

## Algebra I., úkol č. 7

### Úloha č. 1

Bud'  $A$  komutativní grupa a označme  $T(A) = \{a \in A \mid a \text{ má konečný řád}\}$ . Ukažte, že pak nemá odpovídající faktorová grupa  $A/T(A)$  ( $= A/\text{rmod } T(A)$ ) prvky konečného řádu.

(1 bod)

### Úloha č. 2

Ukažte, že pro každé prvočíslo  $p$  a přirozené číslo  $k$  existuje v grupě  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  prvek řádu  $p^k$ .

(1 bod)

### Úloha č. 3 - Akce grupy na množině; příprava na příští cvičení

Bud'  $\mathbb{G}$  grupa a  $\mathcal{X}$  neprázdná množina. Každý homomorfismus  $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{S}(\mathcal{X})$  nazveme *akcí grupy  $\mathbb{G}$  na množině  $\mathcal{X}$*  (představa může být taková, že každému prvku  $g \in \mathbb{G}$  odpovídá nějaké „zprěházení“ prvků množiny  $\mathcal{X}$ , tedy bijekce na  $\mathcal{X}$ ).

Pro pevně zvolenou akci  $f_0$  a prvek  $x \in \mathcal{X}$  definujeme *orbitu*  $x$  při akci  $f_0$  jako množinu  $O_{f_0,x} = \{y \in \mathcal{X} \mid \exists_{g \in \mathbb{G}} (f_0(g))(x) = y\}$ ;  $f_0(g)$  je totiž nějaká permutace na  $\mathcal{X}$ , tudíž má smysl ptát se na obraz  $x$  při permutaci  $f_0(g)$ . Dále definujeme *stabilizátor* prvku  $x$  jako množinu  $S_{f_0,x} = \{g \in \mathbb{G} \mid (f_0(g))(x) = x\}$ .

- a) Ukažte, že stabilizátor nějakého prvku  $x \in \mathcal{X}$  je vždy podgrupa v  $\mathbb{G}$ .

(1 bod)

- b) Nechť grupa  $GL_2(\mathbb{Z}_3)$  všech regulárních matic  $2 \times 2$  s prvky v  $\mathbb{Z}_3$  s maticovým násobením působí sama na sobě

- 1) translací tj. akce je dána homomorfismem  $\tau : g \mapsto \text{trans}_g$ ;  $\text{trans}_g(h) = g \cdot h$  pro  $g, h \in GL_2(\mathbb{Z}_3)$
- 2) konjugací, tj. akce je dána homomorfismem  $\kappa : g \mapsto \text{Con}_g$ ;  $\text{Con}_g(h) = g \cdot h \cdot g^{-1}$  pro  $g, h \in GL_2(\mathbb{Z}_3)$ .

Spočtěte pro oba případy stabilizátor, resp. orbitu matice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  v případě 1).

(2 body)  
(+ 2 extra body za orbitu v případě 2))