

## Algebra I., úkol č. 6

### Úloha č. 1

Bud'

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$$

grupa s operací maticového násobení a

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$$

její podgrupa.

Popište rozkladové třídy ekvivalencí rmod  $H$  a lmod  $H$  a na základě výsledku rozhodněte o normalitě  $H$  v  $G$ . (Pro jednodušší představu lze uvažovat geometrickou reprezentaci matice  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  jako bodu  $[a, b]$  v reálné rovině  $\mathbb{R}^2$ .)

(2 body)

*Definici řádu a indexu viz na str. 13 ve skriptech.*

### Úloha č. 2

Bud'  $G$  grupa řádu 60,  $H \leq G$  řádu 5 a  $K \leq G$  bud' v  $G$  indexu 5. Je  $H \cap K$  komutativní?

(1 bod)

### Úloha č. 3

Dokažte, že je-li  $G$  grupa a  $H \leq G$  je v  $G$  indexu nanejvýš 2, pak je  $H$  nutně normální podgrupou v  $G$ .

(1 bod)

### Úloha č. 4

Zatímco relace „být podgrupou“ je tranzitivní, na příkladu grupy  $\mathbb{S}_4$  ukažte, že relace „být normální podgrupou“ tranzitivní obecně není (tj. najděte  $H, K, L \leq \mathbb{S}_4$  tak, že platí  $H \trianglelefteq K \trianglelefteq L$ , ale neplatí  $H \trianglelefteq L$ ).

(1 bod)