JAKUB LEVÝ

ÚLOHA č. 1

Ukážeme, že $T(A)$ je podgrupa A.

Nechť $x, y \in T(A)$, x a y mají konečný řád, tj. $\exists\, m, n \in \mathbb{N} : x^m = e,\ y^n = e$.

Uzavřenost operace $\cdot$: $(x \cdot y)^{mn} \underset{\text{komutativita}}{=} x^{mn} \cdot y^{mn} = (x^m)^n \cdot (y^n)^m = e^n \cdot e^m = e$

Tedy $x \cdot y$ má také konečný řád a proto $x \cdot y \in T(A)$

Uzavřenost operace $^{-1}$: $(x^{-1})^m = (x^m)^{-1} = e^{-1} = e$

Tedy x^{-1} má konečný řád a proto $x^{-1} \in T(A)$

Víme, že $T(A) \subseteq A$ a $T(A)$ je uzavřená na $\cdot$, $^{-1}$ $\Rightarrow T(A) \leq A$.

Víme, že A je komutativní grupa $\Rightarrow A/T(A)$ je komutativní grupa

$\Rightarrow$: $A/T(A) = \{aT(A) : a \in A\}$. Nechť $a_1T(A), a_2T(A) \in A/T(A)$. Potom

$(a_1T(A)) \cdot (a_2T(A)) = a_1a_2T(A) \underset{\text{komutativita}}{=} a_2a_1T(A) = (a_2T(A)) \cdot (a_1T(A))$

$\Rightarrow A/T(A)$ je komutativní

Nechť nyní $a \in A$, označme $\hat{a} := aT(A) \in A/T(A)$. Předpokládejme, že $\hat{a}$ má konečný řád. Budeme chtít ukázat, že $\hat{a} = \hat{e} \in A/T(A)$.

(Dále budeme značit prvky $A/T(A)$ se stříškou a prvky A bez stříšky)

Protože $\hat{a}$ má konečný řád, tak existuje n takové, že $\hat{a}^n = \hat{e}$. Z čehož plyne: $a^n T(A) = T(A) \Rightarrow a^n \in T(A)$.

Víme, že každý prvek $T(A)$ má konečný řád přímo z definice $T(A)$. Tj. $\exists\, m \in \mathbb{N} : (a^n)^m = e \Rightarrow a^{nm} = e \Rightarrow a$ má konečný řád $\Rightarrow a \in T(A)$.

Dostáváme, že $\hat{a} = aT(A) = T(A) = \hat{e}$. Tedy každý prvek konečného řádu grupy $A/T(A)$ je roven $\hat{e} \Rightarrow \forall \hat{a} \in A/T(A) : \hat{a} \neq \hat{e} \Rightarrow \hat{a}$ má nekonečný řád.

ÚLOHA č. 3

Pro pohodlí budeme značit hodnotu permutace $f_0(g)$ na prvku x krátce $g(x)$.

a) $S_{f_0,x} = \{g \in G : (f_0(g))(x) = x\} = \{g \in G : g(x) = x\}$

Jistě $e \in S_{f_0,x}$, protože $e(x) = id(x) = x$

Uzavřenost: Nechť $g, h \in S_{f_0,x} \Rightarrow g(x) = h(x) = x$. Potom však $\underbrace{g^{-1}(x)}_{\text{inverzní permutace}} = x$

a $(g \cdot h)(x) = g(h(x)) = x$

Čímž jsme ukázali, že $S_{f_0,x}$ je uzavřená na všechny operace grupy.

b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) $S_{\pi,X} = \{g \in GL_2(\mathbb{Z}_3) \mid (\pi(g))(X) = X\} = \{g \in GL_2(\mathbb{Z}_3) \mid \text{násob}_g(X) = X\}$

$= \{g \in GL_2(\mathbb{Z}_3) \mid g \cdot X = X\} = \{g \in GL_2(\mathbb{Z}_3) \mid g \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\} =$

$= \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_3) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\}$

Vyřešíme:

$a \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow a = 3\alpha + 1, \alpha \in \mathbb{Z}$

$c \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow c = 3\gamma, \gamma \in \mathbb{Z}$

$2a + 2b \equiv 2 \pmod 3$

$2c + 2d \equiv 2 \pmod 3$

$b \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow b = 3\beta, \beta \in \mathbb{Z}$

$d \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow d = 3\delta + 1, \delta \in \mathbb{Z}$

$S_{\pi,\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \{\begin{pmatrix} 3\alpha+1 & 3\beta \\ 3\gamma & 3\delta+1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_3) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}\} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

Ověříme, že $\det\begin{pmatrix} 3\alpha+1 & 3\beta \\ 3\gamma & 3\delta+1 \end{pmatrix} \neq 0$.

$O_{\pi,X} = \{\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_3) \mid \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_3) : \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\text{reg}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{reg}} = \underbrace{\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}}_{= \text{reg}}\} = GL_2(\mathbb{Z}_3)$