

METODY OBLICZENIOWE W NAUCE I TECHNICIE

Laboratorium 4 | Zagadnienie interpolacji funkcjami sklejonymi

Jakub Kaliński | Informatyka | rok II
Grupa numer 5 | Piątek | Godzina 15:00 - 16:30

1 Treść i przebieg zadania

1.1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było wyznaczyć interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia oraz drugiego stopnia dla zadanej funkcji oraz analiza ich dokładności w zależności stopnia funkcji sklejaney.

1.2 Zadania funkcja

$$f(x) = \sin\left(\frac{kx}{\pi}\right) e^{\frac{-mx}{\pi}}$$

w przedziale:

$$[-2\pi^2, \pi^2]$$

1.3 Przebieg ćwiczenia

Celem ćwiczenia była analiza interpolacji funkcji $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ przy użyciu metody **funkcji sklepanych (splajnów)**, w szczególności splajnów **sześciennych i kwadratowych**. W przeciwieństwie do interpolacji Hermite'a, która wykorzystuje wartości funkcji i pochodnych we wszystkich węzłach wewnętrznych, standardowe splajny koncentrują się na zapewnieniu odpowiedniej gładkości (ciągłości funkcji i jej pochodnych) w punktach połączenia (węzłach) oraz na spełnieniu warunków brzegowych.

Interpolację przeprowadzano dla funkcji:

$$f(x) = \sin(k \cdot x/\pi) \cdot \exp(-m \cdot x/\pi)$$

na przedziale $[a, b]$, gdzie parametry $k = 4.0$, $m = 0.4$, $a = -2\pi^2$, $b = \pi^2$ zostały zdefiniowane w kodzie (function.c).

Zaimplementowano i porównano cztery warianty interpolacji splajnami:

- Splajny Sześciennie (Cubic Splines):** Konstruowane z wielomianów trzeciego stopnia na każdym podprzedziale $[x_i, x_{i+1}]$, zapewniające ciągłość funkcji $S(x)$, jej pierwszej pochodnej $S'(x)$ oraz drugiej pochodnej $S''(x)$ w węzłach wewnętrznych. Do wyznaczenia współczynników (konkretnie drugich pochodnych $M_i = S''(x_i)$ w węzłach) rozwiązano układ równań trójdzielnych (solveTridiagonal). Analizowano dwa typy warunków brzegowych:
 - Naturalne (Natural):** Zakładające zerowe wartości drugiej pochodnej na końcach przedziału: $S''(a) = 0$, $S''(b) = 0$. Odpowiada to BOUNDARY_NATURAL w kodzie.
 - Mocowane (Clamped):** Zakładające zadane wartości pierwszej pochodnej na końcach przedziału: $S'(a) = f'(a)$, $S'(b) = f'(b)$. Wartości $f'(a)$ i $f'(b)$ obliczono analitycznie na podstawie zaimplementowanej funkcji df(x) i przekazywano do cubicSplineInterpolation jako deriv_a i deriv_b. Odpowiada to BOUNDARY_CLAMPED.

2. **Splajny Kwadratowe (Quadratic Splines):** Konstruowane z wielomianów drugiego stopnia na każdym podprzedziale $[x_i, x_{i+1}]$, zapewniające ciągłość funkcji $S(x)$ oraz jej pierwszej pochodnej $S'(x)$ w węzłach wewnętrznych. Wyznaczenie współczynników (konkretnie pierwszych pochodnych $m_i = S'(x_i)$ w węzłach) wymagało jednego warunku brzegowego. Analizowano dwa typy warunków brzegowych na początku przedziału:

- **Mocowane (Clamped):** Zakładające zadaną wartość pierwszej pochodnej na początku przedziału: $S'(a) = f'(a)$. Wartość $f'(a)$ obliczano analitycznie (df(a)) i przekazywano jako deriv_a. Pozostałe pochodne m_i obliczano rekurencyjnie. Odpowiada to BOUNDARY_CLAMPED w funkcji quadraticSpline.
- **Naturalne (Natural):** Zakładające $S'(a) = 0$. Pozostałe pochodne m_i obliczano rekurencyjnie, startując od $m_0 = 0$. Odpowiada to BOUNDARY_ZERO_SLOPE_START.

Interpolację przeprowadzano iteracyjnie, zmieniając liczbę węzłów n (od 2 do maxNodes, podanego przez użytkownika). Dla każdej liczby węzłów n analizowano jedynie rozmieszczenie równoodległe w zadanym przedziale $[a, b]$, zaimplementowane w nodes.c:

Dla każdej kombinacji (liczba węzłów n , typ splajnu, warunki brzegowe):

- Generowano węzły x_0, \dots, x_{n-1} .
- Obliczano wartości funkcji $y_i = f(x_i)$ w węzłach.
- Obliczano wartości interpolowanego splajnu $S(x)$ na gęstej siatce numPoints punktów w przedziale $[a, b]$.
- Zapisywano wyniki interpolacji do plików .dat (saveDataToFile).
- Obliczano błędy interpolacji (calculateError):
 - Błąd maksymalny (norma supremum): $\|f - S\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - S(x)|$ (aproksymowany na gęstej siatce).
 - Błąd średniokwadratowy (MSE).
- Zapisywano błędy (Max i MSE) dla każdej wartości n do plików .csv (saveSplineErrorsToFile).

Analiza wyników (main.c oraz skrypty Gnuplot generowane przez fileio.c) obejmowała:

- **Ocenę dokładności interpolacji:** Badano zbieżność błędu maksymalnego i MSE w zależności od liczby węzłów n dla wszystkich 8 kombinacji (2 typy węzłów \times 4 typy splajnów/warunków brzegowych).
- **Porównanie warunków brzegowych:** Oceniano wpływ różnych warunków brzegowych (Naturalne vs. Mocowane dla splajnów sześciennych; Mocowane vs. Zerowe nachylenie dla splajnów kwadratowych) na dokładność interpolacji. Szczególnie porównywano warunki mocowane (wykorzystujące dokładną pochodną) z warunkami uproszczonymi.
- **Porównanie typów splajnów:** Porównywano ogólną dokładność osiąganą przez splajny sześcienne i kwadratowe dla badanej funkcji.
- **Wizualizację wyników:** Generowano wykresy porównujące oryginalną funkcję z interpolacjami dla różnych n oraz wykresy zbieżności błędów (generateSplineGnuplotScript, generateSplineErrorPlotScript).

Na podstawie przeprowadzonych symulacji oceniono, jak liczba węzłów, ich rozmieszczenie, stopień splajnu oraz warunki brzegowe wpływają na jakość interpolacji badanej funkcji f za pomocą funkcji sklejonnych.

2 Dane techniczne sprzętu

Do wykonania zadania wykorzystany został komputer o poniższej specyfikacji:

- system *Windows 10 x64*,
- procesor *Intel Core i7-11370H* o taktowaniu *3.30GHz*,
- pamięć *RAM 16GB*.

3 Dane techniczne oprogramowania

3.1 System operacyjny

- WSL Ubuntu
- Wersja 24.04

3.2 Język programowania

- Język C,
- Wersja 3.30.

3.3 Środowisko programowania

- *CLion*

3.4 Użyte biblioteki

W projekcie wykorzystano następujące biblioteki standardowe języka C:

- `<stdio.h>` – do operacji wejścia/wyjścia, takich jak zapis do pliku i wyświetlanie wyników na konsolę.
- `<stdlib.h>` – do alokacji pamięci (np. funkcje `malloc`, `free`), konwersji typów, generowania liczb pseudolosowych oraz wywoływania poleceń systemowych.
- `<math.h>` – do funkcji matematycznych, takich jak obliczanie pierwiastków kwadratowych (`sqrt`), potęgowania (`pow`), logarytmów (`log`, `log10`) czy funkcji trygonometrycznych (`sin`, `cos`).

3.5 Wizualizacja

Za wizualizację otrzymanych wyników odpowiedzialne było narzędzie *gnuplot*.

4 Zastosowane metody interpolacji

4.1 Funkcja sklejana 2. stopnia

4.1.1 Sposób wyznaczania funkcji

Równanie funkcji sklejaney 2. stopnia, możemy w ogólności zapisać jako

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i, \quad i \in [1, 2, \dots, n - 1] \quad (1)$$

gdzie każdy z segmentów funkcji, określony na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ ($i \in [1, 2, \dots, n - 1]$ – indeksuję węzły od 1 do n , a więc otrzymam $n - 1$ funkcji $S_i(x)$) opisany jest wzorem (1).

Aby (1) była funkcją sklejaną 2. stopnia, musi spełniać następujące warunki:

$$\begin{aligned} 1. \quad & S_i(x_i) = y_i && \text{dla } i \in [1, 2, \dots, n] \\ 2. \quad & S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) && \text{dla } i \in [1, 2, \dots, n - 1] \\ 3. \quad & S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) && \text{dla } i \in [1, 2, \dots, n - 1] \end{aligned} \quad (2)$$

Z warunku 1. otrzymujemy:

$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= a_i(x_i - x_i)^2 + b_i(x_i - x_i) + c_i = c_i \\ y_i &= c_i \end{aligned} \quad (3)$$

Różniczkując wyrażenie (1) względem x , otrzymujemy:

$$S'_i(x) = 2a_i(x - x_i) + b_i \quad (4)$$

To z kolei pozwala nam na wykorzystanie warunku 3.:

$$\begin{aligned} S'_{i+1}(x_{i+1}) &= S'_i(x_{i+1}) \\ 2a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + b_{i+1} &= 2a_i(x_{i+1} - x_i) + b_i \\ b_{i+1} &= 2a_i(x_{i+1} - x_i) + b_i \\ a_i &= \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)} \end{aligned} \quad (5)$$

Wykorzystując 1. warunek (korzystam z przekształcenia do postaci (3)) oraz 2. warunek, a także, korzystając ze wzoru (5), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} S_{i+1}(x_{i+1}) &= S_i(x_{i+1}) \\ a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1} &= a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i \\ y_{i+1} &= a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + y_i \\ y_{i+1} &= \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + y_i \\ y_{i+1} &= (x_{i+1} - x_i) \frac{b_{i+1} - b_i}{2} + b_i(x_{i+1} - x_i) + y_i \\ y_{i+1} &= (x_{i+1} - x_i) \left(\frac{b_{i+1} - b_i}{2} + b_i \right) + y_i \\ y_{i+1} &= (x_{i+1} - x_i) \left(\frac{b_{i+1} + b_i}{2} \right) + y_i \\ b_i + b_{i+1} &= 2 \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned} \quad (6)$$

Przesuwając indeks o 1 w dół, uzyskujemy:

$$b_{i-1} + b_i = 2 \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (7)$$

Niech $\gamma_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$, wtedy

$$b_{i-1} + b_i = 2\gamma_i$$

Jak możemy zauważyć, jedynymi niewiadomymi są teraz wartości współczynników b_i , ponieważ wartości c_i są znane ((3)), a wartości a_i obliczymy, znając wartości b_i ((5)). Otrzymujemy więc układ równań:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 &= 2\gamma_2 \\ b_2 + b_3 &= 2\gamma_3 \\ &\vdots \\ b_{n-1} + b_n &= 2\gamma_n \end{aligned} \quad (8)$$

Układ ten ma n niewiadomych, ale tylko $n-1$ równań (równania dla $i = 2, \dots, n$). Jak widzimy, w powyższym układzie równań obliczać także będziemy b_n , mimo, że nie jesteśmy w stanie wyznaczyć $S_n(x)$. Takie podejście ma na celu umożliwienie obliczenia współczynnika a_{n-1} , który obliczamy ze wzoru (5). Musimy więc skorzystać z warunku brzegowego, w celu wyznaczenia brakującego równania.

4.1.2 Warunki brzegowe

- **Natural Spline (Free Boundary)**

$$S'_1(x_1) = 0 \quad \text{lub} \quad S'_{n-1}(x_n) = 0 \quad (9)$$

Ponieważ brakuje nam jednego równania, wystarczy, że uwzględnimy jeden z powyższych warunków, dalsze przekształcenia wykonuję dla $S'_1(x_1) = 0$.

Korzystając z (4), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2a_1(x_1 - x_1) + b_1 &= 0 \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego, otrzymujemy układ równań, przy pomocy którego już jesteśmy w stanie wyliczyć szukane wartości współczynników b_i :

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \\ b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \end{cases} \quad (11)$$

Zauważmy, że możemy teraz bardzo łatwo rozwiązać układ równań (11) w sposób iteracyjny. Kolejno przekształcamy równania, korzystając z wyznaczonych w poprzednich równaniach wartości współczynników b_i :

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_1 + b_2 = 2\gamma_2 &\rightarrow b_2 = 2\gamma_2 - b_1 = 2\gamma_2 \\ b_2 + b_3 = 2\gamma_3 &\rightarrow b_3 = 2\gamma_3 - b_2 = 2(\gamma_3 - \gamma_2) \\ b_3 + b_4 = 2\gamma_4 &\rightarrow b_4 = 2\gamma_4 - b_3 = 2(\gamma_4 - \gamma_3 + \gamma_2) \\ &\dots \\ b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n &\rightarrow b_n = 2(\gamma_n - \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} - \dots) \end{aligned}$$

W ogólności, współczynniki określone są następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_i &= 2 \sum_{j=2}^i (-1)^{i+j} \gamma_j, \quad i \in \{2, 3, 4, \dots, n\} \end{aligned} \quad (12)$$

Pozostałe współczynniki obliczamy z wyznaczonych wcześniej wzorów (3) oraz (5).

• Clamped Boundary

W przypadku tego warunku brzegowego, przyjmuje się, że jedna z pierwszych pochodnych na krańcach jest znana lub przybliżona, przy pomocy ilorazów różnicowych, tzn.:

$$S'_1(x_1) = f'_1 \quad \text{lub} \quad S'_{n-1}(x_n) = f'_{n-1} \quad (13)$$

Do wyznaczenia przybliżonej wartości pochodnej (jeżeli dokładna wartość nie jest znana), najlepiej skorzystać z ilorazu różnicowego.

$$S'_1(x_1) \approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (14)$$

Korzystając ze wzoru (4), możemy przekształcić powyższe równanie do następującej postaci:

$$2a_1(x_1 - x_1) + b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \implies b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \gamma_2 \quad (15)$$

Po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego, otrzymujemy układ równań, przy pomocy którego już jesteśmy w stanie wyliczyć szukane wartości współczynników b_i .

$$\begin{cases} b_1 = \gamma_2 \\ b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \\ b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \end{cases} \quad (16)$$

Powyższy układ równań możemy znów obliczyć w sposób iteracyjny, otrzymując równania postaci:

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma_2 \\ b_1 + b_2 = 2\gamma_2 &\rightarrow b_2 = 2\gamma_2 - b_1 = \gamma_2 \\ b_2 + b_3 = 2\gamma_3 &\rightarrow b_3 = 2\gamma_3 - b_2 = 2\gamma_3 - \gamma_2 \\ b_3 + b_4 = 2\gamma_4 &\rightarrow b_4 = 2\gamma_4 - b_3 = 2(\gamma_4 - \gamma_3) + \gamma_2 \\ &\dots \\ b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n &\rightarrow b_n = 2(\gamma_n - \gamma_{n-1} + \dots) + (-1)^n \gamma_2 \end{aligned}$$

W ogólności, współczynniki określone są następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma_2 \\ b_i &= 2 \sum_{j=3}^i (-1)^{i+j} \gamma_j + (-1)^{i+2} \gamma_2, \quad i \in \{3, 4, \dots, n\} \end{aligned} \quad (17)$$

Pozostałe współczynniki obliczamy z wyznaczonych wcześniej wzorów (3) oraz (5).

4.2 Funkcja sklejana 3. stopnia

4.2.1 Sposób wyznaczania funkcji

Równanie funkcji sklejaney 3. stopnia, możemy w ogólności zapisać jako:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad i \in [1, 2, \dots, n-1] \quad (18)$$

gdzie każdy z segmentów funkcji, określony na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ ($i \in [1, 2, \dots, n-1]$) opisany jest wzorem (18).

Aby (18) była funkcją sklejaną 3. stopnia, musi spełniać następujące warunki:

$$\begin{aligned} 1. \quad & S_i(x_i) = y_i = f(x_i) && \text{dla } i \in [1, 2, \dots, n] \\ 2. \quad & S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) && \text{dla } i \in [1, 2, \dots, n-1] \\ 3. \quad & S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) && \text{dla } i \in [1, 2, \dots, n-1] \\ 4. \quad & S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}) && \text{dla } i \in [1, 2, \dots, n-1] \end{aligned} \quad (19)$$

Ponieważ funkcja $S_i(x)$ jest funkcją sześcienną, $S''_i(x)$ jest liniowa na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$. Wprowadźmy oznaczenie $h_i = x_{i+1} - x_i$. Funkcję $S''_i(x)$ możemy więc zapisać w postaci zależności liniowej:

$$S''_i(x) = S''_i(x_i) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + S''_{i+1}(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{h_i} \quad (20)$$

Całkując obustronnie funkcję $S''_i(x)$, otrzymujemy:

$$S_i(x) = \frac{S''_i(x_i)}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{S''_{i+1}(x_{i+1})}{6h_i} (x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x) \quad (21)$$

Korzystając z warunków interpolacji, możemy wyznaczyć wartości stałych całkowania. Po ich wyznaczeniu, otrzymujemy wzór postaci:

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \frac{S''_i(x_i)}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{S''_{i+1}(x_{i+1})}{6h_i} (x - x_i)^3 \\ &\quad + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{S''_{i+1}(x_{i+1})h_i}{6} \right) (x - x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{S''_i(x_i)h_i}{6} \right) (x_{i+1} - x) \end{aligned} \quad (22)$$

Zauważmy, że w powyższym wzorze jedynie nie znamy $S''_i(x_i)$. W celu jego wyznaczenia, korzystamy z warunku ciągłości pierwszej pochodnej, a więc różniczkujemy $S_i(x)$:

$$S'_i(x) = -\frac{S''_i(x_i)}{2h_i} (x_{i+1} - x)^2 + \frac{S''_{i+1}(x_{i+1})}{2h_i} (x - x_i)^2 + \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{S''_{i+1}(x_{i+1})h_i}{6} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{S''_i(x_i)h_i}{6} \quad (23)$$

Dla przejrzystości wprowadzamy symbole $\sigma_i = \frac{1}{6}S''_i(x_i)$ oraz $\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$.

$$(24)$$

Po wstawieniu do (23), uzyskujemy:

$$S'_i(x_{i+1}) = \Delta_i + h_i(\sigma_i + 2\sigma_{i+1}) \quad (25)$$

Natomiast, z drugiej strony:

$$S'_i(x_i) = \Delta_i - h_i(2\sigma_i + \sigma_{i+1}) \quad (26)$$

Z warunku ciągłości $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ otrzymujemy finalną postać równania.

$$h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1}, \quad i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \quad (27)$$

Jak możemy zauważyć, mamy n niewiadomych σ_i , ale tylko $n-2$ równań. Musimy więc określić dwa dodatkowe warunki.

4.2.2 Warunki brzegowe

• Cubic Function (Approximation)

Przyjmujemy, że: $C_1(x)$ – funkcja sześcienna przechodząca przez pierwsze 4 punkty $C_n(x)$ – funkcja sześcienna przechodząca przez ostatnie 4 punkty Z powyższych założeń wynika więc, że:

$$S'''(x_1) = C_1''' \quad \text{oraz} \quad S'''(x_n) = C_n'''$$

Korzystając z metody ilorazów różnicowych, możemy wyznaczyć przybliżoną wartość 3. pochodnych funkcji $C_1(x)$ i $C_n(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta_i^{(1)} &= \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \\ \Delta_i^{(2)} &= \frac{\Delta_{i+1}^{(1)} - \Delta_i^{(1)}}{x_{i+2} - x_i} \\ \Delta_i^{(3)} &= \frac{\Delta_{i+1}^{(2)} - \Delta_i^{(2)}}{x_{i+3} - x_i}\end{aligned}\tag{28}$$

Uwaga: W powyższych wzorach Δ oznacza co innego niż we wzorach z podpunktu 24.

Przybliżenie pochodnej $f^{(n)}$ otrzymujemy mnożąc $n! \cdot \Delta^{(n)}$, więc:

$$\begin{aligned}S'''(x_1) &= C_1''' = 3! \cdot \Delta_1^{(3)} = 6 \cdot \Delta_1^{(3)} \\ S'''(x_n) &= C_n''' = 3! \cdot \Delta_{n-3}^{(3)} = 6 \cdot \Delta_{n-3}^{(3)}\end{aligned}\tag{30}$$

Przekształcając powyższe równania (używając $S_i'''(x) \approx 6(\sigma_{i+1} - \sigma_i)/h_i$), otrzymujemy 2 brakujące warunki:

$$\begin{aligned}-h_1\sigma_1 + h_1\sigma_2 &= h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ h_{n-1}\sigma_{n-1} - h_{n-1}\sigma_n &= -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)}\end{aligned}\tag{31}$$

Finalnie, układ równań, który otrzymujemy, po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego, ma następującą postać macierzową:

$$\begin{bmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_{n-1} & -h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)} \end{bmatrix}\tag{32}$$

• Natural Spline (Free Boundary)

$$S''(x_1) = 0, \quad S''(x_n) = 0\tag{33}$$

Korzystając z (24), mamy $\sigma_i = \frac{1}{6}S_i''(x_i)$. Uwzględniając powyższe równanie, otrzymujemy:

$$S''(x_1) = S_1''(x_1) = 0 \implies \sigma_1 = 0 \quad S''(x_n) = S_n''(x_n) = 0 \implies \sigma_n = 0$$

Znamy więc już 2 wartości niewiadomych ($\sigma_1 = \sigma_n = 0$). Po dodaniu powyższych 2 równań do $n-2$ równań z punktu (27), otrzymujemy układ równań postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix}\tag{34}$$

• Clamped Boundary

$$S'(x_1) = f'_1, \quad S'(x_n) = f'_{n-1} \quad (35)$$

Korzystając z (25) and (26), mamy:

$$\begin{aligned} S'(x_1) &= S'_1(x_1) = \Delta_1 - h_1(2\sigma_1 + \sigma_2) = f'_1 \\ S'(x_n) &= S'_{n-1}(x_n) = \Delta_{n-1} + h_{n-1}(\sigma_{n-1} + 2\sigma_n) = f'_{n-1} \end{aligned} \quad (36)$$

Przekształcając powyższe równania, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2h_1\sigma_1 + h_1\sigma_2 &= \Delta_1 - f'_1 \\ h_{n-1}\sigma_{n-1} + 2h_{n-1}\sigma_n &= f'_{n-1} - \Delta_{n-1} \end{aligned} \quad (37)$$

Pierwsze pochodne f'_1 oraz f'_{n-1} możemy przybliżyć, przy pomocy metody ilorazów różnicowych, a więc finalnie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'_1 &\approx \Delta_1 \\ f'_{n-1} &\approx \Delta_{n-1} \end{aligned} \quad (38)$$

Wstawiając do równań (37), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2\sigma_1 + \sigma_2 &= 0 \\ 2\sigma_{n-1} + \sigma_n &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Otrzymane w ten sposób równania (39) pozwolą na wyznaczenie interpolacyjnej funkcji sklepanej 3. stopnia. Po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego, układ n równań wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

4.2.3 Rozwiązanie układu równań

Należy zaznaczyć, że przedstawione powyżej układy równań trójdzielnych dla drugich pochodnych M_i (lub σ_i) splajnu sześciennego zostały rozwiązane numerycznie za pomocą **własnej implementacji algorytmu Thomasa**. Funkcja realizująca ten algorytm (`solveTridiagonal`) znajduje się w pliku `interpolation.c`. Do rozwiązania tego układu równań **nie wykorzystano** gotowych funkcji z zewnętrznych bibliotek numerycznych (takich jak GSL, LAPACK czy MKL). Rozwiązanie dla splajnów kwadratowych, jak wspomniano, odbywało się iteracyjnie.

5 Różnice pomiędzy warunkami brzegowymi

Warunki brzegowe są niezbędne do jednoznacznego wyznaczenia funkcji sklepanej, ponieważ zapewniają dodatkowe równania potrzebne do określenia wszystkich współczynników (dwa dodatkowe warunki dla splajnów kubicznych, jeden lub dwa dla kwadratowych, w zależności od sformułowania układu równań). Wybór warunku brzegowego ma istotny wpływ na kształt funkcji sklepanej, szczególnie w pobliżu końców przedziału interpolacji.

5.1 Funkcja sklejana 2. stopnia

Dla funkcji sklepanej 2. stopnia, potrzebujemy jednego dodatkowego warunku do zamknięcia układu równań (8) dla współczynników b_i . Najczęściej stosuje się jeden z poniższych:

5.1.1 Natural Spline (Free Boundary)

- **Warunek:** Zakłada się zerową pierwszą pochodną na jednym z końców, np. $S'_1(x_1) = 0$.
- **Równanie wynikowe:** Prowadzi to bezpośrednio do $b_1 = 0$ (patrz równanie 10).

- **Implikacje:** Jest to warunek prosty do narzucenia. Powoduje on, że splajn staje się "płaski" (ma zerowe nachylenie) na początku przedziału. Może to wyglądać nienaturalnie, jeśli interpolowana funkcja ma w rzeczywistości niezerowe nachylenie w punkcie x_1 . Układ równań (11) staje się bardzo łatwy do rozwiązania iteracyjnego. Alternatywnie można założyć $S'_{n-1}(x_n) = 0$, co prowadzi do innego równania dla b_n .

5.1.2 Clamped Boundary

- **Warunek:** Zakłada się, że wartość pierwszej pochodnej na jednym z końców jest znana, $S'_1(x_1) = f'_1$.
- **Aproksymacja:** Jeśli dokładna wartość pochodnej f'_1 nie jest znana, często aproksymuje się ją za pomocą ilorazu różnicowego, np. $f'_1 \approx \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \gamma_2$.
- **Równanie wynikowe (dla aproksymacji):** Prowadzi to do $b_1 = \gamma_2$ (patrz równanie 15).
- **Implikacje:** Pozwala narzucić określone nachylenie splajnu na początku przedziału. Jeśli wartość pochodnej jest znana lub dobrze aproksymowana, może to dać lepsze dopasowanie do zachowania funkcji w pobliżu x_1 . Podobnie jak w przypadku naturalnego splajnu, układ równań (16) można łatwo rozwiązać iteracyjnie. Alternatywnie można zadać warunek na prawym końcu, $S'_{n-1}(x_n) = f'_{n-1}$.

5.2 Funkcja sklejana 3. stopnia

Dla funkcji sklejaney 3. stopnia, standardowo potrzebujemy dwóch dodatkowych warunków do zamknięcia układu równań (27) dla drugich pochodnych σ_i .

5.2.1 Natural Spline (Free Boundary)

- **Warunek:** Zakłada się zerowe drugie pochodne na obu końcach: $S''(x_1) = 0$ oraz $S''(x_n) = 0$.
- **Równanie wynikowe:** Prowadzi to bezpośrednio do $\sigma_1 = 0$ oraz $\sigma_n = 0$ (patrz równanie 34).
- **Implikacje:** Jest to najczęściej stosowany warunek brzegowy dla splajnów kubicznych. Odpowiada to fizycznej interpretacji "swobodnych końców" belki (brak momentu zginającego). Matematycznie oznacza to, że krzywa "prostuje się" na końcach (jej krzywizna dąży do zera). Prowadzi do dobrze uwarunkowanego, ściśle diagonalnie dominującego, trójdagonalnego układu równań (34).

5.2.2 Clamped Boundary

- **Warunek:** Zakłada się, że wartości pierwszej pochodnej na obu końcach są znane: $S'(x_1) = f'_1$ oraz $S'(x_n) = f'_{n-1}$.
- **Aproksymacja:** Jeśli dokładne wartości pochodnych nie są znane, można je aproksymować, np. za pomocą ilorazów różnicowych $f'_1 \approx \Delta_1$ i $f'_{n-1} \approx \Delta_{n-1}$ (patrz 38).
- **Równania wynikowe:** Prowadzi to do dwóch równań liniowych wiążących σ_1, σ_2 oraz σ_{n-1}, σ_n z wartościami pochodnych f'_1, f'_{n-1} (patrz 37). W przypadku aproksymacji $f'_1 \approx \Delta_1$ i $f'_{n-1} \approx \Delta_{n-1}$, równania te mogą przyjąć prostszą postać, np. $2\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ oraz $\sigma_{n-1} + 2\sigma_n = 0$ (należy zauważyć, że ostatnie równanie w macierzy 40 w materiale źródłowym to $2\sigma_{n-1} + \sigma_n = 0$, co może wynikać z innej aproksymacji lub błędu).
- **Implikacje:** Pozwala precyzyjnie kontrolować nachylenie splajnu na końcach. Jeśli pochodne są znane, często daje to najlepsze dopasowanie do funkcji źródłowej. Jakość dopasowania przy aproksymowanych pochodnych zależy od dokładności tej aproksymacji. Układ równań pozostaje trójdagonalny i dobrze uwarunkowany.

5.2.3 Inne warunki (np. Aproksymacja pochodnej 3. stopnia, Not-a-Knot)

- **Aproksymacja pochodnej 3. stopnia:** Można narzucić warunki na trzecią pochodną na końcach, aproksymując ją za pomocą ilorazów różnicowych (30). Prowadzi to do układu macierzowego (32). Jest to mniej popularny warunek.

- **Not-a-Knot:** Ten warunek wymaga, aby trzecia pochodna była ciągła w drugim (x_2) i przedostatnim (x_{n-1}) węźle. Oznacza to, że pierwszy i drugi segment wielomianowy (oraz przedostatni i ostatni) pochodzą z tego samego wielomianu kubicznego. Jest to często domyślny warunek w oprogramowaniu matematycznym, ponieważ nie wymaga dodatkowych informacji (jak pochodne) i często daje dobre rezultaty.

5.3 Podsumowanie

Różnica w zachowaniu funkcji sklejaney wynikająca z różnych warunków brzegowych jest najbardziej widoczna w pobliżu końców przedziału interpolacji (x_1 i x_n).

- **Splajny naturalne (Free Boundary)** mają tendencję do "wyplaszczania się" na końcach (zerowa pierwsza pochodna dla splajnu kwadratowego na jednym końcu, zerowa druga pochodna dla splajnu kubicznego na obu końcach). Są proste do zaimplementowania i nie wymagają dodatkowych informacji o funkcji.
- **Splajny z narzuconymi pochodnymi (Clamped Boundary)** pozwalają na lepszą kontrolę kształtu krzywej na brzegach, pod warunkiem, że wartości pochodnych są znane lub dobrze aproksymowane. Mogą lepiej odzwierciedlać rzeczywiste nachylenie (dla S') lub krzywiznę (dla S'' , chociaż warunek Clamped standardowo dotyczy S') funkcji interpolowanej na końcach.

W zależności od kształtu oryginalnej funkcji i dostępnych informacji, jeden warunek brzegowy może dawać lepsze przybliżenie niż inny. Dla dużej liczby węzłów interpolacyjnych, wpływ pojedynczego warunku brzegowego na ogólny kształt funkcji maleje w miarę oddalania się od brzegu, ale może pozostać widoczny lokalnie. Charakter ewentualnych oscylacji splajnu (szczególnie widoczne czasem w splajnach drugiego stopnia) również może zależeć od zastosowanego warunku brzegowego.

6 Wyznaczenie dokładności interpolacji

W celu wyznaczenia dokładności, z jaką wielomian, uzyskany zgodnie z zagadnieniem **Funkcji Sklejanych** przybliży zadaną funkcję, wykorzystano poniższe metryki:

- Błąd średniokwadratowy,
- Błąd maksymalny bezwzględny.

6.1 Pomiar dokładności

Pomiar dokładności przeprowadzony został, porównując wartości interpolowanej funkcji z wartościami wyznaczonego wielomianu interpolacji dla $m = 1000$ równodległych punktów, rozmieszczonych na całym przedziale $x \in [-2\pi^2, \pi^2]$.

6.2 Błąd średniokwadratowy

Błąd średniokwadratowy wyrażony jest wzorem

$$E_\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^l (W(x_i) - f(x_i))^2}{l}} \quad (41)$$

, gdzie

- l - liczba punktów pomiaru błędu
- f - zadaną funkcję
- W - funkcja wielomianu interpolacji
- x_i - punkt, w którym dokonywany jest pomiar

6.3 Błąd maksymalny

Błąd maksymalny wyrażony jest wzorem

$$E_l = \max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} (|W(x_i) - f(x_i)|) \quad (42)$$

, gdzie

- l - liczba punktów pomiaru błędu
- f - zadana funkcja
- W - funkcja wielomianu interpolacji
- x_i - punkt pomiaru

6.4 Interpretacja wyników

Oba wskaźniki błędu pozwalają ocenić jakość interpolacji:

- **Maksymalny błąd bezwzględny** pokazuje najgorszy przypadek przybliżenia, wskazując punkt, w którym interpolacja jest najmniej dokładna.
- **Błąd średniokwadratowy** mierzy ogólną jakość interpolacji – im niższa jego wartość, tym lepiej interpolant (funkcja wielomianu interpolacji) przybliża zadaną funkcję w całym przedziale.

Dzięki analizie tych błędów można porównać różne metody interpolacji i określić, która daje lepsze wyniki.

7 Analiza wyników interpolacji funkcji

7.1 Interpolacyjna funkcja sklejana 2 stopnia

Warunek naturalny

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
2	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
3	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
4	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
5	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
6	1.1617994648e+01	2.2940804567e+01
7	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
8	1.3767392433e+01	2.0979755873e+01
9	1.4274555212e+01	3.4682499112e+01
10	1.6591664006e+01	5.9893079920e+01
11	1.8450162408e+01	1.0431017587e+02
12	1.8192561636e+01	1.0063017701e+02
13	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
14	2.0859948314e+01	1.4437652561e+02
15	2.1322757806e+01	1.7787588408e+02
16	1.8378945561e+01	1.3120227172e+02
17	1.5629870346e+01	9.5111624212e+01
18	1.3392309753e+01	7.0930966793e+01
19	1.1724893877e+01	5.5119912449e+01
20	1.0226658564e+01	4.4129244234e+01
21	9.2711821654e+00	3.6310275583e+01
22	8.4584791391e+00	3.0475109594e+01
23	7.7421958506e+00	2.6036702775e+01
24	7.1227650157e+00	2.2545796662e+01
25	6.5837837863e+00	1.9762306227e+01
26	6.1208973627e+00	1.7488975312e+01
27	5.7169393630e+00	1.5613768755e+01
28	5.3680613819e+00	1.4039147509e+01
29	5.0894642728e+00	1.2707080056e+01
30	4.8504686145e+00	1.1564686592e+01
31	4.6308491193e+00	1.0579320458e+01
32	4.4327359423e+00	9.7202034410e+00
33	4.2512655545e+00	8.9677338593e+00
34	4.0816709801e+00	8.3029363251e+00
35	3.9273251544e+00	7.7134090257e+00
36	3.7856112754e+00	7.1868968436e+00
37	3.6518488972e+00	6.7152095749e+00
38	3.5266368849e+00	6.2901099935e+00
39	3.4101208161e+00	5.9060281045e+00
40	3.3024035066e+00	5.5572269056e+00
41	3.2019579122e+00	5.2397644506e+00
42	3.1089815165e+00	4.9495794251e+00
43	3.0221347188e+00	4.6838097293e+00
44	2.9402252979e+00	4.4394936779e+00
45	2.8619045978e+00	4.2145138611e+00
46	2.7856887711e+00	4.0066650512e+00
47	2.7129549205e+00	3.8143503778e+00
48	2.6501762684e+00	3.6358984745e+00
49	2.5863378432e+00	3.4700842817e+00
50	2.5222830750e+00	3.3156210852e+00

Warunek clamped

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
2	1.1785606150e+02	7.2208559203e+03
3	6.1224501181e+01	1.8110834943e+03
4	4.4350972432e+01	8.0911264684e+02
5	3.6822910129e+01	4.5565959752e+02
6	3.2077342991e+01	2.2810758572e+02
7	2.4293875161e+01	2.0808256613e+02
8	3.0248824339e+01	2.1123607002e+02
9	2.8681074710e+01	2.2491243006e+02
10	2.9509808339e+01	2.5753749663e+02
11	3.0084374072e+01	3.1295724210e+02
12	2.8769711216e+01	2.7120668953e+02
13	9.3617197440e+00	2.8176838841e+01
14	1.1910913449e+01	3.5520564915e+01
15	1.3012140279e+01	5.7009457756e+01
16	1.0622804451e+01	3.5445016559e+01
17	8.3579051330e+00	2.0684913786e+01
18	6.5489301496e+00	1.2234928962e+01
19	5.2614429525e+00	7.6061535788e+00
20	4.1162791353e+00	4.8931067897e+00
21	3.4592280724e+00	3.2738574268e+00
22	2.9179786283e+00	2.2494290562e+00
23	2.4562919083e+00	1.5903451295e+00
24	2.0695565966e+00	1.1470312742e+00
25	1.7498119491e+00	8.4520315359e-01
26	1.4852733539e+00	6.3244683470e-01
27	1.2680260839e+00	4.8118916895e-01
28	1.0877778031e+00	3.7060054875e-01
29	9.5977147923e-01	2.8925975092e-01
30	8.5898090128e-01	2.2802518496e-01
31	7.7078525321e-01	1.8173257986e-01
32	6.9353706428e-01	1.4603877510e-01
33	6.2554742657e-01	1.1843669225e-01
34	5.6521124220e-01	9.6724738893e-02
35	5.1227871586e-01	7.9612116101e-02
36	4.6532428510e-01	6.5921024407e-02
37	4.2392298469e-01	5.4953380882e-02
38	3.8667301983e-01	4.6049515241e-02
39	3.5391042032e-01	3.8816032021e-02
40	3.2475331912e-01	3.2868567982e-02
41	2.9855803623e-01	2.7976974189e-02
42	2.7503137861e-01	2.3909940783e-02
43	2.5388305675e-01	2.0528424161e-02
44	2.3483327021e-01	1.7688911695e-02
45	2.1761720296e-01	1.5305120809e-02
46	2.0198721987e-01	1.3285608892e-02
47	1.8771338427e-01	1.1575474996e-02
48	1.7491130563e-01	1.0115086011e-02
49	1.6341813119e-01	8.8687402352e-03
50	1.5276105104e-01	7.7967095956e-03

Warunek naturalny

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
51	2.4696377473e+00	3.1715544194e+00
52	2.4119777899e+00	3.0368799518e+00
53	2.3617189243e+00	2.9108446834e+00
54	2.3115897184e+00	2.7926539533e+00
55	2.2632192259e+00	2.6817051596e+00
56	2.2185625667e+00	2.5773670616e+00
57	2.1738244427e+00	2.4791500598e+00
58	2.1322111451e+00	2.3865419460e+00
59	2.0924576814e+00	2.2991473035e+00
60	2.0511562928e+00	2.2165470846e+00
61	2.0174223262e+00	2.1384161440e+00
62	1.9750140079e+00	2.0644097789e+00
63	1.9465111458e+00	1.9942582208e+00
64	1.9117040028e+00	1.9276759045e+00
65	1.8770905262e+00	1.8644377958e+00
66	1.8503412264e+00	1.8043047276e+00
67	1.8168397471e+00	1.7470877530e+00
68	1.7877684261e+00	1.6925861434e+00
69	1.7631411705e+00	1.6406397072e+00
70	1.7332416478e+00	1.5910786014e+00
71	1.7075546491e+00	1.5437665997e+00
72	1.6838636600e+00	1.4985591649e+00
73	1.6575841707e+00	1.4553396579e+00
74	1.6337404378e+00	1.4139845438e+00
75	1.6102539207e+00	1.3743908258e+00
76	1.5891856394e+00	1.3364601382e+00
77	1.5663971739e+00	1.3000979237e+00
78	1.5433236741e+00	1.2652150560e+00
79	1.5238845312e+00	1.2317362829e+00
80	1.5047470974e+00	1.1995819978e+00
81	1.4835901814e+00	1.1686865624e+00
82	1.4644045842e+00	1.1389801370e+00
83	1.4458855954e+00	1.1104070498e+00
84	1.4291741290e+00	1.0829048873e+00
85	1.4103758702e+00	1.0564238433e+00
86	1.3932225859e+00	1.0309106956e+00
87	1.3765310935e+00	1.0063210416e+00
88	1.3595614083e+00	9.8260792813e-01
89	1.3448822846e+00	9.5973220109e-01
90	1.3278231566e+00	9.3765234139e-01
91	1.3130992890e+00	9.1633354048e-01
92	1.2974914415e+00	8.9573910100e-01
93	1.2844766084e+00	8.7583801099e-01
94	1.2697632874e+00	8.5659763071e-01
95	1.2559069095e+00	8.3799032632e-01
96	1.2416454488e+00	8.1998694862e-01
97	1.2281763249e+00	8.0256288529e-01
98	1.2161933164e+00	7.8569196285e-01
99	1.2030296389e+00	7.6935210928e-01
100	1.1904360447e+00	7.5351998468e-01

Warunek clamped

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
51	1.4276683326e-01	6.8752802404e-03
52	1.3405161752e-01	6.0775234864e-03
53	1.2588429095e-01	5.3874089809e-03
54	1.1812722159e-01	4.7863195917e-03
55	1.1144281926e-01	4.2632535041e-03
56	1.0482130214e-01	3.8051583574e-03
57	9.9110992496e-02	3.4043550778e-03
58	9.3481661312e-02	3.0515468587e-03
59	8.8562100103e-02	2.7413151367e-03
60	8.3669379046e-02	2.4669553395e-03
61	7.9488885173e-02	2.2245829001e-03
62	7.5147483530e-02	2.0093018958e-03
63	7.1609500922e-02	1.8182955364e-03
64	6.7963127540e-02	1.6479544401e-03
65	6.4668090021e-02	1.4962208941e-03
66	6.1657809939e-02	1.3603843319e-03
67	5.8541731890e-02	1.2389310360e-03
68	5.6006598625e-02	1.1298246543e-03
69	5.3468850642e-02	1.0319276078e-03
70	5.0850461047e-02	9.4369097244e-04
71	4.8799973667e-02	8.6425956004e-04
72	4.6703375365e-02	7.9244469786e-04
73	4.4539212370e-02	7.2759541434e-04
74	4.2741994644e-02	6.6879322806e-04
75	4.1049387619e-02	6.1553785540e-04
76	3.9294950346e-02	5.6711937069e-04
77	3.7552499156e-02	5.2314705670e-04
78	3.6227713533e-02	4.8306147121e-04
79	3.4842462806e-02	4.4656479810e-04
80	3.3411173895e-02	4.1321254319e-04
81	3.1989549546e-02	3.8276988508e-04
82	3.0939105359e-02	3.5488591810e-04
83	2.9839227202e-02	3.2937556941e-04
84	2.8700829473e-02	3.0595739138e-04
85	2.7533679894e-02	2.8448591104e-04
86	2.6570157575e-02	2.6473305646e-04
87	2.5729111193e-02	2.4658448135e-04
88	2.4852433840e-02	2.2985470960e-04
89	2.3947809807e-02	2.1445335789e-04
90	2.3022150286e-02	2.0022926092e-04
91	2.2237554910e-02	1.8710910303e-04
92	2.1595165579e-02	1.7496956918e-04
93	2.0923750780e-02	1.6375172346e-04
94	2.0228960401e-02	1.5335603435e-04
95	1.9515905797e-02	1.4373215825e-04
96	1.8789206491e-02	1.3479737684e-04
97	1.8230112126e-02	1.2651365745e-04
98	1.7742745233e-02	1.1881034281e-04
99	1.7233464565e-02	1.1165634061e-04
100	1.6706213988e-02	1.0499459048e-04

Tabela 1: Błędy interpolacyjnej funkcji sklepanej 2 stopnia

7.2 Interpolacyjna funkcja sklejana 3 stopnia

Warunek naturalny

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
2	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
3	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
4	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
5	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
6	1.2146495371e+01	1.6441260848e+01
7	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
8	1.2674501853e+01	1.7349190392e+01
9	1.4472580516e+01	1.8472701901e+01
10	1.5282248583e+01	1.6996386043e+01
11	1.4697457960e+01	1.4096321105e+01
12	1.2928891281e+01	1.1515504586e+01
13	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
14	8.3111580666e+00	5.5426442478e+00
15	6.3697782157e+00	2.5633837969e+00
16	4.8576445703e+00	1.2432663340e+00
17	3.7237563487e+00	6.3597432640e-01
18	2.8873151709e+00	3.4115649483e-01
19	2.2708878931e+00	1.9127855786e-01
20	1.8129042202e+00	1.1177857490e-01
21	1.4703195100e+00	6.7882236508e-02
22	1.2094597429e+00	4.2710540796e-02
23	1.0082573197e+00	2.7757484977e-02
24	8.5111597692e-01	1.8579403136e-02
25	7.2678433091e-01	1.2773604186e-02
26	6.2709030426e-01	8.9979513295e-03
27	5.4604447207e-01	6.4794506214e-03
28	4.7922775016e-01	4.7600047992e-03
29	4.2457325547e-01	3.5608212944e-03
30	3.7837561676e-01	2.7079900622e-03
31	3.3944333556e-01	2.0905127332e-03
32	3.0633194878e-01	1.6360222384e-03
33	2.7787116376e-01	1.2963974240e-03
34	2.5322854291e-01	1.0390476694e-03
35	2.3198752528e-01	8.4152107894e-04
36	2.1298294225e-01	6.8810294850e-04
37	1.9677374444e-01	5.6763026609e-04
38	1.8221345156e-01	4.7206312190e-04
39	1.6900309466e-01	3.9553589070e-04
40	1.5764817772e-01	3.3371731935e-04
41	1.4733580183e-01	2.8337275401e-04
42	1.3787101028e-01	2.4206092135e-04
43	1.2929911089e-01	2.0792093532e-04
44	1.2182184456e-01	1.7952090257e-04
45	1.1489276034e-01	1.5574951513e-04
46	1.0845662667e-01	1.3573690427e-04
47	1.0246530785e-01	1.1879706730e-04
48	9.7178871405e-02	1.0438482706e-04
49	9.2365883500e-02	9.2064086064e-05
50	8.7852393925e-02	8.1483527032e-05

Warunek clamped

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
2	7.1608203686e+01	1.9982478249e+03
3	4.3578740714e+01	3.9958470178e+02
4	3.4069286614e+01	1.2605202414e+02
5	2.6631486095e+01	5.7097767626e+01
6	2.3637008125e+01	4.1464806327e+01
7	1.5889933111e+01	1.9514020745e+01
8	1.4641788900e+01	1.7785100139e+01
9	1.2135796089e+01	1.2497789506e+01
10	8.3867112439e+00	7.3136994526e+00
11	5.3354557314e+00	4.0105428707e+00
12	5.9235669155e+00	3.5603992357e+00
13	6.0612150344e+00	4.8537736546e+00
14	4.8884150461e+00	2.6199036940e+00
15	3.4661745639e+00	1.0028067783e+00
16	2.2695018899e+00	4.2413197572e-01
17	1.4840613942e+00	2.0073386561e-01
18	1.1011360144e+00	1.0320153065e-01
19	8.2480976834e-01	5.6380238657e-02
20	6.2543878859e-01	3.2279995851e-02
21	5.0614398277e-01	1.9200394752e-02
22	4.3937512499e-01	1.1795660304e-02
23	3.6555674823e-01	7.4534079511e-03
24	2.9603026683e-01	4.8286103776e-03
25	2.3494501186e-01	3.1989744495e-03
26	1.8360597317e-01	2.1626859157e-03
27	1.4177574445e-01	1.4892879333e-03
28	1.0819817316e-01	1.0429884250e-03
29	9.6071174945e-02	7.4181046092e-04
30	8.7869863242e-02	5.3516243555e-04
31	7.9848787573e-02	3.9118546046e-04
32	7.2228348458e-02	2.8944076175e-04
33	6.5285962646e-02	2.1658856250e-04
34	5.8895404912e-02	1.6378231359e-04
35	5.3079616130e-02	1.2506741257e-04
36	4.7820588812e-02	9.6379834106e-05
37	4.3175780041e-02	7.4909710875e-05
38	3.8967121622e-02	5.8690509043e-05
39	3.5186650514e-02	4.6330144028e-05
40	3.1809200714e-02	3.6832551842e-05
41	2.8799858504e-02	2.9477794101e-05
42	2.6119074664e-02	2.3740514373e-05
43	2.3726066587e-02	1.9233900120e-05
44	2.1581003021e-02	1.5670703640e-05
45	1.9646345799e-02	1.2835886370e-05
46	1.7887626983e-02	1.0567240712e-05
47	1.6322329897e-02	8.7415002411e-06
48	1.4959855709e-02	7.2643677042e-06
49	1.3693617753e-02	6.0632055106e-06
50	1.2520861819e-02	5.0817307374e-06

Warunek naturalny

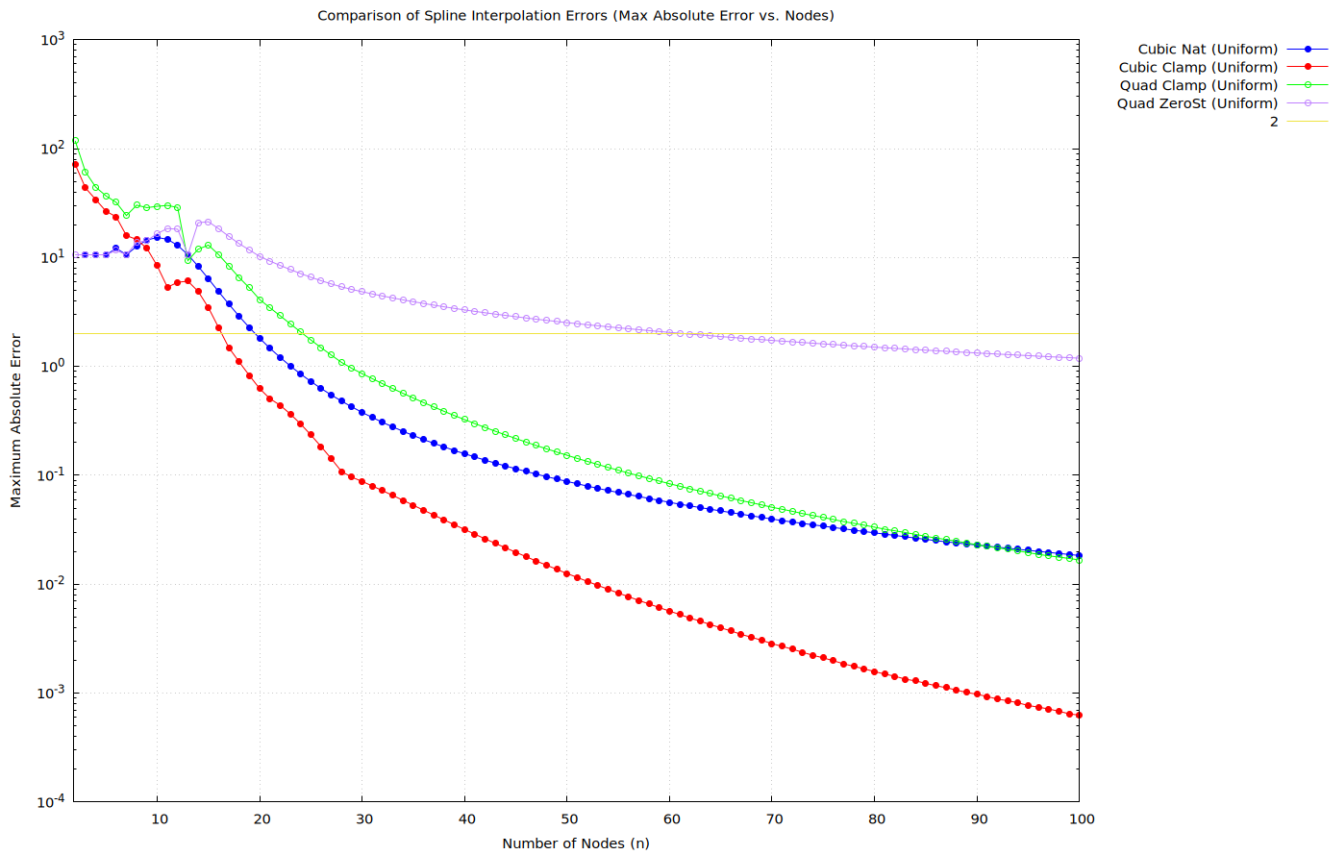
Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
51	8.3612502167e-02	7.2358542198e-05
52	7.9623209854e-02	6.4457062392e-05
53	7.5864030185e-02	5.7588874362e-05
54	7.2602935766e-02	5.1597264858e-05
55	6.9551835974e-02	4.6352375231e-05
56	6.660562867e-02	4.1746189561e-05
57	6.3917384525e-02	3.7688402524e-05
58	6.1311700900e-02	3.4103154210e-05
59	5.8833911066e-02	3.0926524654e-05
60	5.6475298546e-02	2.8104412318e-05
61	5.4288525073e-02	2.5590820219e-05
62	5.2371202539e-02	2.3346538643e-05
63	5.0538215682e-02	2.1338044697e-05
64	4.8784330593e-02	1.9536535566e-05
65	4.7104745105e-02	1.7917198948e-05
66	4.5495045023e-02	1.6458615030e-05
67	4.3951165556e-02	1.5142242211e-05
68	4.2469357244e-02	1.3951955271e-05
69	4.1046155784e-02	1.2873702143e-05
70	3.9678355249e-02	1.1895217341e-05
71	3.8362984269e-02	1.1005774171e-05
72	3.7221222844e-02	1.0195954050e-05
73	3.6154290590e-02	9.4574654151e-06
74	3.5124962466e-02	8.7829959619e-06
75	3.4131369414e-02	8.1660910342e-06
76	3.3171767024e-02	7.6010426378e-06
77	3.2244525202e-02	7.0827859616e-06
78	3.1348118853e-02	6.6068148397e-06
79	3.0481119464e-02	6.1691133855e-06
80	2.9642187480e-02	5.7661023497e-06
81	2.8830065404e-02	5.3945843079e-06
82	2.8043571527e-02	5.0517020477e-06
83	2.7281594225e-02	4.7348916251e-06
84	2.6543086774e-02	4.4418481233e-06
85	2.5827062612e-02	4.1704971499e-06
86	2.5132591019e-02	3.9189692440e-06
87	2.4514999494e-02	3.6855808625e-06
88	2.3960624893e-02	3.4688112276e-06
89	2.3421611732e-02	3.2672874997e-06
90	2.2897360674e-02	3.0797645631e-06
91	2.2387303882e-02	2.9051117282e-06
92	2.1890902949e-02	2.7423021922e-06
93	2.1407646986e-02	2.5904003208e-06
94	2.0937050856e-02	2.4485563746e-06
95	2.0478653553e-02	2.3159958949e-06
96	2.0032016688e-02	2.1920128487e-06
97	1.9596723106e-02	2.0759634547e-06
98	1.9172375591e-02	1.9672590584e-06
99	1.8758595670e-02	1.8653593200e-06
100	1.8355022504e-02	1.7697694604e-06

Warunek clamped

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
51	1.1538169301e-02	4.2760612173e-06
52	1.0590972905e-02	3.6117881828e-06
53	9.7576283878e-03	3.0617899263e-06
54	9.0019079685e-03	2.6045699976e-06
55	8.2946175913e-03	2.2230091424e-06
56	7.6832681509e-03	1.9034086976e-06
57	7.0927944563e-03	1.6347560248e-06
58	6.5863316082e-03	1.4081583940e-06
59	6.1010025231e-03	1.2164066665e-06
60	5.6672364123e-03	1.0536296761e-06
61	5.2748748326e-03	9.1503002631e-07
62	4.8881393967e-03	7.9667225818e-07
63	4.5770610289e-03	6.9531477981e-07
64	4.2523381613e-03	6.0828026248e-07
65	3.9767994840e-03	5.3334830647e-07
66	3.7231389246e-03	4.6867317620e-07
67	3.4606514856e-03	4.1271393137e-07
68	3.2567903875e-03	3.6418170755e-07
69	3.0549704509e-03	3.2199410590e-07
70	2.8468528494e-03	2.8524093273e-07
71	2.6852198898e-03	2.5315321435e-07
72	2.5283420998e-03	2.2508050658e-07
73	2.3664351800e-03	2.0047106479e-07
74	2.2256360065e-03	1.7885522432e-07
75	2.1068555068e-03	1.5983320097e-07
76	1.9836645684e-03	1.4306274717e-07
77	1.8575334129e-03	1.2825092230e-07
78	1.7616547777e-03	1.1514646685e-07
79	1.6706578272e-03	1.0353242257e-07
80	1.5766560987e-03	9.3223151152e-08
81	1.4960508108e-03	8.4057053263e-08
82	1.4277845549e-03	7.5894750326e-08
83	1.3436423145e-03	6.8615327026e-08
84	1.2954375510e-03	6.2113771880e-08
85	1.2314637519e-03	5.6298571515e-08
86	1.1672708204e-03	5.1089918739e-08
87	1.1234200007e-03	4.6418385514e-08
88	1.0671032029e-03	4.2222918737e-08
89	1.0140599744e-03	3.8450107192e-08
90	9.7708346823e-04	3.5053082062e-08
91	9.3001870478e-04	3.1990648144e-08
92	8.8088721878e-04	2.9226601226e-08
93	8.5194711212e-04	2.6728479105e-08
94	8.1465195855e-04	2.4468860775e-08
95	7.7018388027e-04	2.2422154769e-08
96	7.4308407999e-04	2.0566386765e-08
97	7.1543691312e-04	1.8881933063e-08
98	6.8162846503e-04	1.7351370763e-08
99	6.4576709367e-04	1.5959210174e-08
100	6.2726154257e-04	1.4691679105e-08

Tabela 2: Błędy interpolacyjnej funkcji sklepanej 3 stopnia

7.3 Błędy interpolacji na wykresie



Rysunek 1: Wykres błędów interpolacji

Na Rysunku 1 przedstawiono porównanie maksymalnego błędu bezwzględnego różnych metod interpolacji funkcjami splejnymi w zależności od liczby węzłów interpolacyjnych (n). Wszystkie zaprezentowane wyniki dotyczą przypadku węzłów równoodległych (Uniform). Oś pionowa (błąd) jest w skali logarytmicznej, co pozwala na łatwiejsze porównanie rzędów wielkości błędów i ocenę tempa zbieżności.

Na podstawie analizy wykresu (Rysunek 1) można sformułować następujące wnioski:

- **Ogólna tendencja:** Dla wszystkich testowanych metod interpolacji splejnami (poza trywialną linią referencyjną '2'), maksymalny błąd bezwzględny generalnie maleje wraz ze wzrostem liczby węzłów n . Świadczy to o zbieżności tych metod interpolacyjnych.
- **Porównanie splejnow kubicznych (3. stopnia):**
 - Obie metody kubiczne ('Cubic Nat' - niebieska linia, 'Cubic Clamp' - czerwona linia) wykazują znacznie szybszą zbieżność (błąd maleje szybciej wraz ze wzrostem n) i osiągają znacznie niższe wartości błędów niż metody kwadratowe dla tej samej liczby węzłów (szczególnie dla $n > 15$).
 - W tym konkretnym przypadku interpolowanej funkcji, metoda 'Cubic Clamp' (z narzuconymi pochodnymi na brzegach) daje wyraźnie mniejszy błąd niż metoda 'Cubic Nat' (naturalna, $S'''(x_1) = S'''(x_n) = 0$) w całym zakresie badanych n . Sugeruje to, że narzucone wartości pochodnych (prawdopodobnie dokładne lub dobrze aproksymowane wartości pochodnych interpolowanej funkcji na brzegach) lepiej oddają charakter funkcji na krańcach niż założenie zerowej drugiej pochodnej.
 - Teoretycznie, błąd interpolacji splejnem kubicznym dla funkcji dostatecznie gładkiej jest rzędu $O(h^4)$, gdzie $h \propto 1/n$ jest odległością między węzłami. Szybki spadek błędu (strome nachylenie linii na wykresie logarytmicznym) jest zgodny z tym wysokim rzędem zbieżności.
- **Porównanie splejnow kwadratowych (2. stopnia):**

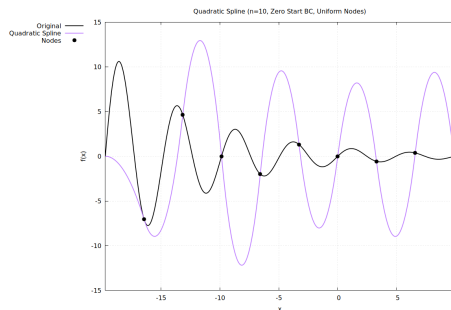
- Metody kwadratowe ('Quad Clamp' - zielona linia, 'Quad ZeroSt' - fioletowa linia) również wykazują zbieżność, ale jest ona wyraźnie wolniejsza niż dla metod kubicznych (linie są mniej strome).
- W tym przypadku, metoda 'Quad Clamp' (z narzuconą pochodną, prawdopodobnie aproksymowaną jako γ_2) daje generalnie lepsze wyniki (mniejszy błąd) niż metoda 'Quad ZeroSt' (z narzuconą zerową pochodną na początku, $S'_1(x_1) = 0$).
- Metoda 'Quad ZeroSt' wykazuje pewne nieregularności dla małych n (około 10-15), gdzie błąd chwilowo rośnie przed ustabilizowaniem się trendu spadkowego. Może to wynikać ze specyfiki warunku brzegowego $S'_1(x_1) = 0$ dla tej konkretnej funkcji przy małej liczbie węzłów.
- Teoretycznie, błąd interpolacji splajnem kwadratowym jest rzędu $O(h^3)$, co tłumaczy wolniejszą zbieżność i generalnie wyższe błędy w porównaniu do metod kubicznych ($O(h^4)$).
- Obie metody kwadratowe mają trudność z osiągnięciem błędu znacznie poniżej ≈ 1 , nawet dla $n = 100$.

• **Wnioski ogólne:**

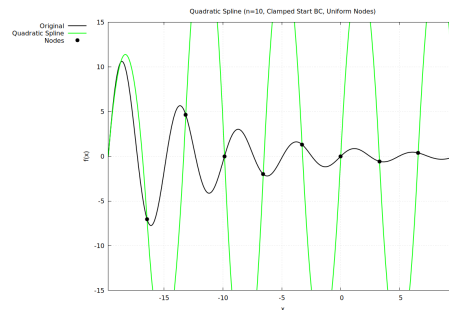
- Splajny kubiczne oferują znacznie wyższą dokładność interpolacji niż splajny kwadratowe dla tej samej liczby równoodległych węzłów (pod warunkiem, że interpolowana funkcja jest wystarczająco gładka).
- Wybór warunków brzegowych ma istotny wpływ na dokładność interpolacji, szczególnie dla mniejszej liczby węzłów. W analizowanym przypadku, warunki typu "Clamped" (narzucone pochodne, dobrze dopasowane do funkcji) dały lepsze rezultaty zarówno dla splajnów kubicznych, jak i kwadratowych, w porównaniu do warunków "Natural" lub "Natural". Należy jednak pamiętać, że optymalny wybór warunku brzegowego zależy od charakterystyki interpolowanej funkcji na brzegach przedziału.

8 Przykładowe wykresy interpolacji z podziałem na stopień oraz warunek brzegowy funkcji splejanej

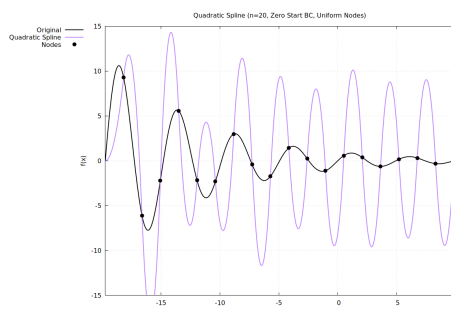
8.1 Interpolacyjna funkcja splejana 2 stopnia



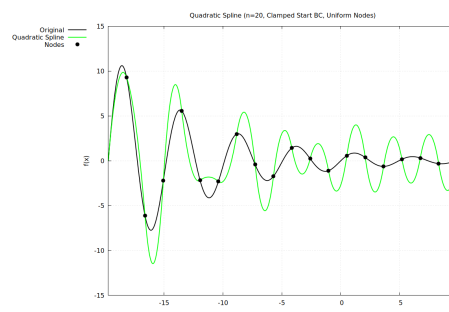
(a) Wykres 1: Warunek naturalny $n=10$



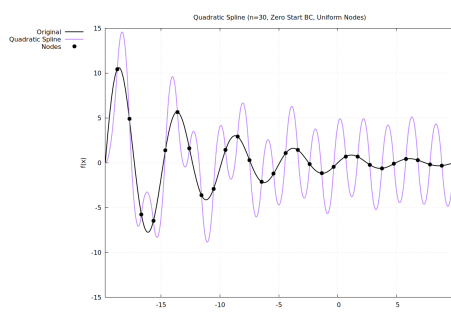
(b) Wykres 2: Warunek clamped $n=10$



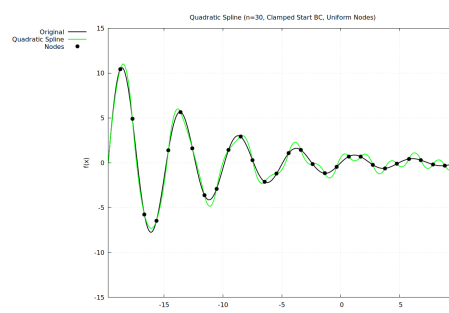
(c) Wykres 3: Warunek naturalny $n=20$



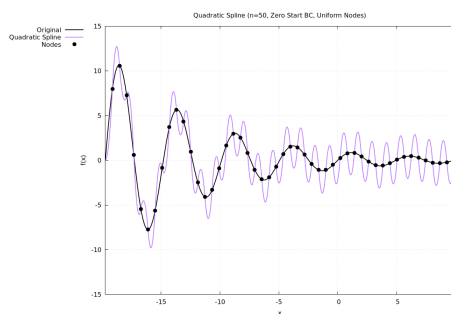
(d) Wykres 4: Warunek clamped $n=20$



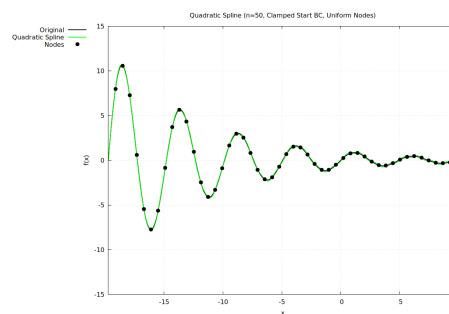
(e) Wykres 5: Warunek naturalny $n=30$



(f) Wykres 6: Warunek clamped $n=30$



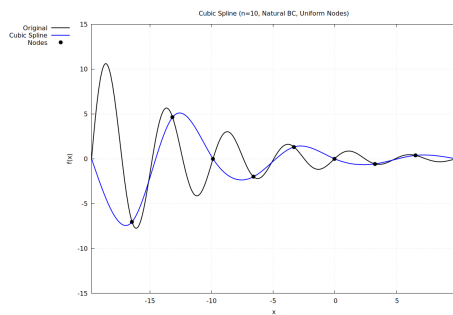
(g) Wykres 7: Warunek naturalny $n=50$



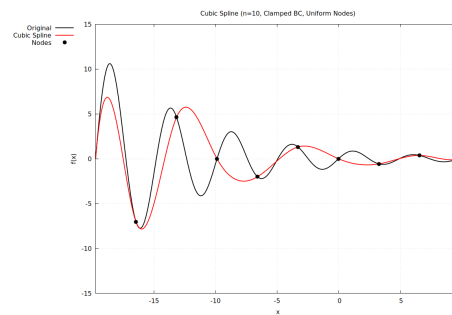
(h) Wykres 8: Warunek clamped $n=50$

Rysunek 2: Porównanie wykresów dla interpolacyjnej funkcji splejanej 2 stopnia dla obu warunków brzegowych

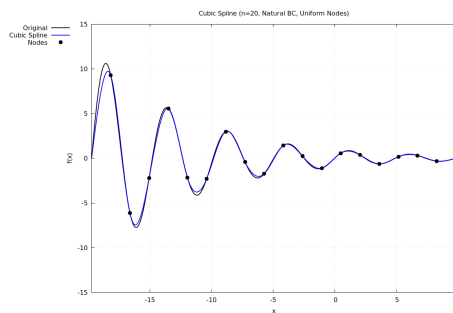
8.2 Interpolacyjna funkcja sklejana 3 stopnia



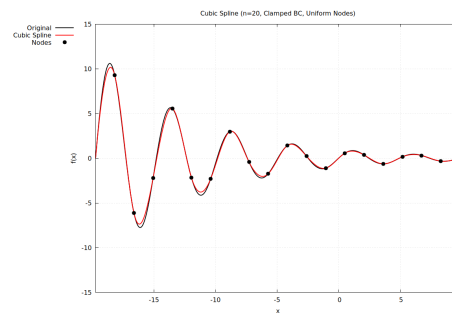
(a) Wykres 1: Warunek naturalny $n=10$



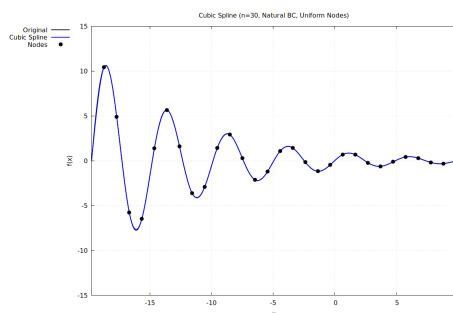
(b) Wykres 2: Warunek clamped $n=10$



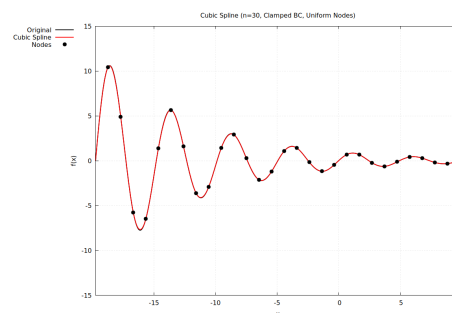
(c) Wykres 3: Warunek naturalny $n=20$



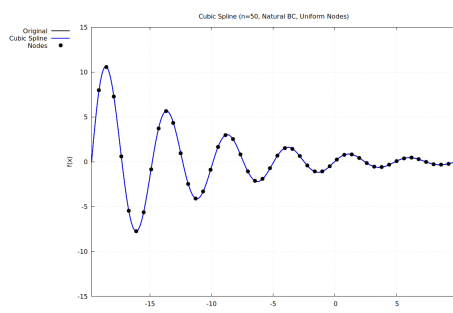
(d) Wykres 4: Warunek clamped $n=20$



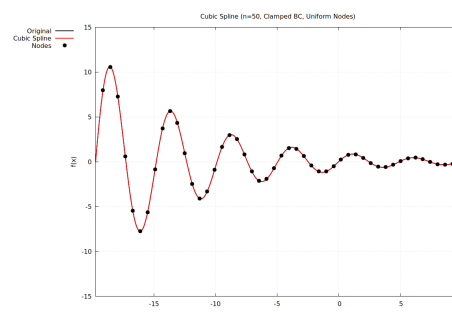
(e) Wykres 5: Warunek naturalny $n=30$



(f) Wykres 6: Warunek clamped $n=30$



(g) Wykres 7: Warunek naturalny $n=50$



(h) Wykres 8: Warunek clamped $n=50$

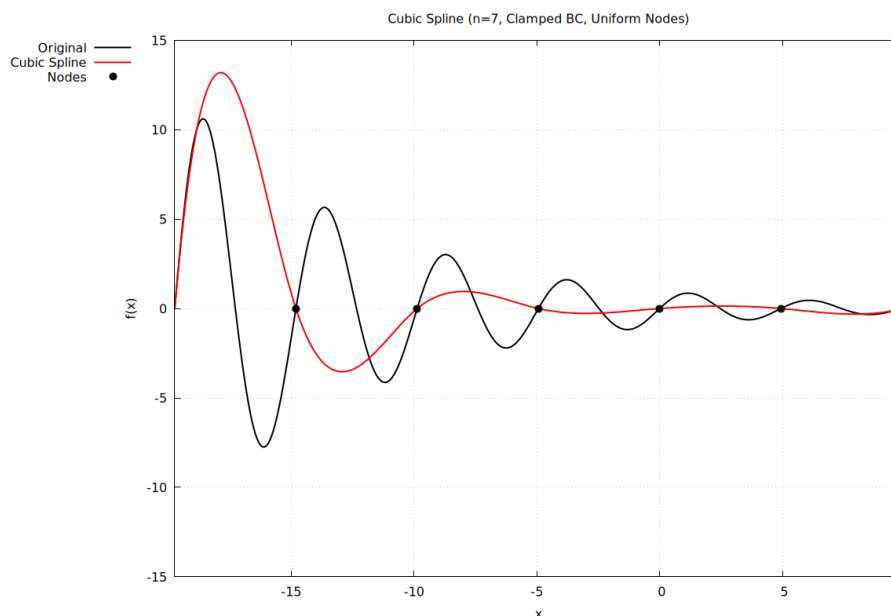
Rysunek 3: Porównanie wykresów dla interpolacyjnej funkcji skleanej 3 stopnia dla obu warunków brzegowych

9 Analiza interpolacji dla przypadków szczególnych

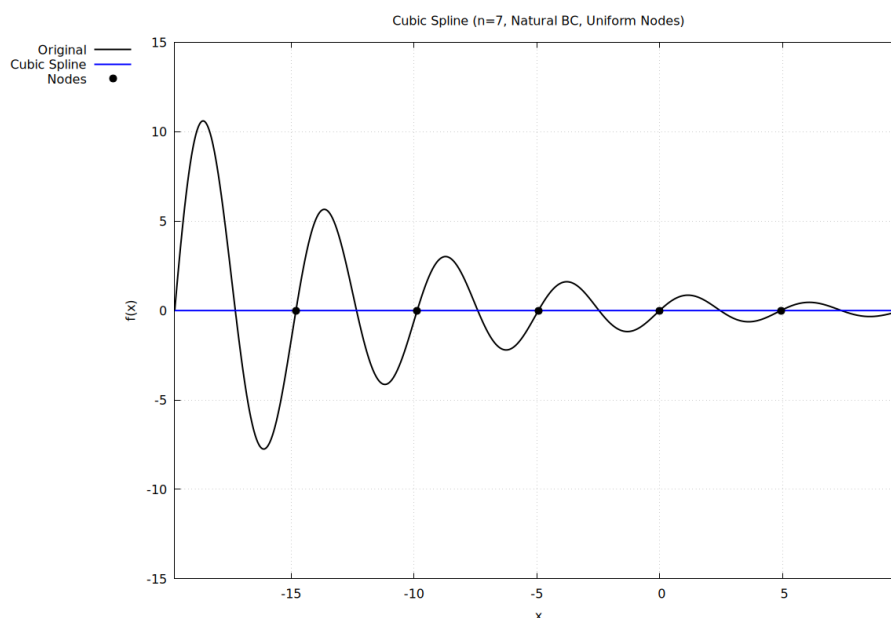
W tej sekcji szczegółowo przeanalizowano zachowanie różnych metod interpolacji funkcjami sklejonymi dla wybranych wartości liczby węzłów ($n = 7, n = 13, n = 100$). Analizowane przypadki dla $n = 7$ i $n = 13$

charakteryzują się tym, że węzły równoodległe trafiają w pobliże miejsc zerowych interpolowanej funkcji. Dodatkowo, analizowana funkcja posiada znaczące nachylenie oraz krzywiznę na brzegach przedziału interpolacji. Te czynniki uwypuklają problemy związane z wyborem warunków brzegowych, szczególnie gdy narzucone warunki są sprzeczne z rzeczywistym zachowaniem funkcji.

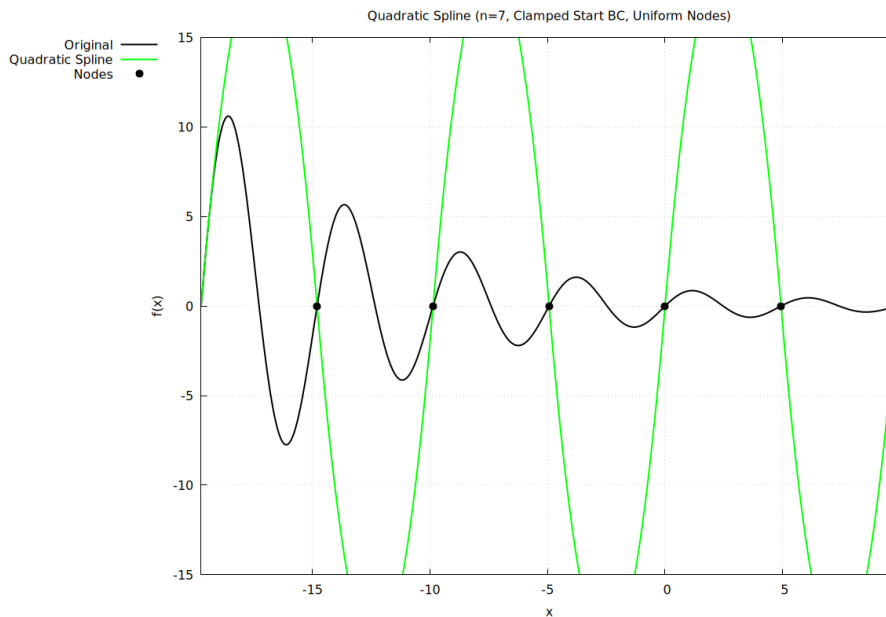
9.1 Przypadek małej liczby węzłów ($n=7$) i węzłów blisko miejsc zerowych



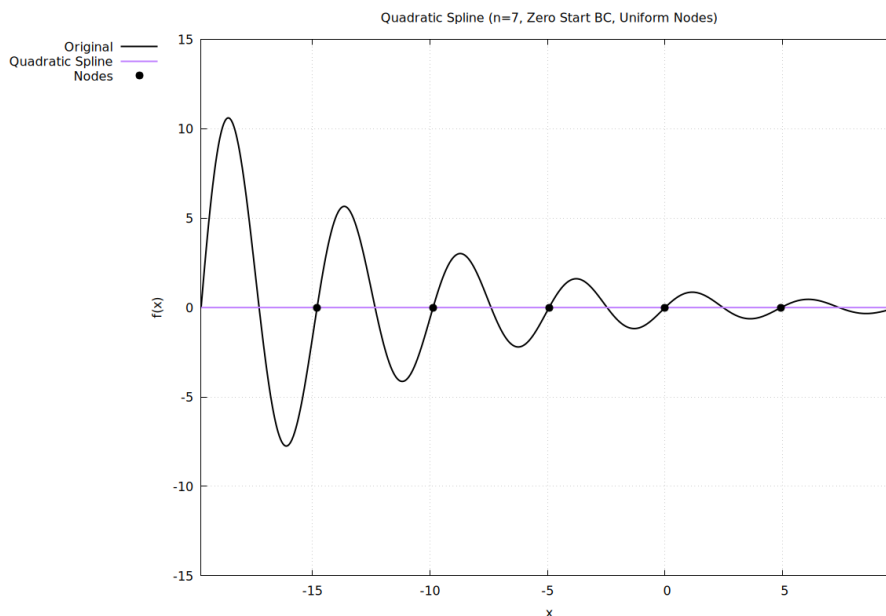
Rysunek 4: Interpolacja splajnem sześciennym, warunek Clamped BC, $n=7$



Rysunek 5: Interpolacja splajnem sześciennym, warunek Natural BC, $n=7$



Rysunek 6: Interpolacja splajnem kwadratowym, warunek Clamped Start BC, $n=7$



Rysunek 7: Interpolacja splajnem kwadratowym, warunek Natural BC, $n=7$

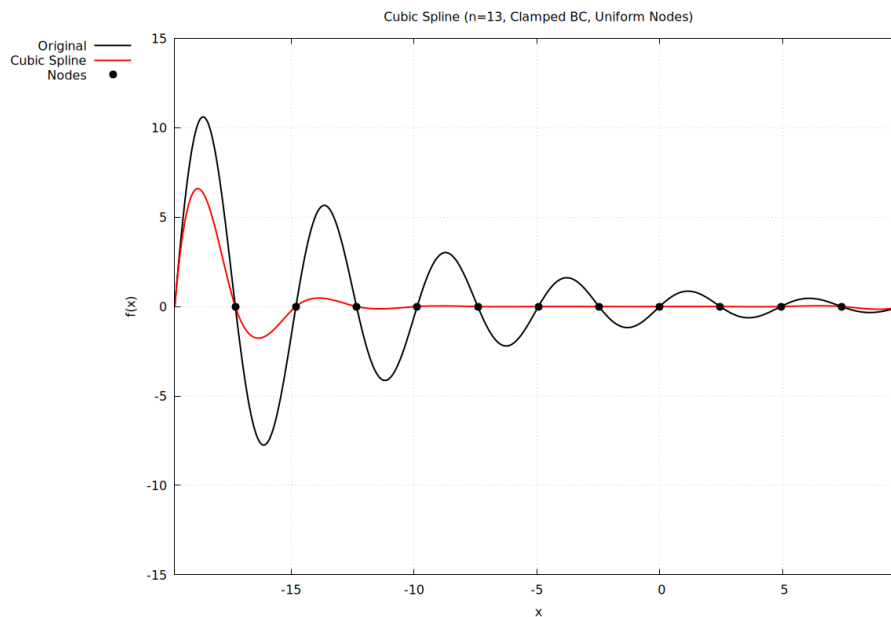
Dla $n = 7$ węzłów, przy ich specyficznym położeniu blisko miejsc zerowych, obserwujemy:

- **Splajn sześcienny, Clamped BC** (Rysunek 4): Jako jedyna metoda próbuje oddać oscylacyjny charakter funkcji. Dopasowanie jest jednak słabe, amplituda jest mocno zaniżona. Mimo to, jest to najlepszy wynik w tej grupie, co podkreśla znaczenie dopasowania warunków brzegowych do funkcji.
- **Splajn sześcienny, Natural BC** (Rysunek 5): Interpolacja całkowicie zawodzi, dając niemal płaską linię. Warunek $S''(x_1) = S''(x_n) = 0$ jest w rażącej sprzeczności z rzeczywistą krzywizną funkcji na brzegach. W połączeniu z węzłami bliskimi zera, prowadzi to do niepoprawnego wyniku.
- **Splajn kwadratowy, Clamped Start BC** (Rysunek 6): Metoda wykazuje ekstremalną niestabilność numeryczną, generując wartości dążące do nieskończoności między węzłami. Ten warunek, w połączeniu z małą liczbą węzłów i ich położeniem, okazał się nieodpowiedni.

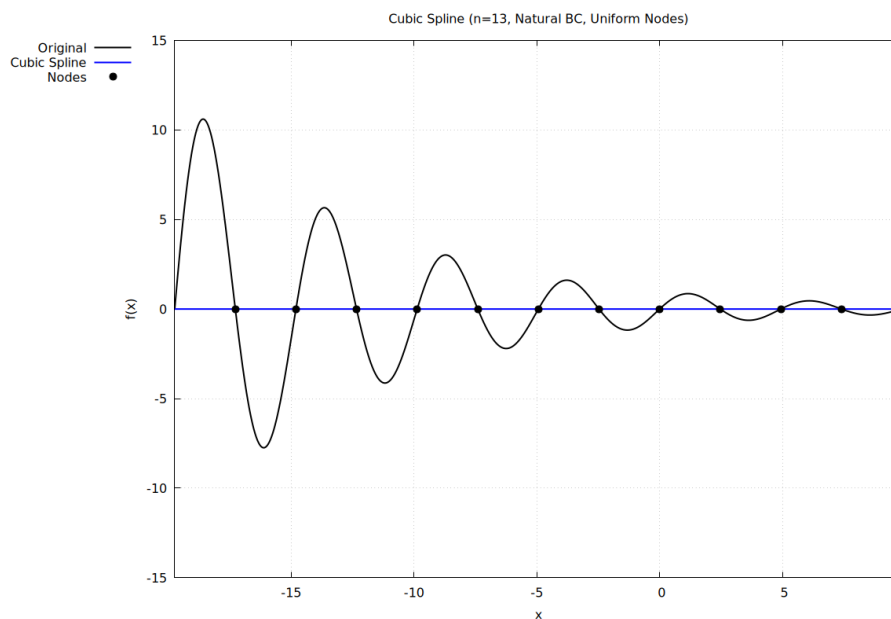
- **Splajn kwadratowy, Zero Start BC** (Rysunek 7): Podobnie jak Cubic Natural, interpolacja zawodzi, dając płaską linię. Narzucony warunek zerowej pochodnej na starcie ($S'_1(x_1) = 0$) jest fundamentalnie sprzeczny z dużym nachyleniem funkcji oryginalnej w tym punkcie.

Podsumowując dla $n=7$: Metody z warunkami brzegowymi ('Natural', 'Natural'), które są sprzeczne z zachowaniem funkcji na brzegach, całkowicie zawodzą w tej konfiguracji. Nawet metoda 'Clamped' dla splajnu kwadratowego okazała się niestabilna. Jedynie 'Cubic Clamped' daje ślad poprawnej interpolacji.

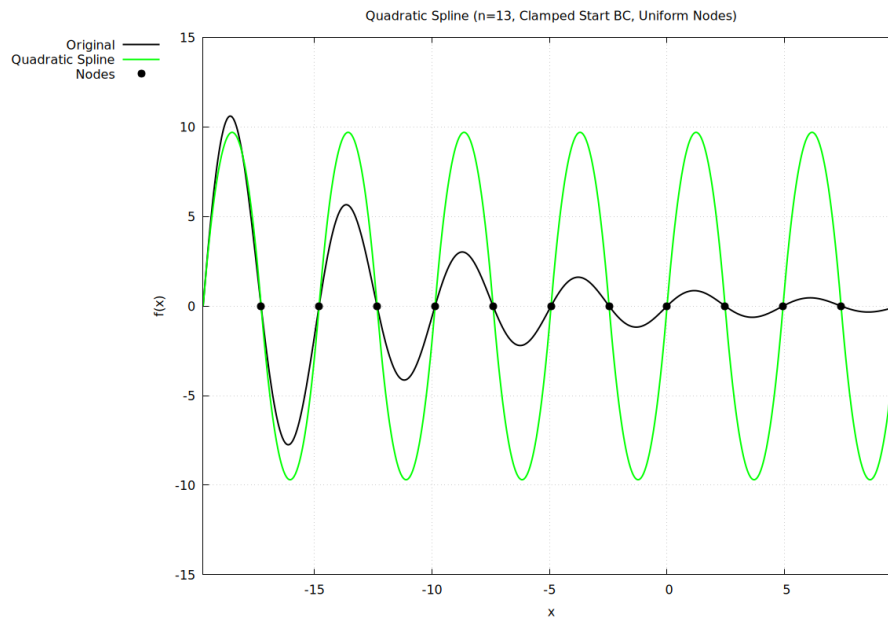
9.2 Przypadek średniej liczby węzłów ($n=13$) i węzłów blisko miejsc zerowych



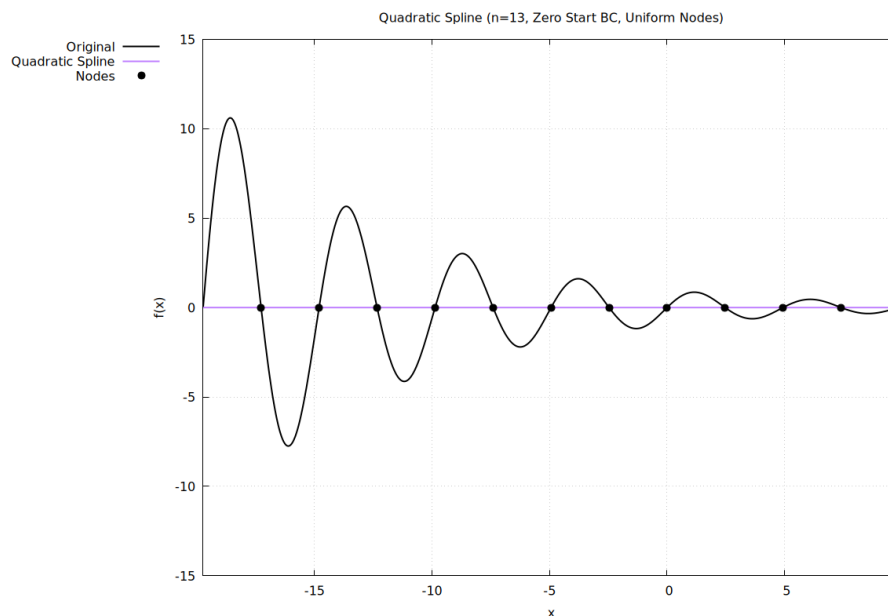
Rysunek 8: Interpolacja splajnem sześciennym, warunek Clamped BC, $n=7$



Rysunek 9: Interpolacja splajnem sześciennym, warunek Natural BC, $n=7$



Rysunek 10: Interpolacja splejnym kwadratowym, warunek Clamped Start BC, $n=7$



Rysunek 11: Interpolacja splejnym kwadratowym, warunek Natural BC, $n=7$

Zwiększenie liczby węzłów do $n = 13$, przy zachowaniu ich bliskości do miejsc zerowych, zmienia obraz sytuacji:

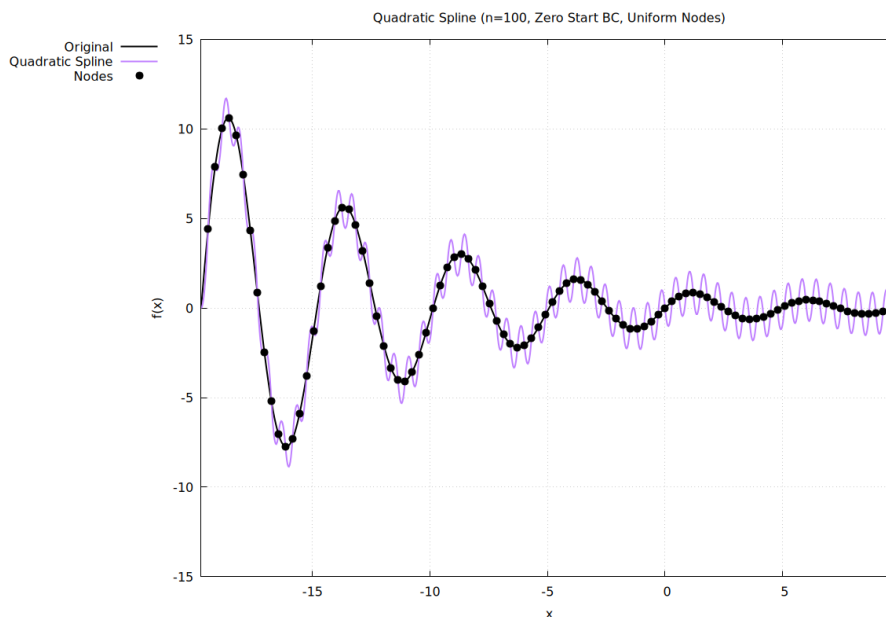
- **Splajn sześcienny, Clamped BC** (Rysunek 8): Zdecydowanie najlepsza metoda. Interpolacja dobrze oddaje kształt i oscylacje funkcji, choć amplituda może być nadal nieznacznie zaniżona. Potwierdza to siłę tej metody, gdy warunki brzegowe są dobrze dobrane.
- **Splajn sześcienny, Natural BC** (Rysunek 9): Nadal całkowicie niepoprawny wynik (płaska linia). Zwiększenie liczby węzłów nie kompensuje fundamentalnej sprzeczności warunku brzegowego z funkcją.
- **Splajn kwadratowy, Clamped Start BC** (Rysunek 10): Wynik nadal słaby. Obserwuje się duże oscylacje o znacznie zawyżonej amplitudzie i niepoprawnym kształcie w porównaniu do oryginału. Metoda nie radzi sobie w tej konfiguracji.

- **Splajn kwadratowy, Natural BC** (Rysunek 11): Podobnie jak Cubic Natural, wynik jest niepoprawny (płaska linia) z powodu konfliktu warunku $S'_1(x_1) = 0$ z funkcją.

Podsumowując dla $n=13$: 'Cubic Clamped' staje się użyteczny. Metody 'Natural' i 'Natural' pozostają bezużyteczne z powodu niedopasowanych warunków brzegowych. 'Quad Clamped' daje niepoprawne oscylacje.

9.3 Analiza interpolacji kwadratowej z warunkiem Natural BC

Szczególną uwagę należy poświęcić metodzie interpolacji splajnem kwadratowym z warunkiem brzegowym 'Natural' ($S'_1(x_1) = 0$). Analiza wykresów dla różnych wartości n ujawnia fundamentalny problem tej metody w kontekście interpolowanej funkcji.



Rysunek 12: Interpolacja splajnem kwadratowym, warunek Natural BC, $n=100$

Analiza interpolacji kwadratowej z warunkiem 'Natural' ($S'_1(x_1) = 0$) ujawnia fundamentalne problemy wynikające z rażącej sprzeczności narzuconego warunku brzegowego z rzeczywistym, dużym dodatnim nachyleniem interpolowanej funkcji w punkcie początkowym x_1 . Dla małej i średniej liczby węzłów ($n = 7, n = 13$), szczególnie gdy trafiają one w pobliże miejsc zerowych funkcji, ten konflikt prowadzi do całkowitego załamania interpolacji – funkcja sklejana staje się niemal płaską linią bliską zeru, niezdolną odwzorować oscylacji oryginału. Wraz ze znacznym wzrostem liczby węzłów ($n \geq 40$), gęstość punktów wymusza na splajnie wizualne podążanie za kształtem oryginalnej funkcji. Jest to jednak w dużej mierze efekt "brute force", maskujący problem niepoprawnego założenia brzegowego, co objawia się trwałymi, choć subtelnymi, niedopasowaniami w amplitudzie i kształcie lokalnych ekstremów nawet dla $n = 100$. Błąd wynikający z warunku $b_1 = 0$ propaguje się na cały przedział, wpływając na wszystkie współczynniki b_i . Choć metoda wykazuje zbieżność numeryczną (maksymalny błąd maleje wraz ze wzrostem n), pozostaje ona fundamentalnie wadliwa dla tej konkretnej funkcji, a wizualna poprawa przy dużej liczbie węzłów może być myląca co do jakościowej poprawności przybliżenia, zwłaszcza w kontekście odwzorowania pochodnych funkcji w pobliżu brzożewych.

10 Podsumowanie i wnioski

Celem przeprowadzonego laboratorium było zaimplementowanie i przeanalizowanie metod interpolacji za pomocą funkcji sklepanych (splajnów) drugiego (kwadratowego) i trzeciego (sześciennego) stopnia. Analizę przeprowadzono dla zadanej funkcji $f(x) = \sin(kx/\pi) \exp(-mx/\pi)$ na przedziale $[a, b]$, wykorzystując węzły równoodległe. Porównano różne warunki brzożewych: "Naturalne" ($S''(a) = S''(b) = 0$ dla splajnu sześciennego, $S'(a) = 0$ dla splajnu kwadratowego - oznaczone jako 'Natural BC') oraz "Mocowane" ('Clamped', wykorzystujące dokładne wartości pierwszej pochodnej $f'(a)$ i $f'(b)$ lub tylko $f'(a)$).

Kluczowe wnioski z przeprowadzonej analizy są następujące:

- **Dokładność w zależności od stopnia splajnu:** Zgodnie z teorią, splajny sześciennne oferują znacząco wyższą dokładność interpolacji niż splajny kwadratowe dla tej samej liczby węzłów równoodległych. Potwierdziła to analiza błędów (maksymalnego i średniokwadratowego), gdzie metody sześciennne wykazywały znacznie szybszą zbieżność (wyższe nachylenie na wykresie logarytmicznym błędu, zgodne z teoretycznym rzędem $O(h^4)$ vs $O(h^3)$ dla kwadratowych) i osiągały niższe wartości błędów, szczególnie dla większej liczby węzłów n .
- **Wpływ warunków brzegowych:** Wybór warunków brzegowych okazał się mieć **krytyczne znaczenie** dla jakości interpolacji badanej funkcji.
 - Warunki "Mocowane"('Clamped'), wykorzystujące dokładne wartości pochodnych funkcji oryginalnej na brzegach, konsekwentnie dawały najlepsze rezultaty zarówno dla splajnów sześciennnych, jak i kwadratowych, minimalizując błąd interpolacji w całym zakresie badanych n .
 - Warunki "Naturalne"(dla splajnu sześciennego) oraz "Natural"(dla splajnu kwadratowego), które narzucały zerowe wartości odpowiednio drugiej i pierwszej pochodnej na brzegu $x_1 = a$, okazały się **fundamentalnie nieodpowiednie** dla tej konkretnej funkcji, która charakteryzuje się znacznym nachyleniem i krzywizną na początku przedziału. Doprowadziło to do całkowitego załamania interpolacji (wynik bliski zeru) dla małej i średniej liczby węzłów, zwłaszcza gdy węzły wypadały blisko miejsc zerowych funkcji.
 - Nawet przy dużej liczbie węzłów ($n = 100$), gdzie wizualnie interpolacja z warunkiem 'Natural' wydawała się poprawiać, problem błędnego założenia brzegowego pozostawał, co objawiało się subtelnymi niedokładnościami i prawdopodobnie wolniejszą zbieżnością błędu w porównaniu do warunku 'Clamped'.
 - Efekt warunku brzegowego, choć maleje wraz ze wzrostem n , może być bardzo trwały, jeśli warunek jest silnie sprzeczny z rzeczywistym zachowaniem funkcji.
- **Stabilność:** W przypadku splajnu kwadratowego z warunkiem 'Clamped' dla małej liczby węzłów ($n = 7$) zaobserwowano niestabilność numeryczną, co podkreśla, że wybór metody i warunków musi uwzględniać również potencjalne problemy numeryczne.
- **Implementacja:** Układ równań trójdzielnych powstający przy wyznaczaniu splajnów sześciennnych rozwiązano za pomocą własnej implementacji algorytmu Thomasa, co jest efektywnym podejściem dla tego typu macierzy. Splajny kwadratowe wyznaczano metodą iteracyjną, co jest prostsze obliczeniowo.

Podsumowując, laboratorium pokazało praktyczne aspekty interpolacji funkcjami sklejonymi. Potwierdzono wyższość splajnów wyższych stopni (sześciennych nad kwadratowymi) pod względem dokładności dla funkcji gładkich. Jednocześnie uwypuklono kluczową rolę prawidłowego doboru warunków brzegowych – ich niezgodność z zachowaniem funkcji może prowadzić do całkowicie błędnych wyników, nawet jeśli metoda jest formalnie zbieżna. Wykorzystanie dokładnych informacji o pochodnych (warunki 'Clamped') okazało się w tym przypadku najlepszą strategią.