Domino na šachovnici

Problém půjde přeformulovat na hledání maximálního párování v bipartitním grafu.

Značení

$[n] = \{1, 2, ..., n\}$

Rozbor

Mějme na vstupu pole *grid* rozměru $r \times s$. Pro $i \in [r]$ a $j \in [s]$ s hodnotami:

$$grid[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{políčko na indexu } [i,j] \text{ je povolené} \\ 0 & \text{políčko na indexu } [i,j] \text{ je zakázané} \end{cases}$$

Pozorování: Pokud počet povolených políček je liché číslo $\left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} grid[i,j] = 2k+1 \text{ pro } k \in \mathbb{N}_0\right)$, pak neexistuje žádné rozmístění kostek, které by pokrylo všechna políčka. Každá kostka musí pokrýt přesně 2 políčka, tedy 1 políčko nám vždy bude přebývat.

Vytvoříme si z pole *grid* graf $G = (V, E)$.

- $V = \{v_{i,j} \mid i \in [r] \ \wedge \ j \in [s] \ \wedge \ grid[i,j] = 1\}$

  vrcholy budou pouze povolená políčka

- $E = \{\{v_{i,j}, v_{k,l}\} \mid i,k \in [r] \ \wedge \ j,l \in [s] \ \wedge \ |i-k| + |j-l| = 1 \ \wedge \ grid[i,j] = grid[k,l] = 1\}$

  hrany budou mezi vrcholy jejichž:

  * Manhattonská vzdálenost je právě 1
  * oba dva vrcholy jsou povolená políčka (jiná políčka v grafu ani nejsou)

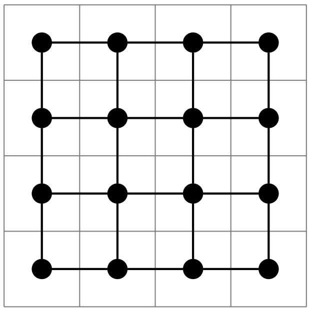
Každá hrana grafu G reprezentuje možnost položení kostky. Pokud kostku umístíme na hranu e, pokryjeme oba dva její vrcholy (políčka) tvořící hranu. Chceme „pokrýt všechny vrcholy pomocí hran". To je definice perfektního párování.

Def. (perfektní párování) Nechť G je graf a m je párování v $G = (V, E)$. m nazveme perfektním párováním v grafu G pokud $\left| \bigcup_{e \in m} e \right| = |V|$.

Tohle přesně odpovídá našemu pozorování. Graf s lichým počtem vrcholů nemůže mít perfektní párování.

Perfektní párování by se dalo najít třeba pomocí Edmonsova kytičkového algoritmu. Tímto způsobem bychom však nezískali příznivou časovou složitost. Problém je v tom, že graf G považujeme za obecný graf, ačkoliv se jedná o graf bipartitní.

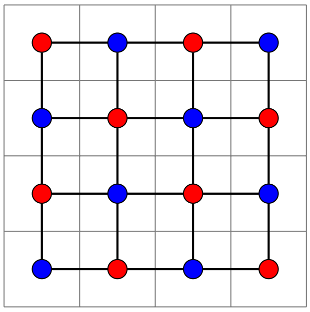
Mějme dáno pole *grid*, které si můžeme představit jako mřížku:



pole *grid* a odpovídající graf

Předpokládejme, že žádná políčka zakázaná nejsou. To můžeme BÚNO, protože pokud nějaké políčko je zakázané, pak není v grafu žádný vrchol reprezentující zakázané políčko ani žádná hrana vedoucí do zakázaného políčka. Smazání vrcholu i s jeho hranami v bipartitním grafu neovlivní bipartitnost bipartitního grafu.

Zbývá najít rozdělení vrcholů do dvou partit. Červené vrcholy budou reprezentovat jednu partitu a modré druhou.



rozdělení vrcholů do partit

V grafu na obrázku platí, že hrany vedou pouze mezi vrcholy různé barvy, protože vrcholy stejné barvy leží na diagonálách. Tímto způsobem obarvování vrcholů po diagonálách se střídáním barvy je možné rozdělit vrcholy do dvou partit libovolně velkých mřížek.

Problém byl převeden na hledání perfektního párování v bipartitním grafu, pomocí toků v sítích dovedeme najít jenom maximální párování. Pokud obě partity jsou vyvážené, tyto koncepty splývají. V opačném případě, kdy byly zakázány nějaké vrcholy a partity nejsou vyváženy, neexistuje perfektní párování v bipartitním grafu. Po pokrytí všech vrcholů menší partity nám budou přebývat nepokryté vrcholy v druhé partitě, které už ale nemáme jak pokrýt.

Pseudocode

Algoritmus 1: Domino na šachovnici

Vstup: pole $grid$ rozměru $r \times s$
Výstup: množina hran, na které umístit kostky domina
$\#povolených \leftarrow \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} grid[i,j]$
if $\#povolených$ *% 2* $\neq 0$ **then**
  return {} ▷ `Není možné kostkami pokrýt lichý počet políček`
end
Vytvoříme graf $G = (V, E)$ z pole $grid$ viz Rozbor
Rozdělíme V na dvě partity X, Y
if $|X| \neq |Y|$ **then**
  return {} ▷ `Velikosti partit se liší, neexistuje perfektní párování`
end
$výstup \leftarrow$ hrany maximálního párování grafu G
return $výstup$

Časová složitost

- Spočtení hodnoty proměnné $\#povolených$ stojí $\mathcal{O}(r \cdot s)$ času.
- Pro vytvoření grafu opět potřebujeme projít celé pole, potřebujeme. $\mathcal{O}(r \cdot s)$.
- Pro rozdělení vrcholů na dvě partity je nutné projít všechny vrcholy grafu. To stojí $\mathcal{O}(|V|) \in \mathcal{O}(r \cdot s)$.
- Výpočet maximálního párování stojí $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$ času. Počet hran je však lineární s počtem vrcholů. Platí tedy $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|) \in \mathcal{O}(r^2 \cdot s^2)$

Výsledná časová složitost bude $\mathcal{O}(r^2 \cdot s^2)$.

Paměťová složitost

Vstup nebude počítán do paměťové složitosti.

- Na každý vrchol grafu G, kterých může být až $r \cdot s$, případě konstantně mnoho hran. Pro uložení grafu bude potřeba $\mathcal{O}(r \cdot s)$ paměti.
- Maximální párování bude potřebovat $\mathcal{O}(|V| + |E|) \in \mathcal{O}(r \cdot s)$ paměti.

Celkově bude potřeba $\mathcal{O}(r \cdot s)$ paměti.