Krzywe i powierzchnie parametryczne

Materiały i źródła…

- D.F. Rogers, An introduction to NURBS with Historical Perspective, Morgan-Kaufman, 2000
- D. Salomon, Curves and Surfaces for Computer Graphics, Springer, 2006
- Alan Benton course
- Scott Schaefer course

Zacznijmy od krzywych

- Przypomnijmy trzy podejścia do reprezentacji krzywych w przestrzeni 3D:
  1. Postać funkcyjna: $y = f(x,z)$
  2. Postać parametryczna: $Q(t) = [x(t), y(t), z(t)]$
  3. Postać uwikłana: $f(x,y,z) = 0$ lub $f(x,y,z) - R = 0$
- Dalej zajmiemy się reprezentacją parametryczną. Postać funkcyjną od razu odrzucamy – objaśnienie na następnym slajdzie.

Bezpośrednia postać funkcyjna $y=f(x,z)$

- Odrzucamy ją bo sprawia sporo kłopotów:
  1. Nie można uzyskać wielu wartości *y* dla jednej wartości *x*. Okręgi, elipsy, etc., muszą być reprezentowane przez kilka segmentów.
  2. Krzywa tak zdefiniowana nie jest inwariantna ze względu na obroty.
  3. Opisanie krzywych za pomocą pionowych stycznych jest trudne (trudno reprezentować nieskończenie duże nachylenie)

Postać parametryczna

Ogólna postać krzywej parametrycznej:

$$Q(t) = [X(t), Y(t), Z(t)]$$

$$x = X(t)$$

$$y = Y(t)$$

$$z = Z(t)$$

… i powierzchni parametrycznej:

$$Q(s,t) = [X(s,t), Y(s,t), Z(s,t)]$$

Postać parametryczna jest bardziej elastyczna

Krzywa trzeciego stopnia w postaci funkcyjnej ma 4 stopnie swobody (po jednej na każdy parametr):

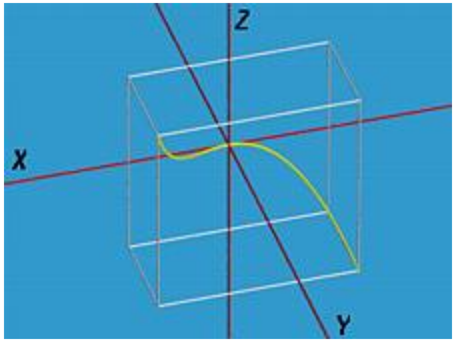
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Krzywa w postaci parametrycznej ma 8 stopni swobody:

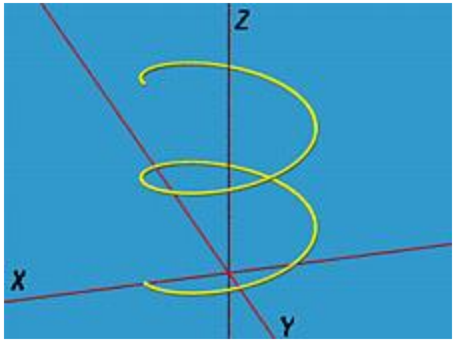
$$x(t) = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta \quad c_1 < t < c_2$$
$$y(t) = \overline{\alpha} t^3 + \overline{\beta} t^2 + \overline{\gamma} t + \overline{\delta}$$

Dla uproszczenia rozważamy płaską krzywą;
Parametr *t* często jest normalizowany do przedziału [0,1]

Krzywe parametryczne



$$X(t) = t$$
$$Y(t) = t^2$$
$$Z(t) = t^3$$



$$X(t) = a\cos(t)$$
$$Y(t) = a\sin(t)$$
$$Z(t) = bt$$

http://www.math.uri.edu/~bkaskosz/flashmo/parcur/

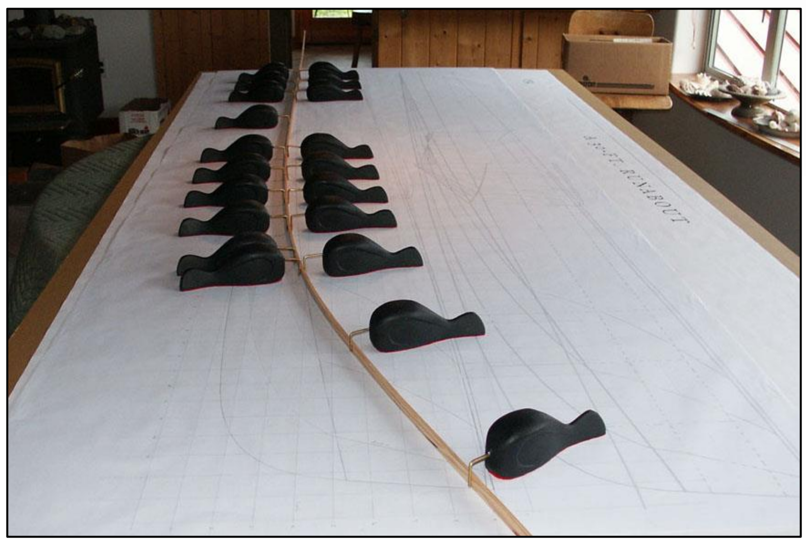
Krzywe wielomianowe

- Przypomnijmy:
  - Wielomian Lagrange'a
  - Wielomian Hermite'a

- Czym się charakteryzują?
- Ważne, ale nie zrobiły kariery w modelowaniu dla grafiki.

Historia matematycznego modelowania geometrii

- Splajny pochodzą z przemysłu okrętowego.



- Drewniane splajny mogą być opisane jako wielomiany Hermite'a n-tego stopnia, z n+1 punktami kontrolnymi

Historia, cd

- Operowanie n+1 wartościami na splajnie jest dosyć uciążliwe
- Operowanie (n+1)*(m+1) wartościami na „łacie” – jeszcze bardziej kłopotliwe.

- Rozwiązaniem jest sklejanie funkcji niskiego (np. trzeciego) stopnia z zachowaniem odpowiedniej gładkości.

- Znaczący wkład w rozwój splajnów wnieśli: Bezier (Renault), de Casteljeau (Citroen) i de Boor (GM)

Parametryczne krzywe trzeciego stopnia

- Krzywe trzeciego stopnia są najczęściej używanymi w modelowaniu i grafice, bo:
  - wielomiany niższych stopni są zbyt mało elastyczne w sterowaniu kształtem krzywej
  - wielomiany wyższych stopni mają tendencję do niepożądanych oscylacji
- Stosuje się jednak krzywe wyższego stopnia w zagadnieniach CAD (projektowanie powierzchni aerodynamicznych)

Parametryczne krzywe trzeciego stopnia

- Dlaczego tak powszechne w modelowaniu graficznym są krzywe wielomianowe trzeciego stopnia?

- Są to krzywe najniższego stopnia, które:
  - przechodzą przez dwa określone punkty końcowe z określonymi pochodnymi na każdym końcu
  - nie leżą w jednej płaszczyźnie w przestrzeni 3D

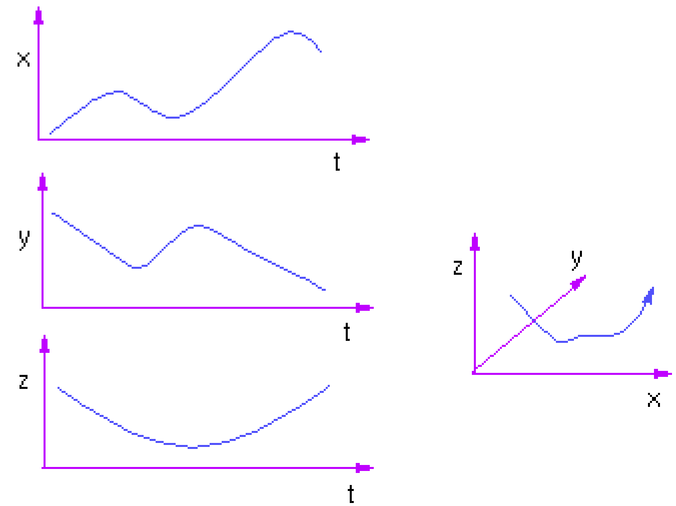
Podstawowe charakterystyki krzywych 3 stopnia

$$Q(t) = \left[x(t) \; y(t) \; z(t) \right]^T$$

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$$



Podstawowe charakterystyki 2

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$T = [t^3\ t^2\ t\ 1]^T \qquad C = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy

$$Q(t) = [x(t)\ y(t)\ z(t)]^T = C \cdot T$$

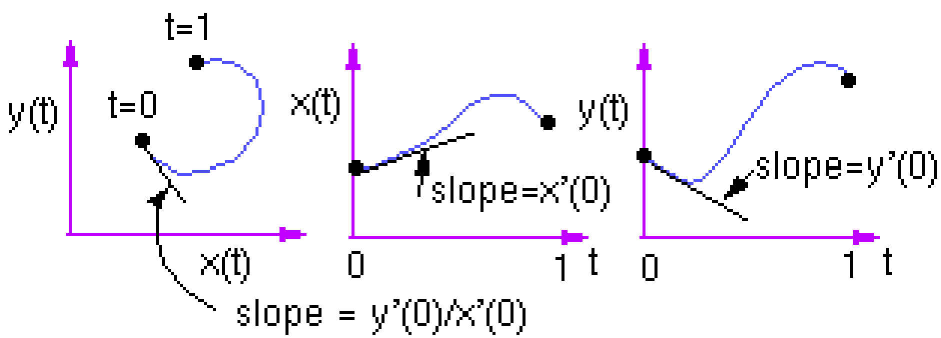
Macierz *C* nie wspomaga naszej intuicji w tym, jak przebiega krzywa.

Podstawowe charakterystyki 3

Możemy policzyć pochodną względem *t*:

$$x'(t) = C_x \cdot [3t^2 \ 2t \ 1 \ 0]$$

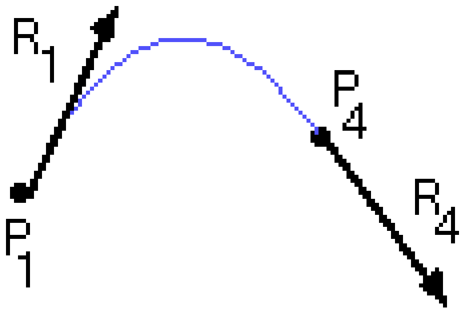
i znaleźć jej interpretację:



Krzywe Hermite'a

Rozważamy segment krzywej wielomianowej trzeciego stopnia określonej przez ograniczenia:

- dwa punkty końcowe P_1 i P_4
- dwa wektory styczne w punktach końcowych R_1 i R_4



Krzywe Hermite'a

$$x(t) = C_x \cdot T$$

Przy założonych ograniczeniach mamy:

$$x(0) = C_x \cdot [0\,0\,0\,1]^T$$

$$x(1) = C_x \cdot [1\,1\,1\,1]^T$$

$$x'(0) = C_x \cdot [0\,0\,1\,0]^T$$

$$x'(1) = C_x \cdot [3\,2\,1\,0]^T$$

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x'(0) \\ x'(1) \end{bmatrix} = C_x \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_x = C_x \cdot B$$

Krzywe Hermite'a, cd.

$$G_x = C_x \cdot B \qquad C_x = G_x \cdot B^{-1}$$

$$x(t) = G_x \cdot B^{-1} \cdot T$$

$$y(t) = G_y \cdot B^{-1} \cdot T$$

$$z(t) = G_z \cdot B^{-1} \cdot T$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} \cdot B^{-1} \cdot T$$

Krzywe Hermite'a, cd.

$$Q(t) = G \cdot M_H \cdot T$$

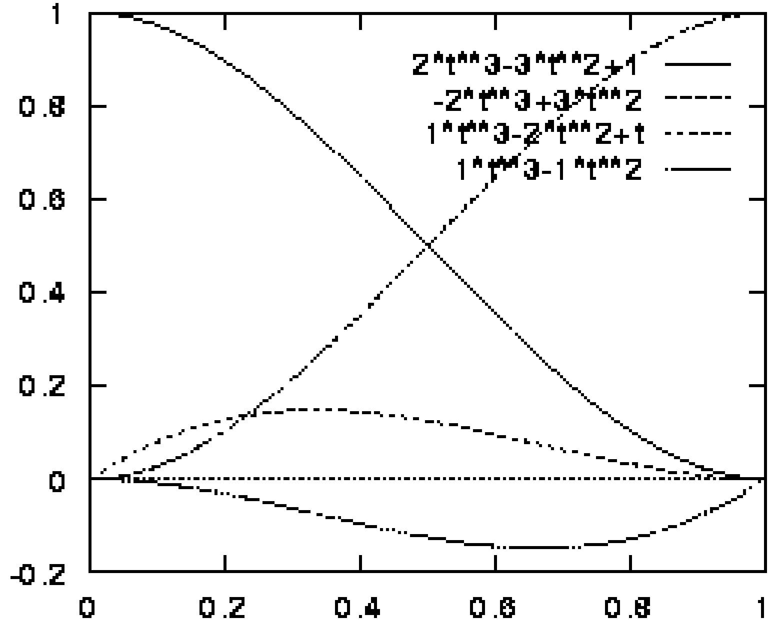
G - macierz ograniczeń geometrycznych

M_H - macierz bazowa (basis matrix)

$$G = \begin{bmatrix} P_1 & P_4 & R_1 & R_4 \end{bmatrix} \qquad M_H = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

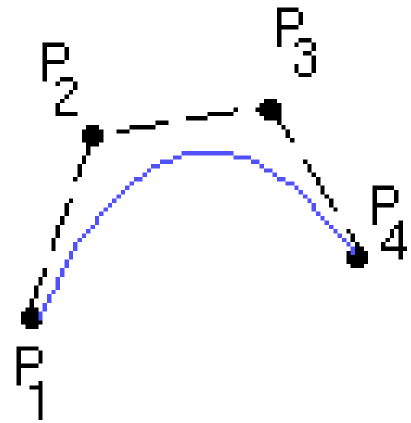
Krzywe Hermite'a, cd.

Iloczyn $M_H T$ daje funkcje bazowe Hermite'a - wielomiany wagowe dla każdego elementu macierzy geometrii G



Krzywe Beziera

- Krzywe Beziera 3 stopnia są sterowane czterema ograniczeniami



- Wektory $(P_2 - P_1)$ i $(P_4 - P_3)$ są styczne do krzywej w jej końcach.
- Krzywe Beziera są modyfikacjami krzywych Hermite'a (Ograniczenia P_1 i P_4 - takie jak u Hermite'a, natomiast $R_1 = 3(P_2 - P_1)$, $R_4 = 3(P_4 - P_3)$)

Krzywe Beziera, c.d.

Mamy nową macierz geometrii $G_B = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4]$

związaną z macierzą Hermite'a G_H:

$$G_H = [P_1\ P_4\ R_1\ R_4] = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= G_B M_{HB}$$

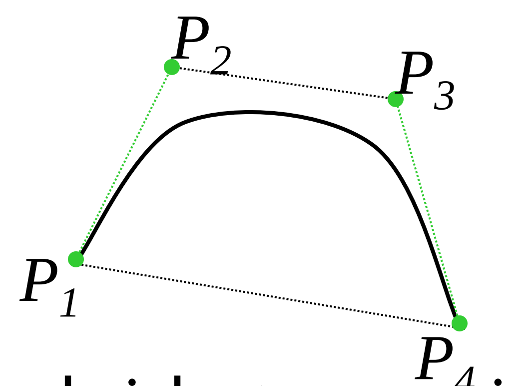
Krzywe Beziera – koniec wyprowadzenia

Krzywe Beziera, c.d.

- Możemy teraz przedstawić gotową formułę na krzywą Beziera trzeciego stopnia:

$$Q_B(t) = G_B \cdot M_B \cdot T = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Macierz M_B jest stała dla krzywych Beziera (nazywana jest macierzą bazową)



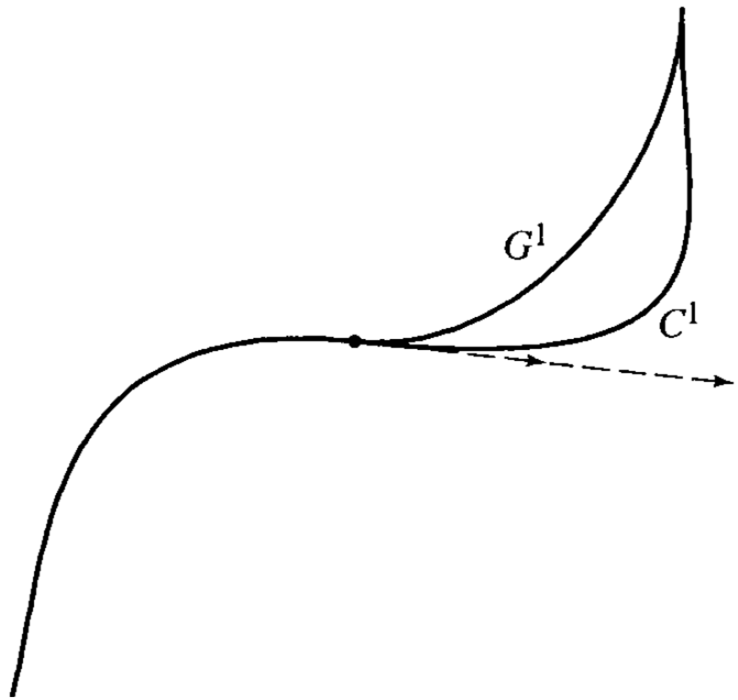
- Sukces krzywych Beziera wynika z wygody ich stosowania

Ciągłość funkcji sklejanych

- Wyróżniamy ciągłość geometryczną G i ciągłość parametryczną C
- Ciągłość C^0 jest identyczna z G^0 i oznacza, że segmenty połączone są swoimi końcami.
- Ciągłość G^1 oznacza, że nachylenia krzywych w miejscu połączenia są takie same (ale długości wektorów stycznych już nie muszą).
- Ciągłość C^1 oznacza, że nachylenia krzywych w miejscu połączenia i długości wektorów stycznych są takie same.

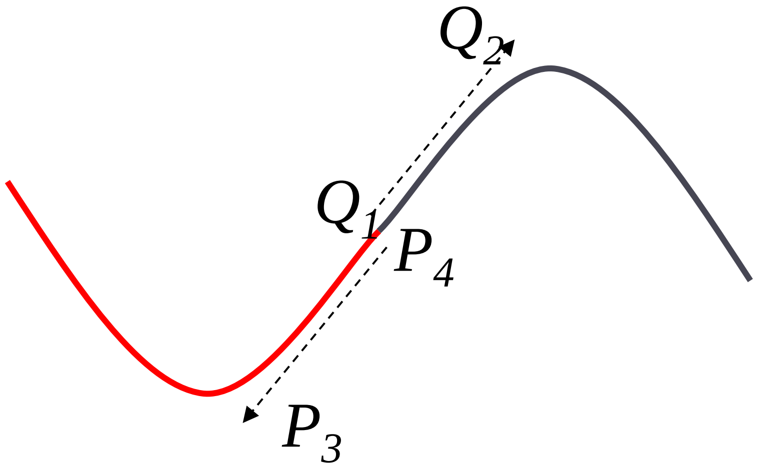
Przykład

- Porównanie ciągłości G^1 i C^1

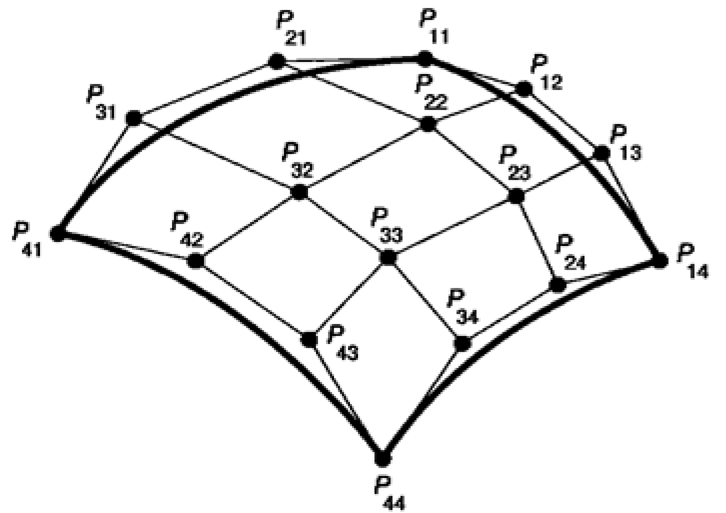


Łączenie splajnów Beziera

- Połączenie z ciągłością C^0 → $P_4 = Q_1$
- Połączenie z ciągłością C^1 → wymagamy C^0 i dodatkowo $P_4 - P_3 = Q_2 - Q_1$



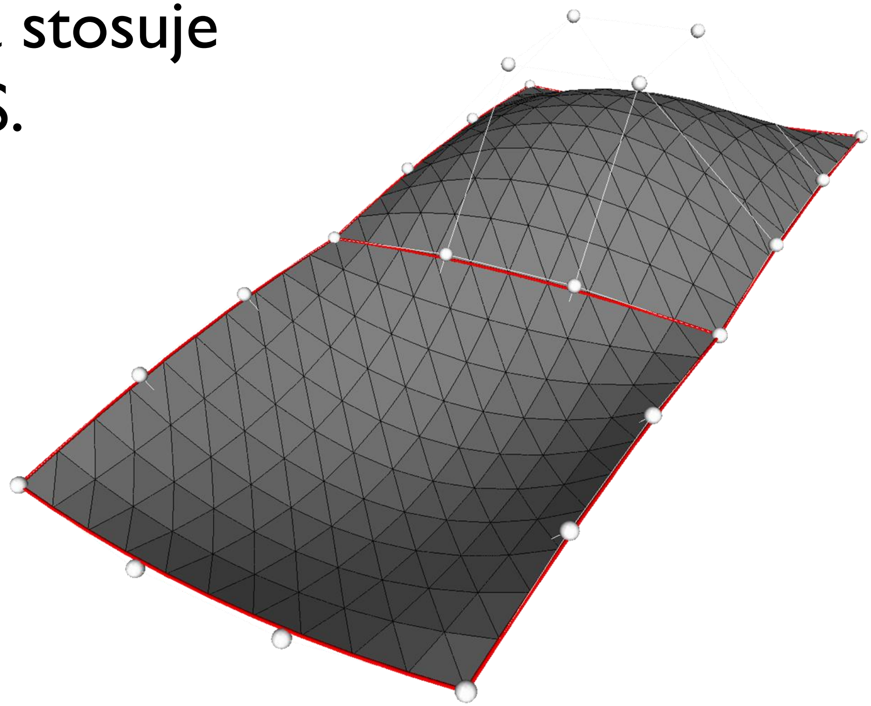
Płaty Beziera



$$Q(s,t) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} B_i(s) \cdot B_j(t) \cdot \mathbf{P}_{ij}$$

Łączenie płatów Beziera

- Musimy zadbać o spełnienie ciągłości C^1 na krawędzi połączenia.
- Identyczna procedura stosuje się do płatów NURBS.



[Przykład z płatem]

Krzywe Beziera różnych stopni

- Krzywe trzeciego stopnia są częste, ale nie jedyne:

Liniowe: $P(t) = (1-t)P_0 + tP_1$

Kwadratowe: $P(t) = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2$

Kubiczne: $P(t) = (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3$

...

Ogólnie:

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i, \quad 0 \le t \le 1$$

Przykład z krzywymi Beziera

- http://geometrie.foretnik.net/files/NURBS-cz.swf

- Przykłady z three.js:
  - Stemkoski: grapher
  - Threejs.org: ParametricGeometry

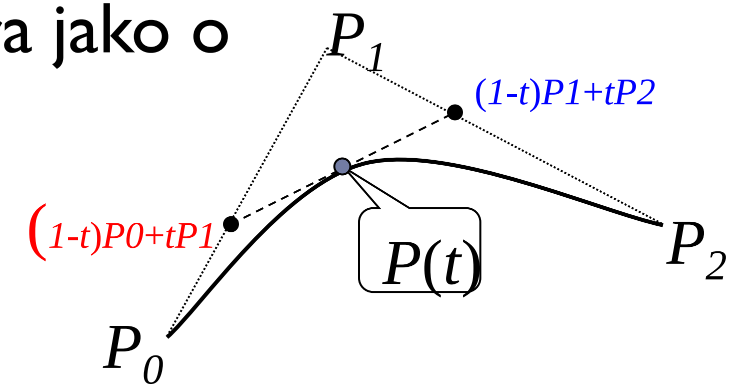
Dalszy ciąg…

- Wyprowadzenia i różne szczegóły matematyczne – dla zainteresowanych
- W podstawowym kursie grafiki – do pominięcia

Krzywe Beziera

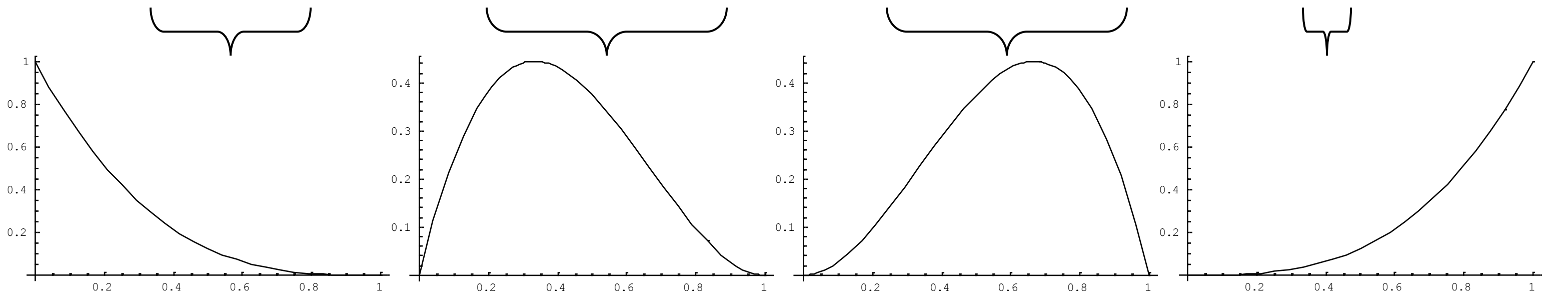
- Możemy myśleć o krzywych Beziera jako o
  - *Liniowych interpolacjach*
    - Liniowa krzywa Beziera jest liniową interpolacją pomiędzy dwoma punktami.
    - Kwadratowa krzywa Beziera może być traktowana jako liniowa interpolacja między dwiema liniami:

      $P(t) = (1-t)\,((1-t)P_0+tP_1) + (t)\,((1-t)P_1+tP_2)$
    - Krzywa kubiczna jest liniową interpolacją krzywych niższego stopnia – w tym wypadku kwadratowych… itd.
  - *Średniej ważonej* pomiędzy punktami kontrolnymi.



Wielomiany Bernsteina trzeciego stopnia

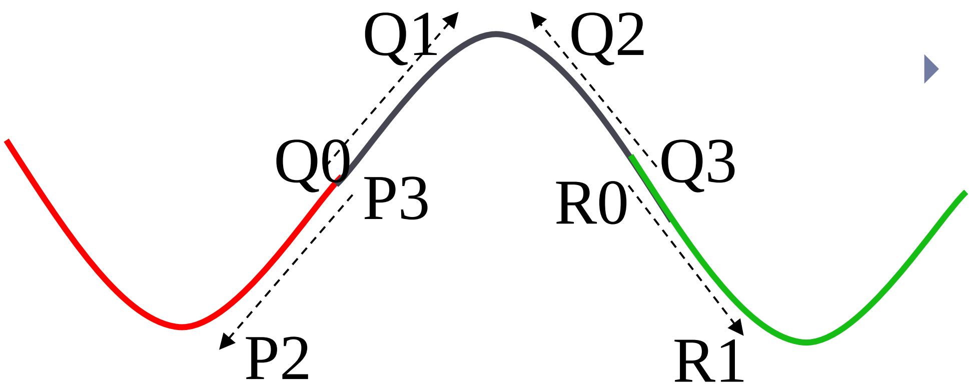
$$P(t) = (1\text{-}t)^3 P_0 \;+\; 3t(1\text{-}t)^2 P_1 \;+\; 3t^2(1\text{-}t) P^2 \;+\; t^3 P_3$$



- Cztery punkty kontrolne są czterema *wielomianami Bernsteina* (dla $n=3$).
  - Postać ogólna: $b_{v,n}(t) = \binom{n}{v} t^v (1-t)^{n-v}$
  - Wielomiany Bernsteina w przedziale $0 \le t \le 1$ zawsze sumują się do 1:

$$\sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} t^v (1-t)^{n-v} = (t + (1-t))^n = 1$$

Parameteryzacja łańcucha krzywych Beziera



- Mamy łańcuch splajnów z wieloma punktami kontrolnymi…
  - P = {P0, P1, P2, P3}
  - Q = {Q0, Q1, Q2, Q3}
  - R = {R0, R1, R2, R3}
- …z ciągłością C1…
  - P3=Q0, P2-P3=Q0-Q1
  - Q3=R0, Q2-Q3=R0-R1

- Możemy sparametryzować łańcuch tak, że *t* przechodzi przez przedziały [0,1,2,3] , a nie ogranicza się do standardowego przedziału [0,1].
- Wtedy krzywa może być taka:

$$C(t) = P(t) \bullet ((0 \le t < 1)\ ?\ 1 : 0) + Q(t-1) \bullet ((1 \le t < 2)\ ?\ 1 : 0) + R(t-2) \bullet ((2 \le t < 3)\ ?\ 1 : 0)$$

- [0,1,2,3] może być interpretowany jako *wektor węzłów*. 0, 1, 2, i 3 sa *węzłami*.

Krzywe parametryczne - reparametryzacja

Parametryzacja na ogół nie jest jednoznaczna.
Np. odcinki:

$$L(P_0, P_1) = P_0 + u(P_1 - P_0) \qquad u = [0...1]$$

$$L(P_0, P_1) = (P_0 + P_1)/2 + v(P_1 - P_0)/2 \qquad v = [-1...1]$$

są identyczne.
Zwykle wybieramy parametryzację od 0 do 1.

B-Splines

- Krzywe Beziera trzeciego stopnia
  - muszą mieć cztery punkty kontrolne na splajn,
  - muszą zaczynać się w punkcie P1, a kończyć w P4,
  - Spełnione jest założenie, że wszystkie cztery punkty są równie ważne.
- Krzywe Beziera są szczególnym przypadkiem *B-splajnów*. B-splajny są krzywymi kawałkami ciągłymi, które
  - są złożone z wielomianów trzeciego stopnia,
  - aproksymują punkty kontrolne,

B-Splines

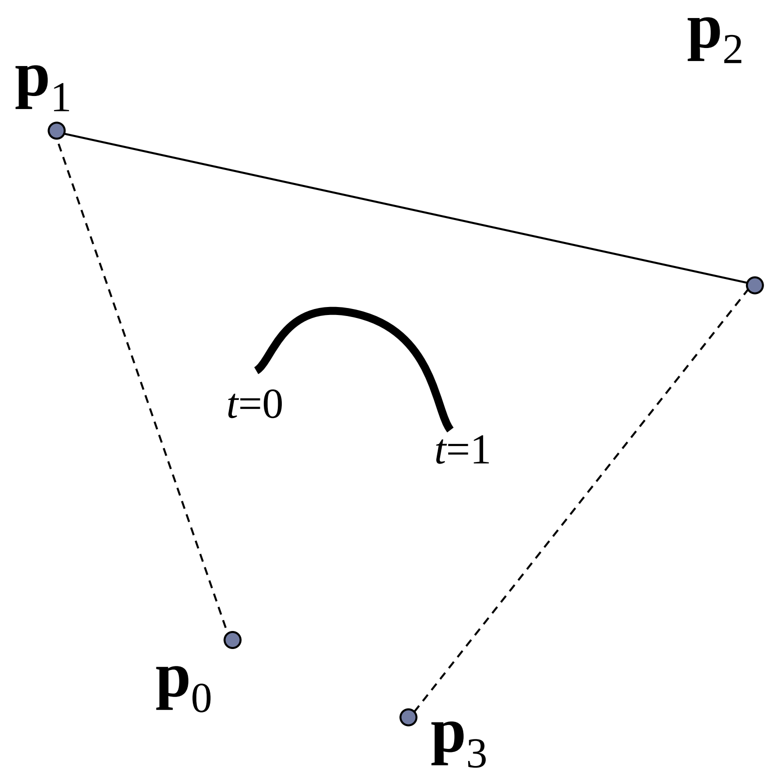
- Tworzymy B-splajny następująco:
  - $n+1$, liczba funkcji kontrolnych
  - k, stopień krzywej
  - $\{P_0 \ldots P_n\}$, lista $n+1$ *punktów kontrolnych*
  - $[t_0, t_1, \ldots, t_{k+n+1}]$, wektor węzłów (*knot vector*) wartości parametru
- n przedziałów → $n+1$ punktów kontrolnych
- k jest stopniem krzywej, więc $k+1$ jest liczbą punktów kontrolnych wpływających na pojedynczy przedział. k musi być przynajmniej równe 1 (dwa punkty kontrolne połączone linią prostą) i nie więcej niż n (liczba przedziałów)
- Są $k+n+2$ węzły, oraz $t_i \le t_{i+1}$ dla wszystkich t_i.

B-Spline – jeden segment

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) = {} & (-1/6\mathbf{p}_0 + 1/2\mathbf{p}_1 - 1/2\mathbf{p}_2 + 1/6\mathbf{p}_3)t^3 + \\
& (\ \ 1/2\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1 + 1/2\mathbf{p}_2)t^2 + \\
& (-1/2\mathbf{p}_0 + 1/2\mathbf{p}_2)t + \\
& \ \ 1/6\mathbf{p}_0 + 2/3\mathbf{p}_1 + 1/6\mathbf{p}_2
\end{aligned}
$$

Trochę czytelniejsze gdy…

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) = {} & (-1/6t^3 + 1/2t^2 - 1/2t + 1/6)\mathbf{p}_0 + \\
& (\ \ 1/2t^3 - t^2 + 2/3)\mathbf{p}_1 + \\
& (-1/2t^3 + 1/2t^2 + 1/2t + 1/6)\mathbf{p}_2 + \\
& (\ \ 1/6t^3)\mathbf{p}_3
\end{aligned}
$$

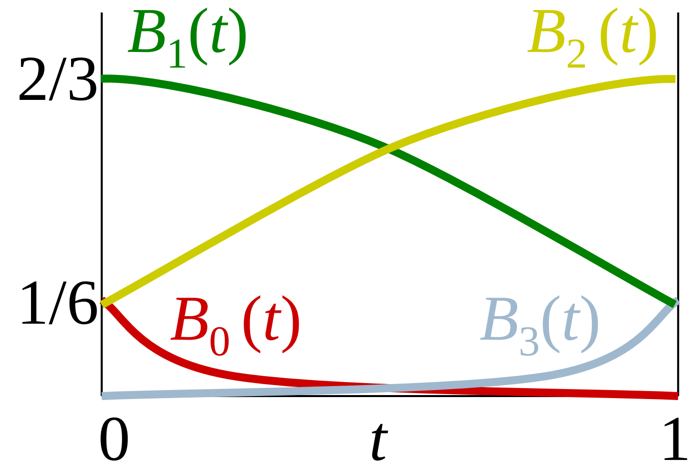


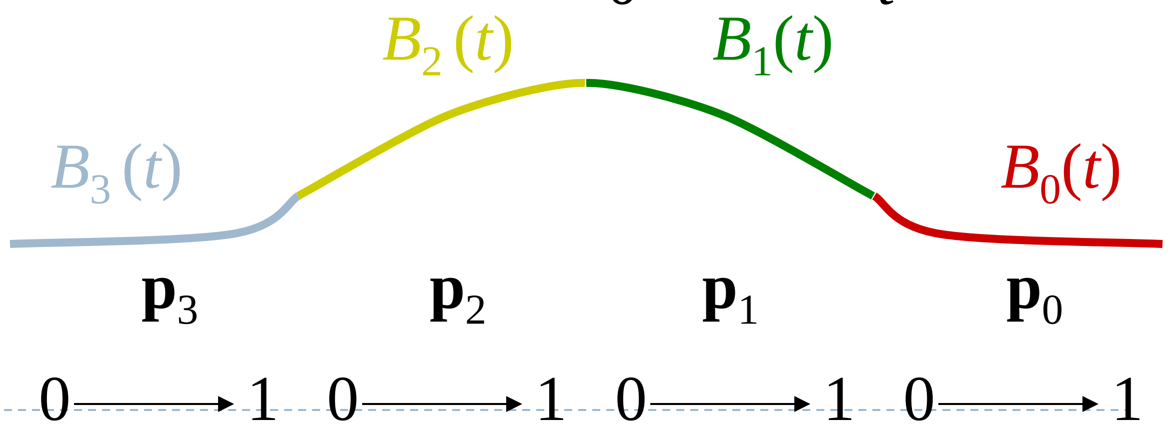
Funkcje bazowe B-Spline

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) = &(-1/6t^3 + 1/2t^2 - 1/2t + 1/6)\mathbf{p}_0 + \\ &(\;\;1/2t^3 - t^2 + 2/3)\mathbf{p}_1 + \\ &(-1/2t^3 + 1/2t^2 + 1/2t + 1/6)\mathbf{p}_2 + \\ &(\;\;1/6t^3)\mathbf{p}_3\end{aligned}$$

$$= B_0(t)\mathbf{p}_0 + B_1(t)\mathbf{p}_1 + B_2(t)\mathbf{p}_2 + B_3(t)\mathbf{p}_3$$

- Aproksymacja sześcienna kawałkami funkcji Gaussa





B-Splines

- Równanie B-splajnu jest następujące:

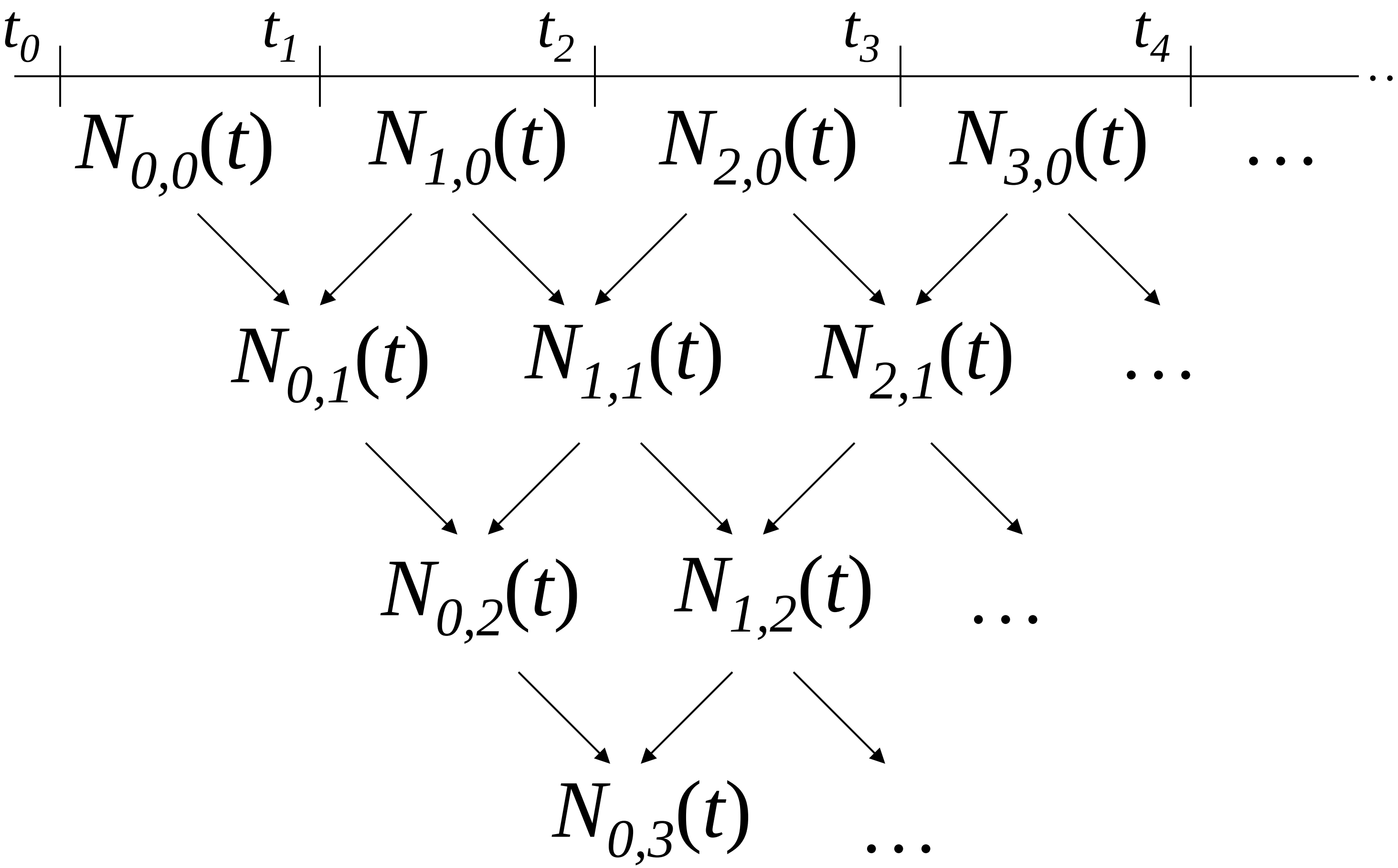
$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t) P_i, \quad t_{\min} \le t < t_{\max}$$

- $N_{i,k}(t)$ jest funkcją bazową punktu kontrolnego P_i. $N_{i,k}(t)$ jest definiowana rekursywnie:

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & t_i \le t < t_{i+1} \\ 0, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

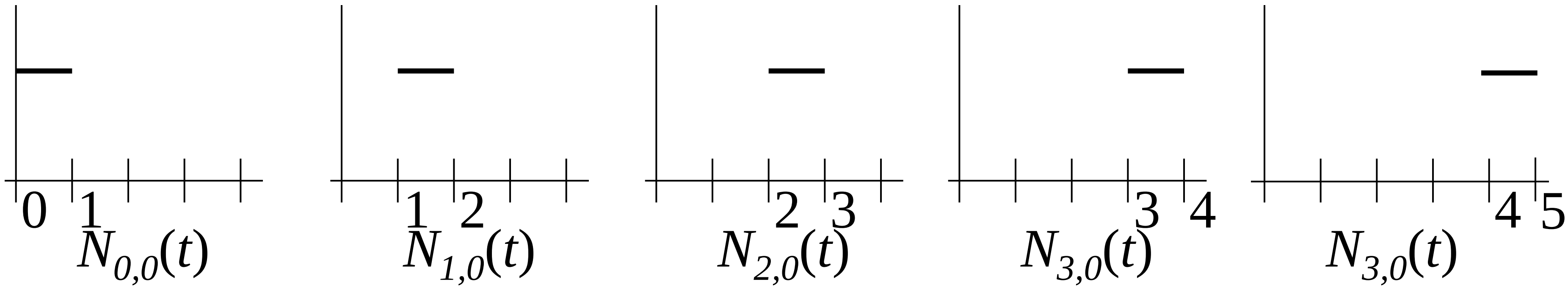
$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

B-Splines


t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 …
$N_{0,0}(t)$ $N_{1,0}(t)$ $N_{2,0}(t)$ $N_{3,0}(t)$ …
$N_{0,1}(t)$ $N_{1,1}(t)$ $N_{2,1}(t)$ …
$N_{0,2}(t)$ $N_{1,2}(t)$ …
$N_{0,3}(t)$ …

B-Splines

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & t_i \le t < t_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



$N_{0,0}(t) = 1, \quad 0 \le t < 1$

$N_{1,0}(t) = 1, \quad 1 \le t < 2$

$N_{2,0}(t) = 1, \quad 2 \le t < 3$

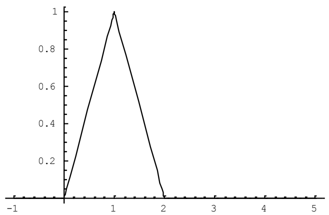
$N_{3,0}(t) = 1, \quad 3 \le t < 4$

$N_{4,0}(t) = 1, \quad 4 \le t < 5$

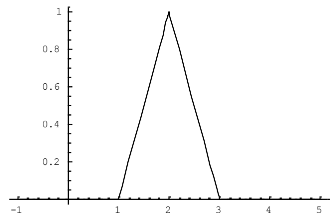
Wektor węzłów = {0,1,2,3,4,5}, $k = 0$

B-Splines

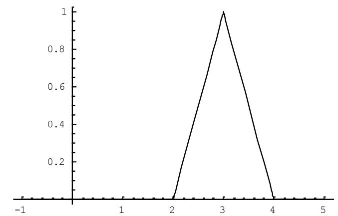
$$N_{i,k}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}N_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)$$



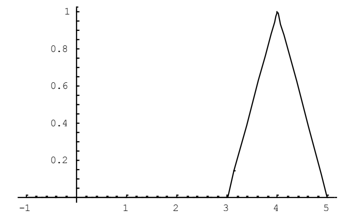
$N_{0,1}(t)$



$N_{1,1}(t)$



$N_{2,1}(t)$



$N_{3,1}(t)$

$$\mathrm{N}_{0,1}(\mathrm{t})=\frac{t-0}{1-0}N_{0,0}(t)+\frac{2-t}{2-1}N_{1,0}(t)=\begin{cases} t & 0\le \mathrm{t}<1 \\ (2-t) & 1\le \mathrm{t}<2 \end{cases}$$

$$\mathrm{N}_{1,1}(\mathrm{t})=\frac{t-1}{2-1}N_{1,0}(t)+\frac{3-t}{3-2}N_{2,0}(t)=\begin{cases} (t-1) & 1\le \mathrm{t}<2 \\ (3-t) & 2\le \mathrm{t}<3 \end{cases}$$

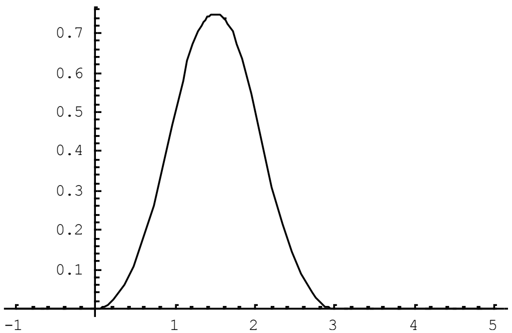
$$\mathrm{N}_{2,1}(\mathrm{t})=\frac{t-2}{3-2}N_{2,0}(t)+\frac{4-t}{4-3}N_{3,0}(t)=\begin{cases} (t-2) & 2\le \mathrm{t}<3 \\ (4-t) & 3\le \mathrm{t}<4 \end{cases}$$

$$\mathrm{N}_{3,1}(\mathrm{t})=\frac{t-3}{4-3}N_{2,0}(t)+\frac{5-t}{5-4}N_{3,0}(t)=\begin{cases} (t-3) & 3\le \mathrm{t}<4 \\ (5-t) & 4\le \mathrm{t}<5 \end{cases}$$

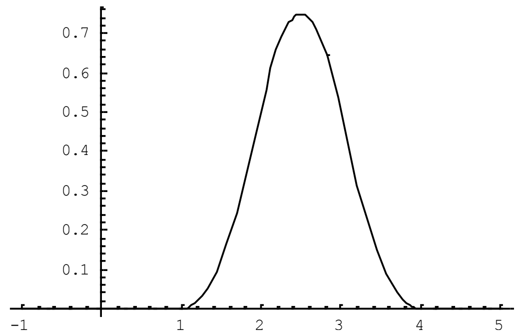
Wektor węzłów = {0,1,2,3,4,5}, k = 1

B-Splines

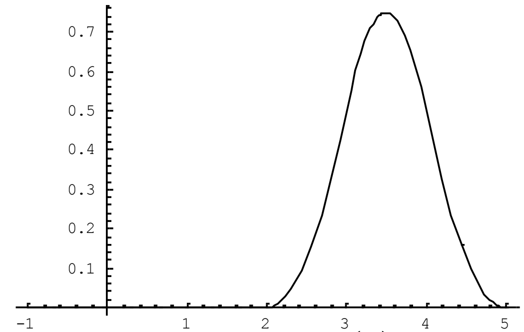
$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$



$N_{0,2}(t)$



$N_{1,2}(t)$



$N_{2,2}(t)$

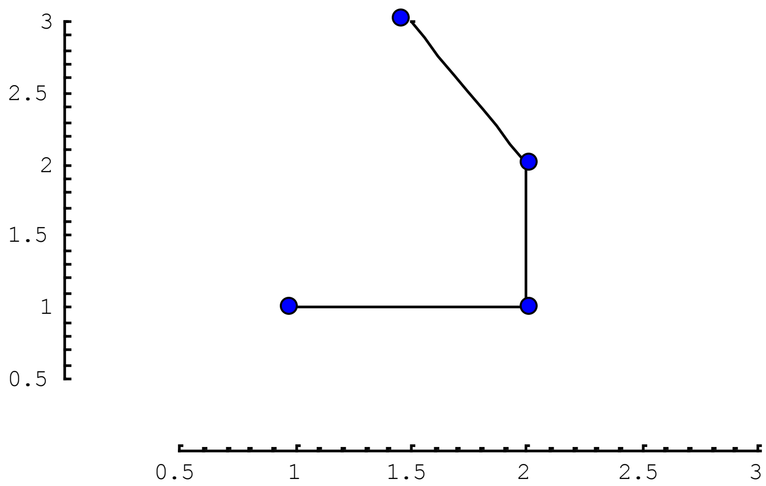
$$\mathrm{N}_{0,2}(\mathrm{t}) = \frac{t-0}{2-0} N_{0,1}(t) + \frac{3-t}{3-1} N_{1,1}(t) = \begin{cases} (t/2)(t) & 0 \le t < 1 \\ (t/2)(2-t) + ((3-t)/2)(t-1) & 1 \le t < 2 \\ ((3-t)/2)(3-t) & 2 \le t < 3 \end{cases}$$

$$\mathrm{N}_{1,2}(\mathrm{t}) = \frac{t-1}{3-1} N_{1,1}(t) + \frac{4-t}{4-2} N_{2,1}(t) = \begin{cases} ((t-1)/2)(t-1) & 1 \le t < 2 \\ ((t-1)/2)(3-t) + ((4-t)/2)(t-2) & 2 \le t < 3 \\ ((4-t)/2)(4-t) & 3 \le t < 4 \end{cases}$$

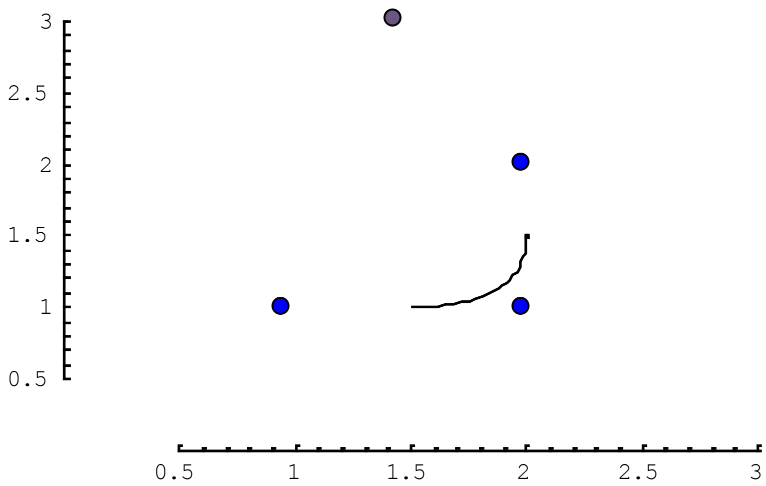
$$\mathrm{N}_{1,2}(\mathrm{t}) = \frac{t-2}{4-2} N_{2,1}(t) + \frac{5-t}{5-3} N_{3,1}(t) = \begin{cases} ((t-2)/2)(t-2) & 2 \le t < 3 \\ ((t-2)/2)(4-t) + ((5-t)/2)(t-3) & 3 \le t < 4 \\ ((5-t)/2)(5-t) & 4 \le t < 5 \end{cases}$$

Wektor węzłów= {0,1,2,3,4,5}, $k = 2$

B-Splines



Przy k=1 funkcja jest kawałkami liniowa, zależy od P_0,P_1,P_2,P_3, i jest w pełni określona na $[t_1,t_4)$.



Przy k=2 jest kawałkami kwadratowa, zależy od P_0,P_1,P_2, i jest w pełni określona na $[t_2,t_3)$.

Każda funkcja kontrolna stopnia k zależy od $k+1$ węzłów, więc $N_{i,k}$ zależy od: t_i do t_{i+k}, włącznie. Zatem: sześć węzłów → pięć nieciągłych funkcji → cztery liniowe interpolacje kawałkami → trzy parabole, interpolujące trzy węzły. n+1=3 punkty sterujące, k=2 (stopień), n+1+k+1=6 węzłów.

Wektor węzłów = {0,1,2,3,4,5}

NURBS

- *NURBS* (“*Non-Uniform Rational B-Splines*”) są uogólnieniem krzywych Beziera.
  - NU: *Non-Uniform*. Punkty kontrolne nie musza mieć jednakowych wag.
  - R: *Rational*. Splajny mogą być definiowane przez funkcje wymierne
  - BS: *B-Spline*. Łańcuch krzywych Beziera o zmieniającym się stopniu.