Autor: Jakub Półtoraczyk

Indeks: 252895

Grupa: E05-36g (środa 17:05-18:45)

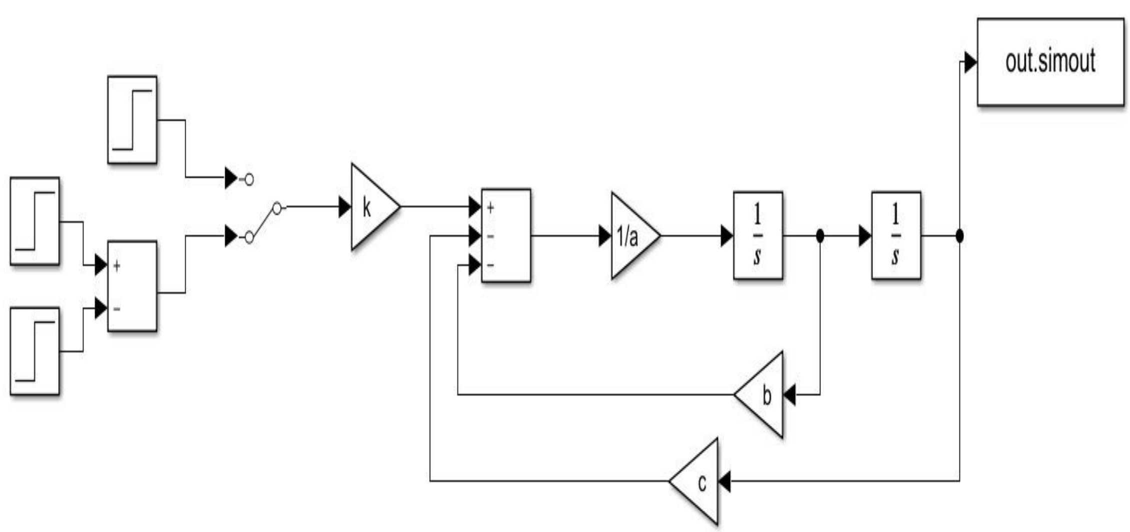
Data wykonania: 02.11.20

Cel ćwiczenia:

Rozwiązać w sposób analityczny i symulacyjny równanie różniczkowe w postaci:

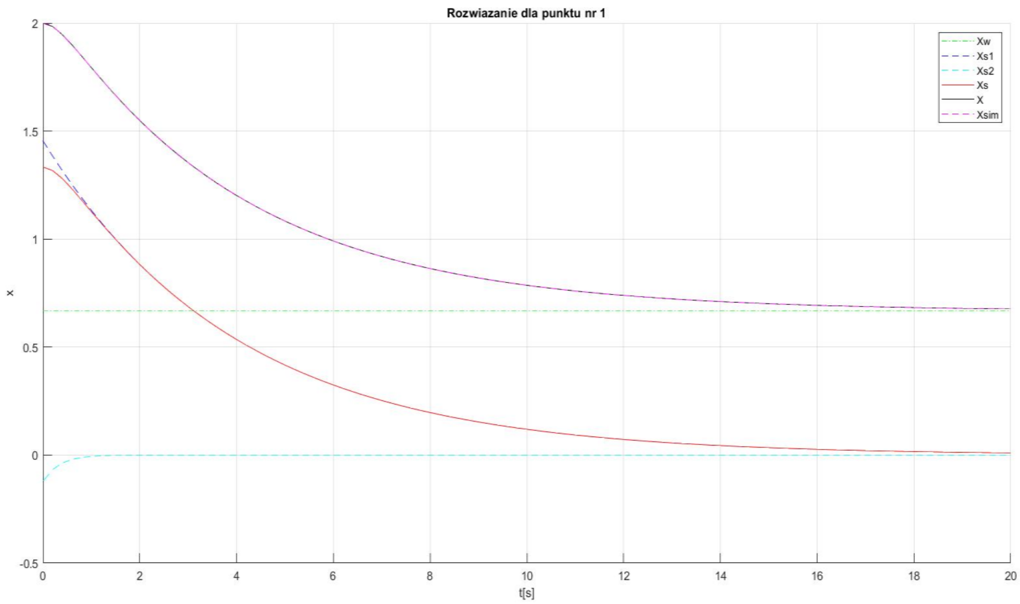
$$4x'' + 13x' + 3x = 2u$$

Schemat blokowy z Simulinka:



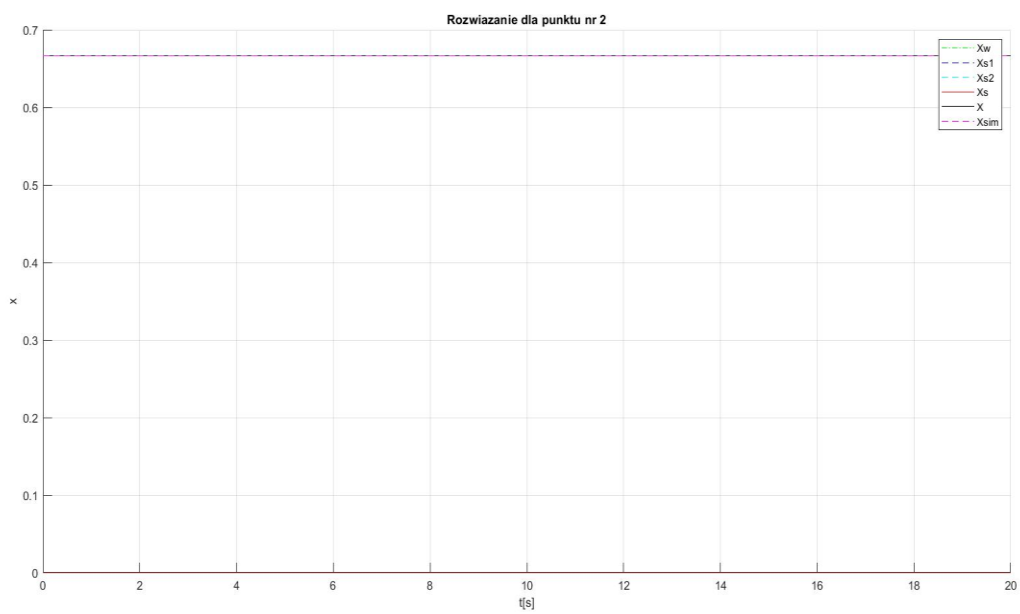
Rozwiązanie dla punktu nr 1:

Założenia: u(t) = 1, x'(0) = 0, x(0) = 2



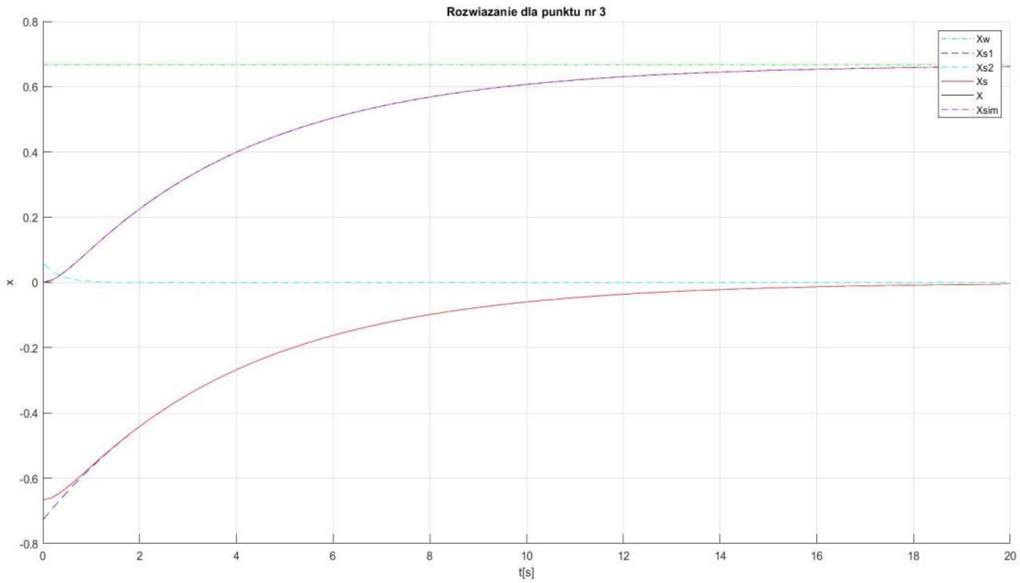
Rozwiązanie dla punktu nr 2:

Założenia: u(t) = 1, x''(0) = 0, x'(0) = 0



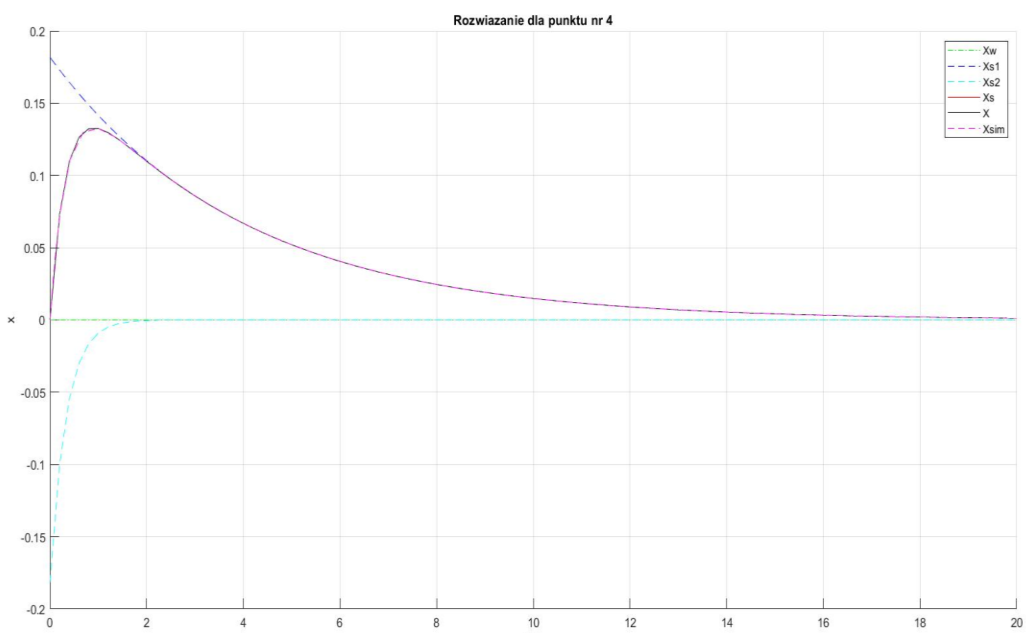
Rozwiązanie dla punktu nr 3:

Założenia: odpowiedź skokowa układu



Rozwiązanie dla punktu nr 4:

Założenia: odpowiedź impulsowa układu



Obliczenia:

Jakub Piotrowczyk | 252885 | mod(85,4) = 3 | MUD-LAB03

$1\ddot{x} + 13\dot{x} + 3x = 2u$

° dla $u(t)=1$, $\dot{x}(0)=0$, $x(0)=2$

rozwiązanie swobodne:

$4\ddot{x}_s + 13\dot{x}_s + 3x_s = 0$

$x_s = Ae^{zt}$

$\dot{x}_s = zAe^{zt}$

$\ddot{x}_s = z^2Ae^{zt}$

$4z^2Ae^{zt} + 13zAe^{zt} + 3Ae^{zt} = 0 \,/ : Ae^{zt}$

$4z^2 + 13z + 3 = 0$

$\Delta = 169 - 48 = 121$

$\sqrt{\Delta} = 11$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-13+11}{2\cdot 4} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \\ z_2 = \frac{-13-11}{2\cdot 4} = \frac{-24}{8} = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{s1} = A_1 e^{-\frac{1}{4}t} \\ x_{s2} = A_2 e^{-3t} \end{cases}$$

$x_s = x_{s1} + x_{s2}$

$x_s = A_1 e^{-\frac{1}{4}t} + A_2 e^{-3t}$

Rozwiązanie wymuszone:

$4\ddot{x}_w + 13\dot{x}_w + 3x_w = 2u = 2\cdot 1 = 2$

$2;\ 2' = 0$

$x_w = C_1 \cdot 2 + C_2 \cdot 0 = 2C_1$

$\dot{x}_w = 0$

$\ddot{x}_w = 0$

$4\cdot 0 + 13 \cdot 0 + 3 \cdot 2C_1 = 2$

$C_1 = \frac{1}{3}$

$x_w = 2C_1 = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Rozwiązanie ogólne:

$x = x_w + x_s = A_1 e^{-\frac{1}{4}t} + A_2 e^{-3t} + \frac{2}{3}$

Rozwiązanie szczególne:

$\dot{x} = -\frac{1}{4}A_1 e^{-\frac{1}{4}t} - 3A_2 e^{-3t} + 0$

$\dot{x} = -\frac{1}{4}A_1 e^{-\frac{1}{4}t} - 3A_2 e^{-3t}$

$$\begin{cases} x(0) = 2 = A_1 e^0 + A_2 e^0 + \frac{2}{3} \\ \dot{x}(0) = 0 = -\frac{1}{4}A_1 e^0 - 3A_2 e^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = A_1 + A_2 + \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} = A_1 + A_2^{*1} \,/ \cdot 3 \\ 0 = -\frac{1}{4}A_1 - 3A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = 3A_1 + 3A_2 \\ 0 = -\frac{1}{4}A_1 - 3A_2 \end{cases} \Big| +$$

$4 = \frac{11}{4}A_1$

$16 = 11A_1$

$A_1 = \frac{16}{11}$

$*1\ \frac{4}{3} = A_1 + A_2$

$\frac{4}{3} = \frac{16}{11} + A_2$

$A_2 = \frac{44}{33} - \frac{16}{11}$

$A_2 = \frac{44}{33} - \frac{48}{33}$

$A_2 = \frac{-4}{33}$

$$\boxed{x(t) = \frac{16}{11}e^{-\frac{1}{4}t} - \frac{4}{33}e^{-3t} + \frac{2}{3}}$$

Jakub Kołtoraczyk | 252885 | MUD-LAB03-C.D.

2° dla $u(t)=1$, $\ddot{x}(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$

Rozwiązanie swobodne:
Jak dla punktu nr 1°.

Rozwiązanie wymuszone:
Jak dla punktu nr 1°

Rozwiązanie ogólne:

$$x = x_w + x_s = A_1 e^{-\frac{1}{4}t} + A_2 e^{-3t} + \frac{2}{3}$$

Sprawdzenie pkt. nr 2°

$4\ddot{x}(0)+13\dot{x}(0)+3x(0)=2$

$4\cdot 0+13\cdot 0+3\cdot x(0)=2$

$3x(0)=2$

$x(0)=\frac{2}{3}=x_u$

Rozwiązanie szczególne:

$$\dot{x} = -\frac{1}{4}A_1 e^{-\frac{1}{4}t} - 3A_2 e^{-3t}$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{16}A_1 e^{-\frac{1}{4}t} + 9A_2 e^{-3t}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(0)=0 \\ \ddot{x}(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=-\frac{1}{4}A_1-3A_2 \quad /\cdot 3 \\ 0=\frac{1}{16}A_1+9A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=-\frac{3}{4}A_1-9A_2 \; *_1 \\ 0=\frac{1}{16}A_1+9A_2 \end{cases} \Big| +$$

$$0=-\frac{3}{4}A_1+\frac{1}{16}A_1=-\frac{12}{16}A_1+\frac{1}{16}A_1$$

$$0=-\frac{11}{16}A_1 \Rightarrow A_1=0$$

$*_1$ $0=-\frac{3}{4}A_1-9A_2$

$-9A_2=0$

$A_2=0$

$$x(t)=0e^{-\frac{1}{4}t}+0e^{-3t}+\frac{2}{3}$$

$$\boxed{x(t)=\frac{2}{3}}$$

3° Odpowiedź skokowa układu, czyli $u(t)=1(t)$, więc:

stan równowagi: $\dot{x}(0)=0$

skok jednostkowy od $x(0)=0$

Rozwiązanie swobodne:
jak dla punktu nr 1°.

Rozwiązanie wymuszone:
Stała z wymuszenia t_0: $u(t)=1(t)$ więc rozwiązanie wymuszone jak dla punktu nr 1°.

Rozwiązanie ogólne:

$$x = A_1 e^{-\frac{1}{4}t} + A_2 e^{-3t} + \frac{2}{3} \quad *_1$$

$$\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=A_1+A_2+\frac{2}{3} \quad /\cdot 3 \\ 0=-\frac{1}{4}A_1-3A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=3A_1+3A_2+2 \\ 0=-\frac{1}{4}A_1-3A_2 \end{cases} \Big| +$$

$0=3A_1-\frac{1}{4}A_1+2$

$-2=\frac{11}{4}A_1$

$A_1=\frac{-8}{11}$

$*_1$

$0=A_1+A_2+\frac{2}{3}$

$A_2=-A_1-\frac{2}{3}$

$A_2=\frac{8}{11}-\frac{2}{3}$

$A_2=\frac{24}{33}-\frac{22}{33}$

$A_2=\frac{2}{33}$

$$\boxed{(t)=-\frac{8}{11}e^{-\frac{1}{4}t}+\frac{2}{33}e^{-3t}+\frac{2}{3}}$$

4° Odpowiedź impulsowa układu, czyli pochodna odpowiedzi skokowej:

$$k(t)=\frac{d(h(t))}{dt}$$

$$k(t)=-\frac{8}{11}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-\frac{1}{4}t}+\frac{2}{33}\cdot(-3)e^{-3t}+0$$

$$k(t)=\frac{8}{44}e^{-\frac{1}{4}t}-\frac{2}{11}e^{-3t}$$

$$x(t)=\frac{8}{44}e^{-\frac{1}{4}t}-\frac{2}{11}e^{-3t}$$

$$\boxed{x(t)=\frac{2}{11}e^{-\frac{1}{4}t}-\frac{2}{11}e^{-3t}}$$

Podsumowanie:

Na każdym wykresie ostateczne rozwiązanie równania różniczkowego „X" metodą analityczną pokrywa się z rozwiązaniem równania różniczkowego „X" metodą symulacyjną, co pozwala wysnuć wniosek, że oba rozwiązania są poprawne.