k-barevnost

Problém si rozdělíme na 2 části. Víme, že 2-SAT $\in$ P. V první části budeme chtít dokázat

$\boxed{\text{2-barevnost} \to \text{2-SAT}}$

Tím ukážeme, že problém 2-barevnosti $\in$ P.

Nechť $k \geq 3$, potom je k-SAT NP-úplný, v druhé části budeme chtít dokázat

$\boxed{k\text{-SAT} \to k\text{-barevnost}}$

Čímž získáme, že k-barevnost $\in$ NP.

2-barevnost $\to$ 2-SAT

Na vstupu jsme dostali graf $G = (V, E)$, chceme vyrobit formuli v CNF, jejíž každá klauzule obsahuje nejvýše 2 literály a je splnitelná právě tehdy když G je 2-obarvitelný. Předpokládejme, že $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Vytvoříme si proměnné

$$v_{i,b} = \begin{cases} 1 & \text{pokud vrchol } v_i \text{ je obarven barvou } b \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Formuli, kterou hledáme bude obsahovat následující klauzule:

- $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$:

  $$(v_{i,1} \vee v_{i,2}) \quad \text{(každý vrchol je obarvenou alespoň 1 barvou)}$$
  $$\neg(v_{i,1} \wedge v_{i,2}) = (\neg v_{i,1} \vee \neg v_{i,2}) \quad \text{(žádný vrchol není obarven 2 barvami)}$$

- $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $\{v_i, v_j\} \in E$:

  $\neg(v_{i,1} \wedge v_{j,1}) = (\neg v_{i,1} \vee \neg v_{j,1})$
  (vrcholy spojené hranou nejsou zároveň obarveny 1. barvou)

  $\neg(v_{i,2} \wedge v_{j,2}) = (\neg v_{i,2} \vee \neg v_{j,2})$
  (vrcholy spojené hranou nejsou zároveň obarveny 2. barvou)

Formule v CNF obsahující tyto klauzule je splnitelná právě tehdy když graf G je 2-obarvitelný. Je potřeba však ještě ukázat, že takovýto převod z grafu na formuli stihneme v polynomiálním čase. A to stihneme, protože počet klauzulí je závislý na počtu vrcholů a hran grafu, přičemž hran má graf nejvýše kvadraticky mnoho k počtu vrcholů.

k-SAT $\to$ k-barevnost