

## [DM 04]

### [1/04]

a) Wybieram  $n$  kolejnych liter.

$$k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!}$$

b) Wybieramy  $n = k$  kolejnych liter.

$$n!$$

c) Co najmniej raz, a więc dzielę  $n$  numery miejsc na litery do  $k$  worków, a następnie każdemu workowi nadaję literę.

$$S(n, k) \cdot k!$$

d) Dokładnie dwa razy, a więc wybieram dwa miejsca na literę  $a$ , potem dwa miejsca na literę  $b$ , potem na literę  $c$ , itd.

$$\binom{n}{2 \ 2 \ 2 \ \cdots \ 2, \ k \text{ razy}} = \frac{n!}{2^k}$$

### [2/04]

a) Liczy się zarówno nr sali, jak i nr miejsca w sali. Dodaję więc do zbioru studentów  $n-1$  pilnujących, którzy będą rozdzielali  $k$  sal w taki sposób, że jak ułożę ciąg  $n+k-1$  studentów i pilnujących, to studenci przed pierwszym pilnującym pójda do pierwszej sali, pomiędzy pierwszym a drugim – do drugiej sali, pomiędzy drugim a trzecim... itd. Na koniec dzielę przez liczbę możliwych ułożeń pilnujących, bo są oni nierozróżnialni.

$$\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$$

b) Liczy się w jakiej sali jest student, więc niech każdy student wybierze sobie salę.

$$k^n$$

c) Liczy się tylko zbiór studentów w danej sali, sale i miejsca w nich są nierozróżnialne.

$$BRAK ROZW (POKI CO)$$

### [3/04]

a) Liczy się tylko funkcja, więc najpierw wybieramy kapitanów, potem sterników, na końcu majtków.

$$\binom{15}{3} \binom{12}{3} \binom{9}{9}$$

b) Liczy się tylko załoga (tj. kto w niej jest, a nie jej numer), więc najpierw wybieramy pierwszą załogę, potem drugą, na końcu trzecią, a na koniec usuwamy rozróżnialność załóg.

$$\binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5} \cdot \frac{1}{3!}$$

c) Liczy się tylko kto jest kapitanem.

$$\binom{15}{3}$$

d) Ustawiamy w rzędu wszystkich, następnie pierwsze 5 osób to pierwsza załoga, kolejne 5 osób to druga, i kolejne – trzecia. Niech pierwsza osoba w załodze będzie kapitanem. Mamy więc 4 nierozróżnialnych osób w każdej z trzech drużyn. Dzielimy więc przez to odpowiedź. Na koniec usuwamy rozróżnialność 3 załóg.

$$\frac{15!}{(4!)^3 \cdot 3!}$$

[4/04]

a) Sadzamy najpierw wszystkich na ławce. Następnie łączymy początek i koniec ławeczki, więc możliwych jest  $2n$  przesunięć stanowiących to samo ustawienie. Następnie dzielimy przez 2, bo interesuje nas zbiór sąsiadów, więc raz sąsiad może być po prawej, a raz po lewej.

$$\frac{(2n)!}{2n \cdot 2}$$

b) Liczy się tylko kto jest z kim w parze. Dobieram w pary wszystkie osoby, a następnie, czynię je nierozróżnialnymi.

$$\binom{2n}{2 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2, \ n \text{ razy}} \cdot \frac{1}{n!}$$

c) To samo co w podpunkcie a, ale tym razem interesuje nas kto jest po lewo i po prawo, więc nie dzielę przez 2.

$$\frac{(2n)!}{2n}$$

[5/04]

a) Chcemy znaleźć następującą sumę  $\sum_{x_2+x_3+x_4+x_5=n} 1$ , gdzie  $x_i \geq 1$  to liczba mówiąca ile osób dostało ocenę  $i$ . Do takich sum stosujemy podejście słomeczek i kubeczków. Mamy 4 słomeczki i  $n$  kubeczków. Znamy położenie pierwszej słomeczki, więc wybieramy położenie 3 pozostałych (z pozostałych  $n - 1$  miejsc). [Więcej o słomeczkach i kubeczkach w dodatku.]

$$\binom{n-1}{3}$$

b) Dzielę studentów na 4 niepuste podzbiory, a następnie przypisuję podzbiорom oceny.

$$S(n, 4) \cdot 4!$$

[6/04]

a) W ramach drużyn dobieram osoby w pary (pierwszą, drugą, trzecią, czwartą), a następnie dzielę przez ich ilość, by uczynić je nierozróżnialnymi.

$$\left( \binom{8}{2 \ 2 \ 2 \ 2} \cdot \frac{1}{4!} \right)^2$$

b) Liczy się tylko zbiór przeciwników dla danej osoby pary.

*BRAK ROZW (POKI CO)*

c) To samo, co w a, ale tym razem interesuje nas kolejność stolików.

$$\left( \binom{8}{2 \ 2 \ 2 \ 2} \right)^2$$

[7/04]

a)

*BRAK ROZW (POKI CO)*

b) Interesuje nas suma  $\sum_{x_1+x_2+\dots+x_k=n} 1$ , gdzie  $x_i \geq 1$ , więc stosujemy podejście kubeczków i słomeczek. Mamy do wyboru  $n - 1$  miejsc na  $k - 1$  słomeczek.

$$\binom{n-1}{k-1}$$

[8/04]

Interesuje nas suma  $\sum_{x_1+x_2+\dots+x_k=n} 1$ , gdzie  $x_i \geq r$ , więc stosujemy zmodyfikowane podejście kubeczków i słomeczek. Najpierw niech każdy siostrzeniec dostanie  $r - 1$  cukierków. Następnie dla pozostałych  $n - k(r - 1)$  stosujemy standardowe podejście kubeczków i słomeczek. Pozostało do wyboru  $n - k(r - 1) - 1 = n - kr + k - 1$  miejsc (cukierków) na  $k - 1$  słomeczek.

$$\binom{n - kr + k - 1}{k - 1}$$

[9/04]

Podobnie jak w zadaniu [3/04], liczy się tylko kto jest szefem danej grupy, a grupy są nierozróżnialne. Ustawiamy więc dzieci w rząd i dzielimy na  $k$  grup, po  $n$  dzieci, i ustalamy, że pierwsze dziecko będzie szefem. Dzielimy więc dla każdej z grup przez liczbę możliwych ustawień reszty osób  $((n - 1)!)$ , a także czynimy grupy nierozróżnialnymi.

$$\frac{kn!}{((n - 1)!)^k \cdot k!}$$

Przypadków dla  $k = n = 2$  będzie  $\frac{4!}{((1!)^2 \cdot 2!)} = 4 \cdot 3 = 12$ . Niech w podanych ciągach dwie pierwsze liczby oznaczają pierwszą grupę, a dwie kolejne – drugą, przy czym szef stanowi pierwszą osobę w grupie:

12—34, 12—43

21—34, 21—43

13—24, 13—42

31—24, 31—42

14—23, 14—32

41—23, 41—32

[10/04]

*BRAK ROZW (POKI CO)*

[11/04]

1) Dla każdego z 30 worków wybieram parę kul.

$$\binom{60}{2 \text{ } 2 \text{ } 2 \text{ } \dots \text{ } 2, \text{ } 30 \text{ razy}} = \frac{60!}{2^{30}}$$

2) Worki są nierozróżnialne, więc biorę odpowiedź z 1 i usuwam rozróżnialność worków.

$$\binom{60}{2 \text{ } 2 \text{ } 2 \text{ } \dots \text{ } 2, \text{ } 30 \text{ razy}} \cdot \frac{1}{30!} = \frac{60!}{2^{30} \cdot 30!}$$

3)

*BRAK ROZW (POKI CO)*

4) Definicja Liczby Stirlinga.

$$S(60, 30)$$

[12/04]

1) Układam wszystkie kartki w rząd i wkładam pierwsze dwie do pierwszej szuflady, kolejne dwie do drugiej, itd.

$$60!$$

2) To samo co w 1, tylko usuwam rozróżnialność szuflad.

$$\frac{60!}{30!}$$

3) Do kartek dokładamy 29 separatorów. Następnie układamy kartki wraz z separatorami w rząd. Kartki do pierwszego separatora trafiają do pierwszej szuflady. Kartki między pierwszym a drugim separatorem – do drugiej, itd. Na koniec dzielimy przez możliwe permutacje separatorów (poniż separatorów są nierozróżnialne).

$$\frac{(60 + 29)!}{29!}$$

4) Z 30 szuflad wybieramy 6 z nich, a następnie układamy 60 kartek w rząd. Każdy segment 10 kartek trafia do innej z tych 6 szuflad.

$$\binom{30}{6} \cdot 60!$$

[13/04]

*BRAK ROZW (POKI CO)*

[14/04]

Możemy dołożyć zero albo przed pierwszą jedynką, albo między pierwszą i drugą, albo między drugą i trzecią, itd. Mamy więc 6 miejsc do dołożenia zer. Załóżmy, że chcemy dołożyć  $k$  zer ( $k = n - 13$ ). Wówczas możemy to zrobić na

$$\sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_6 = k} 1, x_i \geq 0$$

sposobów. Skorzystamy z podejścia kubeczków i słomeczek, ale żeby to zrobić musimy lekko zmodyfikować sumę, by konkretne wyrazy ciągu były większe od 0. Dodajmy obustronnie 6 oraz rozbijmy to 6 po lewej stronie na każdy wyraz ciągu po 1:

$$\sum_{(x_1+1)+(x_2+1)+\dots+(x_6+1)=k+6} 1.$$

Podstawmy  $y_i = x_i + 1$ , wówczas otrzymamy sumę

$$\sum_{y_1+y_2+\dots+y_6=k+6} 1, y_i \geq 1,$$

która już na spokojnie da się rozwiązać w sposób kubeczków i słomeczek. Wstawiamy więc pierwszą i z pozostałych  $k + 5$  miejsc musimy wybrać miejsca na pozostałe 5 słomeczek.

$$\binom{k+5}{5} = \binom{n-13+5}{5} = \binom{n-8}{5}$$

## Dodatek

### Słomeczki i kubeczki

Ten problem jest bardzo przydatny, kiedy chcemy podzielić  $n$  nierozróżnialnych przedmiotów na  $k$  niepustych rozróżnialnych grup (różnica z Liczbą Stirlinga jest taka, że w tej liczbie szukamy podziałów  $n$  rozróżnialnych elementów na  $k$  niepustych nierozróżnialnych podzbiorów). Da się go również wykorzystać, kiedy chcemy podzielić pewną liczbę nierozróżnialnych elementów na  $k$  grup o pewnej konkretnej minimalnej liczbie elementów z pomocą podstawienia  $y_i = x_i + C$ , żeby  $y_i \geq 1$ .

Rozważmy  $n$  kubeczków

U U U U U U U U U U U U U U U U

Weźmy teraz  $k$  słomek i wrzućmy je w losowe miejsca (oprócz pierwszej, ona ma ustaloną pozycję jako pierwsza z lewej strony)

⊥ U U U U ⊥ U U U ⊥ U U U ⊥ ⊥ U

Niech teraz  $k$  osób wypije picie z kubeczka, w którym znajduje się ich słomka. Następnie niech przeniosą słomki w prawo i powtórzą proces. Jeśli kubeczek na prawo jest opróżniony z zawartości, to nie ma sensu przesuwac się dalej. Ile kubeczków cieczy wypije każda osoba?

W podanym wyżej przykładzie, pierwsza osoba wypije 5 kubeczków cieczy, druga – 4 kubeczki, trzecia – 4 kubeczki, czwarta – 1 kubeczek, a piąta – dwa kubeczki.

Zauważmy, że nawet jeśli słomki ustawimy koło siebie, to każda osoba wypije ciecz z przynajmniej jednego kubeczka.

W ten sposób jednoznacznie podzieliliśmy  $n$  kubeczków na  $k$  osób, a jedyne co musieliśmy zrobić, to wybrać miejsca na słomki.

Na ile sposobów możemy wybrać miejsca na słomki? Pierwsza słomka ma już swoje miejsce, i jest to pierwszy kubek. Pozostało więc  $n - 1$  miejsc i  $k - 1$  słomek. Można słomkom przydzielić miejsca na

$$\binom{n-1}{k-1}$$

sposobów.

Problem jest też przydatny, jeśli mamy inny minimalny limit (z zerem włącznie). Wówczas oryginalną sumę

$$\sum_{x_1+x_2+\dots+x_k=n} 1, x_i \geq N$$

możemy doprowadzić do postaci z jedynką w nierówności odejmując obustronnie z równania  $k \cdot (N - 1)$ , i przydzielając każdy z  $k$  wyrazów  $N - 1$  do innego wyrazu  $x_i$

$$\sum_{(x_1-(N-1))+(x_2-(N-1))+\dots+(x_k-(N-1))=n-k(N-1)} 1.$$

Jeśli teraz podstawimy  $S = n - k(N - 1)$  oraz  $y_i = x_i - (N - 1)$ , to nierówność  $x_i - (N - 1) \geq N - (N - 1)$  wyniesie  $y_i \geq 1$ . Mamy więc do obliczenia sumę

$$\sum_{y_1+y_2+\dots+y_k=S} 1, y_i \geq 1,$$

co już jest definicją problemu kubeczków i słomeczek i wystarczy podstawić do wzoru:

$$\binom{S-1}{k-1} = \binom{n-k(N-1)-1}{k-1}.$$