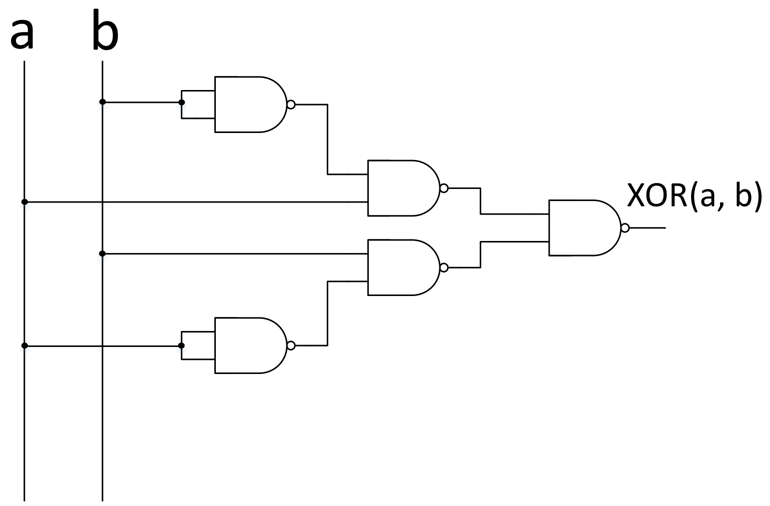
Všemocný NAND

$\mathrm{XOR}(a, b) = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$
$\mathrm{NAND}(a, b) = \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

Negace pomocí NANDu jde jednoduše zkonstruovat.
$\mathrm{NOT}(a) = \mathrm{NAND}(a, a) = \neg a \vee \neg a = \neg a$

Triviální je konstrukce XORu pomocí 5 NANDů.
Označme $\varphi = (a \wedge \neg b)$, $\psi = (\neg a \wedge b)$ (první a druhá elementární konjunkce funkce XOR).

$$\begin{aligned} \neg\varphi &= (\neg a \vee b) = \mathrm{NAND}(a, \mathrm{NAND}(b, b)) \\ \neg\psi &= (a \vee \neg b) = \mathrm{NAND}(\mathrm{NAND}(a, a), b) \\ \mathrm{XOR}(a, b) &= \mathrm{NAND}(\neg\varphi, \neg\psi) \end{aligned}$$



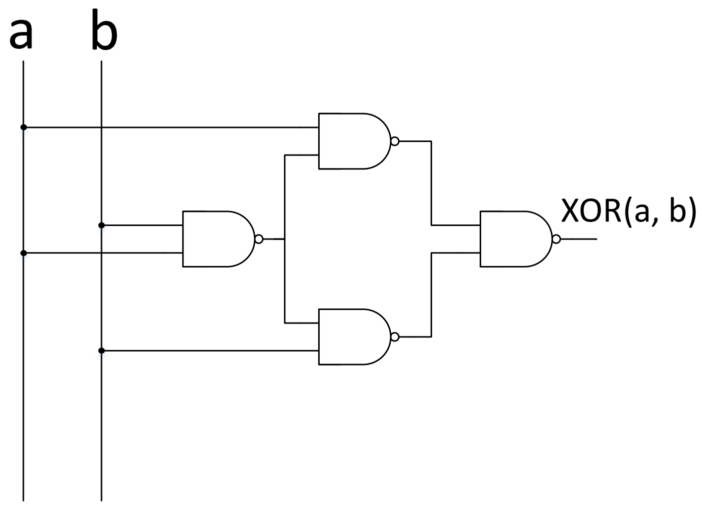
Problém je v plýtvání hradly pro každou negaci. Koneckonců φ a ψ jsou symetrické formule.

Pozorování: (trik)

$$\overbrace{\neg\left(\overbrace{(\neg a \vee \neg b)}^{\mathrm{NAND}(a,b)} \wedge a\right)}^{\mathrm{NAND}(\mathrm{NAND}(a,b),a)} = (\neg a \vee b) = \neg\varphi$$

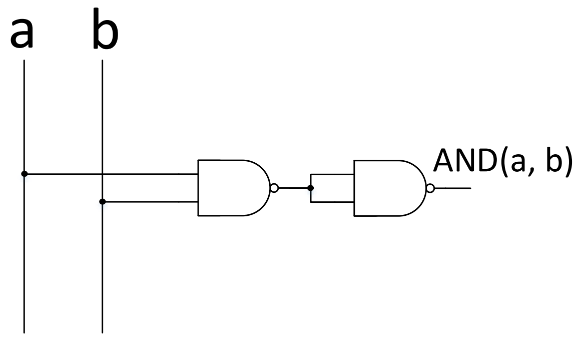
$$\underbrace{\neg\left(\underbrace{(\neg a \vee \neg b)}_{\mathrm{NAND}(a,b)} \wedge b\right)}_{\mathrm{NAND}(\mathrm{NAND}(a,b),b)} = (a \vee \neg b) = \neg\psi$$

Jeden NAND se dá šikovně ušetřit tak, že místo jednotlivých negací si spočítáme $\mathrm{NAND}(a, b)$ a využijeme triku. Na výsledný $\mathrm{XOR}(a, b)$ je použito poslední zbývající 4. hradlo stejně jako v předchozí 5 hradlové konstrukci 5. hradlo.



Každou booleovskou formuli můžeme přeložit na booleovský obvod využívající hradla AND, OR a NOT, které jsou dohromady funkčně kompletní. Zbývá tedy ukázat že z hradla NAND dovedeme vyrobit hradlo AND a OR. Hradlo NOT již bylo ukázáno.

$$\mathrm{NAND}(a,b) = (\neg a \vee \neg b)$$
$$\neg(\neg a \vee \neg b) = (a \wedge b) = \mathrm{NAND}\left(\mathrm{NAND}(a,b), \mathrm{NAND}(a,b)\right) = \mathrm{AND}(a,b)$$



$$\mathrm{NAND}(a,b) = (\neg a \vee \neg b)$$
$$a \vee b = \mathrm{NAND}\left(\mathrm{NAND}(a,a), \mathrm{NAND}(b,b)\right)$$