Rotace

Mějme vektor $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ a vektor y: $y_j = x_{(j-c) \bmod n}$ (vzniklý z x rotací doprava o c prvků). Potom:

$$\forall j \in \{0, \ldots, n-1\}\colon\ (\mathrm{DFT}(x))_j = \omega_n^{j\cdot(n-c)} \cdot (\mathrm{DFT}(y))_j$$

Rozbor

x^i bude značit vektor vzniklý z x, rotací i prvků doprava.

Rozepišme si $\mathrm{DFT}(x)$ z definice:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{DFT}(x))_j &= x_0 \cdot \omega_n^{j\cdot 0} && + x_1 \cdot \omega_n^{j\cdot 1} + x_2 \cdot \omega_n^{j\cdot 2} && + \ldots + x_{n-1} \cdot \omega_n^{j\cdot(n-1)} \\
\left(\mathrm{DFT}(x^1)\right)_j &= x_{n-1} \cdot \omega_n^{j\cdot 0} && + x_0 \cdot \omega_n^{j\cdot 1} + x_1 \cdot \omega_n^{j\cdot 2} && + \ldots + x_{n-2} \cdot \omega_n^{j\cdot(n-1)} \\
\left(\mathrm{DFT}(x^2)\right)_j &= x_{n-2} \cdot \omega_n^{j\cdot 0} && + x_{n-1} \cdot \omega_n^{j\cdot 1} + x_0 \cdot \omega_n^{j\cdot 2} && + \ldots + x_{n-3} \cdot \omega_n^{j\cdot(n-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\forall p \in \{0, \ldots, n-1\}\colon \\
&\qquad (\mathrm{DFT}(x^p))_j = x_{n-p} \cdot \omega_n^{j\cdot 0} + x_{n-p+1} \cdot \omega_n^{j\cdot 1} + x_{n-p+2} \cdot \omega_n^{j\cdot 2} + \ldots + x_{n-p-1} \cdot \omega_n^{j\cdot(n-1)}
\end{aligned}$$

Porozujeme, že s „posunutím" koeficientů vektoru o jednu pozici doprava by bylo potřeba o jednu pozici doleva „posunout" i primitivní odmocniny. Což je možné alternativně interpretovat jako posunutí o $n-1$ pozic doprava.

Při posunutí o c pozic bychom potřebovali „posunout" odmocniny o $n-c$ pozic. Toho je možné docílit, protože platí $\omega_n^{n+c} = \omega_n^n \cdot \omega_n^c = \omega_n^c$.

$$\begin{aligned}
\omega_n^{j\cdot(n-1)} \cdot \left(\mathrm{DFT}(x^1)\right)_j &= \omega_n^{j\cdot(n-1)} \cdot \left(x_{n-1} \cdot \omega_n^{j\cdot 0} + x_0 \cdot \omega_n^{j\cdot 1} + \ldots + x_{n-2} \cdot \omega_n^{j\cdot(n-1)}\right) &&= (\mathrm{DFT}(x))_j \\
\omega_n^{j\cdot(n-2)} \cdot \left(\mathrm{DFT}(x^2)\right)_j &= \omega_n^{j\cdot(n-2)} \cdot \left(x_{n-2} \cdot \omega_n^{j\cdot 0} + x_{n-1} \cdot \omega_n^{j\cdot 1} + \ldots + x_{n-3} \cdot \omega_n^{j\cdot(n-1)}\right) &&= (\mathrm{DFT}(x))_j
\end{aligned}$$

$\forall p \in \{0, \ldots, n-1\}\colon$

$$\omega_n^{j\cdot(n-p)} \cdot (\mathrm{DFT}(x^p))_j = \omega_n^{j\cdot(n-p)} \cdot \left(x_{n-p} \cdot \omega_n^{j\cdot 0} + x_{n-p+1} \cdot \omega_n^{j\cdot 1} + \ldots + x_{x-p-1} \cdot \omega_n^{j\cdot(n-1)}\right) = (\mathrm{DFT}(x))_j$$