[DM 04]

[1/04]

a) Wybieram n kolejnych liter.

$$k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!}$$

b) Wybieramy $n = k$ kolejnych liter.

$$n!$$

c) Co najmniej raz, a więc dzielę n numery miejsc na litery do k worków, a następnie każdemu workowi nadaję literę.

$$S(n,k)\cdot k!$$

d) Dokładnie dwa razy, a więc wybieram dwa miejsca na literę a, potem dwa miejsca na literę b, potem na literę c, itd.

$$\binom{n}{2\ 2\ 2\ \cdots\ 2,\ k \text{ razy}} = \frac{n!}{2^k}$$

[2/04]

a) Liczy się zarówno nr sali, jak i nr miejsca w sali. Dodaję więc do zbioru studentów $n-1$ pilnujących, którzy będą rozdzielali k sal w taki sposób, że jak ułożę ciąg $n+k-1$ studentów i pilnujących, to studenci przed pierwszym pilnującym pójdą do pierwszej sali, pomiędzy pierwszym a drugim – do drugiej sali, pomiędzy drugim a trzecim... itd. Na koniec dzielę przez liczbę możliwych ułożeń pilnujących, bo są oni nierozróżnialni.

$$\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$$

b) Liczy się w jakiej sali jest student, więc niech każdy student wybierze sobie salę.

$$k^n$$

c) Liczy się tylko zbiór studentów w danej sali, sale i miejsca w nich są nierozróżnialne.

$$BRAK\ ROZW\ (POKI\ CO)$$

[3/04]

a) Liczy się tylko funkcja, więc najpierw wybieramy kapitanów, potem sterników, na końcu majtków.

$$\binom{15}{3}\binom{12}{3}\binom{9}{9}$$

b) Liczy się tylko załoga (tj. kto w niej jest, a nie jej numer), więc najpierw wybieramy pierwszą załogę, potem drugą, na końcu trzecią, a na koniec usuwamy rozróżnialność załóg.

$$\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}\cdot\frac{1}{3!}$$

c) Liczy się tylko kto jest kapitanem.

$$\binom{15}{3}$$

d) Ustawiamy w rządku wszystkich, następnie pierwsze 5 osób to pierwsza załoga, kolejne 5 osób to druga, i kolejne – trzecia. Niech pierwsza osoba w załodze będzie kapitanem. Mamy więc 4 nierozróżnialnych osób w każdej z trzech drużyn. Dzielimy więc przez to odpowiedź. Na koniec usuwamy rozróżnialność 3 załóg.

$$\frac{15!}{(4!)^3 \cdot 3!}$$

[4/04]

a) Sadzamy najpierw wszystkich na ławce. Następnie łączymy początek i koniec ławeczki, więc możliwych jest $2n$ przesunięć stanowiących to samo ustawienie. Następnie dzielimy przez 2, bo interesuje nas zbiór sąsiadów, wiec raz sąsiad może być po prawej, a raz po lewej.

$$\frac{(2n)!}{2n \cdot 2}$$

b) Liczy się tylko kto jest z kim w parze. Dobieram w pary wszystkie osoby, a następnie, czynie je nierozróżnialnymi.

$$\binom{2n}{2\ 2\ 2\ \cdots\ 2,\ n \text{ razy}} \cdot \frac{1}{n!}$$

c) To samo co w podpunkcie a, ale tym razem interesuje nas kto jest po lewo i po prawo, więc nie dzielę przez 2.

$$\frac{(2n)!}{2n}$$

[5/04]

a) Chcemy znaleźć następującą sumę $\sum_{x_2+x_3+x_4+x_5=n} 1$, gdzie $x_i \geqslant 1$ to liczba mówiąca ile osób dostało ocenę i. Do takich sum stosujemy podejście słomeczek i kubeczków. Mamy 4 słomeczki i n kubeczków. Znamy położenie pierwszej słomeczki, więc wybieramy położenie 3 pozostałych (z pozostałych $n-1$ miejsc). [Więcej o słomeczkach i kubeczkach w dodatku.]

$$\binom{n-1}{3}$$

b) Dzielę studentów na 4 niepuste podzbiory, a następnie przypisuję podzbiorom oceny.

$$S(n,4) \cdot 4!$$

[6/04]

a) W ramach drużyn dobieram osoby w pary (pierwszą, drugą, trzecią, czwartą), a następnie dzielę przez ich ilość, by uczynić je nierozróżnialnymi.

$$\left(\binom{8}{2\ 2\ 2\ 2} \cdot \frac{1}{4!}\right)^2$$

b) Liczy się tylko zbiór przeciwników dla danej osoby pary.

$$BRAK\ ROZW\ (POKI\ CO)$$

c) To samo, co w a, ale tym razem interesuje nas kolejność stolików.

$$\left(\binom{8}{2\ 2\ 2\ 2}\right)^2$$

[7/04]

a)

$$BRAK\ ROZW\ (POKI\ CO)$$

b) Interesuje nas suma $\sum_{x_1+x_2+\cdots+x_k=n} 1$, gdzie $x_i \geqslant 1$, więc stosujemy podejście kubeczków i słomeczek. Mamy do wyboru $n-1$ miejsc na $k-1$ słomeczek.

$$\binom{n-1}{k-1}$$

[8/04]

Interesuje nas suma $\sum_{x_1+x_2+\cdots+x_k=n} 1$, gdzie $x_i \geqslant r$, więc stosujemy zmodyfikowane podejście kubeczków i słomeczek. Najpierw niech każdy siostrzeniec dostanie $r-1$ cukierków. Nastepnie dla pozostałych $n-k(r-1)$ stosujemy standardowe podejście kubeczków i słomeczek. Pozostało do wyboru $n-k(r-1)-1 = n-kr+k-1$ miejsc (cukierków) na $k-1$ słomeczek.

$$\binom{n-kr+k-1}{k-1}$$

[9/04]

Podobnie jak w zadaniu [3/04], liczy się tylko kto jest szefem danej grupy, a grupy są nierozróżnialne. Ustawiamy więc dzieci w rządek i dzielimy na k grup, po n dzieci, i ustalamy, że pierwsze dziecko będzie szefem. Dzielimy więc dla każdej z grup przez liczbę możliwych ustawień reszty osób ($(n-1)!$), a także czynimy grupy nierozróżnialnymi.

$$\frac{kn!}{((n-1)!)^k \cdot k!}$$

Przypadków dla $k = n = 2$ będzie $\frac{4!}{((1)!)^2 \cdot 2!} = 4 \cdot 3 = 12$. Niech w podanych ciągach dwie pierwsze liczby oznaczają pierwszą grupę, a dwie kolejne – drugą, przy czym szef stanowi pierwszą osobę w grupie:

12—34, 12—43
21—34, 21—43
13—24, 13—42
31—24, 31—42
14—23, 14—32
41—23, 41—32

[10/04]

$$BRAK\ ROZW\ (POKI\ CO)$$

[11/04]

1) Dla każdego z 30 worków wybieram parę kul.

$$\binom{60}{2\ 2\ 2\ \cdots\ 2,\ 30\text{ razy}} = \frac{60!}{2^{30}}$$

2) Worki są nierozróżnialne, więc biorę odpowiedź z 1 i usuwam rozróżnialność worków.

$$\binom{60}{2\ 2\ 2\ \cdots\ 2,\ 30\text{ razy}} \cdot \frac{1}{30!} = \frac{60!}{2^{30} \cdot 30!}$$

3)

$$BRAK\ ROZW\ (POKI\ CO)$$

4) Definicja Liczby Stirlinga.

$$S(60, 30)$$

[12/04]

1) Układam wszystkie kartki w rządek i wkładam pierwsze dwie do pierwszej szuflady, kolejne dwie do drugiej, itd.

$$60!$$

2) To samo co w 1, tylko usuwam rozróżnialność szuflad.

$$\frac{60!}{30!}$$

3) Do kartek dokładamy 29 separatorów. Następnie układamy kartki wraz z separatorami w rządek. Kartki do pierwszego separatora trafiają do pierwszej szuflady. Kartki między pierwszym a drugim separatorem – do drugiej, itd. Na koniec dzielimy przez możliwe permutacje separatorów (poniważ separatory są nierozróżnialne).

$$\frac{(60 + 29)!}{29!}$$

4) Z 30 szuflad wybieramy 6 z nich, a nastepnie układamy 60 kartek w rządku. Każdy segment 10 kartek trafia do innej z tych 6 szuflad.

$$\binom{30}{6} \cdot 60!$$

[13/04]

Wybieramy najpierw po kolei żonę do pierwszego, drugiego, aż do $(n-2)$-ego małżeństwa. Następnie wybieramy męża do pierwszego, drugiego itd. małżeństwa. Na sam koniec czynimy te małżeństwa nierozróżnialnymi.

$$[n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2] \cdot [(n+2)(n-1)\cdots 6 \cdot 5] \cdot \frac{1}{(n-2)!} =$$

$$= \frac{n!}{2!} \cdot \frac{(n+2)!}{4!} \cdot \frac{1}{(n-2)!} = \binom{n}{n-2} \cdot \frac{(n+2)!}{4!}$$

[14/04]

Możemy dołożyć zero albo przed pierwszą jedynką, albo między pierwszą i drugą, albo między drugą i trzecią, itd. Mamy więc 6 miejsc do dołożenia zer. Załóżmy, że chcemy dołożyć k zer ($k = n - 13$). Wówczas możemy to zrobić na

$$\sum_{x_1+x_2+\cdots+x_6=k} 1, x_i \geqslant 0$$

sposobów. Skorzystamy z podejścia kubeczków i słomeczek, ale żeby to zrobić musimy lekko zmodyfikować sumę, by konkretne wyrazy ciągu były większe od 0. Dodajmy obustronnie 6 oraz rozbijmy to 6 po lewej stronie na każdy wyraz ciągu po 1:

$$\sum_{(x_1+1)+(x_2+1)+\cdots+(x_6+1)=k+6} 1.$$

Podstawmy $y_i = x_i + 1$, wówczas otrzymamy sumę

$$\sum_{y_1+y_2+\cdots+y_6=k+6} 1, y_i \geqslant 1,$$

która już na spokojnie da się rozwiązać w sposób kubeczków i słomeczek. Wstawiamy więc pierwszą i z pozostałych $k + 5$ miejsc musimy wybrać miejsca na pozostałe 5 słomeczek.

$$\binom{k+5}{5} = \binom{n-13+5}{5} = \binom{n-8}{5}$$

Dodatek

Słomeczki i kubeczki

Ten problem jest bardzo przydatny, kiedy chcemy podzielić n nierozróżnialnych przedmiotów na k niepustych rozróżnialnych grup (różnica z Liczbą Stirlinga jest taka, że w tej liczbie szukamy podziałów n rozróżnialnych elementów na k niepustych nierozróżnialnych podzbiorów). Da się go również wykorzystać, kiedy chcemy podzielić pewną liczbę nierozróżnialnych elementów na k grup o pewnej konkretnej minimalnej liczbie elementów z pomocą podstawienia $y_i = x_i + C$, żeby $y_i \geqslant 1$.

Rozważmy n kubeczków

$$\cup\ \cup\ \cup\ \cup\ \cup\ \cup\ \cup\ \cup\ \cup\ \cup\ \cup\ \cup\ \cup\ \cup\ \cup\cup$$

Weźmy teraz k słomek i wrzućmy je w losowe miejsca (oprócz pierwszej, ona ma ustaloną pozycję jako pierwsza z lewej strony)

$$\perp\ \cup\ \cup\ \cup\ \cup\perp\ \cup\ \cup\ \cup\ \perp\ \cup\ \cup\ \cup\ \perp\perp\cup$$

Niech teraz k osób wypije picie z kubeczka, w którym znajduje się ich słomka. Następnie niech przeniosą słomki w prawo i powtórzą proces. Jeśli kubeczek na prawo jest opróżniony z zawartości, to nie ma sensu przesuwać się dalej. Ile kubeczków cieczy wypije każda osoba?

W podanym wyżej przykładzie, pierwsza osoba wypije 5 kubeczków cieczy, druga – 4 kubeczki, trzecia – 4 kubeczki, czwarta – 1 kubeczek, a piąta – dwa kubeczki.

Zauważmy, że nawet jeśli słomki ustawimy koło siebie, to każda osoba wypije ciecz z przynajmniej jednego kubeczka.

W ten sposób jednoznacznie podzieliliśmy n kubeczków na k osób, a jedyne co musieliśmy zrobić, to wybrać miejsca na słomki.

Na ile sposobów możemy wybrać miejsca na słomki? Pierwsza słomka ma już swoje miejsce, i jest to pierwszy kubek. Pozostało więc $n-1$ miejsc i $k-1$ słomek. Można słomkom przydzielić miejsca na

$$\binom{n-1}{k-1}$$

sposobów.

Problem jest też przydatny, jeśli mamy inny minimalny limit (z zerem włącznie). Wówczas oryginalną sumę

$$\sum_{x_1+x_2+\cdots+x_k=n} 1, x_i \geqslant N$$

możemy doprowadzić do postaci z jedynką w nierówności odejmując obustronnie z równania $k\cdot(N-1)$, i przydzielając każdy z k wyrazów $N-1$ do innego wyrazu x_i

$$\sum_{(x_1-(N-1))+(x_2-(N-1))+\cdots+(x_k-(N-1))=n-k(N-1)} 1.$$

Jeśli teraz podstawimy $S=n-k(N-1)$ oraz $y_i = x_i-(N-1)$, to nierówność $x_i-(N-1) \geqslant N-(N-1)$ wyniesie $y_i \geqslant 1$. Mamy więc do obliczenia sumę

$$\sum_{y_1+y_2+\cdots+y_k=S} 1, y_i \geqslant 1,$$

co już jest definicją problemu kubeczków i słomeczek i wystarczy podstawić do wzoru:

$$\binom{S-1}{k-1} = \binom{n-k(N-1)-1}{k-1}.$$