Minimální vrcholové pokrytí

K nalezení minimálního vrcholového pokrytí v bipartitním grafu se bude hodit algoritmus pro nalezení maximálního párování v bipartitním grafu a Kőnigova-Egerváryho věta z přednášek z Kombinatoriky a grafů I.

Značení

$m(G)$ ... velikost maximálního párování v grafu G
$v_c(G)$ ... velikost minimálního vrchovolého pokrytí grafu G

Rozbor

Mějme tedy na vstupu bipartitní graf $G = (X \cup Y, E)$ s partitami X a Y. Vytvoříme z něho síť (G', s, t, c), kde $G' = (X' \cup Y', E')$.

- $X' = X \cup \{s\}$
- $Y' = Y \cup \{t\}$.
- $E' = \{(u, v) \mid u \in X,\ v \in Y,\ \{u, v\} \in E\} \cup \{(s, u) \mid u \in X\} \cup \{(u, t) \mid u \in Y\}$

  hrany v síti jsou orientovány směrem „zleva doprava”, tj. od partity X k Y

  od zdroje s vedou hrany do každého vrcholu partity X

  od každého vrcholu partity Y vede hrana do stoku t

- $\forall e \in E' : c(e) = 1$

Nechť f je maximální tok sítě (G', s, t, c), potom $|f| = m(G)$ a hrany $e \in E$, takové, že $f(e) = 1$ tvoří maximální párování grafu G.

Že hrany $e \in E : f(e) = 1$ tvoří párování lze nahlédnou následovně: Žádné dvě hrany takové hrany nemůžou mít společný vrchol. Pokud by totiž společný vrchol náležel do partity Y, pak by do tohoto vrcholu musely přitéci alespoň 2 jednotky toku, které nemají kudy odtéct. Analogicky pro partitu X.

Maximalita párování plyne z toho, že pro každý tok sítě (G', s, t, c) je možné nalézt párování stejné velikosti a naopak. Existuje tedy bijekce mezi množinou všech toků a množinou všech párování, které zachovává velikost. Maximální tok tedy odpovídá maximálnímu párování.

Teď bychom potřebovali převést problém nalezení maximálního párování a problém hledání minimálního vrcholového pokrytí. Z kurzu Kombinatoriky a grafů I známe Kőnigova-Egerváryho větu: $\forall$ bipartitní graf $G : m(G) = v_c(G)$.

V následujícím odstavci bude znamenat pojem *párování* maximální párování a *vrcholové pokrytí* minimální vrcholové pokrytí.

Jako vrcholy vrcholového pokrytí budeme brát vrcholy hran párování. Minimálního počtu vrcholů na vrcholové pokrytí grafu dosáhneme tak, že z každé hrany párování použijeme právě jeden její libovolný vrchol, čímž pokryjeme celou hranu. Po pokrytí všech hran párování, kterých je $m(G)$, jsme vrcholově pokryli celý graf, protože párování bylo maximální a tedy žádné další disjunktní hrany se v grafu nacházet nemohou.

Pseudocode

Algoritmus 1: Minimální vrcholové pokrytí

```
Vstup: Bipartitní graf G = (X ∪ Y, E) s partitami X a Y
Výstup: Množina vrcholů tvořících minimální vrcholové pokrytí
Vytvoříme síť (G', s, t, c) viz Rozbor
f ← maximální tok sítě (G', s, t, c) (F-F)
vysledek ← {}
for {u, v} ∈ E, u ∈ X, v ∈ Y do
    if f((u, v)) = 1 then
        vysledek.insert(vrchol u, nebo v)
    end
end
return vysledek
```

Označme n počet vrcholů a m počet hran tokové sítě.

- $n = |X| + |Y| + 2$
- $m = |E| + |X| + |Y|$
- $|V| = |X| + |Y|$.

Časová složitost

Tokovou síť lze postavit v lineárním čase v počtem vrcholů a hran, tj. $\mathcal{O}(n+m)$. F-F algoritmem nalezneme maximální párování v čase $\mathcal{O}(n \cdot m)$. Poté v lineárním čase s počtem hran projdeme síť, získáme minimální vrcholové pokrytí. Celková časová složitost je $\mathcal{O}(n \cdot m) = \mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$.

Prostorová složitost

Pro uložení:

- grafu tokové sítě G' budeme potřebovat $\Theta(n + m)$ paměti
- kapacity pro každou hranu budeme potřebovat $\Theta(m)$ paměti
- toku f také $\Theta(m)$
- proměnné *vysledek* $\mathcal{O}(v_c(G)) \in \mathcal{O}(n)$

Výsledně tedy paměťová složitost je $\mathcal{O}(n + m) = \mathcal{O}(|V| + |E|)$.