# O měření

Když se díváme na teploměr a přemýšlíme, jestli bude třeba si obléknout kabát, nebo když vážíme ingredience, abychom upekli bábovku, obvykle nepřemýšlíme nad tím, co přesně měření je a jak bychom ho definovali. Považujeme ho prostě jen za soubor procedur, díky kterým se snáze orientujeme ve svém prostředí. Ale ať už měření využíváme ke zvládání každodenních činností, či zjišťujeme vzdálenosti mezi galaxiemi nebo pomocí urychlovačů částic pozorujeme, na co se rozpadají srážející se protony, ve své podstatě se jedná o proces s jasným cílem: abychom získali informace o světě a vyjádřili je formálním a spolehlivým způsobem. Na druhou stranu, ne každý proces, který odpovídá tomuto popisu, bychom nazvali měřením. Když zjišťujeme kvalitu průmyslového výrobku, počítáme cyklomatickou složitost zdrojového kódu nebo dotazníkem sledujeme spokojenost zákazníků, také získáváme nějakou informaci a vyjadřujeme ji číslem.

Ve všech výše uvedených příkladech obdržíme nějakou hodnotu, kterou důvodně přiřazujeme určité vlastnosti posuzovaného objektu. Rozdíl mezi zhodnocením a měřením nemůže spočívat v přiřazování jako takovém – to musí být v obou případech *objektivní* a *jednoznačné*: vždy chceme, aby hodnota, kterou vlastnosti přidělíme, byla nezávislá na jakékoliv jiné vlastnosti objektu, osobě provádějící měření, nebo okolním prostředí a interpretovatelná vždy stejným způsobem různými uživateli na jiných místech v jiném čase. Měření se tudíž musí od zhodnocování odlišovat tím, jaké vlastnosti budeme považovat za měřitelné – protože měření není entita, existující nezávisle na našich představách o ní, ale proces vytvořený za jasným účelem, některé jeho charakteristiky budou vždy určeny konvencí.

Měřením reprezentujeme pouze takové vlastnosti, jejichž instance lze porovnávat, co se týče množství, míry, či intenzity, a které se vzájemné vylučují. Například objekt A tak může být v jednom okamžiku X jednotek dlouhý, nebo Y jednotek dlouhý, ale nemůže vykazovat obě vlastnosti zároveň. Objekt A lze zároveň porovnat s Z jednotek dlouhým objektem B a zjistit tak, který je delší. Množina vlastností, které splňují tyto podmínky, tvoří atribut ([3], [21]); konkrétní instance vlastnosti tudíž představuje velikost atributu daného objektu. Tuto velikost obvykle vyjadřujeme číslem[[1]](#footnote-1).

To, že k reprezentaci atributů používáme čísla, má svůj důvod: vědci vytvářejí většinou kvantitativní teorie plné matematických rovnic, které sice mají popsat svět, ale samy o sobě o něm nemohou nic říct. Abychom je mohli považovat alespoň za *možné* vysvětlení toho, jak věci fungují, musíme je doplnit mimomatematickou interpretací: všechny funkce v rovnicích představují patřičné atributy objektů, a rovnice samotné vyjadřují dynamické chování objektů, či prostě změny jejich atributů v průběhu času. Díky této interpretaci můžeme teorie testovat ověřením, zda existuje shoda mezi dvěma druhy kvantitativních hodnot: mezi těmi, které jsme spočítali s pomocí teorie, a mezi těmi, které jsme empiricky změřili ([?]).

Mohli bychom se proto domnívat, že měření slouží k potvrzování, či vyvracení teorií. Jenže jak upozorňuje van Fraassen ([23]), tento „problém koordinace“ – tj. vytvoření spojení mezi teoretickými entitami a měřícími procedurami – je cirkulární. Otázky „Co platí jako měření atributu *X*?“ a „Co je to atribut *X*?“ nelze zodpovědět nezávisle na sobě.

Příkladem může být historie měření teploty, kdy původně kvalitativní koncept byl prokázán jako kvantitativní veličina; zpřesňování měření teploty a provázané teoretické objevy postupnými „epistemickými iteracemi“ ([25], [26]) vedly v průběhu staletí až k dnešnímu definici jednotky termodynamické teploty pomocí Boltzmannovy konstanty. Prvotní termoskopy poskytovaly pouze porovnání teplot, a byly ovlivněny atmosférickým tlakem. Později vzniknuvší teploměry proto měly teploměrnou kapalinu – preferovanou se stala rtuť – oddělenou od atmosféry; stupnice se číslovaly tak, že se zvolily pevné body (obvykle mrznutí a var vody) a teplotní stupeň pak byl pevným podílem tohoto intervalu. Teploměry tak sice byly poměrně standardizované, ale přesto nešlo tvrdit, že měřily něco víc než – byť přesné – seřazení podle teploty. Pokud by se rtuť roztahovala v jiné míře za nižších a vyšších teplot, nešlo by tvrdit, že jednotlivé podintervaly na stupnici teploměru mají stejný význam. Toto by šlo snadno vyloučit, pokud by člověk znal funkci popisující, jak se mění objem rtuti v závislosti na její teplotě. Jenže taková funkce předpokládá teploměr, jehož ne-arbitrárnost již byla ustanovena. Použití rtuťového teploměru předpokládá, že rtuť se s teplotou roztahuje uniformě, ale tento předpoklad můžeme otestovat pouze spolehlivým teploměrem – o kterém ovšem zároveň pochybujeme. Předpoklad, že rtuť se roztahuje rovnoměrně, znamená očekávat, že teplota, stejně jako objem, je spojitá veličina. Podobně je to se zjištěním, že různé látky se ohřívají různě rychle – tepelné kapacity látek můžeme porovnat podle délky času. Můžeme pak používat teplotu v kalkulacích: smíchání různého množství různých látek různé teploty se řídí rovnicí ; přidáme-li i koncept skupenského tepla, můžeme teplotu používat pro výpočet tepla nutného ke změně skupenství; žádný z těchto principů by nebyl možný, pokud bychom nepředpokládali, že teplota je kvantitativní veličina. Později se dále ukázalo, že roztažnost látek má lineární průběh pro zředěné plyny; závislost objemu na teplotě při konstantním tlaku byla stejná, což umožnilo zavést Kelvinovu stupnici s absolutní nulou. Ustanovení teploty jako kvantitativní veličiny a způsob jejího měření tak bylo vzájemně závislé.

Jenže co nás opravňuje přiřadit určité velikosti atributu právě to či ono číslo? Zatímco naše možnosti pozorování a interakce s objekty jsou omezené – nemůžeme například vzít váhy a porovnat hmotnost Země a Měsíce – v číslování objektů nám nic nebrání. Jakákoliv korelace mezi atributy a čísly by proto mohla být pokládána za výsledek měření, což by nám umožnilo dle libosti vyvrátit či potvrdit jakoukoliv teorii. Tím by ovšem testování teorií zcela ztratilo smysl; je tudíž zřejmé, že k reprezentaci atributů čísly nepostačuje vytvořit zcela libovolné, byť důsledně dodržované, pravidlo, podle kterého čísla přidělujeme.

Velkou roli hraje interní struktura atributu, jaké jsou vztahy mezi jednotlivými instancemi atributu; tedy například jak je strukturovaná třída všech délek. Tyto instance, jak jsem zmínil výše, lze porovnávat podle velikosti, ale měření nás dále zavazuje, aby mezi nimi existovaly i určité numerické vztahy, totiž že jedná velikost atributu je vždy *x* násobkem jiné velikosti, kde *x* je reálné číslo, obvykle kladné. Měření vyžaduje, aby různé instance stejného atributu zachovávaly poměr, a to je možné, pokud je atribut, jako třída, kvantitativní. Ve fyzice jsou měřitelné atributy obvykle neohraničené, spojité a kvantitativní, ale neexistuje žádný důvod, aby tomu tak bylo u všech atributů. Má-li atribut kvantitativní strukturu, lze usoudit, pouze pokud pro to získáme určité důkazy. Jakmile máme vytvořenou numerickou reprezentaci, určité matematické výroky o přiřazených číslech jsou pravdivé, ale zároveň nemusí být smysluplné pro dané objekty, neboť ne každý numerický fakt vyjadřuje situaci závislou pouze na objektech a měřených atributech (a stejně tak ne každá situace mezi objekty může být reprezentována numericky).

Není těžké najít příklady, kdy vztahy mezi čísly a operace s nimi, jako jsou rovnost, rozdíl, podíl, atd., nekorespondují se vztahy anebo operacemi s měřenými objekty. 80 je dvakrát 40, ale neplatí, že objekt s teplotou 80 °C je dvakrát teplejší než objekt 40stupňový (neboť teplota 0 °C neodpovídá absenci teploty). Intervaly mezi čísly nemusí obsahovat empirickou informaci: je-li respondent dotázán, aby na škále 1 až 7 – jak to je v psychologických testech běžné – ohodnotil svůj souhlas s daným výrokem, není na první pohled zřejmé, proč by rozdíly mezi 4 a 5 a mezi 6 a 7 měly odpovídat stejné změně v míře souhlasu. Interval mezi (reálnými) čísly lze donekonečna dělit, na rozdíl od fyzického intervalu mezi dvěma Coulomby (neboť elementární náboj je nedělitelný). Rovnost mezi čísly je tranzitivní relace, ale empirické porovnání velikostí atributu nám umožní odhalit pouze přibližnou rovnost, která tranzitivní není.

Dřívější zájem teoretiků měření se proto zaměřoval na tyto a podobné problémy; snažili se je řešit identifikováním algebraických struktur v kvalitativní zkušenosti se světem, tj. dříve, než je prováděno přiřazení čísel. Helmholtz, Hölder a Campbell postupovali právě tímto směrem; jejich příspěvky, a navazující bádání postupně vedly k vytvoření reprezentační teorie měření (RTM). Ta chápe měření jako přiřazování čísel objektům a to takovým způsobem, že jisté operace s měřenými objekty a vztahy mezi nimi odpovídají nebo jsou reprezentovány operacemi s čísly a vztahy mezi nimi; aby tato reprezentace byla možná, musí objekty splňovat určité empirické náležitosti. Měření se tedy rovná vytvoření vhodné reprezentace, tedy mapování objektů na čísla.

Proces měření je ovšem třeba chápat v širším měřítku. Procedury měření můžeme koncepčně rozdělit do dvou úrovní: první úroveň představuje konkrétní proces zahrnující interakce mezi měřeným objektem, měřícím nástrojem a prostředím; druhou úroveň tvoří teoretické a abstraktní reprezentace tohoto procesu. Stejně tak výsledky měření jsou rozlišitelné na dva druhy: na konkrétní úrovni se jedná o indikace[[2]](#footnote-2) měřícího nástroje; na abstraktní úrovni jsou výsledky vědomostní tvrzení o stavu měřeného objektu; často mají formu: veličina *Q* asociovaná s objektem *O* má hodnotu *q* s nejistotou *U*.

Výsledky měření jsou tak získány z měřícího nástroje řetězcem úsudků; určité závěry závisí na určitých teoretických a statistických předpokladech, kterými jsou reprezentovány konkrétní měřící procesy. V 21. století se proto zájem přesunuje od pojetí měření jako reprezentace k pojetí měření jako získávání informací. Epistemologie měření pak zkoumá podmínky, za kterých měření a standardizované metody produkují vědění, jaká je povaha, rozsah a omezení tohoto vědění, a jaké jsou zdroje jeho reliability. Tento odklon lze shrnout ve třech klíčových bodech: výsledky měření nejsou čísla, ale oblasti parametrového prostoru; výsledky závisí na teorii nejen kvůli své intepretaci, ale také pro jejich schopnost reprezentovat měřené objekty v první řadě; mapování indikací do výsledků není záležitost sdílené algebraické struktury, ale přenosu informací.

Reprezentační teorie měření sice uspěla v přesném, formálním popisu podmínek, za kterých je přiřazování čísel objektům smysluplné a oprávněné, ale čelila rovněž velké kritice. Nicméně se jedná o obsáhlý soubor vědění s více než stoletou historií, a proto si zaslouží podrobnější rozebrání. Pro lepší pochopení reprezentace objektů s pomocí čísel si ale nejdřív připomeňme, jak se vyvíjelo pojetí reálných čísel.

## Vývoj pojetí reálných čísel

[TODO: stručný vývoj pojetí reálných čísel od Euklida po 20. století]

## Měření jako reprezentace

RTM stojí na dvou pilířích, empirické filozofii a matematické metodě reprezentačních teorémů. Empirickou epistemologii používá k zdůvodnění „základních postupů pro přiřazování čísel objektům nebo událostem na základě kvalitativních pozorování“. Předpokládá, že svět je neodmyslitelně nekvantitativní, a jsme to my, kdo mu ukládá kvantitativní podobu tím, že jeho kvalitativní rysy reprezentujeme přiřazenými čísly. Tyto kvalitativní rysy jsou pozorovatelné; protože objekty lze porovnávat podle velikosti atributů, existují mezi nimi určité empirické vztahy; například sadu pevných tyčí můžeme seřadit tak, že jejich vzájemným porovnáváním zjistíme, které tyče jsou delší a které kratší. Objekty tak vytváří empirický relační systém[[3]](#footnote-3). Čísla tvoří numerický relační systém, neboť i ona mají strukturu a řídí se matematickými zákonitostmi. Oba systémy musí nějakým způsobem korespondovat; empiricky významné aspekty matematické struktury jsou ty, které reprezentují relevantní vztahy mezi měřenými objekty.

Aby bylo měření možné, je nutné nejen definovat oba relační systémy, ale i určit podmínky, které musí splňovat, aby bylo možné zobrazení z empirického relačního systému do numerického. Přísnější podmínky reprezentace zajišťují smysluplnost měření.

### Helmholtz

Když v roce 1887 Hermann von Helmholtz vydal svůj esej *Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet*[[4]](#footnote-4), položil v jejím úvodu dvě otázky, které lze – spolu s odpověďmi na ně – považovat za základ budoucí RTM ([?]):

* „Jaký je objektivní význam toho, že určité dva objekty prohlásíme za stejné v určitém ohledu?“
* „Jaké vlastnosti musí mít fyzické spojení mezi dvěma objekty, abychom mohli porovnatelné atributy těchto objektů kombinovat pomocí součtu, a následně pokládat tyto atributy za veličiny, které lze vyjádřit pomocí čísla?“

Helmholtz tvrdí, že to, co nás opravňuje považovat atributy objektů za kvantitativní, jsou dvě procedury: porovnání objektů, které umožňuje zjistit jejich rovnost vzhledem k onomu atributu, a konkatenace objektů, která umožňuje sčítání velikostí atributu.

U porovnání Helmholtz poznamenává, že relace rovnosti musí být symetrická[[5]](#footnote-5) a tranzitivní[[6]](#footnote-6): výsledek porovnání musí zůstat stejný, pokud prohodíme pořadí objektů, anebo pokud zjistíme, že pokud je objekt *A* roven objektu *B*, a dříve již bylo zjištěno, že objekt *B* je roven objektu *C*, platí, že objekt *A* je zároveň roven objektu *C*. Výsledek porovnání musí zároveň záviset výlučně na tom, že objekt disponuje atributem do určité míry.

Jak poznamenává Michell [3], porovnání objektů je prováděno procedurou, která není dokonalá, a poskytuje pouze určitou přesnost rozlišení[[7]](#footnote-7): různé objekty mohou mít její stejnou velikost, a přesto nemusí být porovnány jako stejné, a naopak.

Veličina je atribut určitého druhu; veličiny jsou stejného druhu, pokud jejich velikosti lze porovnávat stejnou procedurou. Helmholtz udává příklady takových veličin: hmotnost, délka, trvání; i procedur pro jejich porovnávání: rovnováha, shoda, současnost. Helmholtzovo pojetí definice atributu je však příliš operacionalistické, upozorňuje Michell [3], neboť objekty mají hmotnost, i když je nikdo neváží.

Porovnat objekty a zjistit, zda jsou vzhledem ke zkoumanému atributu stejné, či nikoliv, ale pro zajištění, že je atribut kvantitativní, nestačí. Očekávali bychom, že nyní se Helmholtz bude věnovat relaci uspořádání, ale podle jeho názoru není možné rozhodnout, která veličina má větší velikost, pokud není definována operace konkatenace objektů, s následujícími vlastnostmi: výsledná velikost veličiny není ovlivněna pořadím konkatenace objektů (komutativní[[8]](#footnote-8)); je asociativní[[9]](#footnote-9); výsledná velikost není ovlivněna nahrazením ekvivalentních objektů (tj. objektem se stejnou velikostí atributu jako má nahrazovaný objekt). Díky těmto vlastnostem může být konkatenace považována za součet. Helmholtz považuje své podmínky jako experimentální test potenciálních veličin; to, že podmínky byly splněny pro všechny konkatenace ve fyzice znamená, že fyzikové již provedli výběr, které atributy jsou veličinou.

Teprve po definici konkatenace Helmholtz definuje pořadí mezi velikostmi, pomocí toho, že výsledek konkatenace dvou objektů je větší než jeho části. Tato definice relace „větší než“ je špatná, jak upozorňuje Díez [2], protože není definovaná pro *jakékoliv* velikosti atributů, ale jen pro ty složené konkatenací.

Darrigol [11] si všimnul další chyby v Helmholtzově uvažování: existují procedury konkatenace, pro které výše uvedená definice neplatí; např. obvyklé pravidlo pro skládání sil by vedlo k závěru, že jakákoliv síla je větší než jiná síla. Helmholtz měl vyžadovat, aby konkatenace byla taková, že umožňuje vytvořit uspořádání, nebo nesnažit o uspořádání závislém na konkatenaci – tuto představu měl, neboť si byl vědom, že pro určitou proceduru porovnání může existovat několik způsobů konkatenace, které by vedly k jinému pořadí: např. dva vodiče můžeme porovnávat stejnou procedurou pro vodivost i pro odpor, ale procedury konkatenace máme k dispozici dvě: vodiče můžeme spojit buď sériově, či paralelně. To vede k různým veličinám (odporu a vodivosti) a jinému seřazení vodičů. Helmholtz si neuvědomil, že korelace uspořádání a metody konkatenace neznamená, že konkatenace musí předcházet pořadí.

Navíc platí podobná námitka jako v případě porovnání: díky tomu, že údaje získáme pozorováním, podmínky budou pouze aproximovány, navíc omezené pouze na omezenou řadu objektů. Vymyslet vhodný způsob empirického porovnání objektů není snadné. To, že si to Helmholtz neuvědomil, byla chyba, kterou pozdější teoretici měření řešili tím, že své teorie založili pouze na axiomatizaci přímo pozorovatelných relací a operací.

Po definování rovnosti, konkatenace a uspořádání, Helmholtz přistoupil k dělení]: „veličiny, které lze sčítat, jsou obecně i dělitelné“; není jasné, zda je další dělení empirická podmínka nebo pouze důsledek sčítání [11].

Dělitelností měl Helmholtz na mysli možnost nahlížet na danou velikost veličiny jako na součet stejných velikostí, a tím na možnost přibližně vyjádřit velikost veličiny jako násobek fixní jednotky; přesnost aproximace lze donekonečna zvyšovat pomocí řady podjednotek. Implicitně tak předpokládá Archimédovskou vlastnost, která spolu s existencí rozdílu umožňuje arbitrárně přesnou aproximaci poměrů pomocí racionálních čísel.

Michell [3] dodává, že Helmholtz poskytl vysvětlení pouze jednoho způsobu zjišťování, zda je atribut kvantitativní. Ale pokud není fakt, že je atribut kvantitativní, logicky navázaný na existenci vhodné, pozorovatelné aditivní relace konkatenace, nemůže být takto logicky navázaný ani způsob testování hypotézy kvantitativnosti. Bylo by absurdní předpokládat, že nemůžeme najít nepřímý důkaz kvantitativní struktury, vzhledem k tomu, jak jsou přírodní procesy kazuálně propojené. Hypotéza, že atribut je kvantitativní, je empirická i teoretická – jako empirická potřebuje pozorovatelné testování, jako teoretická nepotřebuje mít tyto testy přímé.

Helmholtzova esej měla vesměs malý dopad mezi fyziky – učebnice stále definovaly měření klasickým způsobem, tj. jako porovnání veličiny s jednotkou stejného druhu [11].

### Hölder

[TODO: přepsat do srozumitelné podoby]

Zatímco Helmholtzova práce se považuje za první rigorózní příspěvek k problematice zjišťování kvantitativnosti atributů, esej Otto Ludwig Höldera *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass* z roku 1901[[10]](#footnote-10) představuje z historického hlediska mnohem zásadnější text – byť, jak dokládá Michell, půlstoletí ignorovaný ([3]).

Hölder, v návaznosti na klasickou představu měření – zjištění poměru velikosti veličiny k jednotce – postupoval ve třech krocích: popsal koncept velikost veličiny s pomocí axiomů veličiny, vztáhnul reálná čísla k poměrům velikostí, a naznačil způsob, jakým způsobem – odlišným od extenzivního měření – by mohla být kvantitativnost atributu empiricky zkoumána, a to s pomocí toho, jak axiomy pro intervaly přímky, které neobsahují aditivní operaci, se redukují na axiomy veličiny.

Axiomů veličiny Hölder uvedl 7:

* Pro velikosti *a* a *b* platí jedno z následujících tvrzení: *a* = *b* a *b* = *a*; *a* > *b* a *b* < *a*; *b* > *a* a *a* < *b*.
* Pro každou velikost existuje velikost, která je menší.
* Pro každou uspořádanou dvojici velikostí *a* a *b* je přesně stanovený jejich součet *a* + *b*
* *a* + *b* > *a* a *a* + *b* > *b*
* Pokud *a* < *b*, existuje takové *x* a *y*, že *a* + *x* = *b* a *y* + *a* = *b*
* Vždy platí, že (*a* + *b*) + *c* = *a* + (*b* + *c*)
* Kdykoliv jsou všechny velikosti rozděleny do dvou tříd tak, že každá velikost patří do právě jedné třídy, žádná třída není prázdná a každá velikost v první třídě je menší než každá velikost v druhé třídě, pak existuje taková velikost ξ, že každá ξ‘ < ξ patří do první třídy a každá ξ‘‘ > ξ patří do druhé třídy

Z těchto axiomů odvodil řadu teorémů, např. komutativitu a archimédovskou vlastnost; nejdůležitějším je nicméně teorém, který dokazuje, že pokud je atribut kvantitativní, je v principu měřitelný. Hölder ukázal, že pro danou strukturu, pro jakékoliv *a* a *b* v *Q*, velikost relativní k *b* může být vyjádřena kladným reálným číslem *r*, kde *a* = *r* \* *b*. Tedy poměr *a* k *b*, kladné reálné číslo, je mírou *a* v jednotkách *b*. Jak připomíná Michell ([15]), díky tomu můžeme uvažovat o existenci kvantitativních vztahů mezi atributy (jako mezi hmotností, objemem a hustotou). Pro měření tak musíme objevit, ať už přímo či nepřímo, aditivní strukturu atributu tak, abychom mohli zjišťovat poměry mezi velikostmi atributu; měření je tak definováno jako zjištění poměru velikosti kvantitativního atributu k jednotce stejného atributu – podobně jako bylo definováno ve fyzikálních vědách. Tato definice je logickým důsledkem struktury kvantitativních atributů. Jestliže tato struktura platí, je možné dokázat, že velikosti kvantity jsou ve vzájemných numerických vztazích.

Michell [15] dále upozorňuje, že operátor „+“ by neměl být chápán ve smyslu sčítání čísel; taková operace je často považována za matematickou a interpretována jako empirická operace konkatenace. Tato intepretace ovšem není zamýšlena zde; Michell doporučuje interpretovat *a* + *b* = *c* jako relaci mezi velikostmi *a*, *b* a *c*: velikost *c* je složena z diskrétních částí *a* a *b*. Jen proto, že velikosti jsou v relaci, neznamená to, že pro ně existuje vhodná operace konkatenace nebo rozdělení. Může tomu tak být (např. u délky), ale nemusí (hustota, teplota). Aditivní relace mezi veličinami je teoretická a můžeme k ní získat přístup často nepřímo.

V druhé části článku Hölder představil 10 podmínek pro orientované úsečky z přímky (tj. každé dva body přímky v určitém pořadí a které bychom mohli nazvat „interval“), pro které nedefinuje aditivitu, a přesto odvodí, že vzdálenosti jsou kvantitativní, což znamená, že se řídí axiomy veličin z předchozí části textu. Pro odlišné body na přímce *A* a *B* definuje interval *AB*, rozkládající se od *A* ku *B*. Pro takové intervaly platí implicitní relace součtu: pro jakékoliv tři body *A*, *B* a *C*, pokud *A* < *B* < *C*, tak *AB* + *BC* = *AC*. A pokud vzdálenost *AB* je *a*, *BC* je *b* a *AC* je *c*, pak *c* = *a* + *b*, tedy implicitní aditivita intervalů zahrnuje implicitní aditivitu vzdáleností. Hölderových 10 axiomů pro intervaly způsobuje, že vzdálenosti jsou kvantitativní bez explicitní zmínky aditivity. Klíčový je sedmý axiom: Pokud *A* < *B*, *B* < *C*, *A*‘ < *B*‘, *B*‘ < *C*‘, vyplývá z *AB* = *A’B‘* a *BC* = *B’C‘* to, že *AC* = *A’C‘*. Přímky představují model pro uvažování o jiných veličinách. Co platí pro intervaly na přímce, nemusí platit, pokud je testováno vzhledem k jiným atributům, o kterých čekáme, že jsou kvantitativní. Pokud by se našel způsob, jak Hölderovu teorii aplikovat v jiných kontextech, existoval by způsob nepřímého testování aditivity; Hölderova práce tak byla počátkem, kterého využili následující teoretici měření ([3, 15]).

Komentáře k Hölderově práci se různí; některé intepretace jsou z pohledu reprezentace: Hölder formálně studoval podmínky, které jsou nutné a/nebo dostatečné k numerické reprezentaci faktů, které nastávají v doméně objektů, protože tyto objekty mají určité velikosti atributů [2].

Jiná interpretace ([12]) tvrdí, že Hölder chápal axiomy jako udržující reálná čísla pomocí poměrů veličin, spíše než že by ustanovoval korespondenci mezi reálnými čísly a takovými poměry, konstruovanými jako nezávislé koncepty. Pozdější teoretici měření intepretovali rovněž Hölderovy axiomy jak příspěvek k extenzivnímu měření – pokud tím myslí měření pomocí přímo pozorovatelné konkatenace, pak je tato intepretace sporná. Hölder tento termín nepoužívá a z jeho textu nevyplývá, že operace sčítání v axiomech je pozorovatelná.

Darrigol ([17]) dodává, že zatímco Helmholtz pokračoval v eukleidovské tradici celých čísel a racionální míře, Hölder připouštěl iracionální čísla. Zatímco Helmholtz považoval své axiomy jako kritéria pro výběr měřitelných atributů konkrétních objektů, Hölder ty své považoval za základ matematické teorie veličiny. Nekladl důraz na jejich aplikaci, důležitější pro něj bylo, aby si axiomy neprotiřečily a byly nezávislé. Axiomy proto nebyly použitelné empirické testy měřitelnosti: tranzitivita rovnosti a komutativnost sčítání nebyly jednoduše testovatelné, stejně tak kontinuita vyjádřená jeho posledním axiomem.

Höldera nezajímaly ani tak empirické strukturu, ale to, co nazval absolutní kontinuální veličina, která je teoretickým konceptem pro vysvětlení pozorování, ale který není vždy otevřený přímé verifikaci; je to koncept, který podpírá kvantitativní vědy – pokud vědec přijde s teorií, která popisuje kvantitativní atributy, jsou to většinou atributy v Hölderově smyslu ([12]).

### Campbell

[TODO: přepsat do srozumitelné podoby]

Vlivnou knihu britského fyzika Normana Roberta Campbella z roku 1920 *Physics: The Elements*[[11]](#footnote-11) můžeme považovat za první cílevědomý příspěvek do reprezentační teorie měření ([3]).

Campbell definoval měření jako „proces přiřazování čísel[[12]](#footnote-12), aby reprezentovaly vlastnosti“ a pokládá otázku: „Proč můžeme měřit a skutečně měříme některé vlastnosti těles, zatímco neměříme jiné?“ Campbell nepokládal existenci kvantitativních veličin a problémy měření jako záležitost obecné logiky, oddělené od okolností převažujících ve fyzice; předpokládal, že měření je možné, protože určité rozsahy fyzikálních atributů jsou podobné číslům – jsou aditivní, a proto jim lze přiřadit čísla takovým způsobem, že numerické sčítání reprezentuje fyzickou aditivitu. Proto považoval demonstraci fyzické aditivity experimentálně za základ měření; takové měření nazýval fundamentálním. Hlavním cílem numerické reprezentace atributů je vyjádřit jejich vzájemné vztahy jako numerická pravidla. Potom můžeme identifikovat systém numerických konstant, např. hustotu, což je jiný poměr hmotnosti k objemu pro každý druh hmoty. Takové systémy konstant nazýval Campbell odvozenými veličinami a jejich numerickou identifikaci odvozeným měřením.

První podmínkou měření je, že atribut, mezi objekty, které ho vykazují, generuje asymetrickou[[13]](#footnote-13) a tranzitivní relaci, tj. relaci uspořádání. Tato relace musí být taková, že pokud nespojuje dva objekty, tyto objekty musí být spojené s jinými stejným způsobem (s pomocí výše uvedených konvencí): pokud ne a ≽ b a ne b ≽ a, tak a ≽ c právě tehdy, když b ≽ c. Na objekty které nejsou spojené relací je nahlíženo jako na rovné vzhledem k velikost atributu. Relace, která splňuje tyto tři podmínky umožňuje definovat relaci rovnosti: a ≈ b právě tehdy když ne a ≽ b a ne b ≽ a.

Splnění těchto podmínek umožňuje určité „empiricky informativní“ numerické reprezentace (např. tvrdost minerálů). Rozdíl mezi přiřazenými čísly nicméně nepředstavuje fyzický rozdíl. Aby tento rozdíl byl reprezentován a atribut byl měřitelný, musí existovat fyzická operace konkatenace s vlastnostmi podobné numerickému sčítání.

Konkatenace musí mít vlastnosti ([2]):

1. pozitivita: a ⊕ b ≽ a a a ⊕ b ≽ b
2. ≈-komutativita
3. ≈-asociativita
4. ≈-monotónnost
5. ≽-monotónnost
6. Přidáváním objektů postupně musíme být schopni vytvořit standardní sérii (standardních objektů, tj. za sebou jdoucí kombinace objektů, které jsou podobné) z níž bude jeden člen stejný s ohledem na vlastnost jako jakýkoliv jiný objekt, který chceme změřit.

Tato poslední podmínka, která je silná, implikuje slabší podmínku řešitelnosti a archimédovskou podmínku, které jsou empiricky mnohem rozumnější a dostačující, aby plnili funkci, kterou Campbell plní pomocí 6) [2].

Jestli operace ⊕ a relace ≽ plní tyto podmínky je otázka, kterou lze zodpovědět pouze empiricky.

Campbell pak ukazuje, jak arbitrární je přiřazení čísel, pokud atribut splňuje podmínky. Při jednom způsobu kombinace, pokud máme dvě různá přiřazení čísel taková, že v obou případech čísla splňují s ohledem na > a + podmínky splněné objekty vzhledem k ≼ a ⊕, jedno přiřazení je násobkem druhého. Arbitrární je volba jednotky, poměr hodnot se nemění.

V některých případech existuje víc než jeden způsob konkatenace, který splňuje podmínky; další arbitrárnost, vzniklá volbou z těchto konkatenací, může domnělá, protože uspořádání ≼ může být jiné pro různé konkatenace. Campbell zmiňuje odpor a vodivost; obě splňují podmínky, ale jedna k opačným uspořádáním.

Pokud díky dvěma konkatenacím můžeme měřit stejnou vlastnost, uspořádání, vzhledem ke kterému obě přiřazení splňují podmínky, musí být stejné v obou případech. Jinak by vzniknul neodstranitelný prvek arbitrárnosti – kterou metodou je vlastnost měřena?

Protože ne každé měření je fundamentální, Campbell se pokusil toto vyřešit konceptem odvozeného měření – odvozené veličiny mohou být vyjádřeny jako funkce fundamentálních veličin, např. hustota jako funkce hmotnosti a objemu –, protože relevantní numerické zákony se ukázaly být součinem fundamentálních veličin. Je-li nějaký atribut korelovaný se součinem mocnin fundamentálních veličin, potom je získaná numerická hodnota mírou toho atributu. Přestože se tedy fundamentální i odvozené veličiny liší v proceduře měření, Campbell je považuje za veličiny ve stejném smyslu.

Michell ([3]) toto pojetí kritizuje; tvrdí, že je-li veličina fundamentálně měřitelná v Campbellově smyslu, musí existovat vztah mezi veličinou a vědci, a není to tedy vnitřní vlastnost veličiny. Pokud fundamentální a odvozené veličiny zahrnují veličiny ve stejném smyslu, vlastnost „být kvantitativní“ je způsobena interní strukturou atributu, a ne v jeho externích vztazích, např. ve vztazích s vědci pomocí operace fyzické konkatenace, kterou jsou či nejsou schopni provádět. Pokus omezit řadu externích vztahů, s pomocí kterých vědci mohou objevit kvantitativní strukturu, musí doprovázet dva důkazy: že tímto způsobem jsou schopní indikovat existenci veličiny, že jiné způsoby detekce kvantitativní aditivity jsou nemožné.

Cambpell podle Michella [3] splnil část prvního tím, že operace konkatenace indikuje kvantitativnost atributu; nesplnil druhou půlku prvního, protože neukázal, že konstanty v numerických zákonech musí indikovat kvantitu. Navíc zcela ignoroval druhý úkol. Díky těmto mezerám v jeho teorii byl v evaluaci měření v psychologii tak dogmatický. Campbellova teorie je nedostatečná, neboť 1) soustředí se pouze na speciální případ fyzikálních atributů a ignoruje obecnější otázky kladené logikou měření 2) ve skutečnosti předpokládal klasickou teorii.

### Stevens

[TODO: přepsat do srozumitelné podoby]

Lze bez nadsázky říct, že článek Stanleyho Smithe Stevense *On the Theory of Scales of Measurement*[[14]](#footnote-14) z roku 1946 je jedním z nejvlivnějších a přitom nejkontroverznějších[[15]](#footnote-15) textů k tématu měření. Stevens navrhl definici měření v širokém významu jako přiřazování číslic objektům nebo událostem podle pravidel. Protože pravidel může být celá řada, vede takové přiřazování ke vzniku různých druhů škál a měření. Problémem pak je explicitně stanovit: a) různá pravidla pro přiřazování číslic; b) matematické vlastnosti výsledných škál; c) statistické operace aplikovatelné pro měření uskutečněné dle určité škály.

Typ škály je charakterizován přípustnými transformacemi. Pro každý typ škály jsou stanoveny: 1) asociované empirické operace, které by měly určovat jistá fakta, fakta, která musí být zachována i po transformaci 2) povolené statistiky, střední hodnota.

Velmi známá klasifikace je následující. Proměnné označují hodnoty škály, čísla přiřazená objektům; f(x) je přípustná transformace, funkce numerické množiny, která obsahuje obor hodnot škály, do sama sebe; φ(x1…xn) je numerický fakt, který empirická operace musí určovat, tj. nejsilnější vzorec φ(x1,…, xn) pro který platí, že φ(x1,…, xn) právě tehdy když φ(f(x1),…, f(xn)).

Klasifikace je kumulativní, vyjadřuje postupně silnější podmínky.

#### Nominální škála

f(x) je jakákoliv prostá funkce, φ je x1 = x2. Statistická míra: modus. Příklad: jakákoliv numerace, např. očíslování hráčů fotbalu. Vzhledem k hodnotě objektu je číslo zcela arbitrární; neměříme, jen přejmenováváme objekty.

#### Pořadová škála

f(x) je rostoucí monotónní funkce, φ je x1 > x2. Statistická míra: medián. Příklad: tvrdost minerálů. Při přiřazení jednomu objektu je přiřazení dalšímu arbitrární, pokud je zachováno pořadí.

#### Intervalová škála

f(x) = ax + b (a > 0), tj. kladná lineární transformace, φ je x1 – x2 = x3 – x4, nebo x1 – x2 = konstantní. Statistická míra: aritmetickým průměr. Příklad: teplota. Přiřazení jednomu objektu určuje přiřazení dalšího, jakmile je určen arbitrární nulový bod a jednotka. Poměr intervalů hodnot se nemění: (x1 – x2)/( x3 – x4) = (f(x1) – f(x2))/(f(x3) – f(x4)).

#### Poměrová škála

f(x) = ax (a> 0), φ je x1 / x2 = x3 / x4, nebo x1 / x2 = konstantní. Statistická míra: geometrický průměr. Příklad: délka, hmotnost. Přiřazení objektu určuje další přiřazení, jakmile je určena arbitrární jednotka (nula je absolutní). Poměr hodnot se nemění x1 /x2=f(x1)/f(x2).

Stevens uvažuje, že škály jsou možné pouze, protože existuje jistý izomorfismus mezi tím, co můžeme dělat s určitými aspekty objektů a vlastnostmi číselných řad, a že určité empirické operace, které determinují určité relace mezi aspekty objektů, jsou zapojené do škál. Nicméně neanalyzuje ani tyto empirické operace, ani podmínky, které musí splňovat.

Stevens škály klasifikuje podle přípustných transformací; transformace je přípustná, když něco zůstává vzhledem ke škále invariantní. Většina transformací nechává invariantní některé relativně jednoduché funkce, a není jasné, co má tato funkce společného se škálou předtím, než je určen její typ. Že je funkce invariantní pod určitou transformací, je matematický fakt. Proč je transformace přípustná, zůstává nejasné; nemůžeme vědět, proč např. Celsiova stupnice, nekladně lineárně transformovaná, neměří teplotu.

Díez ([2]) uporozňuje, že pokud definujeme škálu typem transformace, nevíme v epistemologicky relevantním smyslu, co pro škálu činí transformaci přípustnou, zatímco jiné transformace ne. Ale to je to, co od typu škály chceme. A pokud se pokusíme upřesnit představu přípustné transformace odvoláním se na invarianci určitých numerických funkcí, stejně chceme vědět, co tyto funkce mají se škálou společného. A toto vše je pouze to, co potřebujeme od upřesnění přípustné transformace. Proto je nutné při definici přípustných transformací opustit čistě matematické invariance a obrátit se na vlastnosti objektů a jejich empirické relace.

Helmholtz, Hölder a Campbell analyzovali kvalitativní podmínky, které empirický systém musí splňovat, aby byl numericky reprezentovatelný, ale neřekli nic o vztazích mezi různými možnými numerickými reprezentacemi stejného empirického systému.

Stevens formálně studuje různé formální vztahy mezi různými reprezentacemi/škálami empirického systému, ale neříká nic o tom, proč reprezentace, které mají tyto vztahy, jsou reprezentacemi stejné veličiny. Odpověď nemůže být, že jisté funkce jsou invariantní, protože to je prostě jen jiný způsob charakterizace vztahů mezi transformacemi. Aby byla odpověď na tuto otázku správná, je třeba odkázat na empirické podmínky, které systém charakterizují. Je-li transformace škály přípustná, je to protože funkce, která je výsledkem transformace je zároveň reprezentací/morfizmem empirického systému.

Pokud je i přes tento zásadní nedostatek Stevensova práce užitečná, je to díky tomu, že typy škál jsou esenciální pro určení, do jaké míry jsou přiřazení unikátní či arbitrární [2, 21].

[TODO: někdo tvrdí, že Stevensova klasifikace zase tak užitečná není, viz. Lord’s Statistical Treatment of Football Numbers]

### Suppes

[TODO: přepsat do srozumitelné podoby]

První autor, který integroval předchozí dvě linie výzkumu – přestože takový úmysl nikde explicitně nezmiňuje – byl Patrick Colonel Suppes, který v roce 1951 vydal článek *A set of independent axioms for extensive quantities*[[16]](#footnote-16), ve kterém se pokusil o dvě věci: najít sadu podmínek, které musí empirická doména splňovat, aby ji bylo možno reprezentovat reálnými čísly a zjisti, jaké jsou vztahy mezi takovými morfizmy. Jeho práce se zabývala pouze aditivní empirickými relačními systémy, tj. extenzivními veličinami, ale umožňovalae budoucí zobecnění o další druhy empirických systémů.

Základními pojmy jsou množina objektů *A*, binární relace ≼, jejíž interpretace je „menší nebo stejný ve velikosti než“ a binární operace ⊕ na A kombinace nebo konkatenace. Struktura E = <A, ≼, ⊕> je systém extenzivní veličiny právě tehdy, když splňuje sedm axiomů:

* Pokud x, y, z jsou v A a pokud x≼y a y≼Z, potom x≼z
* Pokud x, y jsou v A, potom x ⊕ y je v A
* Pokud jsou x, y, z v A, potom (x ⊕ y) ⊕ z ≼ x ⊕ (y ⊕ z)
* Pokud x, y, z jsou v A, a x ≼ y, potom x ⊕ z ≼ z ⊕ y
* Pokud x, y, z jsou v A, a ne x ≼ y, potom existuje takové z v A, že x ≼ y ⊕ z a y ⊕ z≼ x
* Pokud x, y jsou v A, tak ne x ⊕ y ≼ x
* Pokud x, y jsou v A a x ≼ y, potom existuje číslo n takové, že y ≼ nx

Z těchto axiomu vyplývá, že ≼ vytváří neostré uspořádání A, stejně jako vyplývá asociativita, komutativita, souvislost a monotónnost ⊕. Spolu s ≼ může být definována relace rovnosti ≈: x≈y právě tehdy když x≼y a y≼x; faktorová množina A/≈ je proto rozkladem A.

Suppes dokazuje dva teorémy. První z nich je reprezentační teorém: pokud empirický systém E je systémem extenzivní veličiny, potom: 1) faktorová množina E/≈ je izomorfní k aditivní pologrupě kladných reálných čísel, tj. existuje prostá funkce *f* z A/≈ do kladných reálných čísel taková, že *f* je izomorfismus E/≈ do matematického systému M=<ℝ+, ≤, +>. Použití izomorfismu je na místě, neboť mluvíme o reprezentaci tříd ekvivalence objektů, což je podobné jako bychom mluvili o homomorfizmu konkrétních objektů a reálných čísel.

Druhý je teorém jedinečnosti, který ustanovuje vztah mezi různými možnými reprezentacemi, tj. do jaké míry je reprezentace jedinečná: každá dvojice aditivní pologrupy kladných reálných čísel, které jsou izomorfní k E, má spolu vztah pomocí podobné transformace, tj. pokud f a g jsou dva takové izomorfismy, tak existuje a > 0 takové, že pro každou třídu ekvivalence x ∈ A/≈, f([x])=a\*g([x]).

Nyní můžeme hovořit o přípustných transformacích: je-li f reprezentací empirického systému E, numerická funkce F je přípustnou transformací pro f, právě tehdy když výsledek aplikace F na f, tj. kompozice F∘f je také homomorfismem E do numerického systému. To, co charakterizuje škálu, je numerická transformace, která zachovává vlastnost „být morfizmem empirického relačního systému do numerického“.

Reprezentační teorém dokazuje pouze, že jisté podmínky jsou dostatečné pro existenci homomorfizmu z E do M (i když v tomto případě jsou i nezbytné). Teorém jedinečnosti tvrdí, že každé dva homomorfizmy z E do M spolu souvisí díky podobné transformaci.

Teorémy rovněž dokazují, že každá reprezentace systému extenzivní veličiny je poměrná škála, ale nedokazují, že pouze reprezentace systému extenzivní veličiny jsou poměrné škály.

Suppes sám upozorňuje, že jeho systém má stále několik nedostatků. Hlavní problém je, že podmínka, že A je uzavřená na operaci ⊕, implikuje, spolu s dalšími podmínkami, že doména systému extenzivní veličiny je nekonečná (a existují arbitrárně velké entity), což porušuje zjevně finitistické nezbytnosti empirického měření.

Dalším následkem je, že relace ≈ definovaná z ≼, je tranzitivní. Suppes připomíná, že díky limitům na citlivost procedur zjišťujících uspořádání, mohou být dva objekty shodné s jinými, ale ne se sebou.

Suppesova práce je přesto první konceptuálně dostačující analýza podmínek které činí fundamentální aditivní měření možné – to je druh měření dostačující, s pár výjimkami, pro fyziku. Na druhou stranu, zejména v sociálních vědách, nepoměrové škály jsou používané pro měření vlastností. Otázka, která se nabízí, je zda Suppesův typ analýzy je vhodný pro studování podmínek, které činí tyto další druhý měření možné. Rozšíření jeho práce vedla ke vzniku současné reprezentační teorie měření, která tuto otázku zodpověděla.

### Reprezentační teorie měření

[TODO: přepsat do srozumitelné podoby]

Obecné schéma je prosté ([34], [28]) : A je množina objektů, kterým přiřazujeme čísla, která mají reprezentovat velikosti atributu objektů. Fakta vztahující se k velikostem jsou vyjádřená určitými empirickými relacemi R1…Rn (některé z nich mohou být operace) mezi objekty. Protože objekty vykazují atribut v určité míře, některé z relací budou určitým druhem uspořádání. Množina objektů a relace vytváří empirický systém E=<A, R1…Rn>. Měření přiřazuje čísla objektům; obvykle reálná čísla, pokud má být aplikována větší řada nástrojů matematiky. Empirické relace a operace R1…Rn jsou reprezentovány numerickými relacemi S1…Sn, které spolu s množinou čísel N (N je ℝ nebo jedna z jejich podmnožin, jako třeba ℝ+) konstituují matematický sytém M=<N, S1…Sn >. Tvrzení, že numerické relace Si reprezentují empirické relace Ri, znamená, že M vyjadřuje čísly to, co E vyjadřuje bez nich, tj. E je homomorfní k M. Analýza, jak je měření možné, pak spočívá ve zkoumání podmínek, které musí E splňovat, aby homomorfizmus do M existoval. K tomu je třeba ustanovit reprezentační teorém a teorém jedinečnosti.

Reprezentační teorém prokazuje, že určité podmínky, tj. axiomy Ax1…Axp, jsou dostačující pro existenci homomorfizmu a teorém jedinečnosti popisuje vztah mezi dvěma takovými homomorfizmy. Proto je třeba dokázat následující: E=<A, R1…Rn> je empirický systém a M=<N, S1…Sn > je určitý numerický systém. Pokud E splňuje Ax1…Axp, potom existuje funkce f taková, že pro každé g, g je homomorfizmus E do M právě tehdy když g je T-transformace f. Zde „g je T-transformace f“ znamená, že existuje funkce F∈T taková, že g=F∘f (∘ je kompozice funkcí), kde T je množina funkcí N do N, tj. T je transformační skupina a T-transformace pojmenovává tudíž typ transformace. Pokud určitý systém E splňuje podmínky, lze s přiřazením pokračovat, nebo pokud již existuje, ospravedlnit jeho typ. Důkaz existenciální části teorému zároveň ukazuje jak provést přiřazení.

Relace a operace v E musí být empiricky možné (ačkoliv to neovlivňuje formální část teorie). Relace a funkce v M musí být „přirozené“, což odstraní určitou část arbitrárnosti eliminací „extravagantních“ matematických reprezentací. To ale neodstraní všechnu arbitrárnost. Teorie předpokládá existující systém M. Ale proč zvolit zrovna určitý numerický systém? Mohou být jiné, také „přirozené“ a k nimž existuje homomorfizmus z E. Případ systému extenzivní veličiny je typickou ukázkou, jak by toto mohlo nastat.

Každý systém extenzivní veličiny je homomorfní do M=<Re+, <=, +>, takže máme aditivní reprezentace f (takové, že a∘bCc právě tehdy když f(a) + f(b) = f(c)), což jsou poměrové škály. Ale je zřejmé, že jsou homomorfní do jiného přirozeného numerického systému M‘=<(1, nekonečno), <=, \*>, protože M a M‘ jsou izomorfní (v jednom směru napře funkcí x->e^x, v druhém směru např. funkcí x->ln x). Takže systém extenzivní veličiny má i multiplikativní reprezentaci f takovou, že a∘bCc právě tehdy když f(a)\*f(b)=f(c). Tyto reprezentace jsou unikátní až do exponenciálních transformací x^n (n >0) a jsou proto logaritmickou poměrovou škálou. Není žádný formální důvod proč vybrat M místo M‘. Je to esenciální element arbitrárnosti, který může být odebrán pouze pragmatickou úvahou: M může být jednodušší, či může být vybrán z historických důvodů, apod. To, že důvodem pro volbu jsou pragmatické důvody, napovídá, že co se týče formálních aspektů teorie, důležité jsou pouze podmínky, které musí splňovat empirický systém. Tento problém arbitrárnosti je komplikovanější, pokud se podíváme na rozšíření původního případu. V některých empirických systémech nemohou být relace a operace interpretovány ihned pomocí známých numerických relací nebo v algebře obvykle používaných funkcí. Kvalitativní empirické vztahy a funkce mají numerickou intepretaci, ale numerické relace a funkce, které tuto intepretaci zajišťují, nejsou zvažovány v obvyklých známých numerických systémech, kterými se algebra obvykle zabývá. Vždy je sice možné definovat matematické vztahy, zkratky kombinací těch základních, které dohromady vytvoří numerický systém, k němuž může být nalezen homomorfizmus. Ale je to poněkud nucená strategie, protože výsledný numerický systém není obvyklý či přirozený ([2]).

### Spojené měření

[TODO: přepsat do srozumitelné podoby]

Jedním z nejdůležitějších rozšíření reprezentační teorie měření je spojené měření, které představili Robert Duncan Luce a John Wilder Tukey[[17]](#footnote-17) v článku *Simultaneous conjoint measurement: A new type of fundamental measurement*[[18]](#footnote-18) z roku 1964.

Spojené měření popisuje situaci, kdy jsou dva atributy měřeny současně a kdy procedura empirického porovnání dává vzniknout uspořádání mezi dvojicemi objektů, z nichž každý je považován za vykazující jeden ze dvou atributů. Uspořádání mezi dvojicemi velikostí atributů tak není odvozeno z dvou již známých uspořádání mezi komponentami dvojice, a číslo není přiřazeno dvojici kombinováním již dostupných přiřazení komponentám dvojice. Přiřazení pro dvojici a pro každou komponentu jsou získány najednou, tedy kombinace i každá komponenta jsou měřeny současně.

Stejně jako u jiných variant reprezentačního měření, je třeba analyzovat podmínky, které činí měření možné. V případě spojeného měření je empirický systém tvořený dvěma množinami velikostí atributů A1 a A2 a uspořádání R mezi dvojicemi prvků obou, tj. R je uspořádání na A1×A2. Zamýšlená intepretace <ap>R<bq> je taková, že „spojení“ atributů a a p převyšuje nebo je stejné jako spojení b a q. Podmínky pro reprezentaci systému E = <A1, A2, R> nejsou pouze ty, díky kterým existuje funkce f z A1×A2 do určité numerické množiny N tak, že <ap>R<bq> právě tehdy když f(<ap>)>=f(<bq>). Pokud by to tak bylo, nelišilo by se to od jiných rozšíření RTM ([2]). Co je pro spojené měření charakteristické je fakt, že reprezentace je učiněna „skrz, ale simultánně s“ přiřazeními pro A. Podmínky musí být takové, aby když je E splní, tak existuje f1 z A1 do N, f2 z A2 do N a F z N×N do N tak, že f(<ap>)=F(f1(a), f2(p)), totiž <ap>R<bq> právě tehdy když F(f1(a), f2(p))>=F(f1(b), f2(q)).

Hlavní požadavek je, aby atributy byly v podstatě nezávislé. Nezávislost znamená, že pokud dva páry se společnou komponentou jsou související podle R jistým způsobem, budou souviset stejným způsobem, pokud jakýkoliv jiný element bude tím společným: pokud <ap>R<bp> pro nějaké p z A2, tak <ap>R<bp> pro každé p z A2, a obdobně pro A1. Je-li nezávislosti splněna, relace R1 na A1 a R2 na A2 mohou být definovány takovým způsobem, že se jedná o uspořádání. Jsou-li splněny i další podmínky, můžeme najít funkce f1, f2 a F.

Tyto obecné podmínky jsou téměř triviální, protože nevyžadují nic od funkce F. Ve skutečnosti jsou požadované reprezentace získány pro určité, odůvodněné případy F. Základním takovým případem je součet. Systémy, pro které existuje taková reprezentace, jsou nazývány aditivní spojené struktury. Pokud systém E=<A1, A2, R> splňuje podmínky, které definují aditivní spojené struktury, tak potom (RT) existuje f1 z A1 do Re a f2 z A2 do Re tak, že <ap>R<bq> právě tehdy když f1(a)+f2(p)>=f1(b)+f2(q) a (UT) stejná ekvivalence platí pro každou lineární transformaci f1 a f2 se stejným koeficientem, totiž transformace ax+b1 a ax+b2 (a > 0); f1 a f2 jsou potom intervalové škály související určitým způsobem.

Podmínky pro aditivní spojené měření jsou následující. Uvažujme dva atributy, A a X; a, b, c představuje tři úrovně A, x, y, z tři úrovně X. Třetí atribut P se sestává z 9 uspořádaných dvojic A a X: (a, x), (a, y)… (c, z). Relace mezi úrovněmi P musí splňovat několik axiomů.

První axiom určuje, že relace úrovní P musí být neostré uspořádání ≽, tj. uspořádání, které je tranzitivní, slabě antisymetrické, reflexivní. Tranzitivita v tomto případě znamená, že pro každé a, b, c z A a x, y, z z X, pokud (a, x,) ≽ (b, y) a (b, y) ≽ (c, z), potom (a, x,) ≽ (c, z). Reflexivita: (a, x) ≽ (a, x) pro všechna a z A a x z X. Antisymetrie: pro všechna a, b z A a x, y z X, pokud (a, x) ≽ (b, y) a (b, y) ≽ (a, x), pak (a, x,) ≈ (b, y).

Axiom jednoduchého vyrušení je následující: Relace na P splňuje jednoduché vyrušení právě tehdy, když pro všechna a a b v A, a x v X je implikováno (a,x) ≽ (b,x) pro všechna w v X tak, že (a,w) ≽ (b,w). Obdobně, pro všechna x a y v X a a v A je implikováno (a, x,) ≽ (a, y) pro všechna d v A tak, že (d, x,) ≽ (d, y). To znamená, že pokud jsou jakékoliv dvě úrovně a a b uspořádané, tak toto uspořádání platí bez ohledu na všechny úrovně X. To samé platí pro jakékoliv x a y z X vzhledem k úrovním A. Jednoduché vyrušení se nazývá, protože jeden společný faktor z dvou úrovní P se „vyruší“, aby zůstal stejný pořadový vztah mezi zbývajícími elementy: a se vyruší z (a,x) ≽ (a,y), takže zůstane x ≽ y.

[TODO: ilustrace axiomů pomocí tabulky a šipek]

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | x | y | z |
| a | (a, x) | (a, y) | (a, z) |
| b | (b, x) | (b, y) | (b, z) |
| c | (c, x) | (c, y) | (c, z) |

Splnění axiomu jednoduchého vyrušení je nezbytné, ale nedostačující pro kvantifikaci A a X. Pouze demonstruje, že úrovně A, X a P jsou uspořádané. Neformálně, jednoduché vyrušení nedostatečně omezuje uspořádání úrovní P, aby mohla být A a X kvantifikována. Např. uvažujme uspořádané dvojice (a,x), (b,x) a (b,y). Platí-li jednoduché vyrušení, tak (a,x) ≽ (b,x) a (b,x) ≽ (b,y), a díky tranzitivitě (a,x) ≽ (b,y). Vztah mezi těmito dvěma dvojicemi, neformálně doleva se sklánějící diagonála, je určena splněním jednoduchého vyrušení (stejně jako všechny podobné diagonály relací na P).

Jednoduché vyrušení ale neurčuje uspořádání doprava se sklánějící diagonály uspořádání na P. I když bylo díky tranzitivitě a jednoduchému vyrušení určeno, že (a,x) ≽ (b,y), vztah mezi (a,y) a (b,x) je neurčený.

Axiom dvojitého vyrušení se zabývá relacemi na P, ve kterých se společné členy předcházejících nerovností vyruší, aby vytvořili třetí nerovnost: (a,y) ≽ (b,x) a (b,z) ≽ (c,y), po vyrušení vznikne (a,z) ≽ (c,x); dvojité vyrušení je splněno, pokud následující nerovnosti neprotiřečí předchozím.

Počet instancí dvojitého vyrušení závisí na počtu úrovní A a X; existuje-li n úrovní A a m X, počet instancí dvojitého vyrušení je n!\*m!, např pokud n=m=3, tak 3!\*3!=6\*6=36 instancí dvojitého vyrušení celkem. Jenže všechny kromě 6 instancí jsou splněny, pokud platí jednoduché vyrušení, a pokud platí jedna z oněch 6, platí všechny. Michell nazývá jednu z těchto instancí Luce–Tukey instancí dvojitého vyrušení. Pokud bylo jednoduché vyrušení testováno na datech, tak potom pouze Luce-Tukey případy dvojitého vyrušení stačí k otestování dvojitého vyrušení. Počet jejich je (n nad 3)\*(m nad 3).

Axiomy vyrušení nestačí pro ustanovení kontinuální veličiny, další podmínky jsou nutné: řešitelnost a archimédovská podmínka.

Řešitelnost znamená, že pro každé elementy a, b, x a y, čtvrtý existuje tak, aby platilo a (a,b) ≈ (x,y).

Archimédovská podmínka – je-li I množina po sobě jdoucích celých čísel (konečná či nekončná, kladných či záporných). Úrovně A tvoří standardní řadu právě tehdy, když existuje x a y v X, kde x ≉ y, pro všechny celá čísla i a i + 1 z I: (ai, x) ≈ (ai+1,y). To znamená, že pokud je x větší než y, tak existují úrovně A které lze najít, které učiní dvojice P stejné. Archimédovská podmínka tvrdí, že neexistuje nekonečněkrát větší úroveň P, a proto není větší úroveň A nebo X.

Protože zahrnují infinistické koncepty, řešitelnost a archimédovský axiom nelze přímo testovat v konečně empirické situaci.

[TODO: conjoint commutativity axiom for additive conjoint measurement]

Aditivní stuktury nejsou jediným typem spojených struktur. Každý typ spojené reprezentace je charakterizován specifickou funkcí F (x+y,x-y,x\*y,…) a různé skupiny podmínek, které činí různé druhy reprezentace možnými, definují jiné typy spojených struktur.

Díez ([2]) upozorňuje, že případy nezávislých reprezentací nelze považovat za spojené měření. Představme si veličiny m1 a m2 s nezávislými reprezentacemi f1 a f2, např. hmotnost a rychlost. Můžeme definovat novou funkci f = F(f1, f2) pro určité F, např. moment = m\*v. Formálně se zdá, že tato situace může být považována za případ spojeného měření, protože lze vždy zkonstruovat empirický systém E=<A1,A2,R> vhodný pro reprezentaci. Ale procedura je poněkud fiktivní, ledaže relace R může být určena bez pomoci pořadí, díky kterému existují reprezentace f1 a f2. Pokud toto není možné, takto popsaná situace odpovídá spíše případu odvozeného měření.

Nejpřirozenější intepretace množin A1 a A2 je, že se jedná o různé atributy, které objekty mají. Ovšem není vždy jasné, že spojené měření je vždy případ měření různých atributů stejného objektu ([2]). Někdy můžeme mít jeden a ten samý atribut vyjádřený objektem různých typů. Např. pokud je A1 množství peněz a A2 spotřební zboží a R je relace preference, f1 a f2 měří utilitu objektů každého typu a f = F(f1,f2) (pro určité F z Re^2 do Re) měří užitek dvojic objektů. V tomto případě není jasné, zda různé užitky jsou různé atributy. Možná nejpřirozenější intepretace by bylo nahlížet na F jako na vyjádření pravidla, které určuje vztah mezi užitky (v obou případech stejný atribut) objektů různých druhů, pravidlo, které vztahuje užitek komponent k užitku celku.

Stejně tak je zavádějící popsat jako spojené měření doménu konkatenovatelných objektů ([2]). Může být dokázáno, že pokud je <A, Q, ∘> systém extenzivní veličiny, tak potom systém <A, A, R>, s R definovaným tak že <xy>R<zw> právě tehdy když z∘wQx∘q, je aditivní spojenou strukturou.

[TODO: někdo (přímo [20]!) používá spojené měření pro případy odvozeného měření, někdo tvrdí, že odvozené měření není spojené měření; jak to tedy je?]

### Problémy reprezentační teorie měření

[TODO: můstek]

[TODO: utřídit, doplnit]

([35], [27], [10], [39], [40], [41], [42], [38])

#### Problémy s empirickým základem RTM

Aby mohla být relace uspořádání tranzitivní, vyžaduje arbitrárně přesné rozlišení, které vědecké měřící nástroje nemají, natož lidské smysly. Je jednoduché vytvořit situaci, kdy lidé, kteří porovnávají objekty podle nějakého extenzivního atributu, vytvoří sadu tvrzení, která není tranzitivní, např. když jsou rozdíly mezi objekty x a y a mezi objekty y a z pod prahem smyslové detekce, zatímco rozdíl mezi x a z je dostatečně velký, aby byl jasně detekovatelný.

Nelze vytvořit pozorovací intepretaci archimédovské vlastnosti, která říká, že množství atributu, který objekt má, může být v principu překonáno spojením dostatečného množství replik jiného objektu se stejným atributem. Nejenže bychom museli mít neomezenou (potenciálně nekonečnou) zásobu „replik“ pro každý objekt, ale samotná relace „x je replikou y“, má některé formální vlastnosti (např. tranzitivitu), které nelze interpretovat pozorováním. Rovněž výraz „může být v princip překonáno“ překračuje závazek empirika „zdržet se víry v cokoliv, co jde za skutečný, pozorovatelný fenomén“.

Uzavřenost operace konkatenace implikuje spočetně nekonečné množství objektů mající atribut v množině D, což rozhodně překračuje to, co lze určit pozorováním. Navíc, algebraické vlastnosti jako pozitivita zahrnují mereologicky[[19]](#footnote-19) bezvýznamné (a tudíž fyzicky nemožné) srovnání objektu *x* s objektem obsahujícím *x* jako část, jako v *x* ≼ (*x* ⊕ *y*).

Tyto problémy s pozorovací intepretací axiomů měřitelnosti neunikly teoretikům měření. Ti si od začátku uvědomovali, jak moc abstrakce a idealizace vyžaduje axiomatizace měření. Jejich odpověď ovšem spočívala v matematických modifikacích standardní axiomatizace; těmito úpravami se snažili odstranit problémy s intepretací relace uspořádání a operace konkatenace. Nutnost, aby byla tranzitivita interpretovatelná pozorováním, řešili tím, že na relaci uspořádání nahlíželi stochasticky, či se uvažovalo o polouspořádání. Uzavřenost konkatenace mohli vyřešit, pokud by konkatenace byla definována pouze pro vlastní podmnožinu domény D. Archimédovská vlastnost by mohla být vynechána použitím konečných měřících struktur (jejichž reprezentace v podobě reálných čísel nevyžadují tuto vlastnost), nebo do ne-archimédovských měřících struktur s ne-standardními reálně číselnými reprezentacemi. Mereologicky nesmyslnému porovnání, které vyžadují algebraické vlastnosti konkatenace, se lze vyhnout, pokud konkatenaci ustanovíme jisté mereologické restrikce.

Žádná z těchto modifikací ale neplní svůj účel; odstraněním určitých neintepretovatelných vlastností tyto modifikace, byť ne vždy explicitně, uvedou nové strukturní předpoklady, které lze obdobně těžko interpretovat pozorováním. Stochastická varianta porovnávání zahrnuje pomocnou pravděpodobnostní strukturu, která musí rovněž mít idealizovanou relaci uspořádání (např. relace „událost x je méně pravděpodobná než událost y“, axiomatizovaná jako tranzitivní a archimédovská), a rovněž musí mít idealizované strukturní předpoklady pro prokázání existence poměrů pravděpodobnosti.

Pokud učiníme empirické relace uspořádání ne-archimédovské, musíme se vzdát ekvivalence logické struktury mezi fyzickými a matematickými relacemi a operacemi. Mohli bychom předpokládat pouze jednosměrnou implikaci, buď z fyzických relací a operací do matematických, nebo naopak. RTM by tak nenabízela buď formální omezení numerického přiřazování, nebo formální odůvodnění, proč by vypočítané teoretické predikce měly odpovídat měřícím interakcím světa.

Zavést operaci konkatenace mereologické omezení (aby se zabránilo fyzicky nesmyslné agregaci a porovnávání objektů s jejích vlastními částmi) by vyžadovalo množství eukleidovské geometrie na pozadí, potřebné pro definování teoreticky smysluplné měřené části (tj. části získané např. rozdělením tyče rovinou kolmou ke směru délky tyče vs. části získané odštěpením). Taková pomocná geometrie nicméně vyžaduje strukturní podmínky na vhodných geometrických relacích (relace „mezi“, ortogonalita, atd.), které jsou opět těžko interpretovatelné pozorováním.

Přestože existují další obtížnosti při empirické intepretaci měřících struktur RTM, tyto již zmíněné dovolují následující závěr: veličiny a jejich měření nemůže být vysvětleno tím, že s veličinami budeme zacházet jako se zástupci pro kvalitativní pozorovatelné manipulace fyzických objektů. Taková intepretace činí axiomy RTM nesprávné, a ve tím výsledku reprezentačním teorémům, podporovaným těmito axiomy, upírá jakýkoliv mimomatematický význam.

Co je tedy axiomy o těchto „měřících“ strukturách říkají? A proč bychom měli akceptovat homomorfizmus do reálných čísel podporovaný těmito axiomy jako odůvodnění kvantitativního měření ve vědě?

RTM může opustit empirické základy a představit axiomatizované měřící struktury jako teorie kvantit, které jsou, jako jiné vědecké teorie, oprávněné k určité idealizaci. Pokud je ovšem zvolena tato pozice, RTM musí čelit několika provázaným teoretickým nevýhodám, jak ukážeme dále.

Jakmile je jasné, že měřící struktury RTM nemohou dát kompletně kvalitativní empirickou intepretaci, rozlišení mezi fundamentálním a odvozeným měření se stane neudržitelným. Všechno měření ve vědě, i ty nejpřízemnější případy, jsou nakonec odvozeným měřením, které vyžaduje předchozí měření a teoretické předpoklady na pozadí (zákony), které vztahují jednu veličinu k druhé. Tato závislost na teorii obzvláště vynikne, když měření vyžaduje pochopení a specifikace založené na teorii, když vyžaduje interakce mezi cílovým systémem a určeným měřícím nástrojem, anebo když vyžaduje kalibrace nástroje. I tak jednoduchá měřící procedura jako měření délky tyče pravítkem předpokládá, mimo jiné, kontrolu tepelné expanze tyče, a tudíž vztah mezi teplotou a délkou. Je tedy důležité pro teorii měření, aby byla formulovaná takovým způsobem, aby její matematický formalismus a formalismus zamýšlené intepretace přirozeně zahrnoval teoretické vztahy mezi veličinami. U RTM nic takového není možné, protože její formalismus nenabízí žádné matematicky významné konstrukce vztahující různé měřící struktury jednu k druhé, nebo budování nových modelů z dříve specifikovaných.

#### Chyba a nejistota v měření

Chyba a nejistota výsledků jsou nevyhnutelné aspekty měření, a moderní věda vyvinula řadu metod pro kontrolování a odhadování chyby. Teorie měření proto musí být formulována takovým způsobem, aby zahrnovala roli kontroly a odhadu chyb. V RTM se s chybou zachází dvěma problematickými způsoby. První se zaměřuje na oslabení logické struktury relací a operací, tj. nahrazení neostrého uspořádání polouspořádáním, které zahrne chyby, jež způsobují netranzitivitu relace. Tento přístup je nedostatečný, neboť se snaží nedokonalosti výsledku měření zahrnout do toho, co je měřeno, místo aby tyto nepřesnosti byly vlastností měřící procedury.

Druhý způsob spočívá ve „schování“ chyby měření v reprezentujícím homomorfizmu f: D->R, což vede k pravděpodobnostní reprezentaci ve formě *P*(α ≤ *f*(x) ≤ β) = *p*, která tvrdí že hodnota f(x) morfizmu *f* pro objekt *x* je mezi α a β s pravděpodobností *p*. RTM ovšem stále nenašla správné pravděpodobnostní podmínky pro relace, včetně podmínky tranzitivity součinu pravděpodobností ve formě Pr(x ≼ y) \* Pr(y ≼ z) ≤ Pr(x ≼ z), či v jiné podobě, která spolu s dalšími podmínkami zaručí existenci reálně číslované náhodné proměnné f spolu s její pravděpodobnostní distribucí P tak, že P(x ≼ y) = P(f(x) < f(y)) platí pro všechny x a y v D.

#### Problém specifikace měřené veličiny

Protože původní metody a procedury pro měření základních fyzikálních veličin jako jsou délka, hmotnost a čas byly vytvořeny dlouho předtím, než vznikla teoretická věda, mohlo by se zdát, že obecně je pochopení cílových atributů nezávisle na teorii, pouze pomocí pozorování, vždy dostačující pro vytvoření procedur a metod pro měření těchto atributů. Takový přístup zdola nahoru příliš nefungoval ani v newtonovské fyzice, např. když se zaměňovaly veličiny později rozlišené jako hybnost a kinetická energie. V sociálních vědách si takový přístup vede ještě hůře; u mnoha atributů (inteligence, chudoba, tělesná zdatnost, atp.), které se vyskytují v různé míře, a mají tak strukturu uspořádání, reprezentační přístup nevedl k jejich správnému měření[[20]](#footnote-20); nejspíše proto, že vyžadují hlubší teorie či modely, které reprezentační přístup neřeší a neobsahuje. Není pak jasné, co přesně indikátor v podobě skóre v testu inteligence měří, neboť měřitel nemá dostatečně přesnou teorii inteligence.

Měřená veličina obvykle bývá částí větší sítě jiných veličin, které jsou kauzálně spojené, či korelované, a zarámované v patřičném modelu nebo teorii, která tvoří základ měřeného objektu (obvykle v podobě rovnic zahrnujících částečně známé parametry). Chybí-li dobře potvrzená teoreticky zarámovaná měření, existuje riziko navržení falešných měření atributů, které o nich neposkytují žádné empirické informace.

Rozhodnutí co a jak měřit je závislé na teorii či modelu. V případě měření komplexních atributů, formální předpoklady RTM vyžadují podstatné teoretické obohacení, které vezme v úvahu idealizace a poskytne framework pro analýzu a intepretaci výsledků.

#### Problém konečných/diskrétních versus nekonečných/kontinuálních

Protože matematické modelování napříč vědami vyžaduje reálná (a komplexní) čísla, RTM se, přirozeně, zaměřuje na reprezentace právě do reálných čísel. Hodnoty homomorfizmu jsou nejen předpokládány ostré, ale zahrnují i všechna reálná čísla (tj. nevypočitatelná či náhodná) která nemohou být získána ani v limitě nekonečné přesnosti dovolené vysoce idealizovaným měřícím nástrojem. S omezeným rozlišením a pamětí skutečných měřících nástrojů jsou numerické hodnoty takto získané v nejlepším případě ležící v relativně malém intervalu a vždy specifikované v konečném počtu desetinných míst. To vede k úvaze, že na měření je třeba nahlížet v termínech modelů diskretizovaného kontinua, a jeho diskretizace indukovaná měřením musí být započítána v teorii měření. Ale RTM žádné matematické ani konceptuální prostředky pro toto neposkytuje.

Faktem je, že ve vědecké a technologické praxi definice měřící procedury obvykle vyžaduje zřídit měřící systém, a ne přímo porovnávat objekty mezi sebou.

[TODO: neempirická intepretace RTM v [43]?]

## Měření v 21. století

[TODO: detaily o současném pojetí měření; Information-Theoretic Accounts of Measurement, Model-Based Accounts of Measurement, etc.]

## Měření v psychologii

[TODO: hlavní problémy měření v psychologii]

### Validita a kauzalita

[TODO]

### [Proč bayesovská statistika?]

[TODO: Proto.]

[TODO: bayesovská statistika a filozofie vědy]

### CTT

[TODO: proč je CTT k ničemu / stručná kritika CTT]

### IRT

[TODO: úvod do IRT]

### Rasch jako případ spojeného měření?

[TODO: je Raschův model pravděpodobnostní variantou spojeného měření? (Ne.)]

### Bayesovské frameworky pro IRT

[TODO: úvod do bayesovské IRT]

### Hierarchické IRT modely

[TODO: hierarchické IRT modely]

[TODO: návaznost na AIG]

### Bayesovské frameworky pro spojené měření

[DECIDE: psát o tom vůbec? Možná zařadit pod „Rasch jako případ spojeného měření?“.]

### [Technické záležitosti]

[TODO: paper vs. computer]

[TODO: CAT]

[TODO: integrovaný softwarový testovací framework?]

1. Ve starší anglické literatuře se termín *magnitude* používal jak ve významu „velikost atributu“, tak i atributu jako takového (*magnitude of magnitude length*); v současnosti je pro význam „atribut“ používáno *quantity*, zatímco *magnitude* označuje „velikost“. Pro atributy, u kterých je prokázána smysluplnost měření (tj. běžné fyzikální atributy jako jé délka, hmotnost, čas, atd.), budu používat „veličina“, jako zažitý český překlad *quantity*; „velikost“ pak odpovídá *magnitude*, např. ve spojeních velikost atributu, velikost veličiny ([22], [24]). [↑](#footnote-ref-1)
2. „Hodnota veličiny poskytnutá měřidlem nebo měřicím systémem“ [22], např. pozice ručičky ukazatele, číslice na displeji, zaškrtnuté odpovědi v dotazníku, apod. [↑](#footnote-ref-2)
3. Relační systém je uspořádaná n-tice množin: kde *D* je neprázdná (konečná, nebo nekonečná) množina objektů a *R* je neprázdná (konečná, nebo nekonečná) množina vlastností anebo n-místných relací či operací. [↑](#footnote-ref-3)
4. „Počítání a měření z epistemologického hlediska“; není-li uvedeno jinak, je popis původního díla ([29]) podle anglického překladu ([30]). [↑](#footnote-ref-4)
5. [TODO: definice] [↑](#footnote-ref-5)
6. [TODO: definice] [↑](#footnote-ref-6)
7. To je obvyklá námitka proti podobným empirickým relacím, a bude ještě několikrát zmíněna, především v kapitole [?]. [↑](#footnote-ref-7)
8. [TODO: definice] [↑](#footnote-ref-8)
9. [TODO: definice] [↑](#footnote-ref-9)
10. „Axiomy veličin a teorie měření“; není-li uvedeno jinak, je popis původního díla ([31]) podle anglického překladu ([12, 13]). [↑](#footnote-ref-10)
11. „Fyzika: základy“; není-li uvedeno jinak, je popis s použitím původního díla ([29]). [↑](#footnote-ref-11)
12. [TODO: Campbell má divné pojetí čísel. Vysvětlit více?] [↑](#footnote-ref-12)
13. [TODO: definice] [↑](#footnote-ref-13)
14. „O teorii škál měření“; není-li uvedeno jinak, je popis s použitím původního díla ([32]). [↑](#footnote-ref-14)
15. Více viz kapitolu [?] [↑](#footnote-ref-15)
16. „Množina nezávislých axiomů pro extenzivní veličiny“; není-li uvedeno jinak, je popis s použitím původního díla ([33]). [↑](#footnote-ref-16)
17. [TODO: před nimi ještě jeden Francouz. Dohledat!] [↑](#footnote-ref-17)
18. „Simultánní spojené měření: nový druh fundamentálního měření“; není-li uvedeno jinak, je popis s použitím původního díla ([20]). [↑](#footnote-ref-18)
19. [TODO: definice] [↑](#footnote-ref-19)
20. Více viz kapitola [?] [↑](#footnote-ref-20)