Algorytm szukający minimalnego drzewa rozpinającego

laboratorium - zadanie 4

Reichel Bartosz
reichel@mif.pg.gda.pl

3 stycznia 2009

1 Opis

Utworzyć program, który jako dane wejściowe przyjmuje listę krawędzi wraz z wagami oraz wierzchołków grafu, a następnie na tej podstawie poszukuje minimalnego drzewa rozpinającego (patrz protokół STP - Spanning Tree Protocol [1]) wedle algorytmu Kruskala [2]. Jako dane wyjściowe podaje listę krawędzi, które pozostały i tworzą drzewo oraz koszt całego drzewa. Dla zainteresowanych (lub chcących zdobyć więcej punktów) istnieje możliwość zaimplementowania innych algorytmów tego typu i ich porównanie.

Zachęcam do wykorzystania biblioteki STL w przypadku osób chcących wykorzystać C++ (ot chociażby sortowanie).

2 Algorytm

Aby zrozumieć opis algorytmu podam kilka terminów oraz ich wyjaśnień. Po szczegółowe informacje/definicje odsyłam do dowolnej literatury z zakresu teorii grafów jak chociażby [3]

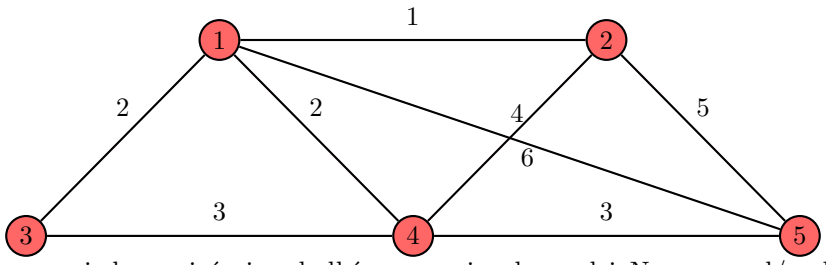
Cykl w grafie to droga zamknięta. Oznacza to, że wierzchołek początkowy jest też końcowym.

Drzewo to graf, który jest acykliczny i spójny. Oznacza to, że z dowolnego jego wierzchołka można dotrzeć do każdego innego (spójność) oraz że droga prowadząca do niego jest tylko jedna (acykliczność).

Drzewo rozpinające grafu G nazywamy drzewo zawierające wszystkie wierzchołki grafu G. Aby skonstruować drzewo rozpinające w grafie G należy usunąć z niego wszystkie krawędzie które należą do cykli.

W przedstawionym tu zadaniu należy znaleźć minimalne drzewo rozpinające. Oznacza to, że w wybranym grafie (którego model może przedstawiać jako np. połączone komputery za pomocą różnych router'ów, switch'y etc.) należy znaleźć połączenie wierzchołków grafu w taki sposób aby drzewo rozpinające było minimalne. W opisanym przypadku należy wykonać to wykorzystując algorytm Kruskala [2].

Rozpatrzmy graf przedstawiony poniżej:

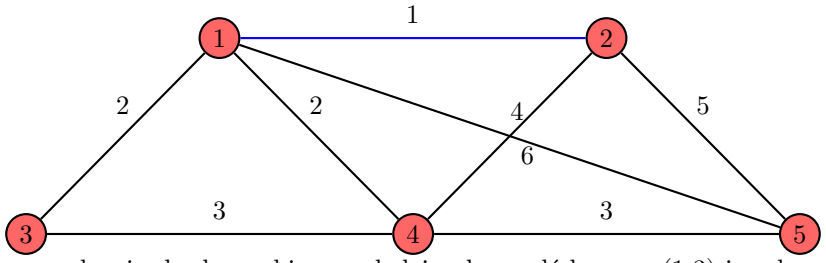


posiada on pięć wierzchołków oraz osiem krawędzi. Numery nad/pod krawędziami wskazują na wage krawędzi, można ją utożsamiać na przykład z długością połączenia. Poszukiwanie minimalnego drzewa rozpinającego będzie polegało na odszukaniu drzewa rozpinającego, którego wagi będą najmniejsze.

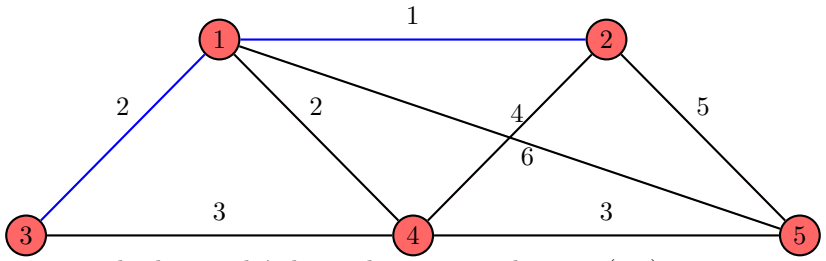
Sam algorytm Kruskala (wraz z uwagami dotyczącymi implementacji) można zapisać w następujących punktach (jako wejście graf G):

1. Utwórz las L z wierzchołków grafu, gdzie każdy wierzchołek tworzy osobne drzewo (w najprostszym zrozumieniu-implementacji jest to lista wierzchołków 1,2,...).
2. Utwórz zbiór K zawierający wszystkie krawędzie grafu G wraz z wagami.
3. Dopóki K nie jest pusty (dla uproszczenia można go przed posortować po wagach):
   (a) Usuń z K krawędź o najmniejszej wadze (w przypadku posortowanej listy pierwszy element).
   (b) Jeśli krawędź ta łączyła dwa różne drzewa dodaj ją do lasu L aby połączyła dwa odpowiednie drzewa w jedno (można ją po prostu zachować z informacją co łączy w liście)
   (c) Jeśli jest inaczej usuń ją.
4. Jako rezultat zwróć las L który jest minimalnym drzewem rozpinającym.

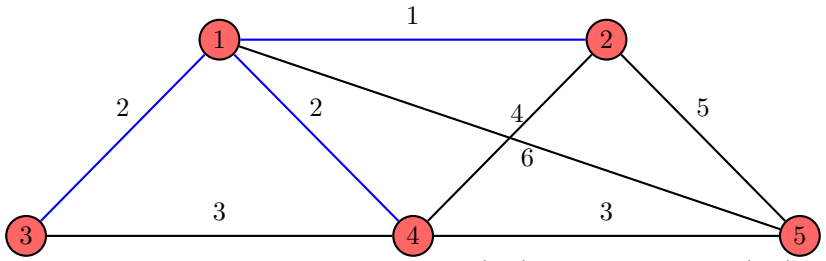
Rozpatrzmy teraz kolejne kroki algorytmu
W pierwszym kroku krawędź łącząca (1,2) jest dodana do lasu, teraz drzewo 1 i 2 jest jednym drzewem.



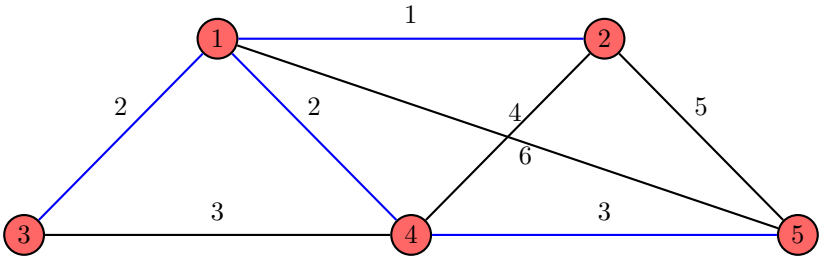
w drugim kroku wybieramy kolejną krawędź łączącą (1,3) i scalamy w drzewo



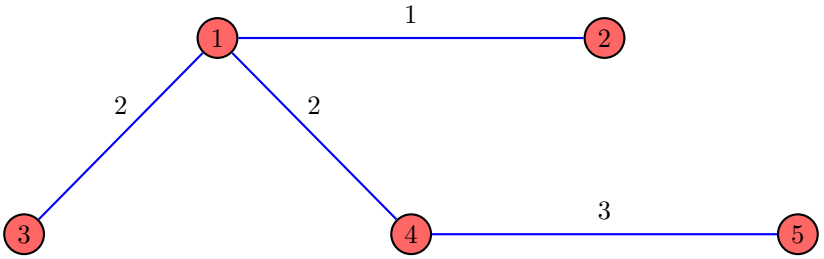
trzeci krok to wybór krawędzi z wagą 2 łączący (1,4)



w końcu wybieramy krawędź łączącą (4,5), krawędź łącząca (3,4) o tej samej wadze nie jest brana pod uwagę gdyż łączy wierzchołki należące już do tego samego drzewa.



Pozostałe krawędzie już łączą wierzchołki tego samego drzewa, więc są pomijane. Ostatecznie otrzymujemy minimalne drzewo rozpinające w postaci (z kosztem 8):



Literatura

[1] E. Decker P. Langille, A. Rijsinghani, K. McCloghrie, Definitions of Managed Objects for Bridges RFC 1493, 1993, http://www.rfc-editor.org/rfc/rfc1493.txt

[2] Cormen T.H., Leiserson Ch.E., Rivest R.L., Stein C. *Wprowadzenie do algorytmów*, WNT, Warszawa, 2001

[3] R.J. Wilson *Wprowadzenie do teorii grafów* PWN, Warszawa, 2000