Příklad 1

Mějme 3 druhy zákusků: $\square$, $\triangle$, $\heartsuit$.

a

Označme:

$A = [$„nemůže vybrat ze všech zákusků"$]$

$A^c = [$„může vybrat ze všech zákusků"$]$

Bude jednodušší spočítat $P(A^c)$ a poté vyjádřit $P(A)$ jako $1 - P(A^c)$.

Aby si Adam mohl vybrat ze všech druhů zákusků, musí stůl se zákusky vypadat jako libovolný řádek tabulky.

$\square$	$\triangle$	$\heartsuit\heartsuit$
$\square$	$\triangle\triangle$	$\heartsuit$
$\square\square$	$\triangle$	$\heartsuit$

Obrázek 1: stůl se zákusky

Označme $B_i = [$„na stole zbyly zákusky i-tého řádku tabulky"$]$.
Platí, že:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \underbrace{\binom{5}{2,2,1}}_{\text{\#pořadí odebírání zákusků}} \cdot \underbrace{\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}}_{\text{odebrání dvou zákusků 1. typu}} \cdot \underbrace{\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}}_{\text{odebrání dvou zákusků 2. typu}} \cdot \underbrace{\frac{3}{5}}_{\text{odebrání jednoho zákusku 3. typu}} = \frac{3}{14}$$

$$P(A^c) = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{9}{14}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{9}{14} = \underline{\frac{5}{14}}$$

b

6 lidí si vezme náhodný zákusek, aby zůstaly na stole všechny tři druhy zákusků, musí na stole zbýt od každého druhu právě jeden kus.
Označme $C = [$„na stole zůstaly všechny tři druhy zákusků"$]$.

$$P(C) = \underbrace{\binom{6}{2,2,2}}_{\text{\#pořadí odebírání zákusků}} \cdot \underbrace{\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}}_{\text{odebrání dvou zákusků 1. typu}} \cdot \underbrace{\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}}_{\text{odebrání dvou zákusků 2. typu}} \cdot \underbrace{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}}_{\text{odebrání dvou zákusků 3. typu}} = \underline{\frac{9}{28}}$$

c

Bez újmy na obecnosti považujme □ za věneček. Po odebrání 5 zákusků bude stůl vypadat jako jeden řádek tabulky.

□		♡♡♡
□	△△△	
□	△	♡♡
□	△△	♡

Obrázek 2: stůl se zákusky

Na stole vždy leží 4 zbylé zákusky z nichž 1 je věneček, aby tam věneček zůstal, tak si Adam musí vzít libovolné jiný.
Označme D = [„věneček zbyl i po Adamově výběru”], potom $P(D) = \frac{3}{4}$

Příklad 2

a

$(X, Y)^T$ je diskrétní náhodný vektor. Sdružené a marginální rozdělení je popsáno tabulkou.

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{21}{32} \cdot \frac{20}{31}$	$\binom{2}{1} \cdot \frac{3}{32} \cdot \frac{21}{31}$	$\frac{3}{32} \cdot \frac{2}{31}$	$\frac{69}{124}$
1	$\binom{2}{1} \cdot \frac{7}{32} \cdot \frac{21}{31}$	$\binom{2}{1} \cdot \frac{7}{32} \cdot \frac{3}{31} + \binom{2}{1} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{21}{31}$	$\binom{2}{1} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{3}{31}$	$\frac{12}{31}$
2	$\frac{7}{32} \cdot \frac{6}{31}$	$\binom{2}{1} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{7}{31}$	0	$\frac{7}{124}$
	$\frac{189}{248}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{3}{248}$	**1**

Obrázek 3: rozdělení před zjednodušením výpočtů

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{105}{248}$	$\frac{63}{496}$	$\frac{3}{496}$	$\frac{69}{124}$
1	$\frac{147}{496}$	$\frac{21}{248}$	$\frac{3}{496}$	$\frac{12}{31}$
2	$\frac{21}{496}$	$\frac{7}{496}$	0	$\frac{7}{124}$
	$\frac{189}{248}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{3}{248}$	**1**

Obrázek 4: rozdělení po zjednodušení výpočtů

b

Náhodné veličiny X, Y jsou závislé. To je hned vidět z druhého řádku tabulky.
$0 = P(X = 2 \ \wedge \ Y = 2) \neq P(X = 2) \cdot P(Y = 2) = \frac{7}{124} \cdot \frac{3}{248}$

O korelaci náhodných veličin z jejich závislosti nic nevíme. Bude třeba ji spočítat ručně.

$$EX = 0 \cdot \frac{69}{124} + 1 \cdot \frac{12}{31} + 2 \cdot \frac{7}{124} = \frac{1}{2}$$

$$EY = 0 \cdot \frac{189}{248} + 1 \cdot \frac{7}{31} + 2 \cdot \frac{3}{248} = \frac{1}{4}$$

$$EX^2 = 0 \cdot \frac{69}{124} + 1 \cdot \frac{12}{31} + 4 \cdot \frac{7}{124} = \frac{19}{31}$$

$$EY^2 = 0 \cdot \frac{189}{248} + 1 \cdot \frac{7}{31} + 4 \cdot \frac{3}{248} = \frac{17}{62}$$

$$EXY = 1 \cdot 1 \cdot \frac{21}{248} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{496} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{7}{496} = \frac{1}{8}$$

$$\operatorname{var} X = \frac{19}{31} - \frac{1}{4} = \frac{45}{124}$$

$$\operatorname{var} Y = \frac{17}{62} - \frac{1}{16} = \frac{105}{496}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$\operatorname{corr}(X,Y) = \frac{0}{\sqrt{\frac{45}{124} \cdot \frac{105}{496}}} = \underline{0}$$

$\boxed{\textbf{c}}$

Náhodná veličina Z může nabývat pouze hodnot $0, 1, 2$.

$$P(Z=0) = \frac{24-a}{24} \cdot \frac{23-a}{23}$$

$$P(Z=1) = \binom{2}{1} \cdot \frac{a}{24} \cdot \frac{24-a}{23}$$

$$P(Z=2) = \frac{a}{24} \cdot \frac{a-1}{23}$$

$$EZ = 0 \cdot \frac{24-a}{24} \cdot \frac{23-a}{23} + 1 \cdot \binom{2}{1} \cdot \frac{a}{24} \cdot \frac{24-a}{23} + 2 \cdot \frac{a}{24} \cdot \frac{a-1}{23} = \underline{\frac{a}{12}}$$

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8
EZ	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$

Obrázek 5: EZ pro všechny hodnoty parametru a

$\boxed{\textbf{d}}$

Známe střední hodnotu náhodné veličiny Z, která závisí na parametru a. Po provedení náhodného výběru $Z_1, \ldots, Z_n$ můžeme spočítat $\overline{Z_n}$. O výběrovém průměru víme, že je nestranný a konzistentní odhad střední hodnoty. Parametr a je možné odhadnout z následujícího vztahu:

$$EZ = \frac{a}{12} \approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} Z_k = \overline{Z_n}$$

Jedná se tedy o odhad: $\widehat{a_n} = 12 \cdot \overline{Z_n}$

Nestranost:

$$E\widehat{a_n} = E\left(12 \cdot \overline{Z_n}\right) = 12 \cdot E\overline{Z_n} = 12 \cdot EZ = 12 \cdot \frac{a}{12} = a$$

Konzistence:
Předpoklady ZVČ jsou splněny:

$Z_1, \dots Z_n$ (iid) ✓

$-\infty < EZ_i = EZ < \infty$ ✓

$-\infty < \operatorname{var} EZ_i = \operatorname{var} EZ = \dfrac{a \cdot (22 + a)}{276} - \left(\dfrac{a}{12}\right)^2 = \dfrac{264\, a - 11\, a^2}{3312} < \infty$ ✓

Ze ZVČ víme, že $\overline{Z_n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} EZ$.

Využijeme věty o spojité transformaci.

$$\begin{aligned} g(t) &= 12\, t \quad \text{(spojitá na } \mathbb{R}) \\ g(\overline{Z_n}) &= 12 \cdot \overline{Z_n} \;= \widehat{a_n} \\ g(EZ) &= 12 \cdot EZ = a \end{aligned}$$

$$\widehat{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$$

$\widehat{a_n}$ je nestranný a konzistentní odhad a.

$\boxed{\textbf{e}}$

Řešeno ve Wolfram Mathematice 11.3.

```
(* K − kule
L − listy
S − srdce
Z − zaludy
*)
deck = RandomSample[Join[ConstantArray["S", 8], ConstantArray["Z", 8],
    ConstantArray["L",8], ConstantArray["K", 8]]]

(* na náhodných indexech smazeme karty z balíčku
*)
For[i = 1, i ≤ 8, i++, deck = Delete[deck, RandomInteger[{1, Length[deck]}]]]

(* skutečný počet zbývajících srdcových karet
*)
srdcovych = Count[deck, "S"];

n = 20;

Z = Table[Count[Table[deck[[RandomInteger[{1, Length[deck]}]]], {i, 1, 2}], "S"], {k, 1, n}]

EZ = a/12;
Average = 1/n * Sum[Z[[k]], {k, 1, n}];

NSolve[EZ == Average, a] //N

srdcovych
```

Obrázek 6: zdrojový kód

$n = 20$		$n = 2000$	
a	$\hat{a}$	a	$\hat{a}$
6	5.4	7	6.918
7	6	6	5.682
6	4.2	6	6.078
7	5.4	7	6.924
5	4.2	6	6.204
6	7.2	5	4.968
5	3.6	6	6.132
6	4.2	6	6.048
5	3	7	6.738
8	6	7	7.164

Obrázek 7: realizace pokusů

S rostoucí velikostí náhodného výběru se přesnost odhadu zlepšuje. Pro $n = 2000$ se jedná už o solidní odhad.

Příklad 3

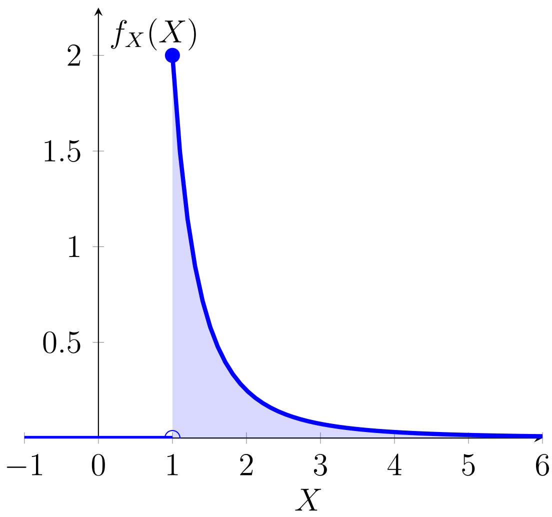
Označme $X =$ [„doba výpočtu úlohy s náhodným vstupem"].

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{a}}$

$$P(X < 5) = P(X > 1 \ \wedge \ X < 5) = \int_1^5 f_X(x)\, dx = \int_1^5 \frac{2}{x^3}\, dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{-2x^2} \right]_1^5 =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{-50} + \frac{1}{2} \right) = \underline{\frac{24}{25}}$$



Obrázek 8: Graf PDF náhodné veličiny X

$P(X < 5)$ není nic jiného než pouze plocha mezi funkcemi f_X a osou X na intervalu $(1, 5)$.

b

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{2}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{2}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} 2 \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b =$$
$$= \lim_{b\to\infty} 2 \cdot \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = \underline{\;2\;}$$

c

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx = \int_1^{\infty} x^2 \cdot \frac{2}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{2}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} 2 \cdot [2\ln x]_1^b =$$
$$= \lim_{b\to\infty} 2 \cdot (2\ln b - 2\ln 1) = \infty$$

$$\operatorname{var} X = EX^2 - (EX)^2 = \infty - 4 = \underline{\;\infty\;}$$

Poznámka: Všiml jsem si, že PDF f_X je speciální případ `Paretova rozdělení`.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha \cdot x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

pro parametry $\alpha = 2$, $x_0 = 1$. Nechť Y je náhodná veličina, která je rozdělena Paretovým rozdělením. Platí:

$$E(Y) = \begin{cases} \infty & \alpha \leq 1 \\ \dfrac{\alpha \cdot x_0}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{var}(Y) = \begin{cases} \infty & \alpha \in (1,2] \\ \left(\dfrac{x_0}{\alpha - 1}\right)^2 \cdot \dfrac{\alpha}{\alpha - 2} & \alpha > 2 \end{cases}$$

Což odpovídá předchozím výpočtům EX a $\operatorname{var} X$.

$\boxed{\textbf{d}}$

Nejprve spočítáme F_X.

$$F_X(t) = \begin{cases} \int_1^t 2/x^3\, dx & t \geq 1 \\ \int_{-\infty}^t 0\, dt = 0 & t < 1 \end{cases}$$

$$\int_1^t \frac{2}{x^3} = 2 \cdot \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^t = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

Teď bychom ze znalosti distribuční funkce chtěli generovat náhodné veličiny. Nechť:

- $U \sim R[0,1]$
- $H\colon [0,1] \to \mathbb{R}$

  $H(U) = X$

  H je neklesající a invertovatelná funkce

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon F_X(x) = P(X \leq x) = P(H(U) \leq x) = P\left[H^{-1}(H(U)) \leq H^{-1}(x)\right]$$
$$= P(U \leq H^{-1}(x)) = H^{-1}(x)$$

Dostáváme, že $\forall y \in [0,1]\colon H(y) = F_X^{-1}(y)$. Stačí tedy dostat U, spočítat $F_X^{-1}(U) = X$ a je hotovo. Chybí nám však zatím ta inverzní distribuční funkce ☺.
Z distribuční funkce víme, že $X \geq 1$. Budeme hledat inverzí funkci k $1 - \dfrac{1}{x^2}$

$$y = 1 - \frac{1}{\left(F_X^{-1}(y)\right)^2}$$

$$1 - y = \frac{1}{\left(F_X^{-1}(y)\right)^2}$$

$$\frac{1}{1-y} = \left(F_X^{-1}(y)\right)^2$$

$$F_X^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y}} \qquad y \in [0,1)$$

Poznámka: Případ $F_X^{-1}(y) = \cancel{-\frac{1}{\sqrt{1-y}}} \quad y \in [0,1)$ nás nezajímá. F_X^{-1} vrací náhodné veličiny, o kterých víme, že jsou alespoň 1.

Pro $y = 1$ dodefinujeme $F_X^{-1}(y) = \infty$. Což dává logický smysl, vzhledem k tomu, že $F_X^{-1}(y)$ vrací takové x, že $P(-\infty < X < x) \leq y$.

Finálně:

$$F_X^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-y}} & y \in [0,1) \\ \infty & y = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{e}}$

Řešeno ve Wolfram Mathematice 11.3.

```
Indicator[Condition_]:=If[Condition, 1, 0];

F[x_]:=Piecewise[{{1 - 1/x^2, x ≥ 1}, {0, x < 1}}];

f[x_]:=Piecewise[{{2/x^3, x ≥ 1}, {0, x < 1}}];

FInv[y_]:=Piecewise[{{1/Sqrt[1-y], y ≥ 0 ∧ y < 1}, {∞, y == 1}}];

n = 1000; (* nastavit 20, 100, 1000  *)

X = Table[FInv[RandomReal[]], {i, 1, n}];

FEmpirical[x_]:=1/n * Sum[Indicator[X[[k]] ≤ x], {k, 1, n}]

Plot[{F[x], FEmpirical[x]}, {x, 0, 5}, AxesLabel → {Style[x, 18], None},
 BaseStyle → {FontSize → 20}, PlotLegends → {Style["F_X(x)", 18],
 Style[OverHat["F_X"] "(x)", 18]},
 PlotLabel → StringForm["Porovnání CDF a ECDF (n = ``)", n]]

Average = 1/n * Sum[X[[k]], {k, 1, n}]
```

Obrázek 9: zdrojový kód

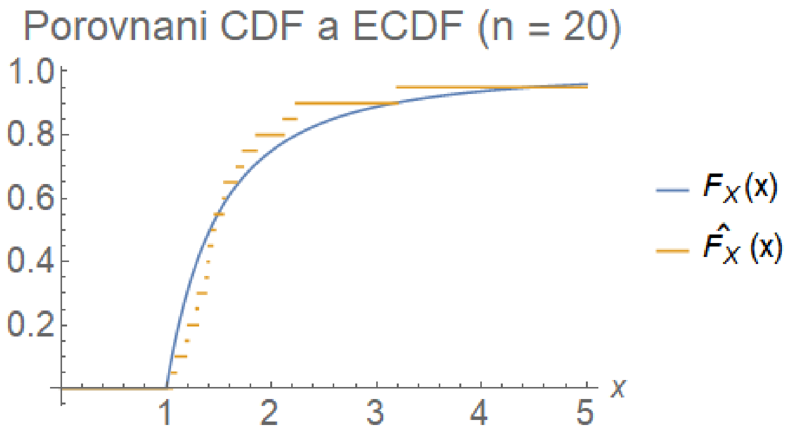
	$\overline{X_n}$		
n	20	100	1000
	1.53243	1.8398	2.15269
	1.59385	2.11342	1.98973
	1.88965	2.4047	2.106
	3.07	2.2107	1.97948
	1.69749	2.13945	2.26897
	1.7707	1.88066	1.89993
	2.05292	1.98504	1.9335
	1.66008	1.64479	1.93232
	1.9351	1.98355	1.88608
	2.13355	1.88512	1.91333

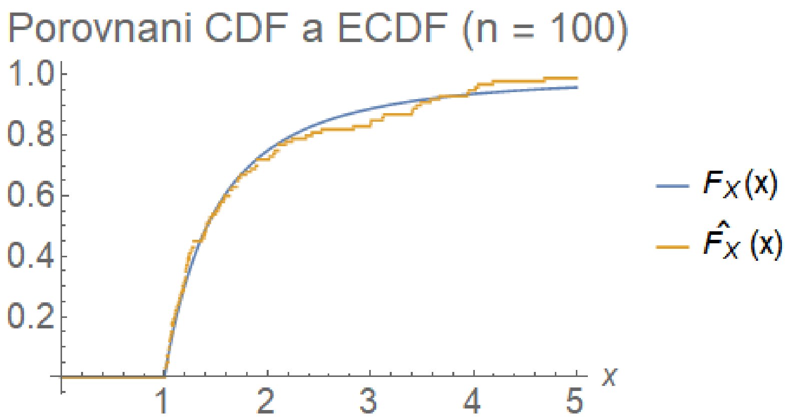
Obrázek 10: realizace výběrových průměrů $X_1, \ldots, X_n$

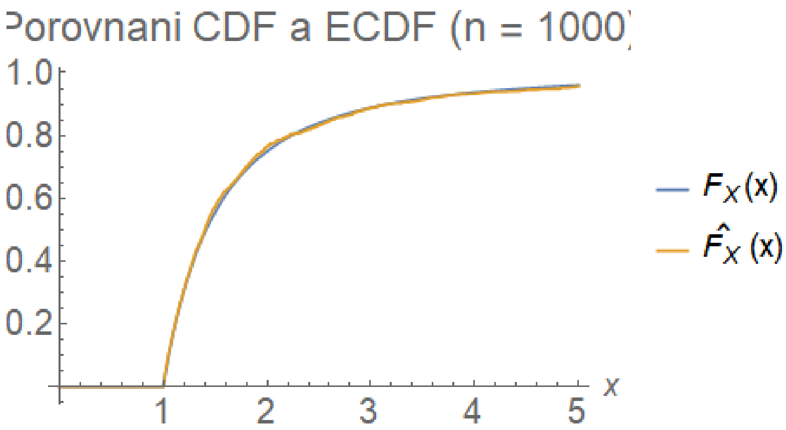
Považujme jednotlivé výběrové průměry za náhodné veličiny $Y_{i,j}$ (indexujme jako matici).

$\overline{Y_{*,1}}$	$\overline{Y_{*,2}}$	$\overline{Y_{*,3}}$
2.12161	2.00872	2.00620

Pozorujeme, že s rostoucí velikostí náhodného výběru se výběrový průměr náhodných veličin blíží ke střední hodnotě náhodné veličiny, ta je 2.







Na obrázcích porovnávající CDF a ECDF je patrná kvalita (nestranost a konzistence) odhadu CDF pomocí ECDF. S dostanečně velkým náhodným výběrem ($n = 1000$) se už jedná o velmi přesný odhad.