Matematyka dyskretna L, Lista 6 - Tomasz Woszczyński

Zadanie 1 (-)
Stosując metodę podstawiania, należy rozwiązać dwie zależności rekurencyjne:

1. $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1, t_1 = 3$
2. $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n > 1, h_1 = 1$

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + 3^n = t_{n-2} + 3^{n-1} + 3^n = t_{n-3} + 3^{n-2} + 3^{n-1} + 3^n = \ldots = \\ &= t_1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-2} + 3^{n-1} + 3^n = \\ &= 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-2} + 3^{n-1} + 3^n = \sum_{i=1}^{n} 3^i = \begin{cases} 3 & \text{dla } n = 1 \\ 3 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} & \text{dla } n \geqslant 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_n &= h_{n-1} + (-1)^{n+1} n = h_{n-2} + (-1)^n (n-1) + (-1)^{n+1} n = \\ &= h_{n-3} + (-1)^{n-1}(n-2) + (-1)^n (n-1) + (-1)^{n+1} n = \ldots = \\ &= 1 + \underbrace{(-1)^3 \cdot 2}_{h_2 = -1} + \ldots + (-1)^n (n-1) + (-1)^{n+1} n = \ldots \end{aligned}$$

W pierwszym przykładzie nie trzeba udowadniać poprawności otrzymanego wzoru, gdyż zamiana sumy na wzór jawny jest prosta, tzn. jest to suma pierwszych n wyrazów ciągu geometrycznego i jest powszechnie znana.

W drugim przypadku, takim podejściem jak wyżej może być ciężko wywnioskować wzór, dlatego można policzyć kilka pierwszych wyrazów:

$$h_1 = 1, h_2 = (-1)^3 \cdot 2 = -1, h_3 = -1 + (-1)^4 \cdot 3 = 2, h_4 = 2 + (-1)^5 \cdot 4 = -2, \ldots$$

A następnie na ich podstawie "zgadnąć" wzór na h_n i go udowodnić. Zauważmy, że

$$h_n = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ \frac{n+1}{2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

Udowodnię ten wzór indukcyjnie po n:

1. Podstawa indukcyjna: $n = 1$, wtedy $h_1 = \frac{1+1}{2} = 2$, więc się zgadza. ✓
2. Krok indukcyjny: załóżmy, że dla n powyższy wzór działa, pokażę że dla $n+1$ jest również prawdziwy, a więc że $h_{n+1} = h_n + (-1)^{n+2}(n+1)$ sprowadza się do zależności

   $$h_{n+1} = \begin{cases} -\frac{(n+1)}{2} & \text{dla } n+1 \text{ parzystych} \\ \frac{(n+1)+1}{2} = \frac{n+2}{2} = \frac{n}{2} + 1 & \text{dla } n+1 \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

   Należy rozpatrzyć dwa przypadki:

   (a) n parzyste, więc h_{n+1} nieparzyste:

   $$h_{n+1} = -\frac{n}{2} + \underbrace{(-1)^{n+2}}_{n+2 \text{ parzyste, więc } 1}(n+1) = -\frac{n}{2} + (n+1) = \frac{n}{2} + 1, \checkmark$$

(b) n nieparzyste, więc h_{n+1} parzyste:

$$h_{n+1} = \frac{n+1}{2} + \underbrace{(-1)^{n+2}}_{n+2 \text{ nieparzyste, więc } -1}(n+1) = \frac{n+1}{2} - (n+1) =$$
$$= \frac{n+1-2n-2}{2} = \frac{-n-1}{2} = \frac{-(n+1)}{2}, \checkmark$$

Udowodniliśmy więc, że wzór na h_n jest poprawny dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$.

Zadanie 2

Należy rozwiązać podane zależności rekurencyjne:

1. $a_{n+1} = \left|\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2}\right|$ dla $a_0 = a_1 = 1$,
2. $b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n^2 + 3}\right|$ dla $b_0 = 8$,
3. $c_{n+1} = (n+1) \cdot c_n + (n^2+n) \cdot c_{n-1}$ dla $c_0 = 0, c_1 = 1$.

Przykład 1: Podnieśmy całe wyrażenie do kwadratu, dzięki czemu uzyskamy jakiej postaci są kolejne wyrazy ciągu $\langle a_n \rangle$:

$$a_{i+1}^2 = \left|\sqrt{a_i^2 + a_{i-1}^2}\right|^2$$
$$a_{i+1}^2 = a_i^2 + a_{i-1}^2$$
$$\text{więc } a_i^2 = a_{i-1}^2 + a_{i-2}^2$$

Teraz można rozpisać rozwinięcie rekurencyjne wyrazu a_{n+1}:

$$a_{n+1} = \left|\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2}\right| = \left|\sqrt{a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2}\right| = \left|\sqrt{2a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2}\right| =$$
$$= \left|\sqrt{2\left|\sqrt{a_{n-2}^2 + a_{n-3}^2}\right|^2 + a_{n-2}^2}\right| = \left|\sqrt{2a_{n-2}^2 + 2a_{n-3}^2 + a_{n-2}^2}\right| = \left|\sqrt{3a_{n-2}^2 + 2a_{n-3}^2}\right| =$$
$$= \left|\sqrt{3\left|\sqrt{a_{n-3}^2 + a_{n-4}^2}\right|^2 + 2a_{n-3}^2}\right| = \left|\sqrt{5a_{n-3}^2 + 3a_{n-4}^2}\right| = \ldots =$$
$$= \left|\sqrt{8a_{n-4}^2 + 5a_{n-5}^2}\right| = \left|\sqrt{13a_{n-5}^2 + 8a_{n-6}^2}\right| = \ldots =$$
$$= \left|\sqrt{F_n + F_{n-1}}\right| = \left|\sqrt{F_{n+1}}\right|$$

Obliczenie wyrazu a_{n+1} sprowadza się więc do obliczenia pierwiastka z F_{n+1}, jako że wszystkie wyrazy ciągu Fibonacciego są dodatnie.

Przykład 2: Podstawmy kilka kolejnych wyrazów ciągu $\langle b_n \rangle$:

$$b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n^2 + 3}\right| = \left|\sqrt{\left|\sqrt{b_{n-1}^2 + 3}\right|^2 + 3}\right| = \left|\sqrt{b_{n-1}^2 + 3 + 3}\right| = \left|\sqrt{\left|\sqrt{b_{n-2}^2 + 3}\right|^2 + 3 + 3}\right| =$$
$$= \left|\sqrt{b_{n-2}^2 + 3 + 3 + 3}\right| = \left|\sqrt{b_{n-3}^2 + 3 + 3 + 3 + 3}\right| = \left|\sqrt{b_{n-4}^2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3}\right| =$$
$$= \left|\sqrt{b_0^2 + 3n}\right| = \left|\sqrt{64 + 3n}\right|$$

Przykład 3: Obliczmy kilka pierwszych wyrazów $\langle c_n \rangle$ wiedząc, że $c_0 = 0, c_1 = 1$. Kolejne wyrazy ciągu wyrażają się wzorem rekurencyjnym:

$$c_{n+1} = (n+1) \cdot c_n + (n^2 + n) \cdot c_{n-1}$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned}
c_0 &= 0 && = 0! \cdot 0 \\
c_1 &= 1 && = 1! \cdot 1 \\
c_2 &= 2 \cdot 1 + (1^2 + 1) \cdot 0 = 2 + 0 = 2 && = 2! \cdot 1 \\
c_3 &= 3 \cdot 2 + (2^2 + 2) \cdot 1 = 6 + 6 = 12 && = 3! \cdot 2 \\
c_4 &= 4 \cdot 12 + (3^2 + 3) \cdot 2 = 48 + 24 = 72 && = 4! \cdot 3 \\
c_5 &= 5 \cdot 72 + (4^2 + 4) \cdot 12 = 360 + 240 = 600 && = 5! \cdot 5 \\
c_6 &= 6 \cdot 600 + (5^2 + 5) \cdot 72 = 3600 + 2160 = 5760 && = 6! \cdot 8 \\
&\vdots \\
c_n &= n! \cdot F_n
\end{aligned}$$

Powyższy wzór należy udowodnić indukcyjnie po n:

1. Podstawa indukcyjna: $n = 0$, wtedy $c_0 = 0! \cdot 0 = 0$, więc się zgadza. ✓
2. Krok indukcyjny: załóżmy, że dla n zachodzi $c_n = n! \cdot F_n$, pokażę, że dla $n + 1$ zachodzi $c_{n+1} = (n+1)! \cdot F_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= (n+1)! \cdot F_{n+1} \\
&= (n+1)! \cdot (F_n + F_{n-1}) = \\
&= (n+1) \cdot n! \cdot (F_n + F_{n-1}) = \\
&= (n+1) \cdot n! \cdot F_n + (n+1) \cdot n! \cdot F_{n-1} = \\
&= (n+1) \cdot c_n + (n+1) \cdot n \cdot (n-1)! \cdot F_{n-1} = \\
&= (n+1) \cdot c_n + (n+1) \cdot n \cdot c_{n-1} = \\
&= (n+1) \cdot c_n + (n^2 + n) \cdot c_{n-1}, \text{ więc się zgadza. } \checkmark
\end{aligned}$$

Więc dla dowolnego n zachodzi $c_n = n! \cdot F_n$, co kończy dowód.

Zadanie 3

Należy rozwiązać podane zależności rekurencyjne:

1. $c_n = c_0 + c_1 + \ldots + c_{n-1}$ dla $c_0 = 1$,
2. $d_n = \frac{d_{n-1}^2}{d_{n-2}}$ dla $d_0 = 1, d_1 = 2$.

Przykład 1: Policzmy pierwsze kilka wyrazów:

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1 \\
c_1 &= c_0 = 1 \\
c_2 &= c_0 + c_1 = 1 + 1 = 2 \\
c_3 &= c_0 + c_1 + c_2 = 1 + 1 + 2 = 4 \\
c_4 &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 1 + 1 + 2 + 4 = 8 \\
&\vdots \\
c_n &= 2^{n-1} \text{ dla } n \geqslant 1
\end{aligned}$$

Powyższy wzór należy udowodnić indukcyjnie po n:

1. Podstawa indukcyjna: $n = 1$, wtedy $c_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1$, więc się zgadza. ✓
2. Krok indukcyjny: załóżmy, że dla n zachodzi $c_n = 2^{n-1}$, pokażę, że dla $n+1$ zachodzi $c_{n+1} = 2^n$:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1} + c_n = \\ &= 1 + 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = \\ &= 2 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = \\ &= 4 + 4 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = \\ &= 8 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = \\ &= \ldots = \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-1} = \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^n \text{ więc się zgadza. } \checkmark \end{aligned}$$

W dowodzie wykorzystałem fakt, iż kolejna suma tworzy kolejną potęgę dwójki.

Przykład 2: Policzmy pierwsze kilka wyrazów:

$$\begin{aligned} d_0 &= 1 \\ d_1 &= 2 \\ d_2 &= \frac{d_1^2}{d_0} = \frac{2^2}{1} = 4 \\ d_3 &= \frac{d_2^2}{d_1} = \frac{4^2}{2} = 8 \\ d_4 &= \frac{d_3^2}{d_2} = \frac{8^2}{4} = 16 \\ &\vdots \\ d_n &= 2^n \end{aligned}$$

Powyższy wzór należy udowodnić indukcyjnie po n:

1. Podstawa indukcyjna: $n = 0$, wtedy $d_0 = 2^0 = 1$, więc się zgadza. ✓
2. Krok indukcyjny: załóżmy, że dla n zachodzi $d_n = 2^n$, pokażę, że dla $n+1$ zachodzi $d_{n+1} = 2^{n+1}$:

$$d_{n+1} = \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} = \frac{(2^n)^2}{2^{n-1}} = 2^{2n-(n-1)} = 2^{n+1}, \text{ więc się zgadza. } \checkmark$$

Zadanie 4

Należy wykazać, że iloczyn kolejnych k liczb naturalnych jest podzielny przez $k!$.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do pokazania, że

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \in \mathbb{N}$$

Pomnóżmy więc to wyrażenie przez $1 = \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

Zadanie 6
Należy rozwiązać zależność rekurencyjną $a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$ z warunkiem początkowym $a_0 = 2$ i założeniem, że dla wszystkich n jest $a_n > 0$.

Podstawmy $b_n = a_n^2$, wtedy uproszczona zależność będzie wyrażona wzorem:

$$b_n = 2b_{n-1} + 1$$

i rozwiążemy ją metodą anihilatorów. Przekształćmy równanie, a następnie znajdźmy anihilatory poszczególnych wyrażeń:

$$\begin{aligned} b_n = 2b_{n-1} + 1 \Longrightarrow b_{n+1} = 2b_n + 1 \Longrightarrow b_{n+1} - 2b_n - 1 = 0 \\ b_{n+1} - 2b_n \longrightarrow (\mathbf{E} - 2) \\ -1 \longrightarrow (\mathbf{E} - 1) \end{aligned}$$

Mamy więc $(\mathbf{E} - 2)(\mathbf{E} - 1)\langle a_n \rangle = 0$, a ogólną postacią równania jest:

$$b_n = \alpha \cdot 2^n + \beta$$

Obliczmy więc pierwsze wyrazy ciągu $\langle b_n \rangle$ a następnie znajdziemy wartości α, β:

$$\begin{cases} b_0 = a_0^2 & = 4 = \alpha + \beta \\ b_1 = 2 \cdot 4 + 1 & = 9 = 2\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Czyli ogólną postacią jest:

$$b_n = 5 \cdot 2^n - 1 \Longrightarrow a_n = \sqrt{5 \cdot 2^n - 1}$$

Zadanie 7
Ile jest wyrazów złożonych z n liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierających parzystą liczbę liter a?

Zwykle alfabet łaciński ma 26 liter, dlatego rozwiązanie uogólnię dla r-literowego alfabetu zawierającego a. Wyraz złożony z 0 liter zawiera 0 liter a, a więc parzystą ilość, czyli $a_0 = 1$. Dla wyrazów złożonych z 1 litery mamy $r - 1$ takie wyrazy, gdyż zawierają jedną z $r - 1$ liter w nieparzystej ilości oraz 0 liter a, tzn. $a_1 = r - 1$. Liczba n-literowych wyrazów z parzystą liczbą liter a wyraża się rekurencją:

$$a_n = \underbrace{(r-1) \cdot a_{n-1}}_{\substack{a \text{ nie na końcu, więc} \\ \text{rozpatrujemy ciągi} \\ \text{długości } n-1 \text{ o parzystej} \\ \text{liczbie wystąpień } a}} + \underbrace{1 \cdot \left[r^{n-1} - a_{n-1} \right]}_{\substack{a \text{ na końcu, więc rozpatrujemy} \\ \text{ciągi długości } n-1 \text{ o} \\ \text{nieparzystej liczbie wystąpień } a}} = r^{n-1} + (r-2) \cdot a_{n-1}$$

Przekształćmy najpierw zależność rekurencyjną:

$$a_n = (r-2) \cdot a_{n-1} + r^{n-1} \Longrightarrow a_{n+1} = (r-2) \cdot a_n + r^n \Longrightarrow a_{n+1} - (r-2) \cdot a_n - r^n = 0$$

A następnie rozwiążmy tę rekurencję wykorzystując metodę anihilatorów:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - (r-2) \cdot a_n \longrightarrow (\mathbf{E} - (r-2)) \\ -r^n \longrightarrow (\mathbf{E} - r) \end{aligned}$$

Wtedy mamy

$$(\mathbf{E}-(r-2))(\mathbf{E}-r)\langle a_n\rangle = 0 \Longrightarrow a_n = \alpha\cdot(r-2)^n + \beta\cdot r^n$$

Pozostało nam więc rozwiązać układ równań podstawiając a_0 i a_1:

$$\begin{cases} a_0 = 1 = \alpha+\beta \\ a_1 = (r-1) = \alpha\cdot(r-2)^n + r\cdot\beta \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{czyli } a_n = \frac{1}{2}\cdot(r-2)^n + \frac{1}{2}\cdot r^n$$

Więc dla alfabetu 25-literowego mamy $a_n = \frac{1}{2}\cdot 23^n + \frac{1}{2}\cdot 25^n$ takich ułożeń.

Zadanie 8

Należy znaleźć ogólną postać rozwiązań równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i jedno z nich rozwiązać:

1. $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$ dla $a_0 = a_1 = 0$
2. $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$ dla $a_0 = a_1 = 1$
3. $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n$ dla $a_0 = a_1 = 1$

Przykład 1: Przekształćmy równanie, aby z jednej strony otrzymać 0, a następnie znajdźmy anihilatory dla wszystkich wyrażeń:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1 \Longrightarrow a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n - 3^n + 1 = 0$$

Anihilatorami odpowiednich wyrażeń są wtedy:

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n &\longrightarrow (\mathbf{E}^2 - 2\mathbf{E} + 1) = (\mathbf{E}-1)^2 \\ -3^n &\longrightarrow (\mathbf{E}-3) \\ 1 &\longrightarrow (\mathbf{E}-1) \end{aligned}$$

Mamy więc $(\mathbf{E}^2 - 2\mathbf{E}+1)(\mathbf{E}-3)(\mathbf{E}-1)\langle a_n\rangle = (\mathbf{E}-1)^3(\mathbf{E}-3)\langle a_n\rangle = 0$, a ogólną postacią równania jest

$$a_n = \alpha\cdot 1^n + \beta\cdot n\cdot 1^n + \gamma\cdot n^2\cdot 1^n + \delta\cdot 3^n$$

Przykład 2: Przekształcenie równania i anihilatory:

$$\begin{aligned} a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1} &\Longrightarrow a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n - n2^{n+1} = 0 \\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n &\longrightarrow (\mathbf{E}^2 - 4\mathbf{E} + 4) = (\mathbf{E}-2)^2 \\ -n2^{n+1} &\longrightarrow (\mathbf{E}-2)^2 \end{aligned}$$

Mamy więc $(\mathbf{E}-2)^4\langle a_n\rangle = 0$, a ogólną postacią jest

$$a_n = \alpha\cdot 2^n + \beta\cdot n\cdot 2^n + \gamma\cdot n^2\cdot 2^n + \delta\cdot n^3\cdot 2^n$$

Przykład 3: Przekształcenie równania i anihilatory:

$$\begin{aligned} a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n &\Longrightarrow a_{n+2} - \frac{1}{2^{n+1}} + 2a_{n+1} + a_n = 0 \\ a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n &\longrightarrow (\mathbf{E}^2 - 2\mathbf{E} + 1) = (\mathbf{E}+1)^2 \\ -\frac{1}{2^{n+1}} &\longrightarrow \left(\mathbf{E} - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Mamy więc $(\mathbf{E}+1)^2\left(\mathbf{E}-\frac{1}{2}\right)\langle a_n\rangle = 0$, a ogólną postacią równania jest

$$a_n = \alpha \cdot (-1)^n + \beta \cdot (-1)^n \cdot n + \gamma \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Obliczmy $a_2 = \frac{1}{2} - 2 - 1 = -\frac{5}{2}$ i rozwiążmy układ równań:

$$\begin{cases} a_0 = 1 & = \alpha + \gamma \\ a_1 = 1 & = -\alpha - \beta + \frac{1}{2}\gamma \\ a_2 = -\frac{5}{2} & = \alpha + 2\beta + \frac{1}{4}\gamma \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{7}{9} \\ \beta = -\frac{5}{3} \\ \gamma = \frac{2}{9} \end{cases}$$

Ostatecznym wynikiem jest $a_n = \frac{7}{9} \cdot (-1)^n - \frac{5}{3} \cdot (-1)^n \cdot n + \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.