Sterowanie procesami - projekt I
zadanie 6

Jakub Ciemięga

08.05.2020

Proces dynamiczny opisany jest transmitancją ciągłą:

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+10)}{(s-11)(s+12)(s+13)}$$

Zad 1. Wyznaczyć (i proces ten udokumentować) transmitancję dyskretną $G(z)$. Zastosować okres próbkowania $0,5s$ i ekstrapolator zerowego rzędu. Określić zera i bieguny obu transmitancji.

Aby wyznaczyć transmitancję dyskretną $G(z)$ najpierw należy dokonać rozkładu transmitancji $G(s)$ na ułamki proste:

$$G(s) = \frac{a}{s-11} + \frac{b}{s+12} + \frac{c}{s+13}$$

Przy pomocy kalkulatora otrzymano:

$$G(s) = \frac{0.457}{s-11} + \frac{-0.957}{s+12} + \frac{1.5}{s+13}$$

Wówczas dla ekstrapolatora zerowego rzędu transmitancję dyskretną $G(z)$ można obliczyć ze wzoru:

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left(-0.0415\frac{-11}{s(s-11)} - 0.0797\frac{12}{s(s+12)} + 0.1154\frac{13}{s(s+13)}\right)$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{-0.0415(1-e^{11T})z}{(z-1)(z-e^{11T})} + \frac{-0.0797(1-e^{-12T})z}{(z-1)(z-e^{-12T})} + \frac{0.1154(1-e^{-13T})z}{(z-1)(z-e^{-13T})}\right)$$

Po skróceniu oraz podstawieniu czasu próbkowania $T = 0.5$ otrzymujemy:

$$G(z) = \frac{-0.0415(1-e^{5.5})}{z-e^{5.5}} + \frac{-0.0797(1-e^{-6})}{z-e^{-6}} + \frac{0.1154(1-e^{-6.5})}{z-e^{-6.5}}$$

Po wymnożeniu otrzymujemy transmitancję dyskretnę $G(z)$:

$$G(z) = \frac{10.149z^2 + 8.776z + 0.041}{z^3 - 244.696z^2 + 0.974z + 0.001}$$

Bieguny i zera obu transmitancji przedstawione zostały w poniższej tabeli:

	$G(s)$	$G(z)$
zera	-1; -10	-0.86; -0.0047
bieguny	11; -12; -13	$e^{5.5}$=244.692; e^{-6}=0.0025; $e^{-6.5}$=0.0015

Ponieważ $G(s)$ ma biegun, którego część rzeczywista jest większa od zera, a $G(z)$ ma biegun, który znajduje się poza kołem jednostkowym, można spodziewać się, że układ będzie niestabilny.

Zad 2. Znaleźć reprezentację modelu dyskretnego w przestrzeni stanu stosując pierwszy i drugi wariant metody bezpośredniej. Narysować szczegółową strukturę tych modeli.

Wariant 1:

$$G(z) = \frac{10.149z^{-1} + 8.776z^{-2} + 0.041z^{-3}}{1 - 244.696z^{-1} + 0.974z^{-2} + 0.001z^{-3}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Przyjmując, że

$$E(z) = \frac{U(z)}{1 - 244.696z^{-1} + 0.974z^{-2} + 0.001z^{-3}}$$

otrzymujemy:

$$E(z) = U(z) - (-244.696z^{-1} + 0.974z^{-2} + 0.001z^{-3})E(z)$$
$$Y(z) = (10.149z^{-1} + 8.776z^{-2} + 0.041z^{-3})E(z)$$

Równania w przestrzeni stanu mają wówczas postać:

$$x(k+1) = A_1x(k) + B_1u(k)$$

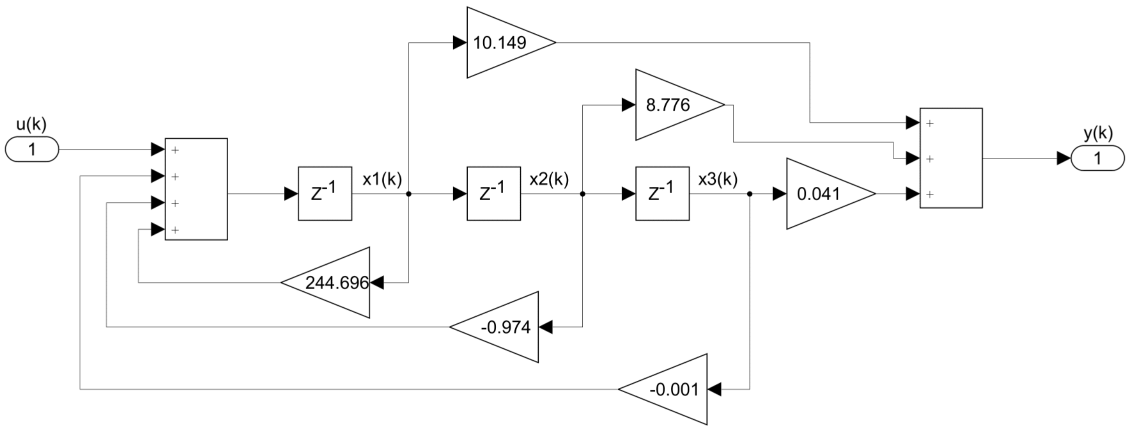
$$y(k) = C_1x(k)$$

Czyli:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 244.696 & -0.974 & -0.001 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 10.149 & 8.776 & 0.041 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Schemat modelu dyskretnego opisanego powyższymi równaniami przedstawiono na rysunku 1.



Rysunek 1: Struktura modelu dyskretnego uzyskanego za pomocą pierwszego wariantu metody bezpośredniej.

Wariant 2:

By uzyskać macierze równań w przestrzeni stanu drugim wariantem metody bezpośredniej wykorzystano wzory:

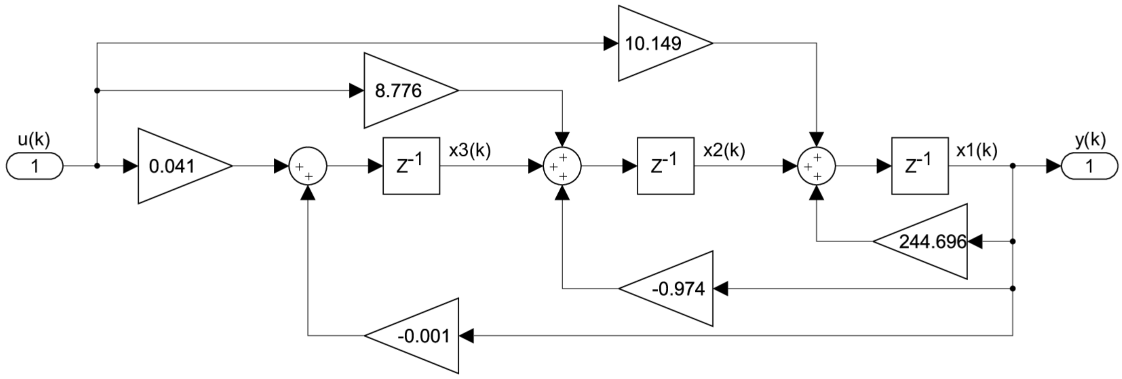
$$A = A_1^T, B = C_1^T, C = B_1^T, D = 0$$

Wówczas równania w przestrzeni stanu mają postać:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 244.696 & 1 & 0 \\ -0.974 & 0 & 1 \\ -0.001 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10.149 \\ 8.776 \\ 0.041 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Schemat modelu dyskretnego opisanego powyższymi równaniami przedstawiono na rysunku 2.



Rysunek 2: Struktura modelu dyskretnego uzyskanego za pomocą drugiego wariantu metody bezpośredniej.

Zad 3. Wykazać symbolicznie, że obie reprezentacje modelu dyskretnego w przestrzeni stanu można sprowadzić do tej samej transmitancji.

W zadaniu przyjęto oznaczenia:

$$b_0 = 0.041, \;\; b_1 = 8.776, \;\; b_2 = 10.149, \;\; a_0 = -0.001, \;\; a_1 = -0.974, \;\; a_2 = 244.696$$

Otrzymujemy macierze równań w przestrzeni stanu dla wariantu pierwszego:

$$A1 = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; C1 = \begin{bmatrix} b_2 & {}_b1 & b_0 \end{bmatrix}, \; D1 = 0.$$

Oraz dla wariantu drugiego:

$$A2 = \begin{bmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ a_1 & 0 & 1 \\ a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B2 = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}, \; C2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; D2 = 0.$$

Dla obu wariantów transmitancję $G(z)$ otrzymujemy ze wzoru:

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

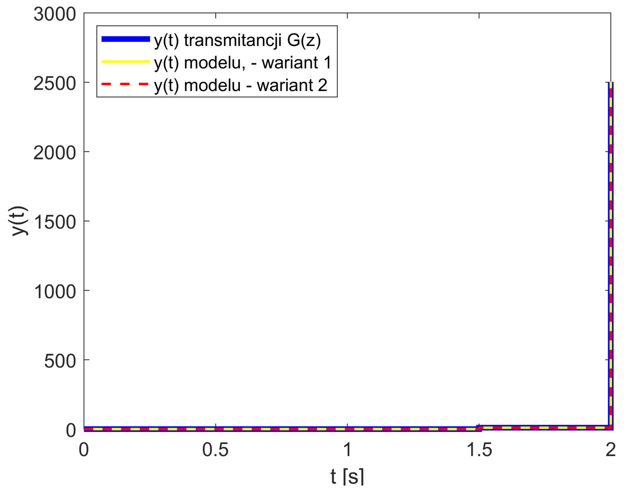
W obu przypadkach transmitancja obliczona w MATLABie ma postać:

$$G(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 - a_2 z^2 - a_1 z - a_0}$$

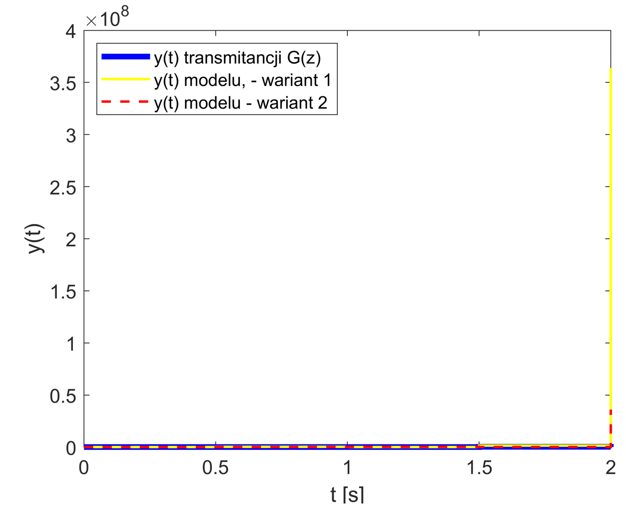
To dowodzi, że obie reprezentacje modelu dyskretnego w przestrzeni stanu można sprowadzić do tej samej transmitancji. Dodatkowo, po podstawieniu wartości, obliczona transmitancja zgadza się z transmitancją obliczoną w zadaniu pierwszym, co potwierdza poprawność obliczeń.

Zad 4. Porównać odpowiedź skokową (wyjście) transmitancji dyskretnej i obu modeli w przestrzeni stanu przy zmianie sygnału wejściowego z wartości 0 na 1 w chwili 1s. Symulacje przeprowadzić przy zerowych i niezerowych warunkach początkowych modeli w przestrzeni stanu. Wyniki skomentować. Czy modele są stabilne? Odnieść się do transmitancji ciągłej.

Na rysunku 3 przedstawiono wyniki esperymentu dla wartości początkowych równych 0 oraz równych 0.01. można zauważyć, że nawet nieznaczna zmiana warunków początkowych powoduje zmianę wyników o kilka rzędów wielkości oraz że model w wariancie pierwszym jest bardziej wrażliwy na zmianę warunków początkowych (dla tych samych niezerowych warunków początkowych y(t) dla modelu w wariancie pierwszym wzrasta wielokrotnie bardziej). Zarówno na podstawie transmitancji ciągłej $G(s)$ jak i dyskretnej $G(z)$ można stwierdzić, że system nie jest stabilny, ponieważ poszczególne transmitancje mają biegun kolejno o dodatniej części rzeczywistej oraz będący poza kołem jednostkowym. Dodatkowo warto odnotować, że wartość wyjściowa rośnie z każdym okresem próbkowania na tyle drastycznie, że niezależnie od przyjętego czasu eksperymentu, wykres miał postać złożonych lini poziomej i pionowej. Stąd tak niewieli wybrany czas eksperymentu równy 2s.



(a) Warunki początkowe = 0.



(b) Warunki początkowe = 0.01.

Rysunek 3: Porównanie odpowiedzi skokowej transmitancji dyskretnej i modeli przestrzeni stanu w obu wariantach dla różnych wartości początkowych modeli.

Dalsze rozważania przeprowadzone zostały dla drugiej wersji modelu w przestrzeni stanu.

Zad 5. Sprawdzić sterowalność i obserwowalność modelu.

Wiadomo, że układ jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix} = n$$

oraz że jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r\begin{bmatrix}C \\ CA \\ CA^2\end{bmatrix} = n$$

W tym przypadku: $n = 3$, $A = \begin{bmatrix}244.696 & 1 & 0 \\ -0.974 & 0 & 1 \\ -0.001 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}10.149 \\ 8.776 \\ 0.041\end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

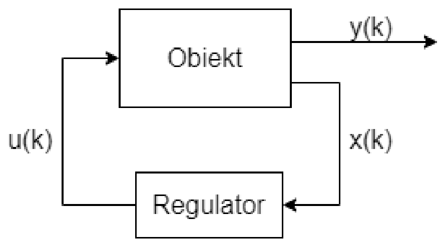
Odpowiednie macierze zostały skonstruowane w MATLABie. W celu sprawdzenia ich rzędu zostały policzone wyznaczniki. Ponieważ żaden z nich nie był równy 0, można stwierdzić, że omawiany model jest zarówno sterowalny, jak i obserwowalny.

Zad 6. Wyznaczyć regulator ze sprzężeniem od stanu, podać jego równanie. Narysować ogólną strukturę układu regulacji. Przyjąć warunek początkowy $x(0) = [-1 \quad -2 \quad 5]^T$ i warunek końcowy $x(t_{konc}) = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, wartość t_{konc} dobrać w taki sposób, aby udało się osiągnąć żądany warunek końcowy w akceptowalnym czasie. Jakość regulacji ocenić na podstawie szybkości zbieżności zmiennych stanu (do 0) oraz wartości i szybkości zmian sygnału sterującego. Przeprowadzić symulacje dwóch wersji regulatorów.

Równanie regulatora ze sprzężeniem od stanu ma postać:

$$u(k) = -Kx(k) = -\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k)\end{bmatrix}$$

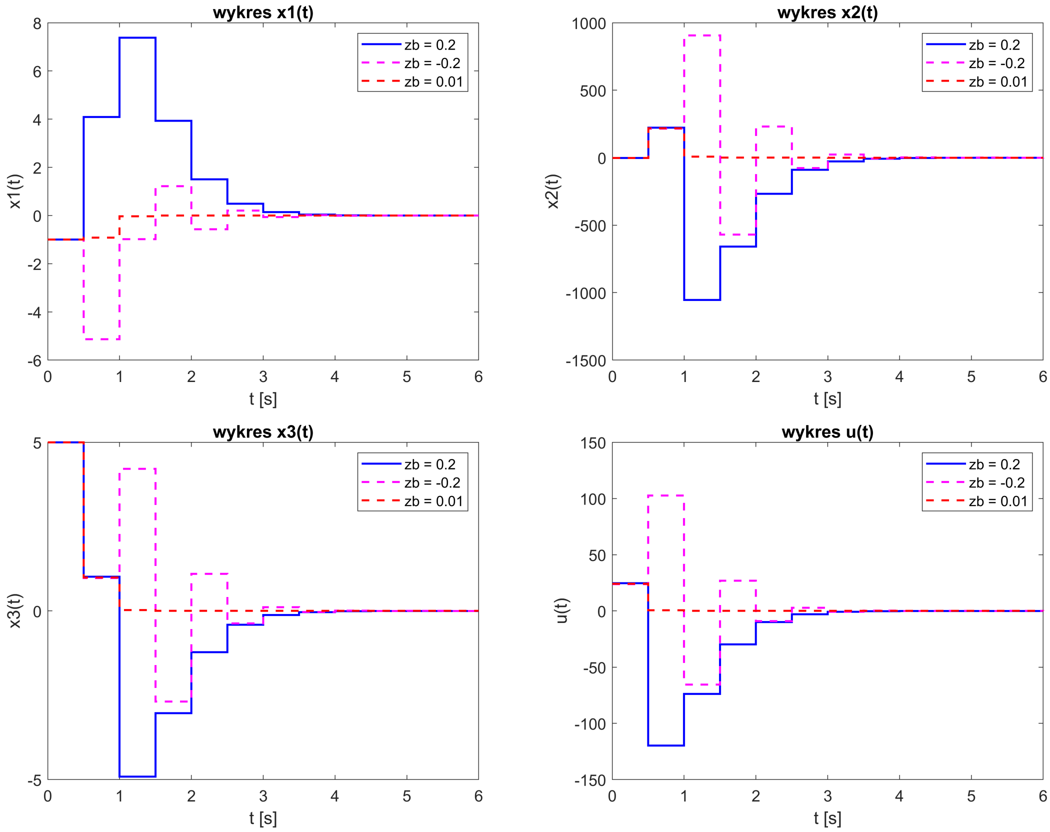
Dla poszczególnych wariantów regulatora należy wyznaczyć wektor K. Na rysunku 4 pokazano ogólną strukturę zamkniętego układu regulacji.



Rysunek 4: Ogólna struktura układu regulacji z wykorzystaniem regulatora.

Wariant 1: Przyjąć, że układ zamknięty ma trzy takie same bieguny rzeczywiste z_b. Pokazać wpływ bieguna na trajektorię zmiennych stanu i sterowania. Czy można przyjąć zerowe bieguny regulatora?

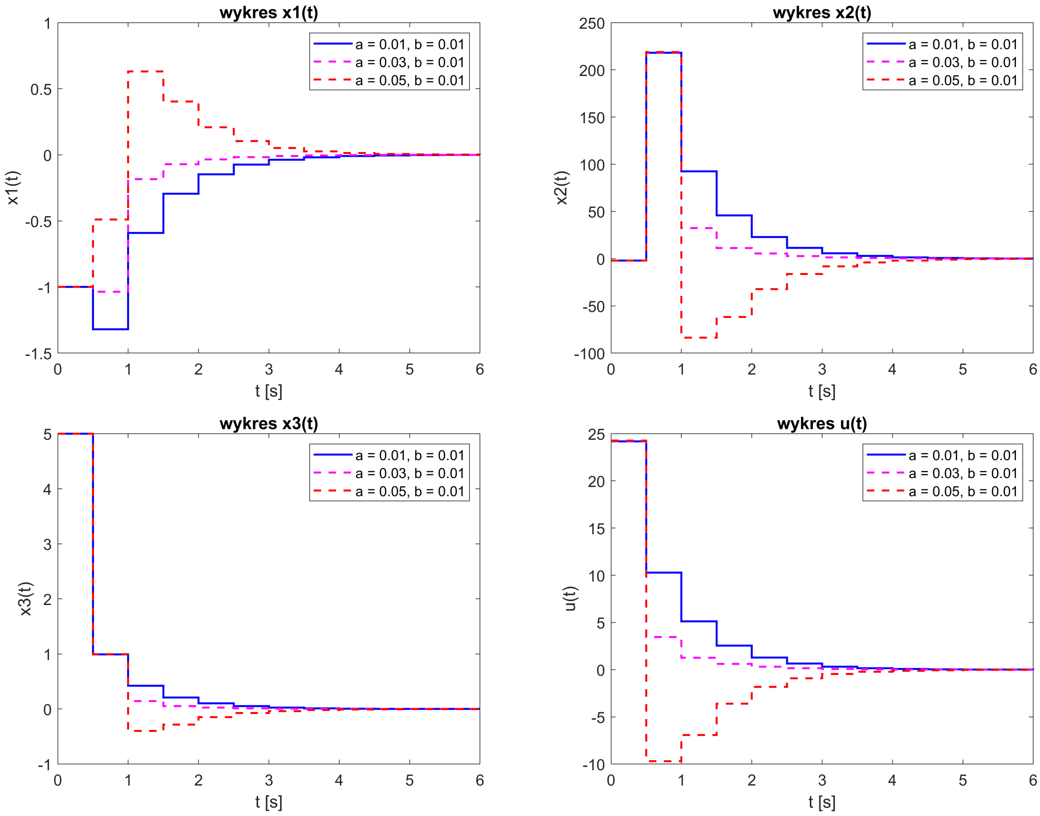
Na rysunku 5 pokazano przebieg zmiennych stanu oraz sygnału sterującego w zależności od przyjętej wartości potrójnego bieguna rzeczywistego z_b dla określonych w treści zadania warunków początkowych. Na tej podstawie można powiedzieć, że im mniejszy biegun, tym jest "szybszy" oraz że ujemne wartości bieguna powodują przeregulowanie zmiennych stanu oraz wahań sygnału sterującego. Nie można jednak przyjąć zerowych biegunów, bowiem byłoby to niemożliwe do implementacji (zerowe bieguny dyskretne odpowiadają nieskończonym biegunom ciągłym). Dla wszystkich symulacji przyjęto czas $t_{konc} = 6s$.



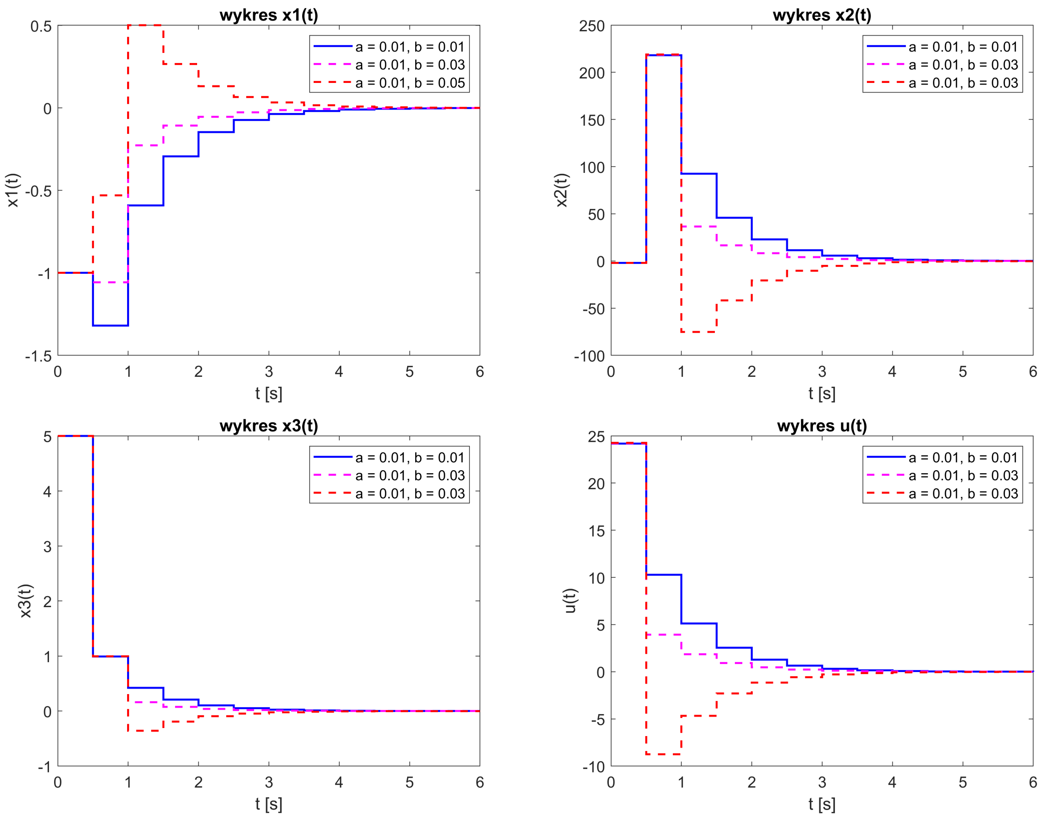
Rysunek 5: Przebieg zmiennych stanu oraz sygnału sterującego dla różnych wartości potrójnego bieguna rzeczywistego z_b.

Wariant 2: Przyjąć jeden biegun rzeczywisty z_{b1} oraz parę biegunów sprzężonych $z_{b2} = a + bj$, $z_{b3} = a - bj$. Pokazać wpływ parametrów a i b na trajektorie zmiennych stanu i sterowania.

Na rysunkach 6 oraz 7 pokazano przebieg zmiennych stanu oraz sygnału sterującego w zależności od przyjętych wartości parametrów a i b oraz dla stałej wartości bieguna $z_{b1} = 0.5$. Na tej podstawie można powiedzieć, że zmiany obu parametrów wpływają na wynik symulacji dość podobnie. Ogólnie można powiedzieć, że kluczową rolę odgrywa odległość bieguna od punktu $(0, 0)$. Dla bardzo małych wartości modułu biegunów sprzężonych nie dochodzi do przeregulowania a najlepiej (najszybciej) działające parametry należy dobrać eksperymentalnie. Dla większych wartości modułu biegunów sprzężonych dochodzi do coraz większego przeregulowania zmiennych stanu oraz wahań sygnału sterującego. Zwiększa się również czas potrzebny do osiągnięcia stanu ustalonego układu. Dla wszystkich symulacji przyjęto czas $t_{konc} = 6s$.



Rysunek 6: Przebieg zmiennych stanu oraz sygnału sterującego dla różnych wartości parametru a.



Rysunek 7: Przebieg zmiennych stanu oraz sygnału sterującego dla różnych wartości parametru b.

Zad 7. Wybrać najlepsze regulatory – po jednym dla każdej wersji regulatora. Uzasadnić wybór, podać użyte w tym celu wskaźniki jakości.

Jako kryteria wyboru najlepszych regulatorów w obu wariantach przyjęto czas potrzebny do osiągnięcia stanu ustalonego układu (im szybciej, tym lepiej) oraz pojawianie się (lub nie) przeregulowania zmiennych stanu oraz wahań sygnału sterującego (im mniejsze, tym lepiej). Na tej podstawie dla wariantu pierwszego wybrano regulator o trzech biegunach rzeczywistych:

$$z_b = 0.01$$

a dla wariantu drugiego regulator o biegunach:

$$z_{b1} = 0.5$$

$$z_{b2} = 0.03 + 0.01i$$

$$z_{b3} = 0.03 - 0.01i$$

Zad 8. Zaprojektować obserwator zredukowanego rzędu o biegunach rzeczywistych z_{02}, z_{03} (podać jego równania, wyznaczyć parametry). Narysować szczegółową strukturę obserwatora i ogólną strukturę układu regulacji z obserwatorem (tj. ze stanem obserwowanym). Do symulacji przyjąć zerowy warunek początkowy obserwatora i niezerowy warunek początkowy obiektu.

Zadaniem obserwatora zdredukowanego rzędu jest w tym aproksymacja wartości zmiennych stanu $x_2(k)$ oraz $x_3(k)$. Równania obserwatora wyglądają następująco:

$$x_2(k) = w_1(k)$$

$$x_3(k) = w_2(k)$$

gdzie:

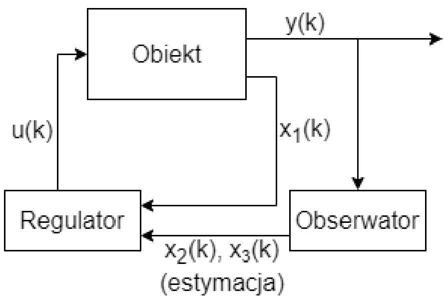
$$w(k) = z(k) + Ly(k)$$

oraz:

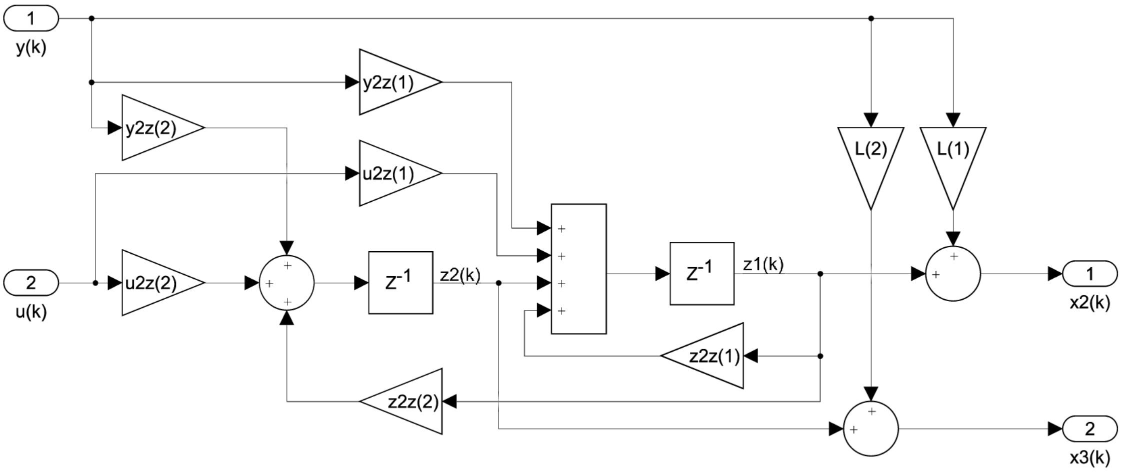
$$z(k+1) = (A_{22} - LA_{12})z(k) + (A_{21} - LA_{11} + (A_{22} - LA_{12})L)y(k) + (B_2 - LB_1)u(k))$$

gdzie: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} l1 \\ l2 \end{bmatrix}$, czyli w tym przypadku:
$A_{11} = 244.696$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} -0.974 \\ -0.001 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_1 = 10.149$, $B_2 = \begin{bmatrix} 8.776 \\ 0.041 \end{bmatrix}$

Na rysunkach 8 oraz 9 przedstawiono kolejno ogólną strukturę układu regulacji z obserwatorem i szczegółową strukturę obserwatora.

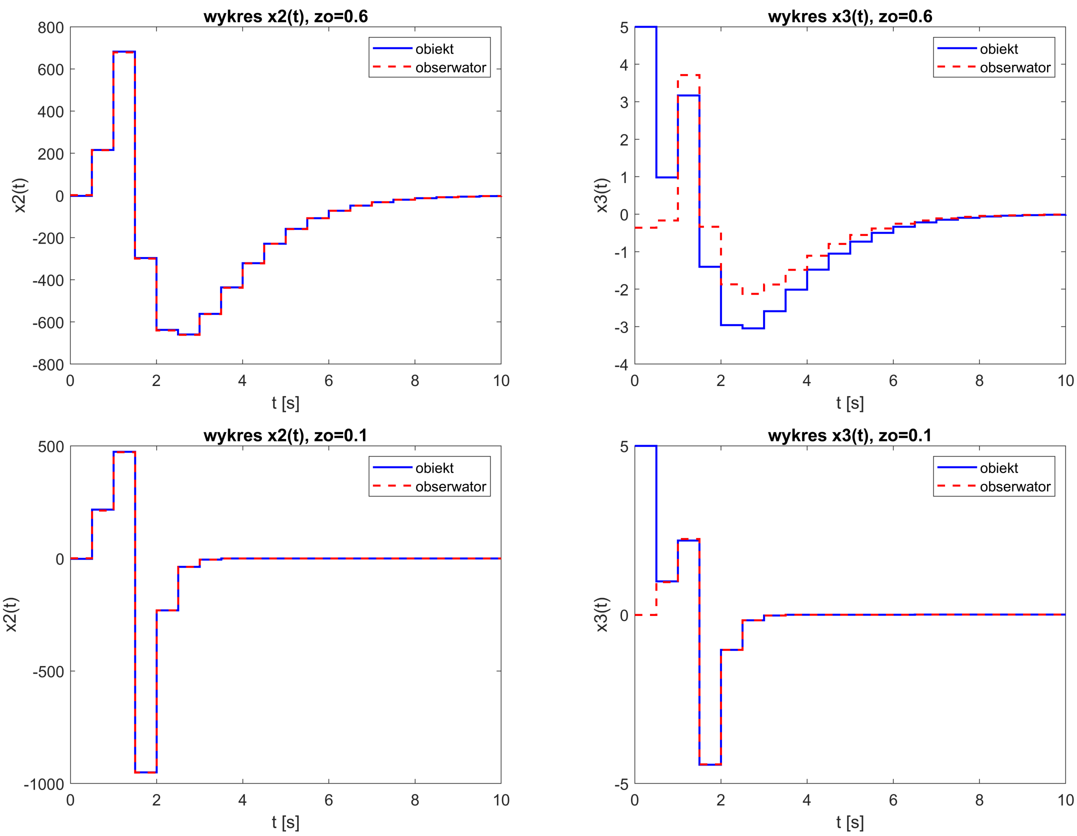


Rysunek 8: Ogólna struktura układu regulacji z wykorzystaniem regulatora i obserwatora.

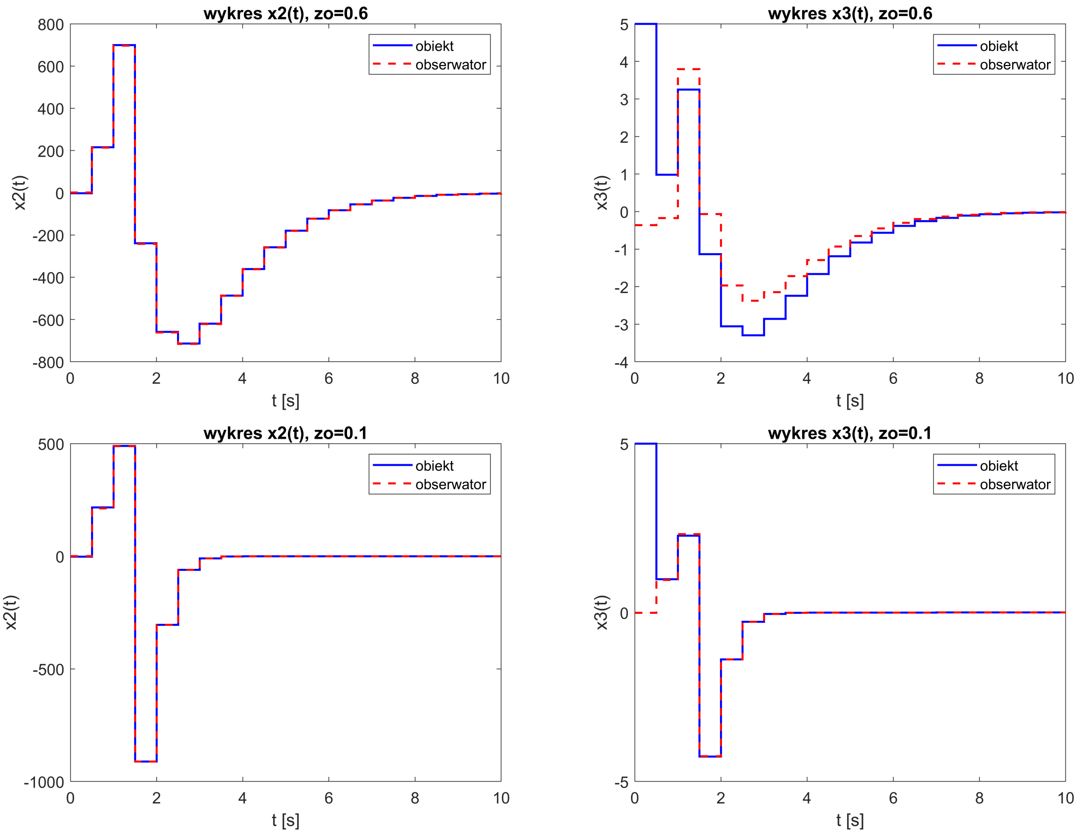


Rysunek 9: Szczegółowa struktura obserwatora zredukowanego rzędu, gdzie wartości poszczególnych współczynników zostały policzone w MATLABie.

Zad 9. Przetestować działanie obserwatora przy regulatorze korzystającym z mierzonego stanu. Przedstawić trajektorie zmiennych stanu świadczące o zbieżności stanu obserwowanego do stanu rzeczywistego. Pokazać wpływ biegunów obserwatora na jego działanie. Rozważyć najlepsze regulatory w obu wersjach z pkt. 7. Wybrać bieguny obserwatora w dwóch przypadkach: obserwator wolny, obserwator szybki. Czy można przyjąć zerowe bieguny obserwatora?



Rysunek 10: Przebieg zmiennych stanu x_2 i x_3 oraz ich estymacji dla regulatora o trzech biegunach rzeczywistych $z_b = 0.01$ w zależności od biegunów obserwatora z_o.

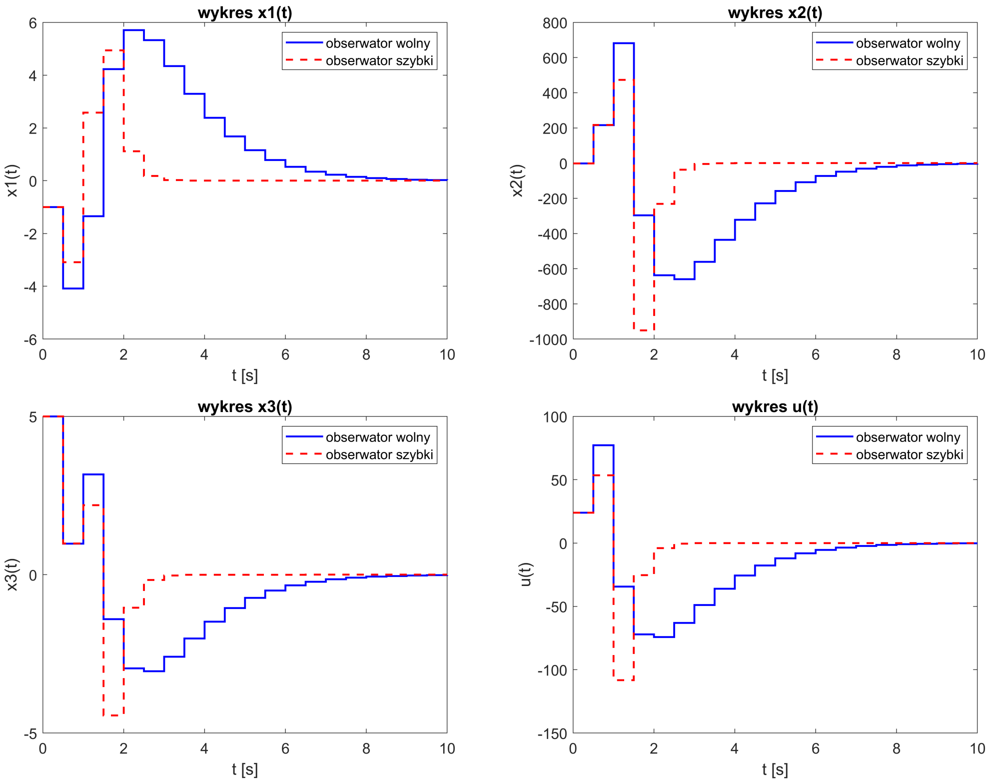


Rysunek 11: Przebieg zmiennych stanu x_2 i x_3 oraz ich estymacji dla regulatora o biegunach $z_{b1} = 0.5$, $z_{b2} = 0.03 + 0.01i$, $z_{b3} = 0.03 - 0.01i$ w zaleznośći od biegunów obserwatora z_o.

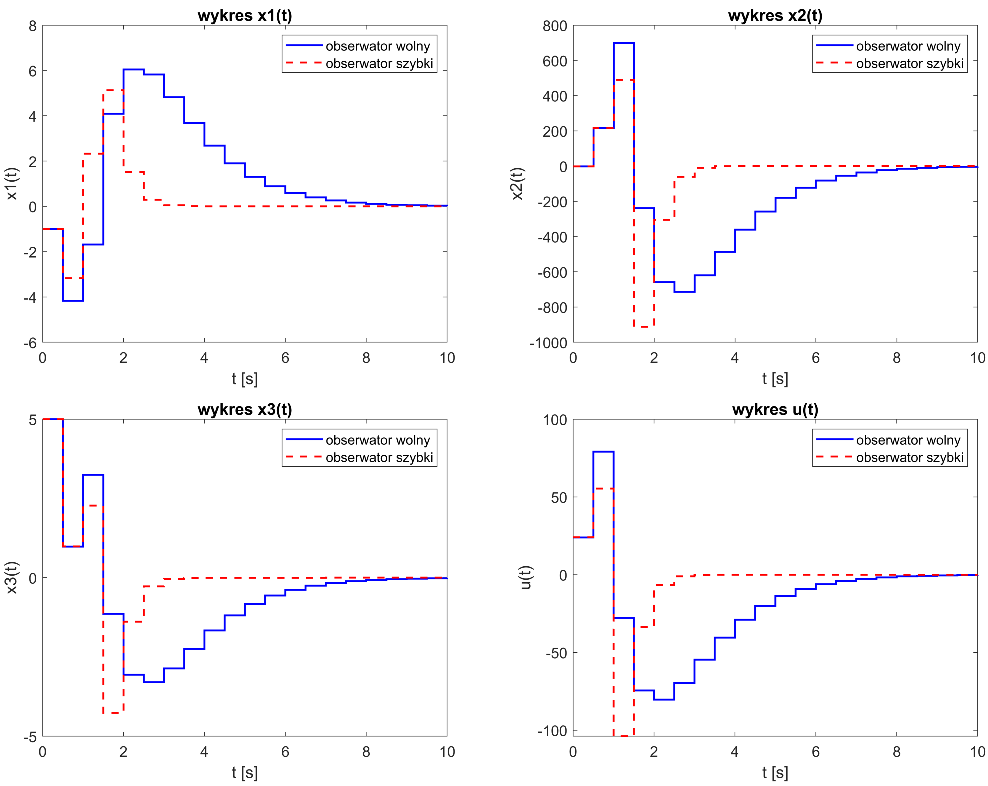
W zadaniu zastosowano czas symulacji 10s (bowiem pozwalał na ustabilizowanie się wszystkich zmiennych). Na rysunkach 10 i 11 przedstawiono wyniki symulacji dla obu regulatorów z punktu 7 oraz obserwatora o podwójnych biegunach $z_o = 0.6$ i $z_o = 0.1$. Eksperyment wykazał, że im mniejsze bieguny obserwatora, tym jest on szybszy. Nie można jednak przyjąć zerowych biegunów obserwatora, bowiem jest to niemożliwe do implmentacji (zerowe bieguny dyskretne odpowiadają nieskończonym biegunom ciągłym). Na wykresach pokazano przebieg zmiennych x_2 oraz x_3 wraz z ich estymacjami otrzymanymi w obserwatorze przy zerowych warunkach początkowych obserwatora i warunkach początkowych obiektu $x(0) = [-1 \quad -2 \quad 5]^T$. Można zauważyć, że dla zmiennej x_2 jej estymacja była do niej zbieżna dużo szybciej niż dla zmiennej x_3. Prawdopodobnie wiąże się to z indywidualnymi właściwościami tego układu regulacji.

Zad 10. Przetestować działanie regulatora gdy brak jest pomiaru zmiennych stanu $x_2(t)$ i $x_3(t)$ (w regulatorze wykorzystuje się stan obserwowany). Zamieścić przebiegi zmiennych stanu i sygnału sterującego dla najlepszych regulatorów w obu wersjach z pkt. 7. i obu wersjach obserwatora.

Przebiegi zmiennych stanu oraz sygnału sterującego dla obu wersji obserwatora i obu wersji regulatora przy zerowych warunkach początkowych obserwatora i warunkach początkowych obiektu $x(0) = [-1 \quad -2 \quad 5]^T$ przedstawiono na rysunkach 12 i 13. Można zauważyć, że układ stabilizuje się szybciej dla obserwatora szybkiego (o mniejszych biegunach) oraz że dla obu regulatorów wyniki symulacji wyglądają podobnie. Cieszy natomiast fakt, że nawet bez pomiaru dwóch z trzech zmiennych stanu system stabilizuje się relatywnie szybko (mniej niż 10s czyli 20 okresów próbkowania dla obserwatora wolnego), co sugeruje, że zarówno obserwator, jak i regulator zostały zaprojektowane poprawnie.



Rysunek 12: Przebieg zmiennych stanu oraz sygnału sterującego dla dwóch wersji obserwatora oraz regulatora o trzech biegunach rzeczywistych $z_b = 0.01$.



Rysunek 13: Przebieg zmiennych stanu oraz sygnału sterującego dla dwóch wersji obserwatora oraz regulatora o o biegunach $z_{b1} = 0.5$, $z_{b2} = 0.03 + 0.01i$, $z_{b3} = 0.03 - 0.01i$.