Dowodzenie twierdzeń

System założeniowy

Jakub Figura

20 grudnia 2025

Wprowadzenie

Prezentacja przedstawia metodę dowodzenia twierdzeń za pomocą systemu reguł dedukcji naturalnej. Dowodzenie twierdzenie składa się z dwóch kroków. Pierwszy krok polega na wypisaniu przesłanek. Krok ten możliwy jest dzięki tzw. twierdzeniu o dedukcji. Jego treść nie jest wymagana na egzaminie, natomiast podaję je, aby uzasadnić, dlaczego Państwo mogą „wrzucać" poprzedniki implikacji do zbioru założeń. Drugi krok wymaga skutecznego stosowania reguł dedukcji naturalnej.

Wprowadzenie

Twierdzenie o dedukcji

Jeżeli $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta$, to $\varnothing \vdash \alpha_1 \to (...(\alpha_n \to \beta)...)$

Twierdzenie pozwala nam „zabierać” poprzedniki głównych implikacji i umieszczać w zbiorze przesłanek. Dzięki temu zamiast dowodzić całej implikacji możemy stosować do przesłanek reguły inferencyjne i wykazać, że zachodzi następnik. Dla przypomnienia symbol $\varnothing$ oznacza zbiór pusty. Gdyby nie twierdzenie o dedukcji, musielibyśmy dowodzić twierdzeń o postaci złożonych implikacji i nasz system reguł nie byłby skuteczny. Gdy analizowaliśmy rachunek zdań w ujęciu semantycznym mówiliśmy o tautologiach, teraz będziemy mówić o tezach. Tyle teorii.

Przykład 1

Teza (Prawo sylogizmu hipotetycznego)

$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

1.	$p \to q$	zał.

Przykład 1

Teza (Prawo sylogizmu hipotetycznego)

$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

1.	$p \to q$	zał.
2.	$q \to r$	zał.

Przykład 1

Teza (Prawo sylogizmu hipotetycznego)

$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$p \rightarrow q$	zał.
2.	$q \rightarrow r$	zał.
3.	p	zał.

Po wypisaniu wszystkich założeń musimy udowodnić, że zachodzi wniosek, korzystając z reguł inferencyjnych. Wnioskiem będzie w tym wypadku r.

Przykład 1

Teza (Prawo sylogizmu hipotetycznego)

$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

1.	$p \to q$	zał.
2.	$q \to r$	zał.
3.	p	zał.
4.	q	MPP 1, 3

Przykład 1

Teza (Prawo sylogizmu hipotetycznego)

$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

1.	$p \to q$	zał.
2.	$q \to r$	zał.
3.	p	zał.
4.	q	MPP 1, 3
5.	r	MPP 2, 4

$\blacksquare$

Stosując dwukrotnie regułę MPP dochodzimy do r, co kończy dowód twierdzenia.

Przykład 2

Teza

$(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

1. $p \to (q \to r)$ założenie

Zwróćmy uwagę, że pierwsza przesłanka jest postaci $p \to (q \to r)$.

Przykład 2

$(\mathrm{p} \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

1.	$p \to (q \to r)$	założenie
2.	q	założenie

Przykład 2

$(\mathrm{p} \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	założenie
2.	q	założenie
3.	p	założenie

Przykład 2

$(\mathrm{p} \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

1.	$p \to (q \to r)$	założenie
2.	q	założenie
3.	p	założenie

W ten sposób uzyskaliśmy komplet przesłanek. Możemy teraz zastosować znane nam reguły dowodzenia. Naszym celem jest wykazanie, że zachodzi r.

Przykład 2

$(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

1.	$p \to (q \to r)$	założenie
2.	q	założenie
3.	p	założenie
4.	$q \to r$	MPP 1, 3

Przykład 2

Teza

$(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

1.	$p \to (q \to r)$	zał.
2.	q	zał.
3.	p	zał.
4.	$q \to r$	MPP, 1, 3
5.	r	MPP, 4, 2

$\blacksquare$

Stosując dwukrotnie regułę MPP dochodzimy do r, co kończy dowód twierdzenia.

Przykład 3

Celem tego przykładu będzie zwrócenie uwagi na poprawne stosowanie reguł, które zawierają negacje.

Teza

$(\neg p \vee \neg r) \to (r \to ((q \to p) \to \neg q))$

1.	$\neg p \vee \neg r$	założenie

Ponownie rozpoczynamy od identyfikacji przesłanek.

Przykład 3

Teza

$(\neg p \vee \neg r) \to (r \to ((q \to p) \to \neg q))$

1.	$\neg p \vee \neg r$	założenie
2.	r	założenie

Przykład 3

Teza

$(\neg p \vee \neg r) \to (r \to ((q \to p) \to \neg q))$

1.	$\neg p \vee \neg r$	założenie
2.	r	założenie
3.	$q \to p$	założenie

Wnioskiem, który będziemy dowodzić jest $\neg q$

Przykład 3

Teza

$(\neg p \vee \neg r) \to (r \to ((q \to p) \to \neg q))$

1.	$\neg p \vee \neg r$	założenie
2.	r	założenie
3.	$q \to p$	założenie
4.		

Naturalnym ruchem byłoby zastosowanie reguły opuszczenia alternatywy, jak jednak zrobić to poprawnie? Przypomnijmy schemat reguły.

Reguła opuszczenia alternatywy

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \vee \beta \\ \neg\beta\end{array}}{\alpha} \quad \text{(OA)}$$

W naszym przypadku mamy alternatywę $\neg p \vee \neg r$. Chcemy otrzymać $\neg p$, aby następnie zastosować MTT.

Reguła opuszczenia alternatywy

Podstawiamy $\alpha = \neg p$ oraz $\beta = \neg r$. Nasza reguła wymaga, aby drugą przesłanką była formuła o postaci $\neg\beta$. Ponieważ $\beta = \neg r$, to $\neg\beta = \neg(\neg r) = \neg\neg r$. Nim przystąpimy do zastosowania OA musimy zastosować dołączenie podwójnej negacji, ponieważ w naszym zbiorze przesłanek nie ma $\neg\neg r$

$$\frac{\begin{array}{c}\neg p \vee \neg r \\ \neg\neg r\end{array}}{\neg p} \quad \text{(OA)}$$

Przykład 3

Teza

$(\neg p \vee \neg r) \rightarrow (r \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow \neg q))$

1.	$\neg p \vee \neg r$	założenie
2.	r	założenie
3.	$q \rightarrow p$	założenie
4.	$\neg\neg r$	DN 2
5.		

Po dołączeniu alternatywy w kroku 4 możemy zastosować OA korzystając z wiersza 1 i 4.

Przykład 3

Teza

$(\neg p \lor \neg r) \to (r \to ((q \to p) \to \neg q))$

1.	$\neg p \lor \neg r$	założenie
2.	r	założenie
3.	$q \to p$	założenie
4.	$\neg\neg r$	DN 2
5.	$\neg p$	OA 1, 4
6.		

Przykład 3

Teza

$(\neg p \vee \neg r) \to (r \to ((q \to p) \to \neg q))$

1.	$\neg p \vee \neg r$	założenie
2.	r	założenie
3.	$q \to p$	założenie
4.	$\neg\neg r$	DN 2
5.	$\neg p$	OA 1, 4
6.	$\neg q$	MTT 3, 5

$\blacksquare$

Przykład 4 *ex contradictione quodlibet*

Rozważmy następującą tezę:

Teza

$p \to (\neg p \to (q \downarrow r))$

Wnioskiem, który musimy uzyskać jest formuła $q \downarrow r$. Jak jednak wiemy, zbiór reguł w naszym systemie nie zawiera reguł dotyczących binegacji. Jak zatem możemy sobie poradzić?

Przykład 4 *ex contradictione quodlibet*

Teza

$p \to (\neg p \to (q \downarrow r))$

Wypiszmy przesłanki.

1.	p	założenie
2.	$\neg p$	założenie

Nasz zbiór przesłanek zawiera parę formuł sprzecznych. Logika klasyczna opiera się na założeniu, że sprzeczność prowadzi nas do przepełeniania naszego systemu. Gdbyśmy zaczynali od sprzecznych aksjomatów, w naszym systemie moglibyśmy udowodnić wszystko. System taki staję się więc nieco bezużyteczny... My jendak wykorzystamy ten fakt, do udowodnienia naszej tezy.

Przykład 4 *ex contradictione quodlibet*

Teza

$p \to (\neg p \to (q \downarrow r))$

W naszym dowodzie skorzystamy z faktu, że reguła dołączenia alternatywy pozwala nam dołączyć **dowolną** formułę jako drugi człon alternatywy!

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad \text{(DA)}$$

1.	p	założenie
2.	$\neg p$	założenie
3.	$p \vee (q \downarrow r)$	DA 1

Zatem my dołączymy nasz wniosek!

Przykład 4 *ex contradictione quodlibet*

Teza

$p \to (\neg p \to (q \downarrow r))$

Następnie wykorzystajmy ponownie znaną już regułę opuszczenia alternatywy (OA).

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \vee \beta \\ \neg\beta\end{array}}{\alpha} \quad \text{(OA)}$$

1.	p	założenie
2.	$\neg p$	założenie
3.	$p \vee (q \downarrow r)$	DA 1
4.	$q \downarrow r$	OA 3, 2

$\blacksquare$

Dowodzenie nie wprost

Twierdzenie o dedukcji nie wprost

Niech Γ będzie zbiorem przesłanek. Wówczas jeżeli $\Gamma \cup \{\neg\beta\} \vdash \{\gamma, \neg\gamma\}$, to $\varnothing \vdash \alpha_1 \to (\ldots(\alpha_n \to \beta)\ldots)$

Przejdźmy teraz do dowodzenia metodą nie wprost. Początek dowodu będzie analogiczny tj. będziemy wypisywać przesłanki na podstawie twierdzenia o dedukcji wprost. W metodzie nie wprost skorzystamy również z drugiego twierdzenia tj. twierdzenia o dedukcji nie wprost. Twierdzenie to mówi nam, że jeżeli do naszego zbioru przesłanek dodamy zanegowany wniosek i w kolejnych krokach dowodu otrzymamy **dowolną** parę sprzecznych formuł, to wówczas udowodnimy naszą tezę. Treść twierdzenia jest naturalnie dla pogłębienia zainteresowania i nie jest wymagana na egzaminie. Musimy jendak wiedzieć, jak je stosować.

Przykład dowodu nie wprost

Teza

$(p \to q) \to (\neg r \to ((r \vee p) \to q))$

Standardowo rozpocznijmy od wypisania założeń.

1.	$p \to q$	założenie
2.		

Przykład dowodu nie wprost

Teza

$(p \to q) \to (\neg r \to ((r \lor p) \to q))$

Standardowo rozpocznijmy od wypisania założeń.

1.	$p \to q$	założenie
2.	$\neg r$	założenie
3.		

Przykład dowodu nie wprost

Teza

$(p \to q) \to (\neg r \to ((r \vee p) \to q))$

Standardowo rozpocznijmy od wypisania założeń.

1.	$p \to q$	założenie
2.	$\neg r$	założenie
3.	$r \vee p$	założenie
4.		

Gdy mamy komplet założeń korzystamy z twierdzenia o dedukcji nie wprost. Twierdzenie pozwala nam dodać do naszego zbioru przesłanek zanegowany wniosek, czyli w naszym wypadku $\neg q$

Przykład dowodu nie wprost

Teza

$(p \to q) \to (\neg r \to ((r \vee p) \to q))$

Standardowo rozpocznijmy od wypisania założeń.

1.	$p \to q$	założenie
2.	$\neg r$	założenie
3.	$r \vee p$	założenie
4.	$\neg q$	Z TDNW

Następnie dokonujemy wnioskowań z zastosowaniem reguł inferencyjnych. Pamiętając, że dowód kończy się w momencie, gdy natrafimy na parę zdań sprzecznych.

Przykład dowodu nie wprost

Teza

$(p \to q) \to (\neg r \to ((r \vee p) \to q))$

1.	$p \to q$	założenie
2.	$\neg r$	założenie
3.	$r \vee p$	założenie
4.	$\neg q$	Z TDNW
5.	$\neg p$	MTT 1, 4
6.		

Przykład dowodu nie wprost

Teza

$(p \to q) \to (\neg r \to ((r \vee p) \to q))$

1.	$p \to q$	założenie
2.	$\neg r$	założenie
3.	$r \vee p$	założenie
4.	$\neg q$	Z TDNW
5.	$\neg p$	MTT 1, 4
6.	p	OA 3,2

Sprzeczność 5 i 6 ■

Wprost i nie wprost

Oczywiście jeżeli daną tezę można udowodnić nie wprost, to również udowodnimy ją wprost. W niektórych przypadkach łatwiejszy będzie dowód wprost, w innych nie wprost. Na egzaminie w poleceniu zawsze będzie wskazane jaki rodzaj dowodu należy przeprowadzić.

Teza

$(p \to q) \to (\neg r \to ((r \vee p) \to q))$

1.	$p \to q$	założenie
2.	$\neg r$	założenie
3.	$r \vee p$	założenie
4.	p	OA 3,2
5.	q	MPP 1, 4

$\blacksquare$