Egzamin z Analizy Matematycznej

2023/2024

29 stycznia 2024

Spis treści

0 Wstęp

0.1 Od autora rozwiązań

Dokument zawiera rozwiązania do wszystkich zadań z egzaminu podstawowego z Analizy Matematycznej z 2024 roku na kierunku Informatyka. Każda sekcja dotycząca konkretnego zadania składa się z 3 podsekcji – treści zadania, rozwiązania i potwierdzenia rozwiązania (w formie rozwiązania przez jakiś program, np. Wolfram Alpha, lub fragmentu prezentacji wykładowej). Po dokumencie można poruszać się klikając odpowiednią nazwę sekcji bądź podsekcji w spisie treści.

Jeśli masz jakieś uwagi lub znajdziesz błędy w którymś z rozwiązań, zgłoś je w sekcji Issues wraz z wyjaśnieniem. Możesz również samemu poprawić rozwiązanie zgłaszając Pull request – także z wyjaśnieniem (proszę edytować jedynie plik .tex).

0.2 Skan egzaminu

WETI, Informatyka, Analiza Matematyczna, Egzamin, 29.01.2024 r. 1

Kartka 1

Zad.1. (a) *(1p)* Podaj warunek konieczny istnienia pochodnej właściwej funkcji $f(x)$ w $x = x_0$.

(b) *(2p)* Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x-2}$.

(c) *(5p)* Znajdź punkty przegięcia i zbadaj wklęsłość/wypukłość wykresu funkcji

$$f(x) = (2 - \ln x) \cdot x^2$$

Kartka 2

Zad.2. Oblicz całki

(a) *(3p)* $\displaystyle\int \frac{1}{3 + \sin x + 3\cos x}\, dx$

(b) *(5p)* $\displaystyle\int \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{x}\, dx$

Kartka 3

Zad.3. *(5p)* Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi OX obszaru ograniczonego przez $y = 0$ i $y = \sqrt{\dfrac{x}{e^x}}$ dla $x \geq 0$

Zad.4. (a) *(1p)* Podaj warunek konieczny zbieżności nieskończonego szeregu liczbowego

(b) *(4p)* Znajdź przedział zbieżności szeregu

$$\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

Kartka 4

Zad.5. Rozwiąż równania różniczkowe

(a) *(4p)* $y'' + 2y' = 8xe^{-2x}$

(b) *(3p)* $y' \sin x - y \cos x = (x \sin x)^2$

(c) *(2p)* Naszkicuj obszar istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania z punktu (b). Następnie określ na jakim maksymalnie przedziale może istnieć rozwiązanie tego równania z warunkiem początkowym $y(1) = 1$.

Zad.6. *(+2p)* Wyznacz dywergencję funkcji $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$

1 Zadanie 1

1.1 Treść zadania

(a)(1p) Podaj warunek konieczny istnienia pochodnej właściwiej funkcji $f(x)$ w $x = x_0$.

(b)(2p) Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x-2}$.

(c)(5p) Znajdź punkty przegięcia i zbadaj wklęsłość/wypukłość wykresu funkcji

$$f(x) = (2 - \ln x) \cdot x^2$$

1.2 Rozwiązanie

(a) Jeżeli istnieje pochodna właściwa funkcji $f(x)$ w punkcie $x = x_0$, to funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x = x_0$.

(b)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h-2} - \sqrt{x-2}}{h}, \quad D_f = [2, \infty) \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h-2} - \sqrt{x-2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h-2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+h-2} + \sqrt{x-2}} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{x + \cancel{h} - 2 - x + 2}{\cancel{h}\,(\sqrt{x+h-2} + \sqrt{x-2})} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-2} + \sqrt{x-2})} \\
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+0-2} + \sqrt{x-2})} \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x-2}}, \quad D_{f'} = (2, \infty)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
f(x) &= (2 - \ln x)x^2 = 2x^2 - x^2 \ln x, \quad D_f = (0, \infty) \\
f'(x) &= 4x - 2x \ln x - \frac{x^2}{x} = 3x - 2x \ln x, \quad D_{f'} = (0, \infty) \\
f''(x) &= 3 - 2 \ln x - \frac{2x}{x} = 1 - 2 \ln x, \quad D_{f''} = (0, \infty)
\end{aligned}$$

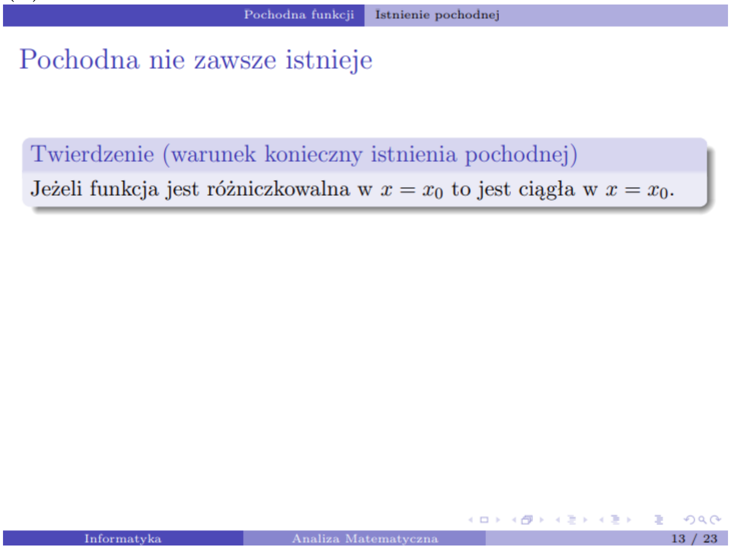
$$\begin{aligned}
f \text{ wypukła} \iff f''(x) &> 0 \\
1 - 2 \ln x &> 0 \\
\frac{1}{2} &> \ln x \\
\sqrt{e} &> x
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
f \text{ wklęsła} \iff f''(x) &< 0 \\
1 - 2 \ln x &< 0 \\
\frac{1}{2} &< \ln x \\
\sqrt{e} &< x
\end{aligned}$$

Punkt przegięcia w x_0 występuje, kiedy $f''(x_0) = 0$ i f'' zmienia znak w otoczeniu x_0. $f''(x_0) = 0 \iff x_0 = \sqrt{e}$, a wiemy, na podstawie wcześniej wyliczonych nierówności, że druga pochodna zmienia znak w otoczeniu tego punktu.

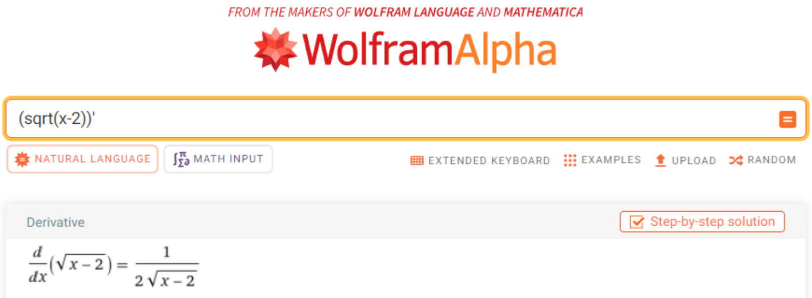
Podsumowując: Punkt przegięcia: $x_0 = \sqrt{e}$. Funkcja jest wypukła w przedziale $(0, \sqrt{e})$. Funkcja jest wklęsła w przedziale $(\sqrt{e}, \infty)$.

1.3 Potwierdzenie rozwiązania

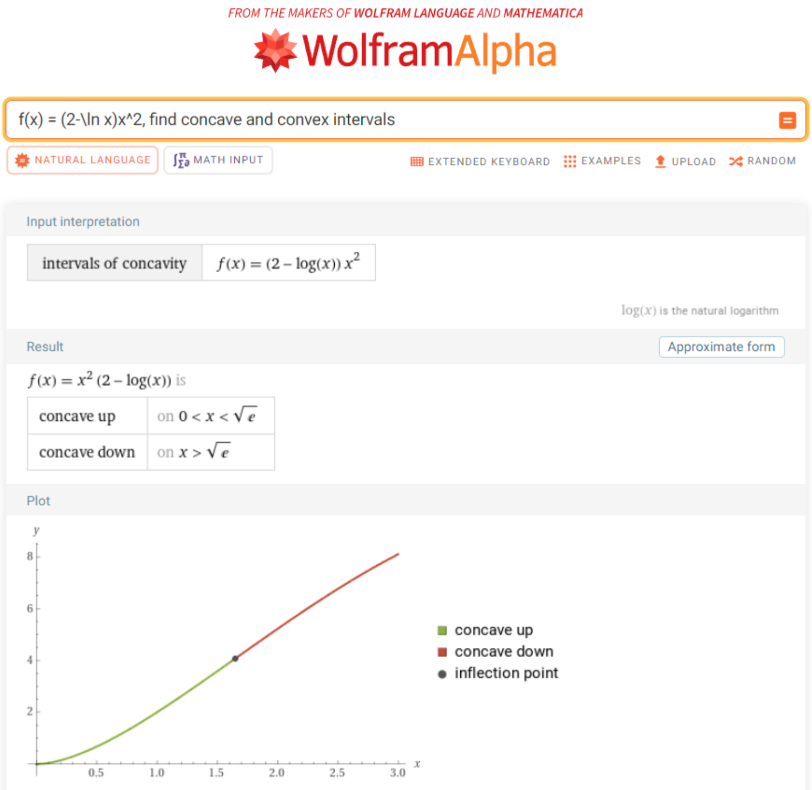
(a)



(b)



(c)



2 Zadanie 2

2.1 Treść zadania

Oblicz całki

(a)($3p$) $\displaystyle\int \frac{1}{3+\sin x+3\cos x}dx$

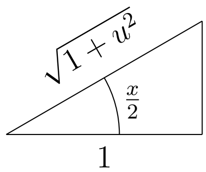
(b)($5p$) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{x}\;dx$

2.2 Rozwiązanie

(a)

$$\int \frac{1}{3+\sin x+3\cos x}dx =$$
$$\int \frac{1}{3+\frac{2u}{1+u^2}+3\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du =$$
$$\int \frac{2}{3(1+u^2)+2u+3(1-u^2)}du =$$
$$\int \frac{\cancel{2}}{3(\cancel{2})+\cancel{2}\,u}du =$$
$$\int \frac{1}{3+u}du =$$
$$\ln|u+3|+C =$$
$$\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C$$

$$u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$



$$\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}=u$$

$$du=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{2}dx$$
$$\frac{2}{1+u^2}du=dx$$
$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$
$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$$
$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$$
$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

(b) (Uwaga: $\operatorname{arc\,ctg}x=\pi/2-\operatorname{arctg}x$, co wynika bezpośrednio z własności f. tryg.)

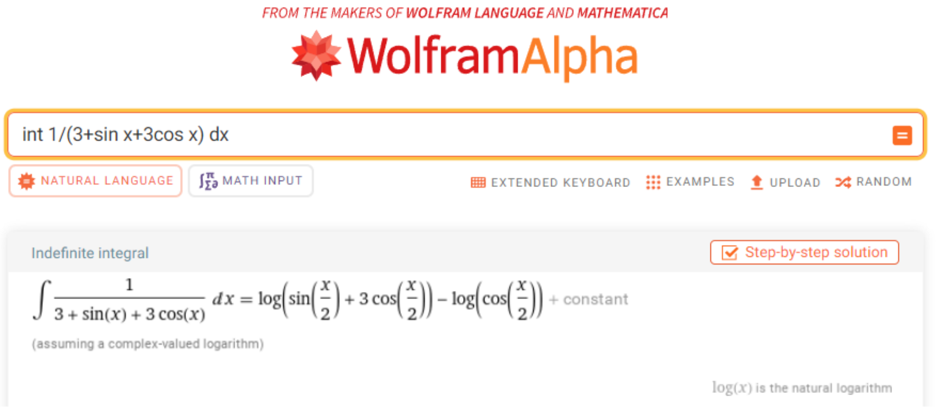
$$\int \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{x}\;dx =$$
$$\int\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)dx =$$
$$\frac{\pi}{2}x-\int 2t\operatorname{arctg}t\;dt =$$
$$\frac{\pi}{2}x-\left(t^2\operatorname{arctg}t-\int\frac{t^2}{1+t^2}dt\right) =$$
$$\frac{\pi}{2}x-x\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt =$$
$$\frac{\pi}{2}x-x\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\int dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt =$$
$$\frac{\pi}{2}x-x\operatorname{arctg}\sqrt{x}+t-\operatorname{arctg}t+C =$$
$$\frac{\pi}{2}x-x\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$$

$$t=\sqrt{x}$$
$$t^2=x$$
$$2tdt=dx$$

$$u=\operatorname{arctg}t \qquad dv=2tdt$$
$$du=\frac{dt}{1+t^2} \qquad v=t^2$$

2.3 Potwierdzenie rozwiązania

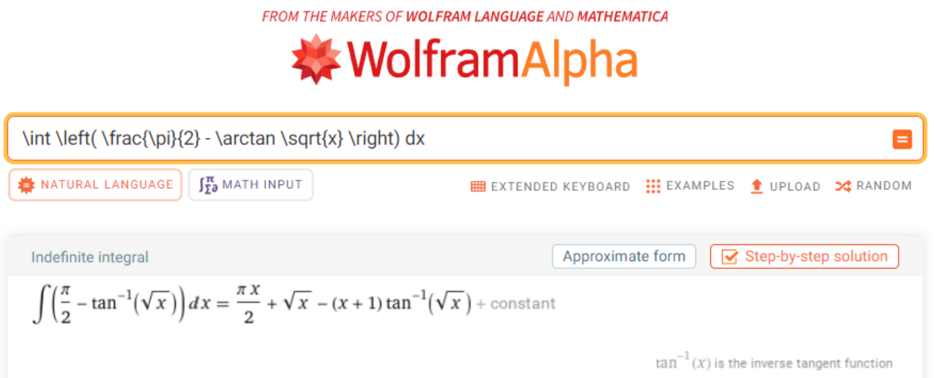
(a)



Przy czym

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|$$

(b) (Uwaga: w Wolframie jest zaimplementowana zła wersja (a mianowicie wersja nieciągła) funkcji $\operatorname{arc\,ctg}\alpha$, stąd do poprawnego obliczenia wyniku wymagane jest podstawienie na $\pi/2 - \operatorname{arctg}\alpha$)

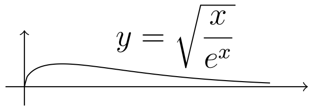


3 Zadanie 3

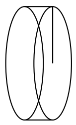
3.1 Treść zadania

($5p$) Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi OX obszaru ograniczonego przez $y = 0$ i $y = \sqrt{\dfrac{x}{e^x}}$ dla $x \geqslant 0$.

3.2 Rozwiązanie



$y = \sqrt{\dfrac{x}{e^x}}$



$r = \sqrt{\dfrac{x}{e^x}}$

$h = dx$

$V = \pi r^2 h$

$y(0) = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} y = 0$

Poszukiwana objętość $= \pi \displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x} dx = (*)$

$$\int \frac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx = \qquad \begin{matrix} u = x & dv = e^{-x} \\ du = 1 & v = -e^{-x} \end{matrix}$$

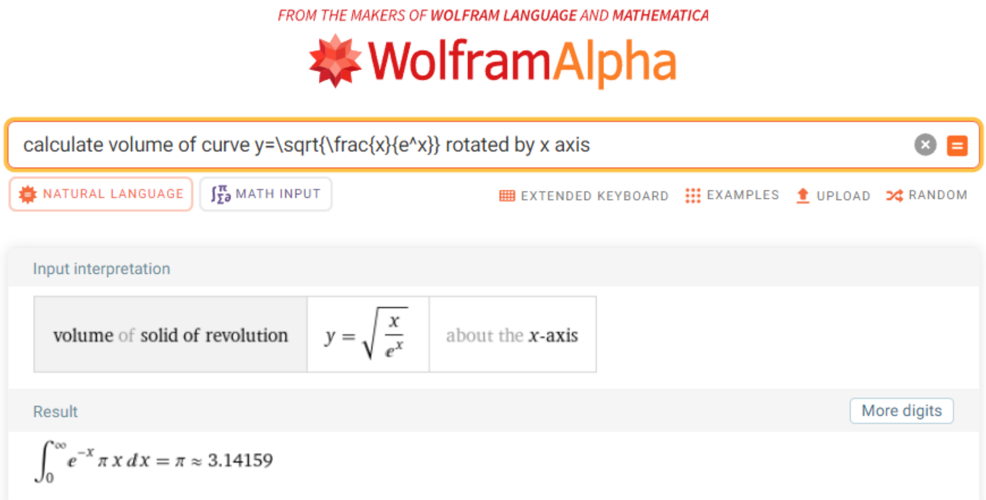
$$-\frac{x}{e^x} - \int \left(-e^{-x}\right) dx =$$

$$-\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + C =$$

$$\frac{-x-1}{e^x} + C$$

$$(*) = \pi \left(\lim_{x\to\infty} \overset{\text{L'Hôpital}}{\left(\frac{-x-1}{e^x} \right)} - \left(\frac{-0-1}{e^0} \right) \right) = \pi \left(\lim_{x\to\infty} \left(\frac{-1}{e^x} \right) - (-1) \right) = \pi(0+1) = \pi$$

3.3 Potwierdzenie rozwiązania



4 Zadanie 4

4.1 Treść zadania

(a)($1p$) Podaj warunek konieczny zbieżności nieskończonego szeregu liczbowego.
(b)($4p$) Znajdź przedział zbieżności szeregu

$$\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{3^n\sqrt{n}}$$

4.2 Rozwiązanie

(a) Jeżeli nieskończony szereg liczbowy $\sum a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Skorzystamy z kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów. Jeżeli granica odpowiadająca temu kryterium jest mniejsza niż jeden, to szereg jest zbieżny. Jeżeli jest równa jeden, to należy ten przypadek rozważyć oddzielnie. W pozostałych przypadkach szereg jest rozbieżny.

Niech $(-1)^n\dfrac{(x-2)^n}{3^n\sqrt{n}} = a_n$, wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(-1)^n\frac{(x-2)^n}{3^n\sqrt{n}}|} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(-1)|^n}\,\frac{\sqrt[n]{|x-2|^n}}{\sqrt[n]{3^n}\,\sqrt[n]{\sqrt{n}}} < 1$$

$$1\,\frac{|x-2|}{3\cdot 1} < 1$$

$$|x-2| < 3$$

$$-1 < x < 5$$

$x = -1:$

$$a_n = (-1)^n\frac{(-1-2)^n}{3^n\sqrt{n}}$$

$$a_n = \frac{(3)^n}{3^n\sqrt{n}}$$

$$a_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Szereg Dirichleta o potędze < 1

$\implies$ rozbieżny

$x = 5:$

$$a_n = (-1)^n\frac{(5-2)^n}{3^n\sqrt{n}}$$

$$a_n = \frac{(-3)^n}{3^n\sqrt{n}}$$

$$a_n = (-1)^n\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

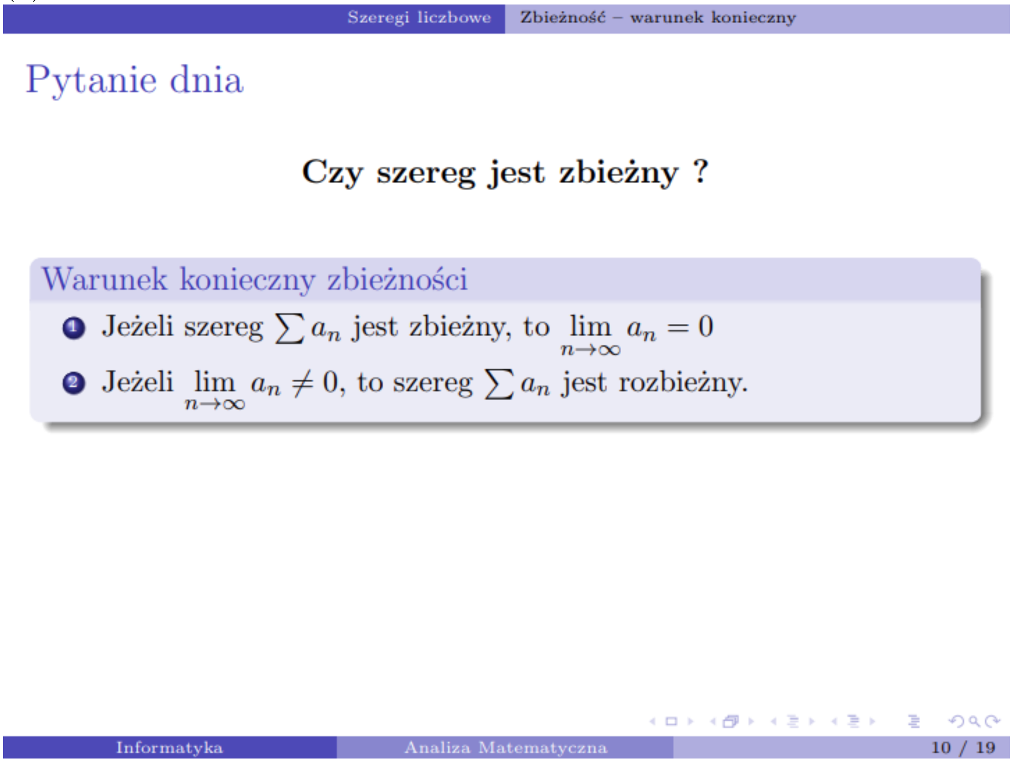
Z kryt. Leibniza $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \land |a_{n+1}| < |a_n|$

$\implies$ zbieżny

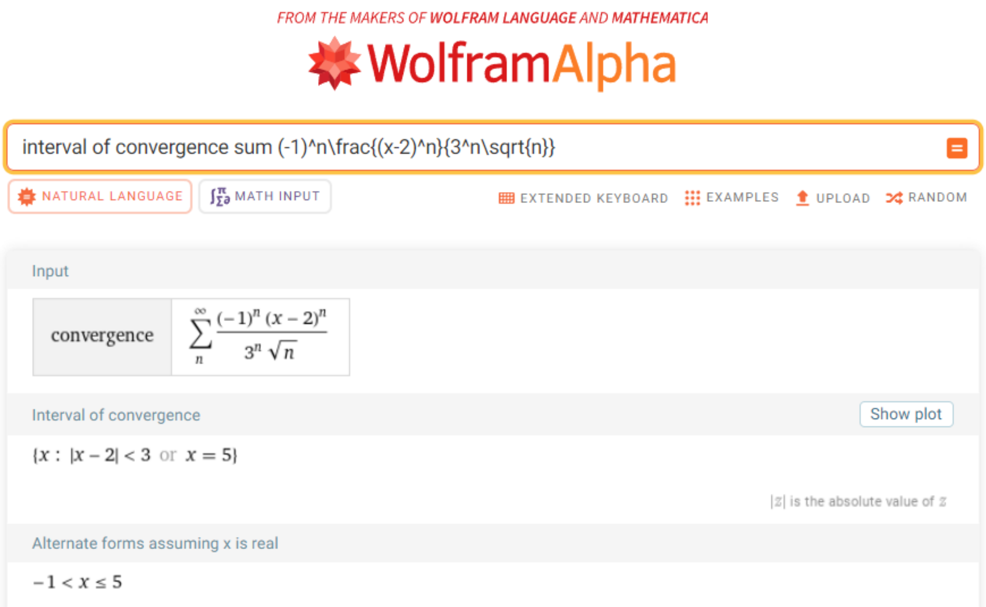
Przedział zbieżności szeregu wynosi $(-1, 5]$.

4.3 Potwierdzenie rozwiązania

(a)



(b)



5 Zadanie 5

5.1 Treść zadania

Rozwiąż równania różniczkowe
(a)(4p) $y'' + 2y' = 8xe^{-2x}$
(b)(3p) $y' \sin x - y \cos x = (x \sin x)^2$
(c)(2p) Naszkicuj obszar istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania z punktu (b). Następnie określ na jakim maksymalnie przedziale może istnieć rozwiązanie tego równania z warunkiem początkowym $y(1) = 1$.

5.2 Rozwiązanie

(a) $y'' + 2y' = 8xe^{-2x}$
$CORN = CORJ + CSRN$
$CORJ:$

$$r^2 + 2r = 0$$
$$r = -2 \vee r = 0$$
$$y_{CORJ} = C_1e^{-2x} + C_2e^{0x}$$
$$y_{CORJ} = C_1e^{-2x} + C_2$$

$CSRN$ (metodą przewidywań) :

$y = (Ax + B)xe^{-2x}$, (mnożymy przez dodatkowy x, ponieważ -2 jest jednym z r)
$y' = -2(Ax^2 + Bx)e^{-2x} + (2Ax + B)e^{-2x} = (-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B)e^{-2x}$
$y'' = -2(-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B)e^{-2x} + (-4Ax - 2B + 2A)e^{-2x}$
$y'' = (4Ax^2 + 4Bx - 8Ax - 4B + 2A)e^{-2x}$

$y'' + 2y' = (4Ax^2 + 4Bx - 8Ax - 4B + 2A)e^{-2x} + 2(-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B)e^{-2x}$
$y'' + 2y' = ((4A - 4A)x^2 + (4B - 8A - 4B + 4A)x - 4B + 2A + 2B)e^{-2x}$
$y'' + 2y' = (-4Ax - 2B + 2A)e^{-2x}$

$$-4A = 8 \implies A = -2$$
$$-2B + 2A = 0 \implies B = -2$$
$$y_{CSRN} = (-2x^2 - 2x)e^{-2x}$$

$$y_{CORN} = C_1e^{-2x} + C_2 - 2x^2e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$

(b)

$$y' \sin x - y \cos x = (x \sin x)^2 \quad | \div \sin x,\ \sin x \neq 0$$
$$y' - y \cot x = x^2 \sin x$$

$$\text{Czynnik całkujący: } \mu = e^{\int(-\cot x)dx} = C_1 e^{-log|sinx|} = \frac{C_2}{sinx}$$

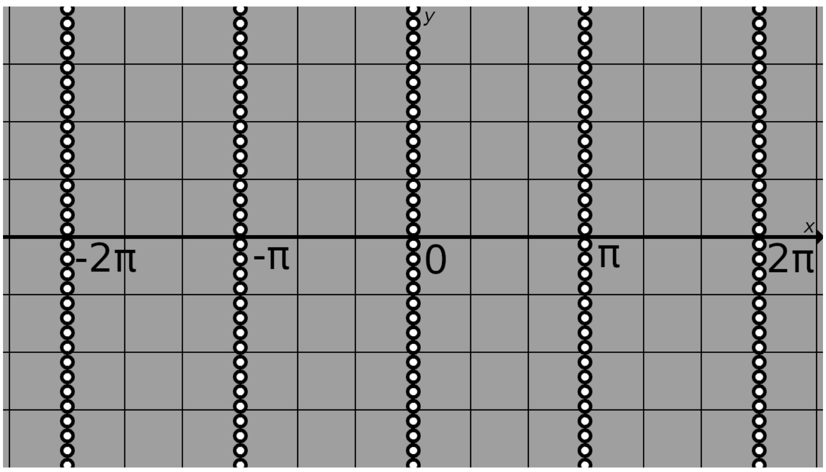
$$\frac{C_2 y'}{\sin x} + \frac{-C_2 y \cot x}{\sin x} = C_2 x^2 \quad | \div C_2$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\sin x}\right) = x^2$$
$$\int d\left(\frac{y}{\sin x}\right) = \int x^2 dx$$
$$\frac{y}{\sin x} = \frac{x^3}{3} + C$$
$$y = \frac{x^3 \sin x}{3} + C \sin x$$

Rozwiązanie osobliwe dla $\sin x = 0$:

$$\sin x = 0 \iff x \in D = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\pi n\}$$
$$0 - y \cos x = 0$$
$$x \in D \implies \cos x \neq 0 \implies y_{osob} = 0$$

(c)

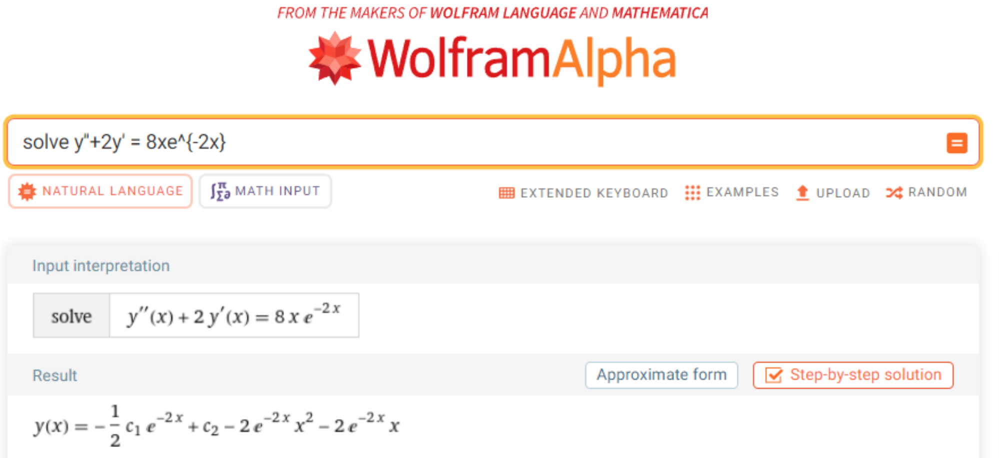
$$y' = x^2 \sin x + y \cot x = f(x, y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cot x \implies x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



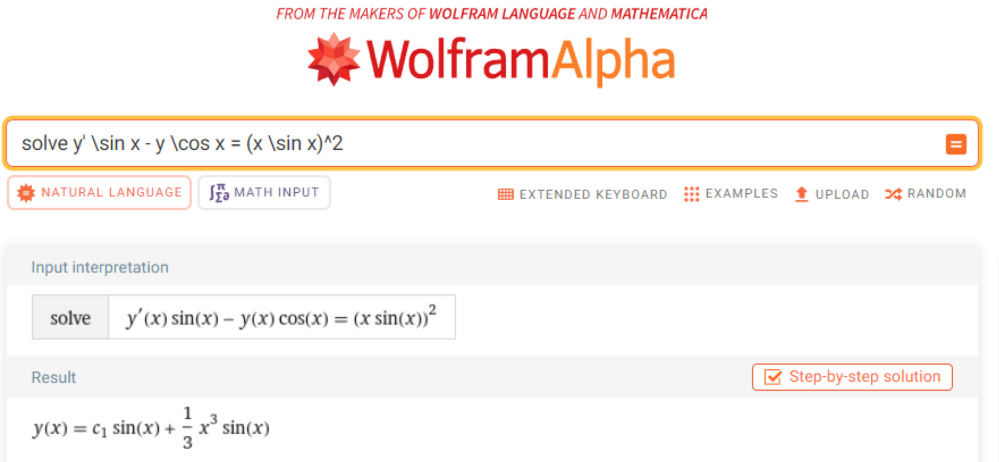
$$y(1) = 1 \implies x \in (0, \pi)$$

5.3 Potwierdzenie rozwiązania

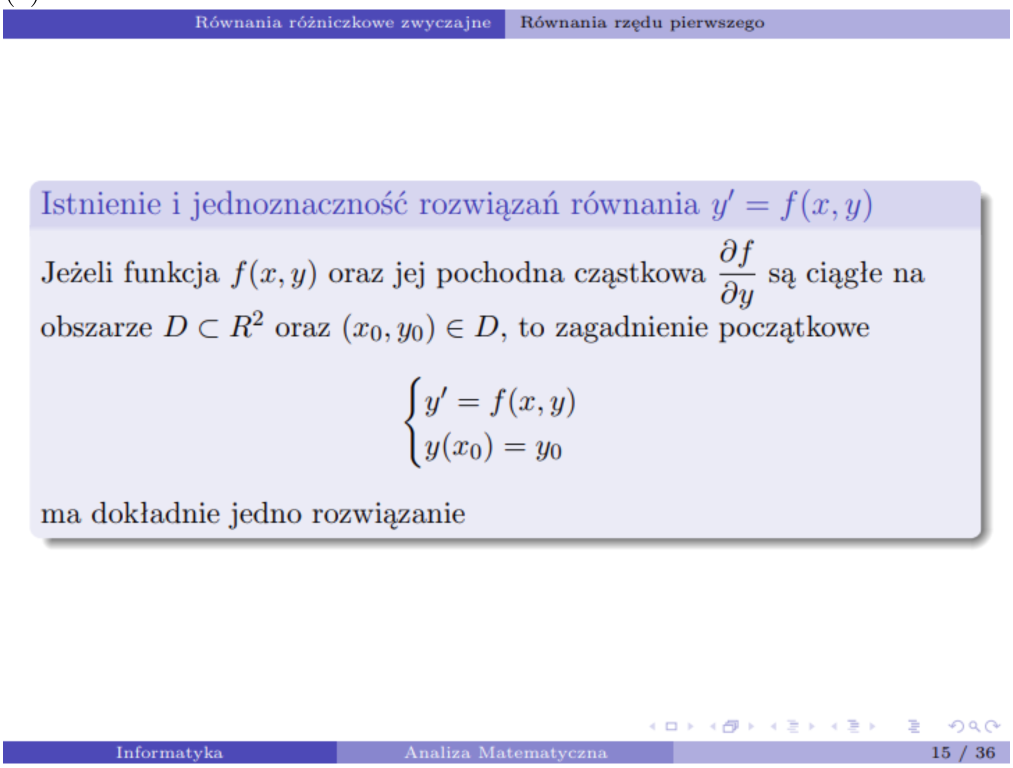
(a)



(b)



(c)



6 Zadanie 6

6.1 Treść zadania

$(+2p)$ Wyznacz dywergencję funkcji $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$.

6.2 Rozwiązanie

Chwilowo brak rozwiązania – można zgłaszać propozycje rozwiązania, jak zostało to wyjaśnione we Wstępie.

6.3 Uwagi

Zgodnie z definicją (`https://pl.wikipedia.org/wiki/Dywergencja`), żeby obliczyć dywergencję funkcji f, to funkcja f musi być zdefiniowana jako $f : \mathbf{U} \to \mathbb{R}^3$, gdzie $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^3$ klasy C^1. Jednak funkcja f z treści zadania jest zdefiniowana jako $f : \mathbf{U} \to \mathbb{R}$. Można to interpretować na wiele sposobów, np. traktując wynik funkcji f jako pierwszą współrzędną wektora, zerując dwie następne. Można też potraktować to zgoła inaczej i stwierdzić, że obliczenie dywergencji z (de facto) funkcji skalarnej jest niemożliwe.

...a może możliwe? Komentarze na ten temat można zgłaszać jw.