JAKUB LEVÝ

ÚLOHA č. 1

a)

levé krácení: ✓

$$\forall f,g \in P: f=g \iff \forall f,g \in P\ \forall x \in M: f(x)=g(x) \iff$$
$$\forall f,g,h \in P\ \forall x \in M: h(f(x))=h(g(x)) \iff$$
$$\forall f,g,h \in P\ \forall x \in M: (h \circ f)(x)=(h \circ g)(x) \iff \forall f,g,h \in P: h \circ f = h \circ g$$

pravé krácení: ✓

$$\forall f,g,h \in P: f \circ h = g \circ h \iff \forall f,g,h \in P\ \forall x \in M: f(h(x))=g(h(x))$$
$$\underset{z=h(x)}{\iff} \forall f,g \in P\ \forall z \in M: f(z)=g(z) \iff \forall f,g \in P: f=g$$

h je na

levé dělení: X

$\forall f,g,h \in P: f \circ h = g$. Funkce f je na, není však prostá a tedy nemusí existovat funkce f^{-1}.

pravé dělení: X

$\forall f,g,h \in P: h \circ f = g$. Funkce f je na, není však prostá a tedy nemusí existovat funkce f^{-1}.

b)

levé krácení: ✓

$$\forall f,g,h \in R: h \circ f = h \circ g \iff \forall f,g,h \in R\ \forall x \in \mathbb{N}: h(f(x))=h(g(x))$$
$$\iff \forall f,g \in R\ \forall x \in \mathbb{N}: f(x)=g(x) \iff \forall f,g \in R: f=g.$$

pravé krácení: X

$$\forall f,g,h \in R: f \circ h = g \circ h \iff \forall f,g,h \in R\ \forall x \in \mathbb{N}: f(h(x))=g(h(x)) \iff$$
$\forall f,g,h \in R\ \forall x \in \mathbb{N}\ \forall z \in h(x): f(z)=g(z)$. Funkce h však není na, tj. $\exists a \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: h(n) \neq a$. Pro takové a může platit:

$f(z) \neq g(z)$, a tedy $f \neq g$.

<u>levé dělení</u>: ✓

$$
\begin{aligned}
(f \circ h)(x) &= (g)(x) && \forall f,g,h \in R \ \forall x \in \mathbb{N} \\
(f^{-1} \circ f \circ h)(x) &= (f^{-1} \circ g)(x) && \forall f,g,h \in R \ \forall x \in \mathbb{N} \ \exists y \in \mathbb{N} : f(y) = x \\
h(x) &= (f^{-1} \circ g)(x) && \forall f,g,h \in R \ \underbrace{\forall x \in \mathbb{N} \ \exists y \in \mathbb{N} : f(y) = x}_{f \text{ je prostá, ale není na}}
\end{aligned}
$$

<u>pravé dělení</u>:

$$
\begin{aligned}
(h \circ f)(x) &= (g)(x) && \forall f,g,h \in R \ \forall x \in \mathbb{N} \\
(h \circ f \circ f^{-1})(x) &= (g \circ f^{-1})(x) && \forall f,g,h \in R \ \forall x \in \mathbb{N} \ \exists y \in \mathbb{N} : f(y) = x \\
h(x) &= (g \circ f^{-1})(x) && \forall f,g,h \in R \ \underbrace{\forall x \in \mathbb{N} \ \exists y \in \mathbb{N} : f(y) = x}_{f \text{ je prostá, ale není na}}
\end{aligned}
$$

<u>ÚLOHA č. 3</u>

a) S je grupa, $\emptyset \neq T \subseteq S$, T konečná, T pologrupa. Chceme dokázat, že T je grupa.

Zadefinujme si konečně mnoho funkcí $\varphi_a : T \to T$, $\psi_a : T \to T$ $\forall a \in T$ předpisem $\varphi_a(s) = \underbrace{a \cdot s}_{\in T}$, $\psi_a(s) = \underbrace{s \cdot a}_{\in T}$, kde $s \in T$. (Dále budeme namísto $\forall a \in T : \varphi_a \ldots \psi_a \ldots$ psát pouze $\varphi_a \ldots$, $\psi_a \ldots$).

Nejprve ukážeme, že φ_a, ψ_a jsou bijekce (stačí ukázat, že se jedná o prosté funkce).

Předpokládejme, že $\forall s_1, s_2 \in T$
$$
\begin{cases}
\varphi_a(s_1) = \varphi_a(s_2) \Rightarrow \underset{\in T \subseteq S \ni a^{-1}}{a} \cdot s_1 = a \cdot s_2 \Rightarrow s_1 = s_2 \\
\psi_a(s_1) = \psi_a(s_2) \Rightarrow s_1 \cdot \underset{\in T \subseteq S \ni a^{-1}}{a} = s_2 \cdot a \Rightarrow s_1 = s_2
\end{cases}
$$

$\cdot_T$ je asociativní, protože T je pologrupa.

JAKUB LEVÝ

Neutrální prvek : Funkce φ_a, ψ_a jsou bijekce, tedy jsou i na. Z def na:

$$\forall y \in T \; \exists x \in T : \begin{cases} \varphi_a(x) = y \\ \psi_a(x) = y \end{cases}$$

Víme, že $a \in T$ a tedy

$$\exists x \in T : \begin{cases} \varphi_a(x) = a \iff a \cdot \underbrace{x}_{\in T} = a \iff x = e \\ \psi_a(x) = a \iff \underbrace{x}_{\in T} \cdot a = a \iff x = e \end{cases}$$

Inverzní prvek : Nyní víme, že $e \in T$. Z def na:

$$\exists c \in T : \begin{cases} \varphi_a(c) = e \iff a \cdot \underbrace{c}_{\in T} = e \iff c = a^{-1} \\ \psi_a(c) = e \iff \underbrace{c}_{\in T} \cdot a = e \iff c = a^{-1} \end{cases}$$

a tedy T je podgrupa S.

b) Nechť $S = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$ je grupa, kde $*$ značí binární operaci násobení. Zřejmě se jedná o grupu:

1) $*$ je asociativní
2) 1 je neutrální prvek $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x * 1 = x)$
3) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \; \exists y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x * y = 1$

Uvažme podgrupu $T = (\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, *)$. Zřejmě se jedná o podgrupu S.

1) $\mathbb{R} \setminus \{0,1\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2) $*_T$ je asociativní

Nejedná se však o grupu, protože $1 \notin \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Chybí neutrální prvek.

ÚLOHA č. 2:

Nechť $(G, \cdot)$ je pologrupa s pravým i levým krácením i dělením. Tj.

1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in G$
2) $c \cdot a = c \cdot b \Rightarrow a = b$
3) $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$
4) $a \cdot x = b$ má řešení $x \quad \forall a, b \in G$
5) $x \cdot a = b$ má řešení $x \quad \forall a, b \in G$

Obdobně jako v úloze 3 si zadefinujeme $\varphi_a : G \to G$, $\psi_a : G \to G$ $\forall a \in G$ předpisem $\varphi_a(g) = a \cdot g$, $\psi_a(g) = g \cdot a$, $g \in G$.

Ukážeme, že φ_a i ψ_a jsou bijekce, stačí ukázat, že se jedná o prosté funkce.

Předpokládejme, že $\forall g_1, g_2 \in G$:
$$\begin{cases} \varphi_a(g_1) = \varphi_a(g_2) \Rightarrow a \cdot g_1 = a \cdot g_2 \overset{\text{levé krácení}}{\Rightarrow} g_1 = g_2 \\ \psi_a(g_1) = \psi_a(g_2) \Rightarrow g_1 \cdot a = g_2 \cdot a \underset{\text{pravé krácení}}{\Rightarrow} g_1 = g_2 \end{cases}$$

__Neutrální prvek__

Funkce φ_a, ψ_a jsou bijekce, tedy jsou i na. Z def na:
$$\forall y \in G \ \exists x \in G : \begin{cases} \varphi_a(x) = y \\ \psi_a(x) = y \end{cases}$$

Víme, že $a \in G$ a tedy
$$\exists x \in G : \begin{cases} \varphi_a(x) = a \Leftrightarrow a \cdot \underbrace{x}_{G} = a \Rightarrow x = e \\ \psi_a(x) = a \Leftrightarrow \underbrace{x}_{\in G} \cdot a = a \Rightarrow x = e \end{cases}$$

__Inverzní prvek__: Z vlastností 4) a 5) dostáváme, že:
$$\overset{x \in G}{x} = a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1} \quad \forall a, b \in G$$
Z čehož i $a^{-1} \in G$ je inverzním prvkem (zleva i zprava) k a $\forall a \in G$.