# Testy statystyczne w R
# testy $t$-Studenta

Agnieszka Goroncy

Zakład Statystyki Matematycznej i Analizy Danych
Wydział Matematyki i Informatyki UMK

Podstawowe informacje dotyczące testów statystycznych można znaleźć

tutaj

# $P$-wartość

Testy statystyczne przeprowadzone w środowisku `R` nie dadzą jednoznacznej odpowiedzi na to, czy hipotezę zerową należy przyjąć, czy też odrzucić. W zamian otrzymujemy coś bardziej użytecznego - tzw. $p$-wartość (`p-value`).

Jest to **graniczny poziom istotności** - najmniejszy, przy którym zaobserwowana wartość statystyki testowej prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej. Jest to wiec taki poziom istotności, przy którym zmienia się decyzja testu (zaczynając od lewej - od małego poziomu $\alpha$, kiedy to nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, po przekroczeniu $p$-wartości zaczynamy odrzucać hipotezę zerową). $P$-wartość pozwala bezpośrednio ocenić wiarygodność hipotezy. Im $p$-wartość jest większa, tym bardziej hipoteza zerowa jest prawdziwa. Mała $p$-wartość świadczy przeciwko hipotezie zerowej.

## $P$-wartość: podsumowanie

Znajomość $p$-wartości pozwala przeprowadzić testowanie dla dowolnego ustalonego poziomu istotności $\alpha \in (0, 1)$:

- odrzucamy hipotezę zerową, gdy $p$-wartość $\leqslant \alpha$,
- nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, gdy $p$-wartość $> \alpha$.

# Kiedy *p*-wartość uznamy za „małą”, a kiedy za „dużą”?

Zarówno poziom istotności $\alpha$, jak i *p*-wartość są liczbami z przedziału (0,1).

Poziom istotności, a więc maksymalne dopuszczalne prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju (odrzucenia hipotezy zerowej, gdy jest ona prawdziwa) z reguły przyjmuje się bardzo mały, np. 0.01, 0.05.

W związku z tym *p*-wartość rzędu np. 0.2, mimo, że w przedziale (0,1) wydaje się „mała”, dla nas już będzie „duża” i nie będzie przemawiała za odrzuceniem hipotezy zerowej. Z kolei *p*-wartość równa np. 2.2e-16 (=0.00000000000000022) jest dla nas „mała” i skłoni nas do odrzucenia hipotezy zerowej.

# Test $t$-Studenta

Test $t$-Studenta to parametryczny test dla jednej lub dwóch prób, polegający na **testowaniu równości wartości oczekiwanych** (test istotności). Zakładamy, że pomiary podlegają rozkładowi normalnemu, oraz że wariancje w próbach nie różnią się od siebie istotnie.

Funkcja **t.test()** pozwala przeprowadzić test $t$-Studenta.

Pierwszym argumentem funkcji jest wektor z danymi. Kolejne ważne (opcjonalne) argumenty są następujące:

- `y` - drugi wektor z danymi,
- `alternative`: two.sided / less / greater - określa hipotezę alternatywną (domyślnie: dwustronna),
- `mu` - liczba określająca hipotetyczną wartość oczekiwaną rozkładu (bądź różnicę wartości oczekiwanych w przypadku dwóch prób), domyślnie równa 0,
- `paired` - wektor logiczny określający czy test ma być przeprowadzony dla danych powiązanych (zależnych), domyślnie FALSE. Jeżeli paired=TRUE, wówczas wektory z danymi muszą być równej długości.

**UWAGA:** W przypadku, gdy nie są spełnione założenia dotyczące próbki, bądź jest ona mała, alternatywą dla testu $t$-Studenta jest test Wilcoxona.

# Test $t$-Studenta: jedna próba

**Przykład 1.** Według normy technicznej wykonanie obróbki mechanicznej jednego pierścienia stalowego powinno zajmować szlifierzowi 22 minuty. Wylosowano 16 stanowisk roboczych, dla których czas obróbki wynosił odpowiednio: 23, 22, 24, 23, 26, 25, 26, 24, 23, 23, 27, 23, 22, 24, 25, 24 minuty. Zakładając, że czas obróbki ma rozkład normalny, zweryfikuj na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ hipotezę $H_0 : \mu = 22$ wobec hipotezy alternatywnej

(a) $H_1 : \mu \neq 22$,

(b) $H_1 : \mu < 22$,

(c) $H_1 : \mu > 22$.

# Przykład 1. Obliczenia

Mamy:

$$\begin{aligned} n &= 16, \\ \bar{x} &= \frac{1}{16}(23 + \ldots + 24) = 24, \\ s &= \sqrt{\frac{1}{15}((23-24)^2 + \ldots + (24-24)^2)} \simeq 1,46. \\ \mu_0 &= 22, \\ \alpha &= 0,05. \end{aligned}$$

Hipoteza zerowa testu ma postać

$$H_0 : \mu = 22.$$

Statystyka testowa wynosi

$$T_n = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{s} = \sqrt{16}\frac{24 - 22}{1,46} \simeq 5,48.$$

# Przykład 1. Obliczenia, c.d.

(a) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu \neq 22$

# Przykład 1. Obliczenia, c.d.

(a) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu \neq 22$
Mamy: $F^{-1}_{t_{n-1}}(1 - \frac{\alpha}{2}) = F^{-1}_{t_{15}}(0,975) = 2,131$, zatem obszar krytyczny ma postać

$$\begin{aligned} K &= \left(-\infty, -F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\frac{\alpha}{2})\right) \cup \left(F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\frac{\alpha}{2}), +\infty\right) \\ &= (-\infty, -2,131) \cup (2,131, \infty). \end{aligned}$$

# Przykład 1. Obliczenia, c.d.

(a) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu \neq 22$
Mamy: $F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\frac{\alpha}{2}) = F^{-1}_{t_{15}}(0,975) = 2,131$, zatem obszar krytyczny ma postać

$$\begin{aligned} K &= \left(-\infty, -F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\frac{\alpha}{2})\right) \cup \left(F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\frac{\alpha}{2}), +\infty\right) \\ &= (-\infty, -2,131) \cup (2,131, \infty). \end{aligned}$$

**Decyzja**: $T_n \in K$,

# Przykład 1. Obliczenia, c.d.

(a) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu \neq 22$
Mamy: $F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\frac{\alpha}{2}) = F^{-1}_{t_{15}}(0,975) = 2,131$, zatem obszar krytyczny ma postać

$$\begin{aligned} K &= \left(-\infty, -F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\frac{\alpha}{2})\right) \cup \left(F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\frac{\alpha}{2}), +\infty\right) \\ &= (-\infty, -2,131) \cup (2,131, \infty). \end{aligned}$$

**Decyzja**: $T_n \in K$, zatem **odrzucamy** $H_0 : \mu = 22$ **na rzecz** $H_1 : \mu \neq 22$.

# Przykład 1. Obliczenia, c.d.

(a) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu \neq 22$
Mamy: $F^{-1}_{t_{n-1}}(1 - \frac{\alpha}{2}) = F^{-1}_{t_{15}}(0,975) = 2,131$, zatem obszar krytyczny ma postać

$$\begin{aligned} K &= \left(-\infty, -F^{-1}_{t_{n-1}}(1 - \frac{\alpha}{2})\right) \cup \left(F^{-1}_{t_{n-1}}(1 - \frac{\alpha}{2}), +\infty\right) \\ &= (-\infty, -2,131) \cup (2,131, \infty). \end{aligned}$$

**Decyzja**: $T_n \in K$, zatem **odrzucamy** $H_0 : \mu = 22$ **na rzecz** $H_1 : \mu \neq 22$.

(b) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu < 22$

# Przykład 1. Obliczenia, c.d.

(a) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu \neq 22$
Mamy: $F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\frac{\alpha}{2}) = F^{-1}_{t_{15}}(0,975) = 2,131$, zatem obszar krytyczny ma postać

$$\begin{aligned} K &= \left(-\infty, -F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\frac{\alpha}{2})\right) \cup \left(F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\frac{\alpha}{2}), +\infty\right) \\ &= (-\infty, -2,131) \cup (2,131, \infty). \end{aligned}$$

**Decyzja**: $T_n \in K$, zatem **odrzucamy** $H_0 : \mu = 22$ **na rzecz** $H_1 : \mu \neq 22$.

(b) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu < 22$
Mamy: $F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha) = F^{-1}_{t_{15}}(0,95) = 1,753$, zatem obszar krytyczny ma postać

$$K = \left(-\infty, -F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha)\right) = (-\infty, -1,753).$$

# Przykład 1. Obliczenia, c.d.

(a) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu \neq 22$
Mamy: $F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\frac{\alpha}{2}) = F^{-1}_{t_{15}}(0,975) = 2,131$, zatem obszar krytyczny ma postać

$$\begin{aligned} K &= \left(-\infty, -F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\frac{\alpha}{2})\right) \cup \left(F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\frac{\alpha}{2}), +\infty\right) \\ &= (-\infty, -2,131) \cup (2,131, \infty). \end{aligned}$$

**Decyzja**: $T_n \in K$, zatem **odrzucamy** $H_0 : \mu = 22$ **na rzecz** $H_1 : \mu \neq 22$.

(b) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu < 22$
Mamy: $F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha) = F^{-1}_{t_{15}}(0,95) = 1,753$, zatem obszar krytyczny ma postać

$$K = \left(-\infty, -F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha)\right) = (-\infty, -1,753).$$

**Decyzja:** $T_n \notin K$,

# Przykład 1. Obliczenia, c.d.

(a) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu \neq 22$
Mamy: $F^{-1}_{t_{n-1}}(1 - \frac{\alpha}{2}) = F^{-1}_{t_{15}}(0,975) = 2,131$, zatem obszar krytyczny ma postać

$$\begin{aligned} K &= \left(-\infty, -F^{-1}_{t_{n-1}}(1 - \frac{\alpha}{2})\right) \cup \left(F^{-1}_{t_{n-1}}(1 - \frac{\alpha}{2}), +\infty\right) \\ &= (-\infty, -2,131) \cup (2,131, \infty). \end{aligned}$$

**Decyzja**: $T_n \in K$, zatem **odrzucamy** $H_0 : \mu = 22$ **na rzecz** $H_1 : \mu \neq 22$.

(b) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu < 22$
Mamy: $F^{-1}_{t_{n-1}}(1 - \alpha) = F^{-1}_{t_{15}}(0,95) = 1,753$, zatem obszar krytyczny ma postać

$$K = \left(-\infty, -F^{-1}_{t_{n-1}}(1 - \alpha)\right) = (-\infty, -1,753).$$

**Decyzja:** $T_n \notin K$, zatem **nie mamy podstaw do odrzucenia** $H_0 : \mu = 22$.

# Przykład 1. Obliczenia, c.d.

(c) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu > 22$

(c) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu > 22$
Mamy: $F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha) = F^{-1}_{t_{15}}(0,95) = 1,753$, zatem obszar krytyczny ma postać

$$K = (F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha), \infty) = (1,753, \infty).$$

(c) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu > 22$
Mamy: $F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha) = F^{-1}_{t_{15}}(0,95) = 1,753$, zatem obszar krytyczny ma postać

$$K = (F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha), \infty) = (1,753, \infty).$$

**Decyzja:** $T_n \in K$,

# Przykład 1. Obliczenia, c.d.

(c) Hipoteza alternatywna $H_1 : \mu > 22$
Mamy: $F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha) = F^{-1}_{t_{15}}(0,95) = 1,753$, zatem obszar krytyczny ma postać

$$K = (F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha), \infty) = (1,753, \infty).$$

**Decyzja:** $T_n \in K$, zatem **odrzucamy** $H_0 : \mu = 22$ **na rzecz** $H_1 : \mu > 22$.

# Przykład 1.

```
> x=c(23, 22, 24, 23, 26, 25, 26, 24, 23, 23, 27, 23,
+ 22, 24, 25, 24)
> n=length(x)
> T=sqrt(n)*(mean(x)-22)/sd(x)
```

# Przykład 1.

```
> x=c(23, 22, 24, 23, 26, 25, 26, 24, 23, 23, 27, 23,
+ 22, 24, 25, 24)
> n=length(x)
> T=sqrt(n)*(mean(x)-22)/sd(x)
> t.test(x, mu=22)
```

# Przykład 1.

```
> x=c(23, 22, 24, 23, 26, 25, 26, 24, 23, 23, 27, 23,
+ 22, 24, 25, 24)
> n=length(x)
> T=sqrt(n)*(mean(x)-22)/sd(x)
> t.test(x, mu=22)
> t.test(x, mu=22, alternative="l")
```

# Przykład 1.

```
> x=c(23, 22, 24, 23, 26, 25, 26, 24, 23, 23, 27, 23,
+ 22, 24, 25, 24)
> n=length(x)
> T=sqrt(n)*(mean(x)-22)/sd(x)
> t.test(x, mu=22)
> t.test(x, mu=22, alternative="l")
> t.test(x, mu=22, alternative="g")
```

# Test $t$-Studenta: jedna próba

**Przykład 2** Wygenerujmy próbkę losową pochodzącą z rozkładu jednostajnego na przedziale $(-1, 1)$. Przetestujmy najpierw, czy wartość oczekiwana rozkładu, z którego pochodzi próbka jest równa -2:

```
> x<-runif(40,-1,1)
> t.test(x, mu=-2)
```

Przy tak małej $p$-wartości odrzucamy hipotezę o średniej równej -2. Sprawdźmy, czy test zachowa się prawidłowo przy wartości oczekiwanej równej 0:

```
> t.test(x)
```

Zgodnie z oczekiwaniami, wynik testu (duża $p$-wartość) nie pozwala na odrzucenie hipotezy zerowej. Możemy zatem przyjąć, że wartość oczekiwana rozkładu, z którego pochodzą dane, wynosi 0.

**UWAGA**: próbka nie pochodzi z rozkładu normalnego, ale ma dużą liczebność $(> 30)$.

# Test $t$-Studenta: dwie próby niezależne

**Przykład 3** Sprawdzamy równość wartości oczekiwanych rozkładów dwóch prób:

```
> x1=c(50, 48, 39, 53, 51, 49, 50, 55, 47, 53)
> x2=c(46, 54, 58, 49, 52, 51, 58, 46)
> var(x1)
> var(x2)
```

Wariancje są w przybliżeniu takie same, wykonujemy więc test $t$-Studenta:

```
> t.test(x1,x2)
```

Otrzymana $p$-wartość jest „duża", więc nie mamy podstaw aby sądzić, że średnie obydwu rozkładów są różne.

**UWAGA:** Przy małej liczebności prób (każda $< 100$) niezbędne jest założenie o normalności rozkładów.

# Test $t$-Studenta: dwie próby zależne

**Przykład 4** Mamy dwa zestawy danych równej wielkości, które reprezentują wagi osób stosujących specyfik odchudzający przed i po kuracji. Chcemy sprawdzić, czy ów specyfik jest skuteczny:

```
> y1=c(65, 79, 103, 64, 78, 80, 66, 97, 104, 67)
> y2=c(64, 76, 100, 66, 77, 84, 64, 96, 110, 60)
> var(y1)
> var(y2) # wariancje przybliżone
```

## Test $t$-Studenta: dwie próby zależne

**Przykład 4** Mamy dwa zestawy danych równej wielkości, które reprezentują wagi osób stosujących specyfik odchudzający przed i po kuracji. Chcemy sprawdzić, czy ów specyfik jest skuteczny:

```
> y1=c(65, 79, 103, 64, 78, 80, 66, 97, 104, 67)
> y2=c(64, 76, 100, 66, 77, 84, 64, 96, 110, 60)
> var(y1)
> var(y2) # wariancje przybliżone
> t.test(y1,y2,paired=TRUE, alternative="g")
```

## Test $t$-Studenta: dwie próby zależne

**Przykład 4** Mamy dwa zestawy danych równej wielkości, które reprezentują wagi osób stosujących specyfik odchudzający przed i po kuracji. Chcemy sprawdzić, czy ów specyfik jest skuteczny:

```
> y1=c(65, 79, 103, 64, 78, 80, 66, 97, 104, 67)
> y2=c(64, 76, 100, 66, 77, 84, 64, 96, 110, 60)
> var(y1)
> var(y2) # wariancje przybliżone
> t.test(y1,y2,paired=TRUE, alternative="g")
```

lub

```
> t.test(y2,y1,paired=TRUE, alternative="l")
```

# Test $t$-Studenta: dwie próby zależne

**Przykład 4** Mamy dwa zestawy danych równej wielkości, które reprezentują wagi osób stosujących specyfik odchudzający przed i po kuracji. Chcemy sprawdzić, czy ów specyfik jest skuteczny:

```
> y1=c(65, 79, 103, 64, 78, 80, 66, 97, 104, 67)
> y2=c(64, 76, 100, 66, 77, 84, 64, 96, 110, 60)
> var(y1)
> var(y2) # wariancje przybliżone
> t.test(y1,y2,paired=TRUE, alternative="g")
```

lub

```
> t.test(y2,y1,paired=TRUE, alternative="l")
```

Duża $p$-wartość pozwala niestety stwierdzić, że specyfik nie działa na tyle, aby średnia waga przed była większa niż waga po kuracji.

## Test $t$-Studenta: dwie próby zależne

**Przykład 4** Mamy dwa zestawy danych równej wielkości, które reprezentują wagi osób stosujących specyfik odchudzający przed i po kuracji. Chcemy sprawdzić, czy ów specyfik jest skuteczny:

```
> y1=c(65, 79, 103, 64, 78, 80, 66, 97, 104, 67)
> y2=c(64, 76, 100, 66, 77, 84, 64, 96, 110, 60)
> var(y1)
> var(y2) # wariancje przybliżone
> t.test(y1,y2,paired=TRUE, alternative="g")
```

lub

```
> t.test(y2,y1,paired=TRUE, alternative="l")
```

Duża $p$-wartość pozwala niestety stwierdzić, że specyfik nie działa na tyle, aby średnia waga przed była większa niż waga po kuracji.

**UWAGA:** Test $t$-Studenta dla dwóch prób zależnych jest tożsamy z testem $t$-Studenta dla jednej próby, będącej różnicą wartości z obu próbek.

**UWAGA:** Przy małej liczebności prób ($< 30$) niezbędne jest założenie o normalności rozkładów różnicy zmiennych.

# Odwoływanie się do wyników testu

Każdy test w R zwraca nam pewne informacje, do których możemy się odwoływać poprzez odpowiednią nazwę zmiennej.

**Przykład:**

```
> wynik<-t.test(dane)
> # sprawdzamy jakie informacje mamy dostępne:
> wynik[]
> wynik$p.value
> wynik$alternative
> wynik$data.name
```

# Literatura


- Aleksander Zaigrajew, *Testy parametryczne* - materiały dydaktyczne, data dostępu: 08.01.2017 r.
- Wojciech Niemiro, *Statystyka*, Rozdział 6 - skrypt, data dostępu: 08.01.2017 r.
- Jacek Koronacki, Jan Mielniczuk, **Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych**, WNT, Warszawa, 2001
- Przemysław Biecek, **Przewodnik po pakiecie** R, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2011
- Joseph Adler, **R in a Nutshell**, O'Reilly Media, 2009