1 Szeregi liczbowe - wprowadzenie

Definicja 1 *Szereg liczbowy (nieskończony szereg liczbowy) jest sumą elementów ciągu liczbowego:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *są wyrazami szeregu.*

Jeśli elementy ciągu $a_i \in R$, dla $1 \leqslant i \leqslant n$ są liczbami rzeczywistymi, to szereg nazywa się szeregiem liczbowym rzeczywistym.
Sumą częściową nazywa się sumę:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

Więc $\{S_n\}$ jest ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, takim, że:

$$S_1 = a_1;$$

$$S_2 = a_1 + a_2;$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3;$$

$$\ldots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n;$$

$$\ldots$$

Definicja 2 *Szereg liczbowy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nazywa się zbieżnym (zbieżnym do* $S \in R$*) jeśli ciąg sum częściowych jest zbieżny:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = S$$

Definicja 3 *Szereg liczbowy nazywa się rozbieżnym jeśli nie jest szeregiem zbieżnym.*

Twierdzenie 1 *Warunkiem koniecznym zbieżności każdego szeregu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Co łątwo wykazać, bo:
$a_n = S_n - S_{n-1}$
Więc:
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0 - 0 = 0.$

Twierdzenie 2 *Jeśli dany jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i stała c, to jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to również $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ jest zbieżny.*

Co łatwo wykazać, bo jeśli:
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$
to:
$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n = cS$

Twierdzenie 3 *Jeśli dany jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i stała $c \neq 0$, to jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to również $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ jest rozbieżny.*

Twierdzenie 4 *Jeśli dane są szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, to jeśli są zbieżne to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ też jest zbieżny.*

Co łatwo wykazać, bo jeśli:
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$
$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$
to:
$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S + T$

Twierdzenie 5 *Jeśli dane są szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, to jeśli są zbieżne to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ też jest zbieżny.*

Co łatwo wykazać, bo jeśli:
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$
$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$
to:
$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S - T$

2 Wybrane rodzaje szeregów

Podczas badania zbieżności szeregów rozróżnia się "dwie kategorie" szeregów:

1. o wyrazach nieujemnych, czyli:
$$\forall_{0\leqslant i\leqslant n} \quad a_i \geqslant 0;$$

2. szeregi przemienne, czyli takie, których wyrazy na przemian są ujemne i dodatnie:
$$\forall_{0\leqslant i\leqslant (n-1)} \quad a_i \cdot a_{i+1} < 0;$$

Są oczywiście szeregi, które nie należą do żadnej z tych grup.

2.1 Szereg arytmetyczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 + (n-1)\cdot r$$

jest zawsze rozbieżny. Nietrudno zauważyć, że jeśli:

- $a \geqslant 0$ i $r \geqslant 0$, to szereg rozbieżny do $+\infty$;
- $a \leqslant 0$ i $r \leqslant 0$, to szereg rozbieżny do $-\infty$;
- $a \geqslant 0$ i $r \leqslant 0$, wówczas skończona ilość wyrazów jest dodatnia i szereg rozbieżny do $-\infty$;
- $a \leqslant 0$ i $r \geqslant 0$, wówczas skończona ilość wyrazów jest ujemna i szereg rozbieżny do $+\infty$;

2.2 Szereg geometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$$

jest rozbieżny dla $|q| > 1$, bo nie spełnia warunku koniecznego. Jeśli zaś $|q| < 1$, wówczas szereg jest zbieżny do $S = \frac{a}{1-q}$.
Można to wykazać:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$$

$$qS_n = aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n$$

$$S_n - qS_n = a - aq^n$$

Stąd

$$S_n(1-q) = a(1-q^n)$$

Co daje:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

Czyli:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

2.3 Szereg harmoniczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny do $+\infty$, co można udowodnić wprowadzając pojęcie reszty R_n szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = S_n + R_n$$

Stąd:

$$R = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = 0.$$

Obliczając resztę szeregu harmonicznego, która nie dąży do 0 ($R > \frac{1}{2}$), stwierdza się, że szereg jest rozbieżny do $+\infty$.

2.4 Szereg harmoniczny rzędu α

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

jest szeregiem zbieżnym dla $\alpha > 1$, zaś rozbieżnym dla $\alpha = 1$, co wynika z poprzedniego podpunktu i rozbieżnym dla $\alpha < 1$, bo nie spełnia warunku koniecznego.

3 Kryteria zbieżności szeregów

3.1 Kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów

Jeśli iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ elementów danego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, od pewnego miejsca i, gdzie $i \geqslant 1$ jest zawsze:

- mniejszy od pewnej stałej $p < 1$ to szereg jest zbieżny;
- większy lub równy pewnej stałej $p \geqslant 1$ to szereg jest rozbieżny;

Wnioski:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, szereg zbieżny;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+}}{a_n} > 1$, szereg rozbieżny;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+}}{a_n} = 1$, zbieżność/rozbieżność szeregu nie jest znana (należy zastosować inne kryterium badania zbieżności);

Przykład 1 *Zbadać zbieżność szeregu:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}.$$

Rozwiązanie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}}}{\frac{n^10}{10^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n^{10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10} \cdot (\frac{n+1}{n})^{10} = \frac{1}{10}.$$

Szereg zbieżny.

3.2 Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów

Jeśli n-ty pierwiastek z a_n $\sqrt[n]{a_n}$ elementu danego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, (dla prawie wszystkich wyrazów ciągu, za wyjątkiem co najwyżej skończonej ilości) jest zawsze:

- mniejszy od pewnej stałej $p < 1$ to szereg jest zbieżny;
- większy lub równy pewnej stałej $p \geqslant 1$ to szereg jest rozbieżny;

Wnioski:

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, szereg zbieżny;
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, szereg rozbieżny;
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, zbieżność/rozbieżność szeregu nie jest znana (należy zastosować inne kryterium badania zbieżności);

Uwaga 1 *Kryterium Cauchy'ego jest silniejsze niż kryterium d'Amberta.*

Przykład 2 *Zbadać zbieżność szeregu:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n}.$$

Rozwiązanie:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\log n}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log n} = \frac{1}{2}.$$

Szereg zbieżny.

3.3 Kryterium całkowe

Jeśli jest dana nierosnąca i nieujemna funkcja f na przedziale $[i, \infty)$, to szereg:

$$\sum_{n=i}^{\infty} f(n)$$

i całka

$$\int_i^{\infty} f(x)$$

są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Przykład 3 *Zbadać zbieżność szeregu:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$$

Rozwiązanie:
Jest więc dana funkcja $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$. Funkcja f, przyjmuje wartości dodatnie jest funkcją malejącą, zatem wyznacza się całkę:

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}$$

Nim zostanie policzona dana całka niewłaściwa, wyznaczona zostanie całka nieoznaczona (metoda: przez podstawianie):

$$t = -x^2, \qquad dt = -2xdx$$

Zatem:

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{e^{-t}} = \frac{1}{2} \int e^t = e^t + C, \qquad C \in R.$$

Stąd:

$$\int \frac{x}{e^{x^2}} = e^{-x^2} + C \qquad C \in R.$$

Całka niewłaściwa:

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{a \to \infty} \int_1^a \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{a \to \infty} (e^{-a^2} - e^{-1}) = -\frac{1}{e}.$$

3.4 Kryterium ilorazowe

Jeśli są dane dwa szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zachodzi:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = p,$$

gdzie $p \in (0, \infty)$, to oba szeregi są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

Przykład 4 *Zbadać zbieżność szeregu:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$$

Rozwiązanie:
Niech będzie także dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
Granica ilorazu $n-$ *tych wyrazów tych szeregów wynosi:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2-n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 - n} \cdot n^2 = 1,$$

a więc skoro $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *jest zbieżny, to również szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$ *jest zbieżny.*

3.5 Kryterium porównawcze

Jeśli są dane dwa szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ i jeśli dla każdych $n-$tych wyrazów szeregu, zaczynając od $i-$tych, $i \leqslant 1$, zachodzi nierówność:

$$a_n \leqslant b_n$$

to jeśli wiadomo, że:

1. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ również jest zbieżny;
2. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ również jest rozbieżny;

Przykład 5 *Zbadać zbieżność szeregu:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}.$$

Rozwiązanie:
Nietrudno zauważyć, że skoro:

$$\forall_n \log n < n,$$

to:

$$\forall_n \frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}.$$

Wiadomo, że szrereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *jest rozbieżny, zatem również* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ *jest rozbieżny.*

Uwaga 2 *TO KRYTERIUM JEST RÓWNIEŻ PRAWDZIWE DLA SZEREGÓW O WYRAZACH NIEDODATNICH!*

4 Zadania

4.1 Wyznaczyć sumy szeregów:

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^n;$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n+3};$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 6^n}{9^n};$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^n + 3 \cdot 6^n}{9^n};$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n}{4^n};$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n};$$

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2n+1}{2n+3};$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n(n+1)};$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)};$$

10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(2n+1)(2n+3)};$$

11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1}{n+1}} - 2^{\frac{1}{n+2}};$$

12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[2n+1]{3} - \sqrt[2n+3]{3};$$

4.2 Zbadać zbieżność szeregów:

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{-n+1};$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1};$$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1};$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n^3|}{n^3};$$

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n};$$

6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n};$$

7.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{10^n};$$

8.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 \log n};$$

9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10} 3^n}{4^n};$$

10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10} 4^n}{3^n};$$

11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^{10} 3^n};$$

12.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n \log n};$$

13.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n \log^2 n};$$

14.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n};$$

15.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n!}{n^n};$$

16.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n!}{3^n \cdot n^n};$$

17.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{\sqrt{n}+3\sqrt[3]{n}}};$$

18.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\sqrt{n}+3\sqrt[3]{n}}};$$

19.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3\sqrt[3]{n}}};$$

20.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}};$$

21.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!};$$

22.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!^2)}{(2n)!};$$

23.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n!}}{n!};$$

24.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot(2n)!}{(3n)!};$$

25.

$$\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n^2-15}\right)^n;$$

26.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n};$$

27.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1}00}{100^{n}};$$

28.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}+n}{n^{n}+3};$$

29.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n}}{2^{n}+3^{n}};$$

30.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}+4^{n}}{2^{n}+5^{n}};$$

31.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n}-3^{n}}{5^{n}-4^{n}};$$

32.

$$\sum_{n=1}^{\infty}1-\sqrt[n]{2};$$

33.

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n};$$

34.

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{2}\cdot 2^{n};$$

35.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^{2}};$$

36.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+2}{n+1})^{n^2};$$

37.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{n+2})^{n^2};$$

38.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \ln(\frac{2n+4}{2n+1});$$

39.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}+n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}+n}};$$

40.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^n}{n^{2n}+3};$$

41.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^n}{n^{3n}+3};$$

42.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^{n^2}+3};$$

43.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \log^{-n} n;$$

44.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{n+1}{n})^{2n^2}}{7^n};$$

45.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{n+1}{n})^{2n^2}}{3^n};$$

46.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n};$$

47.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n^2}-\sqrt{1-n^2}}{n};$$

48.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{1}{n^2}}}{n^2};$$

49.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{n}};$$

50.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{3}{n^2};$$

51.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n};$$

52.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos \frac{1}{n^2};$$

4.3 Zamień ułamki dziesiętne (okresowe) na zwykłe:

1.

$$0.(3)$$

2.

$$0.21(2)$$

3.

$$0.(2)$$

4.

$$0.(12)$$

5.

$$0.(9)$$