Matematyka I

Jakub Guzek
red. Karolina Kobylińska

Uwaga!

Poniższe opracowanie jest oparte głównie na podstawie wykładów z przedmiotu **Matematyka I** prowadzonych na kierunku **Biotechnologia** w Szkole Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie. Jest ono autorstwa studentów toteż może zawierać błędy i do zawartych w nim informacji należy poodchodzić z głową.

Spis treści

1. Logika

1.1 Symbole logiczne

Podstawowe relacje dwuargumentowe

$\wedge$ – „i” (koniunkcja)
$\vee$ – „lub” (alternatywa)
$\Rightarrow$ – „jeżeli...to” (implikacja)
$\Leftrightarrow$ – „wtedy i tylko wtedy gdy” (równoważność)
$\sim$ – „nie” (negacja)

Kwantyfikatory

$\forall$ – dla każdego
$\exists$ – istnieje

2. Zbiory

2.1 Działania na zbiorach

$x \in A$ – x należy do zbioru A
$x \notin A$ – x nie należy do zbioru A
$A \subseteq B$ – A zawiera się lub jest równe B
$A \subset B$ – A zawiera się w B
$A \cup B$ – Suma zbiorów A i B
$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
$A \cap B$ – Iloczyn/przecięcie/część wspólna zbiorów A i B
$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
$A \setminus B$ – Różnica zbiorów A i B
A' – Dopełnienie zbioru A
$(A \subset B) \Rightarrow A' = \{x : x \notin A \wedge x \in B\}$

Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów

2.2 Zbiory liczbowe

$\mathbb{N}$ – Zbiór liczb naturalanych (*ang. natural*)
$\mathbb{Z}$ – Zbiór liczb całkowitych (*niem. Zahlen*)
$\mathbb{Q}$ – Zbiór liczb wymiernych (*ang. quotient*)
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$
$\mathbb{R}$ – Zbiór liczb rzeczywistych (*ang. real*)
$\mathbb{C}$ – Zbiór liczb zespolonych (*ang. complex*)
$\mathbb{C} = \{z : (x \wedge y) : x \in \mathbb{R} \wedge y = i\}$

Przykład
Dowód nie wprost na to, że $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Założenia: $(\sqrt{2} \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (\exists p \in \mathbb{Z} \wedge \exists q \in \mathbb{Z}) \frac{p}{q} = \sqrt{2}$
przy czym $q \neq 0$
oraz p i q nie mają wspólnych dzielników

Dowód: $\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$
$p^2 = 2q^2$
Z czego wynika, że p^2, a więc także i p są liczbami parzystymi
p można więc zapisać jako $2k$
$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$
Z czego wynika, że również q jest parzyste
To sprawia, że dochodzimy do sprzeczności, gdyż wedle założeń p i q nie mają wspólnych dzielników, co oznacza, że nie mogą być obydwie parzyste, ponieważ miałyby wówczas wspólny dzielnik = 2
Co za tym idzie; jeżeli założenie jest błędne, to $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ więc nie jest wymierny.

3. Wartość bezwzględna liczby

Definicja 3.1.

$$|a| = \begin{cases} a; & dla\ a > 0 \\ -a; & dla\ a < 0 \end{cases}$$

$$r = |x - x_0|$$

x należy do zbioru takich punktów, których odległość od punktu x_0 wynosi r.

3.1 Własności

$$|a| \geqslant 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \qquad \forall a \in \mathbb{R} \wedge \forall b \in \mathbb{R}$$

$$|ab| \leqslant |a| \cdot |b| \qquad \forall a \in \mathbb{R} \wedge \forall b \in \mathbb{R}$$

4. Ogólne własności funkcji

4.1 Pojęcie funkcji

Definicja 4.1. *Przyporządkowanie postaci*

$$(\forall x \in X \wedge \forall y \in Y) \Longrightarrow f\colon X \to Y \vee f\colon x \to y$$

nazywamy funkcją odwzorowującą X w Y

$$\text{Odwzorowaniem punktu } x \text{ jest } y \begin{cases} f\colon X \to Y \\ f(x) = y \end{cases}$$

D_f – dziedzina funkcji (zbiór punktów x należących do funkcji f)

Definicja 4.2. *Jeżeli $f(D_f) = \{y \in Y : \forall x \in X \; f(x) = y\}$ to mówimy, że funkcja f odwzorowuje X na Y. W przeciwnym wypadku mówimy, że odwzorowuje X w Y.*

Przykład
$f(x) = x^2$

a. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – funkcja jest „w” $\mathbb{R}$

b. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ – funkcja jest „na” $\mathbb{R}$

4.2 Monotoniczność funkcji

Definicja 4.3. *Funkcję f nazywamy funkcją:*

- *Rosnącą na zbiorze $A \subset D_f \iff [\forall(x_1 \wedge x_2) \in D_f(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2))]$*
- *Malejąca na zbiorze $A \subset D_f \iff [\forall(x_1 \wedge x_2) \in D_f(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2))]$*
- *Niemalejąca na zbiorze $A \subset D_f \iff [\forall(x_1 \wedge x_2) \in D_f(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2))]$*
- *Nierosnąca na zbiorze $A \subset D_f \iff [\forall(x_1 \wedge x_2) \in D_f(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2))]$*

Funkcja f jest monotoniczna na zbiorze $A \subset D_f$ jeśli jest rosnąca, malejąca, niemalejąca lub nierosnąca. Funkcje rosnące i malejące nazywamy ściśle monotonicznymi.

4.3 Różnowartościowość

Definicja 4.4. *Funkcja f nazywamy różnowartościową wtedy, i tylko wtedy, gdy dla $f\colon X \to Y$ zachodzi*

$$\forall(x_1 \wedge x_2) \in X(x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

lub

$$\forall(x_1 \wedge x_2) \in X[f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_1]$$

4.4 Parzystość i nieparzystość

Definicja 4.5. *Funkcję* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *nazywamy parzystą jeżeli:*

1. $\forall x \in X \;\; -x \in X$
2. $\forall x \in X \;\; f(x) = f(-x)$

Definicja 4.6. *Funkcję* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *nazywamy nieparzystą jeżeli:*

1. $\forall x \in X \;\; -x \in X$
2. $\forall x \in X \;\; f(x) = -f(-x)$

4.5 Okresowość

Definicja 4.7. *Funkcję* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *nazywamy okresową jeśli:*

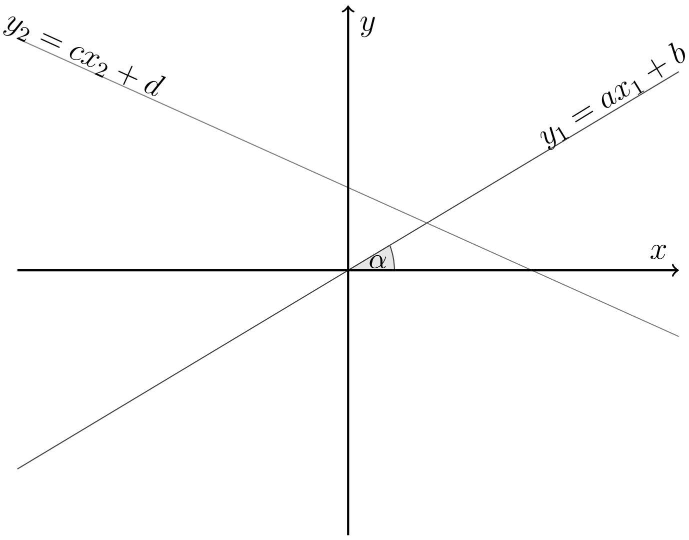
1. $\exists T > 0$ [1]
2. $\forall x \in X \; [(x+T) \in X \wedge (x-T) \in X]$
3. $\forall x \in X \; [f(x+T) = f(x)]$

5. Funkcje

5.1 Funkcja liniowa

$f(x) = ax + b$

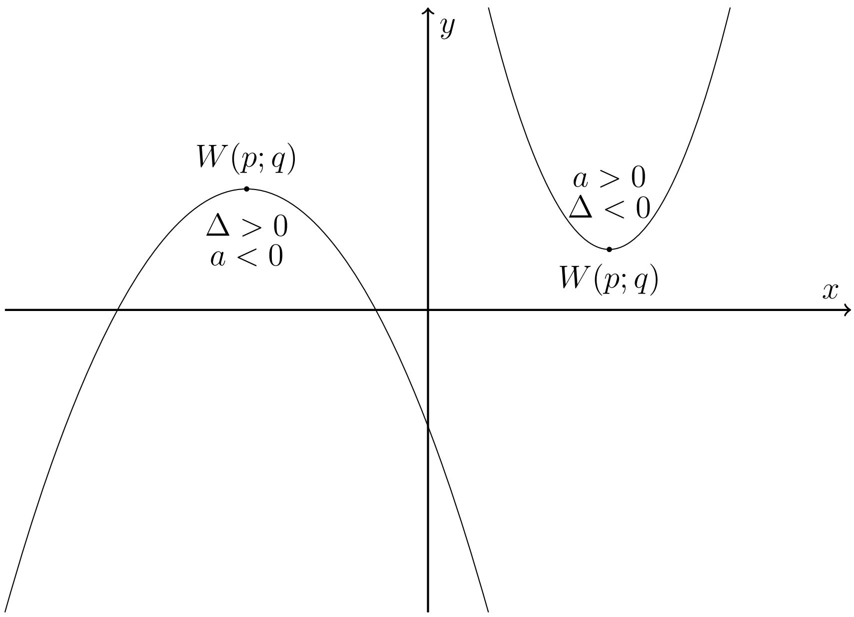
$D_f = \mathbb{R}$
$ZW_f = \mathbb{R}$
$a = \operatorname{tg}\alpha$



[1]T - okres funkcji

5.2 Funkcja kwadratowa

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = a(x-p)^2 + q$ $\qquad ZW_f = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$
$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$



$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$q = f(p) = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

5.3 Wielomiany

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ $\qquad (a_0; a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n) \in \mathbb{R}$
$a_n \neq 0$

Przykład
Dzielenie wielomianów

$$\begin{array}{rl}
 & \quad x - 2 \\
\hline
 & (x^3 - 2x^2 - 13x + 6) : (x^2 + 3) \\
- & (x^3 + 3x) \\
\hline
 & \quad -2x^2 - 16x + 6 \\
- & (-2x^2 - 6) \\
\hline
 & \quad\quad -16x + 12
\end{array}$$

reszta

$$(x^3 - 2x^2 - 13x + 6) = (x^2 + 3)(x - 2) - 16x + 12$$

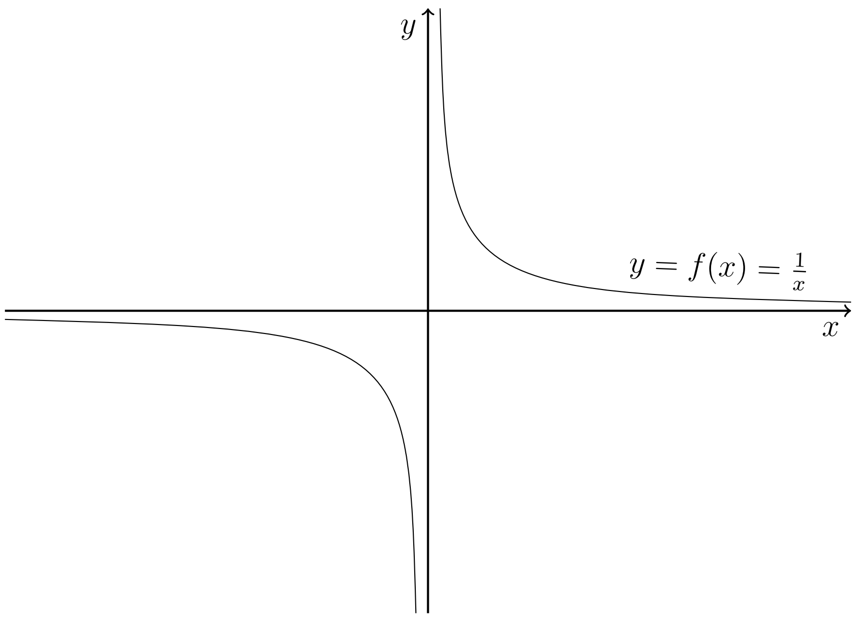
5.4 Funkcje wymierne

$f(x) = \frac{W(x)}{P(x)}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{x\colon P(x) = 0\}$

Funkcja homograficzna

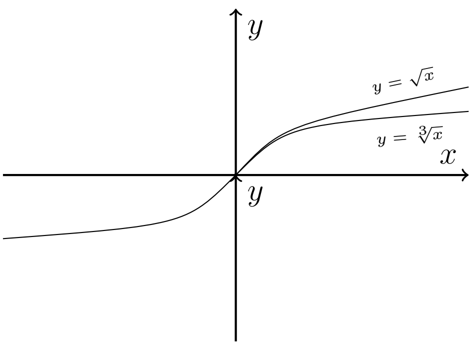
$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ $\qquad c \neq 0$

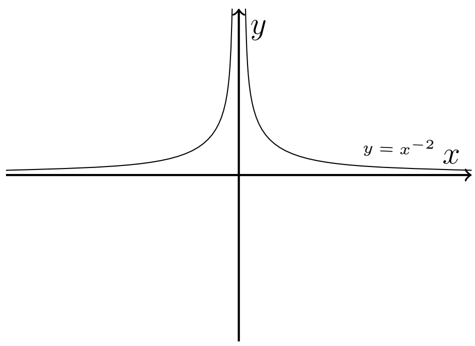
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$



5.5 Funkcje potęgowe i pierwiastkowe

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ $\qquad f(x) = x^\alpha$





$$D_f = \begin{cases} \langle 0; \infty); & \text{dla parzystych } n \\ \mathbb{R}; & \text{dla nieparzystych } n \end{cases}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$n \geqslant 2$$

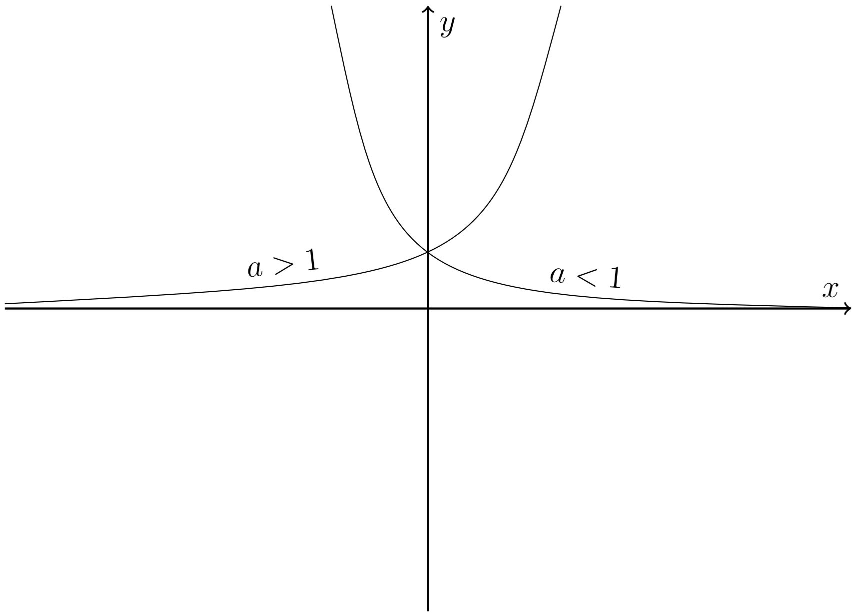
$$D_f = \begin{cases} \mathbb{R}; & \text{dla } \alpha \in \mathbb{N}_+ \\ \mathbb{R} \setminus \{0\}; & \text{dla } \alpha \in \mathbb{Z} \wedge \alpha < 0 \\ (0; \infty); & \text{dla } \alpha \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

5.6 Funkcje wykładnicze

$f(x) = a^x$

$D_f = \mathbb{R}$
$ZW_f = (0; \infty)$
$a \in \{(0; 1) \cup (1; \infty)\}$



Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa

$$a^{x_1} = a^{x_2} \iff x_1 = x_2$$

Jeżeli $a > 1$

$$a^{x_1} < a^{x_2} \iff x_1 < x_2$$

Jeżeli $a < 1$

$$a^{x_1} > a^{x_2} \iff x_1 < x_2$$

5.7 Funkcja logarytmiczne

$f(x) = \log_a x$

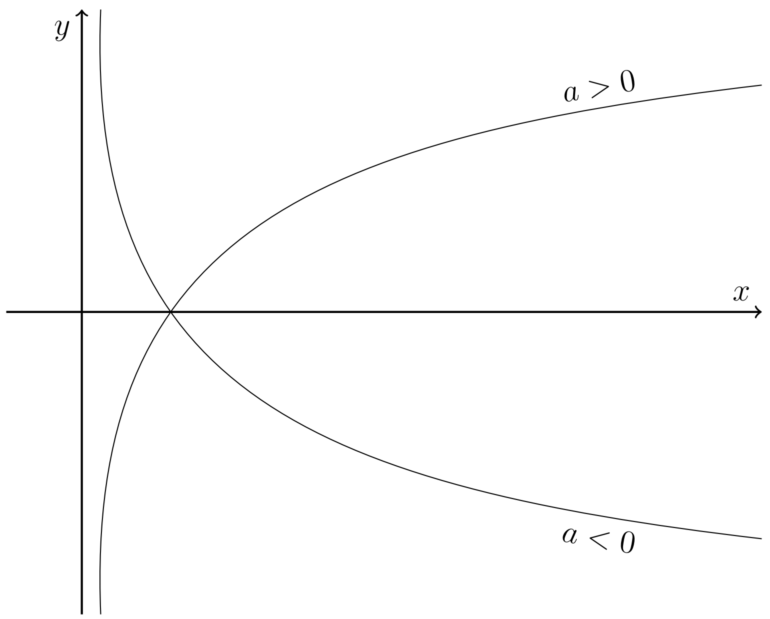
$D_f = \mathbb{R}_+$
$ZW_f = \mathbb{R}$
$a \in \{(0; 1) \cup (1; \infty)\}$

Funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa

$$a > 1 \Longrightarrow (\log_a x_1 < \log_a x_2 \iff x_1 < x_2)$$

$$a \in (0; 1) \Longrightarrow (\log_a x_1 > \log_a x_2 \iff x_1 < x_2)$$

Funkcja logarytmiczna i funkcja wykładnicza przy tej samej postawie są do siebie odwrotne.



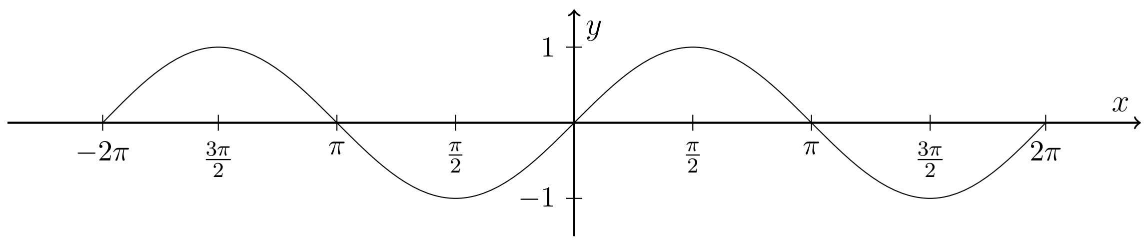
5.8 Funkcje trygonometryczne

Funkcja sinus

$f(x) = \sin x$

$D_f = \mathbb{R}$

$ZW_f = \langle -1; 1 \rangle$



Własności

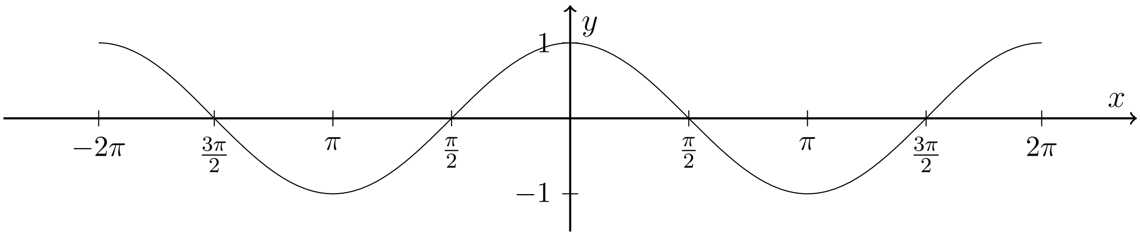
- nieróżnowartościowa
- nieparzysta
- okresowa $T = 2\pi$

Funkcja cosinus

$f(x) = \cos x$

$D_f = \mathbb{R}$

$ZW_f = \langle -1; 1 \rangle$



Własności

– nieróżnowartościowa

– parzysta

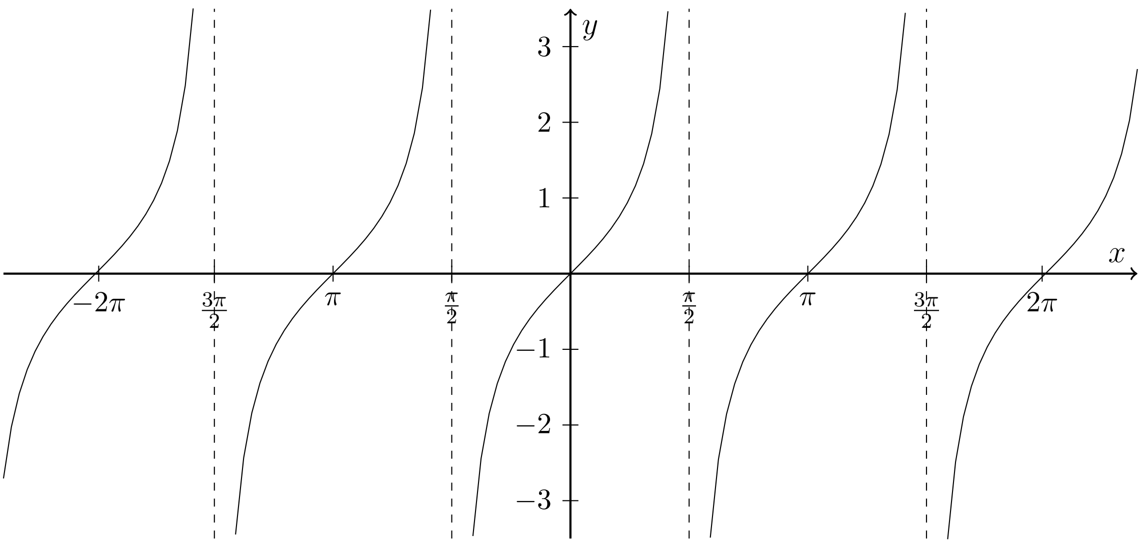
– okresowa $T = 2\pi$

Funkcja tangens

$f(x) = \operatorname{tg} x$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x\colon x = \frac{(2k+1)\pi}{2}\}$

$ZW_f = \mathbb{R}$



5.9 Funkcje złożone

Definicja 5.1. *Funkcję h określoną wzorem $h(x) = f(g(x))$, nazywamy funkcją złożoną $h\colon A \to C$, jeżeli:*

1. $g\colon A \to B$
2. $f\colon B \to C$

5.10 Funkcje odwrotne

Definicja 5.2. *Jeżeli funkcja $f\colon X \to Y$ jest różnowartościowa i określona na zbiór Y, to istnieje funkcja $g\colon Y \to X$ odwrotna do funkcji f taka, że:*

$$\forall (a \in X \wedge b \in Y)\ b = f(a) \Longrightarrow a = g(b)$$

$g(f(x)) = x$ – *odwzorowanie identycznościowe*
Wykres funkcji i funkcji do niej odwrotnej są do sienie symetryczne względem prostej $y - x$.

5.11 Funkcje cyklometryczne

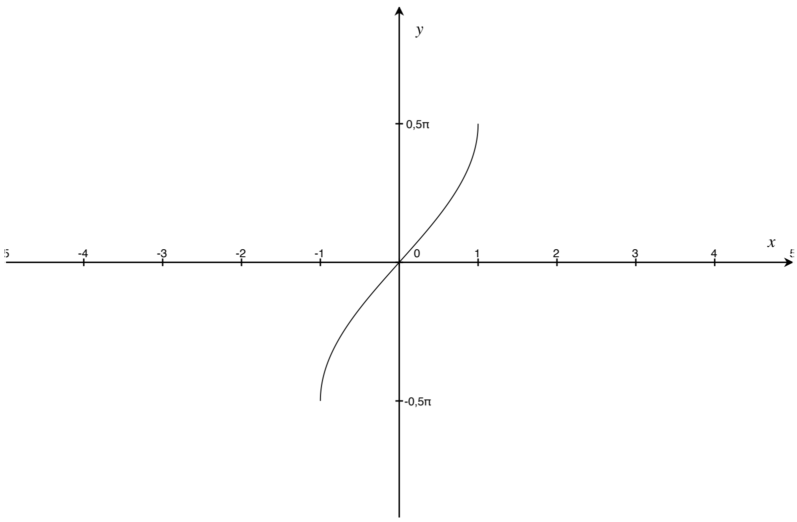
Funkcje cyklometryczne to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych ograniczonych do pewnych przedziałów.
Funkcje trygonometryczne rozpatrywane na całym zbiorze $\mathbb{R}$ nie są różnowartościowe, ale jeżeli zawęzimy ich dziedziny do pewnych przedziałów

- $\sin x\colon \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle \to \langle -1; 1\rangle$
- $\cos x\colon \langle 0; \pi\rangle \to \langle -1; 1\rangle$
- $\operatorname{tg} x\colon (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$
- $\operatorname{ctg} x\colon (0; \pi) \to \mathbb{R}$

Funkcja arcus sinus

$f(x) = \arcsin x$

$D_f = \langle -1; 1\rangle$
$ZW_f = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$



Definicja 5.3. *Funkcję odwrotną do funkcji sinus obciętej do przedziału $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$, nazywamy arcus sinus*

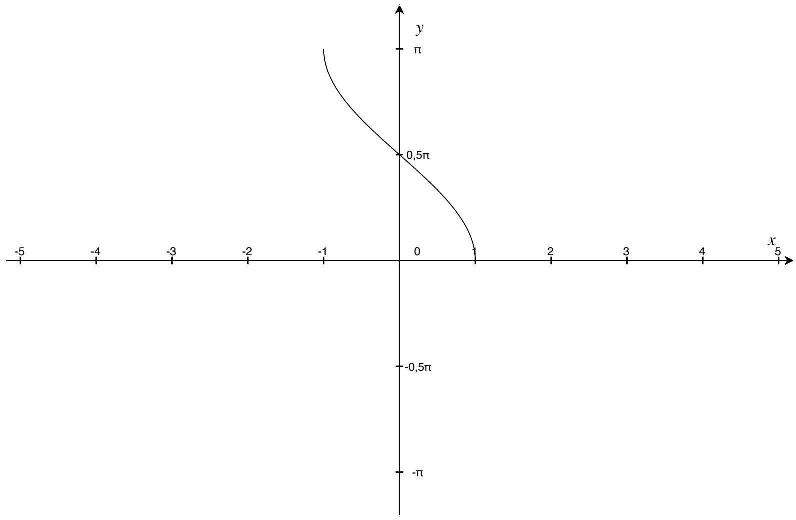
$$y = \arcsin x \iff x = \sin y$$

$$\text{dla } y \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle \wedge x \in \langle -1; 1\rangle$$

Funkcja arcus cosinus

$f(x) = \arccos x$ $\qquad D_f = \langle -1; 1 \rangle$

$ZW_f = \langle 0; \pi \rangle$



Definicja 5.4. *Funkcję odwrotną do funkcji cosinus obciętej do przedziału* $\langle 0; \pi \rangle$, *nazywamy arcus cosinus*

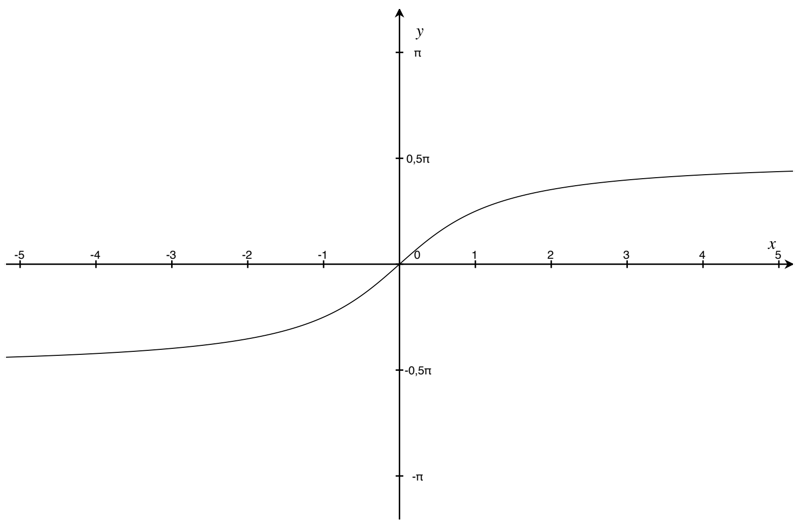
$$y = \arccos x \iff x = \cos y$$

$$dla\ y \in \langle 0; \pi \rangle \wedge x \in \langle -1; 1 \rangle$$

Funkcja arcus tangens

$f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

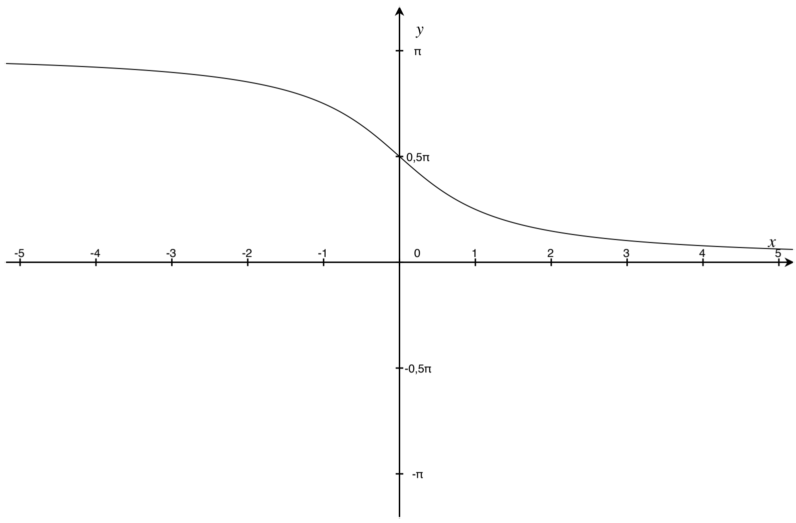
$ZW_f = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$



Funkcja arcus cotangens

$f(x) = \operatorname{arcctg} x$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

$ZW_f = \langle 0; \pi \rangle$



6. Ciągi liczbowe i ich własności

6.1 Pojęcie ciągu

Definicja 6.1. *Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję postaci:*

$$a\colon \mathbb{N} \to Y \qquad \text{gdzie } Y \in \mathbb{R}$$

Wartość odwzorowania a najczęściej oznaczamy a_n i nazywamy $n-$tym wyrazem ciągu lub wyrazem ogólnym ciągu.

(a_n) – *ciąg*

a_n – *$n-$ty wyraz ciągu*

Ciągi liczbowe można określić

1. wzorem ogólnym np. $a_n = 3^n$
2. rekurencyjnie (wzorem rekurencyjnym) np. $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
3. opisowo

6.2 Własności ciągów liczbowych

Monotoniczność

– rosnący gdy $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} > a_n$

– malejący gdy $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} < a_n$

– nierosnący gdy $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} \leqslant a_n$

– niemalejący gdy $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} \geqslant a_n$

Ograniczoność

Definicja 6.2. *O ciągu a_n mówimy, że jest ograniczony z góry wtedy, i tylko wtedy, gdy:*

$$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leqslant M$$

Natomiast gdy:

$$\exists m \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geqslant m$$

to mówimy, że ciąg a_n jest ograniczony z dołu.

M – ograniczenie górne
m – ograniczenie dolne

Jeżeli ciąg jest ograniczony z góry i z dołu, to mówimy, że jest ograniczony.

Może być nieskończenie wiele ograniczeń.

Przykład
Zbadaj monotoniczność i ograniczoność ciągu:

$$a_n = \frac{3}{2n+1}$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{3}{2n+1} - \frac{3}{2(n-1)+1} = \frac{3}{2n+1} - \frac{3}{2n-1} =$$
$$= \frac{3(2n-1) - 3(2n+1)}{(2n-1)(2n+1} = \frac{-6}{(2n-1)(2n+1)}$$

$a_n - a_{n-1} < 0$, więc podany ciąg jest monotoniczny malejący.
Ponieważ jest malejący, to jego największym wyrazem jest $a_1 = 1$.
Jako, że wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie, to jego ograniczeniem dolnym jest (np.) 0.
Ciąg ten ma ograniczenie górne i dolne, jest więc ograniczony.

7. Granice ciągu

7.1 Pojęcie granicy

Definicja 7.1. *Ciąg (a_n) ma granicę właściwą $g \in \mathbb{R}$, co oznaczamy:*

$$\left(\exists g \in \mathbb{R}\ \lim_{n\to\infty} a_n = g\right) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ |a_n - g| < \varepsilon$$

Oznacza to, że w dowolnie małym otoczeniu liczby g leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu (czyli wszystkie za wyjątkiem skończonej ilości).

Ciąg mający granicę właściwą nazywamy ciągiem zbieżnym.

Przykład
Udowodnij z definicji, że $\lim_{n\to\infty}(3-\frac{2}{n})=3$

$$a_n = 3 - \frac{2}{n} \qquad g = 3$$

$$|3-\frac{2}{n}-3| = |-\frac{2}{n}| = \frac{2}{n} < \varepsilon$$
$$n > \frac{2}{\varepsilon}$$
$$n_0 = \frac{2}{\varepsilon}$$

Twierdzenie 7.1. *Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony ma granicę właściwą (jest ciągiem zbieżnym).*

Twierdzenie 7.2 (Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa)**.** *Z dowolnego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.*

Twierdzenie 7.3. *Każdy ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.*

7.2 Wzory

$$\lim_{n\to\infty} c = c \qquad c = const. \tag{7.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad n \in \mathbb{N} \tag{7.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0; & \text{dla } |q|<1 \\ 1; & \text{dla } q=1 \qquad q\in\mathbb{R} \\ \infty; & \text{dla } q>1 \qquad n\in\mathbb{N} \\ \text{nie istnieje;} & \text{dla } q\leqslant -1 \end{cases} \tag{7.3}$$

Dla $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = b$:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a+b \tag{7.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a-b \tag{7.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = ab \tag{7.6}$$

$$\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \qquad \text{dla } b_n \neq 0 \wedge b \neq 0 \tag{7.7}$$

7.3 Twierdzenia

Twierdzenie 7.4 (Twierdzenie o trzech ciągach)**.** *Dane są trzy ciągi:* (a_n)*;* (b_n)*;* (c_n)*.*
Jeżeli dla prawie wszystkich n *spełnione są warunki:*

1. $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$

to:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = g$$

Twierdzenie 7.5.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Twierdzenie 7.6.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 0; \qquad \textit{dla } a > 0$$

Przykład
Oblicz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{17^n + 128^n + 360^n}$.

$$\sqrt[n]{360} \leqslant \sqrt[n]{17^n + 128^n + 360^n} \leqslant \sqrt[n]{3 \cdot 360^n} = \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{360^n}$$

Ponieważ:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{360^n} = 360$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{360^n} = 360$$

to na postawie Twierdzenia 7.4 (Twierdzenie o trzech ciągach):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{17^n + 128^n + 360^n} = 360$$

Twierdzenie 7.7. *Niech ciąg* (a_n) *to będzie taki ciąg, że:*

1. $a_n > 0$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Wówczas:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e \tag{7.8}$$

A w szczególności:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e – liczba Eulera

$e = 2,718281828459\ldots$

Definicja 7.2. *Ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą $-\infty$ lub ∞ jeżeli dla każdej dodatniej liczby M prawie wszystkie wyrazy ciągu spełniają warunek $a_n > M$ (lub $a_n < -M$).*

Ciągi, które nie mają granicy lub mają granicę niewłaściwą nazywamy ciągami rozbieżnymi.

Twierdzenie 7.8 (Twierdzenie o granicach niewłaściwych)**.**

$$\left.\begin{array}{ll} \lim_{n\to\infty} a_n = a; & \textit{przy czym } 0 < a < \infty \\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0; & \textit{przy czym } \forall x \in \mathbb{N}\ b_n > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

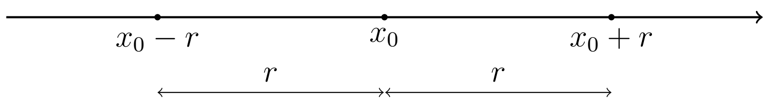
Symbole nieoznaczone:

- $[\infty - \infty]$
- $[0 \cdot \infty]$
- $[\frac{0}{0}]$
- $[\frac{\infty}{\infty}]$
- $[1^\infty]$
- $[\infty^0]$
- $[0^0]$

8. Granice funkcji

Definicja 8.1. *Sąsiedztwem o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$, nazywamy zbiór*

$$S(x_0; r) = (x_0 - r; x_0) \cup (x_0; x_0 + r)$$



Sąsiedztwem lewostronnym o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$, nazywamy zbiór

$$S(x_0^-; r) = (x_0 - r; x_0)$$

Sąsiedztwem prawostronnym o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$, nazywamy zbiór

$$S(x_0^+; r) = (x_0; x_0 + r)$$

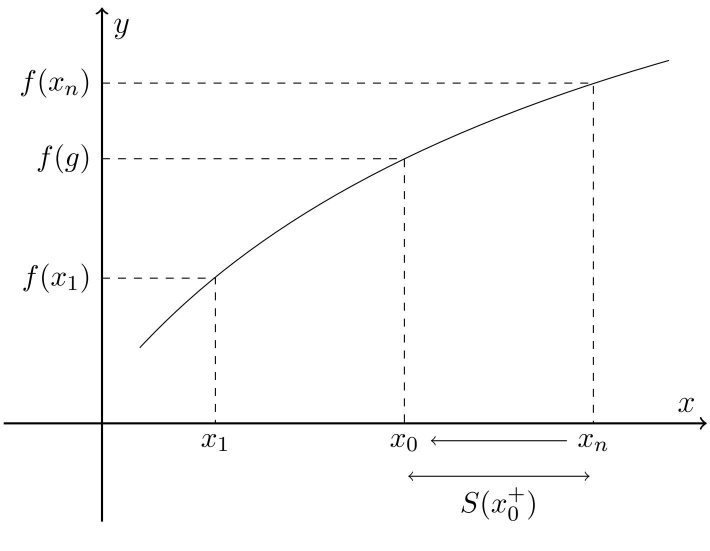
Definicja 8.2. *Otoczeniem punktu x_0, nazywamy sąsiedztwo tego punktu wraz z tym punktem, czyli zbiór*

$$U(x_0; r) = (x_0 - r; x_0 + r)$$

Definicja 8.3 (Definicja Heinego granicy właściwej funkcji w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$)**.** *Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na $S(x_0)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie x_0 wtedy, i tylko wtedy, gdy:*

$$\forall (x_n) \subset S(x_0)\ [(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0) \Longrightarrow (\lim_{x\to x_0} f(x_n) = g)]$$

$$(x_n \to x_0) \Longrightarrow (f(x_n) \to g)$$



Definicja 8.4. *Jeżeli $x_0 \in \mathbb{R}$ i funkcja f jest określona przynajmniej na lewostronnym sąsiedztwie $S(x_0)$, to liczba g jest granicą właściwą lewostronną funkcji f wtedy, i tylko wtedy, gdy:*

$$\forall (x_n) \subset S(x_0^-)\ [(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0) \Longrightarrow (\lim_{x\to x_0} f(x_n) = g)]$$

Analogicznie definiuje się granicę prawostronną.

Warunek istnienia granicy funkcji w punkcie x_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Longrightarrow [\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = g]$$

Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0, to:

1. Prawdziwe są wzory: (7.1); (7.2); (7.3); (7.4); (7.5); (7.6); (7.7).
2. $$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim_{x\to x_0} g(x)} \tag{8.1}$$

Definicja 8.5. *Jeżeli $x_0 \in \mathbb{R}$ i funkcja f jest określona na $S(x_0)$, to:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \forall (x_n) \subset S(x_0)\ [(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0) \Longrightarrow (\lim_{x\to x_0} f(x_n) = \infty)]$$

oraz analogicznie:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall (x_n) \subset S(x_0)\ [(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0) \Longrightarrow (\lim_{x\to x_0} f(x_n) = -\infty)]$$

9. Ciągłość funkcji

Definicja 9.1. *O funkcji $f(x)$ określonej w pewnym otoczeniu $U(x_0)$ mówimy, że jest ciągła w tym punkcie, gdy:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

lub ciągła lewostronnie, gdy:

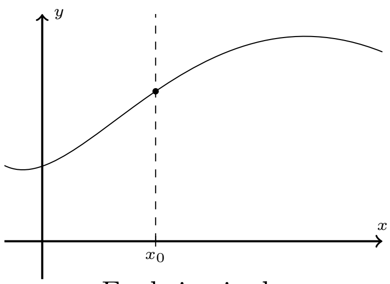
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

lub prawostronnie, gdy:

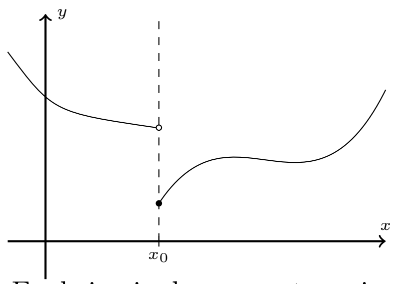
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Jeżeli funkcji jest ciągła w danym punkcie, to znaczy, że jest ona w tym punkcie prawo- i lewostronnie ciągła.
Aby funkcja f była ciągła w danym punkcie $x = x_0$ potrzeba i wystarcza by jednocześnie:

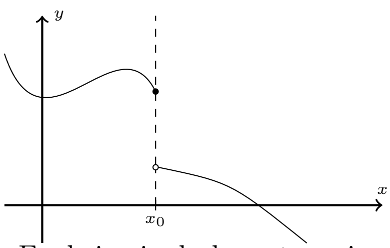
1. funkcja $f(x)$ była określona dla punktu $x = x_0$
2. funkcja $f(x)$ miała granicę dla $x = x_0$
3. wartość funkcji i granica funkcji f w punkcie $x = x_0$ były sobie równe



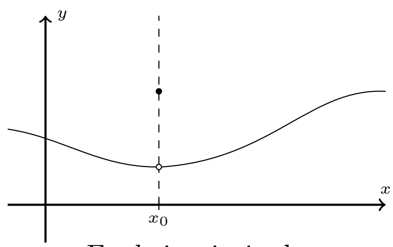
Funkcja ciągła



Funkcja ciągła prawostronnie



Funkcja ciągła lewostronnie



Funkcja nieciągła

Własności funkcji ciągłych

1. suma, różnica, iloczyn i iloraz funkcji ciągłych f i g w punkcie x_0 są funkcjami ciągłymi w tym punkcie
2. funkcje odwrotne do funkcji ciągłych są funkcjami ciągłymi w każdym punkcie, w którym są określone
3. funkcja złożona funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą, w każdym punkcie, w którym jest określona

Uwaga: funkcje elementarne są funkcjami ciągłymi w swoich dziedzinach.

10. Asymptoty funkcji

Definicja 10.1. *Prostą $x = x_0$, nazywamy asymptotą pionową wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli przynajmniej jedna z granic jednostronnych funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 jest niewłaściwa.*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \vee \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$$

lub

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \vee \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

Definicja 10.2. *Prostą o równaniu $y = ax+b$ nazywamy asymptotą ukośną wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli:*

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (a + b)] = 0$$

lub

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (a + b)] = 0$$

Jeżeli wiadomo, że funkcja $f(x)$ ma asymptotę ukośną, to:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \tag{10.1}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] \tag{10.2}$$

lub

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \tag{10.3}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] \tag{10.4}$$

11. Pochodna funkcji

11.1 Pojęcie pochodnej

Dana jest funkcja $y = f(x)$, określona w pewnym otoczeniu $U(x_0; r)$ (gdzie $r > 0$) Niech Δx oznacza przyrost zmiennej niezależnej (dodatni lub ujemny), taki że

$$(x_0 + \Delta x) \in U$$

Przyrostowi argumentu Δx odpowiada przyrost wartości funkcji:

$$\Delta y = [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]$$

Definicja 11.1. *Iloczynem różnicowym, nazywamy iloraz*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Interpretacja geometryczna iloczynu różnicowego

Jest to tangens kąta nachylenia siecznej przechodzącej przez punkty $(x_0; f(x_0))$ i $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ do dodatniej części osi OX

$$\operatorname{tg} x = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Definicja 11.2. *Jeżeli istnieje skończona granica ilorazu różnicowego funkcji f, gdy $\Delta x \to 0$, to tę granicę nazywamy pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{11.1}$$

Jeżeli granica ta nie istnieje, to funkcja nie ma pochodnej w punkcie x_0

Jeżeli istnieje granica jednostronna, to mówimy o pochodnych jednostronnych (oznaczanych $f'_-(x_0)$ lub $f'+(x_0)$.

O funkcji, która ma pochodne w punkcie x_0 mówimy, że jest różniczkowalna w tym punkcie.

Przykład

Oblicz z definicji pochodną funkcji $f(x) = x^3$ w dowolnym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$

Δx – przyrost argumentu

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3$$

więc:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3 - \cancel{x_0^3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_0^2\cancel{\Delta x} + 3x_0\Delta x^{\cancel{2}} + \Delta x^{\overset{2}{\cancel{3}}}}{\cancel{\Delta x}} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2\right) = 3x_0^2$$

Ostatecznie:

$$f(x_0) = x_0^2$$

Twierdzenie 11.1. *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła.*

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe
Na przykład $f(x) = |x|$ w $x_0 = 0$ jest ciągła ale nie ma pochodnej.

11.2 Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych

$$(c)' = 0; \qquad c \in \mathbb{R} \tag{11.2}$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}; \qquad n \in \mathbb{Z}; x \in \mathbb{R} \tag{11.3}$$
$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}; \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{11.4}$$
$$(\sin x)' = \cos x; \qquad x \in \mathbb{R} \tag{11.5}$$
$$(\cos x)' = -\sin x; \qquad x \in \mathbb{R} \tag{11.6}$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \tag{11.7}$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}; \qquad x \neq k\pi \tag{11.8}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a; \qquad x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}_+ \tag{11.9}$$
$$(e^x)' = e^x; \qquad x \in \mathbb{R} \tag{11.10}$$
$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}; \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{11.11}$$
$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e; \qquad x \in \mathbb{R}_+; a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \tag{11.12}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad x \in (-1; 1) \tag{11.13}$$
$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad x \in (-1; 1) \tag{11.14}$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \qquad x \in \mathbb{R} \tag{11.15}$$
$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}; \qquad x \in \mathbb{R} \tag{11.16}$$

11.3 Własności

Twierdzenie 11.2. *Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe, to:*

$$(cf)'(x) = cf'(x); \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Przykład

$$(x^3 + e^x)' = 3x^2 + e^x$$

$$(2\sin x - \sqrt{x})' = 2\cos x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(x^5 \cos x)' = 5x^4 \cos x + x^5 \sin x$$

$$\left(\frac{x^7}{e^x}\right)' = \frac{7x^6 - x^7 e^x}{e^{2x}} = \frac{7x^6 - x^7}{e^x}$$

Twierdzenie 11.3. *Pochodna funkcji złożonej*
Jeżeli:

1. *funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0*

2. *funkcja g ma pochodną właściwą w punkcie $f(x_0)$*

to:

$$(g \bullet f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Przykład
Obliczyć pochodne funkcji

a. $y = \sin\sqrt{x}$
   $y' = \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b. $y = \ln 2x$
   $y' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$

c. $y = e^{\cos x}$
   $y' = e^{\cos x} \cdot (-\sin x)$

d. $y = x^x$
   $y' = (x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

Twierdzenie 11.4. *Pochodna funkcji odwrotnej*
Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. *Jest ciągła na otoczeniu $U(x_0($*

2. *Jest malejąca lub rosnąca na otoczeniu $U(x_0)$*

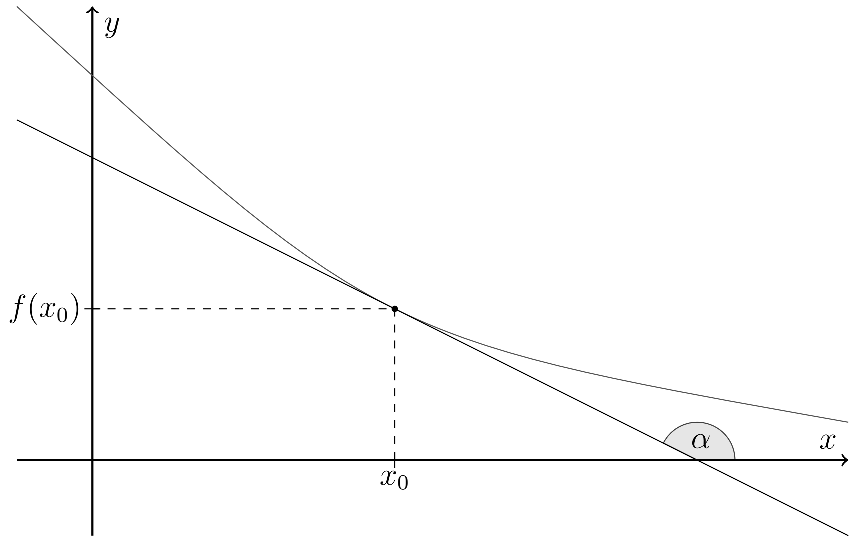
3. *Ma pochodną właściwą $f'(/xz)$*

to:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}; \qquad \textit{gdzie } y_0 = f(x_0) \tag{11.17}$$

Interpretacja geometryczna pochodnej

Niech α oznacza kąt między styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0; f(x_0))$, a dodatnią częścią osi OX



Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0; f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{11.18}$$

Przykład
Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = e^x$ w punkcie $x_0 = 0$

$$f'(x) = e^x \Longrightarrow f'(x_0) = 1$$

bo $e^0 = 1$
Ze wzoru (11.18)

$$y = x + 1$$

więc ostatecznie:

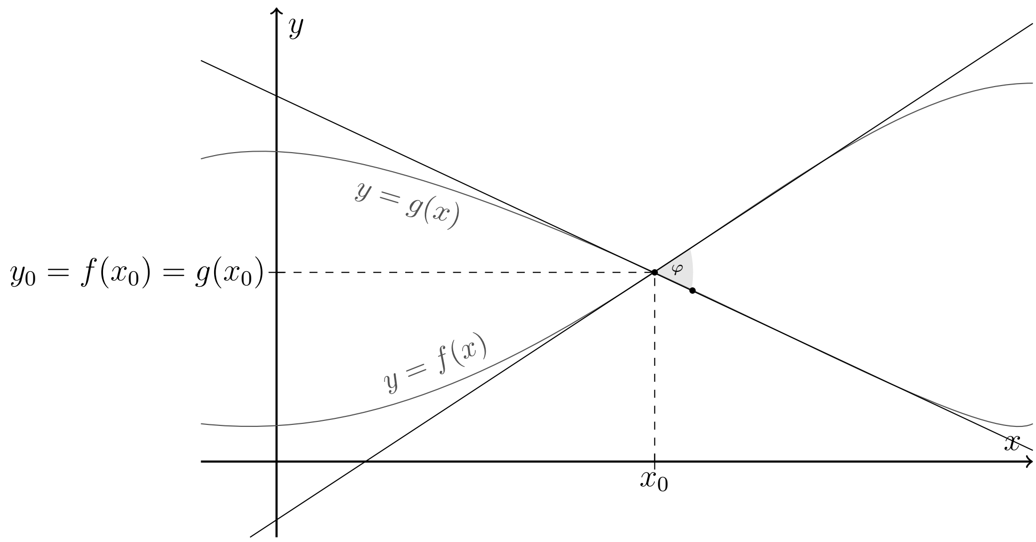
$$\operatorname{tg} \alpha = 45^\circ$$

Definicja 11.3. *Niech wykresy funkcji f i g mają punkt wspólny $(x_0; y_0)$, przy czym obydwa mają pochodną właściwą w punkcie x_0.*
Kąt przecięcia wykresu funkcji f i g nazywamy kątem φ między stycznymi do wykresów tych funkcji w punkcie x_0. Miara kąta przecięcia wykresów funkcji f i g wyraża się wzorem:

$$\varphi = arctg\left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + g'(x_0)f'(x_0)}\right| \tag{11.19}$$

lub

$$tg\,\varphi = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + g'(x_0)f'(x_0)}\right|$$



Twierdzenie 11.5 (Twierdzenie o wartości średniej - Twierdzenie Rolle'a)**.** *Jeżeli funkcja f spełnia warunki:*

1. *jest ciągła na $\langle a; b\rangle$*
2. *ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na $(a; b)$*
3. *$f(a) = f(b)$*

to istnieje punkt $c \in (a; b)$ taki, że:

$$f'(c) = 0$$

(styczna w punkcie c jest równoległa do osi OX)

Twierdzenie 11.6 (Twierdzenie LaGrange'a)**.** *Jeżeli funkcji f spełnia warunki*

1. *jest ciągła na $\langle a; b\rangle$*
2. *ma pochodną w $(a; b)$*

to istnieje $c \in (a; b)$ takie, że

$$f(x) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

11.4 Pochodne wyższych rzędów

Definicja 11.4. *Pochodną właściwą n-tego rzędu funkcji f w punkcie x_0 definiujemy indukcyjnie (lub rekurencyjnie) jako:*

$$f^{(n)}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} [f^{(n-1)}]'(x_0) \quad dla\ n \geqslant 2$$

przy czym:

$$f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$$

oraz

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$$

Przykład

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + 3x^2 - 7x + 2 \\
f'(x) &= 3x^2 + 6x - 7 \\
f''(x) &= 6x + 6 \\
f'''(x) &= 6 \\
f^{(4)}(x) &= 0
\end{aligned}
$$

więc

$$f^{(n)}(x) = 0 \quad \text{dla } n \geqslant 4$$

Twierdzenie 11.7 (Reguła de l'Hospitala)**.** *Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki*

1.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

lub

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$$

2. Istnieje granica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

to:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{11.20}$$

Twierdzenie to jest prawdziwe również dla granic jednostronnych.

Przykład

Obliczyć granicę funkcji:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln 1 + x^2}{\cos x - e^{-x}} \underset{\mathrm{H}}{\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{-\sin x + e^{-1}} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{-(x^2+1)(\sin x - e^{-x})} = \left[\frac{0}{1}\right] = 0$$

11.5 Zastosowanie pochodnej do badania funkcji

Monotoniczność

Niech I oznacza przedział. Jeżeli $\forall x \in I$ funkcja f spełnia warunek:

- $f'(x) = 0$, to jest stała na I
- $f'(x) > 0$, to jest rosnąca na I
- $f'(x) < 0$, to jest malejąca na I
- $f'(x) \geqslant 0$, to jest niemalejąca na I
- $f'(x) \leqslant 0$, to jest nierosnąca na I

Ekstrema lokalne

Definicja 11.5. *Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ minimum lokalne, jeżeli:*

$$\exists\delta > 0\ \forall x \in S(x_0;\delta)\ f(x) \geqslant f(x_0)$$

Definicja 11.6. *Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ maksimum lokalne, jeżeli:*

$$\exists\delta > 0\ \forall x \in S(x_0;\delta)\ f(x) \leqslant f(x_0)$$

Twierdzenie 11.8 (Twierdzenie Fermata – Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji)**.** *Jeżeli funkcja f:*

1. *ma ekstremum lokalne w punkcie x_0*
2. *ma pochodną $f'(x_0)$*

to ta pochodna zeruje się w punkcie x_0

Twierdzenie odwrotne jest fałszywe

Twierdzenie 11.9 (Pierwszy warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego)**.** *Jeżeli funkcja f spełnia warunki:*

1. $f'(x_0) = 0$
2. $$\exists\delta > 0\ \begin{cases} f'(x) < 0; & \forall x \in S(x_0^-;\delta) \\ f'(x) > 0; & \forall x \in S(x_0^+;\delta) \end{cases}$$

to w punkcie x_0 funkcja f ma maksimum lokalne.
Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = 0$
2. $$\exists\delta > 0\ \begin{cases} f'(x) > 0; & \forall x \in S(x_0^-;\delta) \\ f'(x) < 0; & \forall x \in S(x_0^+;\delta) \end{cases}$$

to w punkcie x_0 funkcja f ma minimum lokalne.

Aby funkcja miała ekstremum to konieczne jest aby jej pochodna zerowała się w punkcie x_0 oraz aby jej pochodna zmieniała znak w $S(x_0;\delta)$

Wypukłość i punkty przegięcia

Definicja 11.7. *Funkcja f jest wypukła na przedziale $(a;b)$ takim, że $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$ wtedy, i tylko wtedy, gdy:*

$$\forall a < (x_1 \wedge x_2) < b\ \forall 0 < \lambda < 1\ f(\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

lub ściśle wypukła, gdy:

$$\forall a < (x_1 \wedge x_2) < b\ \forall 0 < \lambda < 1\ f(\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

Definicja 11.8. *Funkcja f jest wklęsła na przedziale $(a;b)$ takim, że $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$ wtedy, i tylko wtedy, gdy:*

$$\forall a < (x_1 \wedge x_2) < b \ \forall 0 < \lambda < 1 \ f(\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

lub ściśle wklęsła, gdy:

$$\forall a < (x_1 \wedge x_2) < b \ \forall 0 < \lambda < 1 \ f(\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Styczna do wykresu funkcji wypukłej znajduje się zawsze pod wykresem.
Styczna do wykresu funkcji wklęsłej znajduje się zawsze nad wykresem

Twierdzenie 11.10 (Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia)**.** *Jeżeli funkcja f spełnia warunki:*

1. *$(x_0; f(x_0))$ jest punktem przegięcia*
2. *istnieje $f''(x_0)$*

to

$$f''(x_0) = 0$$

Twierdzenie 11.11 (Warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia)**.** *Jeżeli funkcja f spełnia warunki*

1. *w punkcie x_0 ma pochodną*
2. $$\exists \delta > 0 \begin{cases} f''(x) < 0; & \forall x \in S(x_0^-; \delta) \\ f''(x) > 0; & \forall x \in S(x_0^+; \delta) \end{cases}$$

   lub

   $$\exists \delta > 0 \begin{cases} f''(x) > 0; & \forall x \in S(x_0^-; \delta) \\ f''(x) < 0; & \forall x \in S(x_0^+; \delta) \end{cases}$$

   to punkt $(x_0; f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f.

12. Szeregi liczbowe

12.1 Pojęcie szeregu

Definicja 12.1. *Szeregiem liczbowym o wyrazach a_n, nazywamy wrażenie postaci:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Definicja 12.2. *Sumami częściowymi szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *nazywamy wyrażenia:*

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + 1_2 \\ S_3 &= a_1 + 1_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + 1_2 + a_3 + a_4 \\ S_n &= a_1 + 1_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

Ciąg (S_n), *nazywamy ciągiem sum częściowych.*

Przykład

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &S_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ &S_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ &S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ &S_n = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \\ &s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

12.2 Zbieżność szeregu

Definicja 12.3. *Szereg liczbowy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

nazywamy zbieżnym, jeżeli jego ciąg sum częściowych jest ciągiem zbieżnym (mającym granicę skończoną)

$$\lim_{n \to \infty} (S_n) = S$$

Jeżeli ciąg sum częściowych jest rozbieżny (mający granicę niewłaściwą lub nie mający granicy), to mówimy, że szereg jest rozbieżny.

Przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Szereg ten jest zbieżny

Warunek konieczny zbieżności szeregu
Jeżeli szereg liczbowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny, to:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Warunek konieczny zbieżności szeregu nie jest spełniony, więc szereg ten jest rozbieżny.

Kryterium 12.1 (Kryterium d'Alemberta)**.** *Dany jest szereg:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$$

Jeżeli $g < 1$ to szereg jest zbieżny
Jeżeli $g > 1$ to szereg jest rozbieżny
Jeżeli $g = 1$ to nie da się określić zbieżności szeregu przy pomocy tego kryterium.

Przykład
Zbadać zbieżność szeregu przy pomocy kryterium d'Alemberta (12.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n} > 0$$

$$a_n = \frac{n!}{10^n}; \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\cancel{n!}}{10 \cdot \cancel{10^n}} \cdot \frac{\cancel{10^n}}{\cancel{n!}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{10} \right| = \infty$$

Na podstawie kryterium d'Alemberta (12.1) szereg ten jest rozbieżny.

Kryterium 12.2 (Kryterium Cauchy'ego)**.** *Dany jest szereg:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g$$

Jeżeli $g < 1$ *to szereg jest zbieżny*
Jeżeli $g > 1$ *to szereg jest rozbieżny*
Jeżeli $g = 1$ *to nie da się określić zbieżności szeregu przy pomocy tego kryterium*

Przykład
Zbadać zbieżność szeregu przy pomocy kryterium Cauchy'ego (12.2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{7n+8}\right)^n$$

$$a_n = \left(\frac{n}{7n+8}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{7n+8}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{7n+8} = \frac{1}{7} < 0$$

Na podstawie kryterium Cauchy'ego (12.2) szereg ten jest zbieżny.

Definicja 12.4. *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

nazywamy szeregiem harmonicznym

Definicja 12.5. *Szereg postaci:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

nazywamy szeregiem harmonicznym rzędu p
Szereg harmoniczny rzędu

1. $p > 1$ *jest zbieżny*
2. $p \in (0; 1\rangle$ *jest rozbieżny*

Kryterium 12.3 (Kryterium porównawcze)**.** *Dane są szeregi:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \textit{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

takie, że:

$$\forall n > n_0 \; 0 \leqslant a_n \leqslant b_n$$

Wówczas:

– *Jeżeli* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny*

– *Jeżeli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny, to* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest rozbieżny*

Przykład
Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$$

$$a_n = \frac{1}{(3n-1)^2} \geqslant \frac{1}{(3n)^2} = \frac{1}{9n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2}$ – jest to szereg harmoniczny rzędu 2, więc jest on zbieżny.

$$a_n \leqslant \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$ – jest to szereg harmoniczny rzędu 2, więc jest on zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} \text{ jest zbieżny} \overset{KP}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2} \text{ jest zbieżny}$$

12.3 Szereg naprzemienny

Definicja 12.6. *Szereg liczbowy postaci:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; a_n > 0$$

nazywamy szeregiem naprzemiennym.

Kryterium 12.4 (Kryterium Leibniza). *Jeżeli:*

1. *od pewnego* $n_0 \in \mathbb{N}$ *ciąg jest nierosnący*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

to szereg naprzemienny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *jest zbieżny*

Definicja 12.7. *Szereg liczbowy* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, nazywamy bezwzględnie zbieżnym jeżeli szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

jest zbieżny

Szereg liczbowy zbieżny ale niezbieżny bezwzględnie, nazywamy warunkowo zbieżnym.
Jeżeli dany szereg jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny
Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe

Przykład

Zbadać zbieżność warunkową i bezwzględną szeregu: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Zbieżność bezwzględna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{-}{n}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right| \text{ – szereg harmoniczny rzędu 1, więc rozbieżny.}$$

Szereg ten nie jest zbieżny bezwzględnie
Zbieżność warunkowa

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ – jest malejący}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Na podstawie kryterium Leibniza (12.4) szereg ten jest warunkowo zbieżny.

13. Szeregi potęgowe

13.1 Pojęcie szeregu potęgowego

Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ i współczynnikach $c_n \in \mathbb{R}$; ($n \in \mathbb{N}$), nazywamy szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$$

Definicja 13.1. *Promień zbieżności szeregu potęgowego* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *to liczba*

$$R = \begin{cases} 0; & dla\ g = \infty \\ \frac{1}{g}; & dla\ 0 < g < \infty \\ \infty; & dla\ g = 0 \end{cases}$$

gdzie:

$$g = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Twierdzenie 13.1 (Twierdzenie Cauchy'ego - Hadamarda)**.** *Jeżeli* $R \in (0;\infty)$ *jest promieniem zbieżności szeregu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

Wtedy szereg ten jest:

1. *Zbieżny bezwzględnie w każdym punkcie przedziału* $(x_0 - R; x_0 + R)$
2. *Rozbieżny w każdym punkcie zbioru* $(-\infty; x_0 - R) \cup (x_0 + R; \infty)$

Na krańcach przedziału $(x_0 - R; x_0 + R)$ *szereg może być zbieżny lub rozbieżny*

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ nazywamy zbiór:

$$\{x\colon x \in \mathbb{R}; \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \text{jest zbieżny}\}$$

13.2 Szereg Taylora i szereg Maclaurina

Wzór Taylora

Jeżeli funkcja f ma w przedziale $\langle x_0; x\rangle$ pochodną rzędu $n-1$ oraz pochodną rzędu n w przedziale $(x_0; x)$ wówczas istnieje $c \in (x_0; x)$ takie, że:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{l!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \quad (13.1)$$

Wielomian Taylora

Wielomian postaci:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{l!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \quad (13.2)$$

nazywamy wielomianem Taylora

Resztea LaGrange'a

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \tag{13.3}$$

Takie wyrażenie nazywamy n-tą resztą LaGrange'a rozwinięcia Taylora funkcji f.

Szereg Taylora

Załóżmy, że funkcja f ma pochodne wszystkich rzędów w pewnym otoczeniu $U(x_0)$. Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(x_0)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \tag{13.4}$$

nazywamy szeregiem Taylora funkcji f w otoczeniu $U(x_0)$

Szereg Maclaurina

W szczególności dla $x_0 = 0$ szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(x_0)}(c)}{n!}x^n \tag{13.5}$$

nazywamy szeregiem Maclaurina funkcji f

Przykład

Znaleźć szereg Maclaurina dla funkcji $f(x) = \sin 2x$

$$f'(x) = 2\cos 2x \qquad f''(x) = -4\sin 2x$$
$$f'''(x) = -8\cos 2x \qquad f^{(4)}(x) = 16\sin 2x$$
$$f^{(5)}(x) = 32\cos 2x$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sin 2x & \text{dla } n = 2k \\ (-1)^k \cos 2x & \text{dla } n = 2k+1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$f'(0) = 2 \qquad f''(0) = 0$$
$$f'''(0) = -8 \qquad f^{(4)}(0) = 0$$
$$f^{(5)}(0) = 32$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 2k \\ (-1)^k 2^n & \text{dla } n = 2k+1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}$$

Szereg Maclaurina funkcji f

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^{k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

Zadanie 1. *Wyznaczyć szereg Maclaurina dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1-x}$, a następnie wyznaczyć jego przedział zbieżności.*

14. Całka nieoznaczona

14.1 Pojęcie całki nieoznaczonej

Definicja 14.1. *Mówimy, że funkcja $y = F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $y = f(x)$, jeżeli:*

$$F'(x) = f(x)$$

Przykład $F(x) = \sin x$; dla $x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$ bo $(\sin x)' = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$

Twierdzenie 14.1. *Jeżeli funkcja $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ (w pewnym przedziale) to funkcja $F(x)+C$ (C - stała rzeczywista) jest również funkcja pierwotną funkcji $f(x)$.*
Zatem każdą funkcja pierwotną funkcji f (w danym przedziale) można przedstawić za pomocą sumy $y = F(x) + C$

Twierdzenie 14.2. *Każda funkcja ciągła na danym przedziale ma w tym przedziale funkcje pierwotną*

Definicja 14.2. *Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji $f(x)$ na danym przedziale nazywamy całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ na tym przedziale i oznaczamy symbolem:*

$$\int f(x)\,dx$$

$$\left[\int f(x)\,dx = F(x) + C\right] \iff \left[F(x) + C\right]' = f(x)$$

14.2 Wzory

$$\int 0\,dx = C \qquad C \in R \tag{14.1}$$

$$\int 1\,dx = x + C \tag{14.2}$$

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad x \in \mathbb{R}; \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \tag{14.3}$$

$$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C \qquad x \in \mathbb{R} \tag{14.4}$$

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + C \qquad x \in \mathbb{R} \tag{14.5}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \qquad x \in \mathbb{R} \tag{14.6}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \qquad x \in \mathbb{R} \tag{14.7}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C \qquad x \in \mathbb{R} \tag{14.8}$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x} \, dx = \operatorname{ctg} x + C \qquad x \in \mathbb{R} \tag{14.9}$$

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx \tag{14.10}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C \tag{14.11}$$

14.3 Całkowanie przez części

Twierdzenie 14.3. *Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to:*

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx \tag{14.12}$$

Przykład

a)

$$\int x^2 e^x \, dx$$

$$f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = e^x \quad g(x) = e^x$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

$$h(x) = x \quad h'(x) = 1$$

$$i'(x) = e^x \quad i(x) = e^x$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x \, dx \right) =$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

b)

$$\int \ln x \, dx$$

$$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 1 \quad g(x) = x$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \, dx = x \ln x - x + C$$

14.4 Całkowanie przez zamianę zmiennych

Jeżeli funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale I, a funkcja $\varphi\colon J \to I$ ma ciągła pochodną na przedziale J, to:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C \tag{14.13}$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f oraz $C \in \mathbb{R}$

Przykład

a)

$$\int (9x+1)^{2019}\,dx$$

$$t = 9x+1 \quad \frac{dt}{dx} = 9$$

$$dt = 9dx \quad dx = \frac{dt}{9}$$

$$\int t^{2019}\frac{dt}{9} = \frac{1}{9}\int t^{2019}\,dt = \frac{1}{9}\cdot\frac{t^{2020}}{2020} + C =$$

$$=\frac{1}{9\cdot 2020}(9x+1)^{2020} + C$$

b)

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x\cdot\sin x\,dx =$$

$$= \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$$t = \cos x \quad dt = -\sin x dx$$

$$dx = -\frac{dt}{\sin x}$$

$$\int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = -\int (1-t^2)\cancel{\sin x}\frac{dt}{\cancel{\sin x}} =$$

$$= -\left(t - \frac{1}{3}t^3\right) + C = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

14.5 Całkowanie funkcji wymiernych

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

Przypadek I. $ax^2+bx+c;\quad \Delta = 0$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+4}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$$

$$t = x+2 \quad dt = dx$$

$$\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x+2} + C$$

Przypadek II. $ax^2 + bx + c; \quad \Delta > 0$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\, dx = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

Ułamek podwójny

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \\ =&\frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &1 = Ax - A + Bx + B \\ &\begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = -A + B \end{cases} \\ &-1 = 2A \\ &A = -\frac{1}{2}; \quad B = \frac{1}{2} \\ &\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} \right) dx = \\ =& \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \end{aligned}$$

W przypadku ogólnym

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{x+a} \\ &t = x + a; \quad dt = dx \\ &\int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C \end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C = \\ =&\frac{1}{2} \ln\left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

15. Całka oznaczona

15.1 Pojęcie całki oznaczonej

Definicja 15.1. *Niech $f\colon \langle a; b\rangle \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną*
Podziałem $\mathcal{P}_m$ odcinka $\langle a; b\rangle$, nazywamy dowolny skończony ciąg punktów

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n_m-1} < x_{n_m} = b$$

Przedziały

$$\langle x_{i-1}; x_i \rangle;\ gdzie\ i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

nazywamy przedziałami cząstkowymi podziału $\mathcal{P}_m$, a ich długość oznaczamy Δx_i
Niech δ_m oznacza największą z liczb Δx_i, czyli długość najdłuższego przedziału cząstkowego podziału $\mathcal{P}_m$.
Ciąg podziałów $(\mathcal{P}_m)$ nazywamy normalnym ciągiem podziałów, jeżeli $\lim\limits_{m\to\infty} \delta_m = 0$

Definicja 15.2. *Sumę iloczynów wartości funkcji $f(c_i)$ w dowolnym punkcie c_i przedziału $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$ i długości Δx_i tych przedziałów przy podziale $\mathcal{P}_m$, nazywamy sumą Riemanna*

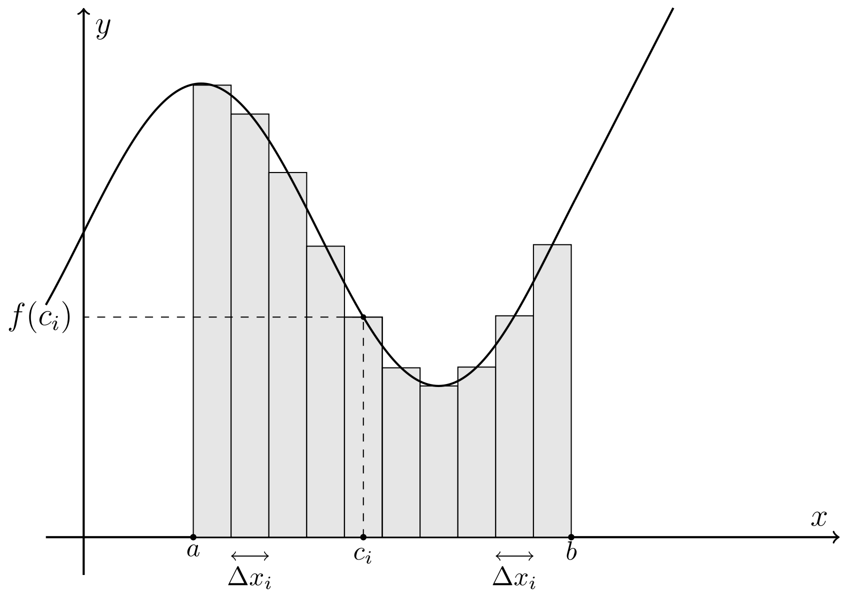
$$S_m = \sum_{i=1}^{n_m} f(c_i)\Delta x_i \tag{15.1}$$

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{m\to\infty} S_m$$

taka sama dla każdego normalnego ciągu podziałów $(\mathcal{P}_m)$, niezależnie od wyboru punktów c_i, to funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją całkowalną w przedziale $\langle a; b \rangle$.

Interpretacja geometryczna sumy Riemanna



Definicja 15.3. *Granicę ciągu (S_m) spełniającą powyższe warunki nazywamy całką Riemanna, lub całką oznaczoną funkcji $f(x)$, w granicach od a do b i oznaczamy symbolem*

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{15.2}$$

15.2 Własności

Zakładając, że $f\colon \langle a; b\rangle \to \mathbb{R}$ jest całkowalna:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \tag{15.3}$$

$$\int_a^b af(x)\,dx = a\int_a^b f(x)\,dx \tag{15.4}$$

$$\int_a^b g(x)\,dx = -\int_b^a g(x)\,dx \tag{15.5}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{dla } a<c<b \tag{15.6}$$

Twierdzenie 15.1 (Twierdzenie Newtona-Leibniza)**.** *Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale $\langle a; b\rangle$, to*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(b)-F(a)] \tag{15.7}$$

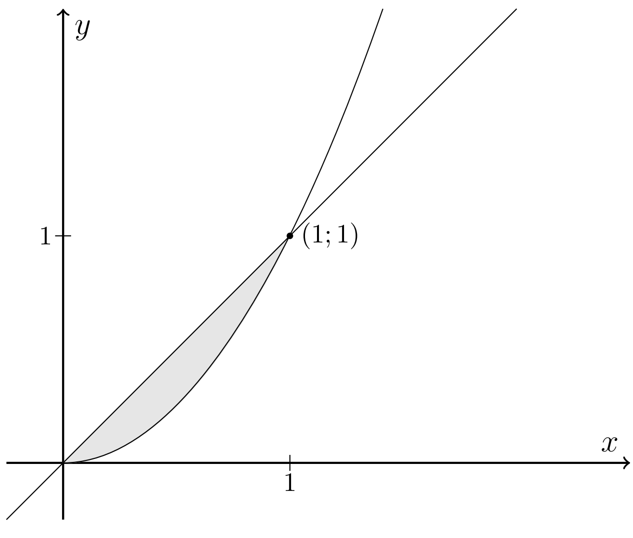
gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f na tym przedziale.

Przykład
Obliczyć całkę na przedziale $\langle -1; 2\rangle$ z funkcji $f(x) = x^2 - 2x$

$$\int (x^2-2x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C$$

$$\int_{-1}^2 (x^2-2x)\,dx = \left[\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - 4\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - 1\right)\right] = 3 - 3 = 0$$

Przykład
Za pomocą całki oznaczonej obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = x^2$ i $y = x$



Wyznaczamy granice całkowania i obliczamy pole korzystając z twierdzenia 15.1 (Twierdzenia Newtona-Leibniza)

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$$

$$0 = x^2 - x$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$$

$$\int (x - x^2)\, dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - 0\right] = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

15.3 Zastosowania całki oznaczonej

1 Wyznaczanie pola ograniczonego krzywymi

2 Wyznaczanie objętości bryły obrotowej powstałej z obrotu krzywej

$$|V| = \int_a^b f^2(x)\, dx \tag{15.8}$$

Bibliografia

[1] W. Krysicki, L. Włodarski. *Analiza Matematyczna w Zadaniach 1.*, Wydawnictwo naukowe PWN SA, Warszawa, Wydanie XXIX, 2018.

[2] Wikipedia contributors. *Riemann sum*, Wikipedia, The Free Encyclopedia, https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Riemann_sum&oldid=873980898, 16 December 2018 09:58 UTC.