

Algebra I., úkol č. 7

Úloha č. 1

Bud' A komutativní grupa a označme $T(A) = \{a \in A \mid a \text{ má konečný řád}\}$. Ukažte, že pak nemá odpovídající faktorová grupa $A/T(A) (= A/\text{rmod } T(A))$ prvky konečného řádu.

(1 bod)

Úloha č. 2

Ukažte, že pro každé prvočíslo p a přirozené číslo k existuje v grupě \mathbb{Q}/\mathbb{Z} prvek řádu p^k .

(1 bod)

Úloha č. 3 - Akce grupy na množině; příprava na příští cvičení

Bud' G grupa a X neprázdná množina. Každý homomorfismus $f : G \rightarrow \mathbb{S}(X)$ nazveme *akcí grupy G na množině X* (představa může být taková, že každému prvku $g \in G$ odpovídá nějaké „zpřeházení“ prvků množiny X , tedy bijekce na X).

Pro pevně zvolenou akci f_0 a prvek $x \in X$ definujeme *orbitu x* při akci f_0 jako množinu $O_{f_0, x} = \{y \in X \mid \exists g \in G (f_0(g))(x) = y\}$; $f_0(g)$ je totiž nějaká permutace na X , tudíž má smysl ptát se na obraz x při permutaci $f_0(g)$. Dále definujeme *stabilizátor* prvku x jako množinu $S_{f_0, x} = \{g \in G \mid (f_0(g))(x) = x\}$.

a) Ukažte, že stabilizátor nějakého prvku $x \in X$ je vždy podgrupa v G .

(1 bod)

b) Necht' grupa $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ všech regulárních matic 2×2 s prvky v \mathbb{Z}_3 s maticovým násobením působí sama na sobě

1) translací tj. akce je dána homomorfismem $\tau : g \mapsto \text{trans}_g$; $\text{trans}_g(h) = g \cdot h$ pro $g, h \in GL_2(\mathbb{Z}_3)$

2) konjugací, tj. akce je dána homomorfismem $\kappa : g \mapsto \text{Con}_g$; $\text{Con}_g(h) = g \cdot h \cdot g^{-1}$ pro $g, h \in GL_2(\mathbb{Z}_3)$.

Spočtěte pro oba případy stabilizátor, resp. orbitu matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ v případě 1).

(2 body)

(+ 2 extra body za orbitu v případě 2))