Fourierovy obrazy

Jednotlivé obrazy jsou spočteny přímo z definice DFT. Pro výpočet užitečné jsou následující dvě lemmata:

Lemma (součtové): Nechť $n, j \in \mathbb{N}$, j není dělitelné n. Potom:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_n^j\right)^k = 0$$

Důkaz: Tupě je možné třeba sečíst geometrickou řadu.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_n^j\right)^k = \frac{(\omega_n^j)^n - 1}{\omega_n^j - 1} = \frac{(\omega_n^n)^j - 1}{\omega_n^j - 1} = \frac{1^j - 1}{\omega_n^j - 1} = 0$$

Lemma (půlící): Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom:

$$\omega_n^{n/2} = \omega_2 = -1$$

Důkaz: $\left(\omega_n^{n/2}\right)^2 = 1$. $\omega_n^{n/2} = -1$ nebo $\omega_n^{n/2} = 1$. Přicemž druhý případ není možný, protože ω_n je primitivní n-tá odmocnina z 1.

V následujících příkladech 1. – 3. předpokládejme následující:

- $|x| = n$
- y je Fourierův obraz x
- $|y| = n$

1. $x = (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)$

Pozorování: n je sudé.

Přímo z definice máme: $y_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \omega_n^{kj}$.

Rozepsáním sumy dostaneme: $y_j = x_0 \cdot \omega_n^{0j} + x_2 \cdot \omega_n^{2j} + x_4 \cdot \omega_n^{4j} + \dots + x_{n-2} \cdot \omega_n^{(n-2)j}$.

Ekvivalentně: $y_j = \sum_{k=0}^{n/2-1} \omega_n^{2kj} = \sum_{k=0}^{n/2-1} \left(\omega_n^{2j}\right)^k$. Nyní můžeme použít součtové lemma.

Zjistíme, že suma je rovna 0 pro všechna j vyjma dvou případů: $j = 0$ a $j = n/2$. Na první případ součtové lemma nefunguje, protože j není přirozené číslo. V druhém případě je $2j$ dělitelné n, což porušuje předpoklad lemmatu.

Víme tedy, že: $y = (y_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{\#n/2-1}, y_{n/2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\#n/2-1})$. Zbývá ručně dopočítat y_0 a $y_{n/2}$.

$$y_0 = \sum_{k=0}^{n/2-1} \omega_n^0 = \frac{n}{2}$$

$$y_{n/2} = \sum_{k=0}^{n/2-1} \omega_n^{2(n/2)\cdot k} = \sum_{k=0}^{n/2-1} (\omega_n^n)^k = \sum_{k=0}^{n/2-1} 1^k = \frac{n}{2}$$

Dostáváme, že Fourierův obraz x je: $y = (n/2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\#n/2-1}, n/2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\#n/2-1})$.

2. $x = (1, -1, 1, \ldots, 1, -1)$

Pozorování: n je sudé.

Z definice víme, že: $y_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \omega_n^{kj}$.

Hned je vidět, že $y_j = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \omega_n^{kj}$.

Rozepsáním sumy dostaneme: $y_j = \omega_n^{0j} - \omega_n^{j} + \omega_n^{2j} - \omega_n^{3j} + \ldots - \omega_n^{(n-1)j}$.

Seskupením sudých a lichých mocnin:

$$y_j = \omega_n^{0j} + \omega_n^{2j} + \omega_n^{4j} + \ldots + \omega_n^{(n-2)j} - (\omega_n^{j} + \omega_n^{3j} + \omega_n^{5j} + \ldots + \omega_n^{(n-1)j})$$

$$y_j = \underbrace{\overbrace{\sum_{k=0}^{n/2-1} \omega_n^{2kj}}^{y_{j,1}}}_{1.} - \overbrace{\sum_{k=0}^{n/2-1} \omega_n^{(2k+1)j}}^{y_{j,2}}$$

$$y_j = y_{j,1} + y_{j,2}$$

Po zbytek příkladu nás bude zajímat pouze druhá suma.

Upravíme si sumu do tvaru, abychom mohli použít součtové lemma.

$\sum_{k=0}^{n/2-1} \omega_n^{(2k+1)j} = \sum_{k=0}^{n/2-1} \left(\omega_n^{2j+j/k}\right)^k$

Případ, kdy $j = 0$ vyřešíme později zvlášť. Narozdíl od příkladu 1., zde není tak jednoduše vidět, kdy $2j + j/k$ je dělitelné n.

$$\frac{2j + \frac{j}{k}}{n} = \frac{\frac{2jk}{k} + \frac{j}{k}}{n} = \frac{2jk + j}{kn} = \frac{j(2k+1)}{kn}$$

Z toho tvaru již vidíme, že $2j + j/k$ je dělitelné n pouze pro $j = n/2$.

Získali jsme dva případy ($j = 0$ a $j = n/2$), ve kterých nevím hodnotu $y_{j,2}$. Ve všech ostatních případech ze součtového lemmatu platí, že $y_{j,2} = 0$.

$$y_{n/2,2} = \sum_{k=0}^{n/2-1} \omega_n^{(2k+1)\cdot(n/2)} = \sum_{k=0}^{n/2-1} \omega_n^{kn+n/2} = \sum_{k=0}^{n/2-1} \omega_n^{kn} \cdot \omega_n^{n/2} = \sum_{k=0}^{n/2-1} (\omega_n^{n})^k \cdot \omega_2 = -\frac{n}{2}$$

$$y_{0,2} = \sum_{k=0}^{n/2-1} \omega_n^{0} = \frac{n}{2}$$

Teď už známe:

$$y_{j,2} = (n/2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\#n/2-1}, -n/2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\#n/2-1})$$

$$y_{j,1} = (n/2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\#n/2-1}, \quad n/2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\#n/2-1}) \quad \text{(z předchozího příkladu)}$$

Přičemž $y_j = y_{j,1} - y_{j,2}$.
Fourierův obraz x je: $y = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{\#n/2}, n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\#n/2-1})$.

3. $x = (\omega_n^0, \omega_n^1, \ldots, \omega_n^{n-1})$, kde $\omega_n = \mathrm{e}^{2\pi i/n}$

Pozorování: n je sudé nebo liché.
Z definice: $y_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \omega_n^{kj} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k \cdot \omega_n^{kj} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_n^{1+j}\right)^k$.

Okamžitě je vidět, že $1 + j$ je dělitelné n pokud $j = n - 1$. Pro všechna ostatní j je suma rovna 0. Zbývá tedy spočítat kolik je y_{n-1} a je hotovo.

$$y_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_n^{1+n-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^n)^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n$$

Fourierův obraz vektoru x je: $y = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{\#n-1}, n)$.