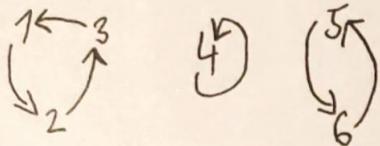


ÚLOHA č. 2

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (123)(4)(56)$$



\rightsquigarrow Řada cyklů je roven počtu pramenů cyklu. (Vrácíme se po výběru grafu do stejného vrcholu, dostaneme identické 'součet', který je neutralním prvkem S_n).

Problémem je, že φ je složena ze 3 cyklů, když jiné délky.

Triviale $(4)^n = \text{id}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $(123)^n = \text{id}$ $\forall n: 3 \mid n$, $(56)^n = \text{id}$ $\forall n: 2 \mid n$.
 Z toho $((123)(4)(56))^n = \text{id}$ $\forall n: (2 \mid n \wedge 3 \mid n)$, takové n je nejméně násobek 2 a 3. $\text{LCM}(2, 3) = 6$.

$$2019 = 6 \cdot 336 + 3 \text{ a tedy}$$

$$\varphi^{2019} = \varphi_0 \varphi_0 \varphi_0 \underbrace{\varphi_0 \dots \varphi_0}_{\# 2016} \varphi^3 = \varphi^3.$$

$\# 2016$
 $= \text{id}$

$$\varphi^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

ÚLOHA č. 1

b) Nechť G je grupa, $a, b, c \in G$ $(a, b) \in \text{ker } G \iff \exists \rho \in G: a = \rho b \rho^{-1}$.

Reflexivita: $(a, a) \in \text{ker } G \iff \exists \rho \in G: a = \rho a \rho^{-1}$, zvolime $\rho = e$.
 $eae^{-1} = eae = a$

Symetrie: $(a, b) \in \text{kon } G \Leftrightarrow \exists \rho \in G : a = \rho b \rho^{-1} \Leftrightarrow a\rho = \rho b$
 $\Leftrightarrow \rho^{-1} a \rho = b \underset{\delta := \rho^{-1}}{\Leftrightarrow} \delta a \delta^{-1} = b \Leftrightarrow b = \delta a \delta^{-1}$
 $\delta^{-1} = \rho$
 $\Leftrightarrow (b, a) \in \text{kon } G$

Transitivita: $(a, b) \in \text{kon } G, (b, c) \in \text{kon } G.$

$$\exists \rho \in G : a = \rho b \rho^{-1}, \exists \sigma \in G : b = \sigma c \sigma^{-1}$$

$$a = \rho \sigma c \sigma^{-1} \rho^{-1}, \text{ uvolime } \sigma := \rho \delta, \delta^{-1} = (\rho \delta)^{-1} = \delta^{-1} \rho$$

$$a = \sigma c \sigma^{-1} \Leftrightarrow (a, c) \in \text{kon } G$$

c) o (opence skladim 'soborem' je asociativum) ✓

Neutralni prvek: Neutralním prvkem všechno ke skladání 'soborem' je identita. Předpokládáme abstrakci, že $\text{id} \in \text{Con}(G)$.

$$\text{Con}(G) = \{\text{Cong} : g \in G\} \Rightarrow \text{Core} \in \text{Con}(G)$$

$$\text{Core} : G \rightarrow G$$

$$\text{Core}(h) = e \cdot h \cdot e^{-1} = h \Rightarrow \text{Core} = \text{id}$$

Inverzní prvek: Předpokládáme abstrakci, že existuje $(\text{Cong})^{-1} : \text{Cong} \rightarrow \text{Cong}$ tak, že $\text{Cong} \circ (\text{Cong})^{-1} = \text{id}$ a $(\text{Cong})^{-1} \circ \text{Cong} = \text{id}$.

$$\text{Inverz, } (\text{Cong})^{-1} = \text{Cong}^{-1}$$

$$(\text{Cong}^{-1} \circ \text{Cong})(h) = g^{-1} (g h g^{-1}) g = h$$

$$(\text{Cong} \circ \text{Cong}^{-1})(h) = g (g^{-1} h g) g^{-1} = h$$

Příčeky platí, že $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G$ a tedy

$$\text{Cong} \in \text{Con}(G) \Leftrightarrow \text{Cong}^{-1} \in \text{Con}(G)$$

a) $\pi_1, \rho \in S_n$ mají stejnou strukturu cyklu $\Rightarrow (\pi_1, \rho) \in \text{ker } S_n$.

Platí například pro $\pi \in S_n$, když transformuje cyklus π_1 na cyklus ρ .

Zapišme si cykly π_1 a ρ proti sobě od nejdéleho po nejkratší:

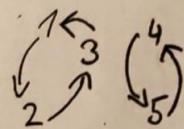
$$\begin{aligned}\pi_1 &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_e) \quad (\dots) \quad (\dots) \\ \rho &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_e) \quad (\dots) \quad (\dots)\end{aligned}$$

Definujeme si souborem 'množin' cyklů. Toto souborem je endenčně
bijektivní na $\{1, \dots, n\}$ odpovídající sledováním prvního. Platí, že $\underbrace{\pi_1 \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_1}_{\# h} = \rho$

Je permutace mají stejnou strukturu cyklu \Leftrightarrow grafy cyklu.

jsou izomorfia. Kladíme tedy podél izomorfických grafů k

Takových grafů je $\binom{5}{3} \binom{2}{1} = 20$



d) Uvědomte si, že relace „byl konjugován“ je ekvivalence.

$$\text{Con}(S_5)[M] = \bigcup_{m \in M} [m].$$

Platí, že $a \in S_5$ libovolný a definujme $M := [a]$. Potom platí,

$$\bigcup_{m \in M} [m] = [a] \subseteq M = [a]$$

$$P_2: \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 25 & 25 & 35 & \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \text{Počet izomorfických grafů je } \binom{5}{2} = 10.$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 25 & 25 & 35 & \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} & 45 \end{matrix}$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \pi \pi \pi$$

$$\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi \pi \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \pi$$

$$\pi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \pi \pi$$

$$\pi_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \pi \pi \pi$$

$$\pi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \pi \pi$$

$$\pi_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \pi \pi \pi$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \pi \pi \pi$$

Zvolme BUNO. $\pi_i := \pi_i$, $M = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9, \pi_{10}\}$.

$$\text{Con}(S_5)[M] = [\pi] = \{\pi_i \mid i \in \{1, \dots, 10\}\} \subseteq M$$

\uparrow důkazce =