

METODY OBliczeniowe w NAUce i TECHNICE

Laboratorium 7 | Znajdowanie pierwiastków funkcji metodami stycznych i siecznych

Jakub Kaliński

9 maja 2025

1 Treść i przebieg zadania

1.1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było zaimplementowanie i przetestowanie dwóch fundamentalnych metod numerycznych służących do znalezienia pierwiastków równań nieliniowych postaci $f(x) = 0$: **metody Newtona (stycznych)** oraz **metody siecznych**. Głównym zadaniem była analiza efektywności i dokładności tych metod w zależności od wyboru punktu (lub punktów) startowych, wymaganej precyzji obliczeń ρ , oraz zastosowanego kryterium zakończenia iteracji. Porównano liczbę iteracji potrzebnych do osiągnięcia zbieżności oraz błąd znalezionej pierwiastka względem wartości referencyjnych.

1.2 Zadana funkcja i przedział

Analizie poddano funkcję (zgodnie z przydziałem, funkcja d z listy w poleceniu):

$$f(x) = x^{14} + x^{13}$$

Parametry funkcji oraz przedział, w którym poszukiwano pierwiastków, zostały zdefiniowane następująco:

- Parametr $N = 14.0$
- Parametr $M = 13.0$
- Przedział analizy: $x \in [a, b]$, gdzie $a = -1.4$ oraz $b = 0.6$.

Podstawiając wartości parametrów, otrzymujemy konkretną postać funkcji:

$$f(x) = x^{14} + x^{13} = x^{13}(x + 1) \quad (1)$$

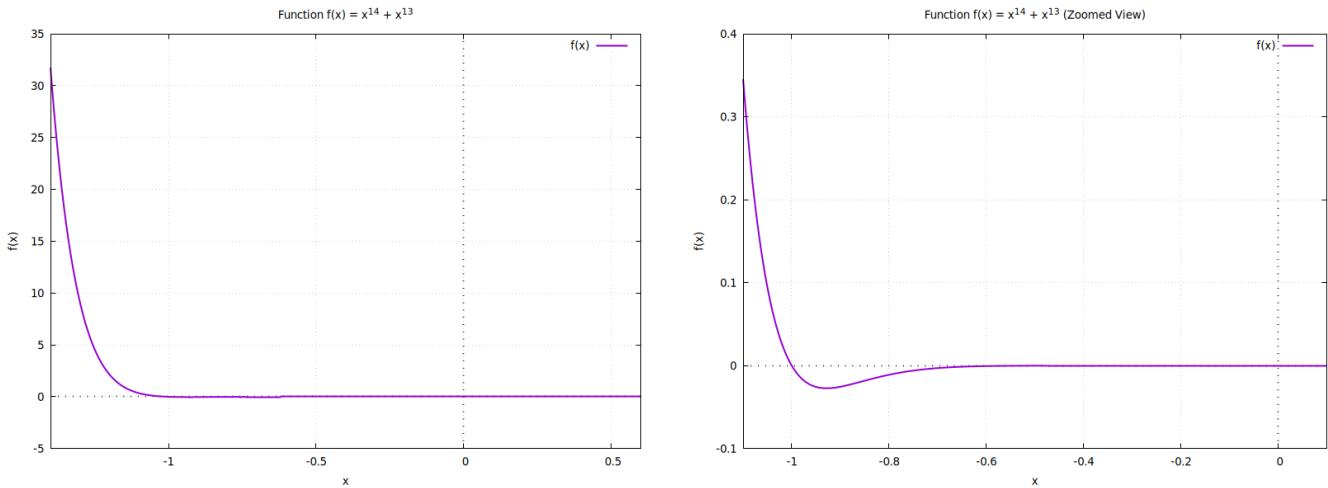
Funkcja ta posiada dwa rzeczywiste pierwiastki: $x_1 = -1$ (pierwiastek jednokrotny) oraz $x_2 = 0$ (pierwiastek 13-krotny). Pierwsza pochodna funkcji, niezbędna dla metody Newtona, jest dana wzorem:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{14} + x^{13}) = 14x^{13} + 13x^{12} = x^{12}(14x + 13)$$

Pochodna $f'(x)$ zeruje się dla $x = 0$ oraz dla $x = -13/14 \approx -0.92857$. Punkty, w których pochodna jest bliska零 lub równa zero, mogą stanowić wyzwanie dla metody Newtona. Wartości stałych N, M, a, b zostały zaimplementowane jako globalne stałe w pliku `function.c`, co zapewnia ich spójność w całym projekcie.

1.2.1 Wykres funkcji

Poniżej przedstawiono wykresy analizowanej funkcji $f(x)$ na zadanym przedziale oraz w przybliżeniu wokół pierwiastków.



(a) Wykres funkcji $f(x) = x^{14} + x^{13}$ na przedziale $[-1.4, 0.6]$.

(b) Wykres funkcji $f(x)$ w przybliżeniu (zoom).

Rysunek 1: Wizualizacja funkcji $f(x)$.

1.3 Przebieg ćwiczenia

Realizacja zadania laboratoryjnego przebiegała w kilku etapach, obejmujących implementację algorytmów w języku C oraz analizę i wizualizację wyników przy użyciu skryptów Python i programu Gnuplot:

1. Implementacja modułów obliczeniowych (C):

- `function.c`: Zawiera implementację funkcji $f(x)$ oraz jej pierwszej pochodnej $f'(x)$.
- `root_finding.c`: Implementacja algorytmów metody Newtona i metody siecznych, wraz z logiką obsługi różnych kryteriów stopu i detekcją problemów numerycznych (np. dzielenie przez zero, stagnacja).
- `fileio.c`: Moduł odpowiedzialny za operacje wejścia/wyjścia, w tym zapis wyników do pliku CSV oraz generowanie skryptów dla programu Gnuplot.
- `main.c`: Główny program sterujący, który inicjuje eksperymenty numeryczne, iteruje po parametrach (punkty startowe, precyzyje ρ , kryteria stopu) i wywołuje odpowiednie metody obliczeniowe.
- Pliki nagłówkowe (`include/*.h`): Definiują interfejsy modułów, wspólne struktury danych (np. `RootResult`) i stałe.

2. Konfiguracja eksperymentów numerycznych (C - `main.c`):

Przeprowadzono systematyczne testy dla obu metod:

- **Metoda Newtona:** Jako punkty startowe x_0 wybrane wartości z przedziału $[a, b] = [-1.4, 0.6]$, iterując od a do b z ustalonym krokiem 0.1.
- **Metoda Siecznych:** Zgodnie z poleceniem, badano dwa scenariusze wyboru punktów startowych:
 - Pierwszy punkt startowy x_0 ustalony jako jeden z końców przedziału (a lub b). Drugi punkt startowy x_1 iterowany przez pozostałą część przedziału z krokiem 0.1. W implementacji:
 - $x_0 = a = -1.4$ (stały), x_1 iterowany od $a + 0.1 = -1.3$ do $b = 0.6$.
 - $x_0 = b = 0.6$ (stały), x_1 iterowany od $a = -1.4$ do $b - 0.1 = 0.5$.

Pominięto przypadki, gdzie $x_0 = x_1$, aby uniknąć dzielenia przez zero we wzorze metody siecznych.

Dla każdej kombinacji metody i punktów startowych, obliczenia przeprowadzono dla siedmiu różnych wartości precyzyji ρ : $\{10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-7}, 10^{-10}, 10^{-15}\}$.

3. **Zastosowane kryteria stopu (C - root_finding.c):** W tej analizie skupiono się na dwóch podstawowych kryteriach zatrzymania algorytmów iteracyjnych:

- (a) Warunek na przyrost: $|x^{(i+1)} - x^{(i)}| < \rho$ (w implementacji nazwany Stop_dX).
- (b) Warunek na rezyduum: $|f(x^{(i+1)})| < \rho$ (w implementacji nazwany Stop_fx). Wartość funkcji jest sprawdzana dla nowego przybliżenia $x^{(i+1)}$.

Maksymalna dopuszczalna liczba iteracji została globalnie zdefiniowana jako MAX_ITERATIONS = 1000 w pliku common.h.

4. **Gromadzenie i zapis wyników (C - fileio.c):** Dla każdego pojedynczego uruchomienia metody numerycznej (kombinacja metody, punktów startowych, precyzyj ρ i kryterium stopu), zapisywano następujące informacje do pliku w formacie CSV (data/root_finding_results.csv):

- Nazwa metody (Newton/Secant).
- Nazwa użytego kryterium stopu (Stop_dX/Stop_fx).
- Punkt(y) startowe (x_0 dla Newtona; x_0, x_1 dla siecznych).
- Użyta precyzaja ρ .
- Wyznaczone przybliżenie pierwiastka.
- Liczba wykonanych iteracji.
- Wartość końcowa błędu, który spowodował zatrzymanie (wartość kryterium stopu).
- Status zakończenia algorytmu (0 - sukces, 1 - osiągnięto max iteracji, 2 - błąd numeryczny/stagnacja).

5. **Generowanie skryptów Gnuplot (C - fileio.c):** Program w C automatycznie generował skrypty dla Gnuplot (scripts/plot_function.gp oraz scripts/plot_function_zoomed.gp) służące do wizualizacji funkcji $f(x)$ na zadanym przedziale oraz w przybliżeniu wokół jej pierwiastków. Dodatkowo, generowany był plik danych data/function_data.dat z punktami $(x, f(x))$ dla Gnuplota.

6. Wizualizacja i analiza końcowa (Python + Gnuplot):

- Skrypt **Python** (plot_results.py) został użyty do przetworzenia danych z pliku CSV. Generował on:
 - **Tabele zbiorcze** z wynikami (znalezione pierwiastki, liczby iteracji) w formacie tekstowym (tables/*.txt) oraz w formacie LaTeX zapisane do plików tekstowych (tables_latex_format/*.txt).
 - **Mapy ciepła (heatmaps)** ilustrujące zależność liczby iteracji oraz błędu bezwzględnego znalezionej pierwiastki od punktów startowych i precyzyji ρ . Błąd pierwiastka był obliczany jako $\min(|root - 0.0|, |root - (-1.0)|)$. Heatmaps zapisywano do katalogu plots/.
- Program **Gnuplot** był uruchamiany (ręcznie lub przez Makefile) w celu wygenerowania wykresów funkcji $f(x)$ na podstawie wcześniej przygotowanych skryptów i plików danych.

Celem całego procesu było nie tylko znalezienie pierwiastków, ale przede wszystkim zrozumienie zachowania się metod Newtona i siecznych w kontekście różnych parametrów startowych, wymaganej dokładności oraz sposobu oceny zbieżności, dla funkcji o interesującej charakterystyce (pierwiastek wielokrotny, punkty z zerową pochodną).

2 Dane techniczne sprzętu

Do wykonania zadania wykorzystany został komputer o poniższej specyfikacji:

- System operacyjny: Windows 10 x64
- Procesor: Intel Core i7-11370H o taktowaniu 3.30GHz
- Pamięć RAM: 16GB

3 Dane techniczne oprogramowania

3.1 System operacyjny

- Windows 10 Home x64

3.2 Narzędzia programistyczne i wykonawcze

- **Język implementacji obliczeń:** C (standard C99/C11).
- **Kompilator C:** GCC (MinGW-W64 na Windows, np. gcc (x86_64-posix-seh-rev0, Built by MinGW-W64 project) 8.1.0 lub nowszy). Wykorzystane flagi kompilacji: -Wall -Wextra -O2 -Iinclude -g.
- **System budowania:** Make (GNU Make).
- **Narzędzie do przetwarzania danych i generowania wizualizacji (heatmapy, tabele):** Python 3 (wersja 3.13).
- **Narzędzie do wizualizacji (wykresy funkcji):** Gnuplot (wersja 5.0 lub nowsza).

3.3 Użyte biblioteki i moduły

- **C:** Standardowe biblioteki C, w tym:
 - <stdio.h> (standardowe wejście/wyjście)
 - <stdlib.h> (funkcje ogólnego użytku)
 - <math.h> (funkcje matematyczne, w tym pow, fabs, isnan, isinf)
 - <string.h> (operacje na ciągach znaków, np. snprintf)
 - <float.h> (stałe dotyczące typów zmiennoprzecinkowych, np. DBL_EPSILON)
 - <stdbool.h> (typ boolowski bool oraz stałe true, false)
- **Python (dla skryptu plot_results.py):** Główne użyte biblioteki:
 - pandas (do manipulacji danymi, wczytywania CSV, tworzenia tabel przestawnych)
 - numpy (do operacji numerycznych, obsługa NaN)
 - matplotlib (do generowania wykresów, w tym heatmap)
 - seaborn (do tworzenia estetycznych wizualizacji statystycznych, w tym heatmap)
 - Moduły standardowe: os, sys, re.

4 Opis zastosowanych metod numerycznych

4.1 Metoda Newtona (metoda stycznych)

Metoda Newtona jest iteracyjną metodą znajdowania pierwiastków funkcji. W każdym kroku, do aktualnego przybliżenia pierwiastka x_i prowadzona jest styczna do wykresu funkcji $f(x)$. Następne przybliżenie x_{i+1} jest punktem przecięcia tej stycznej z osią OX. Wzór iteracyjny ma postać:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (2)$$

Metoda ta charakteryzuje się zbieżnością kwadratową, jeśli punkt startowy x_0 jest dostatecznie blisko pierwiastka, a pochodna $f'(x)$ w pierwiastku jest różna od zera i funkcja jest odpowiednio gładka. Problemy mogą wystąpić, gdy $f'(x_i) \approx 0$ lub gdy pierwiastek ma krotność większą niż 1 (wtedy zbieżność spada do liniowej).

4.2 Metoda siecznych

Metoda siecznych jest podobna do metody Newtona, ale nie wymaga obliczania pochodnej funkcji $f'(x)$. Zamiast tego, pochodna jest aproksymowana przez iloraz różnicowy oparty na dwóch poprzednich przybliżeniach pierwiastka, x_i oraz x_{i-1} . Sieczna jest prowadzona przez punkty $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ oraz $(x_i, f(x_i))$, a jej przecięcie z osią OX daje kolejne przybliżenie x_{i+1} :

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \quad (3)$$

Metoda ta wymaga dwóch punktów startowych x_0 i x_1 . Jej rząd zbieżności wynosi około 1.618 (złota liczba), co jest wartością pomiędzy zbieżnością liniową a kwadratową, czyniąc ją wolniejszą od metody Newtona (w optymalnych warunkach dla Newtona), ale szybszą od metody bisekcji.

5 Wyznaczenie dokładności i analiza wyników

Dokładność znalezionych pierwiastków oceniano poprzez porównanie ich z wartościami referencyjnymi (0.0 i -1.0). Błąd bezwzględny (E_{root}) dla znalezionej pierwiastka x_{found} obliczano jako:

$$E_{root} = \min(|x_{found} - 0.0|, |x_{found} - (-1.0)|) \quad (4)$$

Analiza skupiała się na liczbie iteracji potrzebnych do zbieżności oraz na błędzie E_{root} w zależności od metody, punktu/ów startowych, precyzji ρ i kryterium stopu.

5.1 Metoda Newtona

5.1.1 Tabele wartości znalezionych pierwiastków

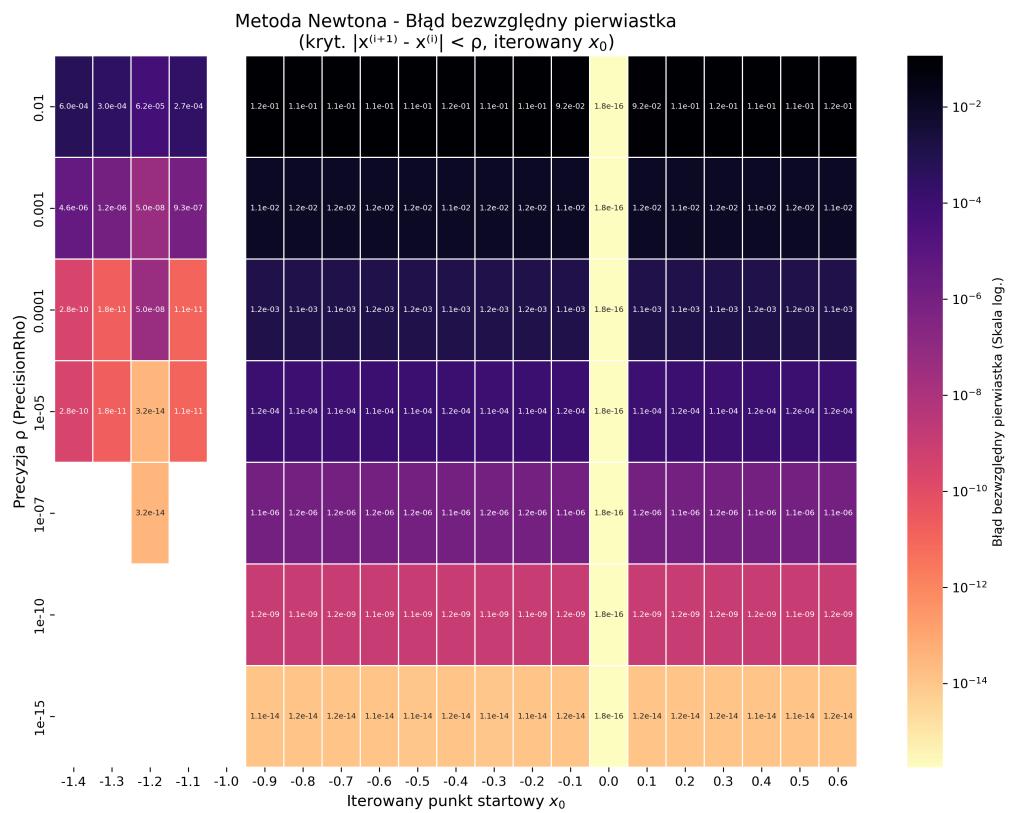
Tabela 1: Wartości znalezionych pierwiastków dla metoda newtona (kryt. $|x^1 - x| < \epsilon$). Iterowany punkt startowy: x_0 .

x_0	$\rho = 1e - 2$	$\rho = 1e - 3$	$\rho = 1e - 4$	$\rho = 1e - 5$	$\rho = 1e - 7$	$\rho = 1e - 10$	$\rho = 1e - 15$
-1.4	-1.000597	-1.000005	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-1.3	-1.000301	-1.000001	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-1.2	-1.000062	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-1.1	-1.000269	-1.000001	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-0.9	-0.115159	-0.011199	-0.001190	-0.000117	-0.000001	-0.000000	-0.000000
-0.8	-0.110701	-0.011668	-0.001144	-0.000112	-0.000001	-0.000000	-0.000000
-0.7	-0.109350	-0.011527	-0.001130	-0.000111	-0.000001	-0.000000	-0.000000
-0.6	-0.112998	-0.011907	-0.001168	-0.000115	-0.000001	-0.000000	-0.000000
-0.5	-0.112716	-0.011878	-0.001165	-0.000114	-0.000001	-0.000000	-0.000000
-0.4	-0.116515	-0.011329	-0.001111	-0.000118	-0.000001	-0.000000	-0.000000
-0.3	-0.112534	-0.011859	-0.001163	-0.000114	-0.000001	-0.000000	-0.000000
-0.2	-0.113224	-0.011931	-0.001170	-0.000115	-0.000001	-0.000000	-0.000000
-0.1	-0.092241	-0.011429	-0.001121	-0.000119	-0.000001	-0.000000	-0.000000
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.092361	0.011600	0.001140	0.000112	0.000001	0.000000	0.000000
0.2	0.114906	0.011370	0.001117	0.000119	0.000001	0.000000	0.000000
0.3	0.116266	0.011506	0.001130	0.000111	0.000001	0.000000	0.000000
0.4	0.113264	0.011206	0.001193	0.000117	0.000001	0.000000	0.000000
0.5	0.112001	0.012003	0.001179	0.000116	0.000001	0.000000	0.000000
0.6	0.115101	0.011389	0.001119	0.000119	0.000001	0.000000	0.000000

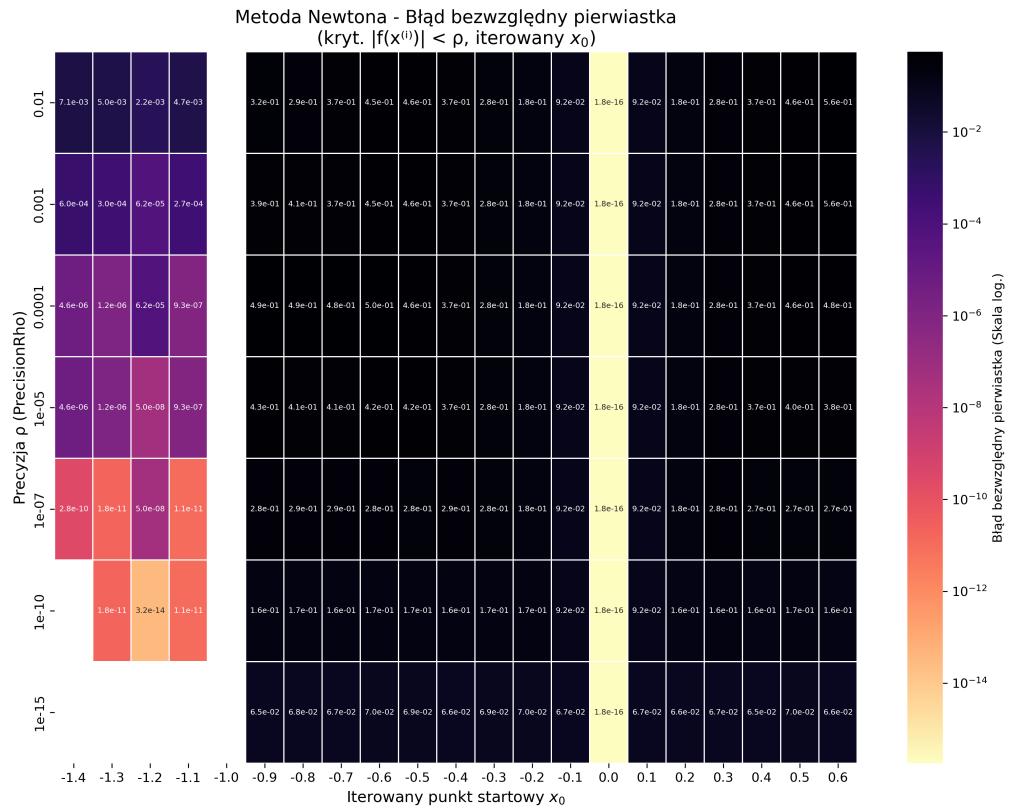
Tabela 2: Wartości znalezionych pierwiastków dla metoda newtona (kryt. $|f(x)| < \epsilon$). Iterowany punkt startowy: x_0 .

x_0	$\rho = 1e - 2$	$\rho = 1e - 3$	$\rho = 1e - 4$	$\rho = 1e - 5$	$\rho = 1e - 7$	$\rho = 1e - 10$	$\rho = 1e - 15$
-1.4	-1.007108	-1.000597	-1.000005	-1.000005	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-1.3	-1.004979	-1.000301	-1.000001	-1.000001	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-1.2	-1.002220	-1.000062	-1.000062	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-1.1	-1.004692	-1.000269	-1.000001	-1.000001	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-0.9	-0.675000	-0.613204	-0.511786	-0.430262	-0.282728	-0.159299	-0.065460
-0.8	-0.711111	-0.586135	-0.490331	-0.412695	-0.294985	-0.166075	-0.068215
-0.7	-0.634375	-0.634375	-0.483881	-0.407399	-0.291295	-0.164036	-0.067387
-0.6	-0.547826	-0.547826	-0.501355	-0.421732	-0.277301	-0.169544	-0.069625
-0.5	-0.458333	-0.458333	-0.458333	-0.420622	-0.276594	-0.169119	-0.069452
-0.4	-0.367568	-0.367568	-0.367568	-0.367568	-0.286134	-0.161183	-0.066227
-0.3	-0.276136	-0.276136	-0.276136	-0.276136	-0.276136	-0.168843	-0.069340
-0.2	-0.184314	-0.184314	-0.184314	-0.184314	-0.184314	-0.169885	-0.069763
-0.1	-0.092241	-0.092241	-0.092241	-0.092241	-0.092241	-0.092241	-0.066815
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.092361	0.092361	0.092361	0.092361	0.092361	0.092361	0.067186
0.2	0.184810	0.184810	0.184810	0.184810	0.184810	0.157773	0.065861
0.3	0.277326	0.277326	0.277326	0.277326	0.277326	0.159635	0.066643
0.4	0.369892	0.369892	0.369892	0.369892	0.270230	0.155524	0.064917
0.5	0.462500	0.462500	0.462500	0.395604	0.267243	0.166460	0.069511
0.6	0.555140	0.555140	0.475077	0.375810	0.274572	0.158040	0.065973

5.1.2 Heatmapy błędów znalezionych pierwiastków

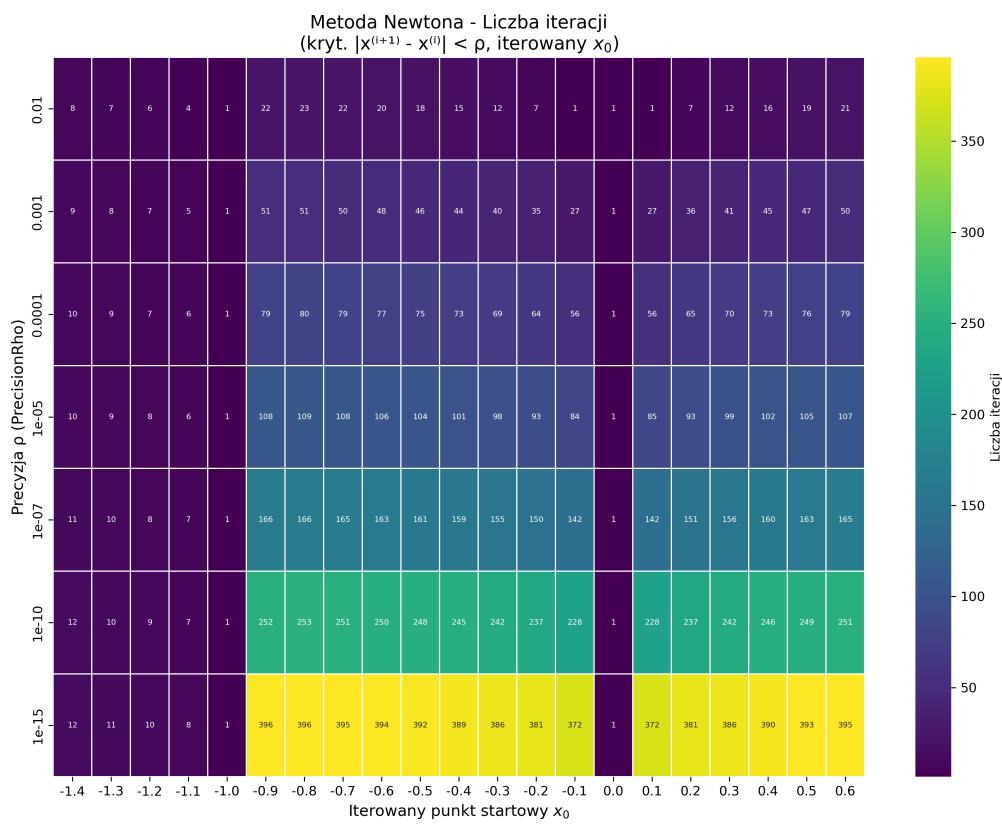


Rysunek 2: Błąd pierwiastka, Metoda Newtona, Kryterium Stop_dX.

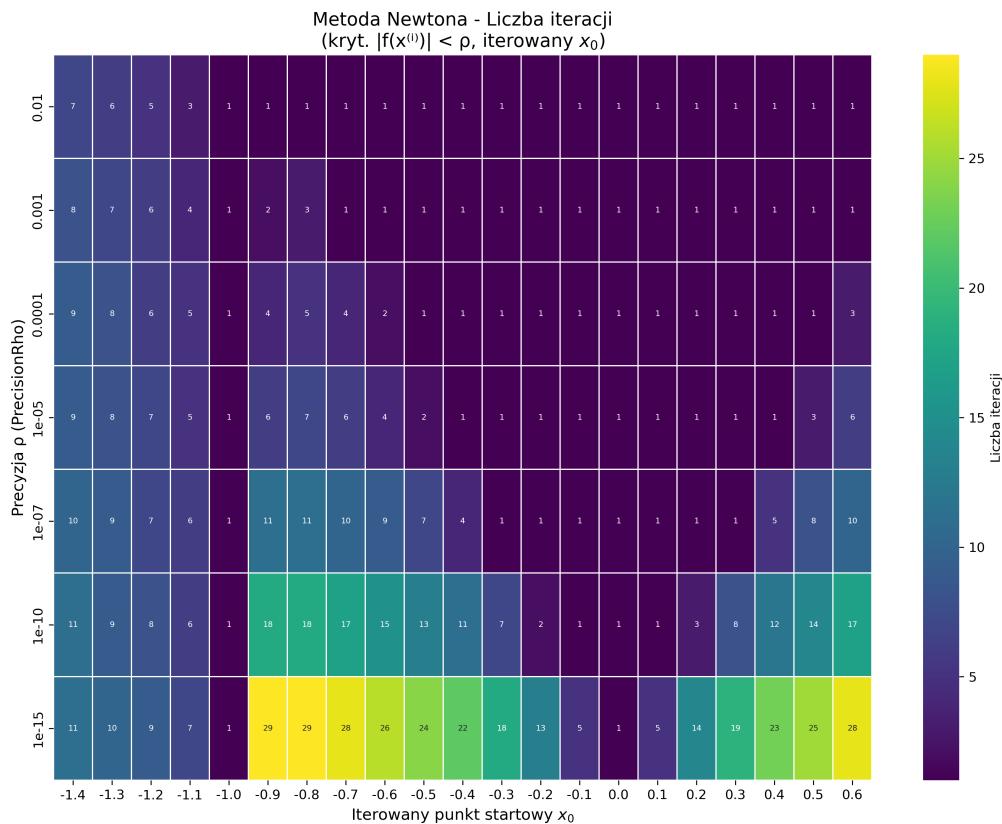


Rysunek 3: Błąd pierwiastka, Metoda Newtona, Kryterium Stop_fx.

5.1.3 Heatmapy liczby iteracji



Rysunek 4: Liczba iteracji, Metoda Newtona, Kryterium Stop_dX.



Rysunek 5: Liczba iteracji, Metoda Newtona, Kryterium Stop_fX.

5.1.4 Analiza wyników dla Metody Newtona

- **Kryterium Stop_dX ($|x^{(i+1)} - x^{(i)}| < \rho$):**

- *Liczba iteracji:* Metoda zbiega stosunkowo szybko do pierwiastka $x = -1$ dla $x_0 \in [-1.4, -1.1]$. Zbieżność do pierwiastka wielokrotnego $x = 0$ (dla $x_0 \in [-0.8, 0.6]$) jest znacznie wolniejsza, co jest zgodne z teorią (spadek rzędu zbieżności do liniowego). W okolicy $x_0 \approx -0.9$ (gdzie $f'(x) \approx 0$) obserwuje się bardzo dużą liczbę iteracji, co wskazuje na problemy ze zbieżnością.
- *Błąd pierwiastka:* Metoda dobrze lokalizuje pierwiastek $x = -1$. Dla $x = 0$ błąd jest często większy. Dla $x_0 = 0$ (gdzie $f'(0) = 0$), implementacja zwraca status błędu (stagnacja), co na heatmapie błędu jest widoczne jako duży błąd (często maksymalna wartość na skali, np. 10^0 lub NAN).

- **Kryterium Stop_fx ($|f(x^{(i+1)})| < \rho$):**

- *Liczba iteracji:* Wokół pierwiastka $x = 0$, gdzie funkcja $f(x)$ jest bardzo "płaska" (jej wartości są bliskie zeru na szerszym obszarze), kryterium $|f(x)| < \rho$ jest często spełniane bardzo szybko, nawet w 1-2 iteracjach, jeśli x_0 jest blisko 0. Dla punktów startowych dalej od pierwiastków, liczba iteracji może być porównywalna lub większa niż dla Stop_dX.
- *Błąd pierwiastka:* To kryterium okazuje się problematyczne dla pierwiastka $x = 0$. Ponieważ $f(x) \approx 0$ dla wielu x bliskich 0, warunek $|f(x)| < \rho$ jest spełniany dla przybliżeń x_i , które mogą być stosunkowo daleko od faktycznego pierwiastka 0. Skutkuje to znacznie większym błędem E_{root} dla pierwiastka $x = 0$ w porównaniu do kryterium Stop_dX. Jest to wyraźnie widoczne na heatmapie błędu jako duży, jasny obszar dla x_0 zbiegających do $x = 0$.

5.2 Metoda Siecznych

Przypomnienie konfiguracji przypadków:

- Przypadek A: $x_0 = a = -1.4$ (stałe), x_1 iterowane od -1.3 do 0.6 .
- Przypadek B: $x_1 = b = 0.6$ (stałe), x_0 iterowane od -1.4 do 0.5 .

5.2.1 Tabele wartości znalezionych pierwiastków

Tabela 3: Wartości znalezionych pierwiastków dla metoda siecznych (kryt. $|x^1 - x| < \epsilon$). Stały punkt: $x_0 = -1.40$. Iterowany punkt: x_1 .

x_1	$\rho = 1e - 2$	$\rho = 1e - 3$	$\rho = 1e - 4$	$\rho = 1e - 5$	$\rho = 1e - 7$	$\rho = 1e - 10$	$\rho = 1e - 15$
-1.3	-1.003895	-1.000029	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-1.2	-1.001223	-1.000001	-1.000001	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-1.1	-1.096702	-1.000038	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-0.9	-0.900400	-0.900400	-0.001746	-0.000170	-0.000002	-0.000000	-0.000000
-0.8	-0.800208	-0.800208	-0.001696	-0.000174	-0.000002	-0.000000	-0.000000
-0.7	-0.700064	-0.700064	-0.700064	-0.000168	-0.000002	-0.000000	-0.000000
-0.6	-0.600013	-0.600013	-0.600013	-0.000175	-0.000002	-0.000000	-0.000000
-0.5	-0.500002	-0.500002	-0.500002	-0.500002	-0.000002	-0.000000	-0.000000
-0.4	-0.400000	-0.400000	-0.400000	-0.400000	-0.000002	-0.000000	-0.000000
-0.3	-0.300000	-0.300000	-0.300000	-0.300000	-0.300000	-0.000000	-0.000000
-0.2	-0.200000	-0.200000	-0.200000	-0.200000	-0.200000	-0.200000	-0.000000
-0.1	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.000000
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.000000
0.2	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000	0.000000
0.3	0.300000	0.300000	0.300000	0.300000	0.300000	0.000000	0.000000
0.4	0.400001	0.400001	0.400001	0.400001	0.000002	0.000000	0.000000
0.5	0.500011	0.500011	0.500011	0.000172	0.000002	0.000000	0.000000
0.6	0.600132	0.600132	0.001710	0.000166	0.000002	0.000000	0.000000

Tabela 4: Wartości znalezionych pierwiastków dla metoda siecznych (kryt. $|f(x)| < \epsilon$). Stały punkt: $x_0 = -1.40$. Iterowany punkt: x_1 .

x_1	$\rho = 1e - 2$	$\rho = 1e - 3$	$\rho = 1e - 4$	$\rho = 1e - 5$	$\rho = 1e - 7$	$\rho = 1e - 10$	$\rho = 1e - 15$
-1.3	-1.003895	-1.000592	-1.000029	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-1.2	-1.006184	-1.000093	-1.000093	-1.000001	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-1.1	-1.004337	-1.000689	-1.000038	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-0.9	-0.674016	-0.603916	-0.503095	-0.420193	-0.296268	-0.167715	-0.068381
-0.8	-0.711178	-0.624698	-0.517791	-0.407353	-0.287449	-0.172267	-0.070216
-0.7	-0.700064	-0.634402	-0.496999	-0.415409	-0.292981	-0.165889	-0.067644
-0.6	-0.600013	-0.600013	-0.520176	-0.408100	-0.287947	-0.172560	-0.070334
-0.5	-0.500002	-0.500002	-0.500002	-0.409337	-0.289103	-0.163734	-0.066775
-0.4	-0.400000	-0.400000	-0.400000	-0.400000	-0.293459	-0.166179	-0.067762
-0.3	-0.300000	-0.300000	-0.300000	-0.300000	-0.276136	-0.166670	-0.067959
-0.2	-0.200000	-0.200000	-0.200000	-0.200000	-0.200000	-0.165528	-0.067565
-0.1	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.070204
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.066759
0.2	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000	0.166506	0.069097
0.3	0.300000	0.300000	0.300000	0.300000	0.277326	0.161512	0.066947
0.4	0.400001	0.400001	0.400001	0.400001	0.283602	0.164148	0.068047
0.5	0.500011	0.500011	0.462505	0.395750	0.270370	0.165272	0.068516
0.6	0.600132	0.555201	0.475312	0.382608	0.276088	0.159780	0.066225

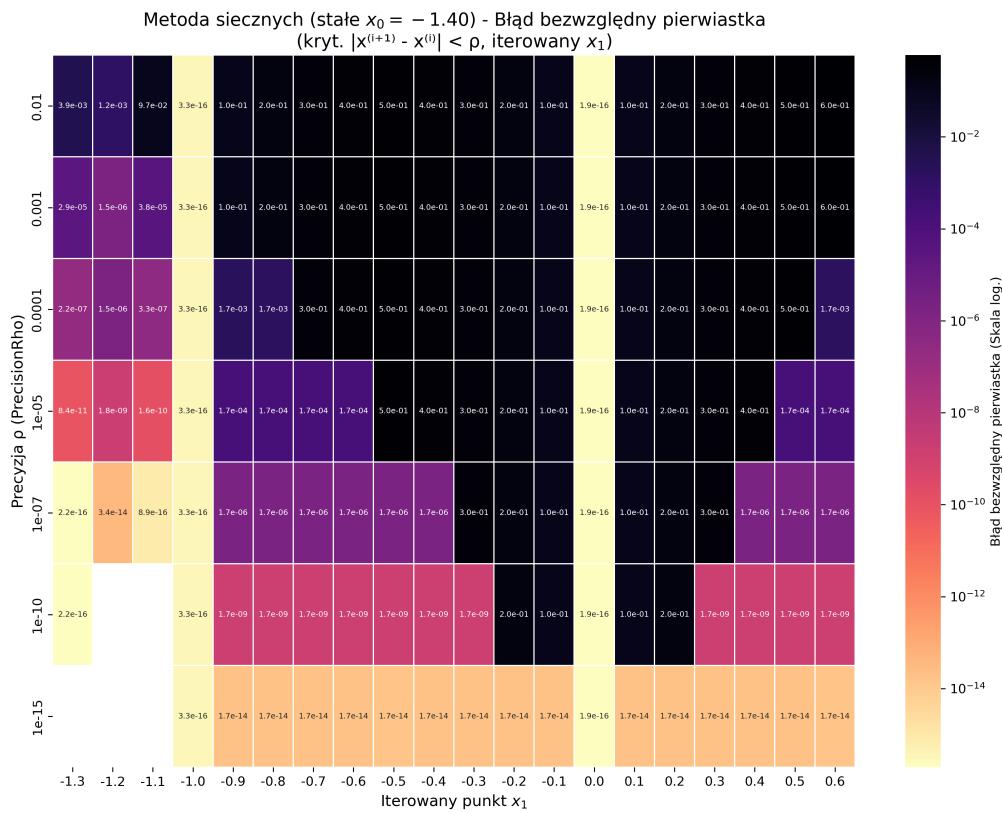
Tabela 5: Wartości znalezionych pierwiastków dla metoda siecznych (kryt. $|x^1 - x| < \epsilon$). Stały punkt: $x_0 = 0.60$. Iterowany punkt: x_1 .

x_1	$\rho = 1e - 2$	$\rho = 1e - 3$	$\rho = 1e - 4$	$\rho = 1e - 5$	$\rho = 1e - 7$	$\rho = 1e - 10$	$\rho = 1e - 15$
-1.4	0.600264	0.600264	0.001710	0.000166	0.000002	0.000000	0.000000
-1.3	0.600879	0.600879	0.001712	0.000167	0.000002	0.000000	0.000000
-1.2	0.603591	0.016689	0.001718	0.000167	0.000002	0.000000	0.000000
-1.1	0.173969	0.017125	0.001668	0.000172	0.000002	0.000000	0.000000
-1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-0.9	0.479237	0.017484	0.001703	0.000175	0.000002	0.000000	0.000000
-0.8	0.375965	0.375965	0.001744	0.000170	0.000002	0.000000	0.000000
-0.7	0.056282	0.056282	0.056282	0.056282	0.056282	0.056282	0.000000
-0.6	-0.359497	-0.359497	-0.001748	-0.000170	-0.000002	-0.000000	-0.000000
-0.5	-0.166339	-0.016868	-0.001732	-0.000168	-0.000002	-0.000000	-0.000000
-0.4	-0.398077	-0.016805	-0.001726	-0.000168	-0.000002	-0.000000	-0.000000
-0.3	-0.299952	-0.299952	-0.299952	-0.000169	-0.000002	-0.000000	-0.000000
-0.2	-0.200000	-0.200000	-0.200000	-0.200000	-0.000002	-0.000000	-0.000000
-0.1	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.000000
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.000000
0.2	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000	0.000002	0.000000	0.000000
0.3	0.299970	0.299970	0.299970	0.000168	0.000002	0.000000	0.000000
0.4	0.399097	0.399097	0.001660	0.000171	0.000002	0.000000	0.000000
0.5	0.490396	0.016969	0.001747	0.000170	0.000002	0.000000	0.000000

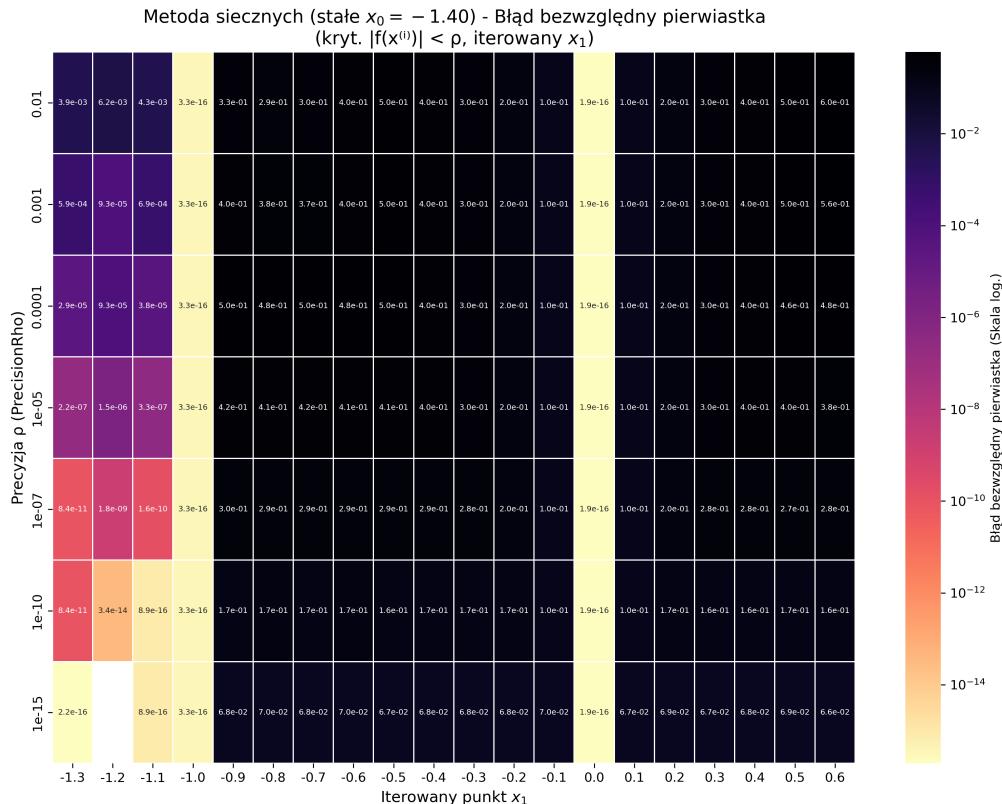
Tabela 6: Wartości znalezionych pierwiastków dla metoda siecznych (kryt. $|f(x)| < \epsilon$). Stały punkt: $x_0 = 0.60$. Iterowany punkt: x_1 .

x_1	$\rho = 1e - 2$	$\rho = 1e - 3$	$\rho = 1e - 4$	$\rho = 1e - 5$	$\rho = 1e - 7$	$\rho = 1e - 10$	$\rho = 1e - 15$
-1.4	0.600132	0.555323	0.475417	0.382693	0.276149	0.159816	0.066240
-1.3	0.600437	0.555749	0.475814	0.383012	0.276381	0.159951	0.066296
-1.2	0.601760	0.557613	0.477554	0.384412	0.277396	0.160542	0.066542
-1.1	0.610353	0.547253	0.463662	0.394227	0.269420	0.164687	0.068272
-1.0	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000	-1.000000
-0.9	0.486050	0.486050	0.446318	0.381183	0.274984	0.159137	0.069699
-0.8	0.376413	0.376413	0.376413	0.376413	0.281480	0.162943	0.067544
-0.7	0.056282	0.056282	0.056282	0.056282	0.056282	0.056282	0.056282
-0.6	-0.360000	-0.360000	-0.360000	-0.360000	-0.296368	-0.167931	-0.068468
-0.5	-0.468784	-0.468784	-0.468784	-0.416518	-0.293791	-0.166339	-0.067826
-0.4	-0.398077	-0.398077	-0.398077	-0.398077	-0.292602	-0.165701	-0.067568
-0.3	-0.299952	-0.299952	-0.299952	-0.299952	-0.276114	-0.166654	-0.067953
-0.2	-0.200000	-0.200000	-0.200000	-0.200000	-0.200000	-0.165528	-0.067565
-0.1	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.100000	-0.070203
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.066760
0.2	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000	0.166506	0.069097
0.3	0.299970	0.299970	0.299970	0.299970	0.277312	0.161502	0.066943
0.4	0.399097	0.399097	0.399097	0.399097	0.283201	0.163915	0.067949
0.5	0.490396	0.490396	0.457847	0.390799	0.281965	0.163203	0.067653

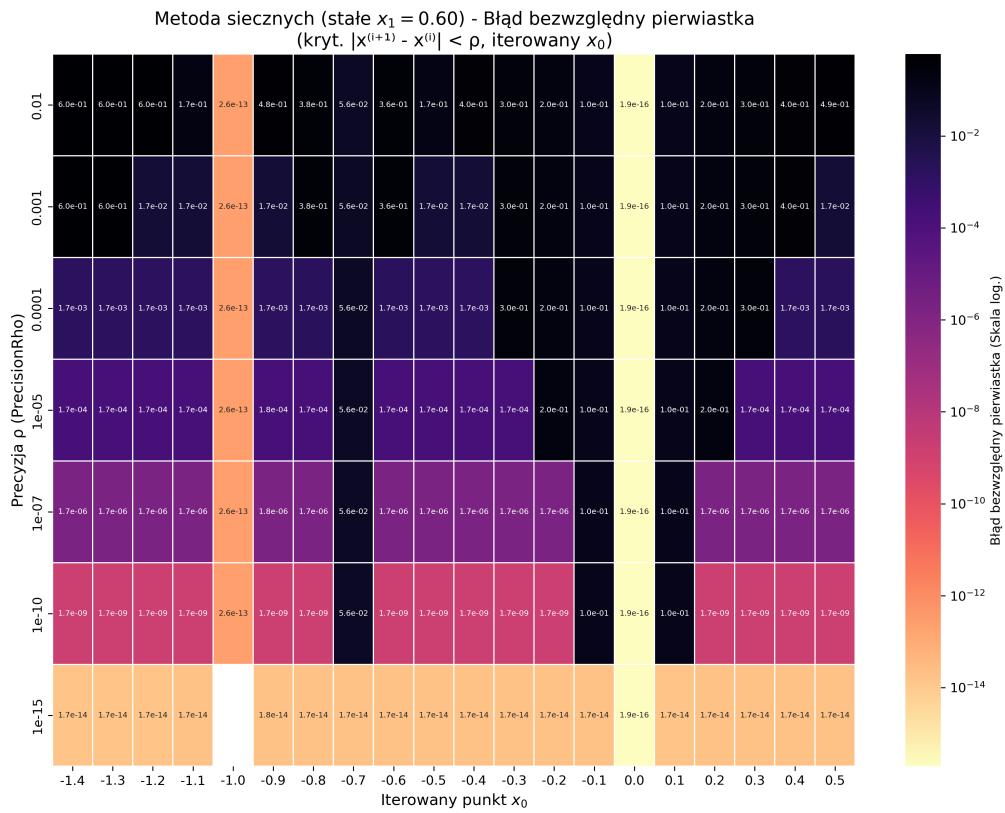
5.2.2 Heatmapy błędów znalezionych pierwiastków



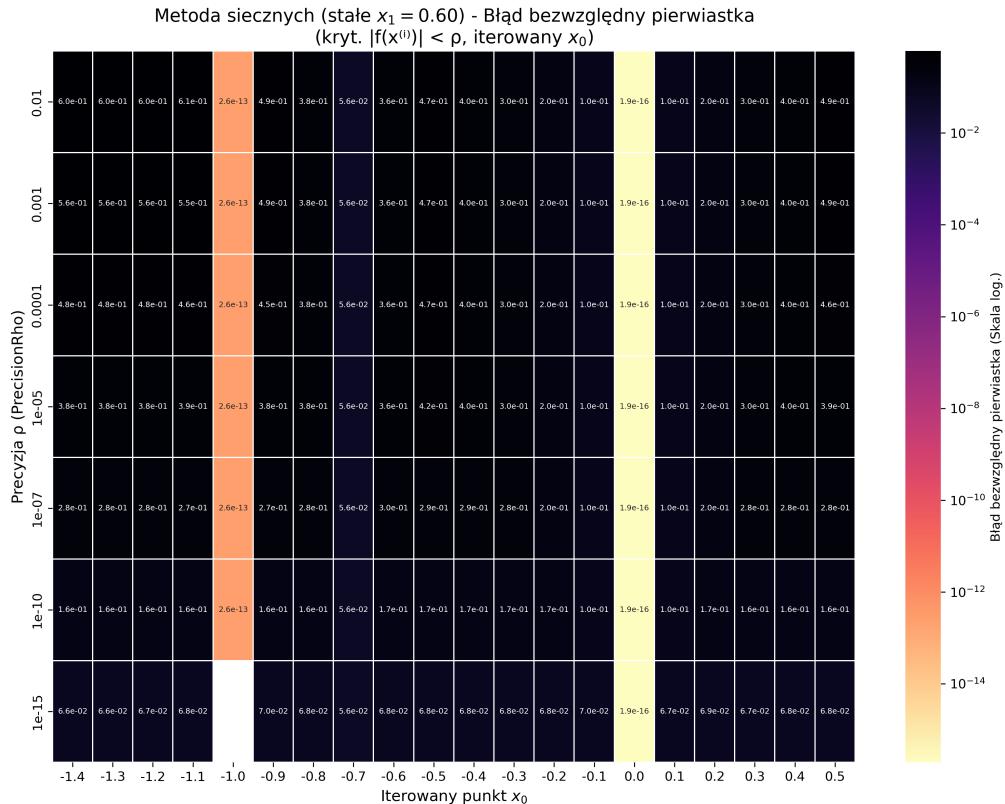
Rysunek 6: Błąd pierwiastka, Metoda Siecznych (Przypadek A: $x_0 = -1.4$), Kryterium Stop_dX.



Rysunek 7: Błąd pierwiastka, Metoda Siecznych (Przypadek A: $x_0 = -1.4$), Kryterium Stop_fx.

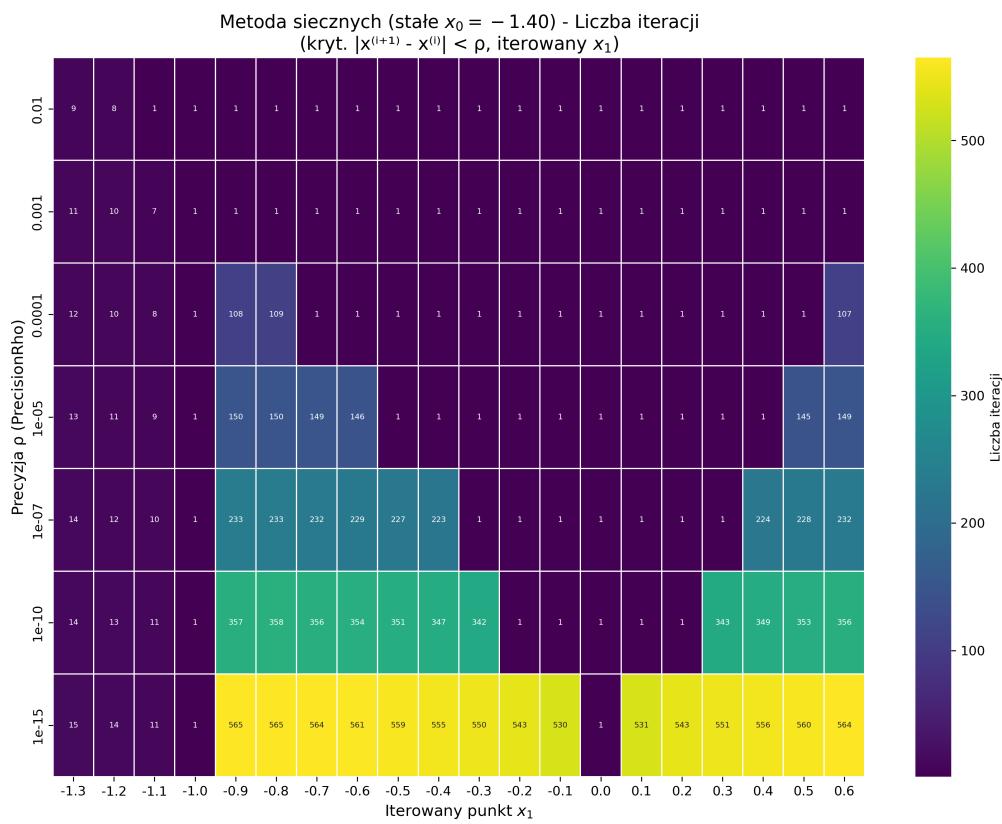


Rysunek 8: Błąd pierwiastka, Metoda Siecznych (Przypadek B: $x_1 = 0.6$), Kryterium Stop_dX.

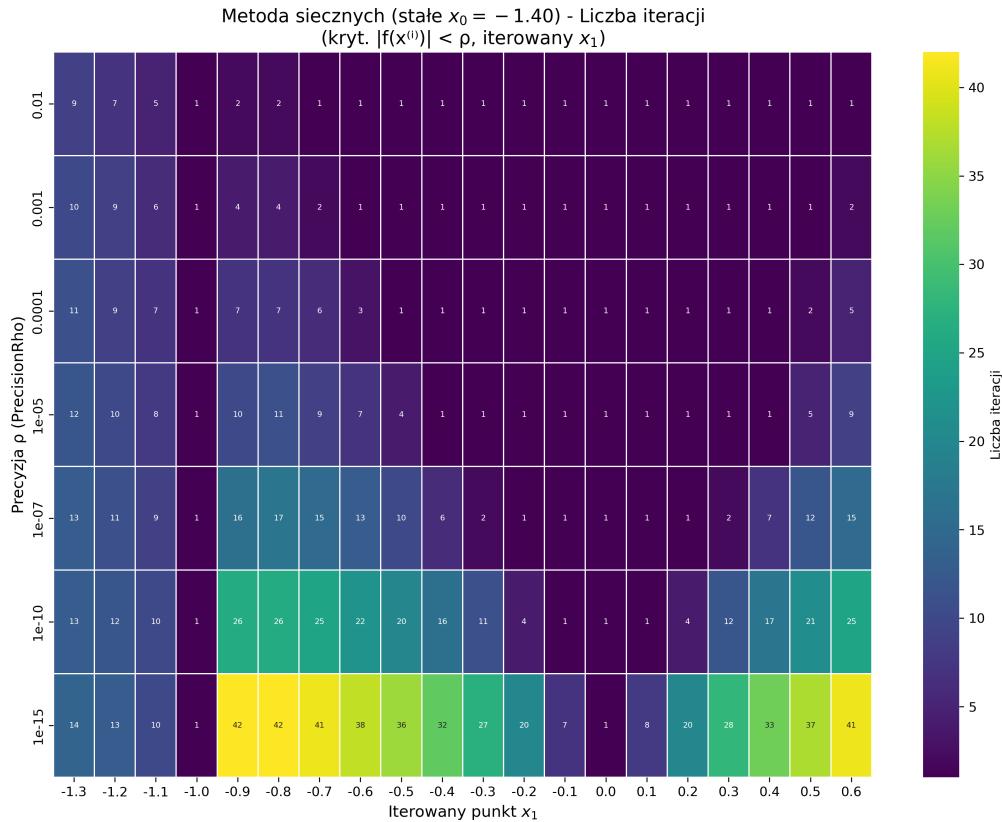


Rysunek 9: Błąd pierwiastka, Metoda Siecznych (Przypadek B: $x_1 = 0.6$), Kryterium Stop_fx.

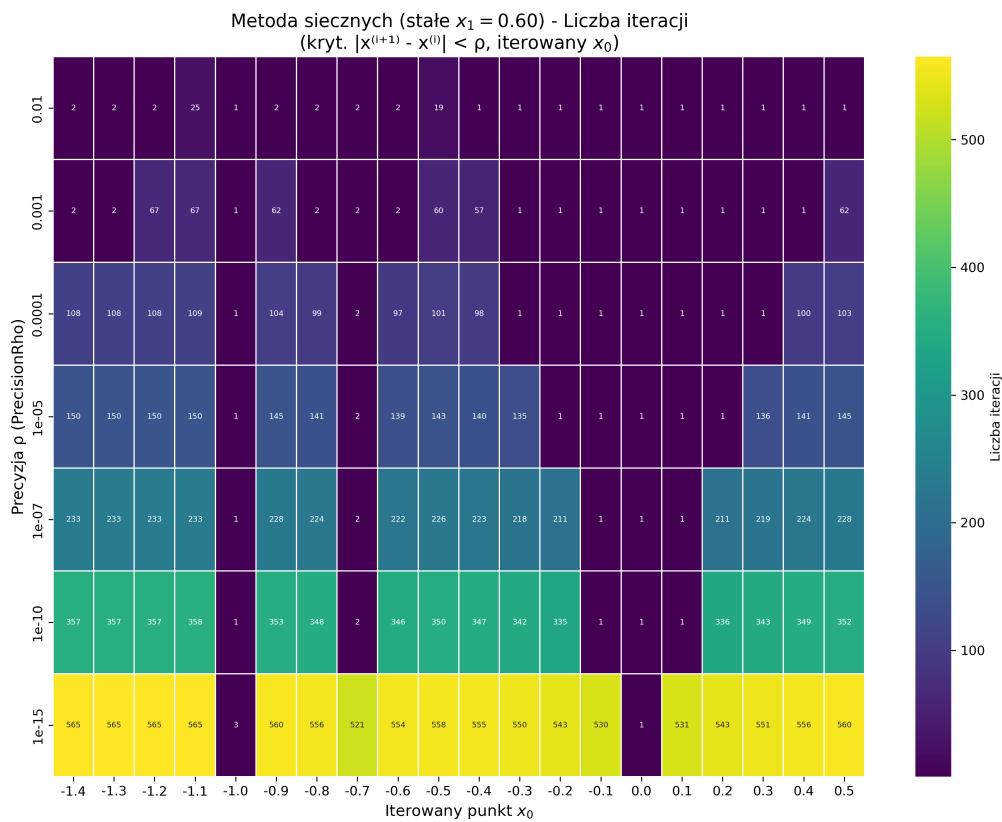
5.2.3 Heatmapy liczby iteracji



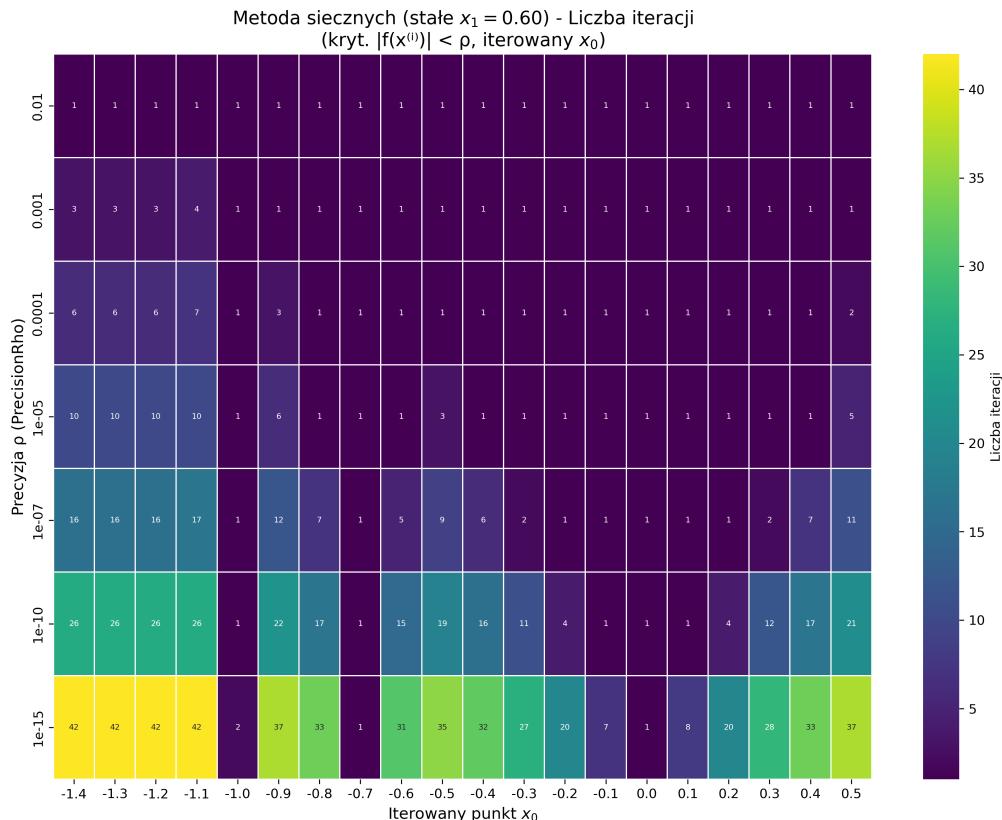
Rysunek 10: Liczba iteracji, Metoda Siecznych (Przypadek A: $x_0 = -1.4$), Kryterium Stop_dX.



Rysunek 11: Liczba iteracji, Metoda Siecznych (Przypadek A: $x_0 = -1.4$), Kryterium Stop_fx.



Rysunek 12: Liczba iteracji, Metoda Siecznych (Przypadek B: $x_1 = 0.6$), Kryterium Stop_dX.



Rysunek 13: Liczba iteracji, Metoda Siecznych (Przypadek B: $x_1 = 0.6$), Kryterium Stop_fx.

5.2.4 Analiza wyników dla Metody Siecznych

- **Kryterium Stop_dX** ($|x^{(i+1)} - x^{(i)}| < \rho$):

- *Przypadek A* ($x_0 = -1.4$): Gdy x_1 jest bliskie -1.0 (np. $x_1 \in [-1.3, -0.8]$), metoda zbiega do $x = -1$ w relatywnie niewielkiej liczbie iteracji. Dla pozostałych wartości x_1 (bliszcych 0.0 lub 0.6), metoda zbiega do $x = 0$, co generalnie wymaga więcej iteracji, zwłaszcza dla wysokich precyzji ρ . Błąd dla $x = -1$ jest mały. Błąd dla $x = 0$ jest większy, ale metoda siecznych radzi sobie tu lepiej niż Newton w przypadku $x_0 = 0$.
- *Przypadek B* ($x_0 = 0.6$): Gdy x_1 jest bliskie 0.0 lub 0.6 , metoda szybko zbiega do $x = 0$. Dla x_1 zbliżających się do -1.4 , metoda zbiega do $x = -1$, ale liczba iteracji może być duża, jeśli x_1 jest daleko od obu pierwiastków. Błąd dla $x = 0$ jest mały, a dla $x = -1$ jest większy, jeśli x_1 jest od niego oddalone.

- **Kryterium Stop_fx** ($|f(x^{(i+1)})| < \rho$):

- *Przypadek A* ($x_0 = -1.4$): Podobnie jak w metodzie Newtona, kryterium to jest problematyczne dla pierwiastka $x = 0$. Zbieżność do $x = 0$ jest szybka (mało iteracji), ale błąd E_{root} jest duży, ponieważ $|f(x)| < \rho$ jest spełniane dla x odległych od 0 . Zbieżność do $x = -1$ jest bardziej wiarygodna.
- *Przypadek B* ($x_0 = 0.6$): Analogiczne obserwacje. Kryterium wartości funkcji prowadzi do szybkiego, ale niedokładnego znalezienia $x = 0$.

6 Stabilność numeryczna

- **Metoda Newtona:** Wrażliwa na punkty startowe blisko miejsc, gdzie $f'(x) \approx 0$. Jeśli $f'(x_i)$ jest bardzo małe, krok $f(x_i)/f'(x_i)$ może być bardzo duży, prowadząc do "wystrzelenia" przybliżenia daleko od pierwiastka lub do przepełnienia. W implementacji sprawdzane jest $dfx == 0.0$ oraz czy krok jest inf lub nan .
- **Metoda Siecznych:** Wrażliwa na sytuację, gdy $f(x_i) \approx f(x_{i-1})$ a $x_i \neq x_{i-1}$, co może prowadzić do dzielenia przez wartość bliską zeru w mianowniku $f(x_i) - f(x_{i-1})$. Implementacja sprawdza $f_diff == 0.0$ oraz czy składnik aktualizacji jest inf lub nan . Również początkowe punkty $x_0 = x_1$ są problematyczne.
- **Pierwiastek wielokrotny:** Dla $x = 0$, gdzie zarówno $f(x)$ jak i $f'(x)$ są równe zero, obie metody mają obniżony rząd zbieżności. Znalezienie takiego pierwiastka z wysoką precyzją jest trudne.

7 Ogólna analiza wyników i wnioski

1. **Wpływ charakterystyki funkcji:** Funkcja $f(x) = x^{14} + x^{13}$ z pierwiastkiem jednokrotnym $x = -1$ i wielokrotnym $x = 0$ oraz punktami $f'(x) = 0$ w $x = 0$ i $x \approx -0.928$ stanowiła wyzwanie dla badanych metod, szczególnie w kontekście pierwiastka wielokrotnego i punktów o zerowej pochodnej.

2. Porównanie metod:

- Metoda Newtona, dla dobrych punktów startowych i pierwiastków jednokrotnych (np. $x = -1$), wykazywała szybszą zbieżność (mniej iteracji) niż metoda siecznych. Jednak jej wydajność drastycznie spadała dla pierwiastka wielokrotnego $x = 0$ oraz w pobliżu $x \approx -0.928$ (gdzie $f'(x) \approx 0$).
- Metoda Siecznych okazała się bardziej stabilna w przypadkach, gdzie Newton miał problemy (np. brak potrzeby obliczania $f'(x)$). Jej zbieżność była wolniejsza dla pierwiastka $x = -1$, ale często była w stanie zlokalizować $x = 0$ z mniejszą liczbą problemów numerycznych, choć niekoniecznie szybciej niż Newton dla punktów startowych blisko $x = 0$.

3. Wpływ kryterium stopu:

- Kryterium $|f(x^{(i+1)})| < \rho$ (Stop_fx) okazało się najmniej odpowiednie dla funkcji $f(x)$ z uwagi na jej płaski charakter wokół pierwiastka $x = 0$. Prowadziło to do akceptacji przybliżeń o dużym błędzie E_{root} mimo spełnienia warunku na wartość funkcji.
- Kryterium $|x^{(i+1)} - x^{(i)}| < \rho$ (Stop_dx) dawało znacznie lepsze wyniki pod względem dokładności, szczególnie dla pierwiastka $x = 0$. Wymusza ono stabilizację samego ciągu przybliżeń.

4. **Precyzja ρ :** Zmniejszanie ρ (zwiększenie wymaganej precyzyji) generalnie prowadziło do zwiększenia liczby iteracji i, dla kryterium Stop_dX, do zmniejszenia błędu znalezionej pierwiastka. Dla kryterium Stop_fX, zmniejszanie ρ nie zawsze przekładało się na znaczącą poprawę błędu E_{root} dla pierwiastka $x = 0$.

5. **Wybór punktów startowych:** Jest kluczowy dla obu metod. Punkty startowe blisko pierwiastka i z dala od "trudnych" regionów (np. $f'(x) \approx 0$) prowadzą do szybszej i pewniejszej zbieżności.

6. **Pierwiastek wielokrotny:** Znalezienie pierwiastka $x = 0$ (13-krotnego) było znacznie trudniejsze i wymagało więcej iteracji niż znalezienie pierwiastka jednokrotnego $x = -1$. Metody iteracyjne zbiegają wolniej do pierwiastków wielokrotnych.

Podsumowując, wybór odpowiedniej metody numerycznej oraz kryterium stopu musi być dostosowany do charakterystyki rozwiązywanego problemu. Dla funkcji z pierwiastkami wielokrotnymi lub obszarami o małej wartości pochodnej, metody takie jak sieczne mogą być bardziej niezawodne, a kryteria stopu oparte na różnicach kolejnych przybliżeń (Stop_dX) często prowadzą do lepszej kontroli dokładności samego pierwiastka niż kryteria oparte wyłącznie na wartości funkcji (Stop_fX).