

METODY OBLICZENIOWE W NAUCE I TECHNICIE

Laboratorium 2 | Zagadnienie interpolacji Lagrange'a oraz Newtona

Jakub Kaliński | Informatyka | rok II
Grupa numer 5 | Piątek | Godzina 15:00 - 16:30

1 Treść i przebieg zadania

Celem ćwiczenia było wyznaczenie wielomianów interpolacyjnych dla zadanej funkcji oraz analiza ich dokładności w zależności od liczby węzłów i ich rozmieszczenia.

Dla funkcji:

$$f(x) = \sin\left(\frac{kx}{\pi}\right) e^{\frac{-mx}{\pi}}$$

w przedziale:

$$[-2\pi^2, \pi^2]$$

przeprowadzono interpolację za pomocą następujących metod:

- Wielomian interpolacyjny w postaci **Lagrange'a**.
- Wielomian interpolacyjny w postaci **Newtona**.

Interpolację wykonano dla różnej liczby węzłów. Dla każdego przypadku analizowano dwa różne sposoby rozmieszczenia węzłów, w przedziale od 1 do 100:

- Węzły równoodległe.
- Węzły Czebyszewa.

Dodatkowe analizy obejmowały:

- Ocenę dokładności interpolacji dla różnych przypadków.
- Poszukiwanie wielomianu, który najlepiej przybliży badaną funkcję.
- Analizę efektu Runge'go dla interpolacji z węzłami równoodległymi oraz porównanie go z interpolacją przy użyciu węzłów Czebyszewa.

Na podstawie powyższych analiz oceniono wpływ liczby węzłów oraz ich rozmieszczenia na jakość interpolacji funkcji rzeczywistej.

Dokonano tego poprzez wybranie 1000 punktów i wyznaczenie na ich podstawie błędu maksymalnego i średniego błędu kwadratowego w zależności od liczby węzłów.

2 Dane techniczne sprzętu

Do wykonania zadania wykorzystany został komputer o poniższej specyfikacji:

- system *Windows 10 x64*,
- procesor *Intel Core i7-11370H* o taktowaniu *3.30GHz*,
- pamięć *RAM 16GB*.

3 Dane techniczne oprogramowania

3.1 System operacyjny

- WSL Ubuntu
- Wersja 24.04

3.2 Język programowania

- Język C,
- Wersja 3.30.

3.3 Środowisko programowania

- *CLion*

3.4 Użyte biblioteki

W projekcie wykorzystano następujące biblioteki standardowe języka C:

- `<stdio.h>` – do operacji wejścia/wyjścia, takich jak zapis do pliku i wyświetlanie wyników na konsolę.
- `<stdlib.h>` – do alokacji pamięci (np. funkcje `malloc`, `free`), konwersji typów, generowania liczb pseudolosowych oraz wywoływania poleceń systemowych.
- `<math.h>` – do funkcji matematycznych, takich jak obliczanie pierwiastków kwadratowych (`sqrt`), potęgowania (`pow`), logarytmów (`log`, `log10`) czy funkcji trygonometrycznych (`sin`, `cos`).

3.5 Wizualizacja

Za wizualizację otrzymanych wyników odpowiedzialne było narzędzie *gnuplot*.

4 Metody interpolacji

Interpolacja polega na znalezieniu funkcji, która dokładnie przechodzi przez zadane punkty (węzły interpolacyjne) i pozwala na przybliżanie wartości funkcji w obszarach między tymi węzłami. W ramach tego zadania zastosowano dwa podejścia: interpolację Lagrange'a oraz interpolację Newtona.

5 Błędy interpolacji

Aby ocenić jakość interpolacji, obliczane były dwa rodzaje błędów: **maksymalny błąd bezwzględny** oraz **błąd średniokwadratowy (MSE – Mean Squared Error)**.

5.1 Maksymalny błąd bezwzględny

Maksymalny błąd bezwzględny określa największą różnicę między rzeczywistymi wartościami funkcji $f(x)$ a wartościami interpolowanymi $P_n(x)$. Definiuje się go jako:

$$E_{\max} = \max_{i \in \{0, \dots, n\}} |f(x_i) - P_n(x_i)|$$

W kodzie ta wartość jest aktualizowana w pętli dla każdego punktu, wybierając największy błąd.

5.2 Błąd średniokwadratowy (MSE – Mean Squared Error)

Błąd średniokwadratowy jest miarą przeciętnej różnicy między wartościami rzeczywistymi a interpolowanymi, podniesionymi do kwadratu. Definiuje się go jako:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (f(x_i) - P_n(x_i))^2$$

W implementacji najpierw obliczana jest suma kwadratów błędów, a następnie dzielona przez liczbę punktów n .

5.3 Interpretacja wyników

Oba wskaźniki błędu pozwalają ocenić jakość interpolacji:

- **Maksymalny błąd** pokazuje najgorszy przypadek aproksymacji, wskazując punkt, w którym interpolacja jest najmniej dokładna.
- **Błąd średniokwadratowy** mierzy ogólną jakość interpolacji – im niższa jego wartość, tym lepiej interpolant przybliża funkcję w całym przedziale.

Dzięki analizie tych błędów można porównać różne metody interpolacji i określić, która daje lepsze wyniki, np. węzły równoodległe vs. węzły Czebyszewa.

6 Analiza wyników interpolacji funkcji

6.1 Interpolacja metodą Lagrange'a

**Interpolacja metodą Lagrange'a
Węzły Równoodległe**

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
1	0.0000000000e+00	-nan
2	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
3	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
4	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
5	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
6	1.3337146399e+01	1.6978268373e+01
7	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
8	1.3311262673e+01	1.7961330507e+01
9	1.5860945621e+01	2.0397424975e+01
10	2.2159718143e+01	3.1867666252e+01
11	6.0078173648e+01	1.8736829584e+02
12	1.2273228685e+02	9.2079796143e+02
13	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
14	3.3572684400e+02	5.9043798452e+03
15	3.3541034032e+02	3.6232880959e+03
16	3.9748951541e+02	6.3954414950e+03
17	5.5201644046e+02	8.5651948517e+03
18	3.7906735251e+02	3.4613143706e+03
19	4.6144599707e+02	5.6459510321e+03
20	2.4523737257e+02	1.7053650744e+03
21	2.4183294580e+02	1.6568683100e+03
22	1.3850599401e+02	6.0337455526e+02
23	9.2985708086e+01	2.7364760915e+02
24	7.6633051831e+01	1.2372164026e+02
25	4.0738585946e+01	3.1144609767e+01
26	2.9860851186e+01	1.4863226008e+01
27	1.4087770571e+01	2.8830970051e+00
28	8.8118987209e+00	1.1034275709e+00
29	3.9418976216e+00	2.2321311943e-01
30	2.0411221564e+00	5.3185285187e-02
31	9.0778880558e-01	1.3409183001e-02
32	3.7458551350e-01	1.7504756074e-03
33	1.7503604326e-01	5.9005831783e-04
34	5.3940933394e-02	4.2609843821e-05
35	3.0822332858e-02	1.8729989308e-05
36	7.3369207107e-03	8.9111668496e-07
37	5.3297565388e-03	4.3108480289e-07
38	1.3548749350e-03	1.8827457804e-08
39	7.6327958637e-04	7.2636955326e-09
40	2.0709228115e-04	3.9473298201e-10
41	9.2042000539e-05	8.9450559521e-11
42	2.8299056957e-05	6.9073533140e-12
43	1.1858979047e-05	8.2844957531e-13
44	1.3638362405e-05	7.6468997791e-13
45	2.4844838197e-05	2.5912081042e-12
46	2.9760696713e-05	5.3426131069e-12
47	8.4281813764e-05	2.7388820310e-11
48	2.3589657428e-04	1.3841657658e-10
49	4.0160277160e-04	9.9028169729e-10
50	4.6144377291e-04	1.6642241298e-09

**Interpolacja metodą Lagrange'a
Węzły Czebyszewa**

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
1	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
2	1.6309374270e+01	2.3688515513e+01
3	1.2294590205e+01	1.1847477471e+01
4	1.4612960041e+01	1.5270826472e+01
5	1.5236235929e+01	1.9358368544e+01
6	1.1581245332e+01	1.2146247787e+01
7	1.2211988912e+01	1.7156556494e+01
8	1.0288589764e+01	1.3013888606e+01
9	1.2421219522e+01	1.1265407565e+01
10	1.1947955017e+01	1.1227072598e+01
11	1.0171317982e+01	9.1204472880e+00
12	7.9860340077e+00	7.1781412759e+00
13	6.5123910259e+00	6.6387889829e+00
14	7.2107480682e+00	5.9658989587e+00
15	5.6869524723e+00	4.2611013266e+00
16	3.4367751725e+00	2.5536585919e+00
17	3.5614007694e+00	2.1563807461e+00
18	1.7524152526e+00	6.9717625560e-01
19	1.4075995923e+00	3.9656393891e-01
20	7.6353002174e-01	1.4134424679e-01
21	3.8937318663e-01	3.0395780084e-02
22	2.3488796722e-01	1.5594177100e-02
23	7.8753278852e-02	1.2454392871e-03
24	5.3763860872e-02	9.0526527745e-04
25	1.2441674608e-02	4.2049687414e-05
26	9.5483061616e-03	2.9484200291e-05
27	2.4996379749e-03	1.5368205109e-06
28	1.3626579486e-03	5.7012318894e-07
29	3.9617470013e-04	4.5502277069e-08
30	1.5878769422e-04	6.7723041156e-09
31	5.1147599532e-05	8.9604626348e-10
32	1.5346377719e-05	5.0082075621e-11
33	5.4888618750e-06	1.1596260184e-11
34	1.2115733575e-06	2.3447657811e-13
35	4.9844586125e-07	1.0169275385e-13
36	7.3869955868e-08	8.5357639410e-16
37	3.8756186260e-08	6.2245200678e-16
38	5.2514758821e-09	4.8566622068e-18
39	2.6067006331e-09	2.7157178993e-18
40	4.2058216495e-10	3.8222032408e-20
41	1.5298923239e-10	8.5394387405e-21
42	2.8101727471e-11	2.2880797514e-22
43	7.8763662259e-12	1.9336332681e-23
44	1.6247003742e-12	9.4923276384e-25
45	3.8058445284e-13	3.0937901697e-26
46	8.2489570730e-14	2.8026189187e-27
47	4.3520742565e-14	5.4249054586e-29
48	3.9079850467e-14	3.0424990873e-29
49	2.9753977060e-14	2.1964334808e-29
50	3.1086244690e-14	2.2382134246e-29

**Interpolacja metodą Lagrange'a
Węzły Równoodległe**

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
51	1.0470108558e-03	6.2179301223e-09
52	2.4089809780e-03	3.3184698738e-08
53	4.3663218932e-03	7.2873185959e-08
54	1.5654722701e-02	1.2379723475e-06
55	2.6763545525e-02	3.0146915616e-06
56	3.9533277153e-02	7.0807709157e-06
57	8.0705845576e-02	2.2228190410e-05
58	7.6392711139e-02	3.3890311923e-05
59	3.7154498359e-01	4.2583149310e-04
60	5.5878429210e-01	6.4780368446e-04
61	1.2622405543e+00	5.6312534177e-03
62	2.4056174714e+00	1.7278306238e-02
63	5.6275923774e+00	1.1572386564e-01
64	6.3821050148e+00	1.5875958035e-01
65	1.7850294184e+01	8.0806159568e-01
66	3.3566381849e+01	5.5035142287e+00
67	4.3452062947e+01	6.2701941836e+00
68	1.3569980058e+02	7.1171134588e+01
69	2.8067952078e+02	2.7615589150e+02
70	4.7370061623e+02	6.4640696638e+02
71	5.4878797121e+02	1.3958632523e+03
72	1.8873694995e+03	1.1592454735e+04
73	2.843196420e+03	2.5901975132e+04
74	3.6592405317e+03	4.7788341314e+04
75	1.2664225086e+04	5.2446241460e+05
76	3.6276378940e+04	2.7046262224e+06
77	6.7201276592e+04	1.0125057574e+07
78	1.2115895738e+05	3.9747224651e+07
79	3.0702781127e+05	2.6530336177e+08
80	4.0196210846e+05	5.3892662633e+08
81	5.5961390835e+05	1.4496099693e+09
82	2.8951632043e+06	1.8695628460e+10
83	3.7959083760e+06	3.8390052887e+10
84	3.9915636562e+06	5.6637941100e+10
85	6.1041275306e+06	1.5954903547e+11
86	2.4771961151e+07	1.4695014239e+12
87	3.3549596128e+07	3.9323797627e+12
88	5.4408340486e+07	1.4237503975e+13
89	1.5652852361e+08	6.1729099868e+13
90	3.2672865936e+08	2.8815126776e+14
91	4.1636636063e+08	8.6247512033e+14
92	1.6933713174e+09	8.4221994324e+15
93	3.8497822360e+09	3.8095866268e+16
94	4.0112867067e+09	4.5016450616e+16
95	1.7476930667e+10	5.1650156561e+17
96	2.5911360300e+10	1.1608813936e+18
97	3.6576633218e+10	4.7123513934e+18
98	8.9919399759e+10	2.3286555892e+19
99	1.7827844934e+11	6.1962675425e+19
100	3.2557325983e+11	2.7302833129e+20

**Interpolacja metodą Lagrange'a
Węzły Czebyszewa**

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
51	3.6415315208e-14	3.6364035149e-29
52	3.8635761257e-14	2.6894565617e-29
53	2.7533531011e-14	2.2786165078e-29
54	3.2640556924e-14	2.4807220572e-29
55	4.4457891136e-14	2.0847604001e-29
56	3.8191672047e-14	2.6612686431e-29
57	3.8191672047e-14	2.2913111747e-29
58	2.1316282073e-14	1.9425440328e-29
59	3.9523939677e-14	1.9772716362e-29
60	2.9753977060e-14	2.2910130472e-29
61	4.0856207306e-14	2.7390719586e-29
62	3.2862601529e-14	3.7665774647e-29
63	3.1974423109e-14	2.5077606058e-29
64	4.3250523597e-14	2.2184850594e-29
65	4.3520742565e-14	2.2353048883e-29
66	3.1086244690e-14	2.6516872029e-29
67	2.7089441801e-14	2.0247141523e-29
68	3.0967885599e-14	2.1598458823e-29
69	3.1974423109e-14	2.6329578641e-29
70	3.7303493627e-14	3.1398574248e-29
71	4.3964831775e-14	2.3201029036e-29
72	3.6637359813e-14	2.6495886921e-29
73	2.8865798640e-14	2.0486638290e-29
74	3.2862601529e-14	2.0912320853e-29
75	3.6859404418e-14	2.8836288869e-29
76	2.6645352591e-14	2.4622937903e-29
77	3.7525538232e-14	3.2499531718e-29
78	3.8191672047e-14	1.9618370804e-29
79	3.4638958368e-14	2.1515800346e-29
80	3.5971225998e-14	2.7237151720e-29
81	3.1530333899e-14	2.3982584854e-29
82	3.0198066270e-14	2.9988786725e-29
83	3.1974423109e-14	2.2336005105e-29
84	3.2862601529e-14	3.0267326391e-29
85	3.3750779949e-14	3.2511406020e-29
86	3.3750779949e-14	2.3868669451e-29
87	2.9642954757e-14	2.5468752976e-29
88	3.5083047578e-14	3.4486622891e-29
89	3.2862601529e-14	2.3829956866e-29
90	3.5083047578e-14	2.7321906983e-29
91	4.2632564146e-14	3.1276361561e-29
92	3.3750779949e-14	2.2999579889e-29
93	3.6415315208e-14	2.6817616427e-29
94	3.1446669278e-14	2.7108623003e-29
95	3.1974423109e-14	2.4881271874e-29
96	3.3750779949e-14	3.1262823678e-29
97	3.6415315208e-14	2.6170329826e-29
98	3.3306690739e-14	2.4586975727e-29
99	3.2418512319e-14	2.7535743051e-29
100	4.1744385726e-14	3.6000806617e-29

Tabela 1: Błędy interpolacji metody Lagrange'a w zależności od liczby węzłów oraz sposobu ich rozmieszczenia

6.2 Interpolacja metodą Newton'a

Interpolacja metodą Lagrange'a Węzły Równoodległe

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
1	0.0000000000e+00	-nan
2	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
3	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
4	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
5	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
6	1.3337146399e+01	1.6978268373e+01
7	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
8	1.3311262673e+01	1.7961330507e+01
9	1.5860945621e+01	2.0397424975e+01
10	2.2159718143e+01	3.1867666252e+01
11	6.0078173648e+01	1.8736829584e+02
12	1.2273228685e+02	9.2079796143e+02
13	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
14	3.3572684400e+02	5.9043798452e+03
15	3.3541034032e+02	3.6232880959e+03
16	3.9748951541e+02	6.3954414950e+03
17	5.5201644046e+02	8.5651948517e+03
18	3.7906735251e+02	3.4613143707e+03
19	4.6144599707e+02	5.6459510320e+03
20	2.4523737257e+02	1.7053650743e+03
21	2.4183294580e+02	1.6568683099e+03
22	1.3850599401e+02	6.0337455512e+02
23	9.2985708075e+01	2.7364760914e+02
24	7.6633051831e+01	1.2372164030e+02
25	4.0738585989e+01	3.1144609729e+01
26	2.9860851186e+01	1.4863226004e+01
27	1.4087770517e+01	2.8830969879e+00
28	8.8118987211e+00	1.1034275866e+00
29	3.9418980439e+00	2.2321313025e-01
30	2.0411221567e+00	5.3185284993e-02
31	9.0778942658e-01	1.3409186724e-02
32	3.7458551437e-01	1.7504738353e-03
33	1.7503301429e-01	5.9006131293e-04
34	5.3940935472e-02	4.2608743622e-05
35	3.0822346836e-02	1.8729123227e-05
36	7.3367709787e-03	8.9100964194e-07
37	5.3298022254e-03	4.3126699501e-07
38	1.3479344725e-03	1.8800257966e-08
39	7.6361385418e-04	7.2756192132e-09
40	2.1018731413e-04	3.4945295572e-10
41	9.2107742928e-05	9.5322686134e-11
42	4.3315577526e-05	1.0119720965e-11
43	5.6970227250e-05	1.6596054751e-11
44	4.6574581084e-05	1.3353602425e-11
45	5.9668719118e-05	1.9916063843e-11
46	8.0253245235e-05	4.3254525498e-11
47	5.9012102174e-05	3.5931759110e-11
48	7.5767867671e-05	3.5965543658e-11
49	1.7171869512e-04	3.1253689596e-10
50	1.8995430234e-04	2.8739852288e-10

Interpolacja metodą Lagrange'a Węzły Czebyszewa

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
1	1.0603519799e+01	9.9913525722e+00
2	1.6309374270e+01	2.3688515513e+01
3	1.2294590205e+01	1.1847477471e+01
4	1.4612960041e+01	1.5270826472e+01
5	1.5236235929e+01	1.9358368544e+01
6	1.1581245332e+01	1.2146247787e+01
7	1.2211988912e+01	1.7156556494e+01
8	1.0288589764e+01	1.3013888606e+01
9	1.2421219522e+01	1.1265407565e+01
10	1.1947955017e+01	1.1227072598e+01
11	1.0171317982e+01	9.1204472880e+00
12	7.9860340077e+00	7.1781412759e+00
13	6.5123910259e+00	6.6387889829e+00
14	7.2107480682e+00	5.9658989587e+00
15	5.6869524723e+00	4.2611013266e+00
16	3.4367751725e+00	2.5536585919e+00
17	3.5614007694e+00	2.1563807461e+00
18	1.7524152526e+00	6.9717625560e-01
19	1.4075995923e+00	3.9656393892e-01
20	7.6353002174e-01	1.4134424679e-01
21	3.8937318651e-01	3.0395780085e-02
22	2.3488796722e-01	1.5594177100e-02
23	7.8753282972e-02	1.2454392853e-03
24	5.3763860867e-02	9.0526528209e-04
25	1.2441674608e-02	4.2049687529e-05
26	9.5483061950e-03	2.9484204917e-05
27	2.4996379749e-03	1.5368205594e-06
28	1.3626576048e-03	5.7012249764e-07
29	3.9617470013e-04	4.5502254930e-08
30	1.5878102155e-04	6.7724439266e-09
31	5.1147599411e-05	8.9606206931e-10
32	1.5757120334e-05	5.0025337997e-11
33	5.4888622016e-06	1.1628067405e-11
34	2.2062084586e-06	2.5112593834e-13
35	2.4182688341e-06	1.2190508230e-13
36	6.2540125654e-06	4.8859195209e-13
37	3.5158215823e-06	1.0397564931e-13
38	4.6064041257e-06	2.3471302003e-13
39	9.7640891982e-06	3.4809573636e-13
40	1.2215307027e-05	7.4176193454e-13
41	1.4152623380e-05	1.1676043577e-12
42	1.1700016692e-05	9.8678971551e-13
43	1.4940694277e-05	1.3560498306e-12
44	2.5320946359e-05	5.6029158365e-12
45	3.8603167138e-05	1.1054959410e-11
46	2.9756349246e-05	5.0967272338e-12
47	2.5938119048e-05	6.6287006480e-12
48	3.2982313646e-05	1.4264050280e-11
49	6.6365498113e-05	1.8849494598e-11
50	8.2997906065e-05	4.0350391387e-11

**Interpolacja metodą Lagrange'a
Węzły Równoodległe**

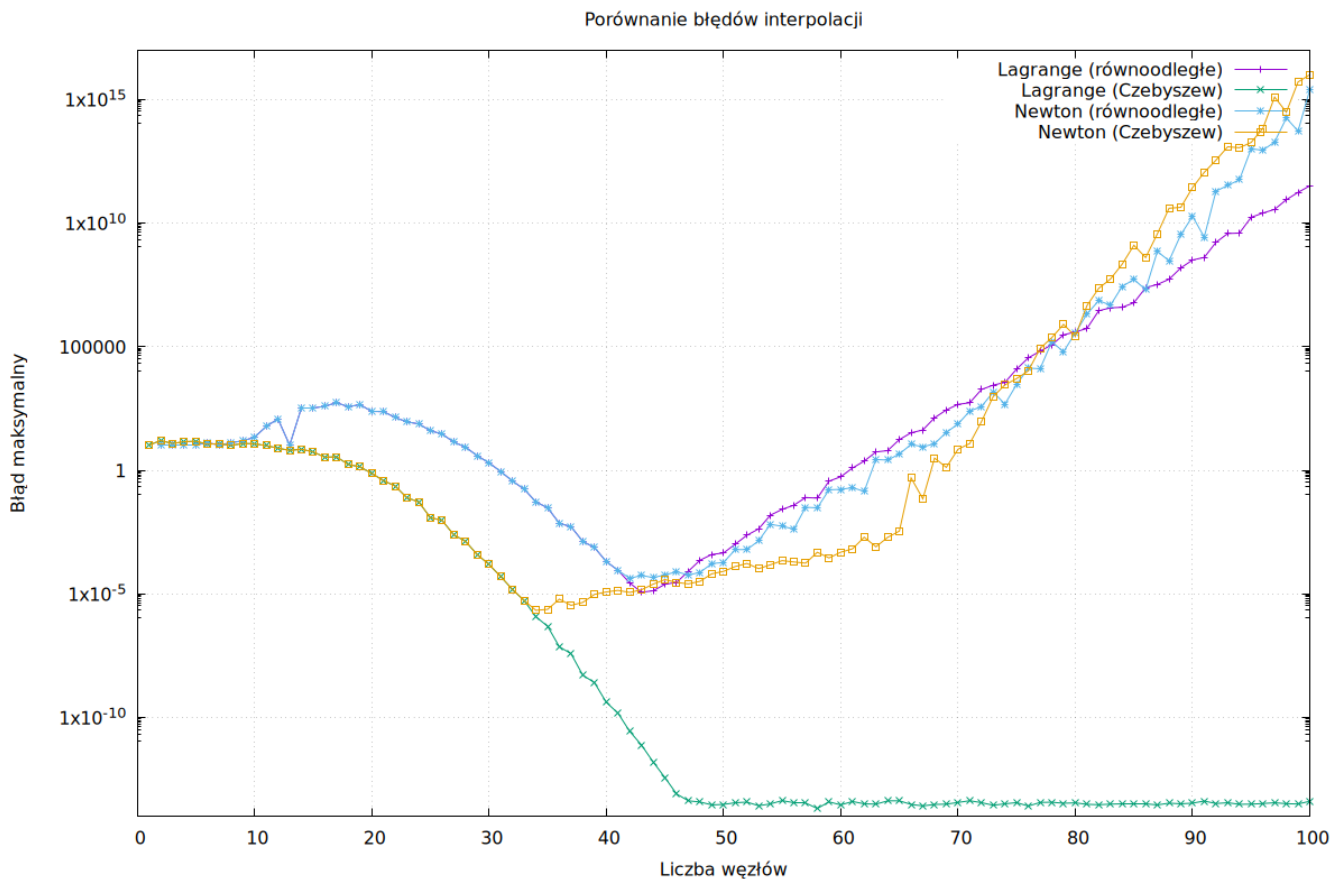
Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
51	6.3086446222e-04	3.6486821521e-09
52	6.3177703314e-04	4.5166730567e-09
53	1.4403115695e-03	2.3062436907e-08
54	6.6408344506e-03	4.9218602711e-07
55	5.5440740688e-03	2.7329170725e-07
56	4.265153316e-03	1.8034890064e-07
57	3.2453499308e-02	1.2196333274e-05
58	3.0910934284e-02	1.0164230015e-05
59	1.6542675533e-01	2.7448750704e-04
60	1.7224662517e-01	2.9107103494e-04
61	2.0167760319e-01	3.6197631466e-04
62	1.4325658589e-01	1.7375820874e-04
63	2.7923161794e+00	6.6900865050e-02
64	2.6314960586e+00	6.1497212869e-02
65	4.6839376813e+00	1.8845819661e-01
66	1.1330945163e+01	1.0733360697e+00
67	9.0440195826e+00	7.8537630714e-01
68	1.2151219234e+01	1.3180661551e+00
69	3.4857421791e+01	1.0207223556e+01
70	7.5626498038e+01	5.0847715941e+01
71	2.5368259548e+02	5.5913372328e+02
72	3.8635588457e+02	1.1267061960e+03
73	1.4864653355e+03	1.7962415563e+04
74	4.8438567561e+02	1.0173408602e+03
75	3.0198834160e+03	3.0142051368e+04
76	1.3853608719e+04	3.2878854641e+05
77	1.3048890538e+04	1.3994156848e+06
78	1.6067999869e+05	5.8985543198e+07
79	6.3456480737e+04	2.0040766928e+07
80	3.6852698296e+05	5.1043279301e+08
81	2.1280890378e+06	2.3071250973e+10
82	7.4335818321e+06	1.8898540194e+11
83	4.8384230686e+06	9.0902972312e+10
84	2.7983613156e+07	2.6349805257e+12
85	5.3200670994e+07	9.5292955553e+12
86	2.0785942634e+07	2.5188329222e+12
87	7.2449127229e+08	2.3804804656e+15
88	3.0362876129e+08	3.6989946988e+14
89	3.4338731932e+09	3.5130943650e+16
90	1.9142430116e+10	1.3624192716e+18
91	2.7665491948e+09	3.5657787186e+16
92	1.9927522471e+11	9.7433851327e+19
93	3.4089984916e+11	3.0517556571e+20
94	5.7472844968e+11	1.3870593410e+21
95	1.0298877410e+13	3.1416107230e+23
96	8.9681139231e+12	1.4928739782e+23
97	1.9520079997e+13	1.3752754038e+24
98	1.7964032308e+14	6.3204959897e+25
99	5.3964879839e+13	1.6488684003e+25
100	2.5066594206e+15	2.1453057123e+28

**Interpolacja metodą Lagrange'a
Węzły Czebyszewa**

Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Średni błąd kwadratowy
51	1.3032374288e-04	1.2042146846e-10
52	1.7428414027e-04	9.1867999439e-11
53	1.0701374838e-04	6.9967945698e-11
54	1.5317249918e-04	1.9147715832e-10
55	2.2566771643e-04	3.2132760337e-10
56	1.9950368967e-04	2.9162026997e-10
57	1.7870254198e-04	2.9209243916e-10
58	4.9157418740e-04	2.5487224138e-09
59	2.9059362745e-04	4.8277275709e-10
60	4.9551253874e-04	9.9347161086e-10
61	6.7752992208e-04	2.8725492157e-09
62	2.0004040289e-03	2.6403612586e-08
63	8.2164087827e-04	4.1305864929e-09
64	1.9768080066e-03	1.8934317493e-08
65	3.5485633067e-03	5.2978674044e-08
66	5.0108246270e-01	1.6767796104e-03
67	7.1547911190e-02	2.6693790373e-05
68	3.1710777511e+00	5.2364213110e-02
69	1.3383535635e+00	1.1098722218e-02
70	7.2373068117e+00	3.7787683811e-01
71	1.2336283024e+01	8.3696678759e-01
72	9.4803681328e+01	5.9293599877e+01
73	9.7751132031e+02	4.6167269671e+03
74	2.9100192418e+03	3.7643616933e+04
75	5.2151199221e+03	2.6682006060e+05
76	1.0744347663e+04	4.0210828388e+05
77	8.6491074558e+04	5.1820255580e+07
78	2.3703822732e+05	2.6008200616e+08
79	8.1218486126e+05	4.4703630800e+09
80	2.6893660260e+05	2.8108184536e+08
81	4.6931038194e+06	1.5505290379e+11
82	2.3367377897e+07	1.8330575700e+12
83	5.5734999272e+07	1.7202704319e+13
84	2.2171974259e+08	1.2782469795e+14
85	1.2896594436e+09	3.1796538950e+15
86	4.1024634617e+08	3.4058382546e+14
87	3.7141222791e+09	6.4021251293e+16
88	4.0616596669e+10	8.6947317668e+18
89	4.3900111693e+10	9.2107609947e+18
90	2.7802662967e+11	2.9020583391e+20
91	1.1474538058e+12	2.7564144229e+21
92	3.5741016207e+12	5.1950199155e+22
93	1.2371519411e+13	5.2260894498e+23
94	1.1380207562e+13	5.5026834780e+23
95	1.8613854302e+13	2.1111788366e+24
96	6.8820923357e+13	3.6606151952e+25
97	1.2721937261e+15	5.6558124599e+27
98	3.1262292105e+14	6.4675263498e+26
99	5.2109564534e+15	1.0034438210e+29
100	1.0219379049e+16	2.8389437190e+29

Tabela 2: Błędy interpolacji metody Newton'a w zależności od liczby węzłów oraz sposobu ich rozmieszczenia

6.3 Błędy interpolacji na wykresie



Rysunek 1: Wykres błędów interpolacji

7 Efekt Runge'go

Efekt Runge'go to zjawisko występujące w interpolacji wielomianowej, szczególnie przy równomiernym rozmieszczeniu węzłów. Objawia się on pogorszeniem się jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów n przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście n , zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów.

7.1 Opis i przyczyna zjawiska

Carl Runge zaobserwował, że dla funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

w przedziale $[-1, 1]$, zwiększanie liczby węzłów równomiernych nie poprawia interpolacji, lecz powoduje jej pogorszenie na krańcach. Przyczyną jest iloczyn $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$, który dla dużych n osiąga wysokie wartości, potęgując oscylacje.

7.2 Rozwiązanie – węzły Czebyszewa

Aby ograniczyć efekt Runge'go, stosuje się węzły Czebyszewa:

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i + 1)\pi}{2(n + 1)}\right), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Minimalizują one największą wartość iloczynu $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$, co redukuje oscylacje i poprawia dokładność interpolacji.

7.3 Podsumowanie

Efekt Runge'go powoduje, że zwiększenie liczby węzłów równomiernych nie zawsze poprawia aproksymację. Lepszym rozwiązaniem są węzły Czebyszewa, które zapewniają większą stabilność interpolacji.

8 Węzły równoodległe i Czebyszewa

Dobór węzłów interpolacyjnych wpływa na dokładność aproksymacji. Najczęściej stosowane są:

- węzły równoodległe,
- węzły Czebyszewa.

8.1 Węzły równoodległe

Węzły te są rozmieszczone w równych odstępach:

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Są łatwe w implementacji, ale dla dużych n prowadzą do efektu Runge'go.

8.2 Węzły Czebyszewa

Węzły Czebyszewa koncentrują się bliżej końców przedziału, minimalizując oscylacje:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)} \right).$$

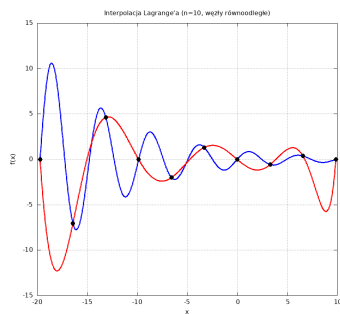
Zapewniają znacznie lepszą aproksymację niż węzły równoodległe.

8.3 Podsumowanie

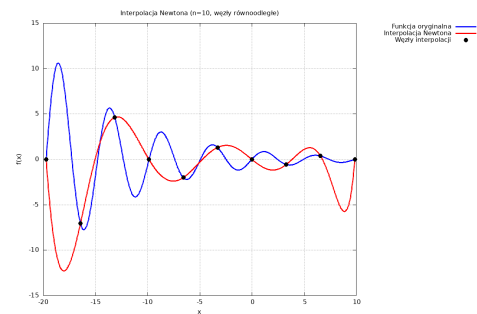
Węzły równoodległe są prostsze w implementacji, ale mogą prowadzić do dużych błędów na krańcach. Węzły Czebyszewa skutecznie redukują efekt Runge'go, oferując dokładniejsze wyniki interpolacji.

9 Przykładowe wykresy interpolacji z podziałem na typ węzłów

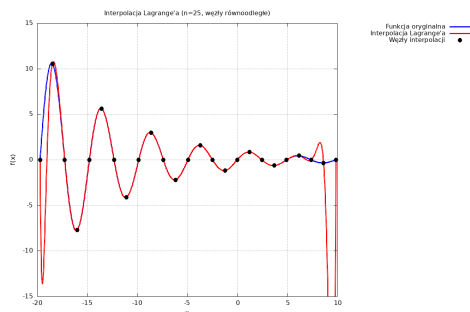
9.1 Węzły równoodległe



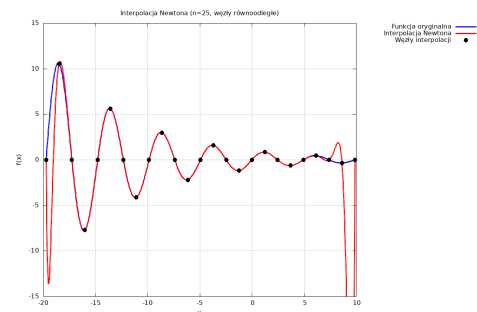
(a) Wykres 1: Interpolacja Lagrange'a dla $n=10$



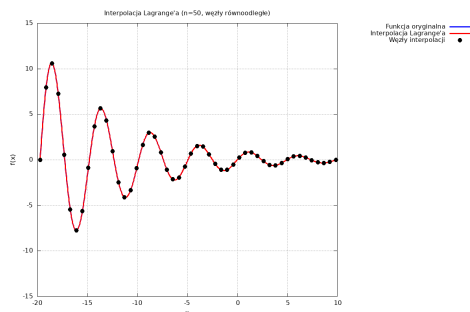
(b) Wykres 2: Interpolacja Newton'a dla $n=10$



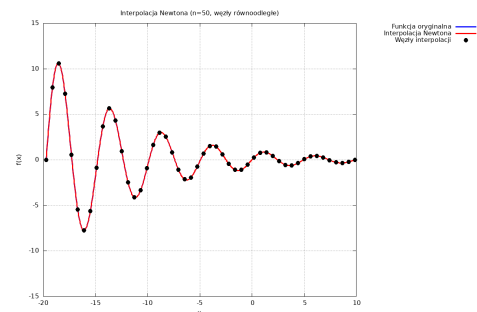
(c) Wykres 3: Interpolacja Lagrange'a dla $n=25$



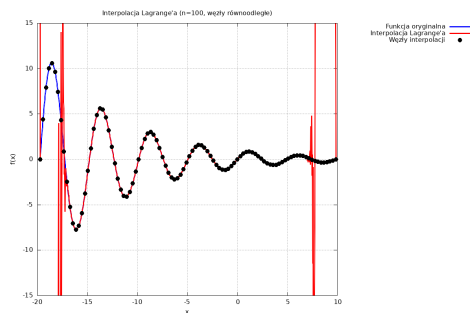
(d) Wykres 4: Interpolacja Newton'a dla $n=25$



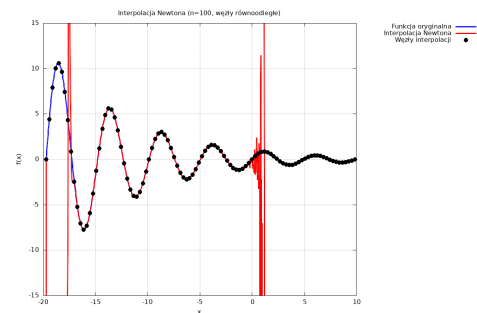
(e) Wykres 5: Interpolacja Lagrange'a dla $n=50$



(f) Wykres 6: Interpolacja Newton'a dla $n=50$



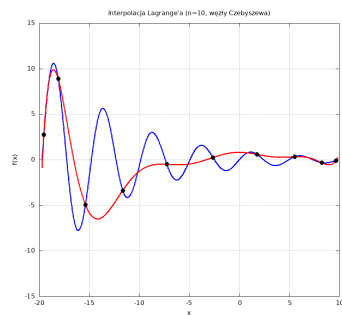
(g) Wykres 7: Interpolacja Lagrange'a dla $n=100$



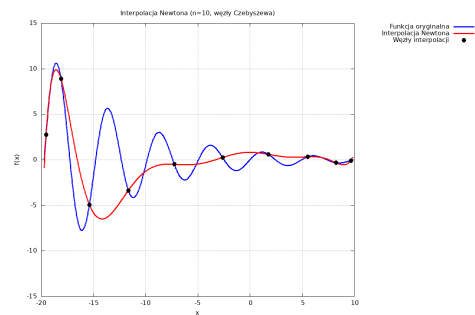
(h) Wykres 8: Interpolacja Newton'a dla $n=100$

Rysunek 2: Porównanie wykresów dla węzłów równoodległych na różnych metodach interpolacji

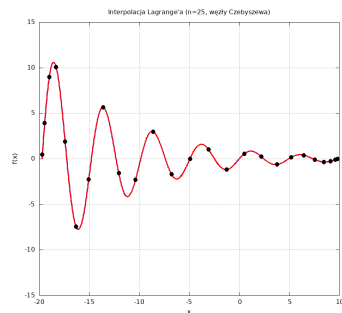
9.2 Węzły Czebyszewa



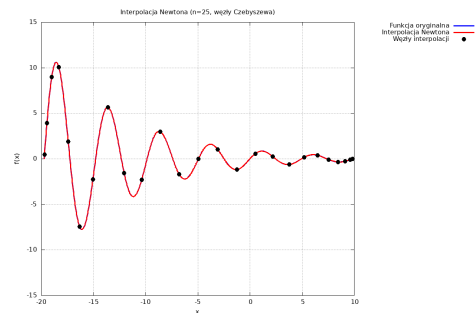
(a) Wykres 1: Interpolacja Lagrange'a dla $n=10$



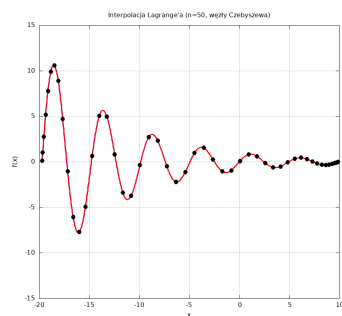
(b) Wykres 2: Interpolacja Newton'a dla $n=10$



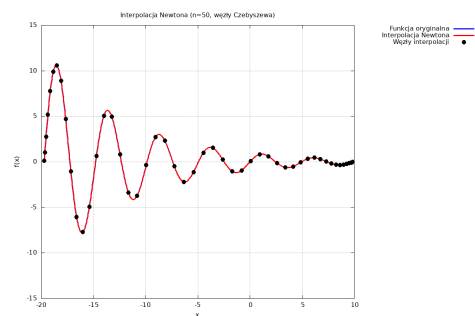
(c) Wykres 3: Interpolacja Lagrange'a dla $n=25$



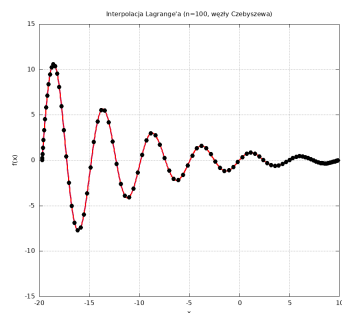
(d) Wykres 4: Interpolacja Newton'a dla $n=25$



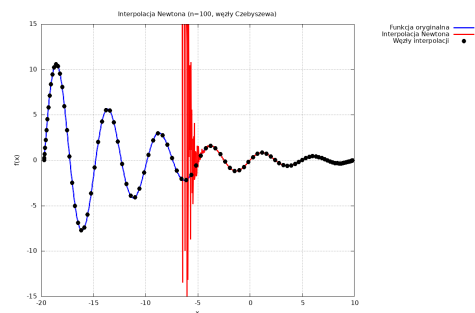
(e) Wykres 5: Interpolacja Lagrange'a dla $n=50$



(f) Wykres 6: Interpolacja Newton'a dla $n=50$



(g) Wykres 7: Interpolacja Lagrange'a dla $n=100$



(h) Wykres 8: Interpolacja Newton'a dla $n=100$

Rysunek 3: Porównanie wykresów dla węzłów Czebyszewa na różnych metodach interpolacji

10 Analiza przypadków szczególnych

10.1 Podobieństwo wykresów interpolacji

Na podstawie danych można zauważyć, że dla liczby węzłów mniejszej niż 40 obie metody interpolacji (Lagrange'a i Newtona) dają bardzo zbliżone wyniki, niezależnie od rodzaju węzłów (równoodległych lub Czebyszewa).

W obu metodach zastosowanie węzłów Czebyszewa pozwala na znaczną redukcję efektu Runge'go, co jest szczególnie widoczne dla większej liczby węzłów. Różnice między wykresami dla większej liczby węzłów wynikają z:

- Problemów związanych z arytmetyką komputerową
- Pogarszającym się uwarunkowaniem zadania wraz ze wzrostem liczby węzłów

10.2 Błędy arytmetyczne

W metodzie Newtona dla liczby węzłów większej niż 40 zaczynają być widoczne artefakty:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad (1)$$

Ilorazy różnicowe są obliczane rekurencyjnie, co oznacza, że błędy z wcześniejszych kroków kumulują się. Dodatkowo, interpolacja wielomianowa dla dużej liczby węzłów staje się źle uwarunkowana.

Liczba węzłów	Błąd maksymalny (równoodległe)	Błąd maksymalny (Czebyszew)
30	2.04	0.16
50	4.61×10^{-4}	8.30×10^{-5}
100	3.26×10^{11}	1.02×10^{-16}

Tabela 3: Błędy interpolacji dla różnej liczby węzłów

10.3 Występowanie efektu Runge'go

10.4 Podsumowanie

- **Węzły równoodległe:**
 - Proste w implementacji
 - Efekt Runge'go od $n=45$
- **Węzły Czebyszewa:**
 - Skuteczna redukcja efektu Runge'go
 - Lepsza dokładność dla dużych n
- **Metoda Newtona:** Podatna na błędy arytmetyczne dla $n > 40$
- **Metoda Lagrange'a:** Mniej podatna na błędy arytmetyczne, a w połączeniu z węzłami Czebyszewa jest w stanie uniknąć efektu Runge'go