Zadání

Pomocí simplexové metody nalezněte nejprve přípustné bázické řešení a následně i optimální řešení následující úlohy:

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizuj} & 4x_1 + x_3 + x_4 \\ \text{za podmínek} & 8x_1 - 5x_3 - x_4 = 40 \\ & 4x_2 - x_3 - x_4 = 24 \\ & x_3 + x_5 = 8 \\ & -2x_3 + x_4 + x_6 = 8 \\ & x_1, \dots, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Řešení

Lineární program je zadán v rovnicovém tvaru s vektorem pravých stran $b = \begin{pmatrix} 40 \\ 24 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$, $b \geq 0$.

Abychom mohli simplexovou metodou najít optimální řešení, potřebujeme najít přípustné bázické řešení. To nalezneme vyřešením pomocného programu:

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizuj} & -p_1 - p_2 - p_3 - p_4 \\ \text{za podmínek} & 8x_1 - 5x_3 - x_4 + p_1 = 40 \\ & 4x_2 - x_3 - x_4 + p_2 = 24 \\ & x_3 + x_5 + p_3 = 8 \\ & -2x_3 + x_4 + x_6 + p_4 = 8 \\ & x_1, \dots, x_6, p_1, \dots, p_4 \geq 0 \end{array}$$

U pomocného programu víme přípustnou bázi. Můžeme postupovat simplexovou metodou:

$$\begin{aligned} p_1 &= 40 - 8x_1 + 5x_3 + x_4 \\ p_2 &= 24 - 4x_2 + x_3 + x_4 \\ p_3 &= 8 - x_3 - x_5 \\ p_4 &= 8 + 2x_3 - x_4 - x_6 \\ \hline z &= -80 + 8x_1 + 4x_2 - 7x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= 8 - x_3 - p_3 \\ p_1 &= 40 - 8x_1 + 5x_3 + x_4 \\ p_2 &= 24 - 4x_2 + x_3 + x_4 \\ p_4 &= 8 + 2x_3 - x_4 - x_6 \\ \hline z &= -72 + 8x_1 + 4x_2 - 8x_3 - x_4 + x_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_6 &= 8 + 2x_3 - x_4 - p_4 \\ x_5 &= 8 - x_3 - p_3 \\ p_1 &= 40 - 8x_1 + 5x_3 + x_4 \\ p_2 &= 24 - 4x_2 + x_3 + x_4 \\ \hline z &= -64 + 8x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 - p_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{40 + 5x_3 + x_4 - p_1}{8} \\ x_6 &= 8 + 2x_3 - x_4 - p_4 \\ x_5 &= 8 - x_3 - p_3 \\ p_2 &= 24 - 4x_2 + x_3 + x_4 \\ \hline z &= -24 + 4x_2 - x_3 - x_4 - p_1 - p_4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{24 + x_3 + x_4 - p_2}{4} \\
x_6 &= 8 + 2x_3 - x_4 - p_4 \\
x_5 &= 8 - x_3 - p_3 \\
x_1 &= \frac{40 + 5x_3 + x_4 - p_1}{8} \\
z &= 0 + -p_1 - p_2 - p_4
\end{aligned}
$$

Hodnota účelové funkce již nejde zvýšit a její hodnota je 0, původní lineární program má optimální řešení. Z tabulky dostáváme přístupné bázické řešení původního LP $(5, 6, 0, 0, 8, 8)$.

Odstraněním sloupců obsahující libovolnou proměnnou p_i z předchozí tabulky a nahrazením účelové funkce za původní dostáváme první simplexovou tabulku původního LP:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{40 + 5x_3 + x_4}{8} \\
x_2 &= \frac{24 + x_3 + x_4}{4} \\
x_5 &= 8 - x_3 \\
x_6 &= 8 + 2x_3 - x_4 \\
z &= 20 + \frac{7}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 8 - x_5 \\
x_1 &= \frac{80 - 5x_5 + x_4}{8} \\
x_2 &= \frac{32 - x_5 + x_4}{4} \\
x_6 &= 24 - 2x_5 - x_4 \\
z &= 48 - \frac{7}{2}x_5 + \frac{3}{2}x_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 24 - 2x_5 - x_6 \\
x_3 &= 8 - x_5 \\
x_1 &= \frac{104 - 7x_5 - x_6}{8} \\
x_2 &= \frac{56 - 3x_5 - x_6}{4} \\
z &= 84 - \frac{13}{2}x_5 - \frac{3}{2}x_6
\end{aligned}
$$

Hodnota účelové funkce již nejde zvýšit a její hodnota je 84, nalezli jsme optimální řešení. K tomuto řešení odpovídá přípustné bázické řešení $(13, 14, 8, 24, 0, 0)$.