O měření

Měření je rozšířená a běžná aktivita, kterou lidé provozují tisíce let. Když se díváme na teploměr a přemýšlíme, jestli bude třeba si obléknout kabát, nebo když vážíme ingredience, abychom upekli bábovku, tak obvykle nepřemýšlíme nad tím, co přesně měření je a jak bychom ho definovali. Považujeme ho prostě jen za soubor konkrétních procedur, díky kterým se snáze orientujeme ve svém prostředí. Ale ať už měření využíváme ke zvládání každodenních činností, či zjišťujeme vzdálenosti mezi galaxiemi nebo pomocí urychlovačů částic pozorujeme, na co se rozpadají srážející se protony, ve své podstatě se jedná o proces s jasným cílem: abychom získali informace o světě a vyjádřili je formálním a spolehlivým způsobem. Na druhou stranu, ne každý proces, který odpovídá tomuto popisu, je obvyklé nazývat měřením. Když zjišťujeme kvalitu průmyslového výrobku, počítáme cyklomatickou složitost zdrojového kódu nebo dotazníkem sledujeme spokojenost zákazníků, také získáváme a vyjadřujeme nějakou informaci. Stejně tak jakýkoliv popis, zhodnocení na základě zkušenosti či pouhé odhadování je procesem produkujícím informaci – ovšem už ne tak spolehlivou, přesnou a porovnatelnou.

Pokud tedy ve všech těchto situacích obdržíme nějakou hodnotu, kterou důvodně přisuzujeme určité vlastnosti určitého objektu, jaký je rozdíl mezi měřením, evaluací a subjektivním posuzováním? Rozličné definice měření – které by měly tuto otázku zodpovědět – často obsahují různé stereotypy, které lze shrnout do jedné věty ([61]): „Měření je obvykle definováno jako správné přiřazení čísla určité fyzické proměnné.“ (varianty lze najít např. v [X], [X], [X]).

Takovýto postoj k měření nám ovšem výše uvedené příklady nepomůže rozlišit. Proč?

* Je nutné rozlišovat mezi měřenou vlastností objektu a proměnnou. Měření je přiřazování *hodnot*, symbolických reprezentací, *vlastnostem*, empirickým entitám, nikoliv matematickým reprezentacím (a proměnné nic jiného nejsou). Provádění měření vyžaduje experimentální fázi[[1]](#footnote-1); čistě matematický proces není měření[[2]](#footnote-2) ([61]).
* Měření nepřiřazuje číslo, ale *hodnotu*, což je spojení čísla a reference (např. „23 metrů“, nebo „17 kilogramů“), které společně vyjadřují velikost atributu ([VIM], [X], [61]). Pouze v některých případech, kdy je měření prováděno v absolutní škále (např. při počítání), jsou hodnoty měřené vlastnosti přímo čísla, protože jednotka je „absorbována“ v definici atributu. Navíc lze měřit i ordinální a nominální vlastnosti, pro které čísla hrají zvláštní roli[[3]](#footnote-3).
* Pokud popisujeme měření jako „správné přiřazení“, stává se tato správnost definičním kritériem. Nejenže je však sama nedefinovaná, ale vytváří dojem, že měření je ze své podstaty efektivní. Měření je ovšem obvykle zatíženo chybou a není zcela přesné. Tuto nepřenost je třeba rovněž sdělovat ([X]).
* Měření by nutně nemělo být omezeno na fyzické vlastnosti ([X]).

Kritická diskuze těchto námitek nám dovolí dobrat se přesnějšího pohledu na to, co vlastně měření je. Přitom je nutné si uvědomit, že měření není přirodní entita existující nezávisle na lidech; měření je vytvořené za určitým účelem a nemá žádné nezávislé charakteristiky ([X], [X]). Jak připomíná [61], změny v pojetí měření jsou vyvolány společenskou potřebou, dostupnými technologiemi, vědeckými modely a filozofickými koncepcemi, a snaha objevit „pravé“ měření tudíž nemá smysl.

Pro měření je definující struktura celého procesu, spíše než vlastnosti jeho výsledků anebo vstupů. Tuto strukturu můžeme koncepčně rozdělit do dvou úrovní: první úroveň představuje konkrétní proces zahrnující interakce mezi měřeným objektem, měřicím systémem a prostředím; druhou úroveň tvoří teoretické a abstraktní reprezentace tohoto procesu ([X]). Stejně tak výsledky měření jsou rozlišitelné na dva druhy: na konkrétní úrovni se jedná o indikace[[4]](#footnote-4) měřicího přístroje; na abstraktní úrovni jsou výsledky vědomostní tvrzení o stavu měřeného objektu; často mají formu: atribut *A* asociovaný s objektem *O* má hodnotu *a* s nejistotou *U* ([X]). Měření tedy není čistě empirický proces, jelikož výsledný stav měřicího systému musí být vhodně interpretován, aby mohl být reprezentován jako hodnota měřené vlastnosti. Aby byla vlastnost měřitelná, musí pro ni existovat metrologický model. Tento model je buď začleněn do širší teorie určité domény vědění, nebo pouze odkazuje na základový model, který udává více či méně sociálně dohodnutý předmetrologický význam vlastnosti. První případ je nazývaný silně definované, tvrdé měření a obvykle se používá pro fyzikální vlastnosti (přičemž fyzika, spolu s geometrií, je onou širší teorií); druhý případ je slabě definované, měkké měření, a typicky se aplikuje na ne-fyzické vlastnosti ([X], [X], [X]).

To, že objekty reprezentujeme nějakými hodnotami, má svůj důvod. Měření má nejen praktickou roli, ale rovněž i roli z vědeckého hlediska mnohem důležitější. Díky měření se můžeme nejen ujistit, zdali jsme do těsta na bábovku dali správné množství mouky, ale hlavně ověřit správnost vědeckých teorií. Tyto teorie jsou většinou kvantitativní a obsahují plno matematických rovnic, které sice mají popsat svět, ale samy o sobě o něm nemohou nic říct. Abychom je mohli považovat alespoň za *možné* vysvětlení toho, jak věci fungují, musíme je doplnit mimomatematickou interpretací: všechny funkce v rovnicích představují patřičné atributy objektů, a rovnice samotné vyjadřují změny atributů v průběhu času. Díky této interpretaci můžeme teorie testovat ověřením, zda existuje shoda mezi dvěma druhy hodnot: mezi těmi, které jsme spočítali s pomocí teorie, a mezi těmi, které jsme empiricky změřili ([10]).

Mohli bychom se proto domnívat, že měření slouží k potvrzování a vyvracení teorií. Jenže zároveň jsme si uvědomili, že intepretace výsledků měření je sama závislá na modelech a teoriích. Zdá se tedy, že spojení mezi teoretickými entitami a postupy měření je cirkulární. Van Fraassen ([23]) proto mluví o „problém koordinace“, kdy otázky „Co platí jako měření atributu *A*?“ a „Co je to atribut *A*?“ nelze zodpovědět nezávisle na sobě.

Dobrým příkladem, jak tento problém řešily přírodní vědy, je historie měření teploty. Teplota objektu byl původně kvalitativní koncept, ale v průběhu staletí se ukázalo, že teplota je ve skutečnosti kvantitativní veličina. Zpřesňování měření teploty a navázané teoretické objevy postupnými „epistemickými iteracemi“ ([25], [26]) vedly až k dnešní definici jednotky termodynamické teploty pomocí Boltzmannovy konstanty.

Prvními přístroji pro měření teploty byly termoskopy, které fungovaly na principu známém již od starověku: ochlazený vzduch zabírá menší objem. Termoskopy mívaly podobu nádob na tekutinu a vzduch, spojených tubou tak, aby změny objemu vzduchu dovolovaly tekutině stoupat v tubě, na které byla vyznačena stupnice

Prvotní termoskopy poskytovaly pouze porovnání teplot, a byly ovlivněny atmosférickým tlakem. Odlišné konstrukce různých termoskopů také znemožňovala vzájemné porovnání jimi naměřených hodnot – přestože stupnice šlo označit čísly, tato čísla neměla žádný jiný význam kromě toho, že stanovily, která teplota naměřená konkrétním přístrojem je vyšší než jiná. To ovšem neznamenalo, že termoskopy nemohly být využity k rozvoji teorií. Když Robert Boyle v roce 1662 testoval po něm pojmenovaný zákon[[5]](#footnote-5), mohl změřit, že teplota stoupá (a plyn proto ochlazovat na původní teplotu); naměřené číslice nemusel používat v žádném výpočtu. Použití termoskopů tak neposunulo teorii samotné teploty, byla pořád vnímána jako kvalitativní atribut. Vědci se spíše snažily vyřešit onu vzájemnou porovnatelnost údajů z rozličných termoskopů; později vzniknuvší teploměry proto používaly místo vzduchu jako teploměrnou látku kapalinu – preferovanou se stala rtuť – oddělenou od atmosféry. Stupnice se číslovaly tak, že se zvolily pevné body (obvykle mrznutí a var vody) a teplotní stupeň pak byl podílem tohoto intervalu.

Teploměry tak sice byly poměrně standardizované – např. hodnoty naměřené dvojicí Fahrenheitových přístrojů se lišily pouze zhruba v šestnáctině stupně –, ale přesto nešlo tvrdit, že měřily něco víc než seřazení podle teploty, byť velmi přesné. Pokud by se rtuť roztahovala v jiné míře za nižších a vyšších teplot, nešlo by tvrdit, že jednotlivé podintervaly na stupnici teploměru mají stejný význam. Toto by šlo snadno vyloučit, pokud by člověk znal funkci popisující, jak se mění objem rtuti v závislosti na její teplotě. Jenže taková funkce předpokládá teploměr, jehož ne-arbitrárnost již byla ustanovena. Jinými slovy, použití rtuťového teploměru předpokládá, že rtuť se s teplotou roztahuje uniformě, ale tento předpoklad můžeme otestovat pouze spolehlivým teploměrem – o kterém ovšem zároveň pochybujeme.

Problém je tedy jasný: abychom teplotu mohli považovat za kvantitativní atribut, a používat naměřené hodnoty v matematických rovnicích, je třeba, aby rozdíly mezi jednotlivými stupni měly vždy stejný význam. Pouhým sestrojením standardizovaných teploměrů toho však nedosáhneme. Řešení našel skotský chemik Joseph Black, který se snažil kvantitativně popsat, jakým způsobem proudí teplo při tání, ohřívání čí míchání různě teplých látek. Stejně jako jiní vědci věřil, že teplota – podobně jako délka, hmotnost či čas – se dá spojovat dohromady a rozdělovat, a tyto manipulace lze matematicky popsat. Teplotu objektu ovšem nelze rozdělit na díly podobně jako délku či hmotnost. Black využil již známého faktu, že různé látky se ohřívají různě rychle, chytrými experimenty porovnával naměřené teploty různých látek před a po smíchání, a nakonec dospěl k základní kalorimetrické rovnici ; součin hmotnosti, tepelné kapacity a rozdílu počáteční a koncové teploty je u obou látek stejný. Podobně Black kvantifikoval skupenské teplo: porovnával, jak dlouho trvá, než sníh roztaje a ohřeje se na určitou teplotu, a jak dlouho trvá ohřát na stejnou teplotu vodu o počáteční teplotě 0 °C. Black tak ukázal, že teplota je kvantitativní veličina, protože úspěšně použil naměřené hodnoty v rovnicích. Aby toto mohl udělat, nemusel mít dokázáno, že teplota je kvantitativní – pouze s ní s jako kvantitativní zacházel.

Další klíčový posun v pojetí teploty nastal s objevy Josepha Louise Gay-Lussaca a Johna Daltona na přelomu 18. a 19. století. Ti zjistili, že roztažnost látek má lineární průběh pro zředěné plyny, a proto je u těchto za konstantního tlaku objem přímo úměrný teplotě[[6]](#footnote-6). To mělo důležitý důsledek: teplota přibližně −273 °C představuje absolutní nulu. Toto vedlo k ustanovení termodynamické teploty, jak ji známe dnes. V dnešní době je snadné dokázat, že rtuť se skutečně roztahuje rychleji za rostoucí teploty – ale to nebránilo Blackovi, Gay-Lussacovi a dalším fyzikům formulovat a ověřovat své teorie. Ustanovení teploty jako kvantitativní veličiny a způsob jejího měření byly vzájemně závislé.

Nyní, když jsme měření stručně charakterizovali jako empiricko-konceptuální proces, můžeme se podrobněji podívat na různé pohledy na měření a jeho dílčí komponenty. To nám později dovolí vytvořit komplexní definici měření.

# Měření jako přiřazení hodnot

Již jsme si řekli, že měření reprezentuje empirické entity pomocí symbolických reprezentací. Nejdříve se tedy soustřeďme právě na ně: jaké konkrétně entity a reprezentace jsou do měření zapojené?

* Měřené objekty: tělesa, fenomény, látky, ale také např. i osoby, softwarové produkty, organizace, produkční procesy, atp.
* Atributy: např. délka.
* Měřené vlastnosti: např. konkrétní délka nějakého předmětu.
* Hodnoty vlastností: např. 1,53 metrů; popisují informaci o stavu měřeného objektu vzhledem k měřené vlastnosti.

Na měření pak můžeme operativně nahlížet jako na proces, který – nějakým způsobem – produkuje jednu či více hodnot vlastností, které lze přisuzovat měřené vlastnosti s cílem ji reprezentovat ([61]). Měřit však lze pouze takové vlastnosti, jejichž instance se vzájemně vylučují. Například objekt *O* může mít v daném čase *t* *délku X*, nebo *délku Y*, ale nemůže vykazovat obě vlastnosti zároveň. Množina vlastností, které splňují tuto podmínku, tvoří atribut[[7]](#footnote-7) ([3], [21], [63]); konkrétní instance vlastnosti u určitého objektu pak představuje velikost jeho atributu. Jednotlivé vlastnosti spadající pod stejný atribut lze vzájemně porovnávat. Pro některé, tzv. nominální vlastnosti, existuje pouze jedna smysluplná relace, nerozlišitelnost ([61]), zatímco jiné lze porovnávat i co se týče pořadí, množství, míry či intenzity. Obvykle se uvádí (např. [62], [X], [X]), že tzv. kvantitativní atributy[[8]](#footnote-8) se od ostatních liší tím, že jen ony mají velikost, což znamená, že mezi vlastnostmi existují i další specifické relace kromě rozlišitelnosti. Jak ale v dalších kapitolách zjistíme[[9]](#footnote-9), kvantitativní struktura atributu není podmínkou měření ([60], [8]), a proto budu termín „velikost“ používat pro všechny případy[[10]](#footnote-10).

Proces měření jako přiřazení hodnoty lze shrnout následujícím schématem:

První krok takto pojatého procesu měření (od objektu ke konkrétní vlastnosti) předchází před provedením samotného měření. Je nutné, abychom vytvořili model, který popisuje, jak objekty vykazují atribut, který chceme měřit. Oproti tomu krok poslední (od hodnoty k symbolickému výrazu) je pouze lingvistická záležitost. Klíčový je krok druhý (od vlastnosti k její hodnotě), neboť právě ten je proveden samotným aktem měření.

Jenže co nás opravňuje přiřadit určité velikosti atributu právě tu či onu hodnotu? Zatímco naše možnosti pozorování a interakce s objekty jsou omezené – nemůžeme například vzít váhy a porovnat hmotnost Země a Měsíce – v „nálepkování“ objektů čísly nám nic nebrání. Definovat měření pouze pomocí přiřazování hodnot není dostatečné, aby jako měření byly vyloučeny situace typu: „Myslím si, že tento objekt je dlouhý přesně 1,5300503687901 metrů“. Rovněž jakákoliv korelace mezi atributy a hodnotami by mohla být pokládána za výsledek měření, což by nám umožnilo dle libosti vyvrátit či potvrdit jakoukoliv teorii. Tím by ovšem testování teorií zcela ztratilo smysl; k reprezentaci atributů hodnotami nepostačuje vytvořit zcela libovolné, byť důsledně dodržované, pravidlo, podle kterého čísla přidělujeme ([10]).

Je nyní zřejmé, že způsob, jakým je informace reprezentována představuje nutnou, ale ne dostatečnou podmínku pro měření: pokud je měření proces pro přiřazení hodnot vlastnostem, ne všechny procesy přiřazování hodnot jsou měřením. Samotný způsob přiřazování hodnot je tedy třeba dále specifikovat.

# Měření jako proces prováděný metrologickým systémem

Pokud bychom chtěli tvrdit, že lze měřit pouze fyzické vlastnosti, výše popsaný problém arbitrárnosti přiřazování hodnot by šel vyřešit velmi jednoduše: vlastnost je měřitelná, protože je vstupem řádně kalibrovaného a obsluhovaného fyzického přístroje ([64], [65]). Kvalita přístroje a toho, jak je s ním zacházeno, garantuje kvalitu výsledků měření. Měření a instrumentace jsou ovšem odlišné discliplíny; jejich překrývání je možné pouze v přírodních vědách – vždyť i výše popsaný příklad z historie měření teploty byl částečně popisem snahy o vytváření stále přesnějších standardizovaných teploměrů.

Závěrem je, že existence metrologického systém, do kterého lze vlastnost zařadit, představuje *postačující* podmínku měřitelnosti; vlastnost lze měřit, protože jsou dostupné jak standardy měření propojené řetězcem metrologické návaznosti, tak měřicí sytémy kalibrované na tyto standardy. Metrologický systém je čistě strukturální, a v zásadě by nic nebránilo tomu, aby byl pro pro ne-fyzikální vlastnosti vytvořen něco podobného, jako je Mezinárodní soustava jednotek pro vlastnosti fyzikální. ([61]).

Pojímat definici měření tímto způsobem však není vhodné, protože dostupnost kompletního a plně strukturovaného metrologického systému není *nutnou* podmínkou měřitelnosti vlastnosti. Lze argumentovat, že lidé měřili dávno předtím, než je vůbec napadlo vytvářet metrologické systémy. Místo toho je třeba zjistit, jaký je strukturní důvod v odlišném zacházení s ne-fyzikálními vlastnostmi oproti těm fyzikálním.

# Měření jako proces zprostředkovávající kvantitativní informace

Základní strukturní odlišnost mezi různými druhy atributů jsem již zmínil v předchozí kapitole: obvykle si měření představujme jako přiřazování hodnot, které jsou kvantitativní a reprezentují měřenou vlastnost v podobě čísla a jednotky měření. Toto číslo vyjadřuje poměr velikosti měřeného atributu ke zvolené jednotce stejného atributu ([14]). Nejjednodušším příkladem je vyjádření délky tyče jako násobku délky nějaké jiné, jednotkové tyče; při měření tedy zjišťujeme, kolik jednotkových tyčí by bylo potřeba, abychom vytvořili tyč, která se délkou rovná tyči měřené.

Takovýto způsob uvažování o měření vznikal spolu s vývojem pojetí čísel[[11]](#footnote-11) a má počátek v Eudoxově teorií proporcí, která je popsaná v Eukleidových Základech ([36]): poměr velikostí dvou veličin je vyjádření vztahu mezi těmito veličinami vzhledem k jejich velikosti. Dva poměry veličin *a*∶*b* a *c*∶*d* jsou stejné právě tehdy, když pro všechny dvojice celých čísel *m* a *n* platí:

1. *ma* < *nb* právě tehdy, když *mc* < *nd* (tj. *a*∶*b* < *n* ∕ *m* právě tehdy, když *c*∶*d* < *n* ∕ *m*)
2. *ma* = *mb* právě tehdy, když *mc* = *nd* (tj. *a*∶*b* = *n/m* právě tehdy, když *c*∶*d* = *n* ∕ *m*)
3. *ma* > nb právě tehdy, když mc > nd (tj. *a*∶*b* > *n* ∕ *m* právě tehdy, když *c*∶*d* > *n* ∕ *m*)

To znamená, že dva poměry veličin jsou identické právě tehdy, když jsou oba menší, rovny, nebo větší vždy stejnému podílu dvou čísel.

Každý určitý poměr veličin je díky tomu charakterizován třemi třídami reálných čísel ([3]): pro každou dvojici velikostí *a* a *b* dané veličiny je *a*∶*b* charakterizován třídami {*n* ∕ *m* | *ma* < *nb*}, {*n* ∕ *m* | *ma* = *nb*} a {*n* ∕ *m* | *ma* > *nb*}. Pokud jsou *a* a *b* souměřitelné, druhá třída je neprázdná a tato třída determinuje zbylé dvě (každý prvek druhé třídy stačí k tomu, abychom přesně popsali tuto třídu a tím i ostatní). Pokud jsou *a* a *b* nesouměrné, je druhá třída prázdná a pak první a třetí jsou vzájemně disjunktní a dohromady vyčerpávají všechny číselné poměry; proto jsou poměry mezi nesouměřitelnými velikostmi určeny buď první, nebo třetí třídou. Tudíž pokud bereme jakoukoliv velikost *a* jako jednotku a pokusíme se popsat jinou velikost *b* stejného atributu relativně k *a*, tak přestože nemusí být možné popsat *b* jako dělitelné beze zbytku, vždy je tu poměr *b* k *a*. Tento poměr udává míru *b* v jednotkách *a* s pomocí reálných čísel; v praxi je tento poměr vždy možné jen odhadnout.

Michell ([3]) toto nazývá klasickým konceptem měření; dodnes je základním principem měření v přírodních vědách – metrologie se jen dále soustředí na definice systému jednotek, popsání postupů kalibrace měřících nástrojů, atp. ([X]): tyče neporovnáme mezi sebou, ale používáme měřící pásmo.

Pokud bychom měření pojímali pouze tímto způsobem, mělo by to dva důležité důsledky ([3, 21]):

* Museli bychom zastávat realistickou filozofii měření; pokud odhadujeme a objevujeme vztahy mezi veličinami (např. objekt *A* je dvakrát těžší než objekt *B*, časový interval t2 − t1 je π násobkem intervalu t4 − t3), znamená to, že tyto vztahy ­existovaly dříve než samotný proces měření, a budou existovat nezávisle na tom, zda je určíme či ne. Existence takových vztahů není důsledkem aktu změření, ale podmínkou, aby měření bylo možné.
* Pouze některé atributy jsou měřitelné; protože měření zahrnuje odhadování poměrů velikostí atributů, pouze takové atributy, jejichž instance mají mezi sebou takovéto vztahy, lze měřit – atribut musí mít kvantitativní strukturu ([X]).

Takto pojatá teorie měření musí vysvětlit nejen podstatu této kvantitativní struktury, ale také vysvětlit vztah mezi čísly a výše popsanými poměry velikostí atributu. Zatímco pro Eukleida číslo znamenalo celé číslo a poměr tedy byly něco jiného, v průběhu staletí se koncept čísla rozšířil; pro reprezentací vlastností se ukázala být velice důležitá reálná čísla. Vztah mezi nimi a veličinami popsal jako první Otto Ludwig Hölder. Přestože za první rigorózní příspěvek k problematice zjišťování kvantitativnosti atributů se považuje práce Hermanna von Helmholtza[[12]](#footnote-12), Hölderova esej *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass* z roku 1901[[13]](#footnote-13) představuje z historického hlediska mnohem zásadnější text – byť, jak připomíná Michell, půlstoletí ignorovaný ([3]).

Hölder postupoval ve třech krocích: nejdříve axiomaticky popsal koncept velikosti veličiny, poté vztáhnul reální čísla k poměrům velkostí, a rovněž naznačil, jakým způsobem – odlišným od extenzivního měření – by mohla být kvantitativnost atributu empiricky zkoumána: s pomocí toho, jak se axiomy pro intervaly přímky, které neobsahují aditivní operaci, redukují na axiomy veličiny.

Axiomů veličiny Hölder uvedl 7:

1. Pro velikosti *a* a *b* platí jedno z následujících tvrzení: *a* = *b* a *b* = *a*; *a* > *b* a *b* < *a*; *b* > *a* a *a* < *b*.
2. Pro každou velikost existuje velikost, která je menší.
3. Pro každou uspořádanou dvojici velikostí *a* a *b* je přesně stanovený jejich součet *a* + *b*
4. *a* + *b* > *a* a *a* + *b* > *b*
5. Pokud *a* < *b*, existuje takové *x* a *y*, že *a* + *x* = *b* a *y* + *a* = *b*
6. Vždy platí, že (*a* + *b*) + *c* = *a* + (*b* + *c*)
7. Kdykoliv jsou všechny velikosti rozděleny do dvou tříd tak, že každá velikost patří do právě jedné třídy, žádná třída není prázdná a každá velikost v první třídě je menší než každá velikost v druhé třídě, pak existuje taková velikost ξ, že každá ξ‘ < ξ patří do první třídy a každá ξ‘‘ > ξ patří do druhé třídy

Hölder z výše uvedených axiomů odvodil řadu teorémů, např. komutativitu a archimédovskou vlastnost. Ty nejdůležitější důsledky takto popsaných kvantitativních atributů si nyní rozebereme podrobněji.

Podstatnou vlastností kvantitativních atributů je aditivní struktura: každá veličina může být rozložena do komponentních částí, které jsou sami instancemi té samé veličiny. Např. jakákoliv délka může být rozdělena na dvě části, které jsou sami rovněž délkami, které lze dále rozložit ([21]). Podle Hölderových axiomů nezáleží na pořadí (*a* + *b* = *b* + *a*) a seskupení veličin ((*a* + *b*) + *c* = *a* + (*b* + *c*)) – kombinování atributů je komutativní a asociativní. Interní struktura atributu je tudíž taková, že kombinace jeho úrovní jsou strukturně podobné matematické operaci sčítání. Aditivní struktura ale v tomto smyslu není vlastností čísel, které jsou přiřazeny úrovním atributu, atribut sám musí splňovat kvantitativní strukturu ([21]). Jinými slovy, operátor „+“ by neměl být chápán ve stejném smyslu jako u sčítání čísel; taková matematická operace je často interpretována jako empirická operace konkatenace. Tato intepretace ovšem není zamýšlena zde; Michell ([15]) doporučuje interpretovat *a* + *b* = *c* jako relaci mezi velikostmi *a*, *b* a *c*: velikost *c* je složena z diskrétních částí *a* a *b*. Jen proto, že velikosti jsou v relaci, neznamená to, že pro ně existuje vhodná operace konkatenace nebo rozdělení. Může tomu tak být (např. u délky), ale nemusí (hustota, teplota). Aditivní relace mezi veličinami je teoretická a můžeme k ní získat přístup často nepřímo.

Hölderovy axiomy rovněž vyžadují, aby atributy byly spojité, tj. nekonečně „husté“: mezi každými dvěma úrovněmi atributu musí být třetí, ve struktuře atributu nejsou žádné mezery. Atributy ale mohou být spojité, ale nemusí mít aditivní strukturu – spojitost není postačující podmínkou kvantitativní struktury; je pozue postačující podmínkou ordinality ([21]).

Nejdůležitějším je nicméně teorém, který dokazuje, že pokud je atribut kvantitativní, je v principu měřitelný. Každé dvě jeho úrovně mezi sebou mají určitý vztah; Hölder ukázal, že pro danou strukturu, pro jakékoliv *a* a *b* v *Q*, velikost relativní k *b* může být vyjádřena kladným reálným číslem *r*, kde *a* = *r* \* *b*. Tedy poměr *a* k *b*, kladné reálné číslo, je mírou *a* v jednotkách *b*. Jak připomíná Michell ([15]), díky tomu můžeme uvažovat o existenci kvantitativních vztahů mezi atributy (jako mezi hmotností, objemem a hustotou). Pro měření tak musíme objevit, ať už přímo či nepřímo, aditivní strukturu atributu tak, abychom mohli zjišťovat poměry mezi velikostmi tohoto atributu. Jestliže tato struktura platí, je možné dokázat, že velikosti atributu jsou ve vzájemných numerických vztazích. Měření, tedy odhad poměru, probíhá stanovením arbitrární úrovně atributu, tj. jednotky (např. metr, kilogram, sekunda) a odhadu poměru mezi jednotkou a velikostí měřeného atributu ([21]).

V druhé části svého článku Hölder představil 10 axiomů pro orientované úsečky z přímky (tj. každé dva body přímky v určitém pořadí a které bychom mohli nazvat „interval“), pro které nedefinuje aditivitu, a přesto odvodí, že vzdálenosti jsou kvantitativní, což znamená, že se řídí axiomy veličin z předchozí části textu. Pro odlišné body na přímce *A* a *B* definuje interval *AB*, rozkládající se od *A* k *B*. Pro takové intervaly platí implicitní relace součtu: pro jakékoliv tři body *A*, *B* a *C*, pokud *A* < *B* < *C*, tak *AB* + *BC* = *AC*. A pokud vzdálenost *AB* je *a*, *BC* je *b* a *AC* je *c*, pak *c* = *a* + *b*, tedy implicitní aditivita intervalů zahrnuje implicitní aditivitu vzdáleností. Hölderových 10 axiomů pro intervaly způsobuje, že vzdálenosti jsou kvantitativní bez explicitní zmínky aditivity. Klíčový je sedmý axiom: Pokud *A* < *B*, *B* < *C*, *A*‘ < *B*‘, *B*‘ < *C*‘, vyplývá z *AB* = *A’B‘* a *BC* = *B’C‘* to, že *AC* = *A’C‘*. Přímky představují pouze model pro uvažování o jiných veličinách, protože co platí pro intervaly na přímce, nemusí platit, pokud je testováno vzhledem k jiným atributům, o kterých čekáme, že jsou kvantitativní. Pokud by se našel způsob, jak Hölderovu teorii aplikovat v jiných kontextech, existoval by způsob nepřímého testování aditivity; Hölderova práce tak byla počátkem, kterého využili následující teoretici měření ([3, 15]).

Některé komentáře k Hölderově práci ji intepretují z pohledu reprezentace[[14]](#footnote-14): tvrdí, že Hölder formálně studoval podmínky, které jsou nutné anebo dostatečné k numerické reprezentaci faktů, které nastávají v doméně objektů, protože tyto objekty mají určité velikosti atributů [2]. Někdo by mohl intepretovat Hölderovy axiomy jak příspěvek k extenzivnímu měření – pokud tím myslí měření pomocí přímo pozorovatelné konkatenace, pak je tato intepretace sporná ([12?], [X]). Hölder tento termín nepoužívá a z jeho textu nevyplývá, že operace sčítání v axiomech je pozorovatelná.

Höldera nezajímaly ani tak empirické struktury, ale to, co nazval absolutní kontinuální veličina, která je teoretickým konceptem pro vysvětlení pozorování, ale který není vždy otevřený přímé verifikaci; je to koncept, který podpírá kvantitativní vědy – pokud vědec přijde s teorií, která popisuje kvantitativní atributy, jsou to většinou atributy v Hölderově smyslu ([12]). Hölder chápal své axiomy jako udržující reálná čísla pomocí poměrů veličin, spíše než že by ustanovoval korespondenci mezi reálnými čísly a takovými poměry, konstruovanými jako nezávislé koncepty ([12]).

Darrigol ([17]) k tomu dodává, že zatímco Helmholtz – který se již před Hölderem pokoušel o axiomatickou definici měřitelných atributů[[15]](#footnote-15) – pokračoval v eukleidovské tradici celých čísel a racionální míře, Hölder připouštěl iracionální čísla. Zatímco Helmholtz považoval své axiomy jako kritéria pro výběr měřitelných atributů konkrétních objektů, Hölder ty své považoval za základ matematické teorie veličiny. Nekladl důraz na jejich aplikaci, důležitější pro něj bylo, aby si axiomy neprotiřečily a byly nezávislé. Axiomy proto nejsou použitelné jako empirické testy měřitelnosti atributů: tranzitivita rovnosti a komutativnost sčítání nebyly jednoduše testovatelné, stejně tak kontinuita vyjádřená jeho posledním axiomem.

◊

Je pravda, že proměnné ve fyzikálních zákonech označují poměrové kvantity, a že mocné nástroje veličinového počtu a dimenzionální analýzy lze použít pouze na poměrové kvantity, jež jsou strukturně víc informativně než např. čistě pořadové vlastnosti ([60]). To, že je atribut kvantitativní, ale není postačující podmínkou, aby přiřazení hodnoty bylo měřením ([61], [96], [60]). Hádání, technické specifikace, předpovědi, atp. produkují kvantitativní hodnoty veličin, což je ale nečiní měřením. A zároveň není zřejmé, proč by kvantitativnost měla být nutnou podmínkou měření. V poslední verzi VIM ([X]) jsou mezi měřitelné entity zařazeny i ordinální vlastnosti (např. Mohsova stupnice tvrdosti), protože existují vědecké a technologické důvody, proč měření pojímat šířeji. Že používání jednotek v měření je pouze tradicí, dosvědčuje i nejednoznačnost související s počítáním, které je obvykle považováno za odlišné od měření – viz název seminální práce Helmholtze „Počítání a měření z epistemologického hlediska“[[16]](#footnote-16) – přestože některé měřící nástroje jsou založené na počítání, např. Geigerův počítač či atomové hodiny ([X]).

Invariantní rysy procesu měření jsou nezávislé od algebraických struktur měřených atributů, a proto by – z pohledu struktury procesu – šlo koncept měření zobecnit tak, aby zahrnoval i nominální vlastnosti. Kontrapozice měření vs. klasifikace je zavádějící, protože klasifikace je pouze komponenta procesu „důvodné atribuce jedné nebo více hodnot vlastností nominální vlastnosti“ (parafráze VIM definice měření, kde je kvantita použita místo nominální vlastnosti). Akceptace tohoto zobecnění je záležitost sociální konvence. ([60])

# Měření jako morfní mapování

Pokud nechceme měření omezit pouze na kvantitativní atributy, stojíme před nelehkým úkolem – protože chceme o měřeném objektu činit správné závěry, data získaná měřením musí řádně reprezentovat informaci, kterou lze o měřeném atributu zjistit. Tato podmínka byla formalizována v reprezentační teorii měření, která se zaměřuje na interní strukturu atributu, tj. jaké jsou vztahy mezi jednotlivými instancemi atributu; například jak je strukturovaná třída všech délek. V předchozí podkapitole jsem zmínil, že mezi vlastnostmi, které tvoří určitý atribut (délka A, délka B, …) mohou existovat určité relace. Obdobné relace musí existovat i mezi hodnotami: např. jedna velikost atributu je vždy *x* násobkem jiné velikosti, kde *x* je reálné číslo, obvykle kladné. Pokud je atribut, jako třída, kvantitativní, různé instance tohoto atributu zachovávají poměr. Ve fyzice jsou měřitelné atributy obvykle neohraničené, spojité a kvantitativní – o tom jsme mluvili v předchozí kapitole – ale neexistuje žádný důvod, aby tomu tak bylo u všech atributů.

Má-li atribut kvantitativní strukturu, lze usoudit, pouze pokud pro to získáme určité důkazy. Jakmile máme vytvořenou reprezentaci v podobě hodnot, určité matematické výroky o těchto přiřazených hodnotách jsou pravdivé, ale zároveň nemusí být smysluplné pro dané objekty, neboť ne každý numerický fakt vyjadřuje situaci závislou pouze na objektech a měřených atributech (a stejně tak ne každá situace mezi objekty může být reprezentována numericky). Není těžké najít příklady, kdy vztahy mezi hodnotami a operace s nimi, jako jsou rovnost, rozdíl, podíl, atd., nekorespondují se vztahy anebo operacemi s měřenými objekty. 80 je dvakrát 40, ale neplatí, že objekt s teplotou 80 °C je dvakrát teplejší než objekt 40stupňový (neboť teplota 0 °C neodpovídá absenci teploty). Intervaly mezi čísly nemusí obsahovat empirickou informaci: je-li respondent dotázán, aby na škále 1 až 7 – jak to je v psychologických testech běžné – ohodnotil svůj souhlas s daným výrokem, není na první pohled zřejmé, proč by rozdíly mezi 4 a 5 a mezi 6 a 7 měly odpovídat stejné změně v míře souhlasu. Interval mezi (reálnými) čísly lze donekonečna dělit, na rozdíl od fyzického intervalu mezi dvěma Coulomby (neboť elementární náboj je nedělitelný). Rovnost mezi čísly je tranzitivní relace, ale empirické porovnání velikostí atributu nám umožní odhalit pouze přibližnou rovnost, která tranzitivní není.

Dřívější zájem teoretiků měření se proto zaměřoval na tyto a podobné problémy; snažili se je řešit identifikováním algebraických struktur v kvalitativní zkušenosti se světem, tj. *dříve*, než je prováděno přiřazení čísel. Helmholtz a Campbell postupovali právě tímto směrem; jejich příspěvky, a navazující bádání postupně vedly k vytvoření reprezentační teorie měření (RTM). Ta chápe měření jako přiřazování čísel objektům a to takovým způsobem, že jisté operace s měřenými objekty a vztahy mezi nimi odpovídají nebo jsou reprezentovány operacemi s čísly a vztahy mezi nimi; aby tato reprezentace byla možná, musí objekty splňovat určité empirické náležitosti. Měření se tedy v tomto přístupu rovná vytvoření vhodné reprezentace, tedy mapování objektů na čísla. Protože RTM byla velice populární především v sociálních a behaviorálních vědách, budeme se jí věnovat podrobněji.

Klasická teorie měření (popsaná v předchozí kapitole) jasně rozděluje ontologické podmínky, které musí splněny, aby bylo měření možné (atribut musí být kvantitativní) a epistemologický proces, pomocí kterého odhadujeme hodnotu atributu (porovnání s jednotkou). Teoretici měření nicméně ne vždy akceptovali takovéto rozdělení mezi ontologii a epistemologii; když se na přelomu 19. a 20. století objevily filozofické teorie měření, teoretici tvrdili, že měření vyžaduje specifické epistemologické procesy, které zjistí kvantitativní strukturu atributu a dovolí vytvořit škály ([21]).

RTM stojí na dvou pilířích, empirické filozofii a matematické metodě reprezentačních teorémů. Empirickou epistemologii používá k zdůvodnění „základních postupů pro přiřazování čísel objektům nebo událostem na základě kvalitativních pozorování“. Předpokládá, že svět je neodmyslitelně nekvantitativní, a jsme to my, kdo mu ukládá kvantitativní podobu tím, že jeho kvalitativní rysy reprezentujeme přiřazenými čísly. Tyto kvalitativní rysy jsou pozorovatelné; protože objekty lze porovnávat podle velikosti atributů, existují mezi nimi určité empirické vztah (jsou nazývány empirické, čímž se zdůrazňuje, že existují nezávisle na tom, jestli jsou přiřazeny hodnoty); například sadu pevných tyčí můžeme seřadit tak, že jejich vzájemným porovnáváním zjistíme, které tyče jsou delší a které kratší. Objekty, přesněji řečeno množina vlastností spolu s relacemi, tak vytváří empirický relační systém[[17]](#footnote-17). Přířazené hodnoty tvoří symbolický relační systém (čímž se zdůrazňuje, že hodnoty vlastností samy o sobě jsou symboly zprostředkovávající informace o vlastnostech), neboť i ony mají strukturu a řídí se matematickými zákonitostmi. Oba systémy musí nějakým způsobem korespondovat; empiricky významné aspekty matematické struktury jsou ty, které reprezentují relevantní vztahy mezi měřenými objekty. Aby bylo měření možné, je nutné nejen definovat oba relační systémy, ale i určit podmínky, které musí splňovat, aby bylo možné zobrazení z empirického relačního systému do numerického. Přísnější podmínky reprezentace zajišťují smysluplnost měření.

Jenže – reprezentační teorie měření zdůrazňují rolí podmínek reprezentace, tak jak jsou aplikovaný při *přímém* porovnávání objektů, a zanedbávají klíčový fakt, že měření je založeno na přímém i nepřímém porovnání měřených objektů a standardů měření ([61]). V tomto pohledu, podmínky reprezentace mohou být samy o sobě nutnou podmínkou pro měření, ale sotva lze obhájit, aby byly podmínkou postačující. A i kdybychom toto přijali, reprezentační teorie měření mají řadu dalších nedostatků, ke kterým se dostaneme po rozebrání její historie.

## Helmholtz

Když v roce 1887 Hermann von Helmholtz vydal svůj esej *Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet*[[18]](#footnote-18), položil v jejím úvodu dvě otázky, které lze – spolu s odpověďmi na ně – považovat za základ budoucí RTM ([?]):

* „Jaký je objektivní význam toho, že určité dva objekty prohlásíme za stejné v určitém ohledu?“
* „Jaké vlastnosti musí mít fyzické spojení mezi dvěma objekty, abychom mohli porovnatelné atributy těchto objektů kombinovat pomocí součtu, a následně pokládat tyto atributy za veličiny, které lze vyjádřit pomocí čísla?“

Helmholtz tvrdí, že to, co nás opravňuje považovat atributy objektů za kvantitativní, jsou dvě procedury:

1. Porovnání objektů, které umožňuje zjistit jejich rovnost vzhledem k onomu atributu.
2. Konkatenace objektů, která umožňuje sčítání velikostí atributu.

K proceduře porovnání Helmholtz dodává, že relace rovnosti musí být symetrická[[19]](#footnote-19) a tranzitivní. Výsledek porovnání musí zároveň záviset výlučně na tom, že objekt disponuje atributem do určité míry. Veličina je atribut určitého druhu; veličiny jsou stejného druhu, pokud jejich velikosti lze porovnávat stejnou procedurou. Helmholtz udává příklady takových veličin (hmotnost, délka, trvání) i procedur pro jejich porovnávání (rovnováha, shoda, současnost).

Porovnat objekty a zjistit, zda jsou vzhledem ke zkoumanému atributu stejné, či nikoliv, ale pro zajištění, že je atribut kvantitativní, nestačí. Očekávali bychom, že nyní se Helmholtz bude věnovat relaci uspořádání, ale podle jeho názoru není možné rozhodnout, která veličina má větší velikost, pokud není definována operace konkatenace objektů, s následujícími vlastnostmi: výsledná velikost veličiny není ovlivněna pořadím konkatenace objektů (komutativní[[20]](#footnote-20)); je asociativní[[21]](#footnote-21); výsledná velikost není ovlivněna nahrazením ekvivalentních objektů (tj. objektem se stejnou velikostí atributu jako má nahrazovaný objekt). Díky těmto vlastnostem může být konkatenace považována za součet. Helmholtz považuje své podmínky jako experimentální test potenciálních veličin; to, že podmínky byly splněny pro všechny konkatenace ve fyzice znamená, že fyzikové již provedli výběr, které atributy jsou veličinou. Teprve po definici konkatenace Helmholtz definuje pořadí mezi velikostmi, pomocí toho, že výsledek konkatenace dvou objektů je větší než jeho části.

Po definování rovnosti, konkatenace a uspořádání, Helmholtz přistoupil k dělení: „veličiny, které lze sčítat, jsou obecně i dělitelné“; ačkoliv není jasné, zda je další dělení empirická podmínka nebo pouze důsledek sčítání [11]. Dělitelností měl Helmholtz na mysli možnost nahlížet na danou velikost veličiny jako na součet stejných velikostí, a tím na možnost přibližně vyjádřit velikost veličiny jako násobek fixní jednotky; přesnost aproximace lze donekonečna zvyšovat pomocí řady podjednotek. Implicitně tak předpokládá Archimédovskou vlastnost, která spolu s existencí rozdílu umožňuje arbitrárně přesnou aproximaci poměrů pomocí racionálních čísel.

Není těžké v Helmholtzově pojetí najít řadu chyb (z nichž některé, jak zjistíme později, platí pro samotnou RTM). Jak poznamenává Michell [3], porovnání objektů je prováděno procedurou, která není dokonalá, a poskytuje pouze určitou přesnost rozlišení[[22]](#footnote-22): různé objekty mohou mít její stejnou velikost, a přesto nemusí být porovnány jako stejné, a naopak. Michell [3] dále dodává, že Helmholtzovo pojetí definice atributu je však příliš operacionalistické: objekty však mají hmotnost, i když je nikdo neváží.

Rovněž Helmholtzova definice relace „větší než“ je špatná; Díez [2] upozorňuje, že není definovaná pro *jakékoliv* velikosti atributů, ale jen pro ty složené konkatenací, a Darrigol [11] si všimnul ještě závažnější chyby v Helmholtzově uvažování: existují procedury konkatenace, pro které výše uvedená definice relace „větší než“ neplatí; např. obvyklé pravidlo pro skládání sil by vedlo k závěru, že jakákoliv síla je větší než jiná síla. Helmholtz měl vyžadovat, aby konkatenace byla taková, že umožňuje vytvořit uspořádání, nebo nesnažit o uspořádání závislém na konkatenaci – tuto představu měl, neboť si byl vědom, že pro určitou proceduru porovnání může existovat několik způsobů konkatenace, které by vedly k jinému pořadí: např. dva vodiče můžeme porovnávat stejnou procedurou pro vodivost i pro odpor, ale procedury konkatenace máme k dispozici dvě: vodiče můžeme spojit buď sériově, či paralelně. To vede k různým veličinám (odporu a vodivosti) a jinému seřazení vodičů. Helmholtz si neuvědomil, že korelace uspořádání a metody konkatenace neznamená, že konkatenace musí předcházet pořadí.

Navíc platí podobná námitka jako v případě porovnání: díky tomu, že údaje získáme pozorováním, podmínky budou pouze aproximovány, navíc omezené pouze na omezenou řadu objektů. Vymyslet vhodný způsob empirického porovnání objektů není snadné. To, že si to Helmholtz neuvědomil, byla chyba, kterou pozdější teoretici měření řešili tím, že své teorie založili pouze na axiomatizaci přímo pozorovatelných relací a operací.

Michell [3] dodává, že Helmholtz poskytl vysvětlení pouze jednoho způsobu zjišťování, zda je atribut kvantitativní. Ale pokud není fakt, že je atribut kvantitativní, logicky navázaný na existenci vhodné, pozorovatelné aditivní relace konkatenace, nemůže být takto logicky navázaný ani způsob testování hypotézy kvantitativnosti. Bylo by absurdní předpokládat, že nemůžeme najít nepřímý důkaz kvantitativní struktury, vzhledem k tomu, jak jsou přírodní procesy kazuálně propojené. Hypotéza, že atribut je kvantitativní, je empirická i teoretická – jako empirická potřebuje pozorovatelné testování, jako teoretická nepotřebuje mít tyto testy přímé.

Závěrem se hodí dodat, že Helmholtzova esej měla vesměs malý dopad mezi fyziky – učebnice stále definovaly měření klasickým způsobem, tj. jako porovnání veličiny s jednotkou stejného druhu [11].

## Campbell

Vlivnou knihu britského fyzika Normana Roberta Campbella z roku 1920 *Physics: The Elements*[[23]](#footnote-23) můžeme považovat za první cílevědomý příspěvek do reprezentační teorie měření ([3]).

Campbell definoval měření jako „proces přiřazování čísel[[24]](#footnote-24), aby reprezentovaly vlastnosti“ a pokládá otázku: „Proč můžeme měřit a skutečně měříme některé vlastnosti těles, zatímco neměříme jiné?“ Campbell nepokládal existenci kvantitativních veličin a problémy měření jako záležitost obecné logiky, oddělené od okolností převažujících ve fyzice; předpokládal, že měření je možné, protože určité rozsahy fyzikálních atributů jsou podobné číslům – jsou aditivní, a proto jim lze přiřadit čísla takovým způsobem, že numerické sčítání reprezentuje fyzickou aditivitu. Proto považoval demonstraci fyzické aditivity experimentálně za základ měření; takové měření nazýval fundamentálním. Hlavním cílem numerické reprezentace atributů je vyjádřit jejich vzájemné vztahy jako numerická pravidla. Potom můžeme identifikovat systém numerických konstant, např. hustotu, což je jiný poměr hmotnosti k objemu pro každý druh hmoty. Takové systémy konstant nazýval Campbell odvozenými veličinami a jejich numerickou identifikaci odvozeným měřením.

První podmínkou měření je, že atribut, mezi objekty, které ho vykazují, generuje asymetrickou[[25]](#footnote-25) a tranzitivní relaci, tj. relaci uspořádání. Tato relace musí být taková, že pokud nespojuje dva objekty, tyto objekty musí být spojené s jinými stejným způsobem (s pomocí výše uvedených konvencí): pokud ne a ≽ b a ne b ≽ a, tak a ≽ c právě tehdy, když b ≽ c. Na objekty které nejsou spojené relací je nahlíženo jako na rovné vzhledem k velikost atributu. Relace, která splňuje tyto tři podmínky, umožňuje definovat relaci rovnosti: a ≈ b právě tehdy, když ne a ≽ b a ne b ≽ a.

Splnění těchto podmínek umožňuje určité „empiricky informativní“ numerické reprezentace (např. tvrdost minerálů). Rozdíl mezi přiřazenými čísly nicméně nepředstavuje fyzický rozdíl. Aby tento rozdíl byl reprezentován a atribut byl měřitelný, musí existovat fyzická operace konkatenace ⊕ s vlastnostmi podobné numerickému sčítání.

Konkatenace musí mít vlastnosti ([2]):

1. pozitivita: a ⊕ b ≽ a a a ⊕ b ≽ b
2. ≈-komutativita
3. ≈-asociativita
4. ≈-monotónnost
5. ≽-monotónnost
6. Přidáváním objektů postupně musíme být schopni vytvořit standardní sérii (standardních objektů, tj. za sebou jdoucí kombinace objektů, které jsou podobné) z níž bude jeden člen stejný s ohledem na vlastnost jako jakýkoliv jiný objekt, který chceme změřit.

Tato poslední podmínka, která je silná, implikuje slabší podmínku řešitelnosti a archimédovskou podmínku, které jsou empiricky mnohem rozumnější a dostačující, aby plnili funkci, kterou Campbell plní pomocí 6) [2].

Jestli operace ⊕ a relace ≽ plní tyto podmínky je otázka, kterou lze zodpovědět pouze empiricky.

Campbell pak ukazuje, jak arbitrární je přiřazení čísel, pokud atribut splňuje podmínky. Při jednom způsobu kombinace, pokud máme dvě různá přiřazení čísel taková, že v obou případech čísla splňují s ohledem na > a + podmínky splněné objekty vzhledem k ≽ a ⊕, jedno přiřazení je násobkem druhého. Arbitrární je volba jednotky, poměr hodnot se nemění.

V některých případech existuje víc než jeden způsob konkatenace, který splňuje podmínky; další arbitrárnost, vzniklá volbou z těchto konkatenací, může domnělá, protože uspořádání ≽ může být jiné pro různé konkatenace. Campbell zmiňuje odpor a vodivost; obě splňují podmínky, ale jedna s opačným uspořádáním než druhá.

Pokud díky dvěma konkatenacím můžeme měřit stejnou vlastnost, uspořádání, vzhledem ke kterému obě přiřazení splňují podmínky, musí být stejné v obou případech. Jinak by vzniknul neodstranitelný prvek arbitrárnosti – kterou metodou je vlastnost měřena?

Protože ne každé měření je fundamentální, Campbell se pokusil toto vyřešit konceptem odvozeného měření – odvozené veličiny mohou být vyjádřeny jako funkce fundamentálních veličin, např. hustota jako funkce hmotnosti a objemu –, protože relevantní numerické zákony se ukázaly být součinem fundamentálních veličin. Je-li nějaký atribut korelovaný se součinem mocnin fundamentálních veličin, potom je získaná numerická hodnota mírou toho atributu. Přestože se tedy fundamentální i odvozené veličiny liší v proceduře měření, Campbell je považuje za veličiny ve stejném smyslu.

Michell ([3]) toto pojetí kritizuje: tvrdí, že to, zda je či není veličina fundamentálně měřitelná v Campbellově smyslu, musí být vztahem mezi veličinou a vědci, a není to vlastnost inherentní veličině. Pokud fundamentální a odvozené veličiny zahrnují veličiny ve stejném smyslu, vlastnost „být kvantitativní“ je způsobena interní strukturou atributu, a ne v jeho externích vztazích, např. ve vztazích s vědci pomocí operace fyzické konkatenace, kterou jsou či nejsou schopni provádět. Pokus omezit řadu externích vztahů, s pomocí kterých vědci mohou objevit kvantitativní strukturu, musí doprovázet dva důkazy: 1) že tímto způsobem jsou schopní indikovat existenci veličiny, a 2) že jiné způsoby detekce kvantitativní aditivity jsou nemožné.

Cambpell podle Michella [3] splnil část prvního tím, že operace konkatenace indikuje kvantitativnost atributu; nesplnil druhou půlku prvního, protože neukázal, že konstanty v numerických zákonech musí indikovat kvantitu. Navíc zcela ignoroval druhý úkol. Díky těmto mezerám v jeho teorii byl v evaluaci měření v psychologii tak dogmatický. Campbellova teorie je nedostatečná, neboť 1) soustředí se pouze na speciální případ fyzikálních atributů a ignoruje obecnější otázky kladené logikou měření 2) ve skutečnosti předpokládal klasickou teorii.

## Stevens

Lze bez nadsázky říct, že článek Stanleyho Smithe Stevense *On the Theory of Scales of Measurement*[[26]](#footnote-26) z roku 1946 je jedním z nejvlivnějších a přitom nejkontroverznějších[[27]](#footnote-27) textů k tématu měření. Stevens navrhl definici měření v širokém významu jako přiřazování číslic objektům nebo událostem podle pravidel. Jedním z takovým přiřazení je škála, a protože pravidel může být celá řada, vede takové přiřazování ke vzniku různých druhů škál. Problémem pak je explicitně stanovit: a) různá pravidla pro přiřazování číslic; b) matematické vlastnosti výsledných škál; c) statistické operace aplikovatelné pro měření uskutečněné dle určité škály.

Typ škály je charakterizován přípustnými transformacemi. Pro každý typ škály jsou stanoveny: 1) asociované empirické operace, které by měly určovat jistá fakta, fakta, která musí být zachována i po transformaci 2) povolené statistiky, střední hodnota.

Velmi známá klasifikace je následující. Proměnné označují hodnoty škály, čísla přiřazená objektům; f(x) je přípustná transformace, funkce numerické množiny, která obsahuje obor hodnot škály, do sama sebe; φ(x1…xn) je numerický fakt, který empirická operace musí určovat, tj. nejsilnější vzorec φ(x1,…, xn) pro který platí, že φ(x1,…, xn) právě tehdy když φ(f(x1),…, f(xn)).

Klasifikace je kumulativní, vyjadřuje postupně silnější podmínky.

### Nominální škála

f(x) je jakákoliv prostá funkce, φ je x1 = x2. Statistická míra: modus. Příklad: jakákoliv numerace, např. očíslování hráčů fotbalu. Vzhledem k hodnotě objektu je číslo zcela arbitrární; neměříme, jen přejmenováváme objekty.

### Pořadová škála

f(x) je rostoucí monotónní funkce, φ je x1 > x2. Statistická míra: medián. Příklad: tvrdost minerálů. Při přiřazení jednomu objektu je přiřazení dalšímu arbitrární, pokud je zachováno pořadí.

### Intervalová škála

f(x) = ax + b (a > 0), tj. kladná lineární transformace, φ je x1 – x2 = x3 – x4, nebo x1 – x2 = konstantní. Statistická míra: aritmetickým průměr. Příklad: teplota. Přiřazení jednomu objektu určuje přiřazení dalšího, jakmile je určen arbitrární nulový bod a jednotka. Poměr intervalů hodnot se nemění: (x1 – x2)/( x3 – x4) = (f(x1) – f(x2))/(f(x3) – f(x4)).

### Poměrová škála

f(x) = ax (a> 0), φ je x1 / x2 = x3 / x4, nebo x1 / x2 = konstantní. Statistická míra: geometrický průměr. Příklad: délka, hmotnost. Přiřazení objektu určuje další přiřazení, jakmile je určena arbitrární jednotka (nula je absolutní). Poměr hodnot se nemění x1 /x2=f(x1)/f(x2).

◊

Stevens uvažuje, že škály jsou možné pouze, protože existuje jistý izomorfismus mezi tím, co můžeme dělat s určitými aspekty objektů a vlastnostmi číselných řad, a že určité empirické operace, které determinují určité relace mezi aspekty objektů, jsou zapojené do škál. Nicméně neanalyzuje ani tyto empirické operace, ani podmínky, které musí splňovat; pouze zmiňuje, „co“ by empirické operace měly determinovat (stejnost, pořadí, porovnání rozdílů…).

Problémem Stevensovy reprezentace je, že nerozlišuje, zdali atribut, který se pokoušíme reprezentovat, existuje nezávisle na přiřazení hodnot. Konzistentním přiřazením hodnot ovšem můžeme vytvořit atribut s takovou strukturou, o které nemůžeme s jistotou říct, jakou má podobou, či vůbec existuje.

Stevens škály klasifikuje podle přípustných transformací; transformace je přípustná, když něco zůstává vzhledem ke škále invariantní. Většina transformací nechává invariantní některé relativně jednoduché funkce, a není jasné, co má tato funkce společného se škálou předtím, než je určen její typ. Že je funkce invariantní pod určitou transformací, je matematický fakt. Proč je transformace přípustná, zůstává nejasné; nemůžeme vědět, proč např. Celsiova stupnice, nekladně lineárně transformovaná, neměří teplotu.

Díez ([2]) uporozňuje, že pokud definujeme škálu typem transformace, nevíme v epistemologicky relevantním smyslu, co pro škálu činí transformaci přípustnou, zatímco jiné transformace ne. Ale to je to, co od typu škály chceme. A pokud se pokusíme upřesnit představu přípustné transformace odvoláním se na invarianci určitých numerických funkcí, stejně chceme vědět, co tyto funkce mají se škálou společného. A toto vše je pouze to, co potřebujeme od upřesnění přípustné transformace. Proto je nutné při definici přípustných transformací opustit čistě matematické invariance a obrátit se na vlastnosti objektů a jejich empirické relace.

Helmholtz, Hölder a Campbell analyzovali kvalitativní podmínky, které empirický systém musí splňovat, aby byl numericky reprezentovatelný, ale neřekli nic o vztazích mezi různými možnými numerickými reprezentacemi stejného empirického systému.

Stevens formálně studuje různé formální vztahy mezi různými reprezentacemi/škálami empirického systému, ale neříká nic o tom, proč reprezentace, které mají tyto vztahy, jsou reprezentacemi stejné veličiny. Odpověď nemůže být, že jisté funkce jsou invariantní, protože to je prostě jen jiný způsob charakterizace vztahů mezi transformacemi. Aby byla odpověď na tuto otázku správná, je třeba odkázat na empirické podmínky, které systém charakterizují. Je-li transformace škály přípustná, je to protože funkce, která je výsledkem transformace je zároveň reprezentací/morfizmem empirického systému.

Pokud je i přes tento zásadní nedostatek Stevensova práce užitečná, je to díky tomu, že typy škál jsou esenciální pro určení, do jaké míry jsou přiřazení unikátní či arbitrární [2, 21].

## Suppes

První autor, který integroval předchozí dvě linie výzkumu – přestože takový úmysl nikde explicitně nezmiňuje – byl Patrick Colonel Suppes, který v roce 1951 vydal článek *A set of independent axioms for extensive quantities*[[28]](#footnote-28), ve kterém se pokusil o dvě věci: najít sadu podmínek, které musí empirická doména splňovat, aby ji bylo možno reprezentovat reálnými čísly a zjisti, jaké jsou vztahy mezi takovými morfizmy. Jeho práce se zabývala pouze aditivní empirickými relačními systémy, tj. extenzivními veličinami, ale umožňovala budoucí zobecnění o další druhy empirických systémů.

Základními pojmy jsou množina objektů *A*, binární relace ≼, jejíž interpretace je „menší nebo stejný ve velikosti než“ a binární operace ⊕ na A kombinace nebo konkatenace. Struktura E = <A, ≼, ⊕> je systém extenzivní veličiny právě tehdy, když splňuje sedm axiomů:

* Pokud x, y, z jsou v A a pokud x≼y a y≼Z, potom x≼z
* Pokud x, y jsou v A, potom x ⊕ y je v A
* Pokud jsou x, y, z v A, potom (x ⊕ y) ⊕ z ≼ x ⊕ (y ⊕ z)
* Pokud x, y, z jsou v A, a x ≼ y, potom x ⊕ z ≼ z ⊕ y
* Pokud x, y, z jsou v A, a ne x ≼ y, potom existuje takové z v A, že x ≼ y ⊕ z a y ⊕ z≼ x
* Pokud x, y jsou v A, tak ne x ⊕ y ≼ x
* Pokud x, y jsou v A a x ≼ y, potom existuje číslo n takové, že y ≼ nx

Z těchto axiomu vyplývá, že ≼ vytváří neostré uspořádání A, stejně jako vyplývá asociativita, komutativita, souvislost a monotónnost ⊕. Spolu s ≼ může být definována relace rovnosti ≈: x≈y právě tehdy když x≼y a y≼x; faktorová množina A/≈ je proto rozkladem A.

Suppes dokazuje dva teorémy. První z nich je reprezentační teorém: pokud empirický systém E je systémem extenzivní veličiny, potom: 1) faktorová množina E/≈ je izomorfní k aditivní pologrupě kladných reálných čísel, tj. existuje prostá funkce *f* z A/≈ do kladných reálných čísel taková, že *f* je izomorfismus E/≈ do matematického systému M=<ℝ+, ≤, +>. Použití izomorfismu je na místě, neboť mluvíme o reprezentaci tříd ekvivalence objektů, což je podobné jako bychom mluvili o homomorfizmu konkrétních objektů a reálných čísel.

Druhý je teorém jedinečnosti, který ustanovuje vztah mezi různými možnými reprezentacemi, tj. do jaké míry je reprezentace jedinečná: každá dvojice aditivní pologrupy kladných reálných čísel, které jsou izomorfní k E, má spolu vztah pomocí podobné transformace, tj. pokud f a g jsou dva takové izomorfismy, tak existuje a > 0 takové, že pro každou třídu ekvivalence x ∈ A/≈, f([x])=a\*g([x]).

Nyní můžeme hovořit o přípustných transformacích: je-li f reprezentací empirického systému E, numerická funkce F je přípustnou transformací pro f, právě tehdy když výsledek aplikace F na f, tj. kompozice F∘f je také homomorfismem E do numerického systému. To, co charakterizuje škálu, je numerická transformace, která zachovává vlastnost „být morfizmem empirického relačního systému do numerického“.

Reprezentační teorém dokazuje pouze, že jisté podmínky jsou postačující pro existenci homomorfizmu z E do M (i když v tomto případě jsou i nezbytné). Teorém jedinečnosti tvrdí, že každé dva homomorfizmy z E do M spolu souvisí díky podobné transformaci.

Teorémy rovněž dokazují, že každá reprezentace systému extenzivní veličiny je poměrová škála, ale nedokazují, že pouze reprezentace systému extenzivní veličiny jsou poměrové škály.

Suppes sám upozorňuje, že jeho systém má stále několik nedostatků. Hlavní problém je, že podmínka, že A je uzavřená na operaci ⊕, implikuje, spolu s dalšími podmínkami, že doména systému extenzivní veličiny je nekonečná (a existují arbitrárně velké entity), což porušuje zjevně finitistické nezbytnosti empirického měření.

Dalším následkem je, že relace ≈ definovaná z ≼, je tranzitivní. Suppes připomíná, že díky limitům na citlivost procedur zjišťujících uspořádání, mohou být dva objekty shodné s jinými, ale ne se sebou.

Suppesova práce je přesto první konceptuálně dostačující analýza podmínek které činí fundamentální aditivní měření možné – to je druh měření dostačující, s pár výjimkami, pro fyziku. Na druhou stranu, zejména v sociálních vědách, nepoměrové škály jsou používané pro měření vlastností. Otázka, která se nabízí, je zda Suppesův typ analýzy je vhodný pro studování podmínek, které činí tyto další druhý měření možné. Rozšíření jeho práce vedla ke vzniku současné reprezentační teorie měření, která tuto otázku zodpověděla.

## Reprezentační teorie měření

Obecné schéma je prosté ([34], [28]): A je množina objektů, kterým přiřazujeme čísla, která mají reprezentovat velikosti atributu objektů. Fakta vztahující se k velikostem jsou vyjádřená určitými empirickými relacemi R1…Rn (některé z nich mohou být operace) mezi objekty. Protože objekty vykazují atribut v určité míře, některé z relací budou určitým druhem uspořádání. Množina objektů a relace vytváří empirický systém E=<A, R1…Rn>. Měření přiřazuje čísla objektům; obvykle reálná čísla, pokud má být aplikována větší řada nástrojů matematiky. Empirické relace a operace R1…Rn jsou reprezentovány numerickými relacemi S1…Sn, které spolu s množinou čísel N (N je ℝ nebo jedna z jejich podmnožin, jako třeba ℝ+) konstituují matematický sytém M=<N, S1…Sn >. Tvrzení, že numerické relace Si reprezentují empirické relace Ri, znamená, že M vyjadřuje čísly to, co E vyjadřuje bez nich, tj. E je homomorfní k M. Analýza, jak je měření možné, pak spočívá ve zkoumání podmínek, které musí E splňovat, aby homomorfizmus do M existoval. K tomu je třeba ustanovit reprezentační teorém a teorém jedinečnosti.

Reprezentační teorém prokazuje, že určité podmínky, tj. axiomy Ax1…Axp, jsou dostačující pro existenci homomorfizmu a teorém jedinečnosti popisuje vztah mezi dvěma takovými homomorfizmy. Proto je třeba dokázat následující: E=<A, R1…Rn> je empirický systém a M=<N, S1…Sn > je určitý numerický systém. Pokud E splňuje Ax1…Axp, potom existuje funkce f taková, že pro každé g, g je homomorfizmus E do M právě tehdy, když g je T-transformace f. Zde „g je T-transformace f“ znamená, že existuje funkce F∈T taková, že g=F∘f (∘ je kompozice funkcí), kde T je množina funkcí N do N, tj. T je transformační skupina a T-transformace pojmenovává tudíž typ transformace. Pokud určitý systém E splňuje podmínky, lze s přiřazením pokračovat, nebo pokud již existuje, ospravedlnit jeho typ. Důkaz existenciální části teorému zároveň ukazuje jak provést přiřazení.

Relace a operace v E musí být empiricky možné (ačkoliv to neovlivňuje formální část teorie). Relace a funkce v M musí být „přirozené“, což odstraní určitou část arbitrárnosti eliminací „extravagantních“ matematických reprezentací. To ale neodstraní všechnu arbitrárnost. Teorie předpokládá existující systém M. Ale proč zvolit zrovna určitý numerický systém? Mohou být jiné, také „přirozené“ a k nimž existuje homomorfizmus z E. Případ systému extenzivní veličiny je typickou ukázkou, jak by toto mohlo nastat.

Každý systém extenzivní veličiny je homomorfní do M=<Re+, <=, +>, takže máme aditivní reprezentace f (takové, že a∘bCc právě tehdy když f(a) + f(b) = f(c)), což jsou poměrové škály. Ale je zřejmé, že jsou homomorfní do jiného přirozeného numerického systému M‘=<(1, nekonečno), <=, \*>, protože M a M‘ jsou izomorfní (v jednom směru napře funkcí x->e^x, v druhém směru např. funkcí x->ln x). Takže systém extenzivní veličiny má i multiplikativní reprezentaci f takovou, že a∘b≈c právě tehdy když f(a)\*f(b)=f(c). Tyto reprezentace jsou unikátní až do exponenciálních transformací xn (n >0) a jsou proto logaritmickou poměrovou škálou. Není žádný formální důvod proč vybrat M místo M‘. Je to esenciální element arbitrárnosti, který může být odebrán pouze pragmatickou úvahou: M může být jednodušší, či může být vybrán z historických důvodů, apod. To, že důvodem pro volbu jsou pragmatické důvody, napovídá, že co se týče formálních aspektů teorie, důležité jsou pouze podmínky, které musí splňovat empirický systém. Tento problém arbitrárnosti je komplikovanější, pokud se podíváme na rozšíření původního případu. V některých empirických systémech nemohou být relace a operace interpretovány ihned pomocí známých numerických relací nebo v algebře obvykle používaných funkcí. Kvalitativní empirické vztahy a funkce mají numerickou intepretaci, ale numerické relace a funkce, které tuto intepretaci zajišťují, nejsou zvažovány v obvyklých známých numerických systémech, kterými se algebra obvykle zabývá. Vždy je sice možné definovat matematické vztahy, zkratky kombinací těch základních, které dohromady vytvoří numerický systém, k němuž může být nalezen homomorfizmus. Ale je to poněkud nucená strategie, protože výsledný numerický systém není obvyklý či přirozený ([2]).

## Spojené měření

Jedním z nejdůležitějších rozšíření reprezentační teorie měření je spojené měření, které představili Robert Duncan Luce a John Wilder Tukey[[29]](#footnote-29) v článku *Simultaneous conjoint measurement: A new type of fundamental measurement*[[30]](#footnote-30) z roku 1964.

Spojené měření popisuje situaci, kdy jsou dva atributy měřeny současně a kdy procedura empirického porovnání dává vzniknout uspořádání mezi dvojicemi objektů, z nichž každý je považován za vykazující jeden ze dvou atributů. Uspořádání mezi dvojicemi velikostí atributů tak není odvozeno z dvou již známých uspořádání mezi komponentami dvojice, a číslo není přiřazeno dvojici kombinováním již dostupných přiřazení komponentám dvojice. Přiřazení pro dvojici a pro každou komponentu jsou získány najednou, tedy kombinace i každá komponenta jsou měřeny současně.

Stejně jako u jiných variant reprezentačního měření, je třeba analyzovat podmínky, které činí měření možné. V případě spojeného měření je empirický systém tvořený dvěma množinami velikostí atributů *A1* a *A2* a uspořádání ≽ mezi dvojicemi prvků obou, tj. ≽ je uspořádání na *A1*×*A2*. Zamýšlená intepretace (*a*, *p*) ≽ (*b*, *q*) je taková, že „spojení“ atributů *a* a *p* převyšuje nebo je stejné jako spojení *b* a *q*. Podmínky pro reprezentaci systému *E* = 〈*A1*, *A2*, ≽〉 ale nejsou pouze ty, díky kterým existuje funkce *f* z *A1*×*A2* do určité numerické množiny *N* tak, že (*a*, *p*) ≽ (*b*, *q*) právě tehdy když *f*(*a*, *p*)) ≥ f((*b*, *q*)). Pokud by to tak bylo, nelišilo by se to od jiných rozšíření RTM ([2]). Co je pro spojené měření charakteristické je fakt, že reprezentace je učiněna „skrz, ale simultánně s“ přiřazeními pro *A*. Podmínky musí být takové, aby když je *E* splní, tak existuje *f1* z *A1* do *N*, *f2* z *A2* do *N* a *F* z *N*×*N* do *N* tak, že *f*((*a*, *p*)) = *F*(*f1*(a), *f2*(p)), totiž (*a*, *p*) ≽ (*b*, *q*) právě tehdy když *F*(*f1*(*a*), *f2*(*p*)) ≥ *F*(*f1*(*b*), *f2*(*q*)).

Hlavní požadavek je, aby atributy byly v podstatě nezávislé. Nezávislost znamená, že pokud dva páry se společnou komponentou jsou související podle ≽ jistým způsobem, budou souviset stejným způsobem, pokud jakýkoliv jiný element bude tím společným: pokud (*a*, *p*) ≽ (*b*, *p*) pro nějaké *p* z *A2*, tak (*a*, *p*) ≽ (*b*, *p*) pro každé *p* z *A2*, a obdobně pro *A1*. Je-li nezávislosti splněna, relace ≽1 na *A1* a ≽2 na *A2* mohou být definovány takovým způsobem, že se jedná o uspořádání. Jsou-li splněny i další podmínky, můžeme najít funkce *f1*, *f2* a *F*.

Tyto obecné podmínky jsou téměř triviální, protože nevyžadují nic od funkce *F*. Ve skutečnosti jsou požadované reprezentace získány pro určité, odůvodněné případy *F*. Základním takovým případem je součet. Systémy, pro které existuje taková reprezentace, jsou nazývány aditivní spojené struktury. Pokud systém *E* = 〈*A1*, *A2*, ≽〉 splňuje podmínky, které definují aditivní spojené struktury, tak potom (reprezentační teorém) existuje f1 z A1 do ℝ a f2 z A2 do ℝ tak, že

a (UT) stejná ekvivalence platí pro každou lineární transformaci *f1* a *f2* se stejným koeficientem *a*, totiž transformace *ax*+*b1* a *ax*+*b2* (*a* > 0); *f1* a f2 jsou potom intervalové škály související určitým způsobem.

Podmínky pro aditivní spojené měření jsou následující. Uvažujme dva atributy, *A* a *X*; *a*, *b*, *c* představuje tři úrovně *A*, *x*, *y*, *z* tři úrovně *X*. Třetí atribut *P* se sestává z 9 uspořádaných dvojic *A* a *X*: (*a*, *x*), (*a*, *y*)… (*c*, *z*). Relace mezi úrovněmi *P* musí splňovat několik axiomů.

První axiom určuje, že relace úrovní *P* musí být neostré uspořádání ≽, tj. uspořádání, které je tranzitivní, slabě antisymetrické, reflexivní. Tranzitivita v tomto případě znamená, že pro každé *a*, *b*, *c* z *A* a *x*, *y*, *z* z *X*, pokud (*a*, *x*) ≽ (*b*, *y*) a (*b*, *y*) ≽ (*c*, *z*), potom (*a*, *x*) ≽ (*c*, *z*). Reflexivita: (*a*, *x*) ≽ (*a*, *x*) pro všechna *a* z *A* a *x* z *X*. Antisymetrie: pro všechna *a*, *b* z *A* a *x*, *y* z *X*, pokud (*a*, *x*) ≽ (*b*, *y*) a (*b*, *y*) ≽ (*a*, *x*), pak (*a*, *x*) ≈ (*b*, *y*).

Axiom jednoduchého vyrušení je následující: Relace na *P* splňuje jednoduché vyrušení právě tehdy, když pro všechna *a* a *b* v *A*, a *x* v *X* je implikováno (*a*, *x*) ≽ (*b*, *x*) pro všechna *w* v *X* tak, že (*a*, w) ≽ (*b*, *w*). Obdobně, pro všechna *x* a *y* v *X* a *a* v *A* je implikováno (*a*, *x*) ≽ (*a*, *y*) pro všechna *d* v *A* tak, že (*d*, *x*) ≽ (*d*, *y*). To znamená, že pokud jsou jakékoliv dvě úrovně *a* a *b* uspořádané, tak toto uspořádání platí bez ohledu na všechny úrovně *X*. To samé platí pro jakékoliv *x* a *y* z *X* vzhledem k úrovním *A*. Jednoduché vyrušení se nazývá, protože jeden společný faktor z dvou úrovní P se „vyruší“, aby zůstal stejný pořadový vztah mezi zbývajícími elementy: *a* se vyruší z (*a*, *x*) ≽ (*a*, *y*), takže zůstane *x* ≽ *y*.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | x | y | z |
| a | (a, x) | (a, y) | (a, z) |
| b | (b, x) | (b, y) | (b, z) |
| c | (c, x) | (c, y) | (c, z) |

Splnění axiomu jednoduchého vyrušení je nezbytné, ale nedostačující pro kvantifikaci *A* a *X*. Pouze demonstruje, že úrovně *A*, *X* a *P* jsou uspořádané. Neformálně, jednoduché vyrušení nedostatečně omezuje uspořádání úrovní *P*, aby mohla být *A* a *X* kvantifikována. Např. uvažujme uspořádané dvojice (*a*, *x*), (*b*, *x*) a (*b*, *y*). Platí-li jednoduché vyrušení, tak (*a*, *x*) ≽ (*b*, *x*) a (*b*, *x*) ≽ (*b*, *y*), a díky tranzitivitě (*a*, *x*) ≽ (*b*, *y*). Vztah mezi těmito dvěma dvojicemi, neformálně doleva se sklánějící diagonála, je určena splněním jednoduchého vyrušení (stejně jako všechny podobné diagonály relací na *P*). Jednoduché vyrušení ale neurčuje uspořádání doprava se sklánějící diagonály uspořádání na *P*. Díky tranzitivitě a jednoduchému vyrušení bylo určeno, že (*a*, *x*) ≽ (*b*, *y*), ale vztah mezi (*a*, *y*) a (*b*, *x*) je neurčený.

Axiom dvojitého vyrušení se zabývá relacemi na *P*, ve kterých se společné členy předcházejících nerovností vyruší, aby vytvořili třetí nerovnost: (*a*, *y*) ≽ (*b*, *x*) a (*b*, *z*) ≽ (*c*, *y*), po vyrušení vznikne (*a*, *z*) ≽ (*c*, *x*); dvojité vyrušení je splněno, pokud následující nerovnosti neprotiřečí předchozím.

Počet instancí dvojitého vyrušení závisí na počtu úrovní *A* a *X*; existuje-li *n* úrovní *A* a *m* *X*, počet instancí dvojitého vyrušení je *n*!*m*!, např pokud *n*=*m*=3, tak 3!\*3!=6\*6=36 instancí dvojitého vyrušení celkem. Jenže všechny kromě 6 instancí jsou splněny, pokud platí jednoduché vyrušení, a pokud platí jedna z oněch 6, platí všechny. Michell nazývá jednu z těchto instancí Luce–Tukey instancí dvojitého vyrušení. Pokud bylo jednoduché vyrušení testováno na datech, tak potom pouze Luce–Tukey případy dvojitého vyrušení stačí k otestování axiomu dvojitého vyrušení. Počet jejich je .

Axiomy vyrušení ale stále nestačí pro ustanovení kontinuální veličiny, další podmínky jsou nutné: řešitelnost a archimédovská podmínka. Protože zahrnují infinistické koncepty, řešitelnost a archimédovský axiom nelze přímo testovat v konečně empirické situaci. Řešitelnost znamená, že pro každé tři z elementů *a*, *b*, *x* a *y*, čtvrtý existuje tak, aby platilo (*a*, *b*) ≈ (*x*, *y*). Archimédovská podmínka – množina je *I* po sobě jdoucích celých čísel (konečná či nekončná, kladných či záporných). Úrovně *A* tvoří standardní řadu právě tehdy, když existuje *x* a *y* v *X*, kde *x* ≉ *y*, pro všechny celá čísla *i* a *i* + 1 z *I*: (*ai*, *x*) ≈ (*ai*+1,*y*). To znamená, že pokud je *x* větší než *y*, tak existují úrovně A které lze najít, které učiní dvojice *P* stejné. Archimédovská podmínka tvrdí, že neexistuje nekonečněkrát větší úroveň *P*, a proto není větší úroveň *A* nebo *X*.

◊

Aditivní struktury nejsou jediným typem spojených struktur. Každý typ spojené reprezentace je charakterizován specifickou funkcí *F* (např. *x* + *y*, *x* - *y*, *x* \* *y*,…) a různé skupiny podmínek, které činí různé druhy reprezentace možnými, definují jiné typy spojených struktur.

Díez ([2]) upozorňuje, že případy nezávislých reprezentací nelze považovat za spojené měření. Představme si veličiny m1 a m2 s nezávislými reprezentacemi *f1* a *f2*, např. hmotnost a rychlost. Můžeme definovat novou funkci *f* = *F*(*f1*, *f2*) pro určité *F*, např. hybnost = *m*\**v*. Formálně se zdá, že tato situace může být považována za případ spojeného měření, protože lze vždy zkonstruovat empirický systém *E* = 〈*A1*, *A2*, ≽〉 vhodný pro reprezentaci. Ale procedura je poněkud fiktivní, ledaže relace ≽ může být určena bez pomoci pořadí, díky kterému existují reprezentace *f1* a *f2*. Pokud toto není možné, takto popsaná situace odpovídá spíše případu odvozeného měření.

Nejpřirozenější intepretace množin *A1* a *A2* je, že se jedná o různé atributy, které objekty mají. Ovšem není vždy jasné, že spojené měření je vždy případ měření různých atributů stejného objektu ([2]). Někdy můžeme mít jeden a ten samý atribut vyjádřený objektem různých typů. Např. pokud je *A1* množství peněz a *A2* spotřební zboží a ≽ je relace preference, *f1* a *f2* měří utilitu objektů každého typu a *f* = *F*(*f1*, *f2*) (pro určité *F* z ℝ2 do ℝ) měří užitek dvojic objektů. V tomto případě není jasné, zda různé užitky jsou různé atributy. Možná nejpřirozenější intepretace by bylo nahlížet na *F* jako na vyjádření pravidla, které určuje vztah mezi užitky (v obou případech stejný atribut) objektů různých druhů, pravidlo, které vztahuje užitek komponent k užitku celku.

Stejně tak je zavádějící popsat jako spojené měření doménu konkatenovatelných objektů ([2]). Může být dokázáno, že pokud je 〈*A*, ≥, ⊕〉 systém extenzivní veličiny, tak potom systém 〈*A*, *A*, ≽〉, s ≽ definovaným tak že (*x*, *y*) ≽ (*z*, *w*) právě tehdy, když *z* ⊕ *w* ≥ *x* ⊕ *q*, je aditivní spojenou strukturou.

Teorie spojeného měření je teorie o struktuře atributů, nikoliv teorie o datech. Data, protože jsou odvozená z pozorování, obsahují chyby. Teorie spojeného měření neříká nic o chybách, a proto to není teorie o pozorováních. Je to teorie o relevantních atributech nezávislých na pozorováních ([54]).

## Problémy reprezentační teorie měření

[TODO: přiřadit zdroje: [35], [27], [10], [39], [40], [41], [42], [38], [55]]

Jak je z předchozího textu patrné, měření v pojetí RTM je vysoce abstraktní, což vede k tomu, že se jedná z praktického hlediska o příliš matematický nástroj; jak připomíná [41], axiomatická formulace rovnoramenných vah nedokáže rozlišit mezi hmotností a tíhou. Důvodů, proč jmá RTM omezenou použitelnost v aplikovaných vědách je však více: modely RTM postrádají velmi důležitý vztah příčina–následek a jiné podobné relace mezi měřitelnými atributy mající podobu zákonů; RTM neobsahuje konkrétní reprezentaci postupů měření, měřících nástrojů a jejich dynamické interakce; RTM není vhodná pro statistický popis chyb měření, šumu a nejistoty. [41]

### Problémy s empirickým základem RTM

RTM nečiní ostré rozlišení mezi určením hodnoty atributu s pomocí měření či s pomocí teorie. Například, protože teplota je teoretická termodynamická veličina (definovaná částečnou derivací vnitřní energie systému nad entropií) podléhající termodynamickým zákonům, její hodnotu nelze určit s pomocí fundamentálního měření, založeného na kvalitativní relaci „studenější než“. Místo toho je teplota běžně měřena nepřímo, třeba s pomocí teploměru, ve kterém je délka kapaliny přibližně lineárně vztažená k teplotě. Pointou je, že realistické měření cílového atributu *Q* (instanciovaného objektem) využívá druhého přímo pozorovatelného rafiového atributu *Q*⤉ měřicího nástroje, jehož hodnoty jsou nomologicky vztaženy k hodnotám *Q* pomocí rovnice *Q*⤉ = *F*(*Q*). Tudíž, získat hodnoty Q z teorie je jedna věc a získat je měření jiná. Protože atributy vědeckého zájmu mají důležité zákonné vztahy s jinými atributy, jejich měření jsou prakticky vždy nepřímá (či odvozená). Je třeba poznat, že RTM není schopná sloužit komplexním potřebám inženýrských aplikací, vývoji vědeckých modelů či validaci teorií.

Aby mohla být relace uspořádání tranzitivní, vyžaduje arbitrárně přesné rozlišení, které vědecké měřící nástroje nemají, natož lidské smysly. Je jednoduché vytvořit situaci, kdy lidé, kteří porovnávají objekty podle nějakého extenzivního atributu, vytvoří sadu tvrzení, která není tranzitivní, např. když jsou rozdíly mezi objekty x a y a mezi objekty y a z pod prahem smyslové detekce, zatímco rozdíl mezi x a z je dostatečně velký, aby byl jasně detekovatelný.

Nelze vytvořit pozorovací intepretaci archimédovské vlastnosti, která říká, že množství atributu, který objekt má, může být v principu překonáno spojením dostatečného množství replik jiného objektu se stejným atributem. Nejenže bychom museli mít neomezenou (potenciálně nekonečnou) zásobu „replik“ pro každý objekt, ale samotná relace „x je replikou y“, má některé formální vlastnosti (např. tranzitivitu), které nelze interpretovat pozorováním. Rovněž výraz „může být v princip překonáno“ překračuje závazek empirika „zdržet se víry v cokoliv, co jde za skutečný, pozorovatelný fenomén“.

Uzavřenost operace konkatenace implikuje spočetně nekonečné množství objektů mající atribut v množině D, což rozhodně překračuje to, co lze určit pozorováním. Navíc, algebraické vlastnosti jako pozitivita zahrnují mereologicky[[31]](#footnote-31) bezvýznamné (a tudíž fyzicky nemožné) srovnání objektu *x* s objektem obsahujícím *x* jako část, jako v *x* ≼ (*x* ⊕ *y*).

Tyto problémy s pozorovací intepretací axiomů měřitelnosti neunikly teoretikům měření. Ti si od začátku uvědomovali, jak moc abstrakce a idealizace vyžaduje axiomatizace měření. Jejich odpověď ovšem spočívala v matematických modifikacích standardní axiomatizace; těmito úpravami se snažili odstranit problémy s intepretací relace uspořádání a operace konkatenace. Nutnost, aby byla tranzitivita interpretovatelná pozorováním, řešili tím, že na relaci uspořádání nahlíželi stochasticky, či se uvažovalo o polouspořádání. Uzavřenost konkatenace mohli vyřešit, pokud by konkatenace byla definována pouze pro vlastní podmnožinu domény D. Archimédovská vlastnost by mohla být vynechána použitím konečných měřících struktur (jejichž reprezentace v podobě reálných čísel nevyžadují tuto vlastnost), nebo do ne-archimédovských měřících struktur s ne-standardními reálně číselnými reprezentacemi. Mereologicky nesmyslnému porovnání, které vyžadují algebraické vlastnosti konkatenace, se lze vyhnout, pokud konkatenaci ustanovíme jisté mereologické restrikce.

Žádná z těchto modifikací ale neplní svůj účel; odstraněním určitých neintepretovatelných vlastností tyto modifikace, byť ne vždy explicitně, uvedou nové strukturní předpoklady, které lze obdobně těžko interpretovat pozorováním. Stochastická varianta porovnávání zahrnuje pomocnou pravděpodobnostní strukturu, která musí rovněž mít idealizovanou relaci uspořádání (např. relace „událost x je méně pravděpodobná než událost y“, axiomatizovaná jako tranzitivní a archimédovská), a rovněž musí mít idealizované strukturní předpoklady pro prokázání existence poměrů pravděpodobnosti.

Pokud učiníme empirické relace uspořádání ne-archimédovské, musíme se vzdát ekvivalence logické struktury mezi fyzickými a matematickými relacemi a operacemi. Mohli bychom předpokládat pouze jednosměrnou implikaci, buď z fyzických relací a operací do matematických, nebo naopak. RTM by tak nenabízela buď formální omezení numerického přiřazování, nebo formální odůvodnění, proč by vypočítané teoretické predikce měly odpovídat měřícím interakcím světa.

Zavést operaci konkatenace mereologické omezení (aby se zabránilo fyzicky nesmyslné agregaci a porovnávání objektů s jejích vlastními částmi) by vyžadovalo množství eukleidovské geometrie na pozadí, potřebné pro definování teoreticky smysluplné měřené části (tj. části získané např. rozdělením tyče rovinou kolmou ke směru délky tyče vs. části získané odštěpením). Taková pomocná geometrie nicméně vyžaduje strukturní podmínky na vhodných geometrických relacích (relace „mezi“, ortogonalita, atd.), které jsou opět těžko interpretovatelné pozorováním.

Přestože existují další obtížnosti při empirické intepretaci měřících struktur RTM, tyto již zmíněné dovolují následující závěr: veličiny a jejich měření nemůže být vysvětleno tím, že s veličinami budeme zacházet jako se zástupci pro kvalitativní pozorovatelné manipulace fyzických objektů. Taková intepretace činí axiomy RTM nesprávné, a ve tím výsledku reprezentačním teorémům, podporovaným těmito axiomy, upírá jakýkoliv mimomatematický význam.

Co je tedy axiomy o těchto „měřících“ strukturách říkají? A proč bychom měli akceptovat homomorfizmus do reálných čísel podporovaný těmito axiomy jako odůvodnění kvantitativního měření ve vědě?

RTM může opustit empirické základy a představit axiomatizované měřící struktury jako teorie kvantit, které jsou, jako jiné vědecké teorie, oprávněné k určité idealizaci. Pokud je ovšem zvolena tato pozice, RTM musí čelit několika provázaným teoretickým nevýhodám, jak ukážeme dále.

Jakmile je jasné, že měřící struktury RTM nemohou dát kompletně kvalitativní empirickou intepretaci, rozlišení mezi fundamentálním a odvozeným měření se stane neudržitelným. Všechno měření ve vědě, i ty nejpřízemnější případy, jsou nakonec odvozeným měřením, které vyžaduje předchozí měření a teoretické předpoklady na pozadí (zákony), které vztahují jednu veličinu k druhé. Tato závislost na teorii obzvláště vynikne, když měření vyžaduje pochopení a specifikace založené na teorii, když vyžaduje interakce mezi cílovým systémem a určeným měřícím nástrojem, anebo když vyžaduje kalibrace nástroje. I tak jednoduchá měřící procedura jako měření délky tyče pravítkem předpokládá, mimo jiné, kontrolu tepelné expanze tyče, a tudíž vztah mezi teplotou a délkou. Je tedy důležité pro teorii měření, aby byla formulovaná takovým způsobem, aby její matematický formalismus a formalismus zamýšlené intepretace přirozeně zahrnoval teoretické vztahy mezi veličinami. U RTM nic takového není možné, protože její formalismus nenabízí žádné matematicky významné konstrukce vztahující různé měřící struktury jednu k druhé, nebo budování nových modelů z dříve specifikovaných.

### Škála je brána jako konstrukce.

Logický positivismus tvrdil, že vědeckou teorii lze rozdělit do dvou jazyků: jazyka pozorování (tvrzení o objektech, vlastnostech a vztazích) a jazyka teoretického (tvrzení o abstraktních objektech, vlastnostech a vztazích); termíny z teoretického jazyka byly ukotveny v pozorovacím, přičemž koordinace byla možná pomocí korespondenčních pravidel.

Reprezentační teorie měření se snaží o něco podobného, a mají tedy podobná slabá místa.

Fakt, že je možné zkonstruovat reprezentaci, nemůže být postačující podmínkou v definici měření – lze vytvořit situace, kdy máme homomorfní reprezentaci, která ovšem není měřením (např. Guttmanova škála „mám rodiče“ – „mám plnovous“ – „menstruuji“ – „rodila jsem“). Tento argument je variantou podurčenosti – data vyžadovaná spojeným měřením jí trpí, protože splnění axiomů díky aditivitě na úrovni dat neznamená, že data byla vygenerována aditivním procesem; relace zaznamenané v systému musí mít kauzální předchůdce.

### Chyba a nejistota v měření

Chyba a nejistota výsledků jsou nevyhnutelné aspekty měření, a moderní věda vyvinula řadu metod pro kontrolování a odhadování chyby. Teorie měření proto musí být formulována takovým způsobem, aby zahrnovala roli kontroly a odhadu chyb. V RTM se s chybou zachází dvěma problematickými způsoby. První se zaměřuje na oslabení logické struktury relací a operací, tj. nahrazení neostrého uspořádání polouspořádáním, které zahrne chyby, jež způsobují netranzitivitu relace. Tento přístup je nedostatečný, neboť se snaží nedokonalosti výsledku měření zahrnout do toho, co je měřeno, místo aby tyto nepřesnosti byly vlastností měřící procedury.

Druhý způsob spočívá ve „schování“ chyby měření v reprezentujícím homomorfizmu f: D->R, což vede k pravděpodobnostní reprezentaci ve formě *P*(α ≤ *f*(x) ≤ β) = *p*, která tvrdí že hodnota f(x) morfizmu *f* pro objekt *x* je mezi α a β s pravděpodobností *p*. RTM ovšem stále nenašla správné pravděpodobnostní podmínky pro relace, včetně podmínky tranzitivity součinu pravděpodobností ve formě Pr(x ≼ y) \* Pr(y ≼ z) ≤ Pr(x ≼ z), či v jiné podobě, která spolu s dalšími podmínkami zaručí existenci reálně číslované náhodné proměnné f spolu s její pravděpodobnostní distribucí P tak, že P(x ≼ y) = P(f(x) < f(y)) platí pro všechny x a y v D.

### Problém specifikace měřené veličiny

Protože původní metody a procedury pro měření základních fyzikálních veličin jako jsou délka, hmotnost a čas byly vytvořeny dlouho předtím, než vznikla teoretická věda, mohlo by se zdát, že obecně je pochopení cílových atributů nezávisle na teorii, pouze pomocí pozorování, vždy dostačující pro vytvoření procedur a metod pro měření těchto atributů. Takový přístup zdola nahoru příliš nefungoval ani v newtonovské fyzice, např. když se zaměňovaly veličiny později rozlišené jako hybnost a kinetická energie. V sociálních vědách si takový přístup vede ještě hůře; u mnoha atributů (inteligence, chudoba, tělesná zdatnost, atp.), které se vyskytují v různé míře, a mají tak strukturu uspořádání, reprezentační přístup nevedl k jejich správnému měření[[32]](#footnote-32); nejspíše proto, že vyžadují hlubší teorie či modely, které reprezentační přístup neřeší a neobsahuje. Není pak jasné, co přesně indikátor v podobě skóre v testu inteligence měří, neboť měřitel nemá dostatečně přesnou teorii inteligence.

Měřená veličina obvykle bývá částí větší sítě jiných veličin, které jsou kauzálně spojené, či korelované, a zarámované v patřičném modelu nebo teorii, která tvoří základ měřeného objektu (obvykle v podobě rovnic zahrnujících částečně známé parametry). Chybí-li dobře potvrzená teoreticky zarámovaná měření, existuje riziko navržení falešných měření atributů, které o nich neposkytují žádné empirické informace.

Rozhodnutí co a jak měřit je závislé na teorii či modelu. V případě měření komplexních atributů, formální předpoklady RTM vyžadují podstatné teoretické obohacení, které vezme v úvahu idealizace a poskytne framework pro analýzu a intepretaci výsledků.

### Problém konečných/diskrétních versus nekonečných/kontinuálních

Protože matematické modelování napříč vědami vyžaduje reálná (a komplexní) čísla, RTM se, přirozeně, zaměřuje na reprezentace právě do reálných čísel. Hodnoty homomorfizmu jsou nejen předpokládány ostré, ale zahrnují i všechna reálná čísla (tj. nevypočitatelná či náhodná) která nemohou být získána ani v limitě nekonečné přesnosti dovolené vysoce idealizovaným měřícím nástrojem. S omezeným rozlišením a pamětí skutečných měřících nástrojů jsou numerické hodnoty takto získané v nejlepším případě ležící v relativně malém intervalu a vždy specifikované v konečném počtu desetinných míst. To vede k úvaze, že na měření je třeba nahlížet v termínech modelů diskretizovaného kontinua, a jeho diskretizace indukovaná měřením musí být započítána v teorii měření. Ale RTM žádné matematické ani konceptuální prostředky pro toto neposkytuje.

Faktem je, že ve vědecké a technologické praxi definice měřící procedury obvykle vyžaduje zřídit měřící systém, a ne přímo porovnávat objekty mezi sebou.

## Řešení některých problémů RTM

Pravděpodobnostní teorie měření obsahuje pravděpodobnostní reprezentace pořadových, intervalových a poměrových škál, a pravděpodobnostní popis měřícího systému a procesu měření. Pravděpodobnostní reprezentace ukazuje, za jakých podmínek je možné popsat objekty, co se týče charakteristiky v, pomocí náhodných proměnných takovým způsobem, aby bylo možné rekonstruovat, v pravděpodobnostním smyslu, empirické relace platící v realitě. ([57])

Teorie fuzzy měření považuje nepřesné/neexaktní měření jako mapování f z fyzických objektů do struktury fuzzy intervalů; přesné měření je mapování f0 z fyzických objektů do struktury reálných čísel. Mapování y je potom z fuzzy intervalů do reálných čísel, čímž je popsán vztah mezi exaktním f0 a neexaktním f měřním; mapování y je ℝ reprezentace fuzzy intervalů (pojmenovaná defuzzyfikátor měření). ([58])

### [Neempirická intepretace RTM]

RTM lze považovat za kolekci matematických teorémů určitého druhu. Reprezentační a unikátnostní teorém charakterizují mapování mezi dvě druhy struktur, jedna z nich je asociovaná s vlastnostmi čísel, druhá s kvalitativními vztahy. V případě jednoduchého měření délky je operace konkatenace a relace uspořádání interpretovaná jako skutečné porovnávání tyčí. Ale protože teorém se zabývá pouze podmínkami, za kterých lze konkatenaci a uspořádání reprezentovat numericky, je možné zařídit ještě obecnější intepretaci toho, co doposud bylo empirickou relační strukturou – nahradit tuto představu ERS QRS, kvalitativní relační strukturou, což nevyžaduje žádné změny v RTM, je nutné pouze, aby existovala a) Množina dobře specifikovaných objektů v matematickém smyslu: máme jasné podmínky členství pro množinu X; z matematického hlediska teorémy RTM nevyžadují, aby tyto objekty měly empirický základ; b) dobře definované kvalitativní relace; RTM nevyžaduje, aby tyto byly interpretovány empiricky. ([43])

Nová intepretace RTM ji vidí jako kolekci teorémů, které zjišťují, jak lze QRS (X, ∘, ≼) mapovat do NRS (ℝ, +, ≤). RTM teorémy tak lze považovat jako specifikující podmínky mapování mezi QRS a NRS, a můžeme je použít pro spekulace o možných numerických reprezentacích abstraktních vlastnostech abstraktních konceptů. Nutné jsou pouze koncepty, které specifikují množinu objektů a kvalitativních relací. Tímto způsobem jsou RTM teorémy používány v různých oblastech bádání. Lingvistická analýza interadjective comparisons (Bale, 2008, [X]) zkoumá, jak rozumět tvrzením jako „x je P-ejší než y je Q“, kdy Rooij (2011, [X]) aplikoval RTM teorémy takovým tvrzením, aby zjistit, zda vlastnosti P a Q objektů x a y jsou numericky reprezentovatelné, jakou škálu tyto reprezentace mohou splňovat, a jak moc mohou být podobné meziadjektivové srovnání smysluplné. ([43])

Někde se tento přístup používá, někde by se mohl začít používat – třeba v případě osobní identity v průběhu času v metafyzice (Noonan, 1989; Olson, 2002, [X]). Existuje neshoda jak charakterizovat osobní identitu v průběhu času; literatura je plná paradoxů a myšlenkových experimentů, které představují problém pro jakoukoliv teorii osobní identity. Přitom tyto teorie posunuly naše vnímání této oblasti. Jako stručný nástin, jak by RTM teorémy mohly pomoci ve výzkumu teorií osobní identity v průběhu času, považte Parfita (1984, [X]), který navrhoval nazírat na osoby jako na množiny časových self, a osobní identita se sestává se spojitosti/sledu, která je sama určená dostatečným stupněm psychologické kontinuity mezi self-y. Jestli lze tento koncept míry psychologické kontinuity reprezentovat numericky, lze s pomocí QRS (X, ∘, ≼), kde X je množina temporálních self, a ∘ a ≼ jsou operace které spojují a porovnávají psychologickou kontinuity self. Tedy, můžeme si představit, že existuje kolekce časových self, které mají odlišné postoje, a které různými způsoby mohou navzájem přesahovat. Tyhle srovnání lze zkoumat pomocí RT teorémů: splňují jisté podmínky tak, že QRS temporálních self a srovnání mohou být reprezentovány nějakým NRS? Pokus ano, mohli bychom být schopni specifikovat koncept psychologické kontinuity, který je numericky reprezentovatelný. ([43])

Druhou výhodou této intepretace RTM je to, že nabízí větší flexibilitu při „zpětném rekonstruování“ základů – v kontextech, kde operujeme s čísly, které postrádají adekvátní konceptuální a epistemické základy, můžeme vyzkoumat, jaké druhy kvalitativních vztahů mezi objekty by musely existovat, aby to odůvodňovalo druh čísel, které se používají. Můžeme se podívat na oblasti bádání, kde se používají kvantity neodvozené z procesu měření a vyzkoumat, zdali tyto kvantity mohou být považovány za numerické reprezentace kvalitativních vztahů (např. v psychologii). ([43])

Jednou z nevýhod této intepretace je to, že může být považována za „příliš rychlé vzdání se“; používá RTM pouze jako nástroj. ([43])

Dále možné pochybovat, zda tato nová intepretace pro RTM a její použití znamená rozdíl. ([43])

# Měření jako proces zprostředkovávající objektivní a intersubjektivní informace

Můžeme přemýšlet o přiměřenosti měření a o tom, zdali měření přináší relevantní výsledky, ale z pragmatického pohledu je zásadní a nutné, aby získané informace byly ([63]):

1. Specificky týkající se měřeného atributu, a nikoliv názoru osob, které řídí proces měření, ani stavu okolního prostředí; toto je podmínka příslušnosti k objektu, tj. objektivita.
2. Jednoznačně interpretovatelné na různých místech v různém čase (a tím odlišené od subjektivního názoru); toto je podmínka transparence subjektu, tj. intersubjektivita.

Při měření fyzikálních vlastností jsou tyto podmínky garantované samotným měřicím systémem a jeho správným nastavením a použitím. Informace zprostředkovaná výsledkem měření je ([61]):

* Objektivní, protože měřicí přístroj funguje jako filtr, tj. jeho výstup závisí na měřené vlastnosti a je nezávislý na všech ostatních vlastnostech (objektu, prostředí, nástroje), nazývaných ovlivňující proměnné.
* Intersubjektivní, protože měřicí přístroj je kalibrovaný vzhledem k měřicímu standardu a tudíž výsledky, které poskytuje, jsou navázané k tomuto standardu, takže různé měřici systémy ve stejném metrologickém systému poskytují srovnatelné výsledky, tj. informace, které mají metrologickou návaznost ke stejné referenci.

Samozřejmě, v praxi jakékoliv měření vždy poskytuje informace nejen o měřeném atributu, ale i o dalších proměnných empirického kontextu, ve kterém proces měření probíhá. Žádné fyzické zařízení není dokonale citlivý a selektivní filtr. Kalibrace měřicího přístroje má omezenou reliabilitu, a přístroj samotný nemá schopnost udržovat perfektně stálé chování v průběhu času – i díky tomu nelze dosáhnout kompletní objektivity a intersubjektivity získaných výsledků. Následkem toho, místo toho, abychom měli booleovský stav (ano – ne), tyto dva rysy dovolují přechodné úrovně, a dobré měření je to, jehož výsledky jsou považovány za objektivní a intersubjektivní dostatečně pro to, aby efektivně podpořili svůj daný účel. Tudíž, dále nevyhnutelný pragmatický aspekt měření je to, že jde o cílený proces. ([61])

Úroveň objektivity a intersubjektivity zajištěná měřením musí být jasně stanovena, typicky v podobě shrnujícího parametru – jako je nejistota měření – reprezentujícího celkovou kvantitu informace zprostředkované výsledkem měření. Je dobré poznamenat, že přiřazení hodnoty může poskytnout být objektivní, ale ne intersubjektivní výsledky (např. při použití nekalibrovaného měřicího systému), a vice versa intersubjektivní, ale ne objektivní výsledky (např. pokud je výsledek vyjádřen jako dvojice „číslice, symbol jednotky měření“, ale je získán pouze odhadem, [63]). Tudíž oba rysy jsou nezbytné pro charakterizaci reliability informace poskytnuté měřením. ([61])

# Operativní struktura měření

Vraťme se zpět k rozdílu mezi vlastnostmi a hodnotami vlastností. Mezi vlastnostmi a jejich hodnotami mohou existovat – pokud pro zjednodušení vynecháme nejistotu měření[[33]](#footnote-33) – 3 druhy rovností (dle [61], [63]):

* : což je výše zmíněná nerozlišitelnost; např. o délce objektu může být experimentálně zjištěno, že je stejná jako délka jiného objektu; pro toto zjištění není potřeba používat žádné hodnoty.
* : Například o hodnotě „3 centrimetrů“ může být známo, že je rovna hodnotě „1,1811… palců“. Jakmile jsou brány v potaz jednotky a vztahy mezi nimi, porovnání hodnot nevyžaduje žádnou experimentální aktivitu.
* : Obvyklá reprezentační relace vlastnost = hodnota vlastnosti, která je závěrem měření.

Nejjednodušší struktura měření, provedená jako přímé porovnání (např. vizuální srovnávání délky tyčí), je pouze specializací tohoto schématu (dle [61]):

1. Je k dispozici standard měření (nebo množina standardů měření), který realizuje referenční vlastnost, ke které byla hodnota vlastnosti asociována díky konstrukci škály.
2. Tato referenční vlastnost je experimentálně zjištěna jako α-rovná k měřené vlastnosti.
3. Stejná hodnota vlastnosti je pak asociována s měřenou vlastností.

První krok zajišťuje intersubjektivitu získané informace: stejná hodnota vlastnosti by měla vyjadřovat stejný význam různým subjektům. Druhý krok zajišťuje objektivitu získané informace: α-rovnost mezi referenční vlastností a měřenou vlastností by se měla vztahovat k těmto vlastnostem a žádným jiným, včetně názoru subjektu provádějícího měření. Díky nevyhnutelné nekompletnosti intersubjektivity a objektivity je získaná hodnota obvykle ovlivněna nejistotou; místo jedné naměřené hodnoty vlastnosti může být výsledkem měření složitější entita, např. pravděpodobnostní rozložení přes množinu možných hodnot. Tento postup má nicméně nevýhodu v tom, že vyžaduje, aby měření bylo prováděno synchronní s pomocí standardu; v reálné situaci je proto struktura měření komplexnější, aby mohlo probíhat asynchronně, bez nutnosti mít k dispozici standard; toho je dosaženo s pomocí použití vhodného kalibrovaného transduktoru:

## Příklad

[60] ukázal, jak tuto operativní strukturu aplikovat v nejjednodušším příkladě, na atributech s nominální strukturou.

Dvě vlastnosti stejného druhu jsou dle definice vzájemně porovnatelné. Základní podmínkou porovnatelnosti je nerozeznatelnost: je-li vlastnost *Pa* objektu *a* a vlastnost *Pb* objektu *b* obě stejného druhu *P*, tak dvě vlastnosti jsou buď nerozeznatelné *Pa* = *Pb*, nebo naopak *Pa* ≠ *Pb*. *Pa* = *Pb* může být považováno za nesoucí stejnou informaci jako *a* ≈*P* *b*, tj. objekty *a* a *b* jsou nerozeznatelné vzhledem k obecné vlastnosti druhu *P*; zkráceně *P*-nerozeznatelnost). Pro některé vlastnosti tato informace může být zpřesněna (*Pa* < *Pb*, *Pa* > *Pb*), pro jiné – nominální vlastnosti –je jediným porovnáním, které nese informaci, pouze P-nerozeznatelnost. ([60])

Je možné nadesignovat, nastavit a provádět proces experimentálního zjištění jedné nebo více hodnot vlastností, které lze odůvodněně atribuovat nominální vlastnosti takovým způsobem, že stejné kritérium „odůvodnitelnosti“ je aplikovatelné v obou případech? Věříme, že proces „důvodné atribuce“ hodnoty vlastnosti *Px*, pro posuzovaný objekt x, lze zamýšlet ve vědě o měření čistě strukturním způsobem, následovně ([60]):

1. S1 – Definujme množinu vlastností: množina *P\** vlastností *Pi\** stejného druhu *P* tak, že když *i* ≠ *j*, tak *Pi\** ≠ *Pj\** pro všechna *Pi*, *Pj* patřící do *P\**. ([60])
2. S2 – Určeme kritérium *P*-nerozeznatelnosti s referenčními vlastnostmi: kritérium je definováno, aby operativně zhodnotilo, že pro každou kandidátskou vlastnost *Px* existuje právě jedna referenční vlastnost *Pi\** patřící do *P\** tak, že *Px* = *Pi\**. Tom může vyžadovat vytvoření množiny S objektů si, každý z nich je realizující referenční vlastnosti *Pi\**, tak, že zhodnocení je provedeno srovnáním objektů *x* ≈*P* *si*, nebo může být strukturováno jako algoritmus, který rozeznává patterny *Pi\**. ([60])
3. S3 – Atributujeme hodnotu k *Px*: definované kritérium je aplikované, např. porovnáním kandidátského objektu *x* s objekty v *S* vzhledem k obecné vlastnosti *P*, tak, že jakmile je objekt nalezen takový, že *Px* = *Pi\**, *Pi\** je atributovaná jako hodnota *Px*. ([60])

Zaprvé, nejdůležitější je, že kroky S1–S3 jsou nezávislé na typu zapojené vlastnosti, a tudíž se aplikuje stejně jako na nominální, tak na poměrové kvantity. Fakt, že v druhém případě lze později přijmout specifické techniky neeliminuje tyto společné rysy. ([60])

Zadruhé. Krok S1 je někdy považován za „konstrukci škály“. V případě poměrových veličin, pro které existuje „přirozená nula“ vlastnost, to může být provedeno zvolením „jednotkové“ vlastnosti, *P1\**, a pak získat *Pi\** konkatenací *P1\** *i*-krát samu se sebou. Nominální vlastnost nemá „přirozenou nulu“, ani konkatenaci, a tudíž tato procedura konstrukce nemůže být využita a referenční vlastnosti v *P\** musí být explicitně uvedeny (to stejné platí pro pořadové proměnné). ([60])

Zatřetí. Krok S2 obvykle zahrnuje proces „rozšiřování standardů“: objekty s kterými kandidátské objekty lze porovnat nejsou ty původně vytvořené („primární standardy“), ale nějaké vhodné kalibrované repliky, aby se garantovala (metrologická) patrnost k *P\**. To zároveň ukazuje, že kritický požadavek je stabilita referenčních vlastností v *P\**. ([60])

Začtvrté. Zatímco obecná lingvistická forma hodnoty vlastnosti je „*Pi\** v *P\**“ (3,5 v Richterově škále), v případě poměrových kvantit jméno jednotky, „*P1\**“, může být považováno za jméno celé referenční množiny, hodnoty vlastností mohou být označeny jako „*i* *P1*“ (3,5 m, 3,5 kg, atp.), což vlastně znamená „*i* krát *P1\**“. ([60])

Zapáté. Nazvěme nominální evaluací proces S1–S3, když je aplikován na nominální vlastnost. Potom nominální evaluace a klasifikace (zamýšlené jako klusterování objektů podle vlastnosti) jsou odlišné procesy, a zatímco klasifikace je přivozená nominální evaluací (dva objekty patří do stejné třídy, pokud jsou evaluovány jako P-nerozeznatelné), opak neplatí (např. klasifikace může být získána bez přechozí volby referenční vlastnosti, a proto bez omezení návaznosti). ([60])

Zašesté. Dobrá kvalita předpokládána o výsledku měření je získána vhodným designem, zřízením a prováděním procesu S1–S3, zvláště tedy: ([60])

* Vhodným rafinovaným kritériem P-nerozeznatelnosti, tak, že množina P\* referenčních vlastností obsahuje mnoho elementů (a hodnoty kvantit mají vyšší číslo signifikantních číslic v případě poměrových kvantit) ([60])
* Výběrem stabilních a univerzálních referenčních vlastností (jako je rychlost světla ve vakuu, nebo náboj elektronu) ([60])
* Produkcí stabilních primárních a pracovních standardů, a tak budováním vhodného řetězu návazností; experimentálně prováděným porovnáním v S3 pomocí vysoce kvalitních instrumentů, a tak zajišťováním objektivity výsledku. ([60])

Je zajímavé, že tyto podmínky jsou nezávislé na typu zapojených vlastností. ([60])

# Definice měření

Na základě předchozí analýzy [61] navrhuje, že objektivita a intersubjektivita může být použita jako podmínka v operativní definici konceptu reliabilní informace, a předpokládat tak, že nejsou pouze nutnou podmínkou, ale také postačující pro charakterizaci měření. Tudíž lze uvažovat nad následující definicí měření (se statutem pracovní hypotézy):

„Měření je konceptuální a experimentální proces, který implementuje morfní přiřazování hodnot vlastnostem a je schopný produkovat informace o předdeklarované vlastnosti s určenou a prokazatelnou úrovní objektivity a intersubjektivity.“

Tuto definici lze dekonstruovat:

* Měření je proces, a ne výstup tohoto procesu; ten nazýváme *výsledek měření* (*measurement result*). ([61])
* Měření produkuje informace o předdeklarované vlastnosti; výsledek měření je uváděný k dané vlastnosti, kterou je třeba změřit, a kterou nazýváme měřená vlastnost (*measurand*). ([61])
* Měření zahrnuje jak konceptuální, tak experimentální aktivity; jak čistě konceptuální proces (jako myšlenkový experiment nebo analytické řešení matematického problému), tak ani čistě fyzický proces (jako transformace provedená transduktorem) nejsou měření, přestože mohou být (a bývají) jeho součástí. Konceptuální aktivity jsou potřeba pro definici měřené vlastnosti a pro vytvoření modelu empirického prostředí, ve kterém je samotné měření jako fyzický proces prováděno. ([61])
* Měření implementuje přiřazování hodnot vlastnostem; cílem měření je reprezentovat informaci, která byla získána experimentálně jako hodnotu vlastnosti, tj. jako prvek z předdefinované množiny referenčních vlastností (nazývaných škála), či jako komplexní strukturu hodnot vlastností (např. jako pravděpodobnostní rozložení hodnot). ([61])
* Měření implementuje morfní přiřazování; relace, které platí mezi vlastnostmi, jsou mapovány na relace mezi hodnotami vlastností, takže strukturní informace zůstává zachována. ([61])
* Měření je schopné produkovat informace s určenou úrovní objektivity; výsledek měření vyjadřuje informaci o měřené vlastnosti a ne např. o názorech osob provádějících proces měření, nebo o stavu okolního prostředí. Měřící nástroje jsou designované a ovládané tak, aby byla garantovaná požadovaná úroveň objektivity, a to díky minimalizaci dopadu ovlivňujících vlastností. ([61])
* Měření je schopné produkovat informace s určenou úrovní intersubjektivity; výsledky měření vyjadřují informaci, která je jednovýznamově interpretovatelná na různých místech v různém čase různými subjekty. Toho lze docílit kalibrací měřících nástrojů, což garantuje metrologickou návaznost výsledků měření. ([61])
* Měření produkuje informace s prokazatelnou úrovní objektivity a intersubjektivity; tato úroveň je obvykle určena jako nejistota měření, která je konzistentně zvolena podle aktuálních informací experimentálně získaných s použitím měřícího systému na základě přijatého modelu pro empirické prostředí, ve kterém je měření prováděno. ([61])

# Tvrdé a měkké měření

Fyzika zahrnuje řadu teorií, které popisují sítě vlastností, spojených fyzikálními zákony. Existence takovýchto propojení má pro měření výhody:

* Umožňuje systematickou validaci modelů měření; jeden atribut lze měřit více způsoby ([X]).
* Poskytuje nástroj pro odvozená měření; [TODO: příklad] ([X]).

Protože mezi ne-fyzickými vlastnostmi podobné sítě chybí, je přiřazování hodnot takovým vlastnostem považováno za *slabě definované* ([X]). To vede k důrazu na (konstruktovou) validitu u měkkého měření ([X], [X], [X]); nejdůležitější otázka je: „Opravdu měříme to, co chceme měřit?“ ([X], [X], [X]). Účel této otázky je dvojí; připomíná možnost definice atributu (Co je to délka? Co je to inteligence?). Uvažme výsledky testů inteligence. Jejich výsledky lze interpretovat jako hodnotu vlastnosti osoby, která test vyplnila… ale jako jaké vlastnosti? Obvykle nechceme přijmout operacionální přístup („Inteligence je to, co měří testy inteligence.“ [88, 89]). Ten využívá předmetrologický význam vlastnosti k tomu, aby nadesignoval test a zároveň interpretoval jeho výsledky dost flexibilně na to, aby takto definovaný koncept odpovídal něčemu v reálném světě. Přičemž můžeme zjistit, že neodpovídá ničemu ([84]). Ale pokud poznáme, že komplexní entita jako inteligence má celou řadu aspektů, o kterých nelze získat informace s pomocí jednoho testu, tento atribut by měl dostat nové ad hoc jméno „X“. Pak ale vyvstává otázka „proč měřit X?“. Odpověď „Protože hodnoty X jsou užitečné, neboť přinášejí informaci o inteligenci“ vede k problému s cirkularitou ([61]). Operacionální definice tedy vede k tomu, že každý test měří něco jiného; inteligencí je pak tolik, kolik je testů ([88]).

Druhý účel otázky o konstruktové validitě spočívá v tom, že jakmile je atribut nějakým způsobem charakterizován, konkrétní vlastnost, kterou chceme měřit, musí být rovněž definována, jako realizace atributu: měřená vlastnost je konkrétní délka tohoto objektu či konkrétní inteligence této osoby, za určitých podmínek. V tomto ohledu mají tvrdé a měkké měření doplňující se rysy. V tvrdém měření jsou atributy obvykle považovány za definovány předem, protože jsou vědomostní součástí fyziky, a důraz je proto kladen na definici měřené vlastnosti a vývoj vhodných metod měření, procedur a nástrojů pro určité měřené vlastnosti. To, že fyzické vlastnosti jsou vzájemně propojené, a proto může být měřená vlastnost závislá na jiných, ovlivňujících vlastnostech, dovoluje konstruovat měřící systémy s vhodnými metrologickými rysy (citlivost, selektivita, rozlišení, opakovatelnost[[34]](#footnote-34),…) a zajistit kvalitu informací, které produkují. Oproti tomu, při měkkém měření je snadné získat hrubá data; většina měkkého měření je založena na počítání četností: počet správných odpovědí v testu inteligence, počet řádků kódu, počet chyb,… ([5]). Cílem pak je extrahovat z těchto dat informace o měřené vlastnosti.

Z tohoto pohledu spočívá rozdíl mezi tvrdým a měkkým měřením v důrazu:

* V tvrdém měření je měřená vlastnost realizací dobře definovaného atributu zapojeného do sítě dalších atributů, což zlepšuje význam výsledků měření, a zároveň zdůrazňuje fakt, že objektivita a intersubjektivita závisí na správné nadesignovaných a obsluhovaných měřících systémech. Je-li problém s definicí, je to definice měřené vlastnosti, ne atributu.
* V měkkém měření je měřená vlastnost realizací atributu, ke kterému chybí ustanovená a dohodnutá definice a který není (anebo je pouze slabě) spojený s jinými atributy. To vytváří problém s jeho definicí a konstruktovou validitou. To je často řešeno snahou hledat konzistenci a invarianci s pomocí hledání statistických korelací s jinými pozorovatelnými vlastnostmi (nazývanými „indikátory“) s pomocí technik jako je regresní analýza, faktorová analýza, či strukturní modelování.

# Konceptuální framework struktury měření

Na základě analýzy v předchozích kapitolách, která potvrdila, že měření je komplexní, na modelu založený cílený proces, [61] navrhuje konceptuální framework, který zdůrazní strukturu měření a znázorní jednotlivé dílčí aktivity. Takový framework je založený na předpokladu, že každá empirická proměnná může být zpravidla změřena vykonáním strukturálně ekvivalentních činností. Interpretuje měření jako trojúrovňový hierarchicky strukturovaný proces, sestávající se ze tří fází; každá z nich se skládá z různých činností, vykonávaných pomocí úloh. Úlohy jsou plněny v přibližně časovém pořadí, ale protože struktura frameworku je komplexní, mohou se vyskytovat zpětné vazby.

První fází je plánování, zaměřené na apriorní poznatky, zdroje a omezení. Na jejím základě jsou provedeny tyto činnosti:

* Určení cílů: měření je cílený proces zaměřený na získání spolehlivých informací, podle kterých lze činit rozhodnutí. Určení jeho smyslu proto poskytuje základ dalším činnostem. V průběhu nastavení cílů jsou identifikovány měřené objekty a jejich měřené vlastnosti. Je rovněž určeno minimální množství informace o měřené vlastnosti, které je potřeba k dosažení zvoleného účelu měření; často v podobě *cílové nejistoty měření*. ([X], [61], [63])
* Modelování a design: operační model toho, co je zamýšleno měřit, design použitého měřícího systému a model vlivů prostředí na výsledky měření jsou konceptuálně nezávislé, ale operačně příbuzné úkoly, které je třeba vyřešit. Především, v rámci designu měřícího systému se a) v měkkém měření vytváří plán měření a detailní měřící procedura a b) v tvrdém měření se určuje měřící princip, metoda a procedura. ([X])

Druhou fází je provedení, která obsahuje tyto činnosti:

* Nastavení: měřící systém kalibrovaný, takže jeho výsledky jsou navázané na standard; jsou nastavené podmínky pro vhodnou interakci s měřeným objektem, což může vyžadovat zásah do objektu, aby byla měřená vlastnost pro interakci dostupná. ([61])
* Sběr dat: měřící systém interaguje s objektem a jsou získána hrubá data.
* Získání informací a zpráva: hrubá data jsou zpracována, aby byl určen výsledek měření, obvykle obsahující jednu či více hodnot vlastnosti s vyhodnocením nejistoty. Výsledek měření je vhodně prezentován, aby mohl být dále interpretován. ([61])

V třetí fázi probíhá:

* Intepretace: výsledek měření je využit k rozhodování (obvykle zda byl splněn cíl měření). Získaná informace z fáze provedení může být využita k validaci či vylepšení procesu měření. ([X])

## Filozofické předpoklady

[TODO: lépe zakomponovat, odstranit duplicity]

Měření, jak jsme ho definovali v minulé kapitole, by nedávalo smysl, pokud bychom nepředpokládali nějakou formu realismu.

Vědecký realismus chápe vědu jako způsob, jak získat pravý popis reality; s tímto popisem se pojí metafyzické, sémantické a epistemologické závazky ([96]):

* Metafyzický závazek je, že v čase a prostoru existuje svět, a to nezávisle na tom, co si jakákoliv bytost mající vědomí myslí či vnímá; existuje pouze jeden takový svět a tudíž vše, co je reálné, je jeho součástí.
* Sémantický závazek je, že vědecká tvrzení o světě je třeba brát jako popisující svět takový, jaký opravdu je, tj. vědecká tvrzení mají pravdivostní hodnotu.
* Epistemologický závazek je, že takto interpretována, pravdivá vědecká tvrzení představují znalosti o světě.

Protože měření je chápáno jako akt vědeckého objevu, koncept měření zahrnuje realismus: aby se měření mohlo uskutečnit, ve světě musí existovat něco ke změření. Tvrdit, že atribut existuje, znamená tvrdit, že instanciace tohoto atributu existuje nebo může existovat v časoprostorově lokalizovaných objektech. Přestože s atributy lze zacházet jako s abstraktními (pokud lze ignorovat nahodilé rysy těchto instanciací), nejsou sami platonickými entitami, stojících mimo čas a prostor; univerzálie existují pouze jako instanciované charakteristiky časoprostorově lokalizovaných věcí nebo systémů ([5]).

◊

Veličiny jsou teoretické entity, interpretované jako objektivní vlastnosti objektů (spíše než příhodné reprezentace nekvantitativního světa). Veličiny jsou hlavním předmětem měření, vědeckých vysvětlení a vztahů, jako jsou přírodní zákonitosti. ([39])

Vztahy mezi veličinami jsou popsané teoretickými zákonitostmi vědy a je na vědcích, aby je objevili (spíše než aby je „vnutili“ nekvantitativnímu světu). ([39])

Měření je fyzický proces přibližného určení velikosti určité veličiny určitého měřeného systému s kontextově určenou mírou přesnosti a rozlišení (spíše než akt přiřazení čísel nekvalitativnímu světu jako výpočetně vhodnou reprezentaci). ([39])

Veličiny, instanciované v určitém přírodním systému mají algebraickou, topologickou, dynamickou a jinou strukturu, kterou můžeme určit a zkoumat nezávisle na tom, jakým způsobem jsou veličiny v systému aktualizovány. ([39])

Měření veličin je založené na základní fyzikální ontologii orientované na objekty, která člení empirický svět na čtyři komponenty ([39]):

* Měřený systém – dynamicky a pravděpodobnostně autonomní, izolovaný přírodní systém, jehož charakteristické veličiny chceme měřit. „Autonomie“ znamená, že interakce systému s prostředím může být ignorována, či popsána jednoduchým způsobem. Pojem měřeného systému nevyhnutelně zahrnuje příslušně idealizace a abstrakce. Kromě částic a těles a jejich tříd, měřené systémy mohou mít podobu substancí, polí nebo jakýchkoliv podob energie a hmoty, obdařených měřitelnými vlastnostmi, které jsou instanciovány v určitém množství, míře nebo jinak rozlišitelných manifestacích. Konkrétní vykreslení měřeného systému zahrnuje specifikaci jeho stavebních částí, struktury, vzájemného propojení a dynamiky. ([39])
* Měřící nástroj – Jednoduchý měřící nástroj je vyrobený objekt (např. odměrka), který podle určité zákonitosti transformuje měřenou veličinu, instanciovanou měřeným systémem, do asociované mediační veličiny, která je vhodná pro další zpracování a zobrazení či zaznamenání výstupní hodnoty pomocí ručičky či displeje, což je kauzálně propojeno s velikostí měřené veličiny. Aby byly výsledky měření smysluplné, veličiny musí být specifikovaný koherentním systémem dimenzí a jednotek, které dovolují opakovatelné porovnání výsledků získaných jinými měřícími nástroji na jiném místě a v jiném čase. ([39])
* Pozorovatelé – Běžně je akt měření kompletní, jakmile je záznam měřicího přístroje percepčně identifikován v podobě ručičky či nápisu na displeji; ale protože výsledky měření mohou být neomezeně ukládány (ať už analogově či digitálně), je třeba odlišit skutečného pozorovatele od záznamového zařízení. ([39])
* Prostředí – Tato komponenta se sestává se zbytku okolního světa, který nespadá pod výše popsané komponenty. ([39])

## Fáze 1 – Plánování: určení cílů

Když se díváme na teploměr a přemýšlíme, jestli bude třeba si obléknout kabát, nebo když vážíme ingredience, abychom upekli bábovku, tak měříme proto, abychom se lépe rozhodli. Bude nám zima? Použili jsme dost mouky? Aby bylo měření užitečné, je třeba na základě předchozích znalostí určit cíle měření. Klíčová otázka tak není „Co chceme měřit?“ ale „Proč?“ ([61])

Účelem měření je tvrzení, které přesně vyjadřuje tyto cíle, a pro jeho definici je třeba obvykle získat informace o následujících pěti oblastech ([61]):

1. Měřený objekt ­(např. těleso jako stůl, komponenta hardwaru systému, osoba, software typu textový editor, proces údržby, atp.).
2. Smysl („proč“) – motivace k měření.
3. Atribut („co“) – obecná vlastnost objektu, která nás zajímá; může to být i koncept vysokoúrovňové abstrakce.
4. Perspektiva („kdo“) – pohled, ze kterého uživatel výsledků měření definuje cíle (např. vztah zákazníka k vlastnostem měřeného objektu)
5. Prostředí – empirické prostředí, kde očekáváme, že se měřený objekt vyskytuje (venkovní/vnitřní prostory, výrobní proces, apod.)

Definice účelu měření by vždy měla zahrnovat identifikaci nejen měřeného objektu, ale hlavně měřeného atributu; je třeba poznat, které vlastnosti objektu by měly být měřeny, abychom získali informace ke splnění cíle měření.

#### Definice atributu

Jakým způsobem určit a definovat atribut, který chceme měřit? Příkladem může být Mohsova škála tvrdosti minerálů ([109]). Mohs při konstrukci škály navrhl vztáhnout tvrdost minerálů k jejich schopnosti poškrábat jiné minerály. Vybral proto deset minerálů a přiřadil jim čísla od jedné do desíti podle reprezentační podmínky, že menší čísla patří měkčím materiálům, tj. těm, které jsou poškrábány minerály s vyšším přiřazeným číslem. Každý prvek této pořadové škály funguje jako standard měření a číslo jemu přiřazené jako hodnota tvrdosti. S pomocí této referenční škály je možné určit tvrdost libovolného dalšího materiálu: předpokládá se, že má stejnou tvrdost jako nejtvrdší standard, který onen materiál je schopen poškrábat, nebo jako nejměkčí standard, který je schopen poškrábat daný materiál.

Tento příklad dobře ilustruje rozličné kroky, které je při definování atributu nutné splnit. Konstrukce referenční škály měřená je založena na reprezentační teorii měření a vyžaduje ([61]):

* Identifikovat třídu objektů vykazující vlastnosti, které jsou instancemi atributu.
* Identifikovat empirické relace mezi objekty, které charakterizují atribut.
* Definovat referenční škálu, tj. určit množinu objektů předpokládaných jako standardy a schopných reprezentovat možné jednotlivé vlastnosti a přiřadit jim hodnoty vlastností tak, aby zachovávaly empirické relace mezi objekty.
* Implementovat navrhnutou referenční škálu.
* Navrhnout alespoň jeden postup pro přiřazení hodnot vlastnostem objektů, které nejsou zahrnuty v referenční škále, konzistentně s existujícími empirickými relacemi.

Při hledání vhodné třídy objektů je dobré nejdříve vyzkoušet omezenou množinu, a pokud se měření podaří, postupně ji rozšiřovat. Například, při měření hlasitosti zvuku bychom mohli zvážit třídy: čisté tóny o frekvenci 1000 Hz, čisté tóny jakékoliv frekvence, stacionární zvuky, nestacionární zvuky ([66]).

V principu lze daný atribut definovat různými způsoby. Teplota je klasický příklad: může být definována na základě pořadové relace „aspoň tak horký jako“ když se dotýkáme dvojic objektů, nebo na základě změny výšky kapaliny v teploměru. Různé empirické relace mohou odpovídat různým typům škál, nebo škálám stejného typu s různou nejistotou. Když se zabýváme novým atributem, konstrukce referenční šály je kritický krok, který následně ovlivňuje další kroky měření. Proto je často výhodné používat postupnou strategii: nejdříve bereme v úvahu empirické relace dávající pořadové škále; pokud je měření úspěšné (tj. výsledky měření vedou k lepšímu pochopení atributu), škálu lze vylepšit rozšířením jejího rozpětí, vylepšením rozlišení či použitím standardů s nižší nejistotou. Nebo lze na základě dalších empirických relací vytvořit silnější intervalovou škálu, či zcela novou pořadovou škálu (např. místo škrábání jako empirické relace tvrdosti lze použít vtisknutí), přičemž vzájemný souhlas škál poslouží jako jejich validace ([66]).

Referenční škálu můžeme rovněž zkonstruovat nepřímo, derivací ze známých funkčních vztahů spojujících nový atribut skrz funkční relace k jiným, již měřitelným atributům, jejichž škály byly ustanoveny dříve.

Předpokládáme-li, že hmotnost *m*, délka *l* a čas *t* jsou fundamentální atributy, z těchto souvisejících škály může být odvozena škála pro sílu *F* na základě zákona *F* = *ma*, kde *a* je zrychlení, dimenzionálně délka krát čas na mínus druhou, pevného tělesa o hmotnosti *m* vystaveného síle *F*.

## Fáze 1 – Plánování: modelování a design

Modely popisují objekty pouze z určitého pohledu a zanedbávají detaily, které pokládají za zbytečné. Mohou být vytvořeny pomocí různých nástrojů (např. rovnice, diagramy, mapování, atp.) a ukazují, jak se různé jeho komponenty objektů vztahují jedna k druhé, a to takovým způsobem, aby se tyto vztahy daly analyzovat a pochopit.

Modely jsou nebytné jak pro plánování měření, tak pro jeho intepretaci. Cílem modelů měření je popsat všechny entity v experimentálním uspořádání, které mají vliv na získaná data, tj. měřený objekt, měřicí systém, experimentální prostředí a jejich vzájemné interakce, souhrnně nazývaných kontext měření. Jako každý model poskytuje model měření pouze částečný popis kontextu měření; kvůli nevyhnutelné aproximaci mohou být potenciálně užitečné informace ztraceny. Množství informací o měřeném atributu omezují vlastnosti a interakce, které nejsou identifikovány (protože si nejsme vědomi, že mohou významně ovlivnit naměřená data, a chybně je nezahrneme do modelu) nebo modelovány (protože jsme očekávali, že brány v úvahu samostatně mají zanedbatelný efekt na naměřená data). To má pochopitelně vliv na výsledek měření; nejistota měření tak vzniká již v plánovací fázi při modelování, před fází provedení – která je obecně považována za hlavní zdroj nejistoty.

Nejistota je v měření nevyhnutelná a to, zdali ji zahrneme do závěrečné zprávy, nebo se rozhodneme, že je zanedbatelná, musí být učiněno na základě pragmatických kritérií. VIM ([X]) stanovuje jasně: „Je-li nejistota měření považována za zanedbatelnou vzhledem k nějakému účelu, výsledek měření lze vyjádřit jako jednu naměřenou hodnotu vlastnosti. V mnoha oblastech je toto obvyklý způsob vyjádření výsledku měření.“

Evaluace nejistoty měření je klíčový úkol při tvorbě modelů měření, a obzvláště u soft měření je velmi těžké odhalit všechny její zdroje. U fyzikálních atributu se modely mohou opřít o zavedenou síť teorií, ale u *soft* měření jsou atributy často příliš abstraktní a komplexní a tudíž nejasně vymezené, a rovněž jim chybí validní relace k jiným atributům. V každém případě však musí použitý model zajistit, aby hrubá data obsahovala dost informací pro dosažení cíle měření.

Nyní si proto rozebereme jednotlivé úkoly zahrnuté v tvorbě modelu měření. Zaměříme se na to, jaký vliv mají na množství informace obsažené ve výsledku měření.

### Definice měřeného atributu a definiční nejistota

Vlastnost objektu, kterou se snažíme změřit, je instancí definovaného atributu. Definice měřeného atributu má klíčovou roli pro všechny aktivity související s procesem měření. Je založená na dostupných znalostech o vztazích s jinými atributy objektu či prostředí, které mohou ovlivnit výsledek měření a jeho intepretaci; je třeba popsat všechny předpoklady a podmínky (které často musí být standardizované) za kterých můžeme atribut měřit, abychom získali jednoznačnou informaci. Vlastnosti kontextu měření lišící se od měřené vlastnosti, které mohou vzhledem k cílové nejistotě významně ovlivnit hrubá data, jsou nazývány ovlivňující vlastnosti ([VIM], [67]) a musíme je zahrnout do modelu měření, včetně vzájemných interakcí. Například, efekt vlastností prostředí na hrubá data může být zanedbatelný a proto není třeba ho modelovat, nebo naopak některé z nich je třeba modelovat a rovněž měřit. V tomto případě je získána definice měřeného atributu v detailnější podobě, např. „délka objektu za teploty *T* a atmosférického tlaku *P*“. Vlastnosti zahrnuté v modelu měření jsou reprezentovány pomocí matematických proměnných, zatímco jejich vzájemné vztahy jsou reprezentovány pomocí matematických vztahů mezi proměnnými; popis těchto vztah může být deterministický i nedeterministický (jako stochastický či *fuzzy*).

Definiční nejistota je podíl nejisty měření vznikající tím, že máme k dispozici pouze určité množství informací určené definicí měřené veličiny. To může být způsobeno díky vlivům vlastností prostředí na měřenou vlastnost. Definiční nejistota je spodní mez nejistoty měření, takže je zbytečné snižovat jiné druhy nejistot na nižší úroveň. V *soft* měření má definiční nejistota větší vliv než ostatní nejistoty.

Uvažme měření délky kovové tyče. Je známo, že délka kovových objektů závisí na jejich teplotě; ta tedy může být ovlivňující vlastnost. V závislosti na zvolené cílové nejistotě, máme dvě možnosti, jak vytvořit model měření: 1) Teplota je „skrytá“ v definici měřené veličiny, jejíž definiční nejistota by měla brát v úvahu tuto podurčenost, nebo 2) Teplota je explicitně zahrnuta do definice měřené veličiny, které je poté specifikována jako např. „délka za (referenční teploty) 0 °C“.

Větší specificita druhé možnosti sice umožňuje získat hodnoty měřené veličiny s nižší nejistotou, ale vyžaduje systém pro kontrolu teploty anebo měření teploty a vhodný model pro korekci jejích účinků, když se skutečná a referenční teplota liší.

### Model měřícího systému, přístrojová a interakční nejistota

Měřicí systém se skládá z jednoho nebo více měřicích přístrojů a často dalších komponent, sestavených, adaptovaných a nastavených tak, aby produkovaly výsledky měření ([VIM]). Jádrem měřicího systému je obvykle transduktor, který převádí vstupní vlastnosti do výstupní vlastnosti, zvané indikace. Hodnoty indikace a hodnoty měřené vlastnosti jsou v relaci many-to-many (protože jedna hodnota indikace může odpovídat více hodnotám měřené veličiny, ale rovněž jedna hodnota měřené veličiny může být získána z více hodnot indikací); to je známkou nejistoty. Z tohoto vztahu lze vytvořit funkční mapování v podobě kalibrační křivky, která asociuje každou hodnotu indikace s naměřenou hodnotou ([VIM]).

Transdukční chování měřicího systému je charakterizováno několika parametry (dle [VIM]):

* Citlivost – podíl změny indikace měřicího systému a odpovídající změny hodnoty vlastnosti, která je měřena.
* Selektivita – schopnost poskytovat naměřené hodnoty vlastností, které jsou nezávislé na jiných vlastnostech měřeného objektu.
* Rozlišení – nejmenší změna vlastnosti, která je měřena, která způsobí rozeznatelnou změnu v odpovídající indikaci.
* Stálost – schopnost udržovat metrologické vlastnosti konstantní v čase.

Výkon měřicího systému je ovlivněn těmito a dalšími parametry (přístrojová chyba, mrtvé pásmo, reakční čas, šířka frekvenčního pásma…), které lze syntetizovat pomocí ([VIM]):

* Lokační statistiky nazývané pravdivost měření, která vyjadřuje schopnost měřicího systému udržovat stav kalibrace a tudíž produkovat nezkreslené hodnoty.
* Disperzní statistiky nazývané preciznost měření, která vyjadřuje schopnost měřicího systému produkovat konstantní hodnoty za různých podmínek opakovatelnosti.

Pravdivost a přesnost mohou být syntetizovány pomocí přesnosti měření, která zprostředkovává celkovou metrologickou informaci o měřicím sytému využívaném v daném procesu měření. Díky kalibraci je tato celková informace reprezentována jako nejistota měření:

* Přístrojová nejistota měření – vycházející jak z modelu měřicího systému, tak z modelu jeho interakcí s prostředím. Spodní mez přístrojové nejistoty je kalibrační nejistota, tj. nejistota získaná kalibrací použitých přístrojů. Každý rozdíl mezi podmínkami, v jakých se přístroj nachází při kalibraci a při použití, zvyšuje přístrojovou nejistotu.
* Interakční nejistota, vznikající díky interakci mezi měřeným objektem a měřicím systémem; specifická interakce může ovlivnit stav měřeného objektu, který se může lišit od nominálních podmínek.

Tyto zdroje nejistoty, spolu s definiční nejistotou, jsou přítomné při každém měření a jejich hodnota může, a měla by být odhadnuta během fáze plánování a kontrolována během fáze provedení. Pokud je jedna či více ovlivňujících vlastností neidentifikována (a nezahrnuta v modelu měření a nekontrolována), informace poskytnutá měřicím systémem může být špatná. Tyto patologické výsledky musíme odhalit a odmítnout; pokud věříme, že přsto obsahují užitečné informace, měli bychom vylepšit model měření (to může nastat např. při objevení nového fyzického fenoménu).

### Hierarchie modelů a úrovně formálních znalostí

Při měření fyzikálních veličin nám znalost teorie dovoluje vytvářet hierarchie modelů s narůstající komplexitou. To umožňuje lepší popis kontextu měření a větší významnost výsledků měření. Metamodel struktury měření fyzických vlastností má následující charakteristiky ([68]):

* Vlastnosti nejsou považovány za inherentní rysy empirických objektů, ale za konstituující komponenty modelů: modely určují vlastnosti a jakákoliv experimentální aktivita cílená na extrakci informací o objektech vyžaduje předběžnou popisnou aktivitu.
* Modely jsou zaměřené na cíl a nejsou inherentně rysy modelovaných objektů, ačkoliv modely nižších úrovní abstrakce jsou často implicitní.
* Jak úroveň abstrakce stoupá, vztah mezi modelem a modelovaným objektem je více a více skrytý.
* Hierarchický řetěz modelu je takový, že modely nižší úrovně znalostí jsou embedované a často skryté (např. protože jsou implicitně předpokládané) modely vyšší úrovně: model vyšší úrovně implikuje všechny modely nižší úrovně, takže když je model nižší úrovně změněn, model vyšší úrovně musí být adaptován či nahrazen.

Koexistence různých (nebo alespoň částečně nezávislých) teorií umožňuje aplikaci různých metod měření. Například objem válce lze odvodit změřením výšky a průměru (geometrický objem) nebo změření hmotnosti a hustoty (mechanický objem). Naopak, pokud se zabýváme měřením v *soft* systémech, teorie o měřeném atributu obvykle nejsou dostupné. Následkem toho je struktura modelu založená na různých úrovních znalostí zřídkakdy možná. Rovněž, jakmile je model měřené veličiny ustanoven, nemusí být lehké ukázat, zdali měření založené na tomto modelu může poskytnout dost informací pro dosažení cíle měření.

### Analýza a vyjádření nejistoty

Ve výsledku měření by vlastnost neměla být reprezentována jedinou hodnotou. Naopak bychom měli poskytnout množinu hodnot, které lze vlastnosti odůvodněně přisoudit, spolu s jakoukoliv další dostupnou relevantní informací. Teorie pravděpodobnosti, a především pojem náhodné proměnné, umožňuje s takto pojatým výsledkem měření zacházet efektivně. Náhodná proměnná *X* je proto doporučená ([VIM]) k modelování výstupu procesu měření; související funkce hustoty pravděpodobnosti (*probability density function*, PDF) popisuje rozložení možných hodnot vlastnosti. U atributů definovaných alespoň na intervalové škále a modelovaných jako gaussovská náhodná proměnná lze výsledek měření vyjádřit pomocí prvních dvou momentů PDF, tj. očekávané hodnoty a směrodatné odchylky. Poslední dobou vědci navrhují formalizovat nejistotu měření pomocí ne-pravděpodobnostních frameworků, obzvláště v kontextu matematické teorie důkazu [69], *fuzzy* teorii množin [70, 71] nebo teorie náhodných *fuzzy* proměnných [72].

Výsledek měřený je obvykle poskytován jako jedna hodnota vlastnosti a nejistota měření; vyjádřené pomocí náhodné proměnné modelující výstup procesu měření: naměřená hodnota je odhad očekávané hodnoty *x*, a nejistota měření je popsána pomocí směrodatné odchylky σ(*x*). Tyto parametry se naměřená hodnota a standardní nejistota měření ([VIM]).

V průběhu plánování měření lze nejistotu evaluovat s použitím apriorně dostupných údajů (např. specifikace přístroje, kalibrační certifikáty, zkušenosti a obecné vědomosti designéra měření, atp.). Související procedury jsou nazývány vyhodnocení nejistoty měření způsobem B a související standardní nejistota měření je označena *uB*(*x*). Jakmile jsou dokončeny experimentální aktivity a jsou dostupná získaná data, nejistotu měření lze vyjádřit rovněž způsobem A, tj. statistickými technikami aplikovanými na indikace či naměřené hodnoty. Související standardní nejistota měření je označena *uA*(*x*). Typy A a B obecně souvisejí s náhodnými fluktuacemi a nekompletními znalostmi zprostředkovanými modelem měření. Tudíž náhodné proměnné popisující tyto vlivy je možno považovat za nekorelované. Z toho plyne, že odhad směrodatných odchylek výstupu měření, nazývaný kombinovaná standardní nejistota měření *uC*(*x*), se dá vyjádřit jako:

Pokud je výsledek měření využíván v nějakém procesu rozhodování, může být výhodné ho reprezentovat jako interval, který zahrne dost velký zlomek *p* rozložení hodnot, které lze odůvodněně přisoudit atributu. Zlomek *p* je nazýván pravděpodobnost pokrytí nebo jako úroveň spolehlivosti ([VIM]). Interval představující výsledek měření je obvykle vyjádřen jako *x* ± *U*(*x*): je centrovaný okolo naměřených hodnot *x* a jeho půl­–délka *U*(*x*) se nazývá rozšířená nejistota měření. Tento parametr je produktem kombinované standardní matematické nejistoty *uC*(*x*) a přiměřený koeficient měření, tj. např. *U*(*X*) = *kuC*(*x*). Hodnota koeficientu *k* je zvolena na základě vyžadované pravděpodobnosti pokrytí *p*, a obvykle je v rozmezí 2–30 ([VIM]).

### Cílová nejistota a komplexita modelu měření

Aby šlo výsledky měřením efektivně použít k dosahování cílů měření, musí zprostředkovávat určité minimální množství informací o měřeném atributu. To je určeno během fáze určení cílů tím, že je zvolena akceptovatelná horní mezí *uT(x)* nejistoty měření, tj. cílová nejistota měření. Při vytváření modelu měření je třeba garantovat, že očekávaná nejistota měření bude nižší než cílová nejistot. Nejistota měření může být vždy snížena přidáním dalších úrovní detailů, např. zvýšením počtu ovlivňujících vlastností, zlepšením přesnosti matematických vztahů nebo zúžením rozsahů povolených hodnot pro ovlivňující vlastnosti. Nicméně, tímto způsobem se zvyšuje komplexita modelu měření, která závisí na počtu modelovaných vlastností, výpočetní náročnosti modelovaných vztahů a požadavcích na kontrolu ovlivňujících vlastností. Vysoká komplexita modelu vede k sofistikovaným procedurám měření, které musí být definovány zkušeným designerem a prováděny zkušenými experimentátory. Následkem toho může být měření příliš drahé a náklady nemusí být obhajitelné dosáhnutím zamýšleného cíle. Navíc, další množství získaných informací může přesahovat požadavky specifikovanými cílovou nejistotou měření – což je činí zbytečnými. Na druhou stranu, množství informací dostupných při použití málo komplexního modelu nemusí být dostačující pro dosažení cíle měření, v případě že nejistota měření převyšuje specifikovanou cílovou nejistotu měření. Z toho plyne, že návrh vyčerpávajícího modelu měření není cílem fáze modelování. Vhodný model měření vybírá jen takové aspekty kontextu měření, které jsou relevantní pro plnění cílů měření. Výběr vhodného modelu musí zvážit následující ([61]):

* Množství informací zprostředkovaných o měřené vlastnosti by mělo stačit pro to, aby se na jejich základě dalo činit rozhodnutí, tj. nejistota měření musí být menší než cílová nejistota s danou úrovní spolehlivosti.
* Mělo by být alokováno minimální množství zdrojů kvůli jak ekonomickým, tak technickým omezením.

Výběr modelu měření vykazujícího minimální komplexitu, která uspokojí omezení představované cílovou nejistotou, může být velmi těžký úkol, obzvláště pro vysoce přesné a komplexní měření.

### Postup pro výběr vhodného modelu měření

Pro tvrdé i měkké měření, výběr modelu měření může být učiněn podle následující iterativní procedury, inspirované Postupem pro kontrolu nejistoty (*Procedure for Uncertainty Management* (PUMA)), který vychází z mezinárodního standardu ISO/TS 14253–2 ([73]):

1. Specifikujte všechny dostupné apriorní informace, omezení a dostupné zdroje.
2. Specifikujte cílovou nejistotu *uT*(*x*).
3. Identifikujte a modelujte měřený atribut, měřicí systém a experimentální prostředí.
4. S použitím apriorní informace dostupné a vyhodnocením nejistoty měření způsobem B zhodnoťte definiční nejistotu *udef*(*x*); berte přitom v potaz efekty prostředí.
5. Pokud *udef*(*x*) > *uT*(*x*) tak a) je-li to dovoleno uloženými omezeními a dostupnými zdroji, vraťte se ke kroku 3 a vylepšete model měření tak, aby snížil vliv různých zdrojů definiční nejistoty počínaje těmi nejvíce relevantními, nebo b) vraťte se ke kroku 2 a zvyšte cílovou nejistotu měření, jinak c) ukončete postup, neboť problém nemůže být vyřešen.
6. S použitím dostupných apriorních informací a vyhodnocením nejistoty měření způsobem B identifikujte a zhodnoťte interakční nejistotu *uint*(*x*) a přístrojovou nejistotu *uinstr*(*x*).
7. Zhodnoťte celkovou nejistotu měření *uB*(*x*) zkombinováním *udef*(*x*), *uint*(*x*) a *uinstr*(*x*).
8. Pokud *uB*(*x*) > *uT*(*x*), tak a) je-li dovoleno uloženými omezeními a dostupnými zdroji, vraťte se ke kroku 3 a vylepšete model měření tak, aby se snížil vliv rozličných zdrojů nejistoty počínaje těmi nejvíce relevantními, nebo b) se vraťte ke kroku 2 a zvyšte cílovou nejistotu měření, jinak c) ukončete postup, neboť problém nemůže být vyřešen.
9. Vhodný model měření je nalezen.

Tento postup spoléhá na apriorně dostupné informace a vyhodnocení nejistoty měření způsobem B. Jakmile jsou dokončeny experimentální aktivity a jsou k dispozici změřené hodnoty, lze vyhodnotit kombinovanou standardní nejistota měření *uC*(*x*). Poté je třeba tuto nejistotu opět porovnat s *uT*(*x*), za účelem kontroly validity výsledků měření; je-li to nutné, je možno vylepšit model měření, redesignovat měřicí systém a znovu provést experimentální aktivity.

### Význam měření a validita měření

S nejistotou měření, obzvláště tou definiční, souvisí i významnost měření. Jejím základem je otázka „Měříme správnou vlastnost správným způsobem?“, která se jinými slovy ptá, zda výsledek měření poskytne informace užitečné pro dosáhnutí zamýšleného cíle měření. Význam měření odkazuje k vhodnému popisu kontextu měření, a přesněji k vhodné definici měřeného atributu. Může být zlepšen pouze lepším pochopením empirického prostředí měřené veličiny.

Odlišný, ale propojený k významnosti měření, je koncept validity měření. Podle [VIM, 74] je proces měření validován poskytnutím objektivních důkazů, že jeho výsledky naplňují zamýšlený cíl s vhodnou úrovní spolehlivosti. Otázka validity je „Měříme správnou vlastnost správným způsobem a se správnou nejistotou?“. Být validním znamená, že měření je rovněž významné a jeho nejistota měření je menší než cílová nejistota, a to vše s danou úrovní spolehlivosti.

Význam měření může být potvrzen ve fázi intepretace, s ohledem na výsledky měření, nebo s použitím teoretických úvah ve fázi modelování a designu. Validace měření může být dosáhnuta pouze ve fázi interpretace, protože kvůli své definici vyžaduje získaná empirická data. Když se zabýváme fyzikálními vlastnostmi, existence teorií a již ustanovených metod měření stejného atributu dovoluje jejich vzájemnou validaci, což zajišťuje validitu implementovaného procesu měření. V mnoha případech jsou aplikované teorie ověřovány po staletí, a jakákoliv kontradikce by vyvolala snahy vědců interpretovat nevysvětlená data. Naopak při měření *soft* vlastností často existuje jediná cesta, jak dosáhnout výsledků měření, a tudíž vzájemná validace není možná. Následující dvě metody prokazování významnosti měření mohou být použity místo toho:

1. Empirická významnost, použitá k dosažení podpůrného důkazu, že výsledky měření poskytují informace o specifické vlastnosti. Např. statistické techniky jako lineární regrese nebo korelační analýza mohou podpořit předpoklad, že měření dané vlastnosti může poskytnout informaci o jiné neměřené vlastnosti. Podobné empirické důkazy, přestože nutné, nejsou obecně dostačující k potvrzení významnosti měření.
2. Teoretická významnost, která dovoluje potvrdit, že struktura designovaného procesu měření nenarušuje žádnou nezbytnou charakteristiku řádně považovanou za měření.

Dále si uvedeme některé důvody omezující významnost měření.

Konstruktová významnost odkazuje na limity operacionální definice reprezentující měřenou vlastnost a vztahuje se k otázce: „Měříme vlastně to, co chceme měřit?“ Když je měřená vlastnost na vysoké úrovní abstrakce, může být velice těžké rozpoznat, zdali určitá definice pro měřenou vlastnost je významná, nebo ne. Může být dokonce ještě složitější vylepšit ji nebo vytvořit novou a významnější definici.

Existují různé testy inteligence. Nicméně v mnoha situacích výsledky testu nemusí být užitečné pro předpovězení schopnosti dané osoby řešit problémy ([75, 76]).

Obsahová významnost odkazuje k míře, do jakého operacionální definice měření pokrývá rozsah různých aspektů v ní zahrnutých ([77]).

Test nadesignovaný pro zhodnocení dovednosti softwarového inženýrství nemusí být omezen na evaluaci pouze programovacích schopností, ale měl by obsahovat rovněž ohodnocení schopnosti řízení procesu.

Je-li naším cílem zkontrolovat správnou operaci pístu pohybujícího se ve válci, jedno změření jejich průměrů může mít malou významnost a mohlo by vést k chybným rozhodnutím. Jedno změření nemůže zajistit cirkulární profil dvou objektů.

Významnost konzistence odkazuje ke strukturálním omezením vyplývajícím z reprezentační teorií. Ty vyžadují, aby škály měření použité pro atribut byly homomorfizmem, to je mapování ve kterém empirické relace mezi individuálními vlastnostmi jsou zachovány v abstraktních vztazích mezi hodnotami vlastností ([X]). Tato podmínka reprezentace nám dovoluje vyjádřit symbolickými termíny empirické relace nastávající mezi individuálními vlastnostmi. Tudíž, konzistence představuje nutnou podmínku, aby použitá definice skutečně zachycovala aspekty měřeného objektu, které hledáme, a tak zachovávala chování vykazované individuálními vlastnostmi v empirickém světě. Obzvláště pokud se zabýváme *soft* měřením, empirické relační systémy jsou často analyzovány příliš rychle; postupy získávání dat jsou definovány a implementovány bez zkoumání vztahů mezi empirickými vlastnostmi, které se chystáme měřit. Výsledkem může být, že skutečný význam získaných dat není jasný.

Významnost procesní konzistence odkazuje ke vztahu, který spojuje dvě nebo více vlastností při nepřímém měření. Základní problém v tomto případě je, zda hodnoty vrácené vztahem skutečně reprezentují informaci o měřeném objektu. Na rozdíl od fyzikálních měření, když se zabýváme *soft* vlastnostmi, přímo měřené vlastnosti mohou být získány často s vysokou přesností s pomocí jednoduchých aktivit (např. počet řádek kódu určitého softwaru), ale jejich propojení s měřeným atributem je často neznámé.

Předpokládejme, že změříme průměr *d* cylindrického objektu. Můžeme pak spočítat π*d*, ale pouze znalost teorie známé jako geometrie garantuje, že spočítaná hodnota je empirický smysluplná a zprostředkovávající informaci o obvodu válce.

Předpokládejme, že jsme schopni přímo měřit hmotnost *m* a zrychlení *a* fyzického objektu. Součin *F* = *ma* může být vyhodnocen a díky známé teorii fyzikálního zákona, získaný výsledek zprostředkovává informaci o jiné vlastnosti, aplikované síle. Ale když nemám žádné apriorní informace o empirické významnosti výsledku získaného zpracováním přímo změřené vlastnosti, co můžeme tvrdit? Například, co o výsledku vztahu *x* = *m* + *a*? Má empirický význam? Protože díky znalosti klasické fyzikální teorie můžeme říct, že fyzická vlastnost odpovídající *x* neexistuje; to je základní výsledek dimenzionální analýzy, vyžadující, aby vlastnosti měly stejné fyzikální dimenze, pokud je chceme sčítat.

Teorie typů škál ([X]) popisuje škálová omezení, aby šlo aplikovat operátory, což tudíž vede k významnosti konzistence vztahů zahrnujících hodnoty vlastností ([78]). Například, čistě ordinální vlastnosti nelze sčítat nebo násobit. Tudíž z tvrzení „teplota 40 °C je dvakrát vyšší než teplot 20 °C“ není validní, protože tyto vlastnosti jsou evaluovány na intervalové škále, ve které nejsou poměry invariantní. Omezení škál jsou nutné, ale ne dostačující podmínky pro významnost provedeného zpracování, a obvykle musí být splněny nějaké další omezení, aby byla garantována významnost měřeného atributu. Podobně jako když teorie nemůže být ověřená, ale pouze podpořena, nebo falzifikována ([79]), významné nebo validní měření je to, které ještě nejsme schopni ukázat jako nevýznamné nebo nevalidní.

### Celkové cíle měření

Cílem fáze modelování je určení podmínek, za kterých může být proces měření reliabilně replikován a jeho výsledky reliabilně interpretovány v různých kontextech. Tyto podmínky lze popsat:

* Z pohledu procesu, v termínech reprodukovatelnosti měření, tj. schopnosti replikovat měření na stejném nebo podobném objektu za sady podmínek zahrnujících různé lokace, operace a měřicí nástroje, tj. změnou různých rysů experimentálního kontextu, za kterého jsou výsledky měření dosahovány.
* Z pohledu výsledků v termínech metrologické návaznosti, tj. možnosti pro výsledky měření aby byly spojené k referenci skrz zdokumentovaný neporušený řetěz kalibrací.

Reprodukovatelnost měření a metrologická návaznost jsou hlavní cíle pro proces, který je strukturálně zaměřen na zprostředkování objektivní a intersubjektivní informace.

### Design

Přestože reprezentační teorie charakterizují měření jako konstrukci škály pro definovaný atribut a o měřicích systémech se nezmiňují, jejich použití je nezbytná podmínka jak v *hard* měření (kde je ovšem používání měřicích přístrojů běžné), tak v *soft* měření – za předpokladu, že je měřicí systém řádně definován, jako „sada jednoho nebo více měřicích přístrojů a často jiných zařízení, včetně činidel a zásob, sestavených a použitých tak, aby dávaly informace využitelné ke generování hodnot měřené vlastnosti ve specifikovaných intervalech pro určité atributy.“ ([VIM]).

Tato definice je dostatečně obecná, aby nevylučovala *soft* měření, ale zároveň vyžaduje použití měřicího systému, jakkoliv implementovaného, podřízeného metrologickým podmínkám, aby byla zajištěna návaznost měření a řádná kontrola přístrojové nejistoty.

Při měření fyzikálních vlastností, ve fázi designu je třeba ustanovit ([VIM]):

* Měřicí princip, tj. fyzikální fenomén, který je základem měření.
* Metodu měření, tj. generický popis logické organizace operací potřebných pro řádnou aplikaci adoptovaného měřícího principu; metody jsou kvalifikovány různými způsoby, jako substituční metody, diferenciální metody, nulové (*null*) metody, přímé a nepřímé metody
* Postup měření, tj. detailní a zdokumentovaný popis operací, které operátor musí provést, aby provedl měření efektivním a účinným způsobem podle zvolené metody měření.

Když se zabýváme *soft* měřením, žádná obecná teorie zahrnující měřený atribut obvykle neexistuje. Následkem toho je měřicí systém obvykle designován nejdříve ustanovením generického popisu operací, které je třeba provést, často zvaných plán měření, a poté detailní procedurou měření ([83]). Ať se zabýváme *hard* či *soft* vlastnostmi, postupy by obvykle měly zahrnovat:

* Formální definici (a možný textový popis) vlastností, které budou měřeny, jak měřeného objektu, tak empirického prostředí, aby byl naplněn cíl měření.
* Rozsahy hodnot vlastností, které budou měřeny.
* Pokud měříme *hard* vlastnosti, popis použitých principů a metod.
* Detailní popis vybavení použitého pro získání dat a jeho metrologické charakteristiky.
* Role osob odpovědných za experimentální aktivity, včetně jejich kompetencí a tréninkových zkušeností (je často důležité, aby experimentátoři chápali celý postup: proč je měření nutné, jak bude použito a jak jejich akce přispívá k celkové validitě získaných informací).
* Časové období, kdy musí být sběr dat proveden (nebo frekvence opakovaných sběrů dat).
* Detailní popis činností, které je třeba vykonat na získaných datech, abychom dosáhli požadovaného výsledku měření včetně informace nutné pro vyhodnocení nejistoty měření.
* Definice formátu zprávy o výsledcích měření (např. jednotlivá měření, grafy trendů či kontrolní diagramy, pouze výsledky měření nebo přidaná detailní analýza textů, atp.), o načasování (kdy a jak často jsou výsledky měření poskytovány) a zásadách šíření (jaké restrikce jsou kladeny na přístup k informacím).
* Informace nutné k následné interpretaci.
* Účel interpretace (např. posouzení shody, validace měření, zlepšení měření…) spolu s použitým rozhodovacím kritériem a prahovou hodnotou.

Jakákoliv měřicí procedura musí splňovat různá omezení, včetně časových a nákladových limitů, očekáváné maximální nejistoty dosažených výsledků a zkušenosti experimentátora.

Uvažme příklad měření teploty tělesa. Známé fyzikální zákony umožňující identifikaci a modelování měřeného atributu, vlastností prostředí a jejich vzájemných interakcí. Zvolené přístroje mohou získat informaci o měřené vlastnosti s pomocí různých fyzikálních fenoménů (např. termální expanze zvažovaného tělesa, termální expanze jiného tělesa použitého jako transduktor, termoelektrický efekt, atd.). Poté, co je zvolen měřicí princip, a jsou vybrány přístroje, je zvolena metoda měření (např. transduktor je přiložen do kontaktu s tělesem) a postup měření je definován tak, že je každá aktivita dostatečně detailně popsána.

Odpor rezistoru může být změřen přímo či nepřímo s použitím apriorní znalosti poskytnuté známým fyzikálním zákonem a metodou měření. Definice měřeného atributu je tak vedena touto znalostí (tj. závislost odporu jak na teplotě prostředí, tak na aplikovaném proudu).

Když měříme *soft* vlastnosti, dva odlišné koncepty procedury měření a definice měřeného atributu často splývají do jednoho celku. V *soft* měření je atribut často definován poskytnutím kompletního a detailního postupu pro jeho změření, v souladu s Bridgmanovou operacionální definicí vlastností. Tudíž jakýkoliv jiný postup by měřil jinou vlastnost ([84]).

Jakákoliv procedura měření by měla být řádně testována před jejím skutečným: musí být použita během zkušebního období, za účelem odhalení možných chyb. Toto je obvykle dosaženo validací získaných dat, tj. např. kontrolou pro úplnost a zapojenou nejistotu.

## Fáze 2 – Provedení: nastavení, sběr dat, extrakce informací a zpravování

Nastavení je sada úkolů cílená na řádnou implementaci a uspořádání nadesignovaného měřicího systému: referenční škála musí být řádně implementována a měřicí systém musí být správně sestaven a kalibrován, aby byla garantována návaznost výsledků měření. Jak bylo zmíněno, výstup kalibrace může být reprezentován jako kalibrační diagram, tj. grafické vyjádření vztahu mezi hodnotou indikace a odpovídajícím výsledkem měření, což zároveň poskytuje informaci o přístrojové nejistotě měření ([VIM]). Aby se získala informace o měřené veličině správně, měřicí systém musí být vhodně naaranžován vzhledem jak k měřenému objekt, tak k okolnímu prostředí, např. časné zapnutí přístrojů a aparátů aby byla garantováno dosažení statusu teplotně stálého stavu, nebo příprav a čištění nádob dle předdefinovaných postupů před sběrem dat týkajících se substancí a materiálů. Podobně, když se zabýváme *soft* měření, je třeba připravit formuláře pro sběr strukturovaných dat, kalibrovat testové položky a zařídit vhodné prostředí, kde se odehrává interview či test.

Pro nastavení je proveden sběr dat podle definovaných postupů měření a jsou získána hrubý data. Některé hlavní rysy získaných dat, vztahujících se k jejich užitečnosti k další extrakci informací a interpretačním aktivitám, jsou:

* Dostatečnost, vztažená k míře do jaké je informace asociovaná ke sběru dat (např. ovlivňující vlastnosti, časový interval sběr, použitá měřicí metoda, atp.) dostačující pro extrakci informací potřebných k dosažení cíle měření.
* Správnost, vztažená k tomu, zda experimentální aktivity jsou skutečně provedeny podle postupu měření.
* Logistická návaznost, asociující naměřená data k časovému období, kdy byla získána

V hrubých datech musí být nejdříve detekován měřený objekt (např. přítomnost daného signálu v datech obsahujících šum, vzor identifikovaný v obrázku). Poté je extrahována informace a vytvořena zpráva – to je sada úkolů cílená na získání informací o měřené vlastnosti z dat, adresující jak by měl být prezentován výsledek měření, aby poskytl informaci požadovanou ke splnění cíle měření. Hrubá naměřená data mohou přímo poskytnout informaci o měřené vlastnosti pouze v takzvaných přímých měřeních. Naopak, když se zabýváme netriviálními měřeními, výsledky měření jsou často výstup funkčního vztahu zahrnujícího získaná data a jejich zpracování, jak je popsané v definovaném modelu měření. To se děje nejen pro nepřímá (odvozená) měření, ale rovněž pro přímé měření, pokud je efekt ovlivňujících vlastností signifikantní a musí být brán v úvahu ([85]). Rovněž je spočtena nejistota měření. Stojí za to zdůraznit, že číslice ve výsledku měření, které odpovídají řádovým hodnotám nižším než nejistota měření, by neměly být reportovány. Podle [VIM], je výsledek měření „množina hodnot přisouzená měřené vlastnosti, spolu s každou další dostupnou relevantní informací“. Tudíž, při reportování výsledků měření by měly být poskytnuty následující informace:

* Hodnota vlastnosti, tj. naměřená hodnota.
* Množství poskytnuté informace, s pomocí např. kombinované standardní nejistoty měření nebo intervalu hodnot a spojené pravděpodobnosti pokrytí, nebo, jako nejobecnější možnost, s pomocí PDF.
* Škála měření, stanovená např. specifikováním jednotky měření.
* Limity validity poskytnutých informací, v odkazu ke zvažovaným ovlivňujícím vlastnostem a jejich dovoleným rozsahům variací.
* Další podružné potřebné či užitečné informace pro reprodukci výsledků měření

Výsledek měření odporu rezistoru může být vyjádřen jako *R* = 1,234 ± 0,003 W, s koeficientem rozšíření 2 (odpovídajícím pravděpodobnosti zhruba 95 % při uvažování normálního rozložení), a specifikací, že vlastnosti prostředí branné do úvahy je teplota *T* a její povolený rozsah 0 °C ≤ *T* ≤ 60 °C.

## Fáze 3 – Intepretace

Fáze interpretace může být implementována buď *online*, nebo *offline*. Je vždy zaměřená na využití výsledků měření – zda byl, či nebyl naplněn účel měření, např. zhodnocení shody, validace měření, či zlepšení měření. Aby se zajistilo, že interpretace je na tento účel jasně zacílená, a nemění se v závislosti na výsledku měření, je klíčové definovat plán intepretace v průběhu fáze designu, tj. předtím, než jsou provedeny experimentální aktivity. Obzvláště jasně je třeba definovat rozhodovací kritéria a prahové hodnoty použité k intepretaci výsledků měření.

Díky nejistotě měření je výsledek rozhodnutí nejistou událostí; existuje riziko špatných rozhodnutí.

Pokud shoda[[35]](#footnote-35) produktu či služby musí být rozhodnuta s podporou výsledků měření, rozhodnutí musí být učiněno za specifických spotřebitelských a producentských rizik ([80, 81]). Informace týkající se nejistoty měření proto musí být brána v úvahu do rozhodovacího pravidla. Tento problém je řešen v mezinárodním standardu vztaženém ke geometrickým vlastnostem měření ([82]), ale základní předpoklad může být použit v mnoha rozhodovacích aktivitách zahrnujících *hard* i *soft* měření: pokud rozhodnutí o shodě musí být učiněno na základě faktu, ti, kteří chtějí prokázat či vyvrátit shodu jsou odpovědní za vliv nejistoty měření na výsledek rozhodnutí.

Ve fáze intepretaci rovněž můžeme využít, co jsme se naučili v průběhu plánování či provedení měření a snažit se zachovat získané znalosti pro budoucí použití. To může vést k novým postupům či doporučené praxi jak v procesu měření, tak v použití výsledků měření. Tyto zpětnovazební činnosti mohou vést k aktualizaci předchozích měřících aktivit. Např. díky interpretačním aktivitám může být zjištěna nadměrná citlivost přístroje k ozáření elektromagnetickým polem, což může vést k prověřování zdrojů záření, či použití přístroje, který takto není ovlivňován. Někdy mohou být ve fázi intepretace dokonce změněny i cíle měření, např. propracovat celý proces měření, aby se získala lepší informace se stejným množství zdrojů.

# Závěr

[TODO]

# Bibliografie

[TODO]

1. Viz kapitolu [X]. [↑](#footnote-ref-1)
2. Tato dvojznačnost má pravděpodobně původ v páté knize Eukleidových Základů ([36]), kde spojení „*x* doměřuje *y*“ znamená „*x* dělí *y*“, a proto *x* může být využito jako jednotka pro *y*. V tomto kontextu anglické termíny *measurement* nebo *mensuration* odkazují k procedurální demonstraci obecných geometrických tvrzení; k takové demonstraci ovšem žádné experimentální aktivity nejsou potřeba ([61]). [↑](#footnote-ref-2)
3. [TODO: protože relace mezi vlastnostmi neodpovídají relacím mezi čísly…] Viz kapitola [X]. [↑](#footnote-ref-3)
4. „Hodnota veličiny poskytnutá měřidlem nebo měřicím systémem“ [22], např. pozice ručičky ukazatele, číslice na displeji, zaškrtnuté odpovědi v dotazníku, apod. [↑](#footnote-ref-4)
5. Součin objemu a tlaku je u plynu konstantní, a závisí na množství plynu a jeho teplotě. [↑](#footnote-ref-5)
6. Což spolu s Boylovým zákonem tvoří stavovou rovnici ideálního plynu. [↑](#footnote-ref-6)
7. [TODO: jiné názvy? Např. obecná vlastnost – general property? Často když řekneme vlastnost, tak myslíme atribut ve významu popsaném výše…] [↑](#footnote-ref-7)
8. Viz kapitolu [X]. [↑](#footnote-ref-8)
9. Viz. kapitolu [X]. [↑](#footnote-ref-9)
10. Ve starší anglické literatuře se termín *magnitude* používal jak ve významu „velikost atributu“, tak i atributu jako takového (*magnitude of magnitude length*); v současnosti je pro význam „atribut“ používáno *quantity*, zatímco *magnitude* označuje „velikost“. Pro atributy, u kterých je prokázána smysluplnost měření (tj. běžné fyzikální atributy jako jé délka, hmotnost, čas, atd.), budu používat „veličina“, jako zažitý český překlad *quantity*; „velikost“ pak odpovídá *magnitude*, např. ve spojeních velikost atributu, velikost veličiny ([22], [24]). [↑](#footnote-ref-10)
11. Viz přílohu [X]. [↑](#footnote-ref-11)
12. Viz kapitolu [X]. [↑](#footnote-ref-12)
13. „Axiomy veličin a teorie měření“; není-li uvedeno jinak, je popis původního díla ([31]) podle anglického překladu ([12, 13]). [↑](#footnote-ref-13)
14. Viz kapitola X – měření jako morfní mapování [↑](#footnote-ref-14)
15. Viz kapitola X [↑](#footnote-ref-15)
16. Viz kapitolu [X]. [↑](#footnote-ref-16)
17. Relační systém je uspořádaná n-tice množin: kde *D* je neprázdná (konečná, nebo nekonečná) množina objektů a *R* je neprázdná (konečná, nebo nekonečná) množina vlastností anebo n-místných relací či operací. [↑](#footnote-ref-17)
18. „Počítání a měření z epistemologického hlediska“; není-li uvedeno jinak, je popis původního díla ([29]) podle anglického překladu ([30]). [↑](#footnote-ref-18)
19. [TODO: definice] [↑](#footnote-ref-19)
20. [TODO: definice] [↑](#footnote-ref-20)
21. [TODO: definice] [↑](#footnote-ref-21)
22. To je obvyklá námitka proti podobným empirickým relacím, a bude ještě několikrát zmíněna, především v kapitole [?]. [↑](#footnote-ref-22)
23. „Fyzika: základy“; není-li uvedeno jinak, je popis s použitím původního díla ([29]). [↑](#footnote-ref-23)
24. [TODO: Campbell má divné pojetí čísel. Vysvětlit více?] [↑](#footnote-ref-24)
25. [TODO: definice] [↑](#footnote-ref-25)
26. „O teorii škál měření“; není-li uvedeno jinak, je popis s použitím původního díla ([32]). [↑](#footnote-ref-26)
27. Více viz kapitolu [X] [↑](#footnote-ref-27)
28. „Množina nezávislých axiomů pro extenzivní veličiny“; není-li uvedeno jinak, je popis s použitím původního díla ([33]). [↑](#footnote-ref-28)
29. [TODO: před nimi ještě jeden Francouz. Dohledat!] [↑](#footnote-ref-29)
30. „Simultánní spojené měření: nový druh fundamentálního měření“; není-li uvedeno jinak, je popis s použitím původního díla ([20]). [↑](#footnote-ref-30)
31. [TODO: definice] [↑](#footnote-ref-31)
32. Více viz kapitola [X] [↑](#footnote-ref-32)
33. Viz kapitolu [X]. [↑](#footnote-ref-33)
34. Viz kapitolu [X]. [↑](#footnote-ref-34)
35. Posuzování shody je činnost prováděná za účelem stanovení, zda výrobek, proces, systém, osoba či organizace splňují příslušné normy a vyhovují stanoveným požadavkům ([X]). [↑](#footnote-ref-35)