Zadanie 3. Kosmos liczb *(13 pkt)*

Po dotarciu w okolice gwiazdy Proxtar, ludzie zasiedlili 9 krążących wokół niej planet i nazwali je odpowiednio $Prox_2$, $Prox_3$, ..., $Prox_{10}$. Do zapisu liczb na planecie $Prox_p$ jej mieszkańcy używają systemu liczbowego o podstawie p.
Na przykład, rok narodzin Anny Kowalskiej na planecie $Prox_{10}$ zapisuje się jako 1988, zaś po zakodowaniu w systemie planety $Prox_4$ zapisuje się go jako 133010.

a) W układzie Proxtar mieszka dwójka przyjaciółek:
- Elżbieta – mieszkanka $Prox_4$, jej rok urodzenia zapisany w systemie tej planety to 132313,
- Joanna – mieszkanka $Prox_2$, urodzona w roku 11110111000 (zapis w systemie dwójkowym).

Elżbieta i Joanna podróżują pomiędzy poszczególnymi planetami, dlatego chcieliby znać rok swojego urodzenia wyrażony w systemach stosowanych na tych planetach. Aby im pomóc, uzupełnij poniższą tabelkę:

Osoba	Rok narodzin zapisany w systemie planety		
	$Prox_2$	$Prox_4$	$Prox_{10}$
Elżbieta	11110110111 (2)	132313	1976 (10)
Joanna	11110111000	132320	1976

b) Stare ziemiańskie nawyki utrudniają też dodawanie. Aby dodać liczby a i b zapisane w systemie planety $Prox_p$, Ziemianie zamieniają a i b na system dziesiętny, wyliczają ich sumę c, a potem zamieniają c na system o podstawie p. Tymczasem można to zrobić bez zamiany liczb na system dziesiętny. Np. w systemie o podstawie 4:

$$\begin{array}{rccccc} & & 1 & 2 & 3 & 2 \\ +_4 & & 2 & 2 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 1 & 2 & 2 & 2 \\ +_4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 3 & 3 \end{array}$$

Podaj algorytm w postaci listy kroków, schematu blokowego lub w języku programowania, który dla dwóch liczb a i b zapisanych w systemie o podstawie p, $2 \le p \le 9$, wyznacza i wypisuje wartość sumy $a +_p b$ zapisaną w systemie o podstawie p. Twój algorytm **nie może** dokonywać zamiany liczb a i b na inny system liczbowy.

Specyfikacja
Dane:
- p – podstawa systemu liczbowego, $2 \le p \le 9$,
- n – liczba cyfr w zapisie każdej z liczb naturalnych a, b, $1 \le n \le 200$,
- $a_1,\dots,a_n$ – kolejne cyfry liczby a w zapisie w systemie o podstawie p, a_n jest cyfrą jedności,
- $b_1,\dots,b_n$ – kolejne cyfry liczby b w zapisie w systemie o podstawie p, b_n jest cyfrą jedności.

Uwaga: jeśli do zapisu liczby wystarczy mniej niż n cyfr, to jej zapis jest uzupełniony od lewej strony zerami do długości n.

Wynik:
liczba $c = a +_p b$ zapisana systemie o podstawie p w postaci ciągu cyfr $c_0,\dots,c_n$, c_n jest cyfrą jedności.

Przykład

Dla liczb $a = 20012$ i $b = 1221$ w systemie trójkowym mamy:

Dane: $p = 3$, $n = 5$

ciąg $a_1,\ldots,a_5$ to 2,0,0,1,2

ciąg $b_1,\ldots,b_5$ to 0,1,2,2,1

Wynik: ciąg $c_0,\ldots,c_5$ to 0,2,2,0,1,0.

Uwaga: pamiętaj, że zapis liczby o mniejszej niż wymagana liczbie cyfr uzupełniamy zerami.

```
int z1 = a.length();
int z2 = b.length();
if (z1 > z2)
{ n = z1;
  for (int i = 0; i < n - z2; i++)
  { z2 = '0' + z2; }
}
else { n = z2;
  for (int i = 0; i <= z1; i++)
  { z1 = '0' + z2; }
int r;
for (int i = n; i >= 0; i--)
{ if (a[i] + b[i] == p) { r = r - 1;
                          c[i] = 0;
                        }
  if (a[i] + b[i] >= p
```

$$\begin{array}{r} 102 \\ 102 \\ \hline 220 \end{array}$$

$4 \% 2 = 0$

$4/2 = 2$

nie umie dodawać

c) Liczba cyfr potrzebna do zapisania tej samej liczby w systemach różnych planet może być inna. O liczbie a mówimy, że jest liczbą n-cyfrową w jakimś systemie, gdy można ją zapisać przy użyciu n cyfr w tym systemie, ale $n-1$ cyfr to za mało.

Przykład
Do zapisania liczby 17_{10} potrzebujemy 5 cyfr, gdy chcemy zapisać ją w systemie dwójkowym ($17_{10}=10001_2$) oraz 3 cyfry do zapisania jej w systemie trójkowym ($17_{10}=122_3$). A zatem jest ona liczbą 5-cyfrową w systemie dwójkowym i 3-cyfrową w systemie trójkowym.

Uwaga: dolny indeks przy zapisie liczby oznacza podstawę systemu, w którym ta liczba jest zapisana.

(i) Uzupełnij poniższą tabelkę, wpisując w ostatnich dwu kolumnach liczby **zapisane w systemie o podstawie *p***:

n: liczba cyfr	*p*: podstawa systemu	najmniejsza liczba *n*-cyfrowa w systemie o podstawie *p*	największa liczba *n*-cyfrowa w systemie o podstawie *p*
4	2	1000	1111
6	2	100000	111111
2	5	~~40~~ 10	44
3	7	100	~~60~~ 666
4	8	~~1000~~ 1000	7777

Zauważmy, że:
- liczby 10_p, 100_p, 1000_p, 10000_p itd. są równe odpowiednio p, p^2, p^3, p^4, itd.
- największa liczba n-cyfrowa w dowolnym systemie jest o jeden mniejsza od najmniejszej liczby $(n+1)$-cyfrowej w tym systemie; na przykład $777_8 = 1000_8 - 1_8$

(ii) Korzystając z tych obserwacji i powyższej tabelki, uzupełnij poniższą tabelkę, ale w ostatnich dwu kolumnach wpisz wartości liczb **zapisane w systemie dziesiętnym**:

n: liczba cyfr	*p*: podstawa systemu	najmniejsza liczba *n*-cyfrowa w systemie o podstawie *p*	największa liczba *n*-cyfrowa w systemie o podstawie *p*
4	2	8	15
6	2	32	63
1	3	~~0~~ 1	2
2	5	5	24
3	7	49	342
4	8	512	4095

Punktacja

343 49 7 1
512 64 8 1

Część zadania	Maks.
a	2
b	7
c	4
Razem	**13**