

[DM 04]

[1/04]

a) Wybieram n kolejnych liter.

$$k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!}$$

b) Wybieramy $n = k$ kolejnych liter.

$$n!$$

c) Co najmniej raz, a więc dzielę n numery miejsc na litery do k worków, a następnie każdemu workowi nadaję literę.

$$S(n, k) \cdot k!$$

d) Dokładnie dwa razy, a więc wybieram dwa miejsca na literę a , potem dwa miejsca na literę b , potem na literę c , itd.

$$\binom{n}{2 \ 2 \ 2 \ \cdots \ 2, \ k \text{ razy}} = \frac{n!}{2^k}$$

[2/04]

a) Liczy się zarówno nr sali, jak i nr miejsca w sali. Dodaję więc do zbioru studentów $n-1$ pilnujących, którzy będą rozdzielali k sal w taki sposób, że jak ułożę ciąg $n+k-1$ studentów i pilnujących, to studenci przed pierwszym pilnującym pójda do pierwszej sali, pomiędzy pierwszym a drugim – do drugiej sali, pomiędzy drugim a trzecim... itd. Na koniec dzielę przez liczbę możliwych ułożeń pilnujących, bo są oni nierozróżnialni.

$$\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$$

b) Liczy się w jakiej sali jest student, więc niech każdy student wybierze sobie salę.

$$k^n$$

c) Liczy się tylko zbiór studentów w danej sali, sale i miejsca w nich są nierozróżnialne. Niech więc każdy student sobie wybierze salę, a następnie usuwamy możliwe permutacje sal

$$\frac{k^n}{k!}$$

[3/04]

a) Liczy się tylko funkcja, więc najpierw wybieramy kapitanów, potem sterników, na końcu majtków.

$$\binom{15}{3} \binom{12}{3} \binom{9}{9}$$

b) Liczy się tylko załoga (tj. kto w niej jest, a nie jej numer), więc najpierw wybieramy pierwszą załogę, potem drugą, na końcu trzecią, a na koniec usuwamy rozróżnialność załóg.

$$\binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5} \cdot \frac{1}{3!}$$

c) Liczy się tylko kto jest kapitanem.

$$\binom{15}{3}$$

d) Ustawiamy w rzędu wszystkich, następnie pierwsze 5 osób to pierwsza załoga, kolejne 5 osób to druga, i kolejne – trzecia. Niech pierwsza osoba w załodze będzie kapitanem. Mamy więc 4 nierozróżnialnych osób w każdej z trzech drużyn. Dzielimy więc przez to odpowiedź. Na koniec usuwamy rozróżnialność 3 załóg.

$$\frac{15!}{(4!)^3 \cdot 3!}$$

[4/04]

a) Sadzamy najpierw wszystkich na ławce. Następnie łączymy początek i koniec ławeczki, więc możliwych jest $2n$ przesunięć stanowiących to samo ustawienie. Następnie dzielimy przez 2, bo interesuje nas zbiór sąsiadów, więc raz sąsiad może być po prawej, a raz po lewej.

$$\frac{(2n)!}{2n \cdot 2}$$

b) Liczy się tylko kto jest z kim w parze. Dobieram w pary wszystkie osoby, a następnie, czynnie je nierozróżnialnymi.

$$\binom{2n}{2 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2, \ n \text{ razy}} \cdot \frac{1}{n!}$$

c) To samo co w podpunkcie a, ale tym razem interesuje nas kto jest po lewo i po prawo, więc nie dzielię przez 2.

$$\frac{(2n)!}{2n}$$

[5/04]

a) Chcemy znaleźć następującą sumę $\sum_{x_2+x_3+x_4+x_5=n} 1$, gdzie $x_i \geq 1$ to liczba mówiąca ile osób dostało ocenę i . Do takich sum stosujemy podejście słomeczek i kubeczków. Mamy 4 słomeczki i n kubeczków. Znamy położenie pierwszej słomeczki, więc wybieramy położenie 3 pozostałych (z pozostałych $n - 1$ miejsc). [Więcej o słomeczkach i kubeczkach w dodatku.]

$$\binom{n-1}{3}$$

b) Dzielę studentów na 4 niepuste podzbiory, a następnie przypisuję podzbiорom oceny.

$$S(n, 4) \cdot 4!$$

[6/04]

a) W ramach drużyn dobieram osoby w pary (pierwszą, drugą, trzecią, czwartą), a następnie dzielię przez ich ilość, by uczynić je nierozróżnialnymi.

$$\left(\binom{8}{2 \ 2 \ 2 \ 2} \cdot \frac{1}{4!} \right)^2$$

b) Liczy się tylko zbiór przeciwników dla danej pary. Więc najpierw dobieramy w pary, następnie dobieramy parze przeciwników, a na koniec czynimy stoliki nierozróżnialnymi.

$$\left(\binom{8}{2 \ 2 \ 2 \ 2} \right)^2 \cdot \frac{1}{4!}$$

c) To samo, co w a, ale tym razem interesuje nas kolejność stolików.

$$\left(\binom{8}{2 \ 2 \ 2 \ 2} \right)^2$$

[7/04]

a)

BRAK ROZW (POKI CO)

b) Interesuje nas suma $\sum_{x_1+x_2+\dots+x_k=n} 1$, gdzie $x_i \geq 1$, więc stosujemy podejście kubeczków i słomeczek. Mamy do wyboru $n-1$ miejsc na $k-1$ słomeczek.

$$\binom{n-1}{k-1}$$

[8/04]

Interesuje nas suma $\sum_{x_1+x_2+\dots+x_k=n} 1$, gdzie $x_i \geq r$, więc stosujemy zmodyfikowane podejście kubeczków i słomeczek. Najpierw niech każdy siostrzeniec dostanie $r-1$ cukierków. Następnie dla pozostałych $n-k(r-1)$ stosujemy standardowe podejście kubeczków i słomeczek. Pozostało do wyboru $n-k(r-1)-1 = n-kr+k-1$ miejsc (cukierków) na $k-1$ słomeczek.

$$\binom{n-kr+k-1}{k-1}$$

[9/04]

Podobnie jak w zadaniu [3/04], liczy się tylko kto jest szefem danej grupy, a grupy są nierozróżnialne. Ustawiamy więc dzieci w rząd i dzielimy na k grup, po n dzieci, i ustalamy, że pierwsze dziecko będzie szefem. Dzielimy więc dla każdej z grup przez liczbę możliwych ustawień reszty osób $((n-1)!)$, a także czynimy grupy nierozróżnialnymi.

$$\frac{(kn)!}{((n-1)!)^k \cdot k!}$$

Przypadków dla $k=n=2$ będzie $\frac{4!}{((1!)^2 \cdot 2!)} = 4 \cdot 3 = 12$. Niech w podanych ciągach dwie pierwsze liczby oznaczają pierwszą grupę, a dwie kolejne – drugą, przy czym szef stanowi pierwszą osobę w grupie:

12—34, 12—43

21—34, 21—43

13—24, 13—42

31—24, 31—42

14—23, 14—32

41—23, 41—32

[10/04]

Wybieram najpierw szefów, a następnie niech każde dziecko wybierze sobie z którym szefem będzie chciało być w zespole.

$$\binom{kn}{k} \cdot k^{kn-k}$$

[11/04]

1) Dla każdego z 30 worków wybieram parę kul.

$$\binom{60}{2 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2, \ 30 \text{ razy}} = \frac{60!}{2^{30}}$$

2) Worki są nierozróżnialne, więc biorę odpowiedź z 1 i usuwam rozróżnialność worków.

$$\binom{60}{2 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2, \ 30 \text{ razy}} \cdot \frac{1}{30!} = \frac{60!}{2^{30} \cdot 30!}$$

3) Każda kula wybiera sobie do którego worka trafi.

$$30^{60}$$

4) Definicja Liczby Stirlinga.

$$S(60, 30)$$

[12/04]

1) Układam wszystkie kartki w rządę i wkładam pierwsze dwie do pierwszej szuflady, kolejne dwie do drugiej, itd.

$$60!$$

2) To samo co w 1, tylko usuwam rozróżnialność szuflad.

$$\frac{60!}{30!}$$

3) Do kartek dokładamy 29 separatorów. Następnie układamy kartki wraz z separatorami w rządę. Kartki do pierwszego separatora trafiają do pierwszej szuflady. Kartki między pierwszym a drugim separatorem – do drugiej, itd. Na koniec dzielimy przez możliwe permutacje separatorów (poniważ separatory są nierozróżnialne).

$$\frac{(60 + 29)!}{29!}$$

4) Z 30 szuflad wybieramy 6 z nich, a następnie układamy 60 kartek w rzędzie. Każdy segment 10 kartek trafia do innej z tych 6 szuflad.

$$\binom{30}{6} \cdot 60!$$

[13/04]

Wybieramy najpierw po kolei żonę do pierwszego, drugiego, aż do $(n-2)$ -ego małżeństwa. Następnie wybieramy męża do pierwszego, drugiego itd. małżeństwa. Na sam koniec czynimy te małżeństwa nierozróżnialnymi.

$$\begin{aligned} & [n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2] \cdot [(n+2)(n-1) \cdots 6 \cdot 5] \cdot \frac{1}{(n-2)!} = \\ & = \frac{n!}{2!} \cdot \frac{(n+2)!}{4!} \cdot \frac{1}{(n-2)!} = \binom{n}{n-2} \cdot \frac{(n+2)!}{4!} \end{aligned}$$

[14/04]

Możemy dołożyć zero albo przed pierwszą jedynką, albo między pierwszą i drugą, albo między drugą i trzecią, itd. Mamy więc 6 miejsc do dołożenia zer. Załóżmy, że chcemy dołożyć k zer ($k = n - 13$). Wówczas możemy to zrobić na

$$\sum_{x_1+x_2+\cdots+x_6=k} 1, x_i \geq 0$$

sposobów. Skorzystamy z podejścia kubeczków i słomeczek, ale żeby to zrobić musimy lekko zmodyfikować sumę, by konkretne wyrazy ciągu były większe od 0. Dodajmy obustronnie 6 oraz rozbijmy to 6 po lewej stronie na każdy wyraz ciągu po 1:

$$\sum_{(x_1+1)+(x_2+1)+\cdots+(x_6+1)=k+6} 1.$$

Podstawmy $y_i = x_i + 1$, wówczas otrzymamy sumę

$$\sum_{y_1+y_2+\cdots+y_6=k+6} 1, y_i \geq 1,$$

która już na spokojnie da się rozwiązać w sposób kubeczków i słomeczek. Wstawiamy więc pierwszą i z pozostałych $k+5$ miejsc musimy wybrać miejsca na pozostałe 5 słomeczek.

$$\binom{k+5}{5} = \binom{n-13+5}{5} = \binom{n-8}{5}$$

Dodatek

Słomeczki i kubeczki

Ten problem jest bardzo przydatny, kiedy chcemy podzielić n nierozróżnialnych przedmiotów na k niepustych rozróżnialnych grup (różnica z Liczbą Stirlinga jest taka, że w tej liczbie szukamy podziałów n rozróżnialnych elementów na k niepustych nierozróżnialnych podzbiorów). Da się go również wykorzystać, kiedy chcemy podzielić pewną liczbę nierozróżnialnych elementów na k grup o pewnej konkretnej minimalnej liczbie elementów z pomocą podstawienia $y_i = x_i + C$, żeby $y_i \geq 1$.

Rozważmy n kubeczków

U U U U U U U U U U U U U U U U

Weźmy teraz k słomek i wrzućmy je w losowe miejsca (oprócz pierwszej, ona ma ustaloną pozycję jako pierwsza z lewej strony)

⊥ U U U U ⊥ U U U ⊥ U U U ⊥ ⊥ U

Niech teraz k osób wypije picie z kubeczka, w którym znajduje się ich słomka. Następnie niech przeniosą słomki w prawo i powtórzą proces. Jeśli kubeczek na prawo jest opróżniony z zawartości, to nie ma sensu przesuwać się dalej. Ile kubeczków cieczy wypije każda osoba?

W podanym wyżej przykładzie, pierwsza osoba wypije 5 kubeczków cieczy, druga – 4 kubeczki, trzecia – 4 kubeczki, czwarta – 1 kubeczek, a piąta – dwa kubeczki.

Zauważmy, że nawet jeśli słomki ustawimy koło siebie, to każda osoba wypije ciecz z przynajmniej jednego kubeczka.

W ten sposób jednoznacznie podzieliliśmy n kubeczków na k osób, a jedyne co musieliśmy zrobić, to wybrać miejsca na słomki.

Na ile sposobów możemy wybrać miejsca na słomki? Pierwsza słomka ma już swoje miejsce, i jest to pierwszy kubek. Pozostało więc $n - 1$ miejsc i $k - 1$ słomek. Można słomkom przydzielić miejsca na

$$\binom{n-1}{k-1}$$

sposobów.

Problem jest też przydatny, jeśli mamy inny minimalny limit (z zerem włącznie). Wówczas oryginalną sumę

$$\sum_{x_1+x_2+\dots+x_k=n} 1, x_i \geqslant N$$

możemy doprowadzić do postaci z jedynką w nierówności odejmując obustronnie z równania $k \cdot (N - 1)$, i przydzielając każdy z k wyrazów $N - 1$ do innego wyrazu x_i

$$\sum_{(x_1-(N-1))+(x_2-(N-1))+\dots+(x_k-(N-1))=n-k(N-1)} 1.$$

Jeśli teraz podstawimy $S = n - k(N - 1)$ oraz $y_i = x_i - (N - 1)$, to nierówność $x_i - (N - 1) \geqslant N - (N - 1)$ wyniesie $y_i \geqslant 1$. Mamy więc do obliczenia sumę

$$\sum_{y_1+y_2+\dots+y_k=S} 1, y_i \geqslant 1,$$

co już jest definicją problemu kubeczków i słomeczek i wystarczy podstawić do wzoru:

$$\binom{S-1}{k-1} = \binom{n-k(N-1)-1}{k-1}.$$