Matematyka II

Jakub Guzek

Uwaga!

Poniższe opracowanie jest oparte głównie na podstawie wykładów z przedmiotu **Matematyka II** prowadzonych na kierunku **Biotechnologia** w Szkole Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie. Jest ono autorstwa studentów toteż może zawierać błędy i do zawartych w nim informacji należy poodchodzić z głową.

Spis treści

1. Całki niewłaściwe

Warunkiem koniecznym istnienia całki Riemanna jest ograniczoność funkcji. Często trzeba jednak obliczyć całki, w których funkcji podcałkowa jest nieograniczona, lub przedział całkowania jest nieograniczony.
Całka niewłaściwa jest uogólnieniem pojęcia całki Riemanna.

1.1 Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

1. $f(x)$ jest całkowalna na przedziale $\langle a; b\rangle$ $\forall b > a$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_a^T f(x)\,dx \tag{1.1}$$

2. $f(x)$ jest całkowalna na przedziale $\langle a; b\rangle$ $\forall a > b$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{S\to-\infty}\int_S^b f(x)\,dx \tag{1.2}$$

Szczególnie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{C} f(x)\,dx + \int_C^{\infty} f(x)\,dx \tag{1.3}$$

Pzykład
Obliczyć całki

a)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_1^T x^{-2}\,dx = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}+1\right) = 1$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_T^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{T\to\infty}(\operatorname{arctg} T - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}$$

Analogicznie druga całka

1.2 Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

Niech funkcja $f\colon \langle a; b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna na każdym z przedziałów $\langle a; c\rangle$ przy czym $a < c < b$
Załóżmy też, że funkcja f jest nieograniczona w pewnym sąsiedztwie punktu b

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b}\int_a^c f(x)\,dx \tag{1.4}$$

Analogicznie gdy funkcja jest nieograniczona na pewnym sąsiedztwie punktu a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a}\int_c^b f(x)\,dx \tag{1.5}$$

Przykład

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+}(\ln 1 - \ln|a|) = 0 - (-\infty) = \infty$$

Całka jest rozbieżna

2. Macierze i wyznaczniki

2.1 Pojęcie macierzy

Definicja 2.1. Macierzą rzeczywistą (dalej: macierzą) wymiarów $m \times n$ gdzie $m \wedge n \in \mathbb{N}$ nazywamy prostokątną tablicę złożoną z $m \cdot n$ liczb rzeczywistych znajdujących się w m wierszach i n kolumnach

Macierze oznaczmy dużymi literami alfabetu łacińskiego.
a_{ij} – element macierzy A w i-tym rzędzie i j-tej kolumnie

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierze A i B są równe wtedy, i tylko wtedy, gdy mają takie same wymiary $m \times n$ oraz $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i \in \{1, \dots, m\} \wedge \forall j \in \{1, \dots, n\}$

Definicja 2.2. Macierz kwadratowa stopnia n to macierz wymiarów $n \times n$, w której elementy $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tworzą główną przekątną.

Definicja 2.3. Macierz diagonalna to macierz kwadratowa stopnia n, na której wszystkie elementy nie stojące na głównej przekątnej są równe 0. W przypadku macierzy diagonalnej główna przekątna jest nazywana diagonalą.

Definicja 2.4. Macierz jednostkowa to taka macierz diagonalna, której wszystkie elementy stojące na głównej przekątnej są równe 1. Macierz jednostkową stopnia n oznaczamy I_n

2.2 Działania na macierzach

2.2.1 Działania proste

Niech dane będą macierze $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$. Sumą (różnicą) macierzy A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times n$, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{2.1}$$

lub

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \tag{2.2}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Definicja 2.5. Iloczynem macierzy A przez liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$ nazywamy macierz C takiego samego wymiaru jak macierz A, której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \tag{2.3}$$

Definicja 2.6. Niech macierz $A = [a_{ij}]$ ma wymiary $m \times n$, a macierz $B = [b_{ij}]$ wymiary $n \times k$ Iloczynem macierzy A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ o wymiarach $m \times k$ której elementy określone są wzorem

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{kj} \quad \text{dla } i \in \{1, \dots, n\};\ j \in \{1, \dots, n\} \tag{2.4}$$

Mnożenie macierzy nie jest przemienne

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0+6+0 & 1+0+15+35 \\ 4+4+14+0 & 2+2+35+28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 51 \\ 22 & 67 \end{bmatrix}$$

Definicja 2.7. Macierzą transponowaną do macierzy $A = [a_{ij}]$ wymiaru $m \times n$ nazywamy macierz $B = A^T$ wymiaru $n \times m$, taką że element $b_{ij} = a_{ji}$

Własności transpozycji macierzy

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(\alpha A^T) = \alpha A^T$

2.2.2 Wyznaczniki

Definicja 2.8. Wyznacznikiem macierzy keadratowej nazywamy funkcje, która każdej macierzy $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ przypisuje liczbę $det. A = |A|$. Funkcja ta określona jest wzorem indukcyjnym

1. jeżeli A ma stopień (wymiar) $n = 1$, $A_{1\times 1}$ to $|A| = a_{11}$
2. jeżeli ma stopień $n \geqslant 1$, $A_{n\times n}$ to

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot |A_{11}| + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot |A_{12}| + \ldots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot |A_{1n}| \tag{2.5}$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz wymiaru $n-1$ otrzymaną z macierzy A poprzez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Reguła 2.1 (Reguła obliczania wyznacznika stopnia drugiego)**.**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \tag{2.6}$$

Reguła 2.2 (Metoda Sarrusa)**.** Gdy wyznacznik jest stopnia trzeciego, tj. n=3, do obliczenia wyznacznika często stosuje się tzw. Metodę Sarrusa. Polega ona na tym, że poniżej (lub obok) wyznacznika stopnia trzeciego dopisujemy jego pierwszy wiersz (kolumnę), pod nim drugi wiersz (kolumnę) a następnie tworzymy sześć iloczynów (po trzy czynniki w każdym), z których trzy. bierzemy nie zmieniając ich znaków, a w trzech pozostałych iloczynach zmieniamy ich znaki (patrz Fig.1), a następnie wszystkie sześć iloczynów sumujemy.

$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Fig. 1: Schemat metody Sarrusa

Definicja 2.9. Niech $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $n \geqslant 2$. Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} nazywamy liczbę $D_{ij} = (-1)^{i+j} det. A_{ij}$

Definicja 2.10 (rozwinięcie LaPlace'a wyznacznika)**.** Niech $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $n \geqslant 2$ oraz niech liczby i oraz j, gdzie $1 \leqslant i, j \leqslant n$ będą ustalone. Wtedy

1. $det.A = a_{i1} \cdot D_{i1} + a_{i2} \cdot .D_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot D_{in}$ rozwinięcie LaPlace'a względem i-tego wiersza
2. $det.A = a_{1j} \cdot D_{1j} + a_{2j} \cdot D_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot D_{nj}$ rozwinięcie LaPlace'a względem j-tej kolumny.

Najlepiej wybrać taki wiersz/kolumnę (i/j) w której jest jak najwięcej zer.

Własności wyznaczników
Wyznacznik macierzy kwadratowej:

1. mającej kolumny (wiersze) złożone z samych zer jest równy 0
2. zmieni znak jeśli przestawimy między sobą dwie kolumny (lub wiersze)
3. mającej dwie jednakowe kolumny (dwa jednakowe wiersze) jest równy 0
4. jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny (pewnego wiersza) zawierają wspólny czynnik to czynnik ten można wyłączyć przed wyznacznik tej macierzy.
$$\begin{vmatrix} a_{i1} & \ldots & c \cdot a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & c \cdot a_{nj} & \ldots & a_{nm} \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nm} \end{vmatrix}$$
5. nie zmieni się jeśli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) tej macierzy dodamy sumę odpowiadających im elementów innych wierszy (kolumn) tej macierzy pomnożonych przez dowolne liczby
6. i jej transpozycji są równe, czyli $|A| = |A^T|$

Definicja 2.11. Niech $A + [a_{ij}]_{n\times n}$. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz oznaczaną przez A^{-1}, która spełnia warunek $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, gdzie I_n jest macierzą jednostkową stopnia n

Definicja 2.12. Macierz kwadratową A nazywamy macierzą osobliwa gdy $|A| = 0$. W przeciwnym wypadku mówimy, że macierz jest nieosobliwa.

Twierdzenie 2.1. *Macierz kwadratowa A jest odwracalna wtedy, i tylko wtedy, gdy macierz A jest nieosobliwa. Jeżeli $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ jest nieosobliwa to*
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[D_{ij}]^T \tag{2.7}$$
gdzie $[D_{ij}]$ – macierz dopełnień algebraicznych

Reguła 2.3 (Bezwyznacznikowy algorytm znajdowania macierzy odwrotnej)**.**
$$[A \vdots I] \xrightarrow[\text{wierszowe}]{\text{elementarne operacje}} [I \vdots A^{-1}]$$

Przykład
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{W_1'=W_1-W_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&-1&0&0\\ 0&1&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{W_2'=W_2-W_3}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&-1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&-1&0\\ 0&0&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{W_3'=W_3-W_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&-1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&-1&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

Własności macierzy odwrotnej:

1. $det(A^{-1}) = (det\, A)^{-1} = \frac{1}{det\, A}$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. $(AB)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$
5. $(\alpha \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$
6. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

3. Układ równań liniowych

Układem równań liniowych z niewidomymi $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ nazywamy układ równań postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1j}x_j & + \cdots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + \cdots + & a_{ij}x_j & + \cdots + & a_{in}x_n = & b_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mj}x_j & + \cdots + & a_{mn}x_n = & b_m \end{cases},$$

Rozwiązaniem układu równań liniowym nazywamy ciąg $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ spełniających ten układ równań.

Układ równań można zapisać w postaci

$$AX = B \tag{3.1}$$

Gdzie:
A – Macierz główna
X – Macierz niewiadomych
B – Macierz wyrazów wolnych

Definicja 3.1. Układ równań liniowych postaci $AX = 0$ gdzie $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; $0 = [0_{ij}]_{m \times n}$ nazywamy układem jednorodnym Układ jednorodny ma zawsze jedno rozwiązanie

Definicja 3.2. Układ równań liniowych postaci $AX = B$ w którym macierz B jest macierzą niezerową nazywamy układem niejednorodnym

Definicja 3.3. Układem Cramera to układ równań liniowych $AX = B$ w którym A jest macierzą kwadratową nieosobliwą ($det\, A \neq 0$)

Twierdzenie 3.1. *Układ Cramera $AX = B$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to jest określone wzorem*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; gdzie\ x_1 = \frac{det\, A_1}{det\, A}; x_2 = \frac{det\, A_2}{det\, A}; \ldots; x_n = \frac{det\, A_n}{det\, A} \tag{3.2}$$

n oznacza stopień macierzy A Gdzie: $A_j, j \leqslant n$ oznacza macierz A w którje j-tą kolumnę zastąpiono kolumną wyrazów wolnych.

Przykład

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$$

Jest to układ Cramera

$$W_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix} = -46; \quad W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} = 23; \quad W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix} = -46$$

$$x_1 = \frac{-46}{-23} = 2; \quad x_2 = \frac{23}{-23} = -1; \quad x_3 = \frac{-46}{-23} = 2$$

Metoda 3.1 (Metoda macierzy odwrotnej)**.** Rozwiązanie układu Cramera $AX = B$ jest określone wzorem

$$X = A^{-1}B \tag{3.3}$$

Metoda 3.2. (Metoda eliminacji Gaussa) Niech AX = B będzie układem równań liniowych gdzie A jest macierzą wymiaru $m \times n$. Układ ten rozwiązujemy następująco

1. budujemy macierz rozszerzoną układu postaci

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

2. na macierzy rozszerzonej dokonujemy równoważnych przekształceń układu, są to

- zmiana między sobą wierszy: $w_i \leftrightarrow w_j$
- mnożenie wiersza przez stałą różną od zera: $w_i' = c \cdot w_i$
- dodanie do wszystkich wyrazów ustalonego wiersza odpowiadających im wyrazów innego wiersza pomnożonych przez stałą: $w_i' = w_i + c \cdot w_j$
- skreślenie wiersza złożonego z samych zer
- skreślenie jednego z wierszy równych lub proporcjonalnych
- zamiana miejscami dwóch kolumn przy jednoczesnej zamianie niewiadomych

Ostatecznie układ sprowadzamy do postaci

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_{1r+1} & & s_{1n} & z_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_{2r+1} & & s_{2n} & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_{rr+1} & & s_{sr} & z_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{r+1} \end{array}\right]$$

Przykład
Rozwiąż układ równań metodą eliminacji Gaussa

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10 \\ 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 10 \\ 5 & -4 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[W_3'=W_3-5W_2]{W_1'=W_1-W_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -6 \\ 1 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & -24 & -6 & -48 \end{array}\right] \xrightarrow{W_2'=W_2-W_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & 5 & 16 \\ 0 & -24 & -6 & -48 \end{array}\right] \xrightarrow[W_2'=W_2/5]{W_3'=W_3+5W_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & 19 & 32 \end{array}\right] \xrightarrow[W_3'=W_3-W_2]{W_1'=W_1+W_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -\frac{14}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 18 & \frac{144}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{W_3'=W_3/18} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -\frac{14}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{5} \end{array}\right] \xrightarrow[W_2'=W_2-W_3]{W_1'=W_1+2W_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{5} \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix} \Longrightarrow x_1 = \frac{2}{5};\ x_2 = \frac{8}{5};\ x_3 = \frac{8}{5}$$

Definicja 3.4 (Minor macierzy)**.** Niech A będzie dowowlną macierzą wymiaru $m \times n$ oraz niech $1 \leqslant k \leqslant min(m \times n)$. Minorem stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej która powstałą po skreśleniu $m - k$ wierszy oraz $n - k$ kolumn macierzy A

Definicja 3.5 (Rząd macierzy)**.** Rzędem macierzy nazywamy największy stopień jej niezerowego minora. Rzędem macierzy A oznaczany przez $rz\,A$. Przypisujemy, że rząd macierzy zerowej jest równy 0

Przykład
Znaleźć rząd podanej macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0; \qquad \text{Więc } rz\,A \leqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2; \qquad \text{Więc } rz\,A = 2$$

Twierdzenie 3.2 (Twierdzenie Kroneckera–Capellego)**.** *Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy, i tylko wtedy, gdy rząd macierzy A jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej $[A|B]$ tego układu*

$$rz\,[A|B] = rz\,A \tag{3.4}$$

Niech $AX = B$ będzie układem równań liniowych z n – niewiadomymi. Wówczas

1. Jeżeli $rz\,[A|B] \neq rz\,A$, to układ nie ma rozwiązań
2. Jeżeli $rz\,[A|B] = rz\,A = n$, to układ ma dokłądnie jedno rozwiąznie
3. Jeżeli $rz\,[A|B] \geqslant rz\,A = r < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.

4. Geometria analityczna w przestrzeni

Definicja 4.1. Przestrzenią $\mathbb{R}^3$ nazywamy zbiór wszystkich uporządkowanych trójek (x, y, z) liczb rzeczywistych

$$\mathbb{R}^3 = [(x, y, z) \colon x, y, z \in \mathbb{R}]$$

4.1 Wektory

Definicja 4.2. Wektorem zaczepionym nazywamy parę punktów AB. Jeżeli $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ to $\overrightarrow{AB} = [(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - x_A]$

Definicja 4.3. Niech $\vec{u} = [x, y, z], \vec{w} = [x_1, y_1, z_1], \vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$

1. suma wektorów $\vec{w}$ i $\vec{v}$ jest określona wzorem $\vec{u} = \vec{w} + \vec{v} = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2]$
2. różnica wektorów $\vec{w}$ i $\vec{v}$ jest określona wzorem $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2]$
3. iloczyn wektora $\vec{u}$ przez liczbę α określamy wzorem $\alpha\vec{u} = [\alpha x, \alpha y, \alpha z]$

Definicja 4.4. Układem współrzędnych w przestrzeni nazywamy trzy ustalone proste x, y, z przecinające się w jednym punkcie O, które są wzajemnie prostopadłe. Taki układ oznaczamy przez $OXYZ$. Proste OX, OY, OZ nazywany osiami. Płaszczyzny XOY, YOZ, XOZ płaszczyznami układu współrzędnych

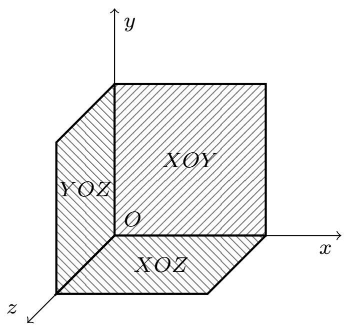


Fig. 2: Układ współrzędnych w przestrzeni

Definicja 4.5. W zależności od wzajemnego położenia osi OX, OY, OZ układu współrzędnych wymieniamy dwie jego orientacje, układ prawoskrętny i układ lewoskrętny

Definicja 4.6. Wektory $\vec{i} = [1, 0, 0]$, $\vec{j} = [0, 1, 0]$, $\vec{k} = [0, 0, 1]$ nazywamy wersorami odpowiednio na osiach OX, OY, OZ

Definicja 4.7. Długość wektora $\vec{u} = [x, y, z]$ jest określona wzorem

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{4.1}$$

Własności długości wektorów
Niech $\vec{u}$ i $\vec{v}$ będą wektorami w $\mathbb{R}^3$ oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$ Wtedy:

1. $|\vec{u}| \geqslant 0$
2. $|\vec{u}| = 0 \iff \vec{u} = 0$
3. $|\alpha\vec{u}| = |\alpha||\vec{u}|$
4. $|\vec{u} + \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| + |\vec{v}|$
5. $||\vec{u}| - |\vec{v}|| \leqslant |\vec{u} - \vec{v}|$

Definicja 4.8. Niech wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$. Kombinacją liniową tych wektorów nazywamy

$$\vec{v} = a \cdot \vec{v}_1 + b \cdot \vec{v}_2 + c \cdot \vec{v}_3$$

Definicja 4.9. Wektory $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \in \mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne gdy żaden z nich nie jest kombinacją liniową pozostałych

Twierdzenie 4.1. *W $\mathbb{R}^3$ możemy mieć maksymalnie trzy liniowo niezależne wektory*

Definicja 4.10. Niech $\vec{u}$ i $\vec{v}$ będą dowolnymi wektorami w $\mathbb{R}^3$. Iloczynem skalarnym wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ określamy wzorem

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle(\vec{u}; \vec{v}) \tag{4.2}$$

Twierdzenie 4.2. *Niech $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$, $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ będą wektorami w $\mathbb{R}^3$. Wtedy*

$$\vec{u} \circ \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \tag{4.3}$$

Własności iloczynu skalarnego
Niech $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}$ będą dowolnymi wektorami w $\mathbb{R}^3$ oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy

1. $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$
2. $(\alpha \vec{u}) \circ \vec{v} = \alpha(\vec{u} \circ \vec{v})$
3. $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2$
4. $(\vec{u} + \vec{w}) \circ \vec{v} = \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{w} \circ \vec{v}$
5. $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leqslant |\vec{v}| \circ |\vec{u}|$
6. wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe wtedy, i tylko wtedy, gdy $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$

Twierdzenie 4.3. *Niech $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$, $\vec{w} = [x_2, y_2, z_2]$, $\vec{v} = [x_3, y_3, z_3]$ będą wektorami w $\mathbb{R}^3$. Mówimy, że wektory $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}$ tworzą układ o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych, jeżeli*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} > 0$$

Definicja 4.11. Niech $\vec{u}$ i $\vec{v}$ będą niewspółliniowymi wektorami w $\mathbb{R}^3$. Iloczynem wektorowym uporządkowanej pary wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy wektor $\vec{w}$, który spełnia warunki

1. jest prostopadły do płaszczuzny rozpiętej na wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$
2. jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$, tj. równa
$$|\vec{u}||\vec{v}| \sin \angle(\vec{u}; \vec{v})$$
3. orientacja trójki wektorów jest zgodna z orientacją układu współrzędnych $OXYZ$

Iloczyn wektorowy pary wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ oznaczamy przez $\vec{u} \times \vec{v}$. Jeżeli wektory są współliniowe to przyjmujemy, że $\vec{u} \times \vec{v} = 0$

Twierdzenie 4.4. *Niech $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$, $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ będą wektorami w $\mathbb{R}^3$. Wtedy*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{4.4}$$

gdzie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ oznaczają wersory odpowiednio na osiach OX, OY, OZ

Własności iloczynu wektorowego
Niech $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}$ będą dowolnymi wektorami w $\mathbb{R}^3$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{u} \times \vec{v})$
2. $(\alpha\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \times \vec{v})$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
4. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
5. $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$
6. wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe wtedy, i tylko wtedy, gdy $\vec{u} \times \vec{v} = 0$

Twierdzenie 4.5. *Pola równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$ wyraża się wzorem*

$$S = |\vec{u} \times \vec{v}| \tag{4.5}$$

Definicja 4.12. Niech $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ będą wektorami w $\mathbb{R}^3$. Iloczynem mieszanym uporządkowanej trójki wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ określamy wzorem

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w} \tag{4.6}$$

Twierdzenie 4.6. *Iloczyn mieszany wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jest równy objętości równoległościanu V rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$*

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \tag{4.7}$$

Twierdzenie 4.7. *Jedna szósta iloczynu mieszanego wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jest równa objętości czworościanu V rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$*

$$V = \frac{1}{6}|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \tag{4.8}$$

4.2 Równania płaszczyzn

Definicja 4.13. Równanie płaszczyzny π w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ ma postać

$$\pi\colon A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{4.9}$$

Twierdzenie 4.8. *Równanie płaszczyzny π w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$,$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ ma postać*

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.10}$$

Definicja 4.14 (Równanie ogólne płaszczyzny)**.** Równanie płaszczyzny π w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ prostopadłej do wektora $\vec{v} = [A, B, C] \in \mathbb{R}^3$ ma postać

$$\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0 \tag{4.11}$$

Definicja 4.15 (Równanie parametryczne prostej)**.** Równanie prostej l w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ i równoległej do niezerowego wektora $\vec{v} = [a, b, c] \in \mathbb{R}^3$ ma postać

$$l\colon \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; \qquad \text{dla } t \in \mathbb{R} \tag{4.12}$$

Ten sposób zapisu równania prostej nazywamy jej równaniem parametrycznym

Definicja 4.16 (Równanie kierunkowe prostej)**.** Równanie prostej l w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ i wyznaczonej przez niezerowy wektor kierunku $\vec{v} = [a, b, c] \in \mathbb{R}^3$ ma postać

$$l\colon \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{4.13}$$

Ten sposób zapisu równania parametrycznego prostej nazywamy jej równaniem kierunkowym

Przykład
Napisz równanie parametryczne i kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $P = (-1; 0; 3)$ i równoległej do wektora $\vec{v} = [2; -1; 5]$

1. Równanie kierunkowe prostej

$$\frac{x+1}{2} = -\frac{y}{1} = \frac{z-3}{5}$$

2. Równanie parametryczne prostej

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

Definicja 4.17 (Równanie krawędziowe prostej)**.** Prostą l w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, która jest częścią wspólną dwóch nierównoległych płaszczyzn $\pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ oraz $\pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ zapisuje się w postaci

$$l\colon \begin{cases} \pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

Ten sposób zapisu równania prostej nazywamy jej równaniem krawędziowym

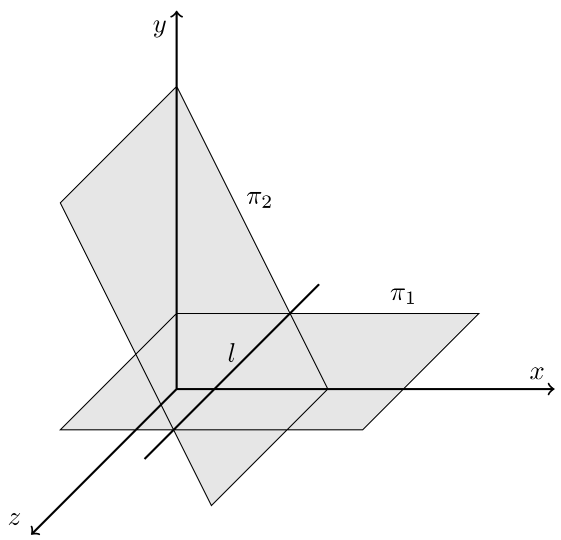


Fig. 3: Graficzna interpretacja równania krawędziowego prostej

Definicja 4.18. Wektor kierunkowy prostej opisanej równaniem

$$l\colon \begin{cases} \pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

ma postać

$$\vec{v} = [A_1; B_1; C_1] \times [A_2; B_2; C_2]$$

Twierdzenie 4.9. *Odległość punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi_1\colon Ax + By + Cz + D = 0$ wyraża się wzorem*

$$\delta(P_0; \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{4.15}$$

5. Funkcje wielu zmiennych

Definicja 5.1. Funkcją f, n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ określoną w zbiorze $X \subseteq \mathbb{R}^n$ o wartościach w zbiorze $\mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ dokładnie jednej liczby rzeczywistej $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji.

Funkcję taką oznaczmy $f\colon X \to \mathbb{R}$ lub $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

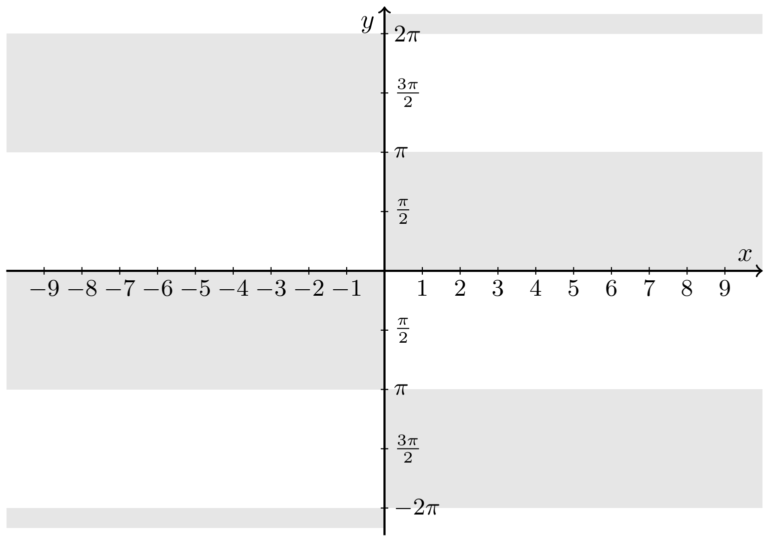
Definicja 5.2. Wykresem funkcji $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \tag{5.1}$$

Wykresem funkcji dwóch zmiennych może być w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ pewna powierzchnia wówczas równanie $z = f(x, y)$ nazywamy równaniem tej powierzchni

Pezykład
Wyznaczyć i narysować dziedzinę funkcji $f(x, y) = \sqrt{xsiny}$

$$xsiny \geqslant 0 \Longrightarrow \mathcal{D} = \begin{cases} x \geqslant 0 \\ siny \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \mathcal{D} = \begin{cases} x \leqslant 0 \\ siny \leqslant 0 \end{cases}$$

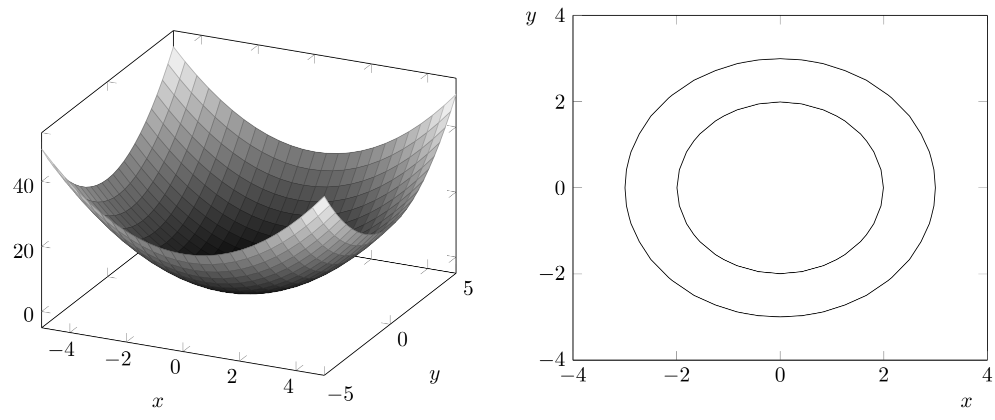


Definicja 5.3. Warstwicą (poziomicą) funkcji $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ odpowiadającej wartości c nazywamy podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^n$

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}\colon f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c\} \tag{5.2}$$

Przykład
Narysuj wykres funkcji f i na jego podstawie narysuj warstwicę.

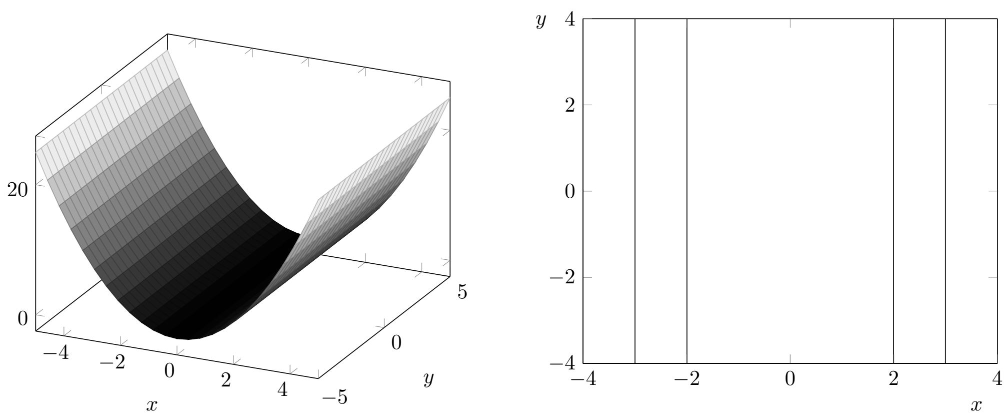
a) $f(x, y) = x^2 + y^2$
   Dla $c = 0$ $\quad (0, 0)$
   Dla $c > 0$ $\quad x^2 + y^2 = \sqrt{c}$ czyli okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $\sqrt{c}$ (patrz fig,4(b))



(a) (b)

Fig. 4: Wykres funkcji $f(x,y) = x^2 + y^2$ (a) i poziomice funkcji $f(x,y) = x^2 + y^2$ dla $c_1 = 4$ i $c_2 = 9$ (b)

b) $f(x,y) = x^2$



(a) (b)

Fig. 5: Wykres funkcji $f(x,y) = x^2$ (a) i poziomice funkcji $f(x,y) = x^2$ dla $c_1 = 4$ i $c_2 = 9$ (b)

Definicja 5.4. Otoczenie w $\mathbb{R}^3$ $U(P_0;r)$ punktu P_0 o promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów P, których odległość od punktu P_0 jest mniejsza od r wraz z punktem P_0. Inaczej zbiór ten nazywamy kulą o środku w punkcie P_0 i promieniu r

Definicja 5.5. Sąsiedztwo $S(P_0;r)$ punktu P_0 o promieniu $r > 0$ jest to zbiór wszystkich punktów P których odległość od punktu P_0 jest mniejsza od r bez punktu P_0.

5.1 Pochodne cząstkowe

Definicja 5.6 (Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego)**.** Niech funkcja f będzie określona w otoczeniu $U(P_0;r)$ punktu $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Niech $\Delta x_i \neq 0$ będzie przyrostem zmiennej x_i, a punkt P punktem przesuniętym o Δx_i względem punktu P_0.
Jeśli istnieje skończona granica

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\Delta x_i}$$

To nazywamy ją pochodną cząstkową rzędu pierwszego funkcji f względem zmiennej x_i w punkcie P_0 i oznaczamy symbolem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \quad \text{lub} \quad f'_{x_i}(P_0)$$

Przy obliczaniu f'_{x_1} pozostałe zmienne traktujemy jak stałe.

Przykład
Obliczyć pochodne z funkcji $f(x,y) = 2x^2 + xy^2$

Definicja 5.7 (Pochodne cząstkowe rzędu drugiego)**.** Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego pochodnych cząstkowych względem zmiennej x_i nazywamy pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego i oznaczamy symbolem

$$f''_{x_i x_j} = (f'_{x_i})'_{x_j}$$

lub

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Pochodne drugiego rzędu tej samej zmiennej co pochodne pierwszego rzędu nazywamy czystymi, pozostałe mieszanymi.

Definicja 5.8 (Pochodne cząstkowe wyższych rzędów)**.** Pochodną cząstkową rzędu pierwszego pochodnej cząstkowej rzędu n nazywamy pochodną cząstkową rzędu $n+1$

Definicja 5.9. Pochodną funkcji wielu zmiennych $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ w punkcie $P_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy wektor $\nabla f(P_0)$ zwany gradientem funkcji, którego współrzędne równe są kolejnym pochodnym cząstkowym funkcji f

$$\nabla f(P_0) = grad_f(P_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0); \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0); \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)\right] \tag{5.3}$$

5.2 Ekstrema funkcji wielu zmiennych

5.2.1 Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu P_0.

Definicja 5.10. Jeżeli istnieje sąsiedztwo S punktu P_0 takie że

$$\forall P \in S\; f(P) > f(P_0) \tag{5.4}$$

to funkcja ma w punkcie P_0 minimum właściwe

Definicja 5.11. Jeżeli istnieje sąsiedztwo S punktu P_0 takie że

$$\forall P \in S\; f(P) < f(P_0) \tag{5.5}$$

to funkcja ma w punkcie P_0 maksimum właściwe

Jeżeli zamiast nierówności mocnej zachodzi nierówność słaba funkcja f ma w P_0 minimum lub maksimum niewłaściwe.

Powiedzenie, że funkcja ma punkcie P_0 maksimum właściwe oznacza że P_0 jest punktem wewnętrznym dziedziny funkcji f i że istnieje sąsiedztwo punktu P_0 takie że we wszystkich punktach tego sąsiedztwa funkcja przybiera wartoście mniejsze niż w punkcie P_0

Przypadek szczególny $n = 2$.

Definicja 5.12 (Warunek konieczny istnienia ekstremum)**.** Jeśli funkcja f dwóch zmiennych ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie P_0 (zwanym punktem stacjonarnym) i ma w tym punkcie ekstremum to:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Inaczej ten warunek możemy zapisać

$$\nabla f(P_0) = [0, 0] \tag{5.7}$$

Definicja 5.13 (Warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji dwóch zmiennych)**.** Jeżeli funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego P_0 ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu oraz

$$H^1(P_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \end{vmatrix} > 0 \tag{5.8}$$

to funkcja f ma w punkcie P_0 ekstremum lokalne. Przy czym:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) < 0 \Longrightarrow \text{ jest to maksimum}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) > 0 \Longrightarrow \text{ jest to minimum}$$

A także:

$$H(P_0) < 0 \Longrightarrow \text{w } P_0 \text{ brak ekstremum}$$

$$H(P_0) = 0 \Longrightarrow ?$$

Przykład
Sprawdź czy funkcja ma ekstrema lokalne. Jeżeli tak wyznacz je. $z = (x-1)^2 - 2y^2$

1. Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4y$$

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ -4x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$P_0 = (1, 0)$ – punkt stacjonarny

2. Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4$$

$$H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 < 0 \Longrightarrow \text{Funkcja nie ma ekstremów lokalnych}$$

5.2.2 Ekstrema globalne funkcji wielu zmiennych

Twierdzenie 5.1 (Twierdzenie Weierstrassa)**.** *Funkcja ciągła na zbiorze zwartym (czyli domkniętym i ograniczonym) przyjmuje wartość najmniejszą i największą, czyli maksimum i minimum absolutne (globalne).*

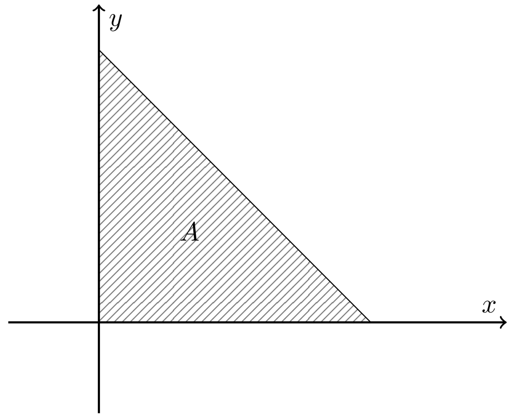
Metoda 5.1. Aby wyznaczyć wartość największą i najmniejszą funkcji f na zbiorze A należy

1. Znaleźć punkty stacjonarne leżące wewnątrz obszaru A
2. Znaleźć punkty stacjonarne na brzegach obszaru A
3. Obliczyć wartości funkcji w wyznaczonych punktach stacjonarnych i w tych, w których nie istnieje pochodna

[1] Hesjan

(4) Z wyznaczonych wartości wybrać wartość najmniejszą i największą

Przykład
Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y) = x^2y(2-x-y)$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}\colon x \geqslant 0; y \geqslant 0; x+y \leqslant 6\}$



(1) Wyznaczamy punkty stacjonarne w obszarze A

$$\begin{cases} f'_x = xy(4-3x-3y) = 0 \\ f'_y = x^2(2-x-2y) = 0 \end{cases} \quad ; \quad (x,y) \in int.A$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow P_0 = \left(1; \frac{1}{2}\right) \in A$$

(2) Wyznaczamy punkty stacjonarne na brzegach obszaru A

a)

$$y = 0; \quad x \in (0;6) \Longrightarrow f(x,0) = x^2 \cdot 0 \cdot (2-x-0) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow P_1 = (0,0)$$

b)

$$x = 0; \quad y \in (0;6) \Longrightarrow f(0,y) = 0 \cdot y \cdot (2-0-y) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow P_1 = (0,0)$$

c)

$$y = 6-x; \quad x \in (0;6)$$

$$f(x,6-x) = x^2(6-x)(2-x-6+x) = -4(6x^2-x^3) = 4x^3-24x^2$$

$$f'(x) = 12x^2 - 48x = 0$$

$$12x(x-4) = 0 \Longrightarrow x = 4 \wedge y = 2$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Longrightarrow P_2 = (4,2)$$

d)

$$P_3 = (6,0)$$

$$P_4 = (0,6)$$

(3) Badamy wartość funkcji w wyznaczonych wcześniej punktach

$$f\left(1;\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4};\quad f(4,2)=-128;\quad f(0;0)=0;\quad f(6;0)=0;\quad f(0;6)=0$$

(4) Wybieramy największą i najmniejszą wartość funkcji
M $= \frac{1}{4}$ dla $P_0 = \left(1;\frac{1}{2}\right)$
m $= -128$ dla $P_1 = (4;2)$

6. Równania różniczkowe zwyczajne

Równania różniczkowe należą do kategorii równań funkcyjnych, czyli takich, w których niewiadomą jest funkcja. O ich specyfice decyduje to, że oprócz niewidomej funkcji w równaniu występuje również pochodna (pochodne) tej funkcji.
Przymiotnik zwyczajne oznacza żę funkcja niewiadoma zależy od jednej zmiennej.
Równania różniczkowe w których występują funkcje wielu zmiennych noszą nazwę równań różniczkowych cząstkowych.

Definicja 6.1 (Równanie różniczkowe w postaci uwikłanej)**.** Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równianie

$$F(x;y;y';y'';\ldots;y^{(n)})=0 \tag{6.1}$$

w którym niewiadomą jest funkcja y zmiennej x i w którym występują pochodne tej funkcji. Równanie w takiej postaci nazywamy równaniem uwikłanym.

Definicja 6.2 (Równanie różniczkowe w postaci rozwikłanej)**.** Równanie (6.1) można rozwikłać względem najwyższej pochodnej otrzymując równanie w postaci rozwikłanej.

$$y^{(n)}=f(x,y',\ldots,y^{(n-1)}) \tag{6.2}$$

Definicja 6.3. Liczbę $n \geqslant 1$ nazywamy rzędem równania różniczkowego, jeżeli w równaniu tym występuje pochodna rzędu n i nie występują pochodne rzędu wyższego niż n.

Definicja 6.4. Rozwiązaniem szczególnym (całką szczególną) równania różniczkowego na przedziale $(a;b)$ nazywamy funkcję spełniającą to równanie w każdym puncie tego przedziału.

Przykład
Funkcja $y=xe^x$ jest rozwiązaniem szczególnym równania $y'+y=e^x$ na przedziale $(-\infty;\infty)$.

Definicja 6.5. Wykres rozwiązania szczególnego równania różniczkowego nazywamy krzywą całkową

Definicja 6.6 (Zagadnienie Cauchy'ego)**.** Zagadnieniem Cauchy'ego dla równania różniczkowego rzędu n nazywamy następujące zagadnienie:

> Znaleźć rozwiązanie szczególne równania $F(x;y;y';y'';\ldots;y^{(n)})=0$ spełniające warunki początkowe
>
> $$y(x_0)=y_0;y'(x_0)=y_1;\ldots;y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$
>
> gdzie liczby x_0 oraz $y_0,y_1,\ldots,y_{n-1}$ zwane wartościami początkowymi są dane.

W przypadku $n=1$ warunek początkowy ma postać

$$y(x_0)=y_0$$

Zagadnienie Cauchy'ego bywa nazywane zagadnieniem początkowym

Definicja 6.7. Jeżeli każdemu układowi n liczb $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ wybieranych dowolnie z pewnych przedziałów, jest przyporządkowana dokładnie jedna krzywa całkowa równania różniczkowego rzędu n, to mówimy, że jest określona rodzina krzywych całkowych tego równania zależna od parametrów $(C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Definicja 6.8. Rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną) równania różniczkowego rzędu n nazywamy rodzinę krzywych całkowych tego równania zależną od n parametrów $(C_1; C_2; \dots; C_n)$, których wartości można tak dobrać, aby otrzymać krzywą całkową spełniającą warunki początkowe

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_1;\ \dots\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{6.3}$$

dla każdego układu wartości początkowych $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$, dla których taka krzywa istnieje.

Uwagi:

- Istnieją równania różniczkowe nie posiadające rozwiązań np.

$$e^{y'} = 0$$

- Nie zawsze istnieje rozwiązanie szczególne równania spełniające konkretne warunki początkowe.
- Są równania mające wiele rozwiązań tego samego zagadnienia Cauchy'ego

Definicja 6.9 (Równanie rzędu pierwszego)**.** Zapis równania rzędu pierwszego

$$F(x; y; y') = 0 \tag{6.4}$$

nazywamy postacią ogólną (uwikłaną) równania, a zapis

$$y' = f(x, y) \tag{6.5}$$

nazywamy postacią rozwikłaną.

Twierdzenie 6.1 (Twierdzenie Peano[2])**.** *Jeżeli prawa strona równania różniczkowego*

$$y' = f(x; y)$$

jest funkcją ciągłą w obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$ to przez każdy punkt tego obszaru przechodzi co najmniej jedna krzywa całkowa tego równania (tzn. zagadnienie Cauchy'ego z warunkiem pczątkowym $y(x_0) = y_0$ gdzie $(x_0; y_0) \in D$ posiada rozwiązania)

Definicja 6.10 (Warunek Lipschitza)**.** Funkcja $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza na $\mathcal{D}$ wtedy, i tylko wtedy, gdy

$$\exists L > 0 \quad \forall x_1, x_1 \in \mathcal{D} \quad |f(x_1) - f(z_2)| \leqslant L|x_1 - x_2| \tag{6.6}$$

Mówimy wówczas, że funkcja spełnia warunek Lipschitza ze stałą L.

Twierdzenie 6.2 (Twierdzenie Picarda)**.** *Jeżeli prawa strona równania różniczkowego*

$$y' = f(x, y)$$

jest funkcją ciągłą w otoczeniu U punktu (x_0, y_0) i spełnia w nim warunek Lipschitza, to przez ten punkt przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa tego równania (tzn. zagadnienie Cauchy'ego z warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0$ gdzie $(x_0, y_0) \in D$ posiada lokalnie jednoznaczne rozwiązanie)

[2] Warunek konieczny istnienia rozwiązań

6.1 Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Definicja 6.11. Równaniem różniczkowym zmiennych rozdzielnych nazywamy równanie, które można przedstawić w postaci

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Twierdzenie 6.3. *Jeżeli f jest funkcji ciągłą na przedziale $(a; b)$, zaś g funkcją ciągłą i różną od zera na przedziale $(c; d)$ to:*

1. *Całka ogólna równania jest postaci*

   $$G(y) = F(x) + C$$

   gdzie G jest funkcją pierwotną funkcji g na przedziale $(c; d)$, a F funkcją pierwotną funkcji f na przedziale $(a; b)$.

2. $\forall x_0 \in (a; b) \ \wedge \ \forall y_0 \in (c; d)$ *zagadnienie Cauchy'ego*

   $$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

   ma dokładnie jedno rozwiązanie

Metoda 6.1. Metoda wyznaczania rozwiązania ogólnego równania o zmiennych rozdzielonych

(1) Zapisania równanie w postaci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

(2) Rozdzielenie zmiennych

$$g(y)dy = f(x)dx$$

(3) Obustronne scałkowanie równania

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

(4) Rozwiązanie ogólne równanie ma postać

$$G(y) = F(x) + C$$

gdzie G jest funkcją pierwotną funkcji g na przedziale $(c; d)$ zaś F funkcją pierwotną funkcji f na przedziale $(a; b)$.

Ostatnia równość zazwyczaj określa funkcję y w sposób uwikłany. Często zdarza się, że związku tego nie udaje się rozwikłać

Przykład

a) $y' = e^{-y} \cos x \quad y(0) = 0$

(1) Zapisanie równania w postaci równania o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y} \cos x$$

(2) Rozdzielenie zmiennych

$$e^y \, dy = \cos x \, dx$$

3 Scałkowanie obustronnie równania

$$\int e^y \, dy = \int \cos x \, dx$$

4 Rozwiązanie ogólne

$$e^y = \sin x + C$$

5 Rozwikłanie

$$y = \ln|\sin x + C|$$

$$y(0) = 0 \Longrightarrow 0 = \ln|\sin 0 + C|$$

$$C = 1 \Longrightarrow y = \ln|\sin x + 1|$$

b) Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} (2y^2+1)y' - 2xy. = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

1 Rozdzielenie zmiennych

$$(2y^2+1)\frac{dy}{dx} = 2xy \qquad \Big/ \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{2y^2+1}{y} \, dy = 2x \, dx$$

2 Scałkowanie obustronnie równania

$$\int \left(2y + \frac{1}{y}\right) dy = \int 2x \, dx$$

3 Rozwiązanie ogólne

$$y^2 + \ln|y| = x^2 + C$$

Podstawiając $x = 1$ i $y = 2$ otrzymujemy $C = 3 + \ln 2$, więc ostatecznie:

$$y^2 + \ln|y| = x^2 + 3 + \ln 2$$

c) Wyznacz krzywą całkową równania $y' = -\dfrac{x}{y}$ przechodzącą przez punkt $(1;1)$

Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $(a;b)$, spełniającą na nim warunek $f(u) \neq u$.

Definicja 6.12. Równaniem różniczkowym jednorodnym nazywamy równanie które można zapisać w postaci

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Metoda 6.2. Metoda rozwiązania równania różniczkowego jednorodnego za pomocą podstawienia i sprowadzenia do równania o zmiennych rozdzielonych

1 Podstawienie

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

2 Różniczkowanie

$$y(x) = u(x) \cdot x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = u(x) + \frac{du(x)}{dx}x$$

③ Wstawienie do równania

$$u(x) + \frac{du(x)}{dx}x = f(u(x))$$

④ Rozdzielenie zmiennych

$$\frac{du(x)}{f(x) - u(x)} = \frac{dx}{x}$$

⑤ Rozwiązanie równania korzystając z Metody 6.1

⑥ Powrót do wyjściowej funkcji y

Uwaga Jeżeli warunek $f(u) \neq u$ nie jest spełniony należy dodatkowo rozważyć równanie $f(u) = u$

Przykład
Rozwiąż równanie $y' = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{y}{x}}$

① Podstawienie

$$u = \frac{y}{x}$$

② Różniczkowanie

$$y = ux \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x$$

③ Wstawienie do równania

$$u + \frac{du}{dx}x = u - \sqrt{u}$$

④ Rozdzielenie zmiennych

$$\frac{du}{dx}x = -\sqrt{u} \Longrightarrow \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{dx}{x}$$

⑤ Scałkowanie obustronnie równania

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = -\int \frac{1}{x}\, dx$$

⑥ Rozwiązanie ogólne ma postać

$$2\sqrt{u} = -\ln|x| + C$$

⑦ Powrót do wyjściowej funkcji y

$$u = \frac{1}{4}(C - \ln|x|)^2$$

$$y = -\frac{x}{4}(\ln|x| - C)^2$$

Dla $f(u) = u$ $\sqrt{u} = 0$, więc istnieje drugie rozwiązanie: $y = 0$

Metoda 6.3. Do równania o zmiennych rozdzielonych można też sprowadzić równanie typu

$$y' = f(ax + by + c) \tag{6.7}$$

gdzie f jest funkcją ciągłą, a, b, c stałymi $a \neq 0$, $b \neq 0$

(1) Podstawienie

$$u = ax + by + c$$

Wówczas:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{b}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - a\right) = f(u)$$

(2) Rozdzielenie zmiennych

$$\frac{\mathrm{d}u}{a + b\,f(u)} = \mathrm{d}x$$

Gdy $a = 0$, lub $b = 0$ równanie jest równaniem o zmiennych rozdzielonych.
Przypadek $a + b\,f(u) = 0$ należy sprawdzić oddzielnie.

6.2 Równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

6.2.1 Równania różniczkowe liniowe jednorodne rzędu pierwszego

Definicja 6.13. Równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{6.8}$$

gdzie $p(x)$ i $f(x)$ są funkcjami ciągłymi na przedziale $(a; b)$. Przedział $(a; b)$ może być skończony lub nieskończony

Definicja 6.14. Równanie różniczkowe liniowe rzędu pierwszego nazywamy jednorodnym (RJ), jeżeli $f(x) \equiv 0$ na rozważanym przedziale tzn.

$$y' + p(x)y = 0 \tag{6.9}$$

Równanie różniczkowe liniowe rzędy pierwszego nazywamy niejednorodnym (RN) jeżeli funkcja f nie jest tożsamościowo równa zeru na rozważanym przedziale tzn.

$$y' + p(x)y = f(x) \neq 0 \tag{6.10}$$

Metoda 6.4. Równania postaci

$$y' + p(x)y = 0$$

Są spełniane przez funkcję $y(x) = 0$.
Jeżeli $y(x) \neq 0$, to mamy równania o zmiennych rozdzielonych.
Rozwiązanie takiego równania ma postać

$$y = Ce^{-P(x)}; \qquad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{6.11}$$

Uwaga: Dla $C = 0$ powyższy wzór obejmuje również rozwiązanie $y(x) \equiv 0$

Twierdzenie 6.4. *Jeżeli funkcja $p(x)$ jest funkcją ciągłą na przedziale $(a; b)$ to:*

1. *Całka ogólna równania jednorodnego (CORJ) jest postaci*

   $$y = Ce^{-P(x)}$$

   gdzie funkcja P jest funkcją pierwotną funkcji p na przedziale $(a; b)$

2. *Dla każdego $x_0 \in (a; b)$ i $y_0 \in (-\infty, \infty)$ zagadnienie Cauchy'ego*

   $$\begin{cases} y' + p(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

   ma dokładnie jedno rozwiązanie

6.2.2 Równania różniczkowe liniowe niejednorodne rzędu pierwszego

Będziemy rozważać równanie różniczkowe liniowe rzędu pierwszego postaci

$$y' + p(x)y = f(x)$$

gdzie $p(x)$ i $f(x)$ są funkcjami ciągłymi na przedziale $(a; b)$ i funkcji f nie jest tożsamościowa równa zeru na rozważanym przedziale. Nazywamy je wówczas równaniem niejednorodnym.

Rozwiązywanie równania niejednorodnego jest realizowane w dwóch etapach

1. W pierwszym rozwiązujemy odpowiadające mu równanie jednorodne. Stosujemy w tym celu metodę rozdzielania zmiennych, bądź korzystamy z wzoru określającego całkę ogólną równania liniowego jednorodnego
2. w etapie dugim stosujemy **metodę uzmiennienia stałej** lub **metodę przewidywań**

Metoda 6.5 (Metoda uzmienniania stałej)**.** W metodzie tej opieramy się na całce ogólnej równania jednorodnego, która ma zawsze postać

$$y = Ce^{-P(x)}$$

gdzie $P(x)$ jest ustaloną funkcją pierwotną funkcji $p(x)$

Całka ogólna równania niejednorodnego (CORN) wyraża się podobnym wzorem z tą różnicą że zamiast stałej C występuje w nim pewna funkcja zmiennej x. Aby ją znaleźć zastępujemy stałą C nieznaną funkcją którą oznaczamy $C(x)$ (nazywamy to uzmiennieniem stałej) a następnie staramy się dobrać ją tak by wzór

$$y = C(x)e^{-P(x)} \tag{6.12}$$

definiował rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego

1 Różniczkowanie równości (6.12)

$$y' = C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)}$$

2 Podstawienie do RN

$$C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)} + C(x)p(x)e^{-P(x)} = f(x)$$

3 Redukujemy wyrazy podobne

$$C'(x)e^{-P(x)} - \cancel{C(x)p(x)e^{-P(x)}} + \cancel{C(x)p(x)e^{-P(x)}} = f(x)$$

4 Całkowanie funkcji $C'(x)$

$$C(x) = \int C'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)e^{P(x)}\mathrm{d}x = \Phi(x) + C_1$$

gdzie Φ jest dowolną ustaloną funkcją pierwotną funkcji $f(x)e^{P(x)}$.

Ostatecznie całka ogólna równania niejednorodnego ma postać

$$y(x) = (\Phi(x) + C_1)e^{-P(x)} \tag{6.13}$$

Twierdzenie 6.5. *Jeżeli p i f są funkcjami ciągłymi na przedziale $(a; b)$ to:*

1. *CORN jest postaci*
$$y(x) = (\Phi(x) + C_1)e^{-P(x)} \tag{6.14}$$
gdzie P jest funkcją pierwotną funkcji p na przedziale $(a; b)$, zaś Φ jest ustaloną funkcją pierwotną funkcji $f(x)e^{-P(x)}$

2. Dla każdego $x_0 \in (a;b)$ i $y_0 = (-\infty;\infty)$ zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' + p(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.15}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie

Metoda 6.6 (Metoda przewidywań)**.** Metoda przewidywań całkowania równania niejednorodnego

$$y' + p(x)y = f(x)$$

opiera się na następującym twierdzeniu

Twierdzenie 6.6. *Suma całki ogólnej równania jednorodnego i jakiejkolwiek całki szczególnej równania niejednorodnego jest całką ogólną równania niejednorodnego*

$$\mathrm{CORN} = \mathrm{CORJ} + \mathrm{CSRN}$$

W metodzie tej CORJ wyznaczamy tak jak poprzednio, zaś postać CSRN „odgadujemy" bazując na doświadczeniach zdobytych przy całkowaniu pewnych klas równań.

Przewidywanie postaci CSRN jest stosunkowo proste jeżeli:

- funkcja $p(x)$ występująca w równaniu jest stałą
- równocześnie funkcja f(x) jest:
  - wielomianem
  - sumą funkcji $\alpha \sin \omega x + \beta \cos \omega x$
  - funkcją typu ae^{bx}, gdy $b \neq -p$
  - sumą, lub iloczynem funkcji trzech wyżej wymienionych typów

f(x)	**Przewidywana postać CSRN**
Wielomian stopnia n	ogólna postać wielomianu stopnia n
ae^{bx}	Ae^{bx} gdy $b \neq -p$ Axe^{bx} gdy $b = -p$
$\alpha \sin \omega x + \beta \cos \omega x$	$A \sin \omega x + B \cos \omega x$
Suma lub iloczyn powyższych funkcji	Suma lub iloczyn powyższych funkcji

W przeciwieństwie do metody uzmienniania stałej metoda przewidywań nie jest metodą uniwersalną

Przykład
Stosując metodę przewidywań, znaleźć całkę ogólną równania

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4y = x^3$$

Na podstawie twierdzenia 6.4 CORJ

$$y = Ce^{-4x}$$

Wyznaczanie CSRN metodą przewidywań

$$f(x) = x^3 \Longrightarrow y_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$y_1' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

Wstawienie do równania

$$3Ax^2 + 2Bx + C + 4\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) = x^3$$

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 3A + 4B = 0 \\ 2B + 4C = 0 \\ C + 4D = 0 \end{cases} \Longrightarrow A = \frac{1}{4}; \quad B = -\frac{3}{16}; \quad C = \frac{3}{32}; \quad D = -\frac{3}{128}$$

Więc CSRN wynosi

$$y_1 = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{32}x - \frac{3}{128}$$

Zatem szukanym rozwiązaniem równania jest

$$y = Ce^{-4x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{32}x - \frac{3}{128}$$

Twierdzenie 6.7. *Sumą całki szczególnej równania*

$$y' + p(x)y = f_1(x)$$

i całki szczególnej równania

$$y' + p(x)y = f_2(x)$$

jest całką szczególną równania

$$y' + p(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

Twierdzenie to stosujemy, gdy funkcje f_1 i f_2 są różnych typów. Niezależne wyznaczanie całek szczególnych dla każdego z równań jest bowiem prostsze rachunkowo.

6.3 Równania różniczkowe Bernoulliego

Definicja 6.15. Równanie różniczkowe

$$y' + p(x)y = q(x)y^r \tag{6.16}$$

gdzie $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ nazywamy równaniem różniczkowym Bernoulliego. Dla $r = 1$ lub $r = 0$ to równanie jest równaniem liniowym jednorodnym lub równaniem liniowym niejednorodnym.
Dla $r > 1$, $y \equiv 0$ jest rozwiązaniem równania

Metoda 6.7 (Metoda rozwiązania równania różniczkowego Bernoulliego)**.** Równanie różniczkowe Bernoulliego można rozwiązać za pomocą podstawienia, które sprowadza je do równania liniowego.

$$z = y^{1-r} \tag{6.17}$$

1 Różniczkowanie

$$z' = (1 - r)y^{-r} \cdot y'$$

2 Pomnożenie równania (6.17) obustronnie przez $(1 - r)y^{-r}$

$$(1 - r)y^{-r} \cdot y' + (1 - r)p(x)y^{1-r} = (1 - r)q(x)$$

$$z' + (1 - r)p(x)z = (1 - r)q(x)$$

Przykład
Rozwiązać równanie $y' - 2xy = 2x^3y^2$

$$y' - 2xy = 2x^3y^2 \;/ : y^2 \qquad \text{dla } y \neq 0$$
$$y^{-2} \cdot y' - 2xy^{-1} = 2x^3$$

Podstawiając $z = y^{-1}$ dostajemy równanie liniowe

$$z' + 2xz = -2x^3$$

Rozwiązujemy równanie jednorodne

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = -2x\mathrm{d}x \Longrightarrow \int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int -2x\,\mathrm{d}x$$
$$z = Ce^{-x^2} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Uzmienniamy stałą

$$z = C(x)e^{-x^2}; \quad z' = C'(x)e^{-x^2} - C(x)2xe^{-x^2}$$
$$C'(x)e^{-x^2} - \cancel{C(x)2xe^{-x^2}} + \cancel{C(x)2xe^{-x^2}} = -2x^3$$
$$C'(x) = -2x^3e^{x^2} \Longrightarrow C(x) = -e^{x^2}(x^2 - 1) + C_1 \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

Podstawiamy C(x) z powrotem do równania

$$z = C_1e^{-x^2} - x^2 + 1$$

Wracamy do funkcji y

$$y = \frac{1}{C_1e^{-x^2} - x^2 + 1} \qquad \text{Spełnione także dla } y = 0$$

6.4 Równania rzędu drugiego sprowadzalne do równań rzędu pierwszego

Definicja 6.16. Równania różniczkowe rzędu drugiego postaci

$$F(x, y', y'') = 0 \tag{6.18}$$

(y nie występuje w nich w sposób jawny) można sprowadzić do równania pierwszego rzędy przez podstawienie

$$y' = u(x)$$

Definicja 6.17. Równanie różniczkowe drugiego rzędu postaci

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{6.19}$$

(x nie występuje w nich w sposób jawny) można sprowadzić za pomocą podstawienia

$$y' = u(y)$$

do równania

$$F\left(y, u, u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right) = 0$$

6.5 Równania różniczkowe liniowe rzędu II

Definicja 6.18. Równaniem różniczkowym liniowym rzędu drugiego nazywamy równanie postaci

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{6.20}$$

przy czym dla $f(x) \equiv 0$ nazywamy je równaniem jednorodnym, a dla $f(x) \not\equiv 0$ niejednorodnym

Twierdzenie 6.8. *Jeżeli funkcje $p,\ q,\ f$ są ciągłe na przedziale (a,b), $x_0 \in (a,b)$ oraz $y_0,\ y_1 \in \mathbb{R}$ to zagadnienie Cauchy'ego*

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{6.21}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie na przedziale (a,b)

6.5.1 Równania różniczkowe liniowe jednorodne rzędu drugiego

Definicja 6.19. Równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{6.22}$$

Twierdzenie 6.9. *Jeżeli funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są całkami szczególnymi równania liniowego jednorodnego to kombinacja liniowa tych funkcji*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

jest rozwiązaniem tego równania

Definicja 6.20. Funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są liniowo niezależne na przedziale (a,b) jeżeli

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0 \Longleftrightarrow C_1 = C_2 = 0 \tag{6.23}$$

Twierdzenie 6.10. *Funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ klasy $C^1(a,b)$ są liniowo niezależnie wtedy, i tylko wtedy, gdy wyznacznik Wrońskiego (wrońskian)*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0; \quad \textit{dla } x \in (a;b)$$

Definicja 6.21. Liniowo niezależnie rozwiązanie równania liniowego jednorodnego nazywamy układem fundamentalnym (podstawowym) tego równania

Twierdzenie 6.11. *Jeżeli funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ tworzą fundamentalny układ rozwiązań to*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

jest całką ogólną równania jednorodnego

Uwaga

- Nie istnieje ogólna metoda wyznaczania układu fundamentalnego rozwiązań dla dowolnego równania różniczkowego liniowego jednorodnego drugiego rzędu
- Układ fundamentalny rozwiązań można zawsze wyznaczyć w przypadku równań o stałych współczynnikach

6.5.2 Równania różniczkowe liniowe jednorodne drugiego rzędu o stałych współczynnikach

Definicja 6.22. Równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym drugiego rzędu o stałych współczynnikach nazywamy równanie postaci

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{6.24}$$

gdzie $p,\ q \in \mathbb{R}$

Rozwiązań tego równania poszukuje się w postaci funkcji

$$y = e^{rx}; \quad y' = re^{rx}; \quad y'' = r^2 e^{rx}$$

Po wstawieniu tych funkcji do równania i obustronnego podzielenia go przez e^{rx}

$$r^2 + pr + q = 0$$

Jest to tzw. równanie charakterystyczne.

Twierdzenie 6.12. *Jeżeli r jest pierwiastkiem równania charakterystycznego to funkcja $y = e^{rx}$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego liniowego jednorodnego drugiego rzędu o stałych współczynnikach.*

Wyznaczanie układu fundamentalnego rozwiązań

- Jeżeli równanie charakterystyczne ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste r_1 i r_2 ($\Delta > 0$) to układ fundamentalny tworzą funkcje

  $$y_1(x) = e^{r_1 x}; \quad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

  a całka ogólna równania jednorodnego ma postać

  $$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

- Jeżeli równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek rzeczywisty r ($\Delta = 0$) to układ fundamentalny tworzą funkcje

  $$y_1(x) = e^{rx}; \quad y_2(x) = xe^{rx}$$

  a całka ogólna równania jednorodnego ma postać

  $$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

- Jeżeli równanie charakterystyczne ma dwa pierwiastki zespolone $r_1 = \alpha + \beta 1$ oraz $r_2 = \alpha - \beta 1$ ($\Delta < 0$) to układ fundamentalny tworzą funkcje

  $$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x; \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

  a całka ogólna równania jednorodnego ma postać

  $$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Liczby Zespolone

Liczbę postaci

$$z = a + bi \tag{6.25}$$

przy czym $a,\ b \in \mathbb{R}$
nazywamy liczą zespoloną

a	–	część rzeczywista liczby zespolonej
b	–	część urojona
i	–	jednostka urojona $i^2 = -1$

6.5.3 Równania różniczkowe liniowe niejednorodne drugiego rzędu o stałych współczynnikach

Metoda 6.8 (Metoda przewidywań dla równania liniowego niejednorodnego drugiego rzędu)**.** Metodę przewidywań można stosować w wypadku równań o stałych współczynnikach, gdy wyraz wolny ma jedną z postaci przedstawionych w kolumnie 2 tabeli 1
Całkę ogólną równania niejednorodnego (CORN) wyznacza się korzystając z zależności

$$CORN = CORJ + CSRN$$

Podobnie jak w wypadku równań różniczkowych rzędu pierwszego prawdziwe jest twierdzenie

Twierdzenie 6.13. *Suma całki szczególnej równania*

$$y' + p(x)y = f_1(x)$$

i całki szczególnej równania

$$y' + p(x)y = f_2(x)t$$

jest całką szczególną równania

$$y' + p(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

Table 1: Przewidywana postać CSRN dla równania liniowego niejednorodnego o stałych współczynnikach

Lp.		Prawa strona równania ($f(x)$)	Równanie charakterystyczne	Przewidywana postać CSNR
1	a	$P_n(x)$ wielomian stopnia n	Liczna 0 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego	$W_n(x)$ – ogólna postać wielomianu stopnia n
	b		Liczba 0 jest m-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego	$x^m W_n(x)$
2	a	$P_n(x)e^{kx}; \quad k \in \mathbb{R}$	Liczba k nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego	$W_n(x)e^{kx}$
	b		Liczba k jest m-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego	$x^m W_n(x)e^{kx}$
3	a	$P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$	Liczba $\pm\beta i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego	$W_n(x)\cos\beta x + V_n(x)\sin\beta x$
	b		Liczba $\pm\beta i$ jest m-krotnym pierwiastekiem równania charakterystycznego	$x^m(W_n(x)\cos\beta x + V_n(x)\sin\beta x)$
4	a	$P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$	Liczba $\alpha \pm \beta i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego	$W_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$
	b		Liczba $\alpha \pm \beta i$ jest m-krotnym pierwiastekiem równania charakterystycznego	$x^m(W_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x)$

Metoda 6.9 (Metoda uzmienniania stałych dla równania liniowego niejednorodnego rzędu drugiego)**.** Podobnie jak w wypadku równania pierwszego rzędu należy uzmiennić stałe w CORJ

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

$$y'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

Po przekształceniu otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \tag{6.26}$$

z którego można wyznaczyć $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$. Po scałkowaniu i postawieniu wyznaczonych funkcji do równania otrzymujemy CORN