JAKUB LEVÝ

ÚLOHA č. 3

$|G:H| = \frac{|G|}{|H|} \geq 1.$

Pokud $|G:H| = 1 = |G/\text{rmod } H| = |G/\text{lmod } H|$

$G = \dot{\bigcup}_{A \in G/\text{rmod } H} A \implies G/\text{rmod } H = \{G\} = G/\text{lmod } H$ (definice normality se ověří)

Pokud $|G:H| = 2$

Nechť $g \in H$, potom $gH = H = Hg \iff G/\text{lmod } H = G/\text{rmod } H$

Nechť $g \in G \setminus H$, potom $G/\text{lmod } H = \{H, gH\}$.

Vzhledem k tomu, že $G = \dot{\bigcup}_{A \in G/\text{rmod } H} A$ tak $gH = G \setminus H$.

Analogicky: $G/\text{rmod } H = \{H, Hg\} \implies Hg = G \setminus H$.

a tedy $K = Hg = gH$, $G/\text{lmod } H = \{H, K\} = G/\text{rmod } H$

ÚLOHA č. 2

Využijeme opakovaně Lagrangeovu větu.

$$\left.\begin{array}{l} |G| = 60 \\ |H| = 5 \end{array}\right\} \implies |G:H| = \frac{|G|}{|H|} = 12$$

$$|G:K| = 5 \implies |K| = 12$$

$$H \leq G,\ K \leq G \implies H \cap K \leq G,\ H \cap K \leq H,\ H \cap K \leq K$$

$$\left.\begin{array}{l} |G : H \cap K| = \frac{60}{|H \cap K|} \\ |H : H \cap K| = \frac{5}{|H \cap K|} \\ |K : H \cap K| \ \frac{12}{|H \cap K|} \end{array}\right\}$$

Řád podgrupy dělí řád grupy $\implies |H \cap K| \mid 60 \ \wedge \ |H \cap K| \mid 5 \ \wedge \ |H \cap K| \mid 12$

ale $GCD(60, 12, 5) = 1 \implies |H \cap K| = 1$

Existuje pouze jediná grupa řádu 1, triviální, a tedy $H \cap K = \{e\}$.

$\implies H \cap K$ je komutativní.

ÚLOHA č. 1

Nech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, potom $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/a & -b/a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nech $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

Potom $(A,B) \in \mathrm{lmod}\, H \iff \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \alpha/a & \frac{\beta - b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\in H} \iff \beta = b.$

$(A,B) \in \mathrm{rmod}\, H \iff \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\alpha & -\beta/\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a/\alpha & b - \frac{a\beta}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in H} \iff b\alpha - a\beta = 0$

Vidíme, že $\mathrm{lmod}\, H \neq \mathrm{rmod}\, H$, protože zatímco pro $\beta = b$ platí, že $(A,B) \in \mathrm{lmod}\, H$, tak $(A,B) \notin \mathrm{rmod}\, H$ pokud $\alpha \neq \beta$

Z poznámky 4.1 ze skript víme, že $H \trianglelefteq G \iff \mathrm{lmod}\, H = \mathrm{rmod}\, H$ a tudíž $H \ntrianglelefteq G$.

Pro úplnost:

$[A]_{\mathrm{lmod}\, H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \beta = b, \alpha > 0 \right\}$

$[A]_{\mathrm{rmod}\, H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b\alpha - a\beta = 0, \alpha > 0 \right\}$

ÚLOHA č. 4

$$H \trianglelefteq G \iff H = \bigcup_{h \in H} [h]_{\mathrm{con}\, G}, \text{ kde } (a,b) \in \mathrm{con}\, G \iff \exists g \in G : a = g \cdot b \cdot g^{-1}$$

$\Rightarrow$: $\forall h \in H\ \forall g \in G : g \cdot h \cdot g^{-1} \in H \Rightarrow \forall h \in H : [h]_{\mathrm{con}\, G} = \{ g \cdot h \cdot g^{-1} : g \in G \} \Rightarrow H = \bigcup_{h \in H} [h]_{\mathrm{con}\, G}$

$\Leftarrow$: $H = \bigcup_{h \in H} [h]_{\mathrm{con}\, G} = \bigcup_{h \in H} \{ g \cdot h \cdot g^{-1} : g \in G \} \Rightarrow \forall h \in H\ \forall g \in G : g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$

Zvolme např. $L = S_4$, $K = \{ (2\,1)(4\,3), (3\,1)(4\,2), (3\,2)(4\,1), (1)(2)(3)(4) \}$

$$K = \bigcup \{ [(21)(43)]_{\mathrm{con}\, S_4}, [(1234)]_{\mathrm{con}\, S_4} \}$$

$$H = \langle (21)(43) \rangle$$

Máme $H \trianglelefteq K$, $K \trianglelefteq L$, ale $H \ntrianglelefteq L$.