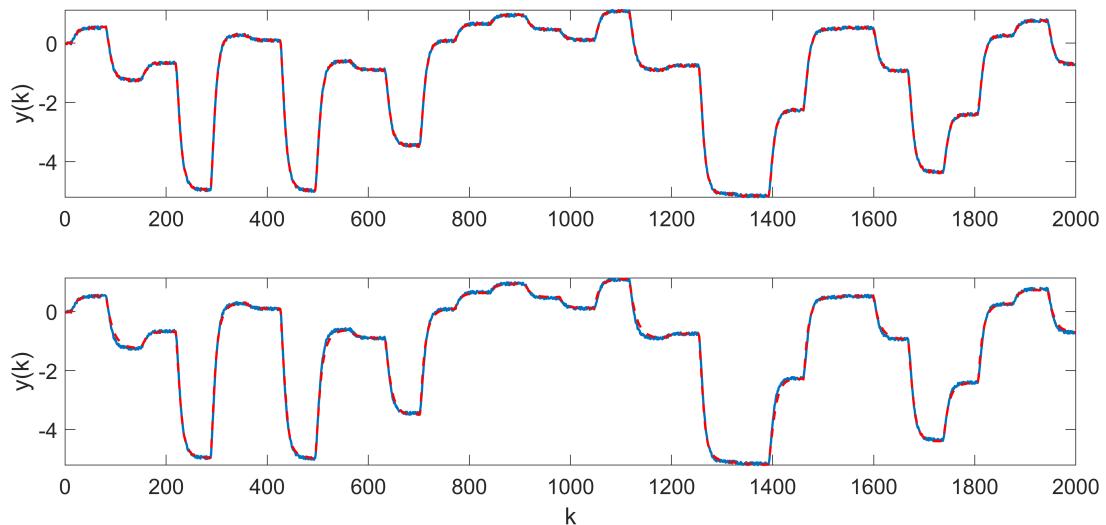
Rysunek 34: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 3$, $N = 3$ na tle zbioru weryfikującego.



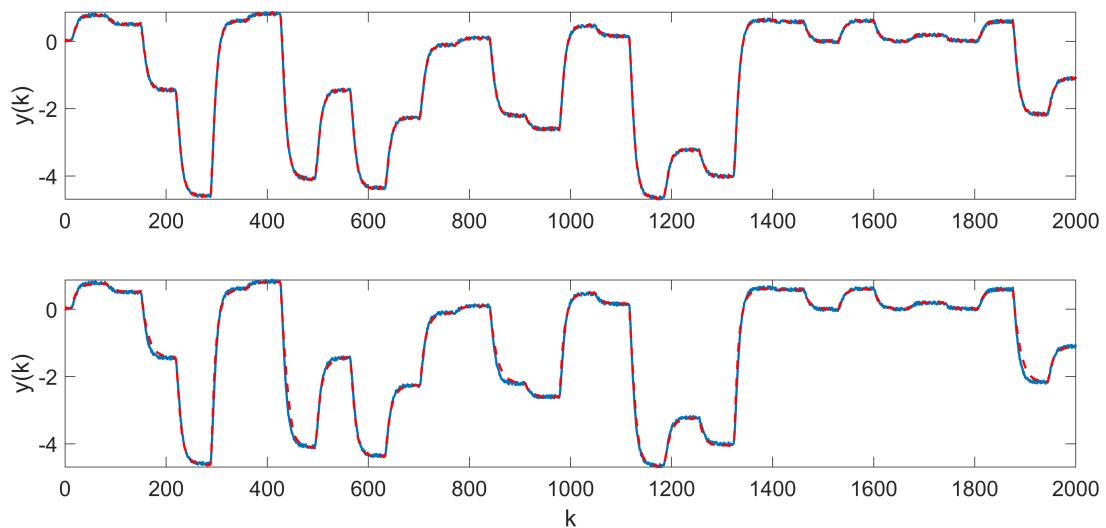
Rysunek 35: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 3$, $N = 4$ na tle zbioru uczącego.



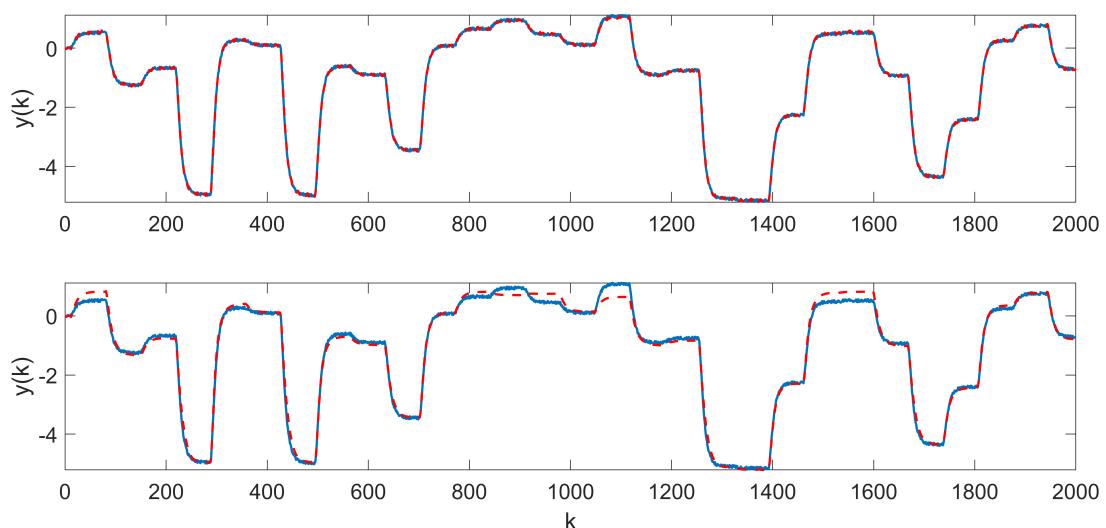
Rysunek 36: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 3$, $N = 4$ na tle zbioru weryfikującego.



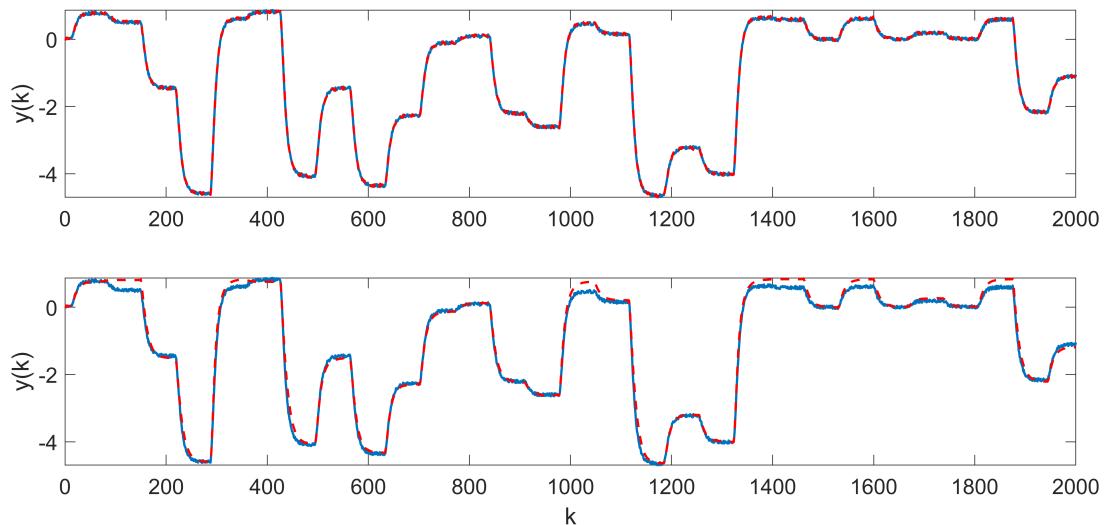
Rysunek 37: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 3$, $N = 5$ na tle zbioru uczącego.



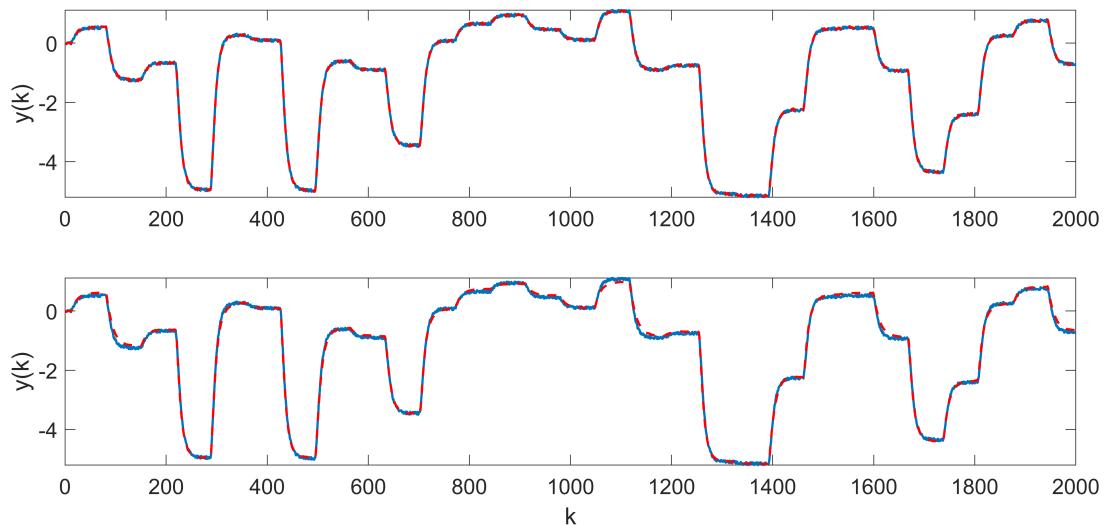
Rysunek 38: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 3$, $N = 5$ na tle zbioru weryfikującego.



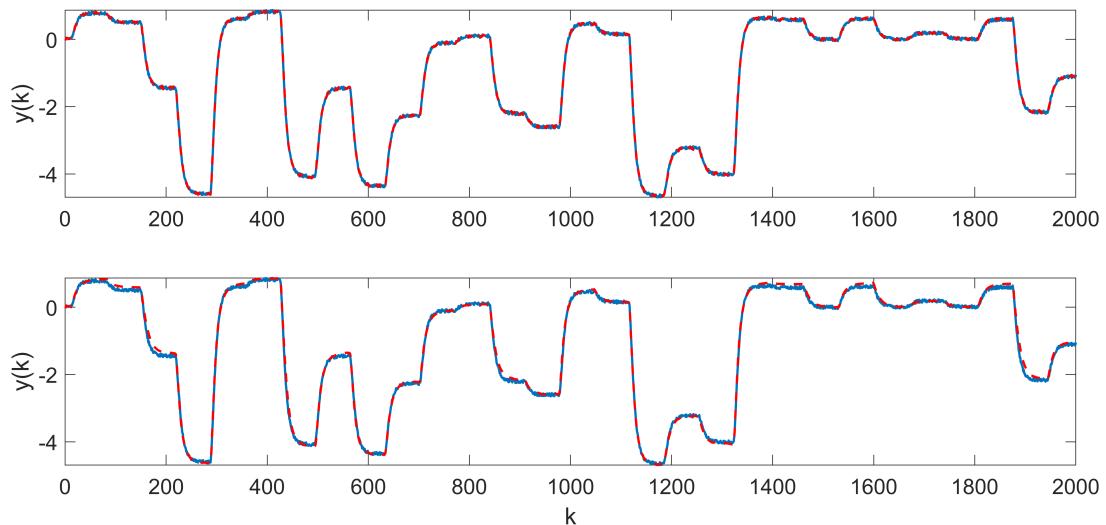
Rysunek 39: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 4$, $N = 2$ na tle zbioru uczącego.



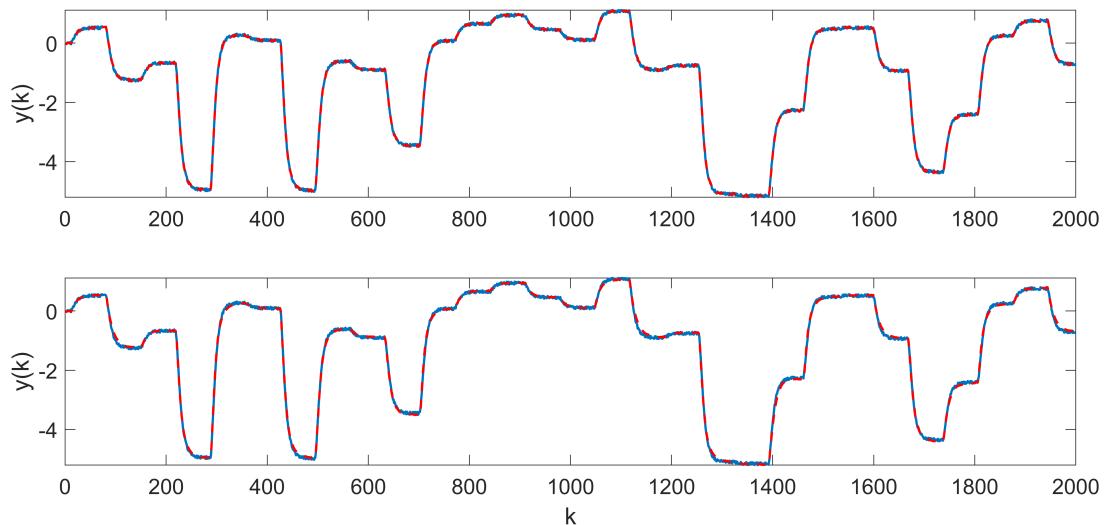
Rysunek 40: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 4$, $N = 2$ na tle zbioru weryfikującego.



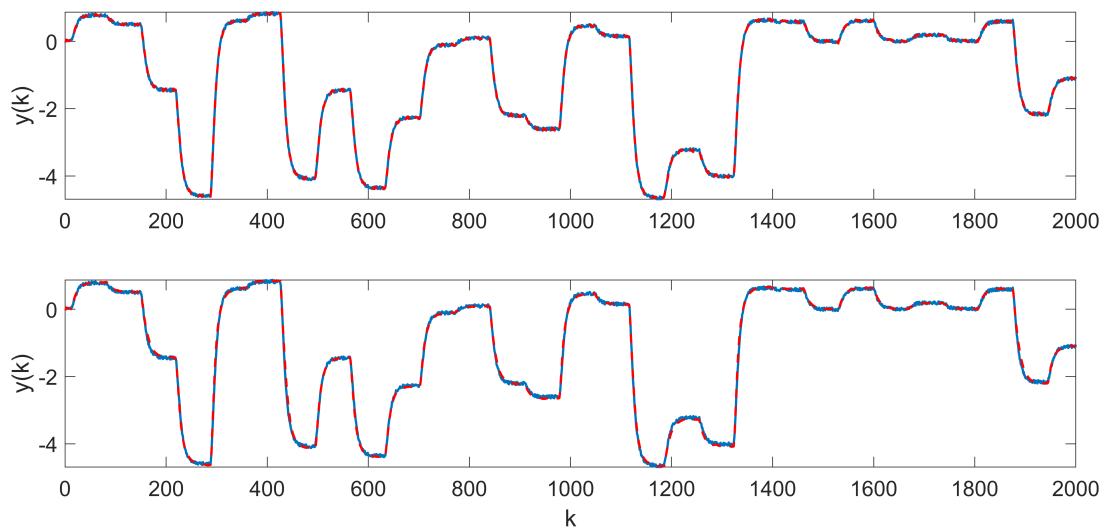
Rysunek 41: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 4$, $N = 3$ na tle zbioru uczącego.



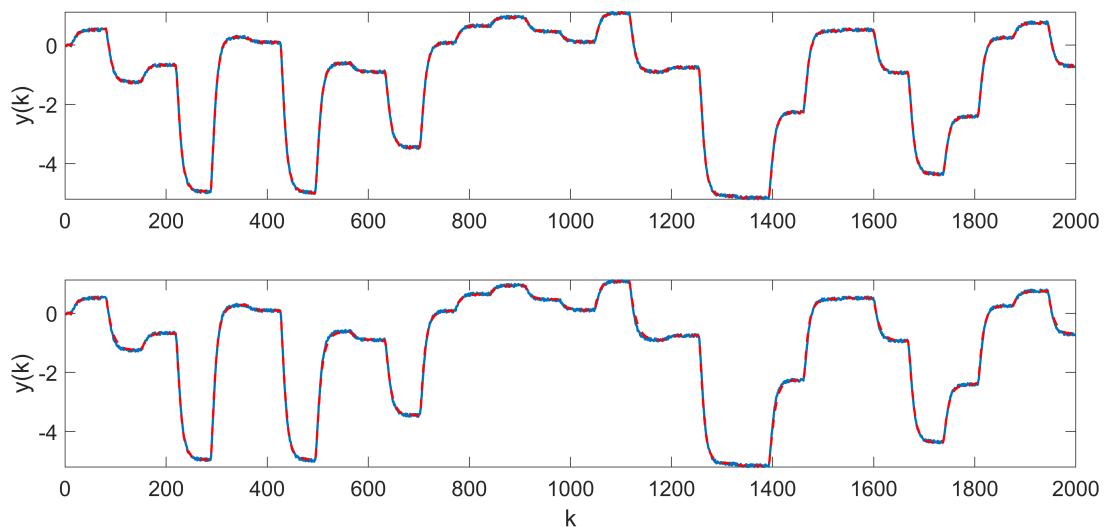
Rysunek 42: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 4$, $N = 3$ na tle zbioru weryfikującego.



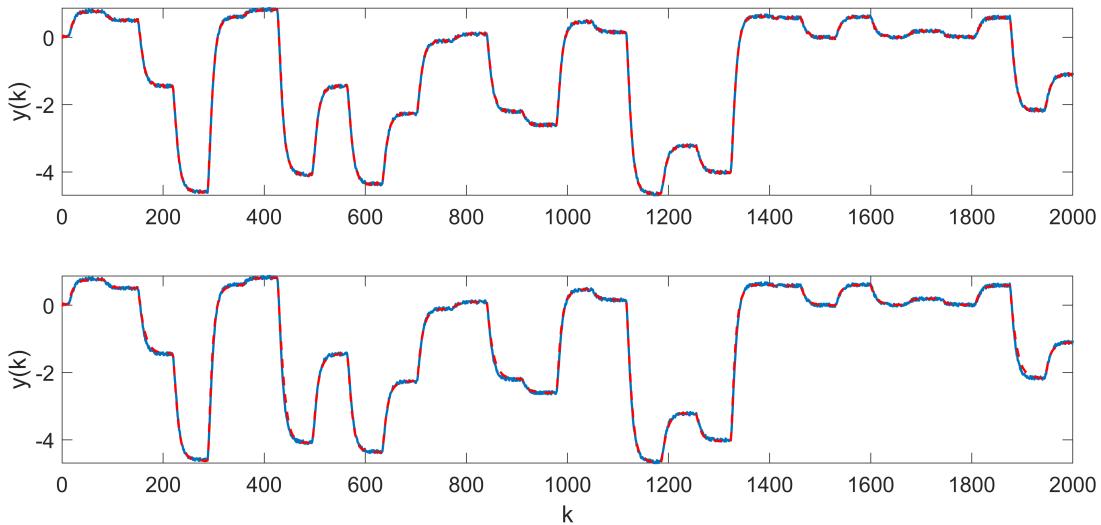
Rysunek 43: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 4$, $N = 4$ na tle zbioru uczącego.



Rysunek 44: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 4$, $N = 4$ na tle zbioru weryfikującego.



Rysunek 45: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 4$, $N = 5$ na tle zbioru uczącego.



Rysunek 46: Wyjście modelu w wersji bez rekurencji i z rekurencją dla $D = 4$, $N = 5$ na tle zbioru weryfikującego.

W tabelach 3-6 pokazano z kolei porównanie średnich błędów kwadratowych poszczególnych modeli.

Stopień wielomianu N	Zbiór uczący		Zbiór weryfikujący	
	Bez rekurencji	Z rekurencją	Bez rekurencji	Z rekurencją
2	0.0027	0.0588	0.0024	0.0379
3	0.0025	0.0269	0.0023	0.0226
4	0.0025	0.0243	0.0023	0.0237
5	0.0025	0.0238	0.0023	0.0261

Tabela 3: Porównanie średnich błędów kwadratowych modeli nieliniowych, dynamika pierwszego rzędu.

Stopień wielomianu N	Zbiór uczący		Zbiór weryfikujący	
	Bez rekurencji	Z rekurencją	Bez rekurencji	Z rekurencją
2	0.0022	0.0379	0.0020	0.0291
3	0.0019	0.0146	0.0018	0.0148
4	0.0018	0.0108	0.0019	0.0126
5	0.0018	0.0091	0.0019	0.0145

Tabela 4: Porównanie średnich błędów kwadratowych modeli nieliniowych, dynamika drugiego rzędu.

Stopień wielomianu N	Zbiór uczący		Zbiór weryfikujący	
	Bez rekurencji	Z rekurencją	Bez rekurencji	Z rekurencją
2	0.0019	0.0289	0.0016	0.0221
3	0.0016	0.0095	0.0014	0.0097
4	0.0015	0.0061	0.0014	0.0068
5	0.0015	0.0047	0.0014	0.0074

Tabela 5: Porównanie średnich błędów kwadratowych modeli nieliniowych, dynamika trzeciego rzędu.

Stopień wielomianu N	Zbiór uczący		Zbiór weryfikujący	
	Bez rekurencji	Z rekurencją	Bez rekurencji	Z rekurencją
2	0.0017	0.0258	0.0015	0.0187
3	0.0013	0.0058	0.0013	0.0055
4	0.0013	0.0030	0.0013	0.0031
5	0.0012	0.0025	0.0013	0.0035

Tabela 6: Porównanie średnich błędów kwadratowych modeli nieliniowych, dynamika czwartego rzędu.

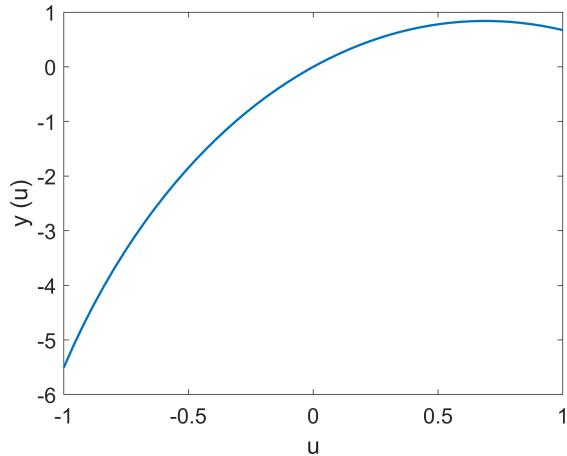
Można zauważać, że zwiększenie rzędu dynamiki modelu każdorazowo prowadziło do zwiększenia dokładności w każdym przypadku. Z kolei zwiększenie stopnia wielomianu dla wersji bez rekurencji na początku prowadziło do zwiększenia dokładności a potem nie miało na nią wpływu (z dokładnością do zaokrągleń), dla wersji z rekurencją dla zbioru uczącego prowadziło do zwiększenia dokładności a dla wersji z rekurencją dla zbioru weryfikującego

na początku prowadziło do zwiększenia dokładności a potem do jej zmniejszenia. Ponieważ do oceny jakości modelu brana jest pod uwagę dokładność wersji rekurencyjnej dla zbioru weryfikującego, za najlepszy model nieliniowy został uznany model czwartego rzędu dynamiki i czwartego stopnia wielomianu. Przyjmuje on co prawda relatywnie dużo zmiennych: 32 (bo $D * N * 2$), jednak jest on ponad dwukrotnie dokładniejszy od modelu dla $D = 3$, $N = 4$, który przyjmuje zmiennych 24 (więc wcale nie aż tak dużo mniej).

Dalsze eksperymenty wykazały, że dla każdego kolejnego rzędu dynamiki D większego od 2 najdokładniejszy model otrzymywany był dla stopnia wielomianu $N = 4$. W połączeniu z faktem, że wzrost D każdorazowo powodował wzrost dokładności prowadzi to do wniosku, że aby znaleźć odpowiedni balans między dokładnością a liczbą zmiennych wystarczy ustawić N modelu na 4 i manipulować D . I tak, zwiększając D o 1 otrzymujemy większą dokładność ale również 8 więcej zmiennych (bo $1 * 4 * 2$).

d) Na podstawie uznanego za najlepszy dynamicznego modelu nieliniowego otrzymanego w zadaniu 2c wyznaczyć statyczny model nieliniowy - narysować charakterystykę $y(u)$ wykorzystując funkcję $f\text{solve}$.

Model statyczny nieliniowy został przedstawiony na rysunku 47. W zadaniu przyjęto, że $-1 \leq u \leq 1$, ponieważ takie wartości przyjmował sygnał $u(k)$ w plikach źródłowych (można to zobaczyć na rysunku 8). Ponieważ funkcja $f\text{solve}$ w MATLABie może dawać różne wyniki w zależności od punktu startowego y_0 , otrzymane rozwiązanie zostało porównane z wartościami stabilnymi symulacji dynamicznego modelu nieliniowego dla stałego wejścia $u(k)$. Ponieważ odpowiednie wartości były zgodne, uzyskaną charakterystykę można uznać za poprawną.



Rysunek 47: Charakterystyka $y(u)$ statycznego modelu nieliniowego.