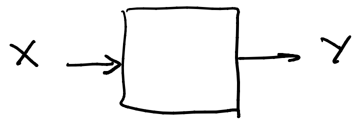
Układy cyfrowe i algebra Boole'a

wtorek, 4 października 2022 14:16

Układ cyfrowy



X – wektor n sygnałów wejściowych $X = (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots x_0)$

Y – wektor m sygnałów wyjściowych $Y = (y_{m-1}, y_{m-2}, \ldots y_0)$

Sygnały przyjmują określoną liczbę poziomów (znaną)
(w przeciwieństwie do układów analogowych)

Układ logiczny

Układ cyfrowy o 2 poziomach sygnału (0/1, L/H),

wykonuje operacje zgodnie z algebrą Boole'a

- → układ kombinacyjny – wyjście zależy tylko od wejścia
- → układ sekwencyjny – wyjście zależy od wejścia i stanu wewnętrznego

Algebra Boole'a

B – zbiór elementów

$\vee$ – alternatywa (OR, +)

$\wedge$ – koniunkcja (AND, ·)

$\neg$ - negacja (NOT, $\overline{\ }$)

0, 1 - wyróżnione symbole

Prawa algebry Bode'a

- Przemienność

  $a \cdot b = b \cdot a$

  $a + b = b + a$

- Łączność

  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

  $(a + b) + c = a + (b + c)$

- Rozdzielczość

  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

  $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

- Identyczność

  $a + 0 = a$

  $a \cdot 1 = a$

- Dopełnienie

  $a \cdot \overline{a} = 0$

  $a + \overline{a} = 1$

- Idempotentność

  $x \cdot x = x$

  $x + x = x$

- Identyczność

  $x \cdot 0 = 0$

  $x + 1 = 1$

- Pochłanianie

  $(x \cdot y) + x = x$

Pochłanianie

$$(x \cdot y) + x = x$$
$$(x + y) \cdot x = x$$
$$(x \cdot \overline{y}) + y = x + y$$

- Prawa de Morgana

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$
$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

- Podwójna negacja

$$\overline{\overline{x}} = x$$

- Sklejanie

$$(x \cdot y) + (x \cdot \overline{y}) = x$$
$$(x + y) \cdot (x + \overline{y}) = x$$

Funkcja logiczna

$$Y = f(X)$$

$Y \rightarrow$ m-elementowy wektor binarny

$X \rightarrow$ n-elementowy wektor binarny

matematyczny model układu kombinacyjnego

np. funkcje 1 zmiennej

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_0 = 0$

$f_1 = x$

$f_2 = \overline{x}$

$f_3 = 1$

są 4 możliwe funkcje 1 zmiennej

jest 16 możliwych funkcji 2 zmiennych itd.

przyjmujemy oznaczenie

$x_1 x_0 \rightarrow$ 2 bity (2-elementowy wektor) przyjmujemy oznaczenie

$x_1 x_0$ → 2 bity (2-elementowy wektor)

- x_0 – najmniej znaczący bit
- x_1 – najbardziej znaczący bit

Wybrane funkcje 2 zmiennych

x_1	x_0	AND	OR	NOR	XOR	NAND
0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0

OR → $x_1 + x_0$

AND → $x_1 x_0$

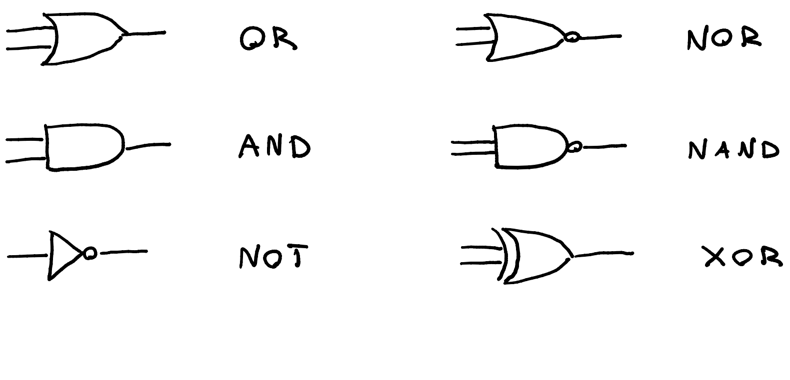
NAND → $\overline{x_1 x_0}$

NOR → $\overline{x_1 + x_0}$

XOR → $\overline{x_1} \cdot x_0 + x_1 \overline{x_0}$

dla n zmiennych jest $2^{(2^n)}$ możliwych funkcji

Bramki logiczne algebry Boole'a



Sposoby zapisu funkcji

- → Opis słowny
- → Postacie algebraiczne
  - Alternatywna postać normalna (APN)
  - Koniunkcyjna postać normalna (KPN)
  -

- Inne

→ Zapis dziesiętny
→ Tabela prawdy
→ Mapa Karnaugha

Minimalizacja

upraszczanie wyrażeń boolowskich, aby zrealizować funkcję z możliwie najmniejszej liczby elementów

Tabela prawdy

	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Naturalny Kod Binarny

Postać dziesiętna

$$y = \sum_{\substack{3 \\ \downarrow \\ \text{3 zmienne wejściowe}}} \underbrace{(3, 4, 5, 6, 7)}_{\text{jedynki funkcji}}$$

$$y = \prod_{3} \underbrace{(0, 1, 2)}_{\text{zera funkcji}}$$

Alternatywna Postać Normalna

$$y = \bar{x}_2 x_1 x_0 + x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 + x_2 \bar{x}_1 x_0 + x_2 x_1 \bar{x}_0 + x_2 x_1 x_0$$

Koniunkcyjna Postać Normalna

$$y = (x_2 + x_1 + x_0)(x_2 + x_1 + \bar{x}_0)(x_2 + \bar{x}_1 + x_0)$$

Mapa Karnaugha

x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
0	0 $_0$	0 $_1$	1 $_3$	0 $_2$
1	1 $_4$	1 $_5$	1 $_7$	1 $_6$

Kod Graya

kod Graya dla 1 bitu

0
1

dla 2 bitów

$$
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}
\xrightarrow[\text{odbicie}]{\text{lustrzane}}
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array}
\xrightarrow[\text{na dole 1}]{\text{na górze 0}}
\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}
$$

itd.