

# Egzamin z Analizy Matematycznej

2023/2024

29 stycznia 2024

# Spis treści

<b>0</b>	<b>Wstęp</b>	<b>3</b>
0.1	Od autora rozwiązań . . . . .	3
0.2	Skan egzaminu . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Zadanie 1</b>	<b>4</b>
1.1	Treść zadania . . . . .	4
1.2	Rozwiązanie . . . . .	4
1.3	Potwierdzenie rozwiązania . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Zadanie 2</b>	<b>6</b>
2.1	Treść zadania . . . . .	6
2.2	Rozwiązanie . . . . .	6
2.3	Potwierdzenie rozwiązania . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Zadanie 3</b>	<b>8</b>
3.1	Treść zadania . . . . .	8
3.2	Rozwiązanie . . . . .	8
3.3	Potwierdzenie rozwiązania . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Zadanie 4</b>	<b>9</b>
4.1	Treść zadania . . . . .	9
4.2	Rozwiązanie . . . . .	9
4.3	Potwierdzenie rozwiązania . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Zadanie 5</b>	<b>11</b>
5.1	Treść zadania . . . . .	11
5.2	Rozwiązanie . . . . .	11
5.3	Potwierdzenie rozwiązania . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Zadanie 6</b>	<b>14</b>
6.1	Treść zadania . . . . .	14
6.2	Rozwiązanie . . . . .	14
6.3	Uwagi . . . . .	14

# 0 Wstęp

## 0.1 Od autora rozwiązań

Dokument zawiera rozwiązania do wszystkich zadań z egzaminu podstawowego z Analizy Matematycznej z 2024 roku na kierunku Informatyka. Każda sekcja dotycząca konkretnego zadania składa się z 3 podsekcji – treści zadania, rozwiązania i potwierdzenia rozwiązania (w formie rozwiązania przez jakiś program, np. Wolfram Alpha, lub fragmentu prezentacji wykładowej). Po dokumencie można poruszać się klikając odpowiednią nazwę sekcji bądź podsekcji w spisie treści.

Jeśli masz jakieś uwagi lub znajdziesz błędy w którymś z rozwiązań, zgłoś je w sekcji Issues wraz z wyjaśnieniem. Możesz również samemu poprawić rozwiązanie zgłaszając Pull request – także z wyjaśnieniem (proszę edytować jedynie plik .tex).

## 0.2 Skan egzaminu

WETI, INFORMATYKA, ANALIZA MATEMATYCZNA, EGZAMIN, 29.01.2024 r.

1

KARTKA 1

ZAD.1. (a) (1p) Podaj warunek konieczny istnienia pochodnej właściwej funkcji  $f(x)$  w  $x = x_0$ .

(b) (2p) Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji  $f(x) = \sqrt{x-2}$ .

(c) (5p) Znajdź punkty przegięcia i zbadaj wklęsłość/wypukłość wykresu funkcji

$$f(x) = (2 - \ln x) \cdot x^2$$

KARTKA 2

ZAD.2. Oblicz całki

(a) (3p)  $\int \frac{1}{3 + \sin x + 3 \cos x} dx$

(b) (5p)  $\int \arctg \sqrt{x} dx$

KARTKA 3

ZAD.3. (5p) Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi  $OX$  obszaru ograniczonego przez  $y = 0$  i  $y = \sqrt{\frac{x}{e^x}}$  dla  $x \geq 0$

ZAD.4. (a) (1p) Podaj warunek konieczny zbieżności nieskończonego szeregu liczbowego

(b) (4p) Znajdź przedział zbieżności szeregu

$$\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

KARTKA 4

ZAD.5. Rozwiąż równania różniczkowe

(a) (4p)  $y'' + 2y' = 8xe^{-2x}$

(b) (3p)  $y' \sin x - y \cos x = (x \sin x)^2$

(c) (2p) Naszkicuj obszar istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania z punktu (b). Następnie określ na jakim maksymalnie przedziale może istnieć rozwiązanie tego równania z warunkiem początkowym  $y(1) = 1$ .

ZAD.6. (+2p) Wyznacz dywergencję funkcji  $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$

# 1 Zadanie 1

## 1.1 Treść zadania

(a)(1p) Podaj warunek konieczny istnienia pochodnej właściwej funkcji  $f(x)$  w  $x = x_0$ .

(b)(2p) Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji  $f(x) = \sqrt{x-2}$ .

(c)(5p) Znajdź punkty przegięcia i zbadaj wklęsłość/wypukłość wykresu funkcji

$$f(x) = (2 - \ln x) \cdot x^2$$

## 1.2 Rozwiązanie

(a) Jeżeli istnieje pochodna właściwa funkcji  $f(x)$  w punkcie  $x = x_0$ , to funkcja  $f(x)$  jest ciągła w punkcie  $x = x_0$ .

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h-2} - \sqrt{x-2}}{h}, \quad D_f = [2, \infty) \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h-2} - \sqrt{x-2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h-2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+h-2} + \sqrt{x-2}} \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-2 - x+2}{h(\sqrt{x+h-2} + \sqrt{x-2})} \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-2} + \sqrt{x-2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+0-2} + \sqrt{x-2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x-2}}, \quad D_{f'} = (2, \infty) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f(x) &= (2 - \ln x)x^2 = 2x^2 - x^2 \ln x, \quad D_f = (0, \infty) \\ f'(x) &= 4x - 2x \ln x - \frac{x^2}{x} = 3x - 2x \ln x, \quad D_{f'} = (0, \infty) \\ f''(x) &= 3 - 2 \ln x - \frac{2x}{x} = 1 - 2 \ln x, \quad D_{f''} = (0, \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} f \text{ wypukła} \iff f''(x) > 0 & f \text{ wklęsła} \iff f''(x) < 0 \\ 1 - 2 \ln x > 0 & 1 - 2 \ln x < 0 \\ \frac{1}{2} > \ln x & \frac{1}{2} < \ln x \\ \sqrt{e} > x & \sqrt{e} < x \end{array}$$

Punkt przegięcia w  $x_0$  występuje, kiedy  $f''(x_0) = 0$  i  $f''$  zmienia znak w otoczeniu  $x_0$ .  $f''(x_0) = 0 \iff x_0 = \sqrt{e}$ , a wiemy, na podstawie wcześniej wyliczonych nierówności, że druga pochodna zmienia znak w otoczeniu tego punktu.

Podsumowując: Punkt przegięcia:  $x_0 = \sqrt{e}$ . Funkcja jest wypukła w przedziale  $(0, \sqrt{e})$ . Funkcja jest wklęsła w przedziale  $(\sqrt{e}, \infty)$ .

## 1.3 Potwierdzenie rozwiązania

(a)

Pochodna funkcji Istnienie pochodnej

Pochodna nie zawsze istnieje

**Twierdzenie (warunek konieczny istnienia pochodnej)**

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w  $x = x_0$  to jest ciągła w  $x = x_0$ .

(b)

FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA

**WolframAlpha**

(sqrt(x-2))'

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYBOARD EXAMPLES UPLOAD RANDOM

Derivative ☒ Step-by-step solution

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x-2}) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

(c)

FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA

**WolframAlpha**

f(x) = (2-\ln x)x^2, find concave and convex intervals

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYBOARD EXAMPLES UPLOAD RANDOM

Input interpretation

intervals of concavity  $f(x) = (2 - \log(x)) x^2$

$\log(x)$  is the natural logarithm

Result

$f(x) = x^2 (2 - \log(x))$  is

concave up	$0 < x < \sqrt{e}$
concave down	$x > \sqrt{e}$

Plot

■ concave up  
■ concave down  
● inflection point

## 2 Zadanie 2

### 2.1 Treść zadania

Oblicz całki

(a)(3p)  $\int \frac{1}{3 + \sin x + 3 \cos x} dx$

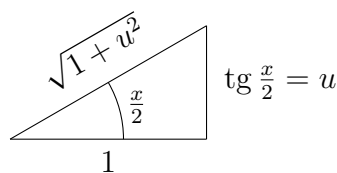
(b)(5p)  $\int \operatorname{arcctg} \sqrt{x} dx$

### 2.2 Rozwiązanie

(a)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3 + \sin x + 3 \cos x} dx &= \\ \int \frac{1}{3 + \frac{2u}{1+u^2} + 3 \frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du &= \\ \int \frac{2}{3(1+u^2) + 2u + 3(1-u^2)} du &= \\ \int \frac{2}{3(2) + 2u} du &= \\ \int \frac{1}{3+u} du &= \\ \ln |u+3| + C &= \\ \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 \right| + C \end{aligned}$$

$$u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$



$$du = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{2} dx$$

$$\frac{2}{1+u^2} du = dx$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

(b) (Uwaga:  $\operatorname{arcctg} x = \pi/2 - \operatorname{arctg} x$ , co wynika bezpośrednio z własności f. tryg.)

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arcctg} \sqrt{x} dx &= \\ \int \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{x} \right) dx &= \\ \frac{\pi}{2} x - \int 2t \operatorname{arctg} t dt &= \\ \frac{\pi}{2} x - \left( t^2 \operatorname{arctg} t - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt \right) &= \\ \frac{\pi}{2} x - x \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt &= \\ \frac{\pi}{2} x - x \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \int dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt &= \\ \frac{\pi}{2} x - x \operatorname{arctg} \sqrt{x} + t - \operatorname{arctg} t + C &= \\ \frac{\pi}{2} x - x \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

$$t = \sqrt{x}$$

$$t^2 = x$$

$$2t dt = dx$$


$$u = \operatorname{arctg} t \quad dv = 2t dt$$

$$du = \frac{dt}{1+t^2} \quad v = t^2$$







## 2.3 Potwierdzenie rozwiązania

(a)

FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA



int 1/(3+sin x+3cos x) dx

 NATURAL LANGUAGE  MATH INPUT  EXTENDED KEYBOARD  EXAMPLES  UPLOAD  RANDOM

Indefinite integral Step-by-step solution

$$\int \frac{1}{3 + \sin(x) + 3 \cos(x)} dx = \log\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \log\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \text{constant}$$

(assuming a complex-valued logarithm)


log(x) is the natural logarithm

Przy czym







$$\ln \left| \sin \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \ln \left| \frac{\sin \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 \right|$$

(b) (Uwaga: w Wolframie jest zaimplementowana zła wersja (a mianowicie wersja nieciągła) funkcji  $\arctg \alpha$ , stąd do poprawnego obliczenia wyniku wymagane jest podstawienie na  $\pi/2 - \arctg \alpha$ )

FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA



\int \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{x} \right) dx

 NATURAL LANGUAGE  MATH INPUT  EXTENDED KEYBOARD  EXAMPLES  UPLOAD  RANDOM

Indefinite integral Approximate form Step-by-step solution

$$\int \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\sqrt{x}) \right) dx = \frac{\pi x}{2} + \sqrt{x} - (x+1) \tan^{-1}(\sqrt{x}) + \text{constant}$$

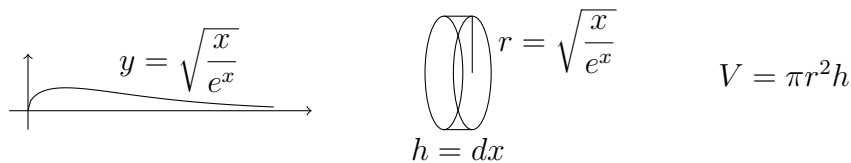
$\tan^{-1}(x)$  is the inverse tangent function

### 3 Zadanie 3

#### 3.1 Treść zadania

(5p) Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi  $OX$  obszaru ograniczonego przez  $y = 0$  i  $y = \sqrt{\frac{x}{e^x}}$  dla  $x \geq 0$ .

#### 3.2 Rozwiązanie



$$y(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$$

$$\text{Poszukiwana objętość} = \pi \int_0^\infty \frac{x}{e^x} dx = (*)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{e^x} dx &= \int x e^{-x} dx = & u &= x & dv &= e^{-x} \\ -\frac{x}{e^x} - \int (-e^{-x}) dx &= & du &= 1 & v &= -e^{-x} \\ -\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + C &= \\ \frac{-x-1}{e^x} + C \end{aligned}$$

$$(*) = \pi \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-x-1}{e^x} \right) - \left( \frac{-0-1}{e^0} \right) \right) = \pi \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{e^x} \right) - (-1) \right) = \pi(0+1) = \pi$$

#### 3.3 Potwierdzenie rozwiązania

FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA

calculate volume of curve  $y = \sqrt{\frac{x}{e^x}}$  rotated by x axis

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYBOARD EXAMPLES UPLOAD RANDOM

Input interpretation

volume of solid of revolution	$y = \sqrt{\frac{x}{e^x}}$	about the x-axis
-------------------------------	----------------------------	------------------

Result [More digits](#)

$$\int_0^\infty e^{-x} \pi x dx = \pi \approx 3.14159$$



## 4 Zadanie 4

### 4.1 Treść zadania

- (a)(1p) Podaj warunek konieczny zbieżności nieskończonego szeregu liczbowego.  
(b)(4p) Znajdź przedział zbieżności szeregu

$$\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

### 4.2 Rozwiązanie

(a) Jeżeli nieskończony szereg liczbowy  $\sum a_n$  jest zbieżny, to  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

(b) Skorzystamy z kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów. Jeżeli granica odpowiadająca temu kryterium jest mniejsza niż jeden, to szereg jest zbieżny. Jeżeli jest równa jeden, to należy ten przypadek rozważyć oddzielnie. W pozostałych przypadkach szereg jest rozbieżny.

Niech  $(-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^n \sqrt{n}} = a_n$ , wówczas

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &< 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^n \sqrt{n}}|} &< 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(-1)^n|} \frac{\sqrt[n]{|x-2|^n}}{\sqrt[n]{3^n \sqrt{n}}} &< 1 \\ 1 \cdot \frac{|x-2|}{3 \cdot 1} &< 1 \\ |x-2| &< 3 \\ -1 &< x < 5 \end{aligned}$$

$x = -1$  :

$$a_n = (-1)^n \frac{(-1-2)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

$$a_n = \frac{(3)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

$$a_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Szereg Dirichleta o potęgach  $< 1$   
 $\implies$  rozbieżny

$x = 5$  :

$$a_n = (-1)^n \frac{(5-2)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

$$a_n = \frac{(-3)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Z kryt. Leibniza  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \wedge |a_{n+1}| < |a_n|$   
 $\implies$  zbieżny

Przedział zbieżności szeregu wynosi  $(-1, 5]$ .

## 4.3 Potwierdzenie rozwiązania

(a)

Szeregi liczbowe

Zbieżność – warunek konieczny

### Pytanie dnia

Czy szereg jest zbieżny ?

#### Warunek konieczny zbieżności

- 1 Jeżeli szereg  $\sum a_n$  jest zbieżny, to  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- 2 Jeżeli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , to szereg  $\sum a_n$  jest rozbieżny.

Informatyka

Analiza Matematyczna

10 / 19

(b)

FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA



interval of convergence sum  $(-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^n \sqrt{n}}$



NATURAL LANGUAGE



MATH INPUT



EXTENDED KEYBOARD



EXAMPLES



UPLOAD



RANDOM

Input

convergence

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

Interval of convergence

Show plot

$\{x : |x - 2| < 3 \text{ or } x = 5\}$

$|z|$  is the absolute value of  $z$

Alternate forms assuming  $x$  is real

$-1 < x \leq 5$

## 5 Zadanie 5

### 5.1 Treść zadania

Rozwiąż równania różniczkowe

(a)(4p)  $y'' + 2y' = 8xe^{-2x}$

(b)(3p)  $y' \sin x - y \cos x = (x \sin x)^2$

(c)(2p) Naskicuj obszar istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania z punktu (b). Następnie określ na jakim maksymalnie przedziale może istnieć rozwiązanie tego równania z warunkiem początkowym  $y(1) = 1$ .

### 5.2 Rozwiązanie

(a)  $y'' + 2y' = 8xe^{-2x}$

$$CORN = CORJ + CSRN$$

$CORJ$  :

$$r^2 + 2r = 0$$

$$r = -2 \vee r = 0$$

$$y_{CORJ} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{0x}$$

$$y_{CORJ} = C_1 e^{-2x} + C_2$$

$CSRN$  (metodą przewidywań) :

$$y = (Ax + B)xe^{-2x}, \quad (\text{mnożymy przez dodatkowy } x, \text{ ponieważ } -2 \text{ jest jednym z } r)$$

$$y' = -2(Ax^2 + Bx)e^{-2x} + (2Ax + B)e^{-2x} = (-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B)e^{-2x}$$

$$y'' = -2(-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B)e^{-2x} + (-4Ax - 2B + 2A)e^{-2x}$$

$$y'' = (4Ax^2 + 4Bx - 8Ax - 4B + 2A)e^{-2x}$$

$$y'' + 2y' = (4Ax^2 + 4Bx - 8Ax - 4B + 2A)e^{-2x} + 2(-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B)e^{-2x}$$

$$y'' + 2y' = ((4A - 4A)x^2 + (4B - 8A - 4B + 4A)x - 4B + 2A + 2B)e^{-2x}$$

$$y'' + 2y' = (-4Ax - 2B + 2A)e^{-2x}$$

$$-4A = 8 \implies A = -2$$

$$-2B + 2A = 0 \implies B = -2$$

$$y_{CSRN} = (-2x^2 - 2x)e^{-2x}$$

$$y_{CORN} = C_1 e^{-2x} + C_2 - 2x^2 e^{-2x} - 2x e^{-2x}$$

(b)

$$\begin{aligned}y' \sin x - y \cos x &= (x \sin x)^2 \quad | \div \sin x, \sin x \neq 0 \\y' - y \cot x &= x^2 \sin x\end{aligned}$$

$$\text{Czynnik całkujący: } \mu = e^{\int (-\cot x) dx} = C_1 e^{-\log|\sin x|} = \frac{C_2}{\sin x}$$

$$\frac{C_2 y'}{\sin x} + \frac{-C_2 y \cot x}{\sin x} = C_2 x^2 \quad | \div C_2$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y}{\sin x} \right) = x^2$$

$$\int d \left( \frac{y}{\sin x} \right) = \int x^2 dx$$

$$\frac{y}{\sin x} = \frac{x^3}{3} + C$$

$$y = \frac{x^3 \sin x}{3} + C \sin x$$

Rozwiązanie osobliwe dla  $\sin x = 0$ :

$$\sin x = 0 \iff x \in D = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\pi n\}$$

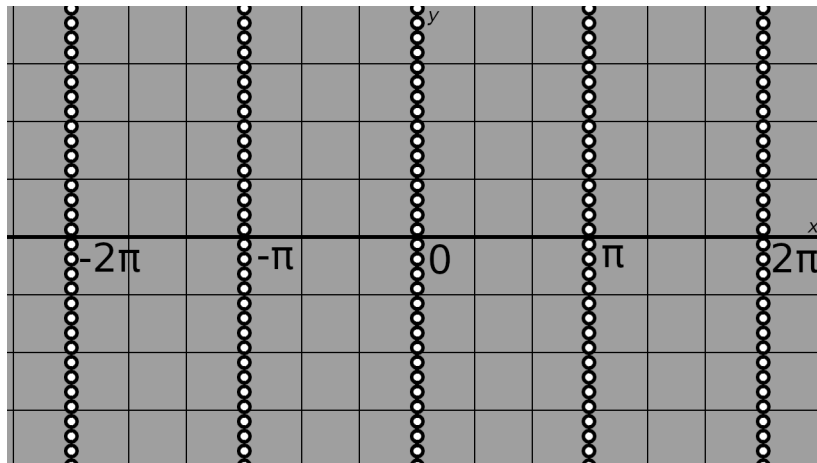
$$0 - y \cos x = 0$$

$$x \in D \implies \cos x \neq 0 \implies y_{\text{osob}} = 0$$

(c)

$$y' = x^2 \sin x + y \cot x = f(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cot x \implies x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$y(1) = 1 \implies x \in (0, \pi)$$

## 5.3 Potwierdzenie rozwiązania

(a)

FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA

**WolframAlpha**

solve  $y'' + 2y' = 8xe^{-2x}$

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYBOARD EXAMPLES UPLOAD RANDOM

Input interpretation

solve  $y''(x) + 2y'(x) = 8xe^{-2x}$

Result Approximate form ☒ Step-by-step solution

$y(x) = -\frac{1}{2}c_1 e^{-2x} + c_2 - 2e^{-2x}x^2 - 2e^{-2x}x$

(b)

FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA

**WolframAlpha**

solve  $y' \sin x - y \cos x = (x \sin x)^2$

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYBOARD EXAMPLES UPLOAD RANDOM

Input interpretation

solve  $y'(x) \sin(x) - y(x) \cos(x) = (x \sin(x))^2$

Result ☒ Step-by-step solution

$y(x) = c_1 \sin(x) + \frac{1}{3}x^3 \sin(x)$

(c)

Równania różniczkowe zwyczajne Równania rzędu pierwszego

Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania  $y' = f(x, y)$

Jeżeli funkcja  $f(x, y)$  oraz jej pochodna cząstkowa  $\frac{\partial f}{\partial y}$  są ciągłe na obszarze  $D \subset \mathbb{R}^2$  oraz  $(x_0, y_0) \in D$ , to zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie

## 6 Zadanie 6

### 6.1 Treść zadania

(+2p) Wyznacz dywergencję funkcji  $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$ .

### 6.2 Rozwiązanie

Chwilowo brak rozwiązania – można zgłaszać propozycje rozwiązania, jak zostało to wyjaśnione we Wstępie.

### 6.3 Uwagi

Zgodnie z definicją (<https://pl.wikipedia.org/wiki/Dywergencja>), żeby obliczyć dywergencję funkcji  $f$ , to funkcja  $f$  musi być zdefiniowana jako  $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , gdzie  $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^3$  klasy  $C^1$ . Jednak funkcja  $f$  z treści zadania jest zdefiniowana jako  $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$ . Można to interpretować na wiele sposobów, np. traktując wynik funkcji  $f$  jako pierwszą współrzędną wektora, zerując dwie następne. Można też potraktować to zgoła inaczej i stwierdzić, że obliczenie dywergencji z (de facto) funkcji skalarnej jest niemożliwe.

...a może możliwe? Komentarze na ten temat można zgłaszać jw.