

METODY OBLICZENIOWE W NAUCE I TECHNICIE

Laboratorium 3 | Zagadnienie interpolacji Hermite'a

Jakub Kaliński | Informatyka | rok II
Grupa numer 5 | Piątek | Godzina 15:00 - 16:30

1 Treść i przebieg zadania

1.1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było wyznaczenie wielomianów interpolacyjnych w postaci **Hermite'a** dla zadanej funkcji oraz analiza ich dokładności w zależności od liczby węzłów i ich rozmieszczenia.

1.2 Zadania funkcja

$$f(x) = \sin\left(\frac{kx}{\pi}\right) e^{\frac{-mx}{\pi}}$$

w przedziale:

$$[-2\pi^2, \pi^2]$$

1.3 Przebieg ćwiczenia

Celem ćwiczenia była analiza interpolacji funkcji $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ przy użyciu metody **Hermite'a**, która w zadanych n węzłach interpolacji x_0, x_1, \dots, x_{n-1} uwzględnia zarówno wartości funkcji $f(x_i)$, jak i wartości jej **pierwszej pochodnej** $f'(x_i)$.

Zaimplementowana metoda interpolacji Hermite'a opiera się na **uogólnionym wzorze Newtona dla ilorazów różnicowych**, zgodnie z logiką przedstawioną w funkcji `hermiteInterpolation`:

- **Konstrukcja węzłów uogólnionych:** Dla n zadanych węzłów x_0, \dots, x_{n-1} tworzona jest sekwencja $m = 2n$ węzłów "zlepionych" z_0, z_1, \dots, z_{m-1} , gdzie $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ dla $i = 0, \dots, n-1$.
- **Obliczanie tablicy ilorazów różnicowych:** Konstruowana jest tablica ilorazów różnicowych $f[z_i, \dots, z_{i+j}]$.
 - Ilorazy rzędu zerowego (pierwsza kolumna tablicy) są inicjalizowane wartościami funkcji: $f[z_{2i}] = f(x_i)$ oraz $f[z_{2i+1}] = f(x_i)$.
 - Ilorazy rzędu pierwszego dla węzłów zlepionych są definiowane jako wartości **podanej pierwszej pochodnej**: $f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(x_i)$. Wartości te są przekazywane do funkcji interpolującej jako tablica `derivatives[]`.
 - **Aproksymacja pochodnych (krok poprzedzający):** Należy podkreślić, że wartości pochodnych $f'(x_i)$ używane w implementacji (`derivatives[i/2]` dla `fz[i][j]` przy `j=1`, `i % 2 == 0`) musiały zostać **obliczone przed wywołaniem funkcji interpolującej**, np. za pomocą ilorazów różnicowych (centralnych, wstecznych, progresywnych) opartych na wartościach funkcji f w dodatkowych punktach lub bezpośrednio z analitycznej postaci pochodnej, jeśli była znana. Sama funkcja `hermiteInterpolation` przyjmuje te wartości jako gotowe dane wejściowe.

- Pozostałe ilorazy różnicowe wyższych rzędów ($j > 1$ lub $j = 1$ dla $z_{i+1} \neq z_i$) obliczane są za pomocą standardowej rekurencyjnej formuły:

$$f[z_i, \dots, z_{i+j}] = \frac{f[z_{i+1}, \dots, z_{i+j}] - f[z_i, \dots, z_{i+j-1}]}{z_{i+j} - z_i}$$

dla $z_{i+j} \neq z_i$.

- **Ewaluacja wielomianu Newtona:** Wartość wielomianu interpolacyjnego Hermite'a $H(x)$ w punkcie x jest obliczana za pomocą postaci Newtona, wykorzystując górną przekątną tablicy ilorazów różnicowych ($f[z_0], f[z_0, z_1], \dots, f[z_0, \dots, z_{m-1}]$):

$$H(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{m-1} \left(f[z_0, \dots, z_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - z_j) \right)$$

Interpolację przeprowadzano iteracyjnie, zmieniając liczbę oryginalnych węzłów n (np. w zakresie od 1 do 100). Dla każdej liczby węzłów n analizowano dwa podstawowe schematy ich rozmieszczenia w zadanym przedziale $[a, b]$:

- Węzły równoodległe.
- Węzły Czebyszewa (pierwiastki wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju).

Analiza wyników obejmowała:

- **Ocenę dokładności interpolacji:** Badano błąd interpolacji (np. błąd maksymalny $\|f - H\|_\infty$ lub normę L_2 błędu $\|f - H\|_{L_2}$) w zależności od liczby węzłów n dla obu typów rozmieszczenia oraz dla zastosowanej metody aproksymacji pochodnych (która determinowała wartości w tablicy derivatives []).
- **Identyfikację optymalnej liczby węzłów:** Dla obu schematów rozmieszczenia poszukiwano liczby węzłów n , która minimalizuje błąd interpolacji dla badanej funkcji i przyjętej metody aproksymacji pochodnej.
- **Analizę efektu Rungego:** Obserwowano i porównywano zachowanie błędu interpolacji dla węzłów równoodległych (oczekiwane wystąpienie efektu Rungego dla niektórych funkcji przy wzroście n) oraz dla węzłów Czebyszewa (oczekiwana zbieżność lub znacznie wolniejszy wzrost błędu).

Na podstawie przeprowadzonych symulacji i analiz oceniono, jak liczba węzłów, ich rozmieszczenie oraz (pośrednio, poprzez jakość danych wejściowych derivatives []) sposób aproksymacji pierwszej pochodnej wpływają na jakość i stabilność interpolacji Hermite'a badanej funkcji rzeczywistej f .

2 Dane techniczne sprzętu

Do wykonania zadania wykorzystany został komputer o poniższej specyfikacji:

- system *Windows 10 x64*,
- procesor *Intel Core i7-11370H* o taktowaniu *3.30GHz*,
- pamięć *RAM 16GB*.

3 Dane techniczne oprogramowania

3.1 System operacyjny

- WSL Ubuntu
- Wersja 24.04

3.2 Język programowania

- Język *C*,
- Wersja *3.30*.

3.3 Środowisko programowania

- *CLion*

3.4 Użyte biblioteki

W projekcie wykorzystano następujące biblioteki standardowe języka C:

- `<stdio.h>` – do operacji wejścia/wyjścia, takich jak zapis do pliku i wyświetlanie wyników na konsolę.
- `<stdlib.h>` – do alokacji pamięci (np. funkcje `malloc`, `free`), konwersji typów, generowania liczb pseudolosowych oraz wywoływania poleceń systemowych.
- `<math.h>` – do funkcji matematycznych, takich jak obliczanie pierwiastków kwadratowych (`sqrt`), potęgowania (`pow`), logarytmów (`log`, `log10`) czy funkcji trygonometrycznych (`sin`, `cos`).

3.5 Wizualizacja

Za wizualizację otrzymanych wyników odpowiedzialne było narzędzie *gnuplot*.

4 Wyznaczenie dokładności interpolacji

W celu wyznaczenia dokładności, z jaką wielomian, uzyskany zgodnie z zagadnieniem **Hermite'a** względem pierwszej pochodnej, przybliży zadaną funkcję, wykorzystano poniższe metryki:

- Błąd średniokwadratowy,
- Błąd maksymalny bezwzględny.

4.1 Pomiar dokładności

Pomiar dokładności przeprowadzony został, porównując wartości interpolowanej funkcji z wartościami wyznaczonego wielomianu interpolacji dla $m = 1000$ równodległych punktów, rozmieszczonych na całym przedziale $x \in [-2\pi^2, \pi^2]$.

4.2 Błąd średniokwadratowy

Błąd średniokwadratowy wyrażony jest wzorem

$$E_\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^l (W(x_i) - f(x_i))^2}{l}} \quad (1)$$

, gdzie

- l - liczba punktów pomiaru błędu
- f - zadana funkcja
- W - funkcja wielomianu interpolacji
- x_i - punkt, w którym dokonywany jest pomiar

4.3 Błąd maksymalny

Błąd maksymalny wyrażony jest wzorem

$$E_l = \max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} (|W(x_i) - f(x_i)|) \quad (2)$$

, gdzie

- l - liczba punktów pomiaru błędu
- f - zadana funkcja
- W - funkcja wielomianu interpolacji
- x_i - punkt pomiaru

4.4 Interpretacja wyników

Oba wskaźniki błędu pozwalają ocenić jakość interpolacji:

- **Maksymalny błąd bezwzględny** pokazuje najgorszy przypadek przybliżenia, wskazując punkt, w którym interpolacja jest najmniej dokładna.
- **Błąd średniokwadratowy** mierzy ogólną jakość interpolacji – im niższa jego wartość, tym lepiej interpolant (funkcja wielomianu interpolacji) przybliża zadaną funkcję w całym przedziale.

Dzięki analizie tych błędów można porównać różne metody interpolacji i określić, która daje lepsze wyniki, np. węzły równoodległe vs. węzły Czebyszewa.

5 Efekt Runge'go

Efekt Runge'go to zjawisko występujące w interpolacji wielomianowej, szczególnie przy równomiernym rozmieszczeniu węzłów. Objawia się on pogorszeniem się jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów n przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście n , zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów.

5.1 Opis i przyczyna zjawiska

Carl Runge zaobserwował, że dla funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

w przedziale $[-1, 1]$, zwiększanie liczby węzłów równomiernych nie poprawia interpolacji, lecz powoduje jej pogorszenie na krańcach. Przyczyną jest iloczyn $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$, który dla dużych n osiąga wysokie wartości, potęgując oscylacje.

6 Rozmieszczenie węzłów

6.1 Węzły równoodległe

Węzły te są rozmieszczone w równych odstępach:

$$x_i = a + i \frac{b - a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Są łatwe w implementacji, ale dla dużych n prowadzą do efektu Runge'go.

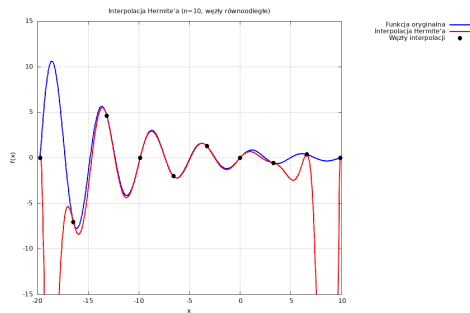
6.2 Węzły Czebyszewa

Węzły Czebyszewa koncentrują się bliżej końców przedziału, minimalizując oscylacje:

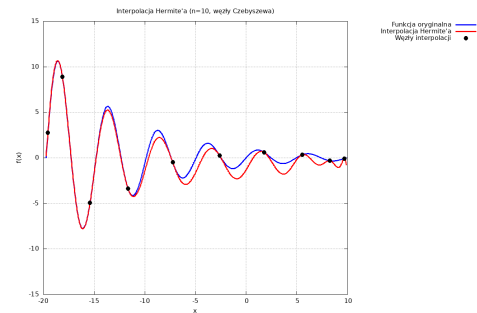
$$x_i = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \cos \left(\frac{(2i + 1)\pi}{2(n + 1)} \right).$$

Zapewniają znacznie lepszą interpolację niż węzły równoodległe.

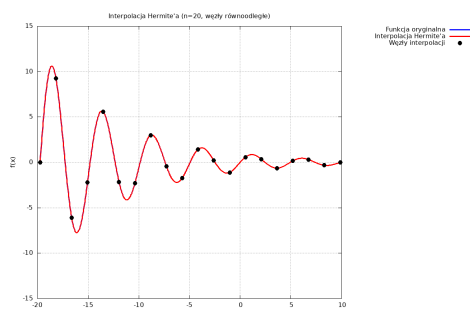
7 Przykładowe wykresy interpolacji metodą Hermite'a z podziałem na typ węzłów



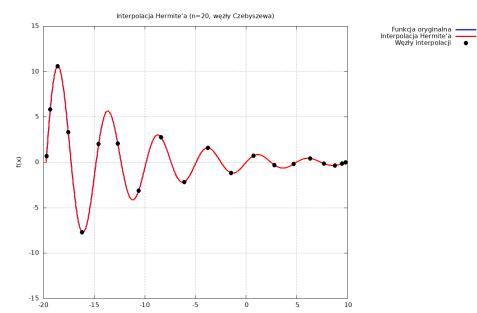
(a) Wykres 1: Interpolacja Hermite'a dla $n=10$ oraz węzłów równoodległych



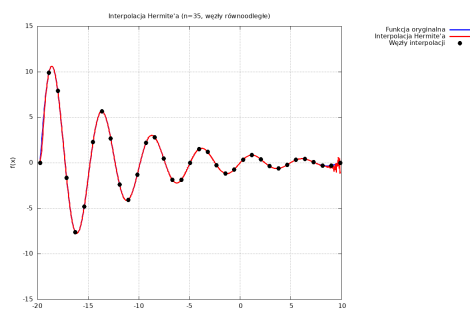
(b) Wykres 2: Interpolacja Hermite'a dla $n=10$ oraz węzłów Czebyszewa



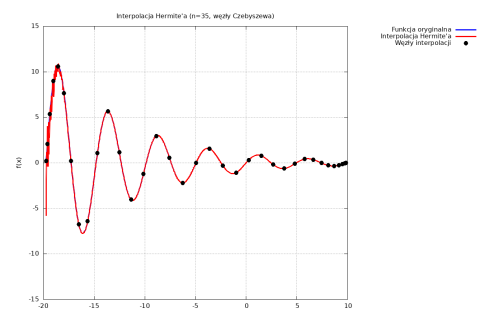
(c) Wykres 3: Interpolacja Hermite'a dla $n=20$ oraz węzłów równoodległych



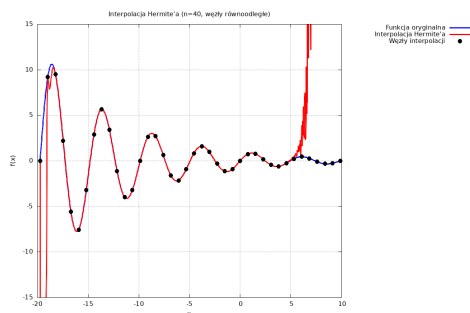
(d) Wykres 4: Interpolacja Hermite'a dla $n=20$ oraz węzłów Czebyszewa



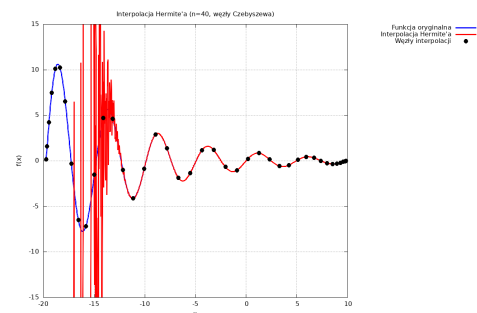
(e) Wykres 5: Interpolacja Hermite'a dla $n=35$ oraz węzłów Czebyszewa



(f) Wykres 6: Interpolacja Hermite'a dla $n=35$ oraz węzłów Czebyszewa



(g) Wykres 7: Interpolacja Hermite'a dla $n=40$ oraz węzłów równoodległych



(h) Wykres 8: Interpolacja Hermite'a dla $n=40$ oraz węzłów Czebyszewa

Rysunek 1: Porównanie wykresów interpolacji metodą Hermite'a z podziałem na typ węzłów

8 Analiza wyników interpolacji funkcji

8.1 Interpolacja metodą Hermite'a

Węzły Równoodległe

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
1	0.0000000000e+00	-nan
2	7.1608203686e+01	1.9982478249e+03
3	2.7829303168e+01	1.1642504345e+02
4	2.0338146729e+01	6.4292607256e+01
5	3.2632341888e+01	9.6917957723e+01
6	2.1642781266e+01	7.0469040913e+01
7	1.3566829206e+02	1.4649870888e+03
8	1.4161070261e+02	1.7816070095e+03
9	1.4004705016e+02	8.4140594441e+02
10	9.0470749651e+01	3.6041588121e+02
11	4.4888711492e+01	1.1891198023e+02
12	2.4775147793e+01	2.2766518720e+01
13	9.3999830270e+00	2.5290376675e+00
14	2.6816003477e+00	1.7260084730e-01
15	5.9840300271e-01	7.6239526845e-03
16	1.0592226413e-01	2.2924648148e-04
17	1.4766802692e-02	5.0734205952e-06
18	1.8207920962e-03	9.5930034707e-08
19	3.3050217418e-04	1.8327606141e-09
20	6.2655571215e-05	5.3625223977e-11
21	3.9177482413e-05	6.4436113656e-12
22	3.4096867322e-05	1.5249079536e-11
23	6.8083725386e-05	3.7625387667e-11
24	9.2799089785e-05	5.6009864170e-11
25	1.7528332346e-04	1.7893418133e-10
26	2.4587267983e-04	2.9063981903e-10
27	2.4720619688e-04	4.9506298607e-10
28	5.2049813659e-04	1.5169169119e-09
29	1.1463502872e-03	1.9049237397e-08
30	1.4589115640e-03	2.4384140438e-08
31	2.8336573682e-03	1.1370417750e-07
32	1.1665972893e-02	1.2823421460e-06
33	5.8398175576e-02	4.4369236936e-05
34	7.3908152345e-01	6.5923439780e-03
35	1.1731404898e+00	1.4698398614e-02
36	8.2798159551e+00	4.8403962186e-01
37	2.1389196678e+01	2.4928063070e+00
38	3.8794682314e+02	5.0762223116e+02
39	2.6332814737e+04	3.130334745e+06
40	7.1451162706e+04	1.9778477995e+07
41	1.8200572209e+05	1.3387654950e+08
42	2.6178893825e+06	1.7432458096e+10
43	2.6336116263e+07	1.3790966349e+12
44	2.1536701315e+08	1.0572700143e+14
45	2.6288290013e+09	2.0437298367e+16
46	5.7000076249e+09	1.3851553306e+17
47	2.0447565560e+11	9.6995637815e+19
48	1.5152633908e+12	8.6908174824e+21
49	7.9823853011e+11	3.1663991493e+21
50	1.2644823579e+14	4.2931928741e+25

Węzły Czebyszewa

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
1	4.3339924836e+01	4.5013548019e+02
2	5.0233422544e+01	2.5528383391e+02
3	3.3488783598e+01	8.7064227436e+01
4	1.4789818673e+01	2.5443331376e+01
5	1.4109450048e+01	2.1648109076e+01
6	1.0955142262e+01	1.4640443954e+01
7	1.1414806082e+01	1.7590882233e+01
8	6.8753343543e+00	7.6610579833e+00
9	3.5049303968e+00	2.0875354350e+00
10	1.5001910040e+00	4.2374810050e-01
11	4.5843454676e-01	4.6760379361e-02
12	1.0596483586e-01	2.7142897929e-03
13	1.9096846871e-02	8.8394173422e-05
14	2.7242639343e-03	1.7090878040e-06
15	3.1760421136e-04	2.0297847003e-08
16	3.0490976261e-05	1.4945208611e-10
17	2.3011214809e-06	6.0217721414e-13
18	3.2618570805e-06	5.4007850238e-14
19	7.0543694259e-06	4.0481058443e-13
20	9.0899219742e-06	7.0512066337e-13
21	1.9034946130e-05	1.3341313637e-12
22	1.9708631249e-05	2.3444782641e-12
23	4.5552907567e-05	8.1860031479e-12
24	2.7994774099e-05	9.5064779292e-12
25	7.9204134652e-05	2.8852856915e-11
26	1.0711099128e-04	7.0475720317e-11
27	9.3894601009e-05	6.4398566282e-11
28	1.3618664005e-04	1.8781280990e-10
29	4.3967235053e-04	1.3527587185e-09
30	3.8581712770e-04	7.8076431642e-10
31	1.0533910461e-03	3.7537810901e-09
32	7.6805611219e-04	4.7314434790e-09
33	7.0785807715e-03	2.2643562473e-07
34	5.0475877825e-01	2.0652640633e-03
35	5.7841572479e+00	1.0628856234e-01
36	1.9225504001e+01	1.7614207737e+00
37	2.1813971688e+01	2.9733697483e+00
38	1.6502511648e+03	1.2799969314e+04
39	1.8764928556e+04	1.2713026380e+06
40	5.3896129836e+05	8.2610039980e+08
41	3.8055999457e+06	7.6066976246e+10
42	1.9062270602e+07	1.4292194702e+12
43	6.1246674543e+08	3.0359593178e+15
44	7.5854127888e+08	1.9897741746e+15
45	1.6393747851e+09	9.7563067428e+15
46	3.2521189806e+10	6.1804940953e+18
47	2.9210211522e+11	3.7214268722e+20
48	5.2550215539e+13	9.4030296114e+24
49	2.5101948642e+13	4.7999118000e+24
50	2.2269531821e+15	1.7081999053e+28

Węzły Równoodległe

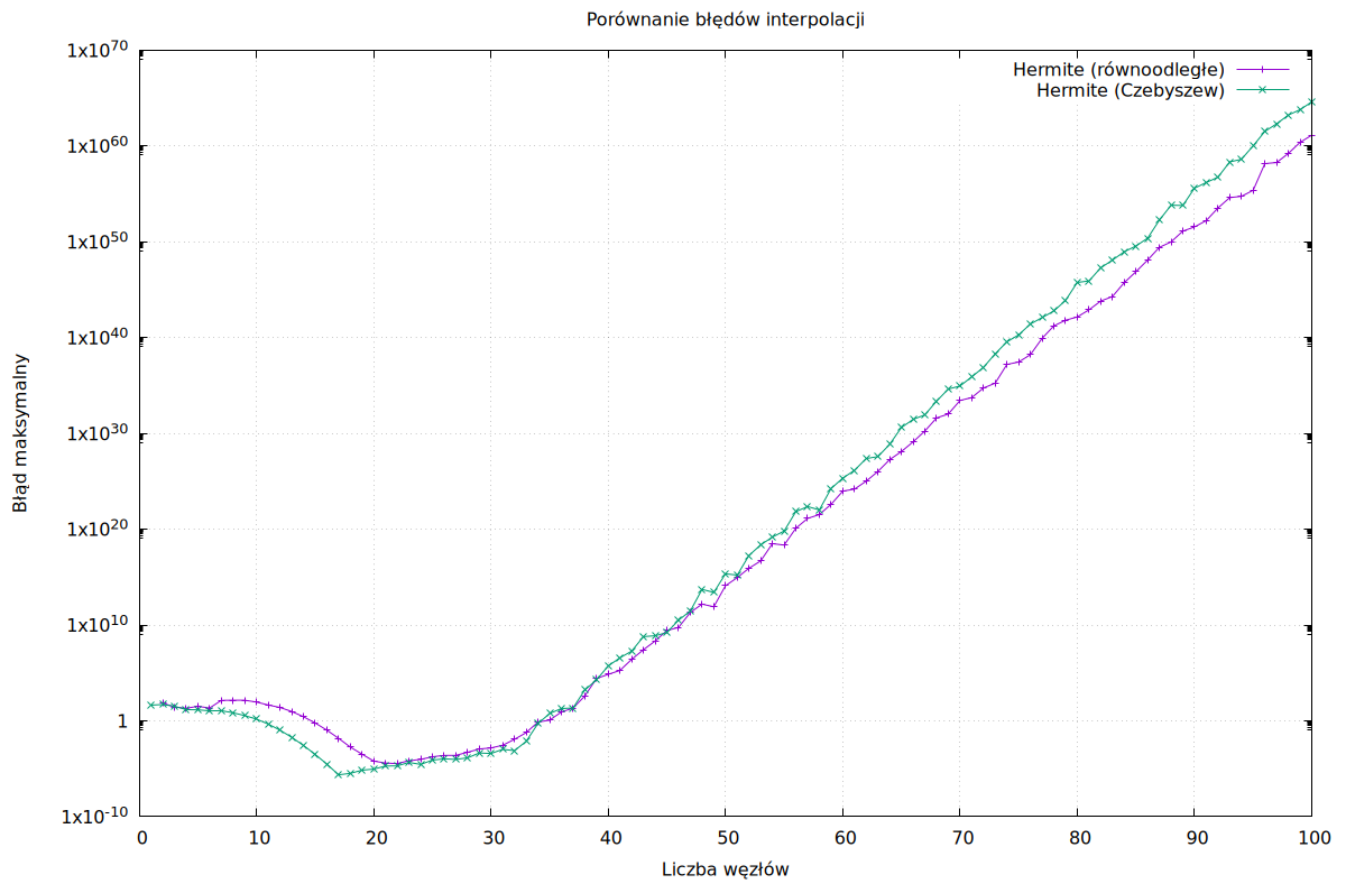
Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
51	8.8498529965e+14	3.1400352770e+27
52	8.4540846270e+15	2.4672111418e+29
53	4.9033079822e+16	7.3433727506e+30
54	3.1084954764e+18	2.8902015234e+34
55	2.2160864082e+18	1.5935456260e+34
56	1.2637194141e+20	3.1458061230e+37
57	1.3352849065e+21	5.6253868250e+39
58	3.4276620467e+21	2.4759522747e+40
59	3.9214878425e+22	3.2898803101e+42
60	9.3562480294e+23	1.5704629341e+45
61	1.5237275108e+24	6.0790381643e+45
62	1.0523516969e+25	2.7801400370e+47
63	1.0753839486e+26	4.4207417735e+49
64	1.8268338665e+27	1.0339589184e+52
65	1.2900556802e+28	7.1897233132e+53
66	1.3201616654e+29	8.8593791914e+55
67	1.7675825021e+30	1.4787841987e+58
68	4.1154499248e+31	3.3515667863e+60
69	1.0637651423e+32	1.3377997793e+61
70	2.7350239633e+33	1.5527291599e+64
71	5.5075124581e+33	1.3574926175e+65
72	5.5317949572e+34	1.1316931859e+67
73	1.7624278422e+35	8.0155492142e+67
74	1.5970590705e+37	8.8881432822e+71
75	2.8466649568e+37	2.9845782392e+72
76	1.6446981502e+38	4.5486407362e+73
77	8.3222724927e+39	1.5327779786e+77
78	1.6792836378e+41	3.3810574718e+79
79	6.5721552910e+41	8.5149989941e+80
80	1.4334382865e+42	2.5580524307e+81
81	8.0104983953e+42	1.1517970427e+83
82	6.5374768705e+43	1.0289505510e+85
83	1.9673352740e+44	1.0410454592e+86
84	5.4340489987e+45	7.4188093788e+88
85	7.5299677227e+46	1.8227161080e+91
86	1.2489724653e+48	3.9925543321e+93
87	2.6563487917e+49	8.8021837651e+95
88	9.7661023433e+49	1.7333762056e+97
89	1.3068021336e+51	3.8184217244e+99
90	3.6329465910e+51	3.0839618319e+100
91	1.6402913596e+52	6.2057381360e+101
92	3.4263111014e+53	2.7635742850e+104
93	4.0970789511e+54	2.3963373845e+106
94	5.6161031261e+54	5.8367831316e+106
95	2.3859304541e+55	2.0276799383e+108
96	1.4634258755e+58	3.3625568515e+113
97	1.8772548450e+58	7.4372188668e+113
98	1.6880748234e+59	1.1600606031e+116
99	2.3995230785e+60	1.2210175005e+118
100	1.3620439630e+61	4.2325758347e+119

Węzły Czebyszewa

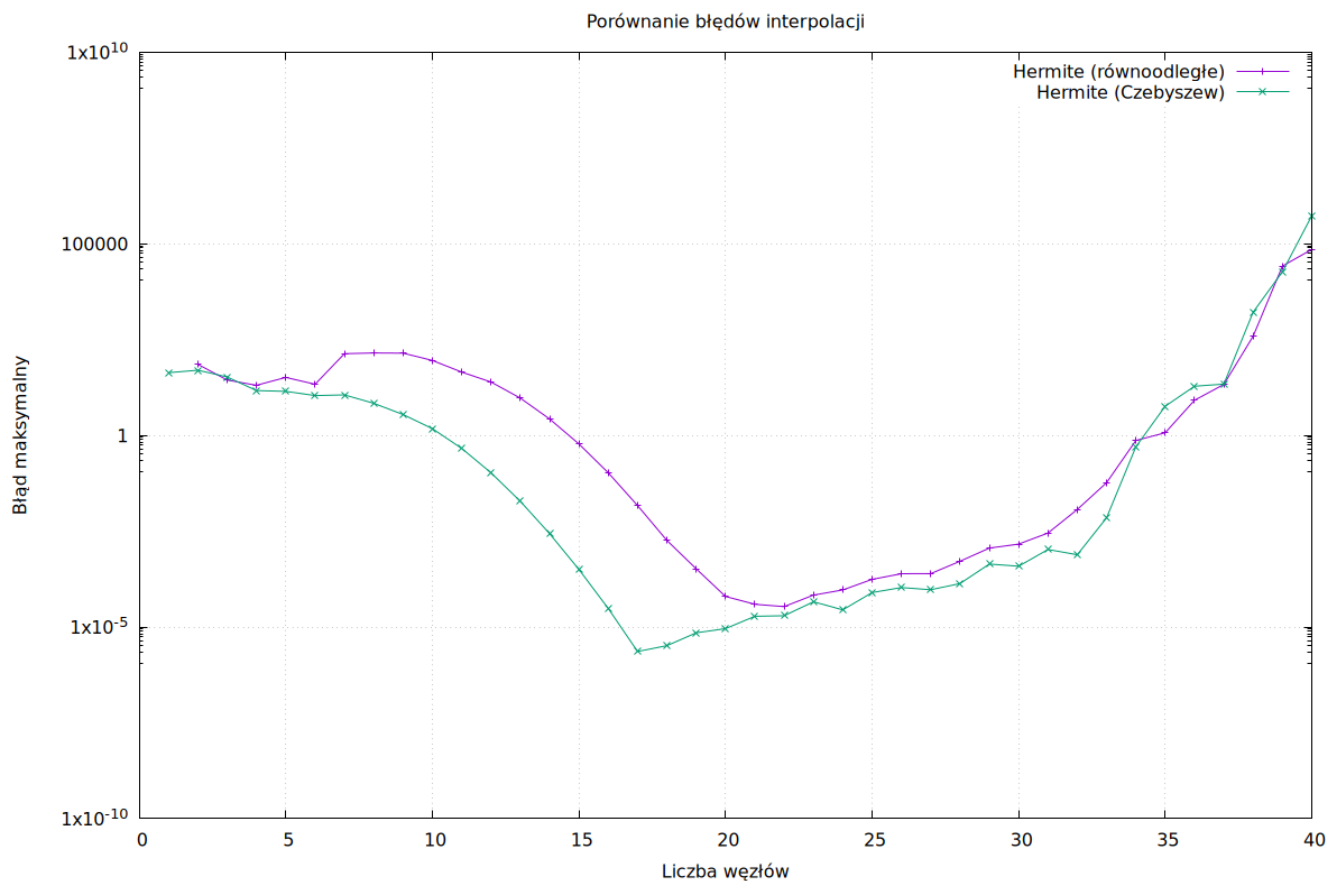
Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
51	1.6145173881e+15	1.3012616798e+28
52	1.8094025712e+17	8.3369098156e+31
53	2.3390107102e+18	1.5172877825e+34
54	1.5162665442e+19	1.0970198594e+36
55	6.4701846727e+19	1.5309866051e+37
56	6.8401019184e+21	2.2071933823e+41
57	2.3299416008e+22	2.0361214375e+42
58	1.0228800753e+22	4.8071602098e+41
59	1.7537862308e+24	1.3578731566e+46
60	2.1467734102e+25	2.5366630109e+48
61	1.4107551906e+26	3.7363395447e+49
62	2.3818768281e+27	3.3523665904e+52
63	3.7903951564e+27	3.7046502345e+52
64	7.2323606369e+28	1.3742033338e+55
65	4.1087421516e+30	6.6256370369e+58
66	2.9271063626e+31	3.3042374267e+60
67	8.6270485507e+31	2.8314405258e+61
68	2.3502097009e+33	1.5435773375e+64
69	4.2566757698e+34	6.8630402792e+66
70	8.9037759427e+34	2.8238327623e+67
71	8.0656671276e+35	1.2005714511e+69
72	7.8453498966e+36	2.0202346119e+71
73	2.0647903811e+38	6.4960271733e+73
74	3.6322520650e+39	1.9805538821e+76
75	1.9568175577e+40	8.5348622926e+77
76	2.6165881024e+41	2.4829967120e+80
77	1.2379305582e+42	3.9556487119e+81
78	5.9837593042e+42	9.7928044267e+82
79	7.6348191608e+43	1.5795015324e+85
80	5.7463934702e+45	6.4402858670e+88
81	8.1859798756e+45	1.5853381432e+89
82	1.9427344993e+47	1.8885855194e+92
83	1.2289249967e+48	4.2968058398e+93
84	9.2169189311e+48	2.2937822338e+95
85	3.6244701407e+49	4.0660516928e+96
86	2.3974372369e+50	1.6415468678e+98
87	1.8130144132e+52	7.9719600996e+101
88	6.6379606697e+53	7.1052624358e+104
89	6.2071911348e+53	9.3356853524e+104
90	3.9987296445e+55	3.4216831612e+108
91	1.5606760464e+56	3.8990446790e+109
92	5.5599720430e+56	6.0734861733e+110
93	2.1804201058e+58	1.1337387736e+114
94	4.1266077212e+58	3.5651661571e+114
95	1.0438475907e+60	2.0321942530e+117
96	3.3553012236e+61	2.5853502805e+120
97	2.0890782051e+62	1.4361631954e+122
98	1.7087135657e+63	1.0024328941e+124
99	6.2314118065e+63	8.8930945783e+124
100	4.1146655139e+64	4.1359070516e+126

Tabela 1: Błędy interpolacji metody Hermite'a w zależności od liczby węzłów oraz typu ich rozmieszczenia

8.2 Błędy interpolacji na wykresie



Rysunek 2: Wykres błędów interpolacji Hermite'a w skali logarytmicznej dla n w zakresie $[1, 100]$.



Rysunek 3: Wykres błędów interpolacji Hermite'a w skali logarytmicznej dla n w zakresie $[1, 40]$.

9 Analiza wykresu błędów interpolacji Hermite'a

Na Rysunku przedstawiono porównanie maksymalnego błędu interpolacji metody Hermite'a w zależności od liczby węzłów interpolacji n w zakresie $[1, 100]$. Wykres wykorzystuje skalę logarytmiczną na osi Y, co pozwala na efektywne zobrazowanie zmian błędu obejmujących wiele rzędów wielkości. Porównano zachowanie błędu dla węzłów równoodległych oraz węzłów Czebyszewa.

Analiza wykresu pozwala sformułować następujące wnioski:

- **Zachowanie błędu dla małych n :** Dla niewielkiej liczby węzłów (n w przybliżeniu do 18-20) błąd maksymalny dla obu typów węzłów maleje. Węzły Czebyszewa pozwalają osiągnąć znacząco niższy minimalny błąd (rzędu 10^{-8}) w porównaniu do węzłów równoodległych (minimum rzędu 10^{-5}) w okolicach $n \approx 18$. Sugeruje to istnienie optymalnej liczby węzłów dla tej funkcji i metody w badanym przedziale, gdzie błąd jest najmniejszy.
- **Zachowanie błędu dla dużych n :** Po przekroczeniu optymalnej liczby węzłów ($n > 20$), błąd maksymalny zaczyna gwałtownie rosnąć dla obu typów węzłów. Skala logarytmiczna wyraźnie pokazuje, że wzrost ten ma charakter wykładniczy. Świadczy to o pojawieniu się niestabilności numerycznej interpolacji wielomianowej wysokiego stopnia.
- **Porównanie typów węzłów:** W obszarze, gdzie interpolacja daje najlepsze wyniki (okolice minimum błędu, $n \approx 10 - 25$), węzły Czebyszewa zapewniają zdecydowanie większą dokładność (mniejszy błąd E_m) niż węzły równoodległe. Jest to zgodne z teorią, która wskazuje, że węzły Czebyszewa minimalizują problem dużych oscylacji wielomianu interpolacyjnego, szczególnie w pobliżu krańców przedziału (efekt Rungego), chociaż interpolacja Hermite'a jest na niego mniej podatna niż Lagrange'a.
- **Niestabilność dla dużych n :** Dla $n > 30$, błąd dla węzłów równoodległych rośnie w sposób gwałtowny, osiągając wartości rzędu 10^{60} dla $n = 100$. Błąd dla węzłów Czebyszewa również rośnie bardzo szybko, co pokazuje, że nawet one nie eliminują całkowicie niestabilności dla bardzo wysokich stopni wielomianu i tej konkretnej funkcji. Co ciekawe, dla $n > 60$ na tym wykresie błąd dla węzłów Czebyszewa zaczyna już zauważalnie przewyższać błąd dla węzłów równoodległych, co podkreśla ekstremalną niestabilność obu metod w tym zakresie.
- **Znaczenie skali logarytmicznej:** Użycie skali logarytmicznej na osi Y jest kluczowe dla zrozumienia dynamiki błędu. Umożliwia jednoczesną obserwację bardzo małych wartości błędu w okolicach optimum oraz ekstremalnie dużych wartości wynikających z niestabilności numerycznej dla dużych n . Uwydatnia również wykładniczy charakter wzrostu błędu w obszarze niestabilności.

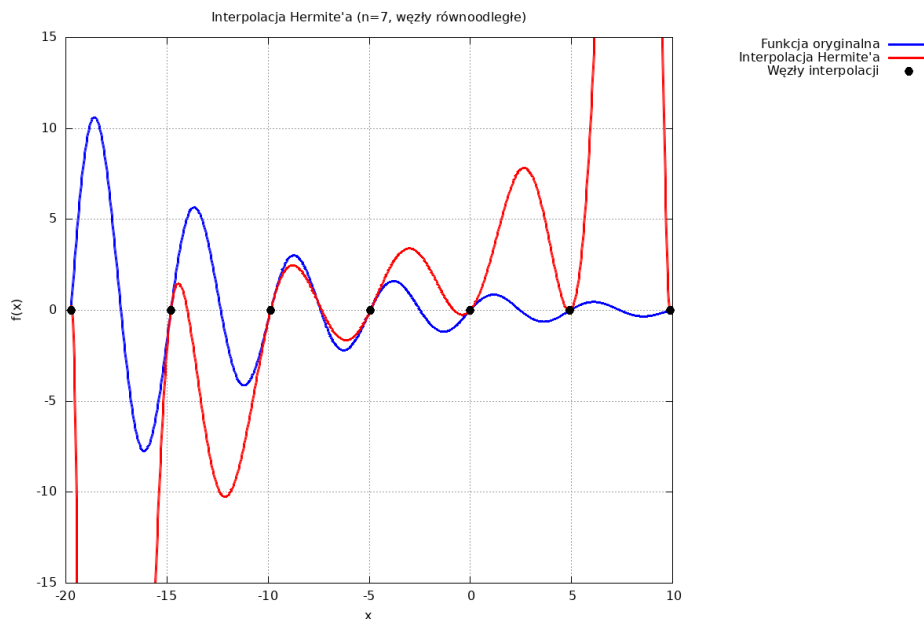
Podsumowując, analiza wykresu potwierdza teoretyczne przewagi węzłów Czebyszewa nad równoodległymi w kontekście minimalizacji błędu interpolacji Hermite'a w optymalnym zakresie liczby węzłów. Jednocześnie wykres doskonale ilustruje zjawisko niestabilności numerycznej interpolacji wielomianowej wysokiego stopnia, pokazując, że bezkrytyczne zwiększanie liczby węzłów n prowadzi do drastycznego pogorszenia dokładności wyników dla obu typów węzłów. Istotne jest znalezienie optymalnej (lub bliskiej optymalnej) liczby węzłów n dla danego problemu.

10 Analiza przypadków szczególnych w interpolacji Hermite'a

Szczegółowa analiza wyników interpolacji metodą Hermite'a, oparta na obserwacji wykresów funkcji interpolującej oraz danych zawartych w tabeli błędów, pozwala na identyfikację interesujących zachowań i wyciągnięcie wniosków dotyczących efektywności metody w zależności od rozmieszczenia węzłów.

10.1 Węzły występujące na miejscach zerowych funkcji interpolowanej

W analizowanym przypadku można dodatkowo zauważyć, że przy rozmieszczeniu równoodległym węzły mogą przypadać w pobliżu miejsc zerowych lub ekstremów lokalnych interpolowanej funkcji. W metodzie Hermite'a wymuszamy zgodność nie tylko wartości funkcji, ale także jej pierwszej pochodnej w każdym węźle. Wymuszenie płaskiego przebiegu ($f'(x_i) \approx 0$) w ekstremach lub określonego nachylenia w innych punktach przy jednoczesnym równoodległym rozmieszczeniu może dodatkowo potęgować tendencję wielomianu do "nadmiernego" oscylowania między węzłami w celu spełnienia wszystkich warunków interpolacji.



Rysunek 4: Interpolacja Hermite'a ($n = 7$, węzły równoodległe). Rozłożenie węzłów na miejscach zerowych funkcji interpolowanej.

10.2 Najlepsze dopasowanie wielomianu interpolacji

Kluczowym aspektem oceny jakości interpolacji jest analiza błędów: maksymalnego oraz średniokwadratowego. Analizując pełne dane błędów dla zakresu liczby węzłów $n \in [1, 100]$, możemy precyzyjnie określić, dla jakiej konfiguracji (typ węzłów, liczba n) uzyskano najlepsze przybliżenie funkcji oryginalnej.

• Węzły Równoodległe:

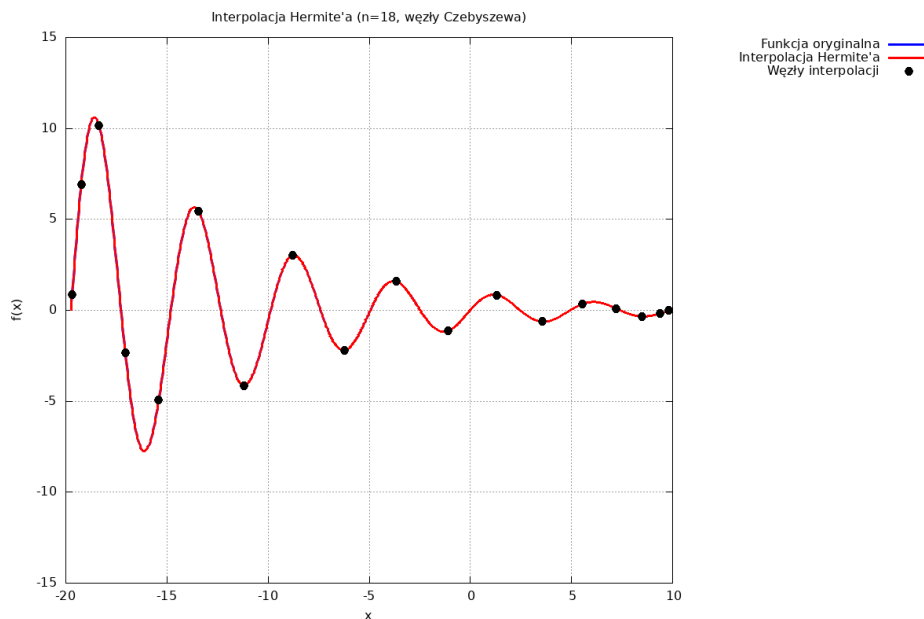
- Minimalny błąd średniokwadratowy został osiągnięty dla $n = 21$ i wynosi około 6.44×10^{-12} .
- Minimalny błąd maksymalny uzyskano dla $n = 22$ i wynosi on około 3.41×10^{-5} .
- Dla $n > 22$ oba błędy zaczynają systematycznie rosnąć, co wskazuje na wkroczenie w obszar dominacji niestabilności numerycznej.

• Węzły Czebyszewa:

- Minimalny błąd średniokwadratowy zaobserwowano dla $n = 18$ i wynosi on niezwykle małą wartość około 5.40×10^{-14} .
- Minimalny błąd maksymalny również został osiągnięty dla $n = 18$ i wynosi około 3.26×10^{-6} .
- Co istotne, dla $n > 18$ oba błędy dla węzłów Czebyszewa również zaczynają powoli, ale systematycznie rosnąć.

Porównując bezwzględne wartości minimalnych błędów osiągniętych dla obu typów węzłów w zakresie $n \in [1, 100]$, widzimy wyraźną przewagę węzłów Czebyszewa. Minimalny błąd maksymalny dla węzłów Czebyszewa (3.26×10^{-6} przy $n = 18$) jest o rząd wielkości mniejszy niż dla węzłów równoodległych (3.41×10^{-5} przy $n = 22$). Jeszcze większa różnica występuje w przypadku błędu średniokwadratowego (E_k): minimalna wartość dla węzłów Czebyszewa (5.40×10^{-14} przy $n = 18$) jest o ponad dwa rzędy wielkości mniejsza niż dla węzłów równoodległych (6.44×10^{-12} przy $n = 21$).

Na podstawie powyższej analizy, **najlepsze dopasowanie wielomianu interpolacji Hermite'a w badanym zakresie $n \in [1, 100]$ uzyskano dla $n = 18$ przy użyciu węzłów Czebyszewa.** Ta konfiguracja zapewniała najmniejsze wartości zarówno błędu maksymalnego, jak i błędu średniokwadratowego spośród wszystkich przetestowanych przypadków, potwierdzając wysoką efektywność węzłów Czebyszewa w minimalizacji globalnego błędu interpolacji dla tej funkcji i metody.

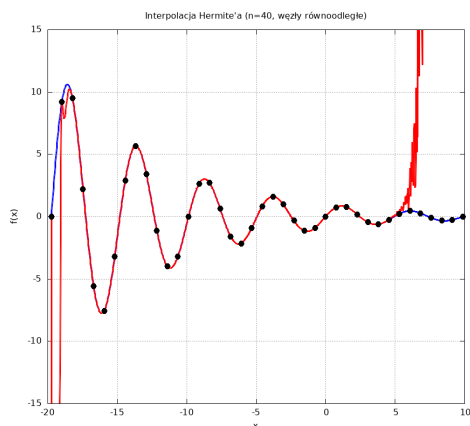


Rysunek 5: Interpolacja Hermite'a ($n = 18$, węzły Czebyszewa). Najlepsze dopasowanie wielomianu interpolacji

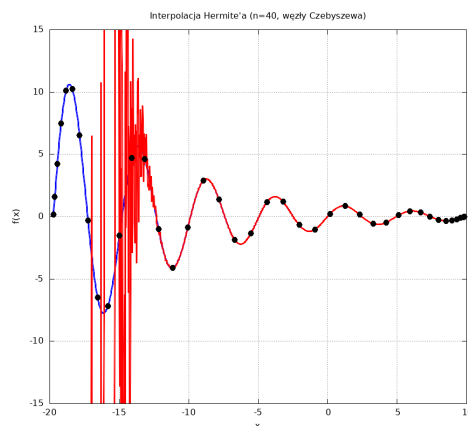
10.3 Błędy arytmetyczne

Zaimplementowana interpolacja Hermite'a wykorzystuje metodę **Różnic Dzielonych**. Metoda ta, oparta na wielokrotnym odejmowaniu i dzieleniu liczb zmiennoprzecinkowych, jest podatna na kumulację błędów zaokrągleń (tzw. błędy arytmetyczne). W szczególności odejmowanie bliskich liczb lub dzielenie przez małe różnice między węzłami może prowadzić do utraty dokładności.

W metodzie Hermite'a uwzględniane są dodatkowo wartości pierwszych pochodnych, które są włączane w schemat obliczeń różnic dzielonych. Zwiększa to złożoność obliczeń i liczbę operacji podatnych na błędy w porównaniu do standardowej interpolacji Newtona. W efekcie, widoczne skutki propagacji błędów arytmetycznych (np. w postaci szumu lub drobnych oscylacji o wysokiej częstotliwości) mogą pojawić się w interpolacji Hermite'a już dla $n \approx 35 - 40$, podczas gdy w metodzie Newtona stają się one zauważalne zazwyczaj dla większych wartości n .



Rysunek 6: Interpolacja Hermite'a ($n = 40$, węzły równoodległe) - efekty błędów arytmetycznych.



Rysunek 7: Interpolacja Hermite'a ($n = 25$, węzły Czebyszewa) - efekty błędów arytmetycznych.

Podatność na błędy arytmetyczne jest zatem inherentną cechą metody różnic dzielonych, potęgowaną w przypadku Hermite'a przez wykorzystanie dodatkowych danych wejściowych (pochodnych) i prowadzącą do ograniczenia praktycznej stosowalności dla bardzo dużych liczb węzłów n .