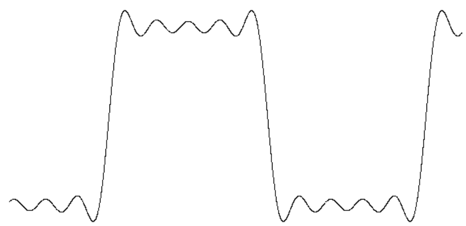
CPS - Laboratoria

7 czerwca 2022

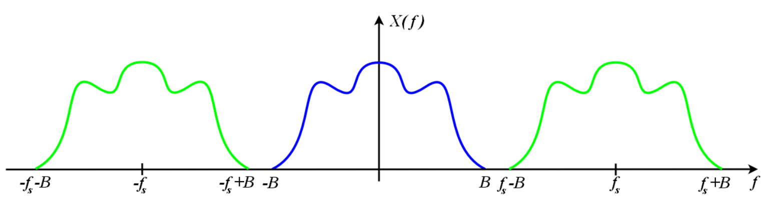
1 Efekt Gibbsa

Efekt ”przerzutów”/ oscylacji w miejscach nieciągłości funkcji odtworzonej za pomocą szeregu Fouriera. Można go zmniejszyć zwiększając liczbę współczynników szeregu jednak nie można go wyeliminować - jego minimalna wartość to około 9%.

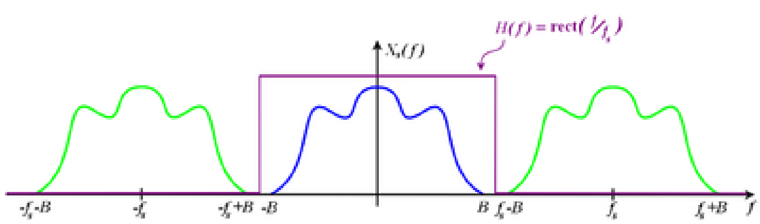


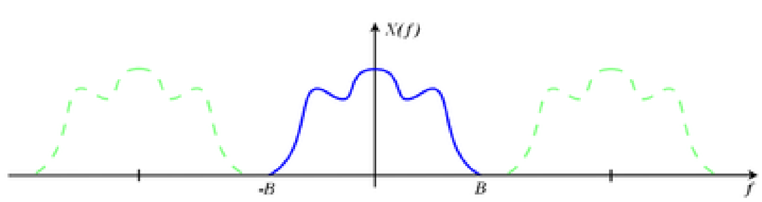
2 Próbkowanie i odtwarzanie sygnału analogowego

Próbkowanie sygnału powoduje powstanie kopii jego oryginalnego widma w dziedzinie częstotliwości. Kolejne kopie są przesunięte w dziedzinie częstotliwości o kolejne wielokrotności częstotliwości próbkowania.



Aby zrekonstruować sygnał należy odfiltrować nadmiarowe kopie filtrem dolnoprzepustowym i obliczyć odwrotną transformatę Fouriera.

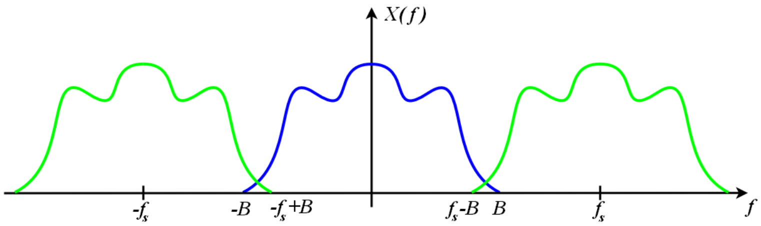


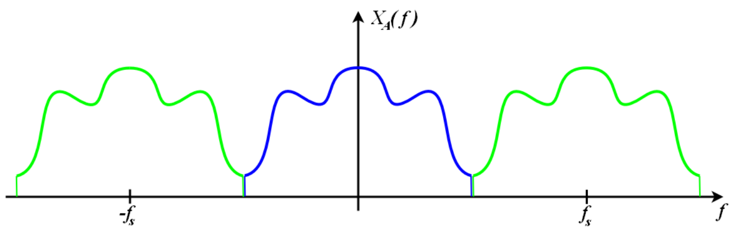


Częstotliwość Nyquista - aby poprawnie odtworzyć spróbkowany sygnał częstotliwość próbkowania powinna być większa od dwukrotności najwyższej częstotliwości występującej w sygnale.

$$f_s > 2f_{max}$$

Gdy częstotliwość próbkowania nie spełnia tego warunku powstanie efekt aliasingu - kopie widma zaczną na siebie nachodzić. Efektem będzie niepoprawnie odtworzony sygnał ponieważ jego widmo zostało zniekształcone swoimi kopiami.





3 Transformacja Z

3.1 Wyprowadzenie

Aby spróbkować funkcję należy ją wymnożyć przez "grzebień" złożony z delt Diraca.

$$f_d(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$\mathcal{L}\{f_d(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \cdot \mathcal{L}\{\delta(t - nT_s)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nTs) \cdot e^{-snT_s}$$

Podstawiając $e^{st_s} = z$ otrzymujemy:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nTs) \cdot z^{-n} = \mathcal{Z}\{f_d(t)\}$$

3.2 Filtry

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m u(n-m) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m U(z) z^{-m} - \sum_{k=1}^{N} a_k Y(z) z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Zera transmitancji odpowiadają za pasmo zaporowe a bieguny za pasmo przepustowe. Bieguny powinny być wewnątrz okręgu jednostkowego (inaczej układ staje się niestabilny) a zera na okręgu jednostkowym (wartości promienia większe od 1 powodują zniekształcenia sygnału). Bieguny i zera można obliczyć z zależności:

$$\Omega_z = 2\pi \cdot \left(\frac{f_z}{f_s}\right)$$

$$\Omega_p = 2\pi \cdot \left(\frac{f_p}{f_s}\right)$$

$$zeros = R_z e^{j\Omega_z} \qquad poles = R_p e^{j\Omega_p}$$

gdzie f_z - częstotliwość pasma zaporowego, f_p - częstotliwość pasma przepustowego, f_s - częstotliwość próbkowania

Aby współczynniki transmitancji były rzeczywiste należy przyjąć pary sprzężone biegunów i zer.

4 Dyskretna transformata Fouriera

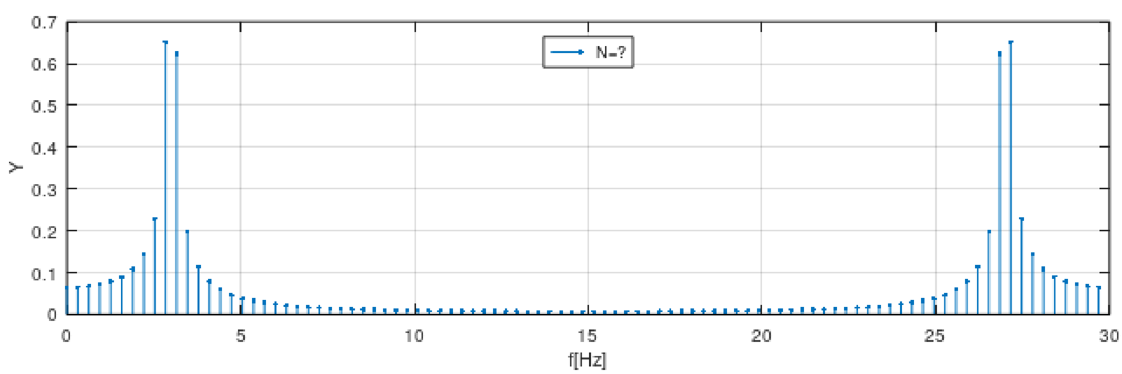
$$F_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Dyskretna transformata Fouriera jest przekształceniem liniowym.

DFT jest obliczana ze skończoną rozdzielczością w dziedzinie częstotliwości - krok zmiany częstotliwości kolejnych harmonicznych wyraża się wzorem:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

Jeżeli częstotliwość składowej sygnału, na którym obliczmy DFT, nie jest całkowitą wielokrotnością kwantu częstotliwości próbkowania to nastąpi efekt przecieku - pojawią się dodatkowe prążki w dziedzinie częstotliwości.



Dodatkowo zamiast ujemnych i dodatnich częstotliwości jak w transformacie Fouriera, w DFT występują tylko dodatnie. Samo widmo jest symetryczne a nadmiarowe próbki wynikają z własności splotu kołowego. Należy analizować próbki od 0 do $\frac{f_s}{2}$

Aby zmniejszyć efekt przecieku można wymnożyć próbki sygnału przez funkcję okna np.: impuls trójkątny o szerokości równej szerokości sygnału poddawanego DFT.

5 Filtry FIR

Filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej - nie zawierają sprzężenia zwrotnego (współczynniki a_k są równe 0.

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}$$

Zaletą braku sprzężenia zwrotnego jest fakt że taki filtr nie może być niestabilny.

5.1 Metoda okien

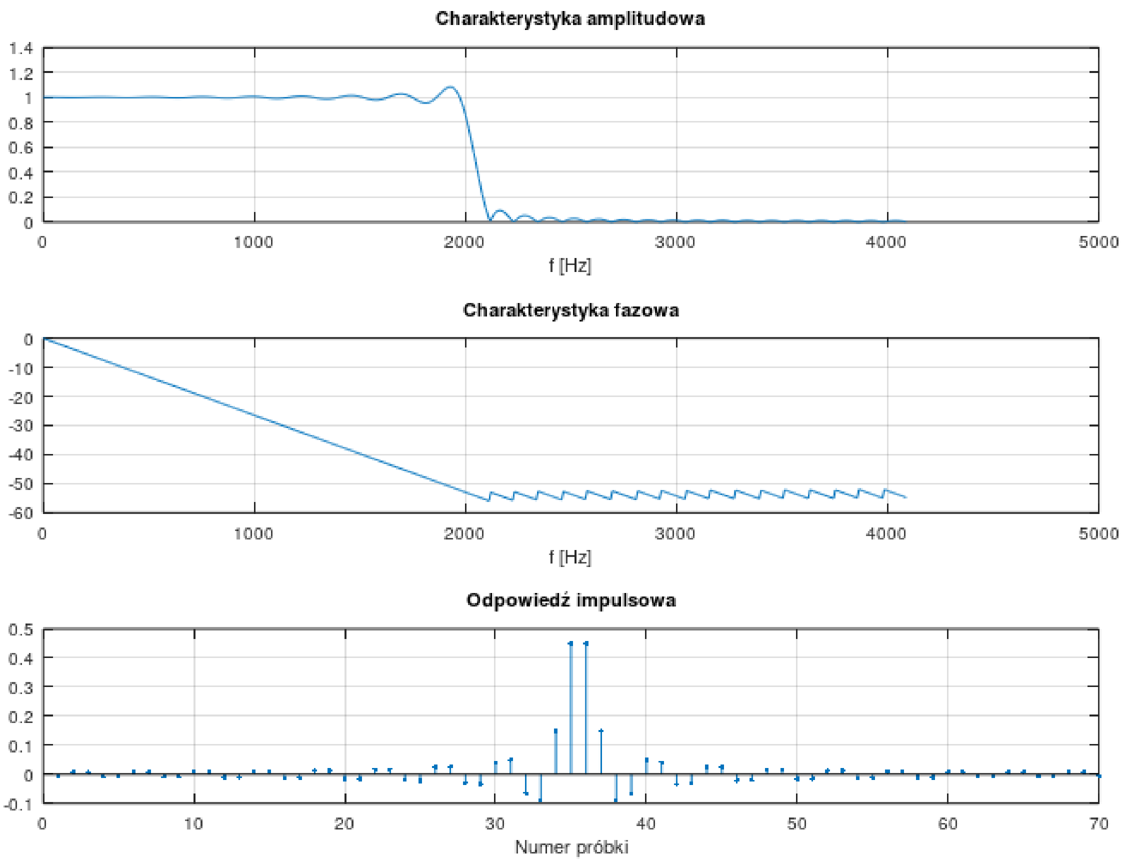
Algorytm:

- Określenie transmitancji na podstawie wymagań
- Odwrotne przekształcenie Z na transmitancji
- Okienkowanie odpowiedzi impulsowej
- $h_w^M(n) \leftarrow h_w(n - M)$ zapewnienie przyczynowości układu

Filtry projektowanie tą metodą charakteryzują się gasnącymi zafalowaniami w paśmie przepustowym i zaporowym oraz liniową charakterystyką fazową w paśmie przepustowym i przejściowym.

Długość odpowiedzi impulsowej jest o 1 większa od rzędu filtru.

Wadą tej metody jest fakt że wynik nie jest optymalny.



5.2 Metoda aproksymacji

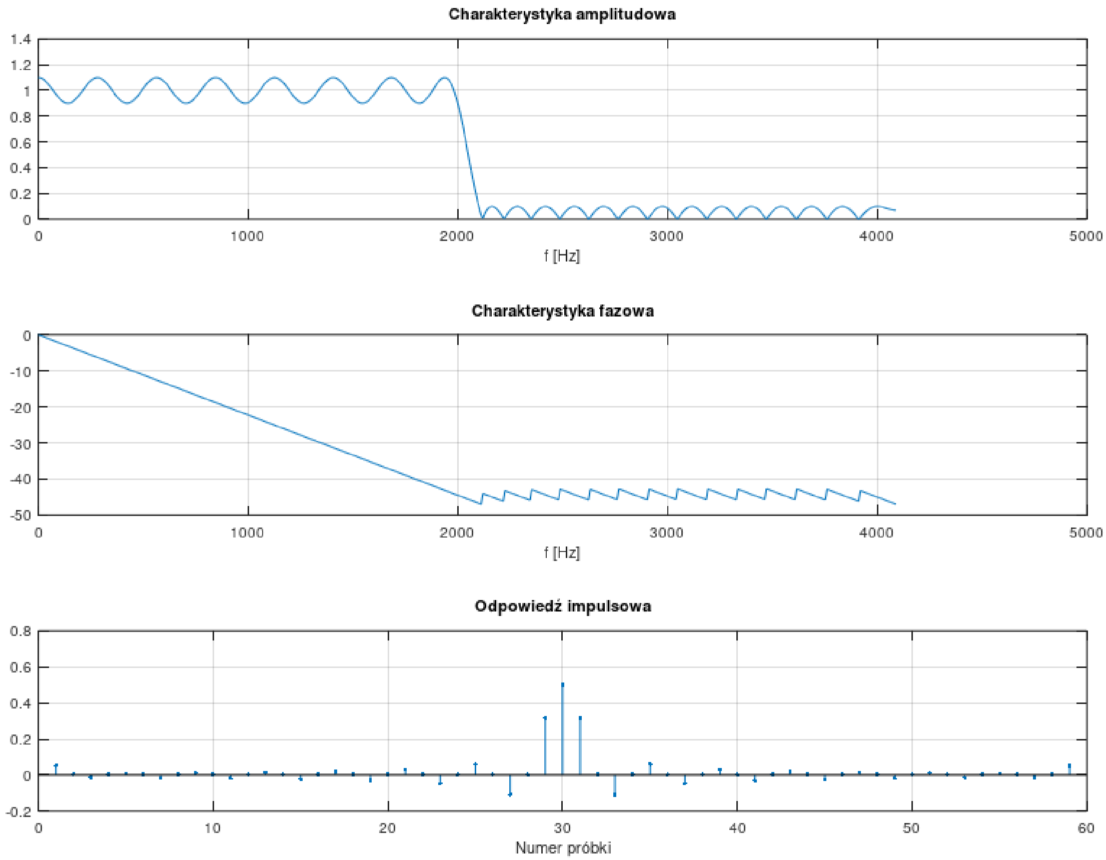
Metoda polega na odtwarzaniu zadanego $|H(j\omega|$ za pomocą sumy cosinusów. Dana aproksymacja jest porównywany z zadaną transmitancją i szukany jest minimalny błąd.

$$\sum_n c_n \cos(n\omega) - |H(j\omega)| \rightarrow min$$

Filtry projektowanie tą metodą charakteryzują się niegasnącymi zafalowaniami w paśmie przepustowym i zaporowym oraz liniową charakterystyką fazową w paśmie przepustowym i przejściowym.

Długość odpowiedzi impulsowej jest o 1 większa od rzędu filtru.

Wynik jest optymalny a rząd filtru jest znacznie niższy od rzędu uzyskanego z metody okien.



6 Filtry IIR

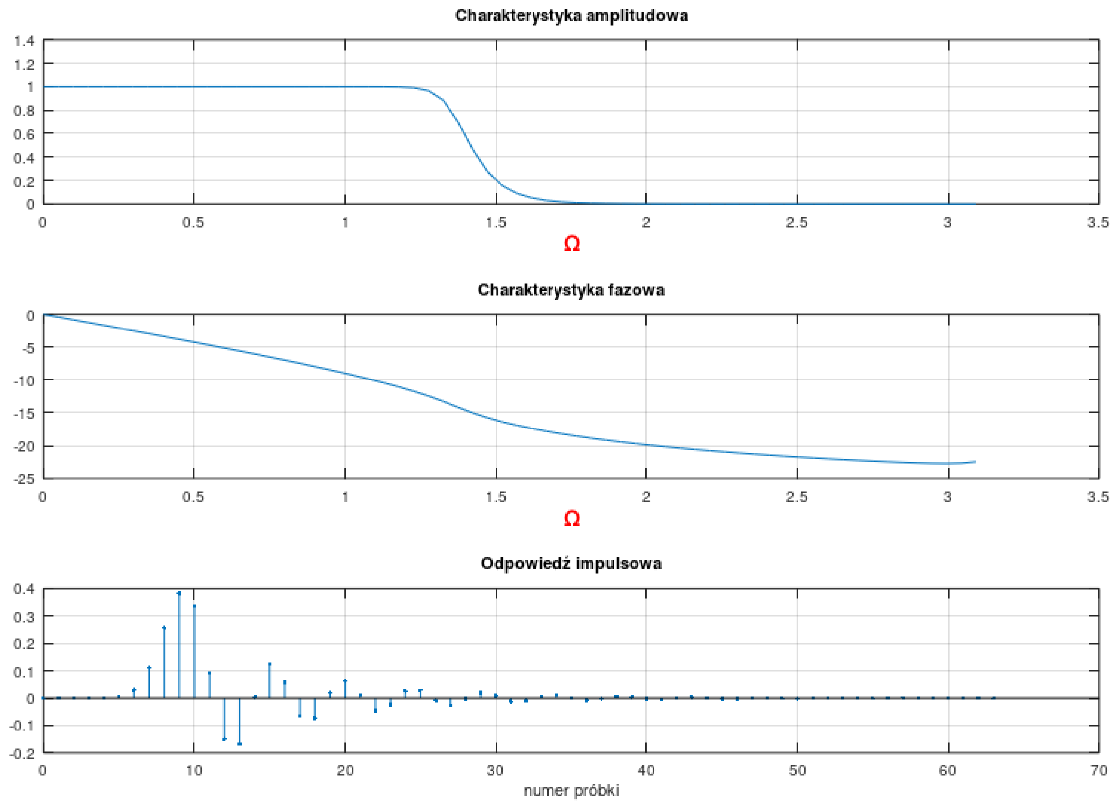
$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Metoda niezmienności odpowiedzi impulsowej - algorytm:

- prototyp analogowy
- próbkowanie odpowiedzi impulsowej

Zaletą filtrów IIR jest brak zafalowań charakterystyki amplitudowej i fazowej oraz znacznie niższy rząd filtru w przeciwieństwie do filtrów FIR.

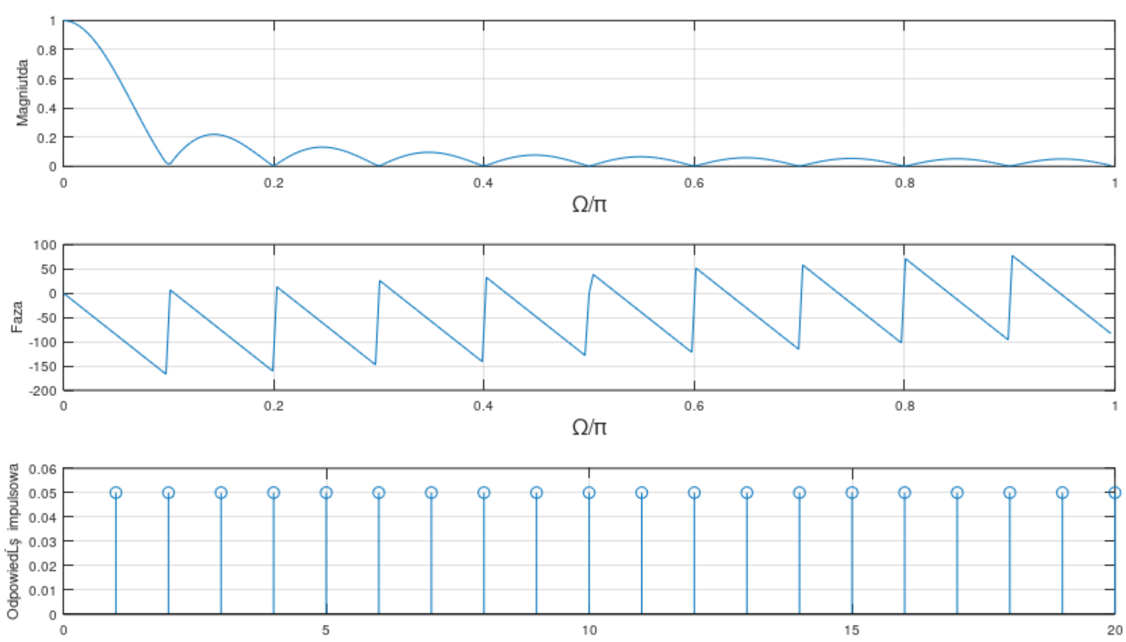
Wadą natomiast jest nieliniowość charakterystyki fazowej.

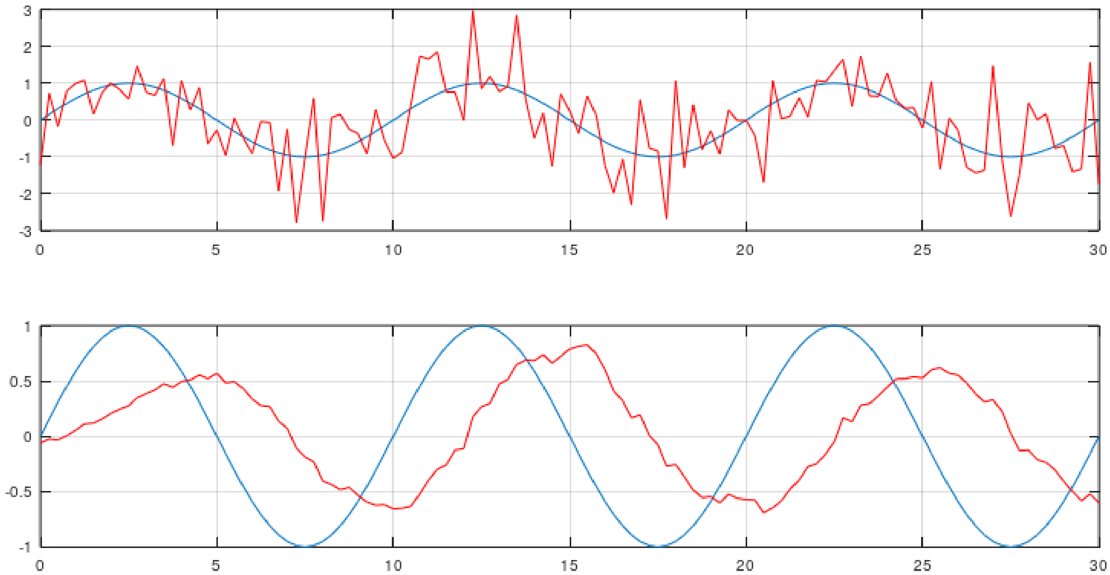


7 Filtry MAV

Jest to dolnoprzepustowy filtr FIR. Polega na liczeniu średniej z M próbek. Wartość M decyduje o granicy pasma przepustowego. Zwiększanie jej jednak zwiększa także przesunięcie fazowe sygnału.

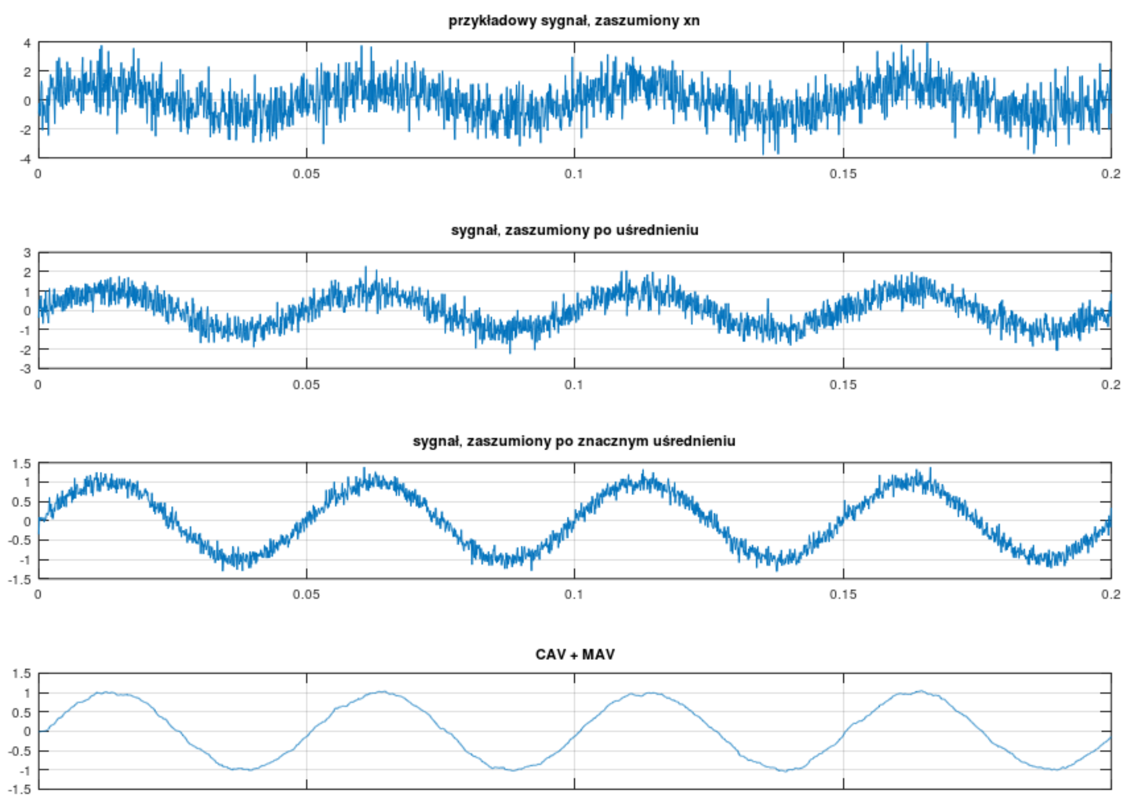
Filtr ten ma duże zafalowania charakterystyki amplitudowej w paśmie zaporowym przez co słabo tłumi niektóre wyższe częstotliwości. Filtr dobrze nadaje się do usuwania szumu o małej amplitudzie w porównaniu do amplitudy sygnału.





8 Filtry CAV

Filtr ten nadaje się tylko do sygnałów okresowych. Jest to filtr dolnoprzepustowy FIR, który pobiera próbki w tym samym momencie z kilku kolejnych cykli sygnału i oblicza z nich średnią. Sam w sobie nie zapewnia dobrych efektów jednak dobrze "odzyskuje przybliżony kształt sygnału" - zmniejsza się wpływ szumu na sygnał. W połączeniu z filtrem MAV daje dobre efekty.



9 Filtry Medianowe

Jest to układ nieliniowy - może dodawać nowe składowe do sygnału.
Filtr bierze fragment ciągu wejściowego o długości N i oblicza medianę z tego fragmentu. Dobrze filtruje krótkie zakłócenia o dużej amplitudzie (wpływające tylko na pojedyncze próbki). Przy bardziej skomplikowanych sygnałach różnica między filtrem medianowym i MAV o tej samej długości jest znacznie mniejsza niż dla pojedynczego sygnału. Połączenie tych dwóch filtrów dobrze kompensuje zniekształcenia pozostawione przez filtr medianowy.