Algebra I., úkol č. 5

Úloha č.1

Buď $\left(G, \cdot, e, ^{-1}\right)$ grupa a $M \subseteq G$ nějaká její neprázdná podmnožina (tj. ne nutně podgrupa). *Podgrupou generovanou množinou* M nazveme podgrupu $\langle M \rangle = \bigcap H$, kde $H \leq G$ a zároveň $M \subseteq H$, tedy podgrupa generovaná množinou M je nejmenší podgrupou v G obsahující tuto množinu.

Dokažte, že platí zároveň popis „zevnitř“: $\langle M \rangle = \left\{ m_1^{i_1} \cdots m_n^{i_n} \mid m_k \in M, i_k = \pm 1, k = 1, \dots, n; n \in \mathbb{N} \right\}$.

(2 body)

Úloha č.2

Popište podgrupy generované zadanou množinou M_i v dané grupě G_i:

a) $M_a = \{12, 18, 22\}$, $G_a = (\mathbb{Z}_{24}, +)$

b) $M_b = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $G_b = GL_3(\mathbb{R}) = (\{\text{matice } 3 \times 3 \text{ s prvky v } \mathbb{R} \text{ a nenulovým determinantem}\}, \times)$, kde $\times$ značí maticové násobení

(2 body)

Úloha č. 3

Určete, kolik existuje grupových homomorfismů $\Phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{1400}$ takových, že $|\Phi(\mathbb{Z})| = 200$.

(2 body)