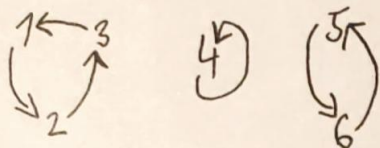


ÚLOHA č. 2

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (123)(4)(56)$$



\* Řád cyklu je roven počtu prvků cyklu. (Vstoupíme se po šipkách grafu do stejného vrcholu, dostaneme identické 'sdružení', které je neutrálním prvkem  $S_n$ ).

Problémem je, že  $\varphi$  je složena ze 3 cyklů, každý jiné délky.

Triviálně  $(4)^m = \text{id} \quad \forall m \in \mathbb{N}$ ,  $(123)^m = \text{id} \quad \forall m: 3|m$ ,  $(56) = \text{id} \quad \forall m: 2|m$ .  
 2. Proto  $((123)(4)(56))^m = \text{id} \quad \forall m: (2|m \wedge 3|m)$ , takže  $m$  je společný násobek 2 a 3.  $\text{LCM}(2,3) = 6$ .

$$2019 = 6 \cdot 336 + 3 \text{ a tedy}$$

$$\varphi^{2019} = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi}_{\substack{\# 2016 \\ = \text{id}}} = \varphi^3$$

$$\varphi^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

ÚLOHA č. 1

b) Necht'  $G$  je grupa,  $a, b, c \in G$   $(a, b) \in \text{kon } G \iff \exists p \in G: a = p b p^{-1}$ .

Reflexivita:  $(a, a) \in \text{kon } G \iff \exists p \in G: a = p a p^{-1}$ , zvolíme  $p = e$ .  
 $e a e^{-1} = e a e = a$

$$\begin{aligned} \text{Symetrie: } (a, b) \in \text{kon } G &\Leftrightarrow \exists p \in G: a = pbp^{-1} \Leftrightarrow ap = pb \\ &\Leftrightarrow p^{-1}ap = b \Leftrightarrow \underset{\substack{\delta := p^{-1} \\ \delta^{-1} = p}}{\delta a \delta^{-1}} = b \Leftrightarrow b = \delta a \delta^{-1} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (b, a) \in \text{kon } G$$

Transitivita:  $(a, b) \in \text{kon } G, (b, c) \in \text{kon } G$ .

$$\exists p \in G: a = pbp^{-1}, \exists \delta \in G: b = \delta c \delta^{-1}$$

$$\begin{aligned} a &= p \delta c \delta^{-1} p^{-1}, \text{ zvolíme } \sigma := p \delta, \sigma^{-1} = (\delta^{-1} p^{-1}) = \delta p^{-1} \\ a &= \sigma c \sigma^{-1} \Leftrightarrow (a, c) \in \text{kon } G \end{aligned}$$

c) 0 (opence skládání sčítáním je asociativní) ✓

Neutrální prvek: Neutrálním prvkem vzhledem ke skládání sčítáním je identita. Potřebujeme ukázat, že  $\text{id} \in \text{Con}(G)$ .

$$\text{Con}(G) = \{\text{Cong} : g \in G\} \Rightarrow \text{Cong} e \in \text{Con}(G)$$

$$\text{Cong} e : G \rightarrow G$$

$$\text{Cong}(h) = e \cdot h \cdot e^{-1} = h \Rightarrow \text{Cong} e = \text{id}$$

Inverzní prvek: Potřebujeme ukázat, že existuje  $(\text{Cong})^{-1} \circ \text{Cong} = \text{id}$  a  $\text{Cong} \circ (\text{Cong})^{-1} = \text{id}$ .

$$\text{Ukázat, že } (\text{Cong})^{-1} = \text{Cong}^{-1}.$$

$$(\text{Cong}^{-1} \circ \text{Cong})(h) = g^{-1}(ghg^{-1})g = h$$

$$(\text{Cong} \circ \text{Cong}^{-1})(h) = g(g^{-1}hg)g^{-1} = h$$

Přičemž platí, že  $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G$  a tedy

$$\text{Cong} \in \text{Con}(G) \Leftrightarrow \text{Cong}^{-1} \in \text{Con}(G)$$

a)  $\pi, \rho \in S_n$  majú stejnou strukturu cyklů  $\Rightarrow (\pi, \rho) \in \text{kon } S_n$ .

Platí: najít prvek  $h \in S_n$ , který transformuje cyklus  $\pi$  na cyklus  $\rho$ .

Zapíšeme si cyklus  $\pi$  a  $\rho$  proti sobě od nždělníků po nejkratší:

$$\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_e) \quad (\dots) \quad (\dots)$$

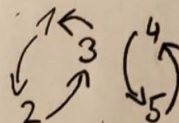
$$\rho = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_e) \quad (\dots) \quad (\dots)$$

Definujeme si polrozměrné násobné šipkami. To je polrozměrné je evidentně  
bijece na  $\{1, \dots, n\}$  odpovídající hledanému prvku  $h$ . Platí, že  $\underbrace{\pi \circ \pi \circ \dots \circ \pi}_{\#h} = \rho$

De permutace mají stejnou strukturu cyklů  $\Leftrightarrow$  grafy cyklů

jsou isomorfní. Hledáme tedy počet isomorfních grafů  $k$

Takových grafů je  $\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} = \underline{20}$



d) Víme, že relace "být konjugována" je ekvivalence.

$$\text{Con}(S_n)[M] = \bigcup_{m \in M} [m].$$

Platí: exist  $a \in S_n$  libovolný a definovat  $M := [a]$ . Podobně platí,

$$\bigcup_{m \in M} [m] = [a] \subseteq M = [a]$$

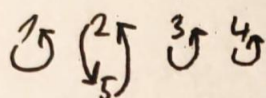
$$P_2: \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$  Počet isomorfních grafů je  $\binom{5}{2} = 10$ .

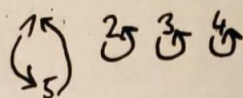
$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

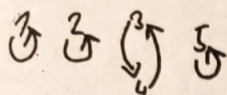
$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$



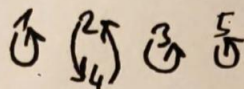
$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$



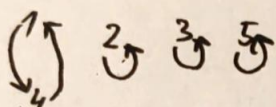
$$\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$



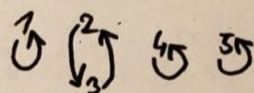
$$\pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$



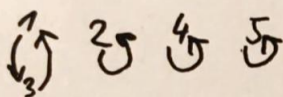
$$\pi_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$



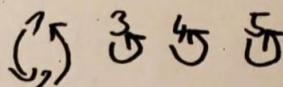
$$\pi_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$



$$\pi_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$



$$\pi_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$



Isolme BU'NO.  $\pi_i := \pi_i$ ,  $M = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9, \pi_{10}\}$ .

$$\text{Con}(S_5)[M] = [\pi] = \{\pi_i \mid i \in \{1, \dots, 10\}\} \subseteq M$$

$\uparrow$   
deforce =