Algebra I., Úkol č. 1

Úloha č.1

Pro libovolné zobrazení na neprázdné množině $f : M \to M$ definujeme relaci $\ker f \subseteq M \times M$ předpisem $(m_1; m_2) \in \ker f \Leftrightarrow f(m_1) = f(m_2)$.

Buď $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení dané předpisem $L(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$ a na množině $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ uvažujme odpovídající relaci $\ker L$.

Ukažte, že se jedná o ekvivalenci (rozmyslete si, jak tato vlastnost závisí na vlastnostech relace rovnosti), určete (geometricky popište) rozkladové třídy a určete nějakou transverzálu rozkladu.

(Pozn. Transverzála ekvivalence ρ na množině M je taková podmnožina $T \subseteq M$, že $\bigcup_{t \in T} [t]_\rho = M$ a $[t_1]_\rho \cap [t_2]_\rho = \emptyset$ pro $t_1 \neq t_2$.)

(2 body)

Úloha č.2

Celočíselnou mříží v $\mathbb{R}^d$ nazveme podmnožinu $M \subseteq \mathbb{R}^d$ složenou z bodů tvaru $\{(m_1, \ldots, m_d) \mid m_1, \ldots m_d \in \mathbb{Z}\}$.

Najděte všechny průsečíky přímky $y = 8/21 - 34/21x$ s celočíselnou mříží v $\mathbb{R}^2$.

(2 body)

Úloha č.3

Určete, pro které hodnoty parametrů $a, b, c \in \mathbb{Q}$ je množina všech racionálních řešení (braných jako třídimenzionální vektory) soustavy rovnic

$$\begin{cases} 3x + 5y + z = a \\ 7x + 2y + 4z = b \\ -6x + 3y + 2z = c \end{cases}$$

uzavřená na vektorové sčítání.

(1 bod)