JAKUB LEVÝ

Úloha č. 1

Reflexivita:

$\mathbb{R}^3 \ni X=(x,y,z)$, $(X,X) \in \ker L \iff L(X)=L(X) \iff (x,y,z)=(x,y,z)$

Symetrie:

$\left.\begin{array}{l}\mathbb{R}^3 \ni X=(x,y,z)\\ \mathbb{R}^3 \ni Y=(p,q,r)\end{array}\right\}$, Víme, že $(X,Y) \in \ker L$, tj. $L(X)=L(Y) \iff (x,y,z)=(p,q,r)$.

Potom však i $(p,q,r)=(x,y,z) \iff L(Y)=L(X) \iff (Y,X) \in \ker L$

Transitivita

$\left.\begin{array}{l}\mathbb{R}^3 \ni X=(x,y,z)\\ \mathbb{R}^3 \ni Y=(p,q,r)\\ \mathbb{R}^3 \ni Z=(a,b,c)\end{array}\right\}$, Víme, že $(X,Y) \in \ker L \wedge (Y,Z) \in \ker L$

Tj. $(x,y,z)=(p,q,r)$ a $(p,q,r)=(a,b,c)$.

Z toho ale i $(x,y,z)=(a,b,c) \iff L(X)=L(Z)$

$\iff (X,Z) \in \ker L$

Z definice zobrazení L je patrné, že libovolné vektory $P=(p_1,p_2,p_3)$ a $Q=(q_1,q_2,q_3)$ jsou v relaci (tj. $(P,Q) \in \ker L$) právě když $p_1+p_2+p_3=q_1+q_2+q_3$. Z toho tedy $[P]_{\ker L}=\{S=(s_1,s_2,s_3) \mid \sum_{i=1}^{3} s_i = \sum_{i=1}^{3} p_i\}$. Jinými slovy se jedná v prostoru o rovinu danou rovnicí $x+y+z=p_1+p_2+p_3$.

Transverzála je libovolná přímka kolmá na rovinu $[P]_{\ker L}$, kde $P \in \mathbb{R}^3$ je libovolný. Ekvivalenční třídy jednotlivých bodů přímky budou disjunktní roviny, jejichž sjednocení vytvoří celý prostor $\mathbb{R}^3$.

Př. (transverzály) Nechť $A=(5,3,2)$. Na určení roviny potřebujeme 3 body. Zvolme body $B=(10,0,0)$, $C=(0,10,0)$. Všechny dvojice těchto bodů jsou v relaci $\ker L$. Rovina ABC je určena rovnicí $x+y+z=10$. Směrový vektor hledané přímky je $(1,1,1)$ (normálový vektor roviny). Přímka může procházet libovolným bodem roviny, nechť je tímto bodem bod A. Potom hledaná přímka p je určená parametrickou rovnicí: $p: \begin{array}{l} x=5+s\\ y=3+s\\ z=2+s\end{array}, s \in \mathbb{R}$

Úloha č. 2

Úkolem je vyřešit rovnici $\frac{34}{21}x + y = \frac{8}{21}$ pro $x, y \in \mathbb{Z}$.
Potřebujeme najít libovolné řešení, a všechna vyjádříme ostatní.
Prvotní řešení nalezneme pomocí rozšířeného Euklidova algoritmu.

$GCD(\frac{34}{21}, 1) = \frac{GCD(34,21)}{21} = \frac{1}{21}$. Platí, že $8 \cdot \frac{1}{21} = \frac{8}{21}$, a tedy rovnice má řešení.

$$
\begin{aligned}
34 &= 21\cdot 1 + 13 \Rightarrow 13 = 34 - 21\cdot 1\\
21 &= 13\cdot 1 + 8 \Rightarrow 8 = 21 - 13\cdot 1\\
13 &= 8\cdot 1 + 5 \Rightarrow 5 = 13 - 8\cdot 1\\
8 &= 5\cdot 1 + 3 \Rightarrow 3 = 8 - 5\cdot 1\\
5 &= 3\cdot 1 + 2 \Rightarrow 2 = 5 - 3\cdot 1\\
3 &= 2\cdot 1 + 1\\
2 &= 1\cdot 2 + 0
\end{aligned}
$$

Nalezneme Bézoutovy koeficienty:

$$
\begin{aligned}
1 &= 3 - 2\cdot 1 = 3 - (5 - 3\cdot 1) = 3 - 5 + 3\cdot 1 = -5 + 3\cdot 2 = -5 + (8 - 5\cdot 1)\cdot 2 = -5 + 8\cdot 2 - 5\cdot 2 =\\
&= -5\cdot 3 + 8\cdot 2 = (8\cdot 1 - 13)\cdot 3 + 8\cdot 2 = 8\cdot 3 - 13\cdot 3 + 8\cdot 2 = 8\cdot 5 - 13\cdot 3 =\\
&= (21 - 13\cdot 1)\cdot 5 - 13\cdot 3 = 21\cdot 5 - 13\cdot 5 - 13\cdot 3 = 21\cdot 5 - 13\cdot 8 = 21\cdot 5 - (34 - 21\cdot 1)\cdot 8 =\\
&= 21\cdot 5 - 8\cdot 34 + 21\cdot 8 = 21\cdot 13 - 8\cdot 34 = \underbrace{-8}\cdot 34 + \underbrace{13}\cdot 21
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-8\cdot 34 + 13\cdot 21 &= 1\\
-8\cdot \frac{34}{21} + 13\cdot \frac{21}{21} &= \frac{1}{21}\\
\underbrace{-64}\cdot \frac{34}{21} + \underbrace{104}\cdot \frac{21}{21} &= \frac{8}{21}
\end{aligned}
$$

Získali jsme prvotní řešení $x_1 = -64$ a $y_1 = 104$.
Víme, že všechna řešení jsou tvaru:

$$
\left.\begin{aligned} x &= -64 - 21k\\ y &= 104 + 34k \end{aligned}\right\} k \in \mathbb{Z}
\qquad \left(x = x_1 - k\cdot\frac{b}{gcd(a,b)},\ y = y_1 + k\cdot\frac{a}{gcd(a,b)}\right)
$$

a, b koeficienty rovnice, $k \in \mathbb{Z}$

JAKUB LEVÝ

Úloha č. 3

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{Q} : 3x+5y+z=a,\ 7x+2y+4z=b,\ -6x+3y+2z=c,\ a,b,c\in\mathbb{Q}\right\}$$

Vyjádříme x, y, z ze soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&5&1&a\\7&2&4&b\\-6&3&2&c\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}7&2&4&b\\3&5&1&a\\-6&3&2&c\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}7&2&4&b\\0&\frac{29}{7}&-\frac{5}{7}&a-\frac{3b}{7}\\-6&3&2&c\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}7&2&4&b\\0&\frac{29}{7}&-\frac{5}{7}&a-\frac{3b}{7}\\0&\frac{33}{7}&\frac{38}{7}&\frac{6b}{7}+c\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}7&2&4&b\\0&\frac{33}{7}&\frac{38}{7}&\frac{6b}{7}+c\\0&\frac{29}{7}&-\frac{5}{7}&a-\frac{3b}{7}\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}7&2&4&b\\0&\frac{33}{7}&\frac{38}{7}&\frac{6b}{7}+c\\0&0&\frac{-181}{33}&\frac{1}{33}(-29c-39b)+a\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}7&2&4&b\\0&\frac{33}{7}&\frac{38}{7}&\frac{6b}{7}+c\\0&0&1&\frac{1}{181}\cdot(39b-33a+29c)\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}7&2&4&b\\0&\frac{33}{7}&0&\frac{33\cdot(38a-12b+5c)}{1267}\\0&0&1&\frac{1}{181}\cdot(39b-33a+29c)\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}7&2&0&\frac{1}{181}\cdot(132a+25b-116c)\\0&\frac{33}{7}&0&\frac{33\cdot(38a-12b+5c)}{1267}\\0&0&1&\frac{1}{181}\cdot(39b-33a+29c)\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}7&2&0&\frac{1}{181}\cdot(132a+25b-116c)\\0&1&0&\frac{1}{181}\cdot(38a-12b+5c)\\0&0&1&\frac{1}{181}\cdot(39b-33a+29c)\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}7&0&0&\frac{7}{181}\cdot(8a+7b-18c)\\0&1&0&\frac{1}{181}\cdot(38a-12b+5c)\\0&0&1&\frac{1}{181}\cdot(39b-33a+29c)\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{1}{181}\cdot(8a+7b-18c)\\0&1&0&\frac{1}{181}\cdot(38a-12b+5c)\\0&0&1&\frac{1}{181}\cdot(39b-33a+29c)\end{array}\right)$$

$$\vec{u}\in S \iff \vec{u}=\begin{pmatrix}\frac{1}{181}(8a+7b-18c)\\\frac{1}{181}(38a-12b+5c)\\\frac{1}{181}(39b-33a+29c)\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}+\vec{v}\in S \iff \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{1}{181}\cdot(8a+7b-18c)+\frac{1}{181}\cdot(8\alpha+7\beta-18\gamma)\\\frac{1}{181}\cdot(38a-12b+5c)+\frac{1}{181}\cdot(38\alpha-12\beta+5\gamma)\\\frac{1}{181}\cdot(39b-33a+29c)+\frac{1}{181}\cdot(39\beta-33\alpha+29\gamma)\end{pmatrix},\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}$$

$$\vec{u}+\vec{v}\in S \iff \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{8(a+\alpha)+7(b+\beta)-18(c+\gamma)}{181}\\\frac{38\cdot(a+\alpha)-12(b+\beta)+5\cdot(c+\gamma)}{181}\\\frac{-33(a+\alpha)+39\cdot(b+\beta)+29\cdot(c+\gamma)}{181}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8\mathcal{A}+7\mathcal{B}-18\mathcal{C}}{181}\\\frac{38\mathcal{A}-12\mathcal{B}+5\mathcal{C}}{181}\\\frac{-33\mathcal{A}+39\mathcal{B}+29\mathcal{C}}{181}\end{pmatrix}$$

Zvolíme $\left.\begin{array}{l}\mathcal{A}:=(a+\alpha)\in\mathbb{Q}\\\mathcal{B}:=(b+\beta)\in\mathbb{Q}\\\mathcal{C}:=(c+\gamma)\in\mathbb{Q}\end{array}\right\}$ racionální čísla jsou uzavřená na sčítání

Množina S je uzavřená na vektorové sčítání $\forall a,b,c\in\mathbb{Q}$.