

METODY OBLICZENIOWE W NAUCE I TECHNICIE

Laboratorium 2 i 3 | Zagadnienie interpolacji Lagrange'a, Newtona i Hermite'a

Jakub Kaliński | Informatyka | rok II
Grupa numer 5 | Piątek | Godzina 15:00 - 16:30

1 Treść i przebieg zadania

1.1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było wyznaczenie wielomianu interpolacyjnego w zagadnieniu **Lagrange'a, Newtona i Hermite'a** dla zadanej funkcji, analiza jego dokładności w zależności od liczby i rozmieszczenia węzłów, oraz porównanie wyników między metodami interpolacji.

1.2 Zadana funkcja i przedział

Analizowano funkcję:

$$f(x) = \sin\left(\frac{kx}{\pi}\right) e^{\frac{-mx}{\pi}} \quad (\text{przyjmując } k = 4.0, m = 0.4)$$

w przedziale:

$$[-2\pi^2, \pi^2] \approx [-19.739, 9.870]$$

1.3 Przebieg ćwiczenia

Celem ćwiczenia była analiza interpolacji funkcji $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ przy użyciu metody **Hermite'a** (uwzględniającej wartości funkcji $f(x_i)$ i pierwszej pochodnej $f'(x_i)$ w węzłach x_i) oraz porównanie jej z klasyczną interpolacją wielomianową **Lagrange'a/Newtona** (uwzględniającą tylko wartości $f(x_i)$).

Zaimplementowana metoda interpolacji Hermite'a opierała się na uogólnionym wzorze Newtona dla ilorazów różnicowych, wykorzystując "zlepione" węzły $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ i wymagając podania wartości pochodnych $f'(x_i)$ jako danych wejściowych (np. obliczonych analitycznie lub numerycznie). Wielomiany Lagrange'a i Newtona (teoretycznie tożsame) obliczono standardowymi metodami.

Interpolację przeprowadzano dla liczby węzłów n od 1 do 100, stosując dwa schematy rozmieszczenia w przedziale $[a, b]$:

- Węzły równoodległe.
- Węzły Czebyszewa.

Analiza wyników obejmowała:

- **Ocenę dokładności interpolacji:** Badano błąd maksymalny $\|f - P\|_\infty$ oraz błąd średniokwadratowy $\|f - P\|_{L_2}$ dla wszystkich trzech metod (Hermite, Lagrange, Newton) w zależności od n i typu węzłów.
- **Wizualizację interpolacji:** Generowano wykresy porównujące przebieg funkcji oryginalnej $f(x)$ z wielomianami interpolacyjnymi $H(x)$, $L(x)$, $N(x)$ dla wybranych n .
- **Analizę efektu Rungego i stabilności numerycznej:** Obserwowano zachowanie błędów i wykresów dla rosnącej liczby węzłów n , ze szczególnym uwzględnieniem oscylacji dla węzłów równoodległych oraz potencjalnych problemów numerycznych metody Hermite'a.
- **Identyfikację przypadków szczególnych:** Analizowano zachowanie interpolacji w nietypowych sytuacjach, np. gdy węzły równoodległe wypadają w miejscach zerowych funkcji.

Na podstawie tych analiz oceniono efektywność i ograniczenia poszczególnych metod interpolacji dla badanej funkcji.

2 Dane techniczne sprzętu

Do wykonania zadania wykorzystany został komputer o poniższej specyfikacji:

- system *Windows 10 x64*,
- procesor *Intel Core i7-11370H* o taktowaniu *3.30GHz*,
- pamięć *RAM 16GB*.

3 Dane techniczne oprogramowania

3.1 System operacyjny

- WSL Ubuntu
- Wersja 24.04

3.2 Język programowania

- Język *C*,
- Wersja *3.30*.

3.3 Środowisko programowania

- *CLion*

3.4 Użyte biblioteki

W projekcie wykorzystano następujące biblioteki standardowe języka C:

- `<stdio.h>` – do operacji wejścia/wyjścia, takich jak zapis do pliku i wyświetlanie wyników na konsolę.
- `<stdlib.h>` – do alokacji pamięci (np. funkcje `malloc`, `free`), konwersji typów, generowania liczb pseudolosowych oraz wywoływania poleceń systemowych.
- `<math.h>` – do funkcji matematycznych, takich jak obliczanie pierwiastków kwadratowych (`sqrt`), potęgowania (`pow`), logarytmów (`log`, `log10`) czy funkcji trygonometrycznych (`sin`, `cos`).

3.5 Wizualizacja

Za wizualizację otrzymanych wyników odpowiedzialne było narzędzie *gnuplot*.

4 Metody interpolacji

Interpolacja polega na znalezieniu funkcji (w tym przypadku wielomianu), która dokładnie przechodzi przez zadane punkty (węzły interpolacyjne) i pozwala na przybliżanie wartości funkcji w obszarach między tymi węzłami. W ramach tego zadania zastosowano interpolację wielomianową Lagrange'a (obliczaną dwiema metodami: bezpośrednio wzorem Lagrange'a oraz za pomocą różnic dzielonych Newtona) oraz interpolację Hermite'a (również za pomocą różnic dzielonych). Teoretycznie, wielomiany interpolacyjne Lagrange'a i Newtona dla tego samego zbioru węzłów są matematycznie identyczne, ale mogą różnić się stabilnością numeryczną obliczeń. Interpolacja Hermite'a dodatkowo wykorzystuje wartości pochodnych w węzłach.

5 Błędy interpolacji

Aby ocenić jakość interpolacji, obliczane były dwa rodzaje błędów: **maksymalny błąd bezwzględny** (E_m) oraz **średni błąd kwadratowy** (E_s). Błędy te wyznaczono na podstawie 1000 równoodległych punktów testowych w zadanym przedziale.

5.1 Maksymalny błąd bezwzględny

Maksymalny błąd bezwzględny określa największą różnicę między rzeczywistymi wartościami funkcji $f(x)$ a wartościami interpolowanymi $P_n(x)$. Definiuje się go jako:

$$E_{\max} = \max_{i \in \{0, \dots, n\}} |f(x_i) - P_n(x_i)|$$

W kodzie ta wartość jest aktualizowana w pętli dla każdego punktu, wybierając największy błąd.

5.2 Błąd średniokwadratowy (MSE – Mean Squared Error)

Błąd średniokwadratowy jest miarą przeciętnej różnicy między wartościami rzeczywistymi a interpolowanymi, podniesionymi do kwadratu. Definiuje się go jako:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (f(x_i) - P_n(x_i))^2$$

W implementacji najpierw obliczana jest suma kwadratów błędów, a następnie dzielona przez liczbę punktów n .

5.3 Interpretacja wyników

Oba wskaźniki błędów pozwalają ocenić jakość interpolacji:

- **Maksymalny błąd (E_m)** pokazuje najgorszy przypadek aproksymacji w testowanym zbiorze punktów, wskazując, gdzie interpolacja jest najmniej dokładna.
- **Błąd średniokwadratowy (E_s , prawdopodobnie RMSE)** mierzy ogólną jakość interpolacji – im niższa jego wartość, tym lepiej interpolant przybliży funkcję w całym przedziale (średnio).

Dzięki analizie tych błędów można porównać różne metody interpolacji i określić, która daje lepsze wyniki, np. węzły równoodległe vs. węzły Czebyszewa, oraz porównać stabilność numeryczną różnych algorytmów).

6 Rozmieszczenie węzłów

6.1 Węzły równoodległe

Węzły te są rozmieszczone w równych odstępach:

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Są łatwe w implementacji, ale dla dużych n prowadzą do efektu Runge'go.

6.2 Węzły Czebyszewa

Węzły Czebyszewa koncentrują się bliżej końców przedziału, minimalizując oscylacje:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right).$$

Zapewniają znacznie lepszą interpolację niż węzły równoodległe.

7 Porównanie błędów interpolacji

Poniższa tabela przedstawia błąd maksymalny (E_m) oraz średni błąd kwadratowy (E_s) dla różnych metod interpolacji (Lagrange'a obliczanej wzorem Lagrange'a i Newtona, oraz Hermite'a obliczanej wzorem Newtona), dla węzłów równoodległych oraz węzłów Czebyszewa, w zależności od liczby węzłów N .

Tabela 1: Porównanie błędów interpolacji dla różnych metod, formuł i typów węzłów.

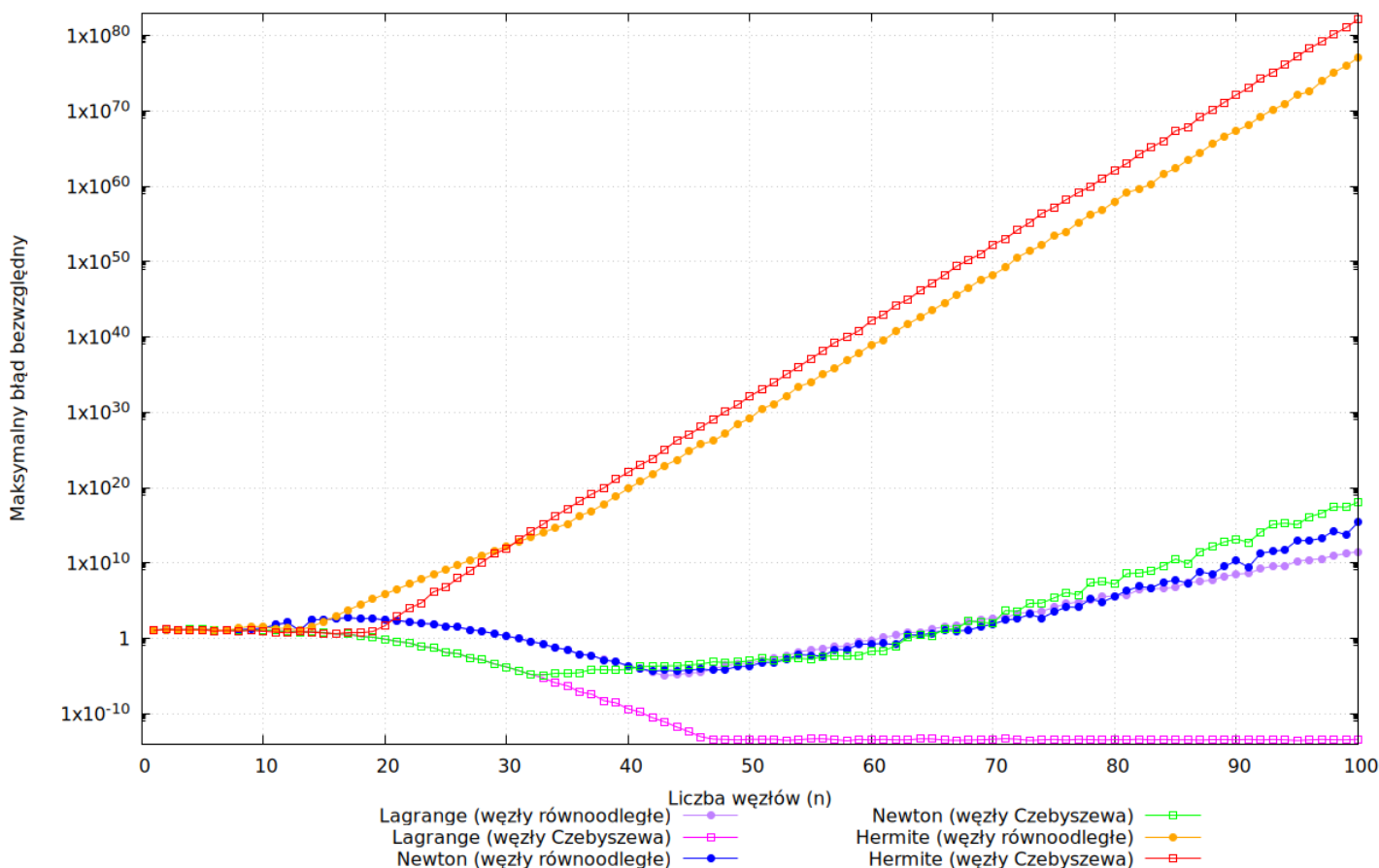
N	Lagrange (Wzór Lagrange'a)				Lagrange (Wzór Newtona)				Hermite (Wzór Newtona)			
	Węzły Równoodległe		Węzły Czebyszewa		Węzły Równoodległe		Węzły Czebyszewa		Węzły Równoodległe		Węzły Czebyszewa	
	E_m	E_s	E_m	E_s	E_m	E_s	E_m	E_s	E_m	E_s	E_m	E_s
2	10.6035	9.9914	16.3094	23.6885	10.6035	9.9914	16.3094	23.6885	10.6035	9.9914	15.1117	21.9914
3	10.6035	9.9914	12.2946	11.8475	10.6035	9.9914	12.2946	11.8475	10.6035	9.9914	12.8605	12.5092
4	10.6035	9.9914	14.6130	15.2708	10.6035	9.9914	14.6130	15.2708	10.6035	9.9914	13.6768	15.1959
5	10.6035	9.9914	15.2362	19.3584	10.6035	9.9914	15.2362	19.3584	10.6035	9.9914	13.6094	16.9192
6	13.3371	16.9783	11.5812	12.1462	13.3371	16.9783	11.5812	12.1462	13.7510	17.0377	8.7371	8.5787
7	10.6035	9.9914	12.2120	17.1566	10.6035	9.9914	12.2120	17.1566	10.6035	9.9914	10.5591	12.4564
8	13.3113	17.9613	10.2886	13.0139	13.3113	17.9613	10.2886	13.0139	22.1512	54.4126	8.9300	10.5552
9	15.8609	20.3974	12.4212	11.2654	15.8609	20.3974	12.4212	11.2654	39.6786	115.8310	11.2124	9.7938
10	22.1597	31.8677	11.9480	11.2271	22.1597	31.8677	11.9480	11.2271	33.8177	56.6869	8.5501	7.3248
11	60.0782	187.3683	10.1713	9.1204	60.0782	187.3683	10.1713	9.1204	19.2199	15.1547	6.5798	3.7017
12	122.7323	920.7980	7.9860	7.1781	122.7323	920.7980	7.9860	7.1781	20.8802	21.2723	5.1962	3.1632
13	10.6035	9.9914	6.5124	6.6388	10.6035	9.9914	6.5124	6.6388	10.6035	9.9914	7.6390	5.5209
14	335.7268	5904.3798	7.2107	5.9659	335.7268	5904.3798	7.2107	5.9659	39.2857	54.7477	6.3749	5.0851
15	335.4103	3623.2881	5.6870	4.2611	335.4103	3623.2881	5.6870	4.2611	160.5771	1060.7572	4.7929	1.6861
16	397.4895	6395.4415	3.4368	2.5537	397.4895	6395.4415	3.4368	2.5537	966.4208	2.772e+4	4.2213	2.2189
17	552.0164	8565.1949	3.5614	2.1564	552.0164	8565.1949	3.5614	2.1564	5585.8852	6.868e+5	5.6114	3.6748
18	379.0674	3461.3144	1.7524	0.6972	379.0674	3461.3144	1.7524	0.6972	2.986e+4	1.617e+7	5.4881	1.3234
19	461.4460	5645.9510	1.4076	0.3966	461.4460	5645.9510	1.4076	0.3966	1.506e+5	3.659e+8	7.8254	2.9558
20	245.2374	1705.3651	0.7635	0.1413	245.2374	1705.3651	0.7635	0.1413	7.265e+5	7.969e+9	46.5634	19.1941
21	241.8329	1656.8683	0.3894	0.0304	241.8329	1656.8683	0.3894	0.0304	3.383e+6	1.670e+11	716.2596	2869.1164
22	138.5060	603.3746	0.2349	0.0156	138.5060	603.3746	0.2349	0.0156	1.533e+7	3.370e+12	9078.6234	7.910e+5
23	92.9857	273.6476	0.0788	0.0012	92.9857	273.6476	0.0788	0.0012	6.804e+7	6.556e+13	5.031e+4	2.294e+7
24	76.6331	123.7216	0.0538	9.053e-4	76.6331	123.7216	0.0538	9.053e-4	2.955e+8	1.234e+15	1.474e+6	5.922e+9
25	40.7386	31.1446	0.0124	4.205e-5	40.7386	31.1446	0.0124	4.205e-5	1.269e+9	2.255e+16	5.843e+6	2.899e+11
26	29.8609	14.8632	0.0095	2.948e-5	29.8609	14.8632	0.0095	2.948e-5	5.359e+9	4.012e+17	9.067e+7	4.660e+13
27	14.0878	2.8831	0.0025	1.537e-6	14.0878	2.8831	0.0025	1.537e-6	2.249e+10	6.985e+18	8.264e+8	5.055e+15
28	8.8119	1.1034	0.0014	5.701e-7	8.8119	1.1034	0.0014	5.701e-7	9.320e+10	1.193e+20	1.281e+10	5.738e+17
29	3.9419	0.2232	3.962e-4	4.550e-8	3.9419	0.2232	3.961e-4	4.550e-8	3.839e+11	2.003e+21	1.623e+11	1.138e+20
30	2.0411	0.0532	1.588e-4	6.772e-9	2.0411	0.0532	1.588e-4	6.772e-9	1.573e+12	3.307e+22	7.637e+11	3.752e+21
31	0.9078	0.0134	5.115e-5	8.960e-10	0.9078	0.0134	5.114e-5	8.964e-10	6.410e+12	5.347e+23	1.139e+13	5.222e+23
32	0.3746	0.0018	1.535e-5	5.008e-11	0.3746	0.0018	1.535e-5	5.118e-11	2.732e+13	9.112e+24	1.562e+14	1.198e+26
33	0.1750	5.901e-4	5.489e-6	1.160e-11	0.1750	5.901e-4	1.317e-5	1.243e-11	1.075e+14	1.416e+26	1.346e+15	5.316e+27
34	0.0539	4.261e-5	1.212e-6	2.345e-13	0.0539	4.261e-5	2.185e-5	3.153e-12	4.377e+14	1.966e+27	1.703e+16	8.123e+29
35	0.0308	1.873e-5	4.984e-7	1.017e-13	0.0308	1.873e-5	2.085e-5	3.646e-12	1.603e+15	2.449e+28	1.571e+17	1.229e+32
36	0.0073	8.911e-7	7.387e-8	8.536e-16	0.0073	8.910e-7	2.690e-5	8.148e-12	1.765e+16	2.302e+30	1.496e+18	1.101e+34
37	0.0053	4.311e-7	3.876e-8	6.225e-16	0.0053	4.313e-7	7.241e-5	4.549e-11	7.660e+16	2.069e+31	1.310e+19	5.466e+35
38	0.0014	1.883e-8	5.251e-9	4.857e-18	0.0013	1.880e-8	6.548e-5	2.154e-11	6.529e+17	1.708e+33	8.836e+19	4.033e+37
39	7.633e-4	7.264e-9	2.607e-9	2.716e-18	7.636e-4	7.276e-9	5.910e-5	3.888e-11	7.781e+18	2.386e+35	1.285e+21	6.498e+39
40	2.071e-4	3.947e-10	4.206e-10	3.822e-20	2.102e-4	3.495e-10	7.799e-5	7.705e-11	7.409e+19	1.837e+37	1.046e+22	6.013e+41
41	9.204e-5	8.945e-11	1.530e-10	8.539e-21	9.211e-5	9.532e-11	1.648e-4	3.139e-10	6.398e+20	1.718e+39	1.052e+23	7.234e+43
42	2.805e-5	6.892e-12	2.810e-11	2.288e-22	4.332e-5	1.012e-11	1.974e-4	2.712e-10	6.160e+21	9.210e+40	6.885e+23	3.281e+45
43	1.186e-5	8.284e-13	7.873e-12	1.934e-23	5.697e-5	1.660e-11	2.194e-4	3.381e-10	8.596e+22	1.647e+43	1.127e+25	7.242e+47
44	1.364e-5	7.647e-13	1.624e-12	9.492e-25	4.657e-5	1.335e-11	2.204e-4	3.297e-10	5.029e+23	5.015e+44	1.918e+26	9.941e+49
45	2.484e-5	2.591e-12	3.837e-13	3.094e-26	5.967e-5	1.992e-11	2.787e-4	5.774e-10	6.321e+24	1.810e+47	1.104e+27	4.367e+51
46	2.976e-5	5.343e-12	8.282e-14	2.799e-27	8.025e-5	4.325e-11	7.372e-4	1.166e-9	5.787e+25	1.589e+49	1.111e+28	7.845e+53
47	8.428e-5	2.739e-11	4.086e-14	5.355e-29	5.901e-5	3.593e-11	7.360e-4	2.490e-9	1.592e+26	8.903e+49	1.055e+29	4.851e+55
48	2.359e-4	1.384e-10	3.730e-14	3.157e-29	7.577e-5	3.597e-11	6.119e-4	2.975e-9	1.468e+27	9.510e+51	1.398e+30	1.086e+58
49	4.016e-4	9.903e-10	3.197e-14	2.481e-29	1.717e-4	3.125e-10	6.940e-4	4.350e-9	3.011e+28	2.286e+54	9.751e+30	4.935e+59
50	4.614e-4	1.664e-9	3.864e-14	2.262e-29	1.900e-4	2.874e-10	0.0010	9.576e-9	1.458e+29	7.779e+55	1.405e+32	8.225e+61
51	0.0010	6.218e-9	3.819e-14	3.828e-29	6.309e-4	3.649e-9	0.0022	1.240e-8	3.030e+30	2.934e+58	1.108e+33	5.003e+63
52	0.0024	3.318e-8	4.086e-14	2.986e-29	6.318e-4	4.517e-9	9.734e-4	7.732e-9	1.352e+31	1.204e+60	8.790e+33	3.071e+65
53	0.0044	7.287e-8	2.665e-14	2.277e-29	0.0014	2.306e-8	0.0020	2.857e-8	1.559e+32	1.078e+62	1.080e+35	5.651e+67
54	0.0160	1.272e-6	3.419e-14	2.387e-29	0.0066	4.922e-7	0.0021	3.532e-8	2.508e+33	1.769e+64	1.111e+36	6.355e+69
55	0.0268	3.015e-6	4.377e-14	2.205e-29	0.0055	2.733e-7	0.0017	2.695e-8	9.418e+33	2.815e+65	1.199e+37	4.983e+71
56	0.0395	7.081e-6	4.441e-14	2.639e-29	0.0043	1.803e-7	0.0037	7.203e-8	1.199e+35	4.122e+67	1.424e+38	7.658e+73
57	0.0807	2.223e-5	3.597e-14	2.477e-29	0.0325	1.220e-5	0.0050	9.651e-8	6.910e+35	2.173e+69	1.922e+39	1.243e+76
58	0.0876	4.188e-5	2.398e-14	2.132e-29	0.0309	1.016e-5	0.0041	1.333e-7	8.787e+36	2.170e+71	1.090e+40	4.684e+77
59	0.3715	4.258e-4	3.775e-14	2.078e-29	0.1654	2.745e-4	0.0056	1.961e-7	7.557e+37	1.956e+73	7.268e+40	2.688e+79
60	0.5282	7.064e-4	3.109e-14	2.433e-29	0.1722	2.911e-4	0.0204	2.908e-6	9.935e+38	2.667e+75	1.585e+42	5.216e+81
61	1.2622	0.0056	3.819e-14	2.535e-29	0.2017	3.620e-4	0.0217	1.397e-6	3.672e+39	5.630e+76	9.532e+42	4.559e+83
62	2.4056	0.0173	3.209e-14	3.929e-29	0.1433	1.738e-4	0.0933	4.320e-5	5.696e+40	1.080e+79	1.767e+44	1.008e+86
63	5.6276	0.1157	3.286e-14	2.469e-29	2.7923	0.0669	1.1683	0.0040	5.478e+41	6.917e+80	9.449e+44	

Tabela 1: Porównanie błędów interpolacji (ciąg dalszy)

N	Lagrange (Wzór Lagrange'a)				Lagrange (Wzór Newtona)				Hermite (Wzór Newtona)			
	Węzły Równoodległe		Węzły Czebyszewa		Węzły Równoodległe		Węzły Czebyszewa		Węzły Równoodległe		Węzły Czebyszewa	
	E_m	E_s	E_m	E_s	E_m	E_s	E_m	E_s	E_m	E_s	E_m	E_s
77	6.720e+4	1.013e+7	3.908e-14	3.168e-29	1.305e+4	1.399e+6	5.887e+5	2.253e+9	1.616e+55	6.443e+107	1.522e+59	9.036e+115
78	1.137e+5	3.755e+7	3.464e-14	1.935e-29	1.607e+5	5.899e+7	2.223e+7	2.751e+12	1.850e+56	7.359e+109	9.344e+59	6.166e+117
79	3.070e+5	2.653e+8	3.109e-14	2.163e-29	6.346e+4	2.004e+7	3.383e+7	8.141e+12	7.337e+56	1.167e+111	1.233e+61	2.862e+119
80	4.272e+5	5.446e+8	3.553e-14	2.956e-29	3.685e+5	5.104e+8	1.539e+7	1.456e+12	1.019e+58	3.923e+113	1.323e+62	2.990e+121
81	5.596e+5	1.450e+9	3.286e-14	2.538e-29	2.128e+6	2.307e+10	3.749e+8	3.748e+14	1.466e+59	3.096e+115	1.120e+63	3.189e+123
82	2.895e+6	1.870e+10	4.086e-14	3.093e-29	7.434e+6	1.890e+11	4.558e+8	9.997e+14	4.846e+59	7.329e+116	1.678e+64	1.111e+126
83	3.649e+6	3.293e+10	3.153e-14	2.266e-29	4.838e+6	9.090e+10	8.448e+8	2.667e+15	2.062e+60	1.897e+118	1.559e+65	4.207e+127
84	3.992e+6	5.664e+10	3.730e-14	3.139e-29	2.798e+7	2.635e+12	4.218e+9	1.359e+17	4.524e+61	7.110e+120	1.048e+66	5.580e+129
85	6.104e+6	1.595e+11	3.242e-14	3.313e-29	5.320e+7	9.529e+12	3.321e+10	6.090e+18	2.454e+62	1.910e+122	2.406e+67	1.006e+132
86	2.477e+7	1.470e+12	3.375e-14	2.578e-29	2.079e+7	2.519e+12	7.553e+9	2.303e+17	3.364e+63	4.304e+124	7.565e+67	2.716e+133
87	3.355e+7	3.932e+12	3.064e-14	2.589e-29	7.245e+8	2.380e+15	3.143e+11	3.092e+20	2.751e+64	3.048e+126	1.513e+69	8.662e+135
88	5.441e+7	1.424e+13	3.464e-14	3.406e-29	3.036e+8	3.699e+14	1.396e+12	8.299e+21	3.979e+65	2.643e+128	1.264e+70	3.751e+137
89	1.565e+8	6.173e+13	3.642e-14	2.488e-29	3.434e+9	3.513e+16	6.087e+12	2.273e+23	4.270e+66	5.594e+130	1.437e+71	8.400e+139
90	3.267e+8	2.882e+14	3.286e-14	2.843e-29	1.914e+10	1.362e+18	1.530e+13	8.506e+23	2.382e+67	1.741e+132	1.447e+72	8.019e+141
91	4.164e+8	8.625e+14	3.819e-14	3.208e-29	2.767e+9	3.566e+16	5.180e+12	1.256e+23	1.495e+68	3.989e+133	1.178e+73	7.465e+143
92	1.693e+9	8.422e+15	3.165e-14	2.212e-29	1.993e+11	9.743e+19	1.257e+14	5.481e+25	1.929e+69	9.619e+135	2.008e+74	7.354e+145
93	3.850e+9	3.810e+16	3.730e-14	2.821e-29	3.409e+11	3.052e+20	1.315e+15	5.811e+27	1.540e+70	4.079e+137	1.407e+75	3.929e+147
94	4.011e+9	4.502e+16	3.301e-14	2.782e-29	5.747e+11	1.387e+21	1.880e+15	1.233e+28	9.094e+70	2.126e+139	1.455e+76	4.733e+149
95	1.748e+10	5.165e+17	2.665e-14	2.571e-29	1.030e+13	3.142e+23	1.193e+15	6.043e+27	1.445e+72	4.429e+141	1.763e+77	6.208e+151
96	2.591e+10	1.161e+18	3.197e-14	3.006e-29	8.968e+12	1.493e+23	1.364e+16	9.020e+29	3.701e+72	4.713e+142	2.152e+78	1.212e+154
97	3.658e+10	4.712e+18	3.775e-14	2.629e-29	1.952e+13	1.375e+24	3.994e+16	3.724e+30	8.836e+73	1.907e+145	1.599e+79	7.943e+155
98	8.992e+10	2.329e+19	3.375e-14	2.772e-29	1.796e+14	6.320e+25	2.942e+17	2.258e+32	1.311e+75	5.179e+147	1.649e+80	5.879e+157
99	1.783e+11	6.196e+19	3.286e-14	2.741e-29	5.396e+13	1.649e+25	2.410e+17	2.341e+32	1.001e+76	1.844e+149	1.151e+81	3.249e+159
100	3.117e+11	2.669e+20	3.908e-14	3.676e-29	2.507e+15	2.145e+28	1.231e+18	9.211e+33	1.252e+77	2.872e+151	1.595e+82	7.177e+161

7.1 Błędy interpolacji na wykresie

Porównanie błędów interpolacji (maksymalny błąd bezwzględny)



Rysunek 1: Wykres błędów interpolacji

8 Analiza porównawcza wykresu błędów dla wszystkich metod

Na Rysunku 1 przedstawiono porównanie maksymalnego błędu bezwzględnego (E_m) dla metod interpolacji Lagrange'a (implementowanych wzorem Lagrange'a oraz wzorem Newtona) i Hermite'a (implementowanej wzorem Newtona) w zależności od liczby węzłów interpolacji N w zakresie $[1, 100]$. Wykres wykorzystuje skalę logarytmiczną na osi Y, co pozwala na efektywne zobrazowanie zmian błędów obejmujących wiele rzędów wielkości. Porównano zachowanie błędów dla węzłów równoodległych oraz węzłów Czebyszewa. Analiza wykresu pozwala sformułować następujące wnioski:

- **Zachowanie dla małych N ($N \lesssim 15-20$):**

- Dla niewielkiej liczby węzłów, błędy wszystkich metod i obu typów węzłów są stosunkowo zbliżone (rzędu $10^0 - 10^1$) i nie wykazują jeszcze dramatycznych różnic.
- Węzły Czebyszewa (linie oznaczone kwadratami: magenta, zielona; oraz linia czerwona dla Hermite'a) generalnie dają nieco mniejsze błędy niż węzły równoodległe (linie oznaczone kołami: fioletowa, niebieska; oraz linia pomarańczowa dla Hermite'a), ale przewaga nie jest jeszcze dominująca.
- Implementacje Lagrange'a (wzór Lagrange'a - fioletowa/magenta) i Lagrange'a (wzór Newtona - niebieska/zielona) dają praktycznie identyczne wyniki dla obu typów węzłów, co jest zgodne z teorią.
- Interpolacja Hermite'a (pomarańczowa/czerwona) nie wykazuje wyraźnej przewagi pod względem błędu maksymalnego w tym zakresie; jej błąd jest porównywalny lub nawet wyższy (w przypadku Lagrange'a z węzłami Czebyszewa) niż dla metod Lagrange'a.

- **Pojawienie się niestabilności i efektu Rungego ($N \gtrsim 20$):**

- **Węzły równoodległe (linie: fioletowa, niebieska, pomarańczowa):** Dla wszystkich trzech metod obserwuje się gwałtowny wzrost błędu maksymalnego. Jest to wyraźny objaw efektu Rungego i niestabilności numerycznej. Błąd dla interpolacji Hermite'a (pomarańczowa) rośnie najszybciej, osiągając astronomiczne wartości. Metody: Lagrange'a korzystające ze wzoru Newtona (zielona, niebieska) oraz dla węzłów równoodległych ze wzorem Lagrange'a również stają się bezużyteczne, z błędami rosnącymi wykładniczo.
- **Węzły Czebyszewa (linie: magenta, zielona, czerwona):** Zachowanie metod jest tu zróżnicowane:
 - * Metody Lagrange'a (magenta, zielona) wykazują doskonałą zbieżność. Błędy gwałtownie maleją, osiągając poziom precyzji maszynowej (około 10^{-15}) dla $N \approx 35 - 40$.
 - * Interpolacja Hermite'a (czerwona z krzyżykiem), mimo użycia węzłów Czebyszewa, zaczyna wykazywać niestabilność dla $N \gtrsim 20 - 25$. Jej błąd przestaje maleć i zaczyna gwałtownie rosnąć, co wskazuje na problemy numeryczne tej metody nawet przy optymalnym rozmieszczeniu węzłów.

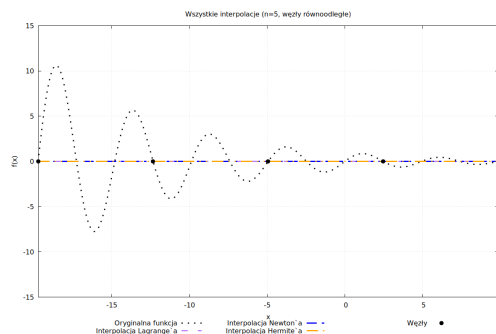
- **Zachowanie dla dużych N ($N \gtrsim 40-50$):**

- **Węzły równoodległe:** Błędy kontynuują katastrofalny wzrost, przekraczając 10^{50} dla $N=80$ i więcej, potwierdzając całkowitą nieprzydatność tych węzłów dla interpolacji wysokiego stopnia.
- **Węzły Czebyszewa:**
 - * Implementacja Lagrange'a (wzór Lagrange'a - magenta) pozostaje stabilna, z błędem utrzymującym się na poziomie precyzji maszynowej aż do $N=100$.
 - * Implementacja Lagrange'a (wzór Newtona - zielona) zaczyna tracić stabilność dla $N \gtrsim 40 - 50$. Jej błąd zaczyna rosnąć, osiągając wartości rzędu 10^{15} dla $N=100$. Pokazuje to, że nawet dla węzłów Czebyszewa, implementacja oparta na ilorazach różnicowych może stać się niestabilna dla bardzo dużych N .
 - * Interpolacja Hermite'a (czerwona) kontynuuje wzrost błędu, który staje się większy niż dla metod Lagrange'a z węzłami równoodległymi dla $N > 60$.

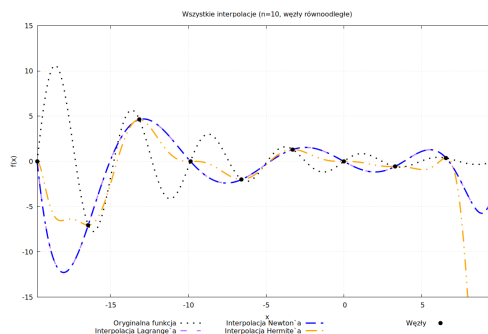
- **Znaczenie skali logarytmicznej:** Użycie skali logarytmicznej na osi Y jest absolutnie kluczowe dla możliwości zaobserwowania i porównania tak drastycznie różnych zachowań – od zbieżności do precyzji maszynowej (10^{-15}) po katastrofalne błędy (10^{80}).

9 Przykładowe wykresy interpolacji z podziałem na typ węzłów

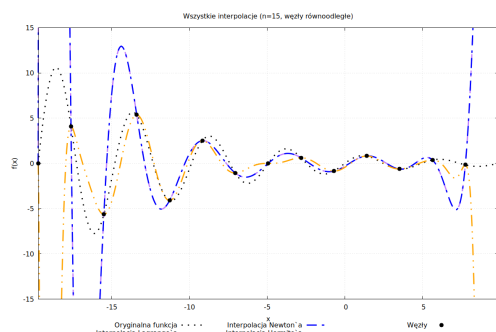
9.1 Węzły równoodległe



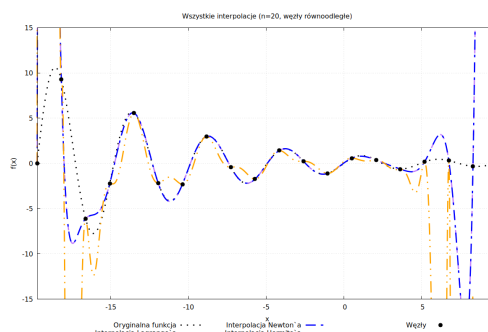
(a) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=5$



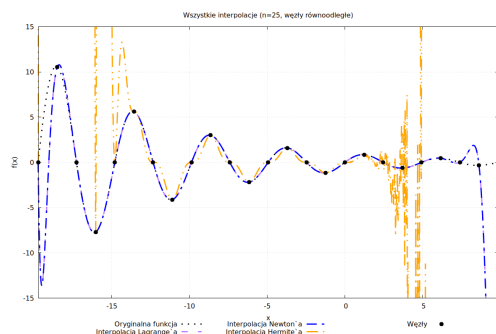
(b) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=10$



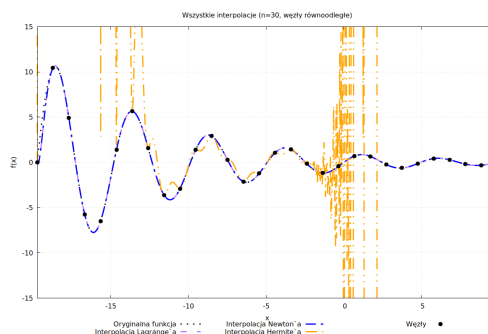
(c) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=15$



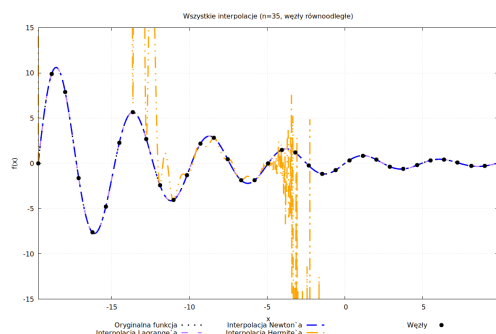
(d) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=20$



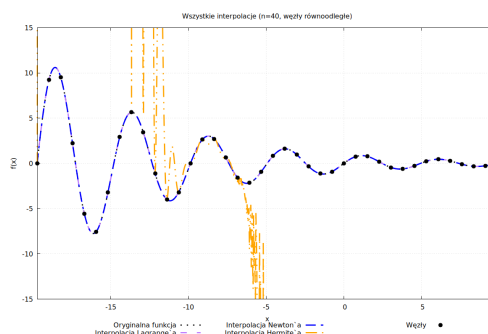
(e) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=25$



(f) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=30$



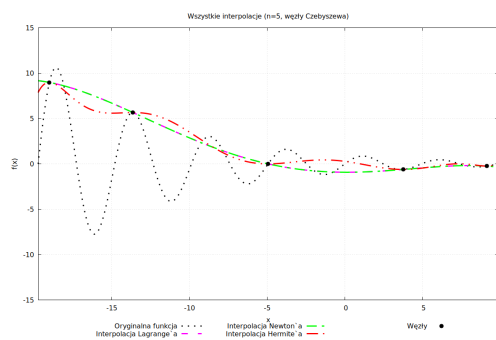
(g) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=35$



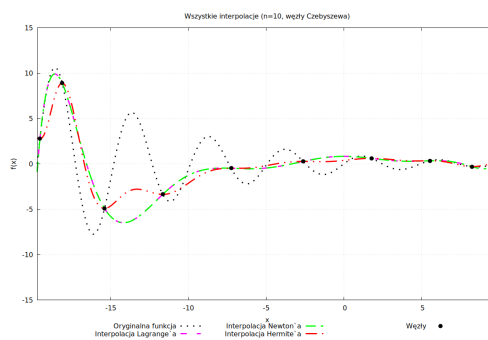
(h) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=40$

Rysunek 2: Porównanie trzech metod interpolacji dla węzłów równoodległych i różnych liczby węzłów (N od 5 do 40 co 5).

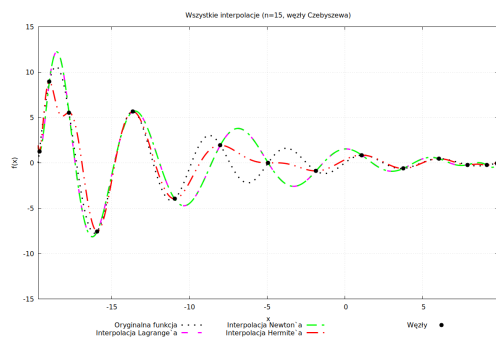
9.2 Węzły Czebyszewa



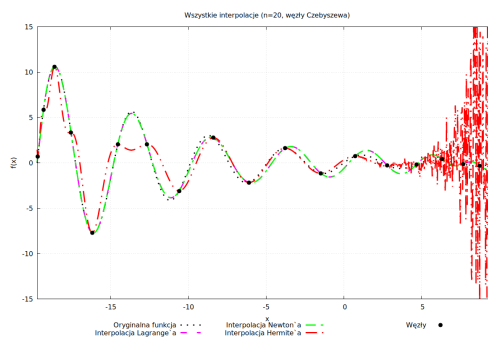
(a) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=5$



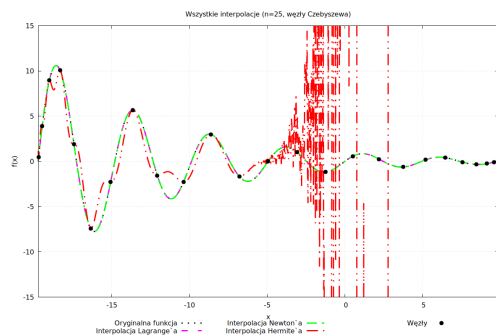
(b) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=10$



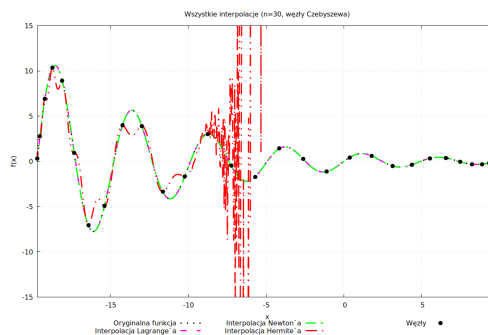
(c) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=15$



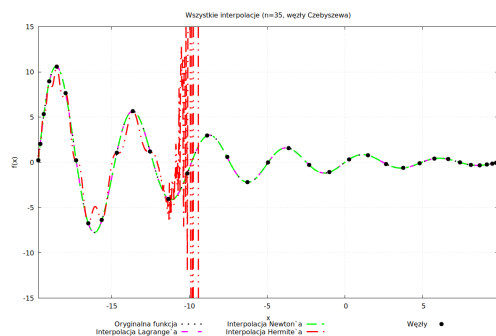
(d) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=20$



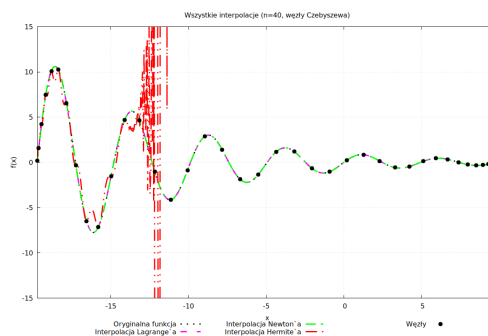
(e) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=25$



(f) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=30$



(g) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=35$



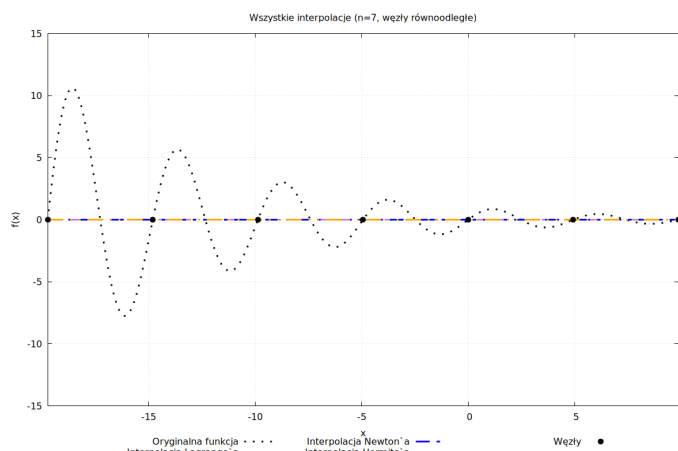
(h) Interpolacje (Lagrange, Newton, Hermite), $N=40$

Rysunek 3: Porównanie trzech metod interpolacji dla węzłów Czebyszewa i różnych liczby węzłów (N od 5 do 40 co 5).

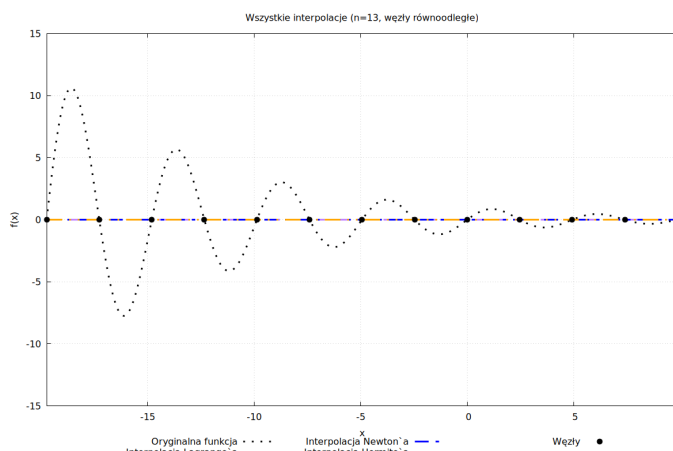
10 Analiza

10.1 Przypadek szczególny: Węzły w miejscach zerowych funkcji

W analizowanym przypadku można zaobserwować szczególną sytuację dla interpolacji z użyciem węzłów równoodległych dla $N = 7$ oraz $N = 13$, przedstawioną na Rysunkach 4a i 4b.



(a) $N=7$, węzły równoodległe



(b) $N=13$, węzły równoodległe

Rysunek 4: Interpolacja przy węzłach równoodległych pokrywających się z miejscami zerowymi funkcji $f(x)$.

Dla tych konkretnych wartości N , rozmieszczenie równoodległe powoduje, że **wszystkie węzły interpolacyjne x_i trafiają dokładnie w miejsca zerowe funkcji $f(x)$** , tzn. $f(x_i) = 0$ dla wszystkich $i = 1, \dots, N$.

Konsekwencją tego faktu jest, że wszystkie trzy zastosowane metody interpolacji (Lagrange'a - obie implementacje, oraz Hermite'a) prowadzą do uzyskania tego samego wielomianu interpolacyjnego: **wielomianu tożsamościowo równego zeru**, $P(x) \equiv 0$.

- W przypadku metod **Lagrange'a i Newtona**, jest to jedyny wielomian stopnia co najwyżej $N - 1$, który przechodzi przez N punktów o zerowej wartości y_i .
- W przypadku metody **Hermite'a**, mimo że pochodne $f'(x_i)$ w tych punktach na ogół nie są zerowe (funkcja przecina oś X pod pewnym kątem), algorytm interpolacji oparty na uogólnionych ilorazach różnicowych również w tej specyficznej sytuacji generuje wielomian $H(x) \equiv 0$. Wynika to z faktu, że warunki $H(x_i) = 0$ są spełnione przez wielomian zerowy, a struktura obliczeń ilorazów różnicowych prowadzi do wyzerowania wszystkich współczynników wielomianu.

Ponieważ funkcja oryginalna $f(x)$ nie jest tożsamościowo równa zeru, uzyskany wielomian $P(x) \equiv 0$ stanowi bardzo słabe przybliżenie. Błąd interpolacji w dowolnym punkcie x wynosi po prostu $|f(x) - P(x)| = |f(x)|$. Odzwierciedla to Tabela 1, gdzie dla $N = 7$ i $N = 13$ przy węzłach równoodległych, wszystkie metody dają identyczne, stosunkowo duże błędy: $E_m \approx 10.60$ oraz $E_s \approx 9.99$. Wartość błędu maksymalnego E_m jest w tym przypadku bliska maksymalnej wartości bezwzględnej funkcji $|f(x)|$ w badanym przedziale.

Jest to przykład sytuacji, gdzie specyficzne rozmieszczenie węzłów (w tym przypadku równoodległe) w połączeniu z charakterystyką funkcji (jej miejscami zerowymi) prowadzi do osobliwego i niedokładnego wyniku interpolacji. Podkreśla to wrażliwość interpolacji wielomianowej na wybór i rozmieszczenie węzłów.

10.2 Podobieństwo interpolacji Lagrange'a i Newtona

Jak widać w Tabeli 1 oraz na wykresach, wyniki interpolacji Lagrange'a obliczanej bezpośrednim wzorem oraz za pomocą różnic dzielonych Newtona są bardzo zbliżone (często identyczne w granicach dokładności numerycznej) dla małych i średnich N . Teoretycznie powinny dawać ten sam wielomian. Różnice pojawiające się dla bardzo dużych N (zwłaszcza przy węzłach równoodległych, gdzie błędy są ogromne) wynikają głównie z różnej stabilności numerycznej obu algorytmów i kumulacji błędów zaokrągleń. Dla węzłów Czebyszewa obie metody dają bardzo dobre i praktycznie identyczne wyniki aż do $N=100$.

10.3 Problemy numeryczne i błędy zaokrągleń

Przy dużej liczbie węzłów (N), zwłaszcza równoodległych, obliczenia związane z interpolacją wielomianową stają się źle uwarunkowane. Oznacza to, że małe błędy (np. błędy zaokrągleń w reprezentacji liczb zmiennoprzecinkowych) mogą prowadzić do bardzo dużych błędów w wynikowym wielomianie. W metodzie Newtona, obliczanie

ilorazów różnicowych:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

jest procesem rekurencyjnym. Jeśli mianownik $x_n - x_0$ jest duży, a licznik jest różnicą dwóch bliskich sobie wartości (co może się zdarzyć), prowadzi to do utraty precyzji (tzw. kasowanie cyfr znaczących). Kumulacja tych błędów może prowadzić do całkowicie błędnych wyników dla dużych N , co widać w Tabeli 1 dla metody Newtona z węzłami równoodległymi dla $N > 60$. Metoda Lagrange'a, choć teoretycznie równoważna, może mieć nieco inną charakterystykę błędów. W obu przypadkach jednak złe uwarunkowanie jest głównym problemem.

W przypadku interpolacji Hermite'a, która używa $2N$ warunków (wartości i pochodne w N węzłach), stopień wielomianu jest jeszcze wyższy ($2N - 1$), co potęguje problemy ze złym uwarunkowaniem, prowadząc do astronomicznych błędów dla węzłów równoodległych (rzędu 10^{100} i więcej). Nawet dla węzłów Czebyszewa, błędy dla Hermite'a zaczynają rosnąć szybciej niż dla Lagrange'a dla $N > 20$, co sugeruje problemy numeryczne.

10.4 Występowanie efektu Runge'go

Jak już wspomniano, efekt Runge'go jest wyraźnie widoczny dla węzłów równoodległych (zarówno dla metody Lagrange'a jak i Newtona) dla N powyżej około 30-40. Błędy E_m i E_s rosną o wiele rzędów wielkości. Dla węzłów Czebyszewa efekt Runge'go praktycznie nie występuje dla badanej funkcji w zakresie $N \leq 100$. Błędy maleją do poziomu precyzji maszynowej (rzędu 10^{-14} do 10^{-16}) i pozostają na tym poziomie.

Tabela 2: Błędy interpolacji Lagrange'a (Wzór Lagrange'a) dla różnej liczby węzłów Czebyszewa (dane z Tabeli 1).

Liczba węzłów (N)	Błąd maksymalny (E_m)	Śr. błąd kwadr. (E_s)
30	1.588e-4	6.772e-9
50	3.864e-14	2.262e-29
100	3.908e-14	3.676e-29

10.5 Podsumowanie wniosków

• Węzły równoodległe:

- Proste w implementacji.
- Prowadzą do katastrofalnego efektu Runge'go dla $N \gtrsim 30 - 40$, czyniąc je nieużytecznymi dla interpolacji wielomianowej wysokiego stopnia. Błędy rosną lawinowo.

• Węzły Czebyszewa:

- Skutecznie eliminują efekt Runge'go dla badanej funkcji (i wielu innych gładkich funkcji).
- Zapewniają bardzo dobrą dokładność interpolacji, z błędami malejącymi do poziomu precyzji maszynowej dla dużych N (w przypadku metod Lagrange/Newton).
- Są zdecydowanie zalecane dla interpolacji wielomianowej.

• Metody Lagrange'a i Newtona:

- Teoretycznie równoważne.
- Numerycznie dają bardzo podobne wyniki, zwłaszcza dla stabilnego przypadku węzłów Czebyszewa.
- Obie są podatne na złe uwarunkowanie dla węzłów równoodległych przy dużym N , choć konkretne wartości błędów mogą się nieznacznie różnić z powodu odmiennych ścieżek obliczeń.

• Metoda Hermite'a:

- W teorii powinna dawać lepszą dokładność (wykorzystuje więcej informacji o funkcji).
- W praktyce, dla badanej funkcji i implementacji, okazuje się bardzo niestabilna numerycznie, zwłaszcza dla węzłów równoodległych. Nawet dla węzłów Czebyszewa błędy rosną szybciej niż dla Lagrange'a dla $N > 20$. Może to wynikać ze specyfiki funkcji, implementacji różnic dzielonych dla pochodnych lub bardzo wysokiego stopnia wielomianu ($2N - 1$).

- **Najlepsza strategia:** Dla uzyskania dokładnego wielomianu interpolacyjnego dla badanej funkcji najlepszą strategią jest użycie **węzłów Czebyszewa**. W przypadku potrzeby interpolacji dla bardzo dużej liczby węzłów ($N > 40$), implementacja oparta na **bezpośrednim wzorze Lagrange'a** wydaje się bardziej odporna numerycznie niż implementacja oparta na ilorazach różnicowych Newtona. Liczba węzłów $N \approx 30 - 35$ jest wystarczająca do osiągnięcia maksymalnej dokładności ograniczonej precyzją maszynową przy użyciu stabilnej metody. Należy bezwzględnie unikać węzłów równoodległych dla $N > ok15$.