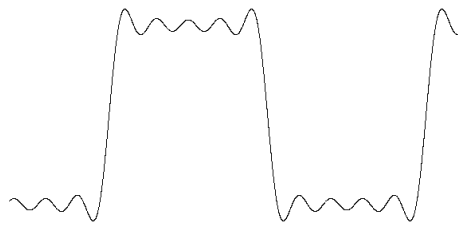


CPS - Laboratoria

21 czerwca 2022

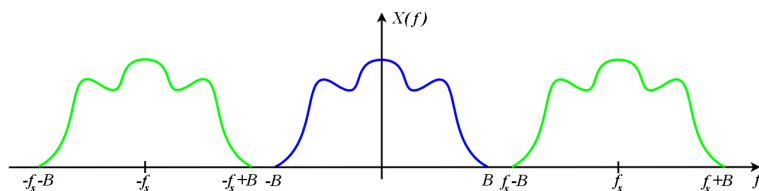
1 Efekt Gibbsa

Efekt "przerzutów" / oscylacji w miejscach nieciągłości funkcji odtworzonej za pomocą szeregu Fouriera. Można go zmniejszyć zwiększając liczbę współczynników szeregu jednak nie można go wyeliminować - minimalna wartość "największego przerzutu" to około 9% wartości skoku w sygnale.

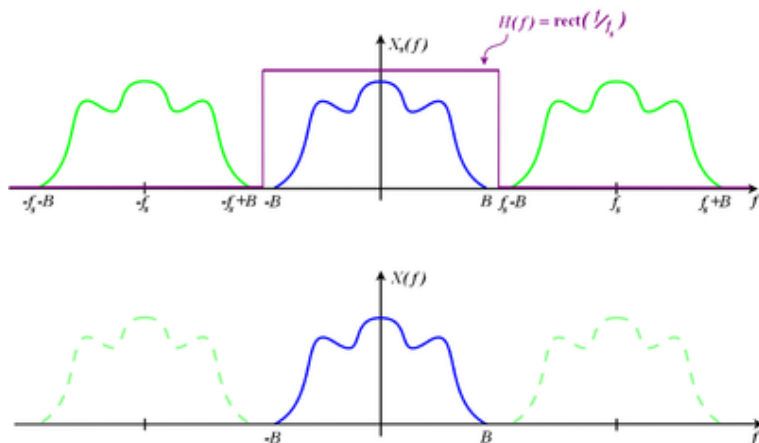


2 Próbkowanie idealne i odtwarzanie sygnału analogowego

Próbkowanie sygnału powoduje powstanie kopii jego oryginalnego widma w dziedzinie częstotliwości. Kolejne kopie są przesunięte w dziedzinie częstotliwości o kolejne wielokrotności częstotliwości próbkowania.



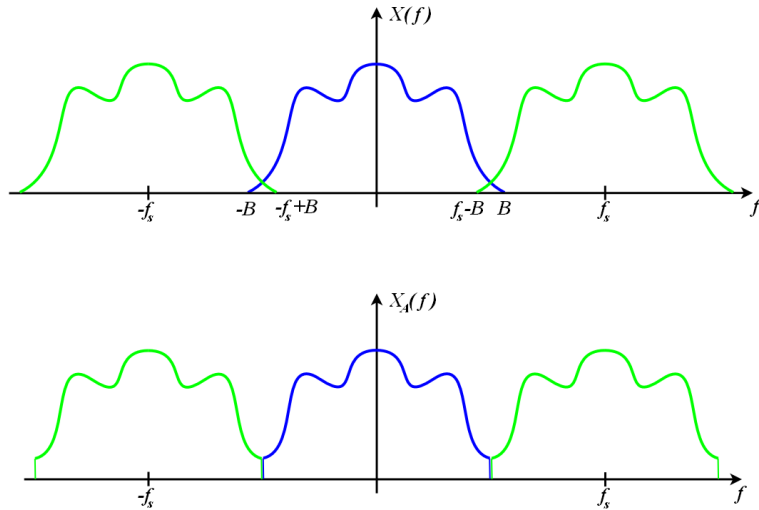
Aby zrekonstruować sygnał należy odfiltrować nadmiarowe kopie filtrem dolnoprzepustowym oraz wzmacnić sygnał. (filtrowanie w dziedzinie czasu - nie potrzebna transformacja Fouriera)



Twierdzenie o próbkowaniu - aby poprawnie odtworzyć spróbkowany sygnał częstotliwość próbkowania powinna być większa od dwukrotności najwyższej częstotliwości występującej w sygnale.

$$f_s > 2f_{max}$$

Gdy częstotliwość próbkowania nie spełnia tego warunku powstanie efekt aliasingu - kopie widma zaczną na siebie nachodzić. Efektem będzie niepoprawnie odtworzony sygnał ponieważ jego widmo zostało zniekształcone swoimi kopiami.



3 Transformacja Z

3.1 Wyprowadzenie

Aby spróbować funkcję należy ją wymnożyć przez "grzebień" złożony z delt Diraca.

$$f_d(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$\mathcal{L}\{f_d(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \cdot \mathcal{L}\{\delta(t - nT_s)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \cdot e^{-snT_s}$$

Podstawiając $e^{st_s} = z$ otrzymujemy:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \cdot z^{-n} = \mathcal{Z}\{f_d(t)\}$$

3.2 Filtry

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m u(n-m) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m U(z) z^{-m} - \sum_{k=1}^N a_k Y(z) z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Zera transmitancji odpowiadają za minima a bieguny za maksima charakterystyki amplitudowej. Bieguny powinny być wewnątrz okręgu jednostkowego (inaczej układ staje się niestabilny) a zera na okręgu jednostkowym (wartości promienia większe od 1 powodują zniekształcenia sygnału). Bieguny i zera można obliczyć z zależności:

$$\Omega_z = 2\pi \cdot \left(\frac{f_z}{f_s}\right)$$

$$\Omega_p = 2\pi \cdot \left(\frac{f_p}{f_s}\right)$$

$$zeros = R_z e^{j\Omega_z} \quad poles = R_p e^{j\Omega_p}$$

gdzie f_z - częstotliwość pasma zaporowego, f_p - częstotliwość pasma przepustowego, f_s - częstotliwość próbkowania

Aby współczynniki transmitancji były rzeczywiste należy przyjąć pary sprzężone biegunów i zer.

4 Dyskretna transformata Fouriera

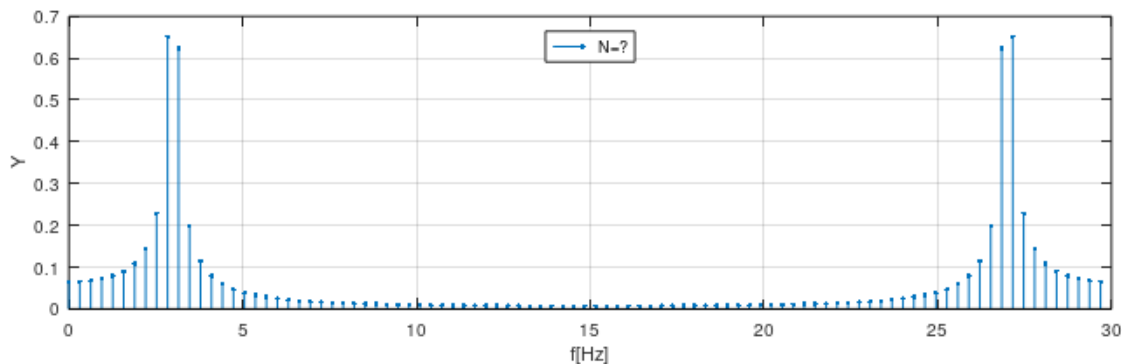
$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

Dyskretna transformata Fouriera jest przekształceniem liniowym.

DFT jest obliczana ze skończoną rozdzielczością w dziedzinie częstotliwości - krok zmiany częstotliwości kolejnych harmonicznnych wyraża się wzorem:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

Jeżeli częstotliwość składowej sygnału, na którym obliczymy DFT, nie jest całkowitą wielokrotnością kwantu częstotliwości próbkowania to nastąpi efekt przecieku - pojawią się dodatkowe prążki w dziedzinie częstotliwości.



Dodatkowo zamiast ujemnych i dodatnich częstotliwości jak w transformacie Fouriera, w DFT występują tylko dodatnie. Samo widmo jest symetryczne a nadmiarowe próbki wynikają z własności splotu kołowego. Należy analizować próbki od 0 do $\frac{f_s}{2}$

Aby zmniejszyć efekt przecieku można wymnożyć próbki sygnału przez funkcję okna np.: impuls trójkątny o szerokości równej szerokości sygnału poddawanego DFT.

5 Filtry FIR

Filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej - nie zawierają sprzężenia zwrotnego (współczynniki a_k są równe 0).

$$H(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}$$

Zaletą braku sprzężenia zwrotnego jest fakt że taki filtr nie może być niestabilny.

5.1 Metoda okien

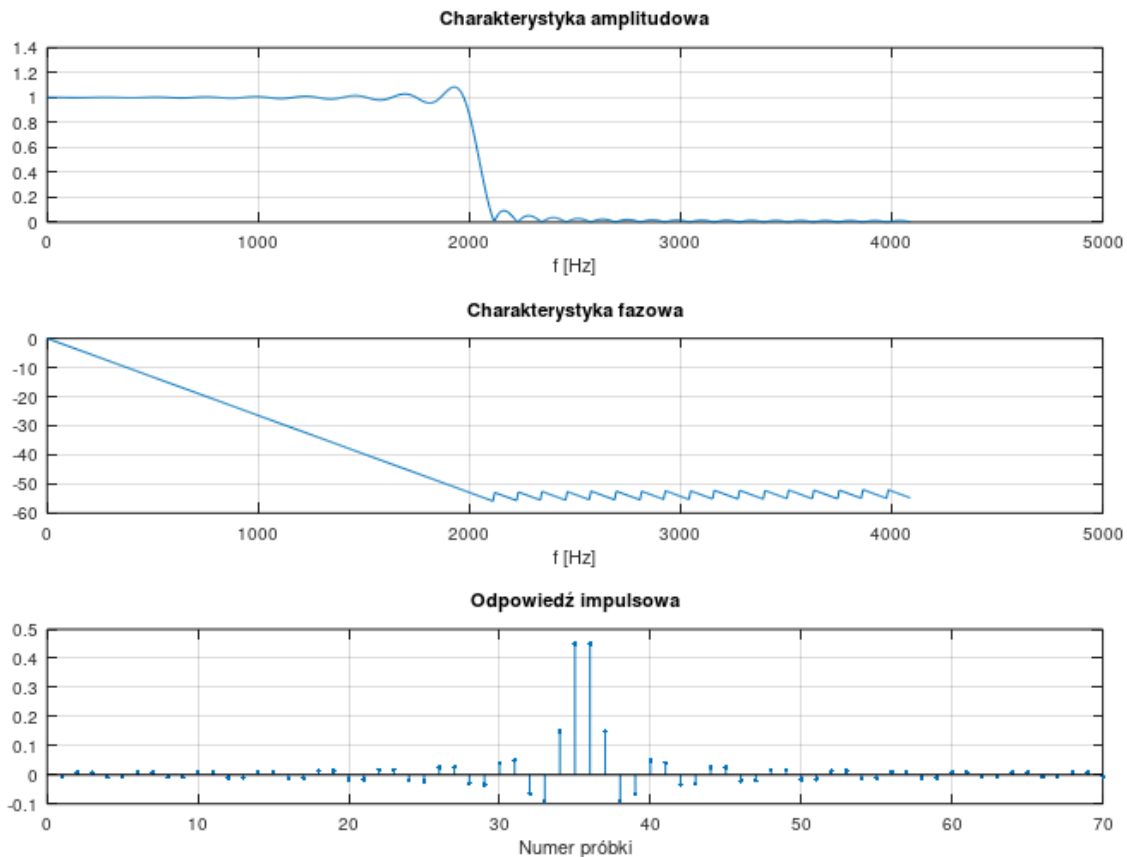
Algorytm:

- Określenie transmitancji na podstawie wymagań
- Odwrotne przekształcenie Z na transmitancji
- Okienkowanie odpowiedzi impulsowej
- $h_w^M(n) \leftarrow h_w(n - M)$ zapewnienie przyczynowości układu

Filtry projektowane tą metodą charakteryzują się gasnącymi zafalowaniami w paśmie przepustowym i zaporowym oraz liniową charakterystyką fazową w paśmie przepustowym i przejściowym.

Długość odpowiedzi impulsowej jest o 1 większa od rzędu filtra.

Wadą tej metody jest fakt że wynik nie jest optymalny.



5.2 Metoda aproksymacji

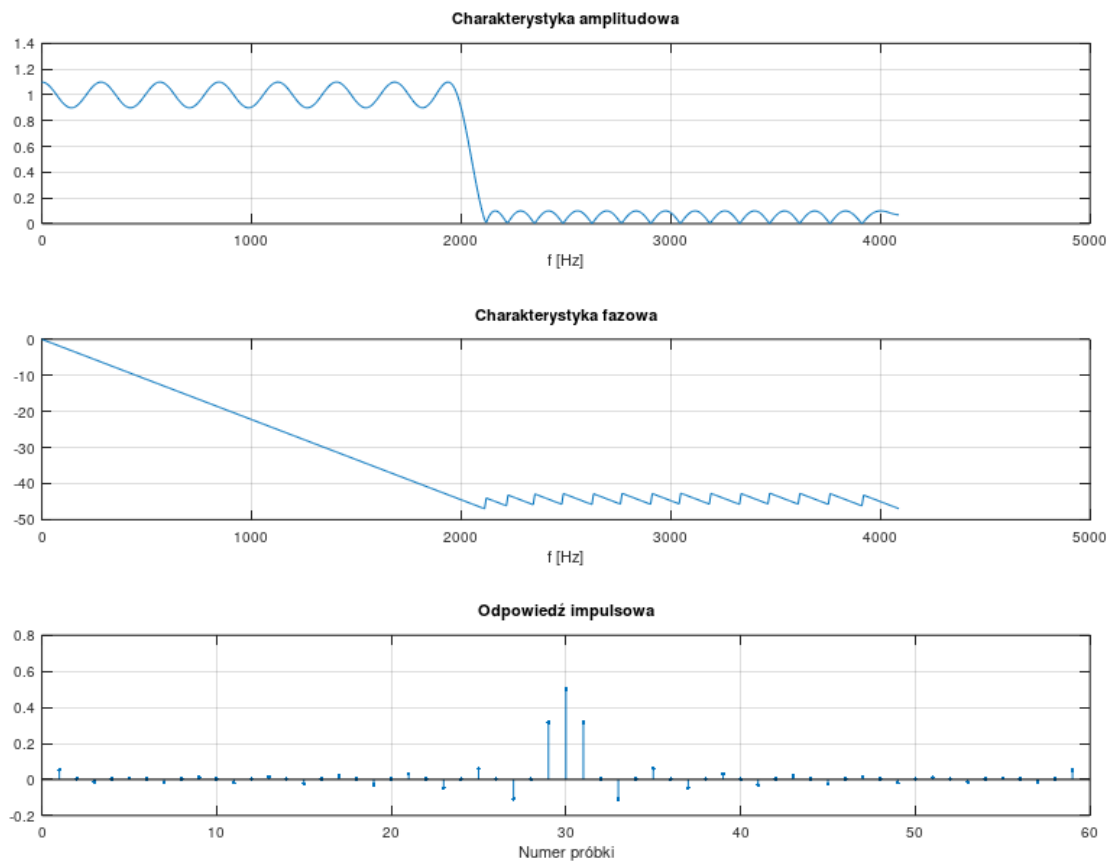
Metoda polega na odtwarzaniu zadanego $|H(j\omega)|$ za pomocą sumy cosinusów. Dana aproksymacja jest porównywana z zadaną transmitancją i szukany jest minimalny błąd.

$$\sum_n c_n \cos(n\omega) - |H(j\omega)| \rightarrow \min$$

Filtry projektowane tą metodą charakteryzują się niegasnącymi zafalowaniami w paśmie przepustowym i zaporowym oraz liniową charakterystyką fazową w paśmie przepustowym i przejściowym.

Długość odpowiedzi impulsowej jest o 1 większa od rzędu filtra.

Wynik jest optymalny a rząd filtra jest znacznie niższy od rzędu uzyskanego z metody okien.



6 Filtry IIR

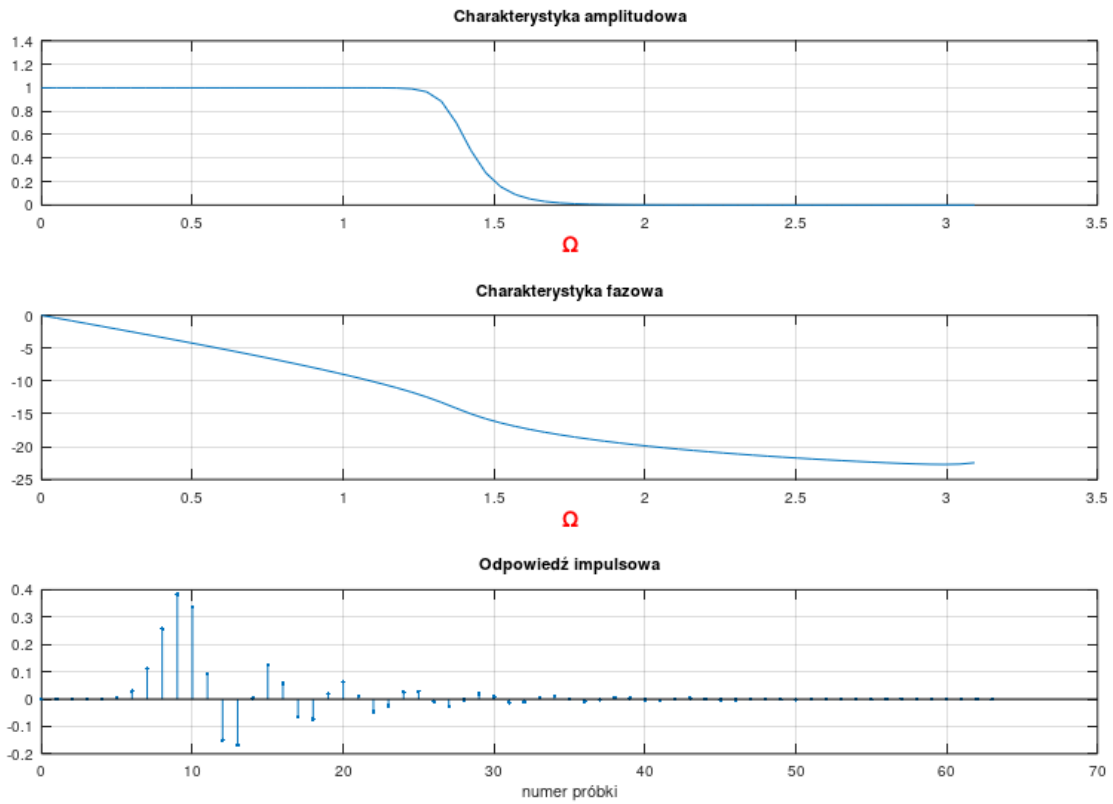
$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Metoda niezmienności odpowiedzi impulsowej - algorytm:

- prototyp analogowy
- próbkowanie odpowiedzi impulsowej

Zaletą filtrów IIR jest brak zafalowań charakterystyki amplitudowej i fazowej oraz znacznie niższy rząd filtru w przeciwieństwie do filtrów FIR.

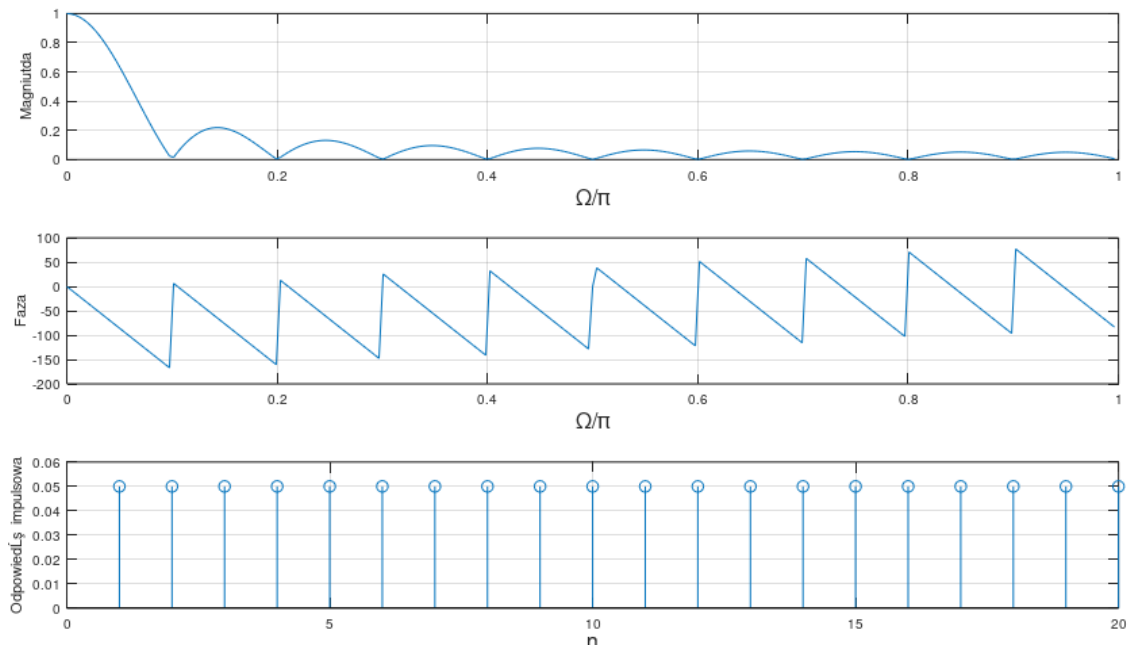
Wadą natomiast jest nieliniowość charakterystyki fazowej.

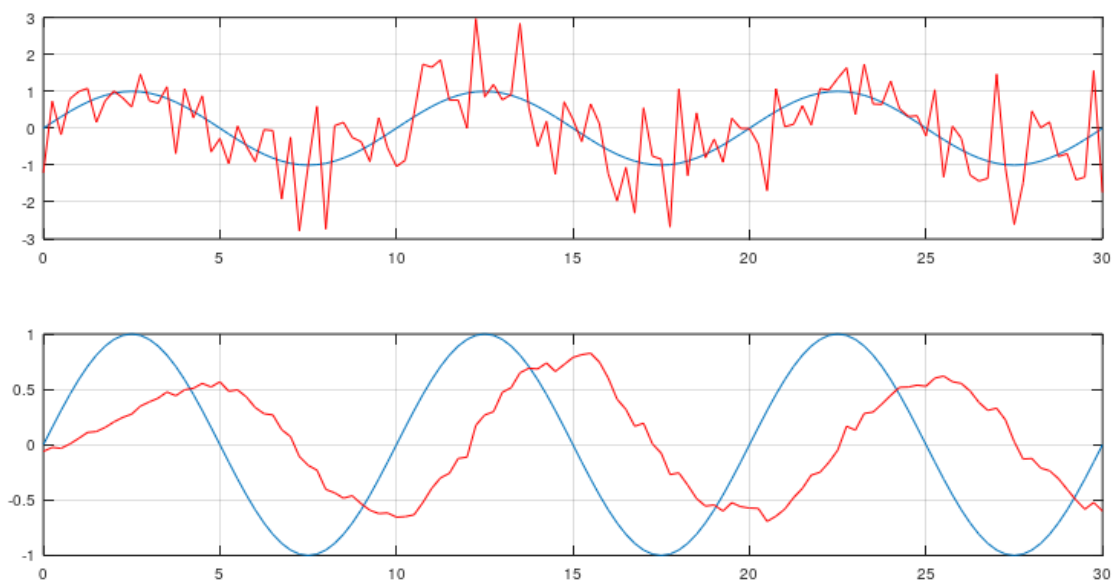


7 Filtry MAV

Jest to dolnoprzepustowy filtr FIR. Polega na liczeniu średniej z M próbek. Wartość M decyduje o granicy pasma przepustowego. Zwiększanie jej jednak zwiększa także przesunięcie fazowe sygnału.

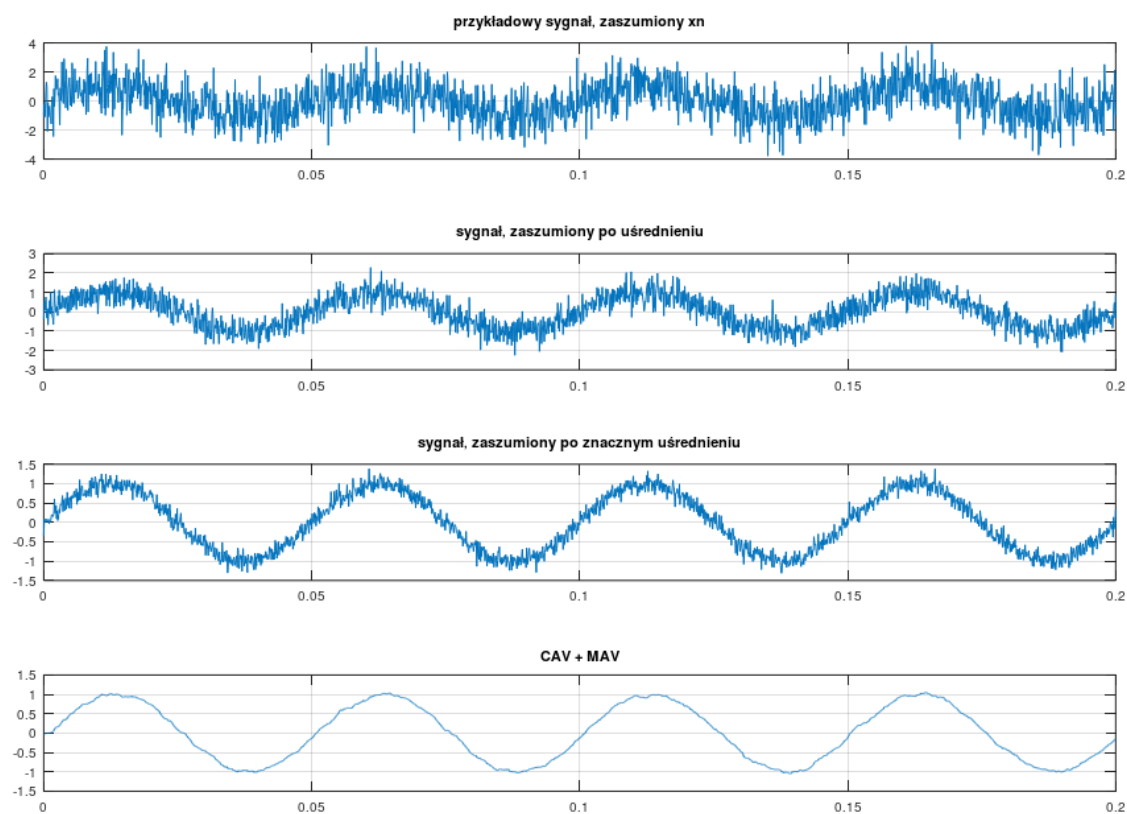
Filtr ten ma duże zafalowania charakterystyki amplitudowej w paśmie zaporowym przez co słabo tłumi niektóre wyższe częstotliwości. Filtr dobrze nadaje się do usuwania szumu o małej amplitudzie w porównaniu do amplitudy sygnału.





8 Filtry CAV

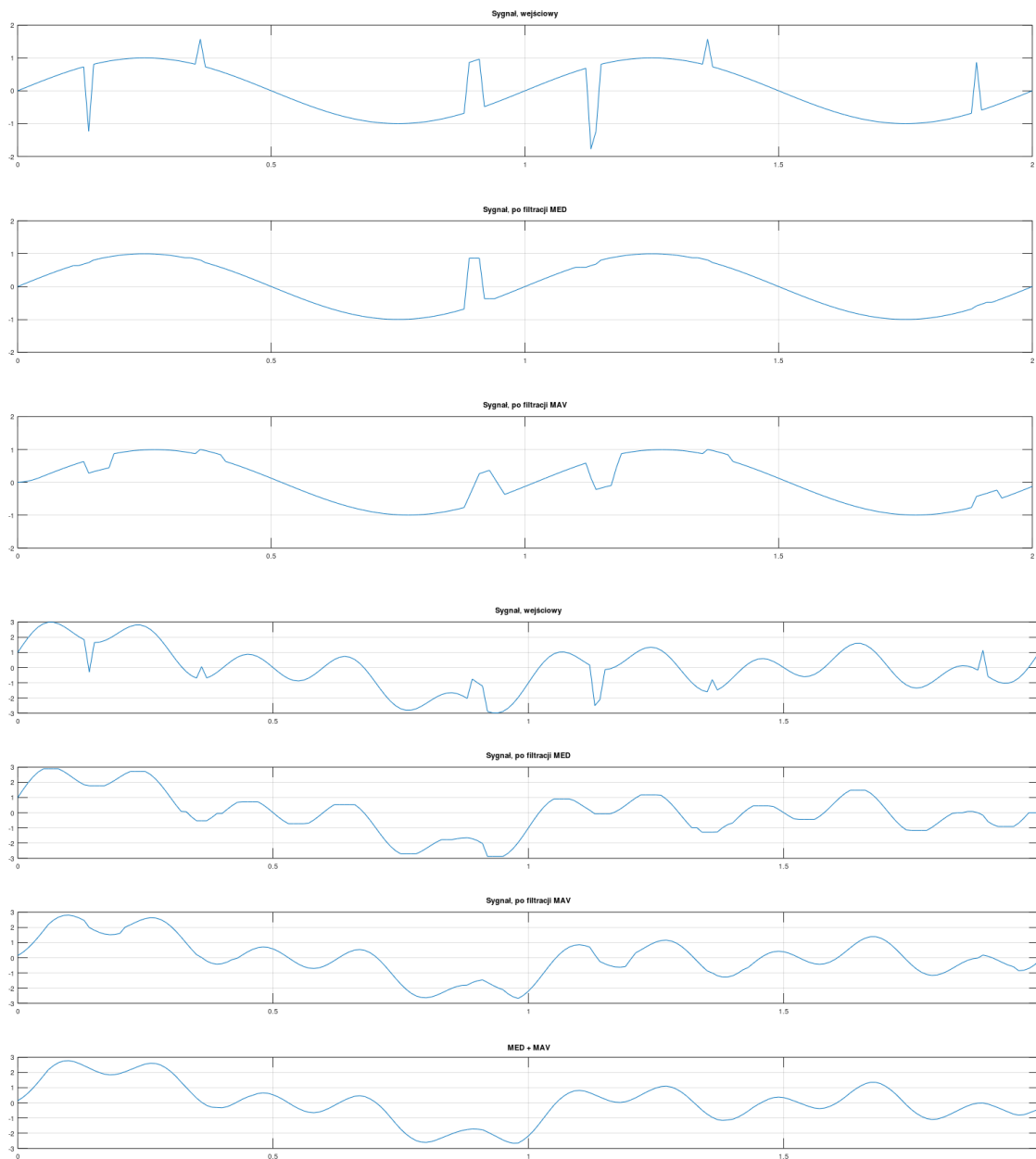
Filtr ten nadaje się tylko do sygnałów okresowych. Jest to filtr dolnoprzepustowy FIR, który pobiera próbki w tym samym momencie z kilku kolejnych cykli sygnału i oblicza z nich średnią. Sam w sobie nie zapewnia dobrych efektów jednak dobrze "odzyskuje przybliżony kształt sygnału" - zmniejsza się wpływ szumu na sygnał. W połączeniu z filtrem MAV daje dobre efekty.



9 Filtry Medianowe

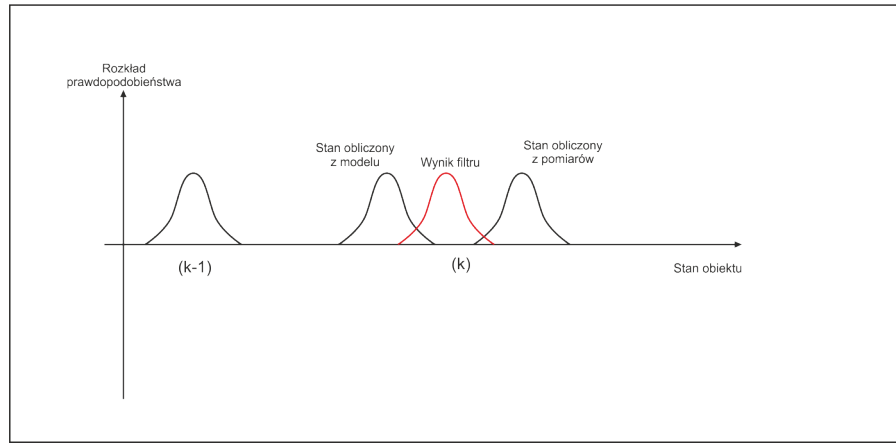
Jest to układ nieliniowy - może dodawać nowe składowe do sygnału.

Filtr bierze fragment ciągu wejściowego o długości N i oblicza medianę z tego fragmentu. Dobrze filtruje krótkie zakłócenia o dużej amplitudzie (wpływające tylko na pojedyncze próbki). Przy bardziej skomplikowanych sygnałach różnica między filtrem medianowym i MAV o tej samej długości jest znacznie mniejsza niż dla pojedynczego sygnału. Połączenie tych dwóch filtrów dobrze kompensuje zniekształcenia pozostawione przez filtr medianowy.

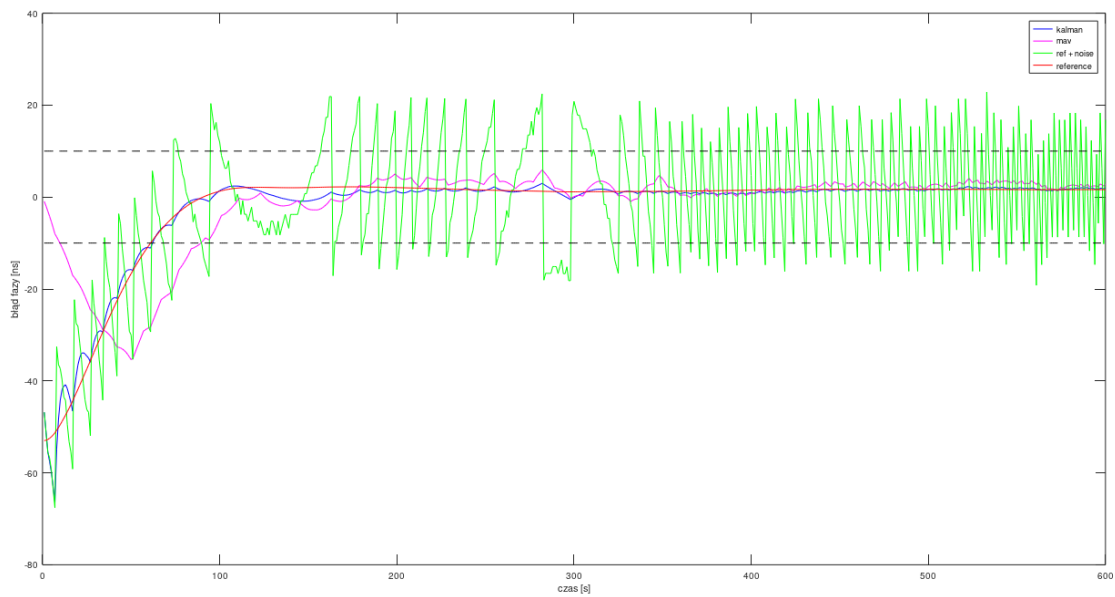


10 Filtr Kalmana

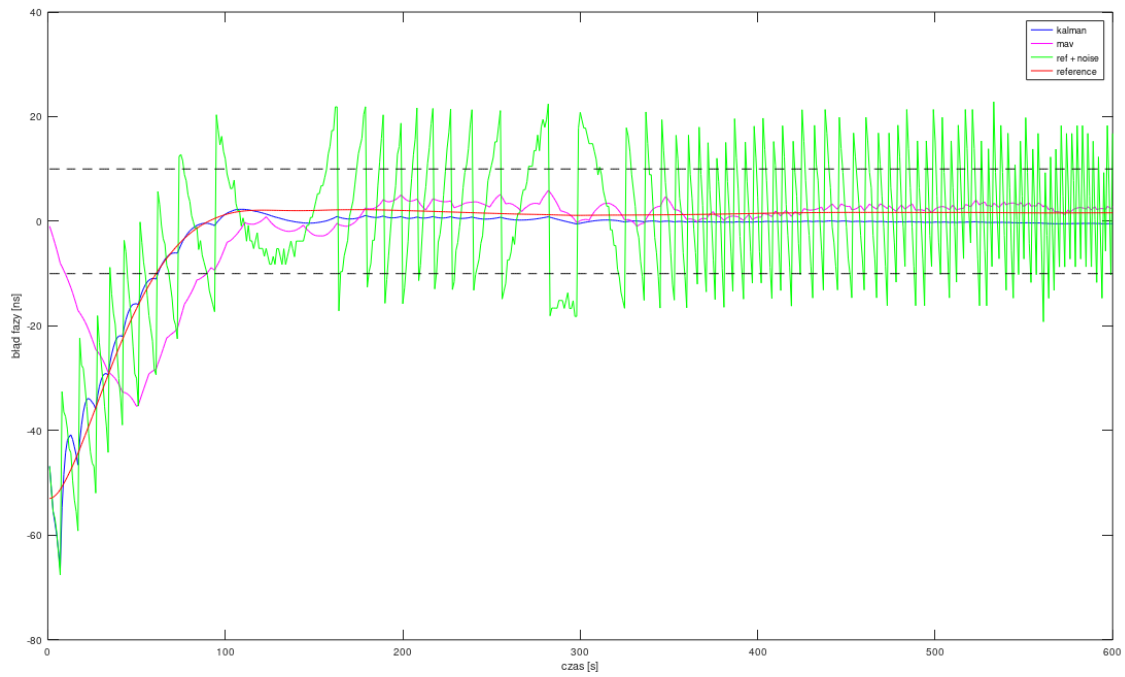
Filtr bazuje na modelu matematycznym obiektu oraz pomiarach tego obiektu. Stan następny obiektu może być obliczony na podstawie tylko modelu lub pomiaru jednak będzie to obarczone błędem. Żeby go zminimalizować filtr oblicza wynik jedną i drugą metodą i na podstawie równań statystycznych oblicza wagi, z którymi łączy obydwa wyniki.



Filtr daje znacznie lepsze wyniki od filtru MAV jednak wymaga dobrego dobrania parametrów oraz dobrego modelu obiektu badanego. Podczas laboratorium zmieniany był parametr "e" wpływający na macierz kowariancji szumu. Zmniejszanie parametru zwiększa dokładność filtracji względem sygnału referencyjnego. Dla większych wartości wynik był zbliżony do filtru MAV (wyjątkiem jest początkowa faza narastania sygnału). Od pewnego momentu dalsze zmniejszanie parametru "e" poprawia dopasowanie do sygnału referencyjnego ale wprowadza offset.



$$n = 0.001$$



$$n = 0.00001$$

Filtr Kalmana od początku odwzorowuje sygnał referencyjny w przeciwieństwie do filtru MAV, który zaczyna od wartości 0.