

Algebra I., úkol č. 3

Grupu všech permutací na n prvcích ($n \geq 2$) s operací skládání permutací označme \mathbb{S}_n .

Úloha č. 1

- a) Pro prvky τ, ρ, π libovolné grupy nazveme prvek $\tau = \rho\pi\rho^{-1}$ konjugací prvku π prvkem ρ a prvek τ je pak s prvkem π konjugovaný. Určete počet všech permutací v \mathbb{S}_5 , které jsou konjugované s permutací $(1\ 2\ 3)(4\ 5)$.
- b) Ukažte, že relace „být konjugovaná“ je ekvivalencí na \mathbb{S}_n .

Na konjugaci prvkem $g \in G$ v libovolné grupě (G, \cdot, e) můžeme nahlížet i jako na unární operaci

$$\begin{aligned} Con_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto g \cdot h \cdot g^{-1}. \end{aligned}$$

- c) Ukažte, že pro každou grupu (G, \cdot, e) tvoří množina $Con(G) := \{Con_g \mid g \in G\}$ grupu s operací skládání zobrazení (na konjugace lze nahlížet i jako na zobrazení).
- d) Najděte nějakou vlastní alespoň dvouprvkovou podmnožinu M grupy \mathbb{S}_5 , pro kterou platí $Con(\mathbb{S}_5)[M] \subseteq M$, kde definujeme $Con(\mathbb{S}_5)[M] := \{Con_g(m) \mid g \in \mathbb{S}_5; m \in M\}$.

(4 × 1 bod)

Úloha č. 2

Buď $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_6$. Určete φ^{2019} . (Svůj postup / oprávněnost postupu zdůvodněte.)

(1 bod)