

### Algebra I., úkol č. 3

Grupy všech permutací na  $n$  prvcích ( $n \geq 2$ ) s operací skládání permutací označme  $\mathbb{S}_n$ .

#### Úloha č. 1

- a) Pro prvky  $\tau, \rho, \pi$  libovolné grupy nazveme prvek  $\tau = \rho\pi\rho^{-1}$  *konjugací prvku  $\pi$  prvkem  $\rho$*  a prvek  $\tau$  je pak s prvkem  $\pi$  *konjugovaný*. Určete počet všech permutací v  $\mathbb{S}_5$ , které jsou konjugované s permutací  $(1\ 2\ 3)(4\ 5)$ .
- b) Ukažte, že relace „být konjugovaná“ je ekvivalencí na  $\mathbb{S}_n$ .

Na konjugaci prvkem  $g \in G$  v libovolné grupě  $(G, \cdot, e)$  můžeme nahlížet i jako na unární operaci

$$\begin{aligned} \text{Con}_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto g \cdot h \cdot g^{-1}. \end{aligned}$$

- c) Ukažte, že pro každou grupu  $(G, \cdot, e)$  tvoří množina  $\text{Con}(G) := \{\text{Con}_g \mid g \in G\}$  grupu s operací skládání zobrazení (na konjugace lze nahlížet i jako na zobrazení).
- d) Najděte nějakou vlastní alespoň dvouprvkovou podmnožinu  $M$  grupy  $\mathbb{S}_5$ , pro kterou platí  $\text{Con}(\mathbb{S}_5)[M] \subseteq M$ , kde definujeme  $\text{Con}(\mathbb{S}_5)[M] := \{\text{Con}_g(m) \mid g \in \mathbb{S}_5; m \in M\}$ .

(4 × 1 bod)

#### Úloha č. 2

Bud'  $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_6$ . Určete  $\varphi^{2019}$ . (Svůj postup / oprávněnost postupu zdůvodněte.)

(1 bod)