

Jakub Żuk

2 lutego 2025

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>1</b>
1.1	Wstęp do projektu . . . . .	1
1.2	Opis matematyczny problemu . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Podejście numeryczne</b>	<b>2</b>
2.1	Dyskretyzacja danych . . . . .	2
2.2	Symulacja . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Jak ustawienie źródeł ciepła wpływa na efektywność ogrzewania mieszkania?</b>	<b>3</b>
3.1	Opis doświadczenia i plan mieszkania . . . . .	3
3.2	Wyniki symulacji . . . . .	5
3.3	Wnioski . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Czy wyłączanie kaloryferów przed wyjściem do pracy pozwoli oszczędzić na ogrzewaniu?</b>	<b>7</b>
4.1	Opis doświadczenia i plan mieszkania . . . . .	7
4.2	Wyniki symulacji dla mieszkania z równomiernym układem grzejników . . . . .	9
4.3	Wnioski . . . . .	15
4.4	Kaloryfery pod oknami . . . . .	16
4.5	Wyniki symulacji dla mieszkania z grzejnikami pod oknami . . . . .	16
	<b>Bibliografia</b>	<b>20</b>

## 1 Wprowadzenie

### 1.1 Wstęp do projektu

Celem projektu było zbadanie metodami numerycznymi rozchodzenia się ciepła w mieszkaniu. Zagadnienie to zostało zamodelowane przy użyciu równania ciepła z odpowiednimi warunkami brzegowymi. Projekt sprowadza się do rozważań na temat dwóch problemów:

1. Jak ustawienie grzejników wpływa na efektywność ogrzewania?
2. Czy wyłączenie grzejników przed wyjściem do pracy pozwala oszczędzić na ogrzewaniu?

## 1.2 Opis matematyczny problemu

Najważniejsze założenia:

- ściany są doskonałymi izolatorami (warunek Neumanna na ścianach)
- okna wcale nie izolują (warunek Dirichleta na oknach)
- włączenie grzejnika o godzinie 0:00 jest pierwszym uruchomieniem grzejnika (temperatura początkowa jest równa temperaturze otoczenia)
- współczynnik dyfuzji wyrażony w jednostkach SI wynosi  $0.025 \frac{m^2}{s}$
- temperatura w przejściach między pokojami jest ustalana jako średnia temperatura w przejściu
- mieszkanie jest dwuwymiarowe (nie bierzemy pod uwagi objętości, tylko powierzchnię)
- grzejniki działają jak ogrzewanie podłogowe, zależą tylko od powierzchni podłogi jaką zajmują
- termostat mierzy średnią temperaturę w pobliżu kaloryfera i działa zgodnie z koncepcją histerezy [1]

Powyższe założenia zapisujemy matematycznie w poniższej postaci:

$$\begin{cases} u_t = \alpha \Delta u + f_i(x, u), & x \in R_i, t \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3\} \\ u = T_{out}(t), & x \in W_i, t \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, N_{windows}\} \\ \nabla u \cdot n = 0, & x \in S_i, t \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, N_{walls}\} \\ u = \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} u \, dx, & x \in D_i, t \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, N_{doors}\} \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

gdzie  $u$  jest temperaturą w punkcie  $x$  i czasie  $t$ . Dolny indeks ( $u_t$  oznacza pochodną cząstkową  $u$  po  $t$ ).

## 2 Podejście numeryczne

### 2.1 Dyskretyzacja danych

Do numerycznego wyrażenia naszego zagadnienia będziemy potrzebowali zmienić notację ciągłą na dyskretną co zaczniemy od wyrażenia rozkładu temperatury w domu w postaci macierzy. Ustalmy parametry symulacji:

- Krok odległości:  $h_x = 0.5m$
- Krok czasu:  $h_t = 0.5s$
- Wymiary domu:  $20 \times 15m$
- Rozważany okres czasu:  $24h = 86400s$

W związku z tym, przy tak ustalonym kroku, rozkład temperatury będzie w czasie  $t$  macierzą o wymiarach  $40 \times 30$ . Macierz tę zapiszemy w postaci długiego wektora w większej macierzy  $u = [u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_n}]$ , której kolumny  $u_{t_i}$  będą reprezentowały temperaturę w całym układzie w czasie  $t_i = t_1 + (i - 1)h_t$ .

Żeby pracować na tak zdyskretyzowanych danych, potrzebujemy wyrazić laplasjan jako macierz drugich pochodnych. Robimy to przy pomocy metody opisanej dokładnie na stronie [3]. Teraz możemy przejść do symulacji.

## 2.2 Symulacja

Program wykonujący symulacje został napisany obiektowo w języku python. Sama symulacja od strony matematycznej jest przeprowadzona w oparciu o metodę różnic skończonych opisaną również na stronie [3].

# 3 Jak ustawienie źródeł ciepła wpływa na efektywność ogrzewania mieszkania?

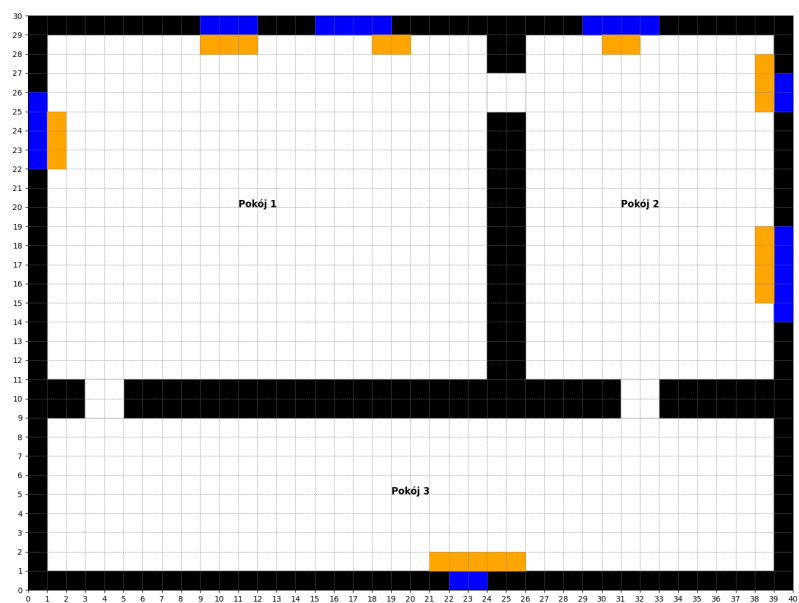
## 3.1 Opis doświadczenia i plan mieszkania

Pierwsze doświadczenie polega na określeniu jakościowym (równomierność i stopień ogrzania mieszkania) i ilościowym (zużyta energia) czy i w jaki sposób położenie źródeł ciepła wpływa na efektywność ogrzewania. Rozważamy dwa przypadki:

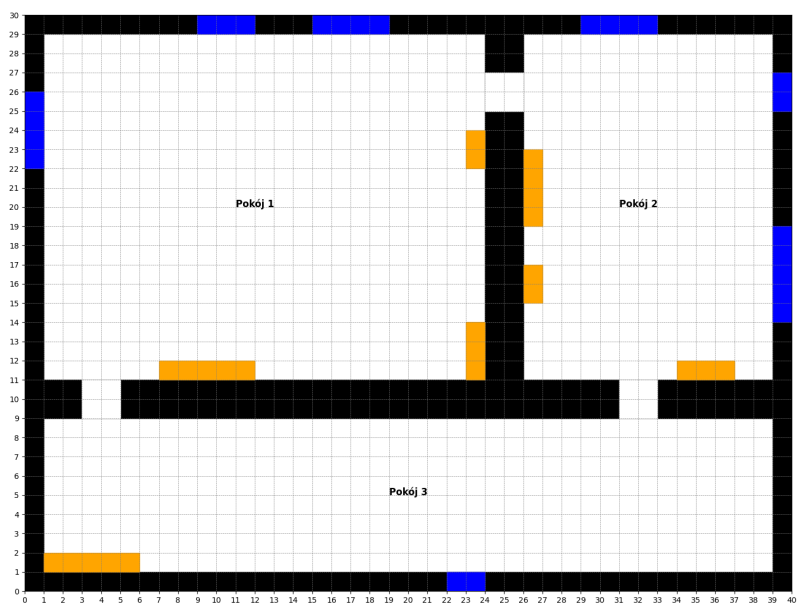
1. Ustawienie grzejników przy oknach
2. Ustawienie grzejników z dala od okien

Poniżej przedstawiamy najważniejsze założenia towarzyszące doświadczeniu:

- temperatura dobowa zmienia się nieznacznie (amplituda wynosi  $4^\circ\text{C}$ )
- zmieniamy jedynie położenie grzejników, ich parametry i rozmiar pozostają niezmienione
- cały dzień staramy się utrzymać temperaturę  $28^\circ\text{C}$  w każdym pokoju (termostat działa zgodnie z założeniami całego projektu)

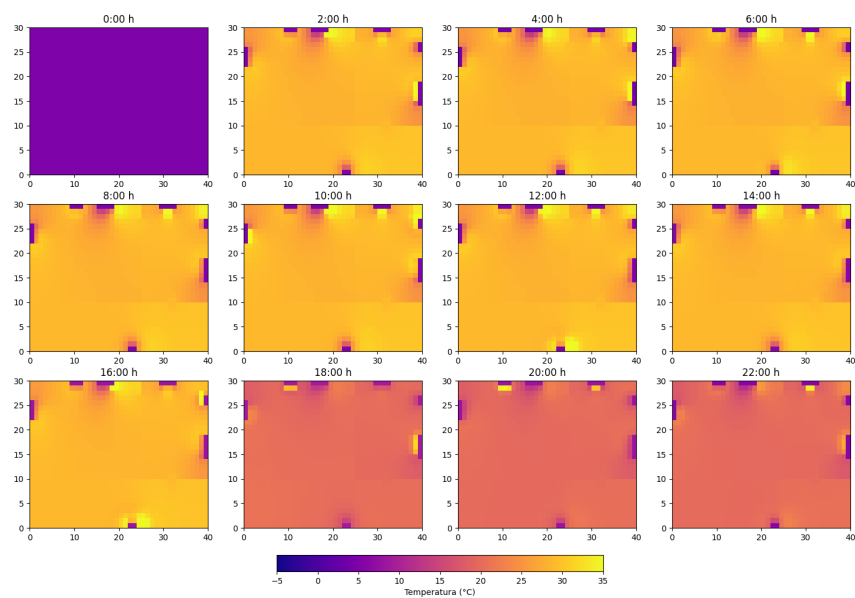


Plan mieszkania gdy kaloryfery znajdują się przy oknach

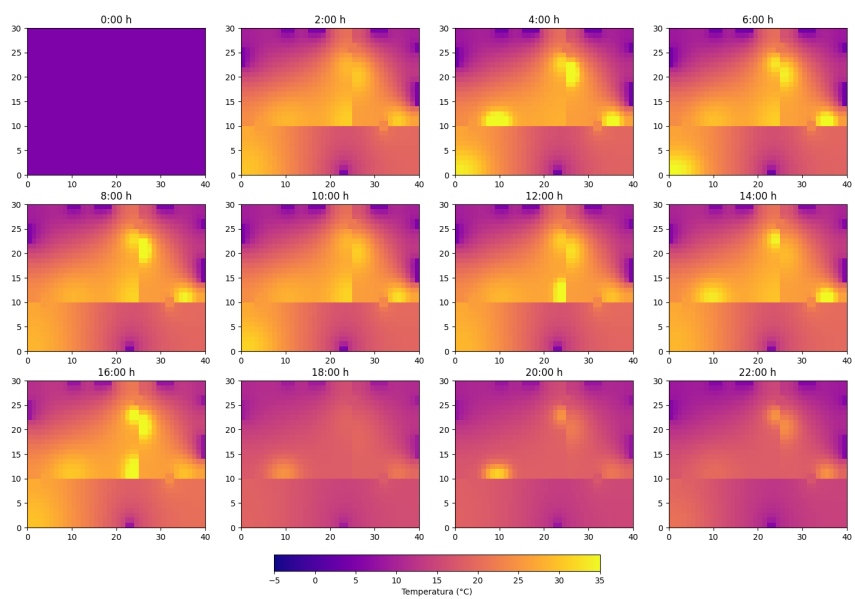


Plan mieszkania gdy kaloryfery znajdują się dalej od okien

## 3.2 Wyniki symulacji



Mapy ciepła mieszkania przez całą dobę dla przypadku ustawienia kaloryferów pod oknami

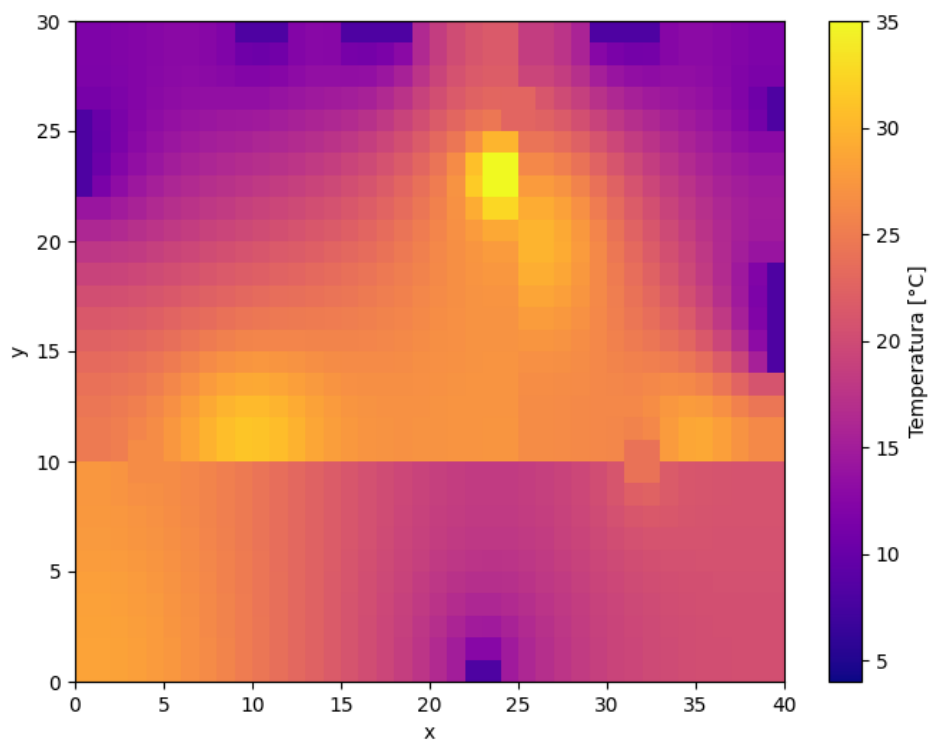


Mapy ciepła mieszkania przez całą dobę dla przypadku ustawienia kaloryferów daleko od okien

Położenie kaloryferów	Zużycie energii [kJ]
pod oknami	7965
dalej od okien	1528

### 3.3 Wnioski

Jak widać po mapach ciepła, zdecydowanie bardziej pożądane efekty otrzymujemy w przypadku gdy kaloryfery znajdują się pod oknami. Rozkład temperatury jest wówczas niemal jednostajny w całym mieszkaniu. W przypadku grzejników z dala od okien mamy bardzo dużą amplitudę temperatur w każdym z pokoiów. Korzystniejsze dla rozkładu temperatury położenie kaloryferów jest jednak okupione dużo większym kosztem, właśnie z powodu niedobrego rozkładu ciepła.



Mapa ciepła mieszkania po ustabilizowaniu się dla przypadku ustawienia kaloryferów daleko od okien

Chociaż średnia temperatura w mieszkaniu jest podobna, znaczna część pomieszczeń jest zbyt zimna, zdecydowanie poniżej pożądanej temperatury. Wynika z tego, że wybór umiejscowienia kaloryferów pod oknami, chociaż znacząco droższy, jest zwyczajnie lepszy, gdyż drugie rozwiązanie nie spełnia jakościowo wymagań stawianych ogrzewaniu w mieszkaniach.

## 4 Czy wyłączanie kaloryferów przed wyjściem do pracy pozwoli oszczędzić na ogrzewaniu?

### 4.1 Opis doświadczenia i plan mieszkania

Następujące doświadczenie będzie polegało na porównaniu zużycia energii (czyli zarazem kosztu ogrzewania) gdy wyłączymy kaloryfer przed wyjściem do pracy/na uczelnię, czy zostawimy włączony. Interesować nas będzie całkowite zużycie energii oraz moment, w którym po powrocie do domu, średnia temperatura wróci do oczekiwanej przez nas temperatury pokojowej przy jednoczesnym zagwarantowaniu minimalnej średniej temperatury  $17^{\circ}\text{C}$  w każdym pomieszczeniu. Poniżej sformułowane zostały najważniejsze założenia towarzyszące doświadczeniu:

- wychodzimy z domu o godzinie 7:00 i wtedy obniżamy maksymalną temperaturę w termostacie
- wracamy do domu o godzinie 17:00 i wtedy przywracamy domyślny tryb na termostacie
- doświadczenie trwa do spełnienia równocześnie dwóch warunków:
  - średnia temperatura w całym domu jest wyższa niż  $18^{\circ}\text{C}$
  - średnia temperatura w każdym pokoju jest wyższa niż  $19^{\circ}\text{C}$

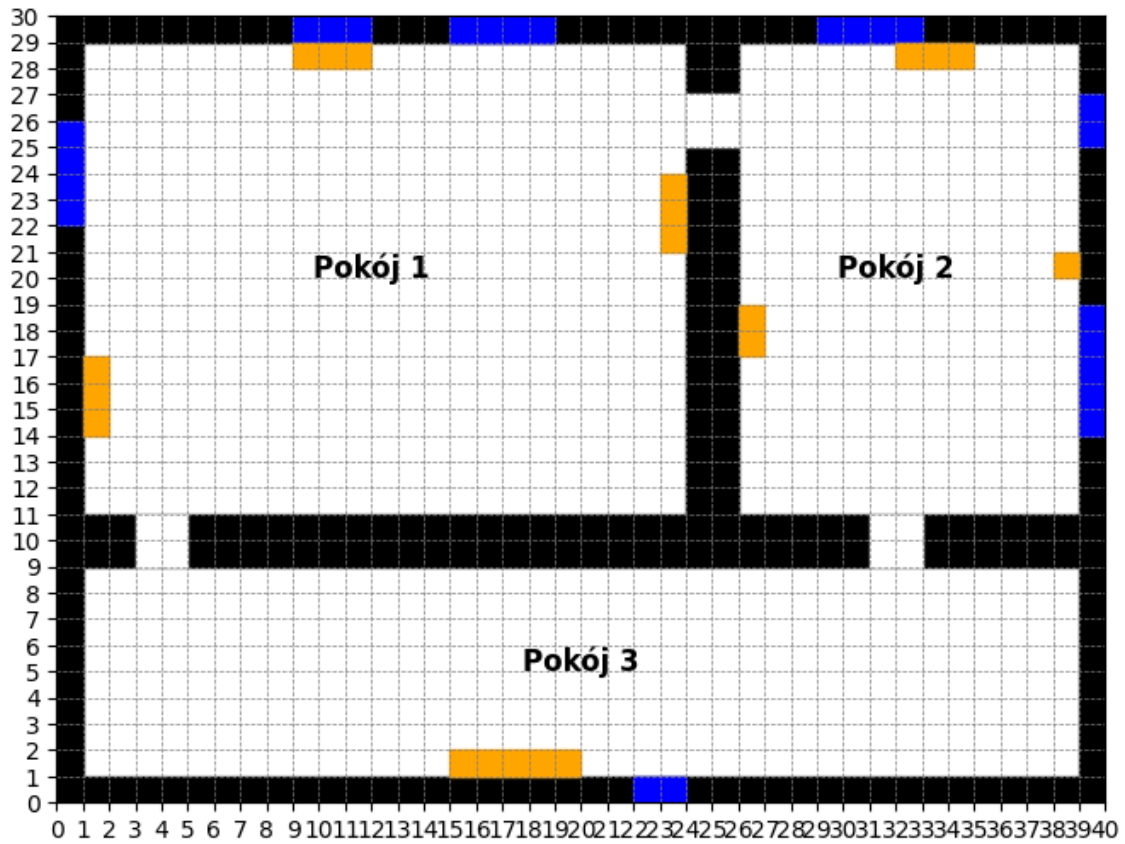
Doświadczenie przeprowadzimy w różnych warunkach pogodowych. Dla uzyskania większych amplitud dobowych temperatury oraz większego zróżnicowania zakresu temperatur, posłużyłem się danymi z Jekaterynburga w dniach 17.04, 27.02 i 17.02 roku 2024. Mają one obrazować kolejno: dzień chłodny, zimny i bardzo zimny.

Ustawienia termostatu są następujące:

Pokrętko	Temperatura maksymalna [ $^{\circ}\text{C}$ ]
0	7
1	12
2	15
3	19
4	23
5	28

Na potrzeby doświadczenia przyjmujemy temperaturę pokojową  $19^{\circ}\text{C}$  i takie wybieramy początkowe ustawienie grzejników (trzęcie pokrętko). Temperatura początkowa w każdym przypadku jest równa temperaturze pokojowej.

Z poprzedniego zadania wiemy, że ustawienie kaloryferów przy oknach zapewnia optymalny rozkład ciepła w mieszkaniu, jednak przy dużym koszcie. Oddalenie od okien powoduje nierównomierny wzrost temperatury, generuje plamy zimna i w efekcie uniemożliwia stabilizację temperatury na pożądanym poziomie a nawet powoduje, że temperatura w pomieszczeniu maleje (termostat mierzy jedynie swoje otoczenie). Z tego powodu w tym doświadczeniu ustawimy kaloryfery na "czwórkę" i zobaczymy jak szybko temperatura osiągnie pokojową i czy równomierne rozmieszczenie kaloryferów w pokoju będzie lepszym podejściem niż kaloryfery przy oknach.



Plan mieszkania z równomiernym rozłożeniem kaloryferów



## 4.2 Wyniki symulacji dla mieszkania z równomiernym układem grzejników

**Chłodny dzień:**

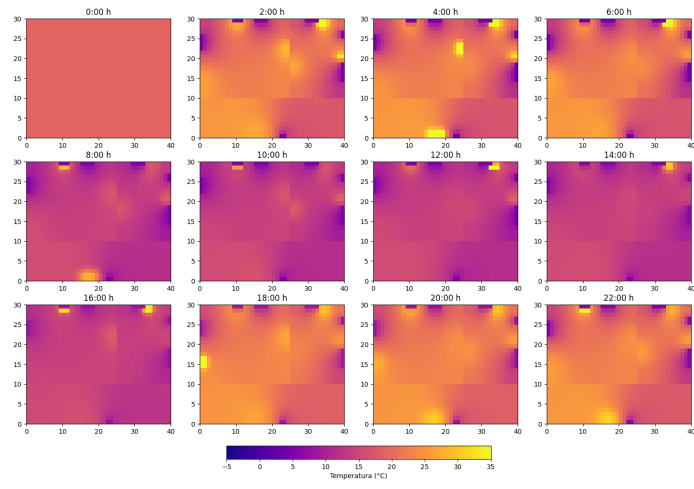
Pokrętło	Temperatura o 7:00 [ $^{\circ}C$ ]	Temperatura o 17:00 [ $^{\circ}C$ ]	Czas [s]	Zużyta energia [kJ]
0	20.44.77	8.10	1112	2166
1	20.44	11.33	898	2611
2	20.44	14.00	697	2856
3	20.44	17.24	200	3168
4	20.44	21.17	0	3551

**Zimny dzień:**

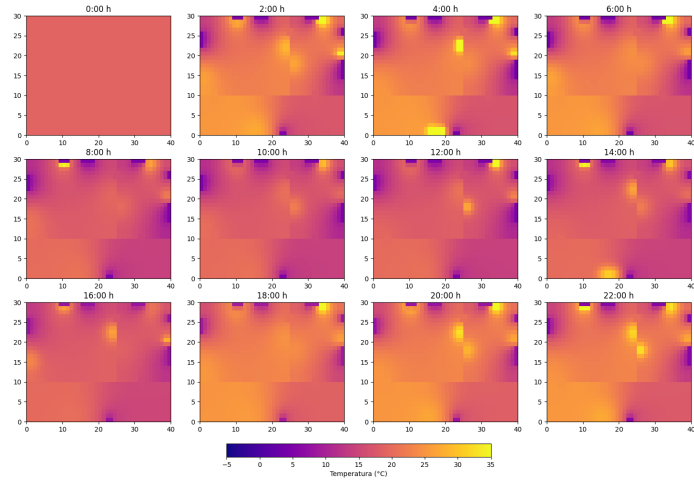
Pokrętło	Temperatura o 7:00 [ $^{\circ}C$ ]	Temperatura o 17:00 [ $^{\circ}C$ ]	Czas [s]	Zużyta energia [kJ]
0	18.67	6.12	1661	3717
1	18.67	10.30	1297	4107
2	18.67	12.97	1068	4337
3	18.67	15.92	600	4640
4	18.67	19.86	0	5034

**Bardzo zimny dzień:**

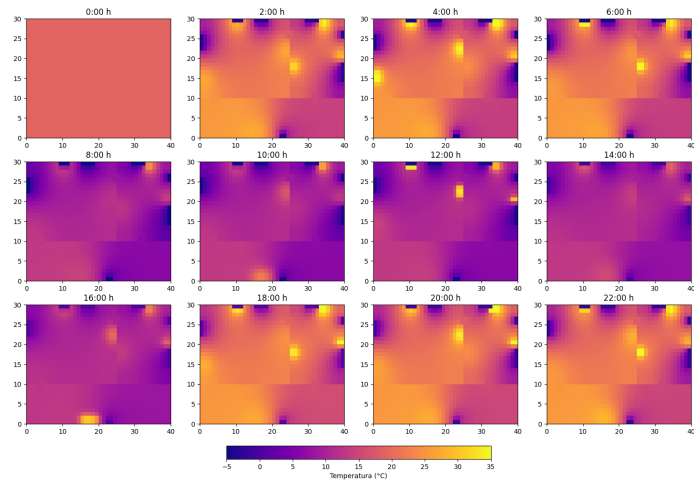
Pokrętło	Temperatura o 7:00 [ $^{\circ}C$ ]	Temperatura o 17:00 [ $^{\circ}C$ ]	Czas [s]	Zużyta energia [kJ]
0	13.20	3.84	—	7012
1	13.20	7.83	—	7400
2	13.20	10.16	—	7635
3	13.20	13.22	—	7946
4	13.20	19.86	0	5034



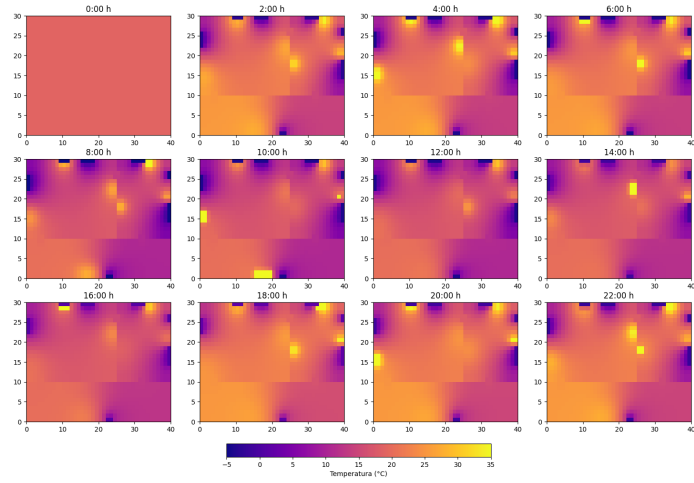
Mapy ciepła mieszkania w chłodny dzień z pokrętką ustawionym na 2



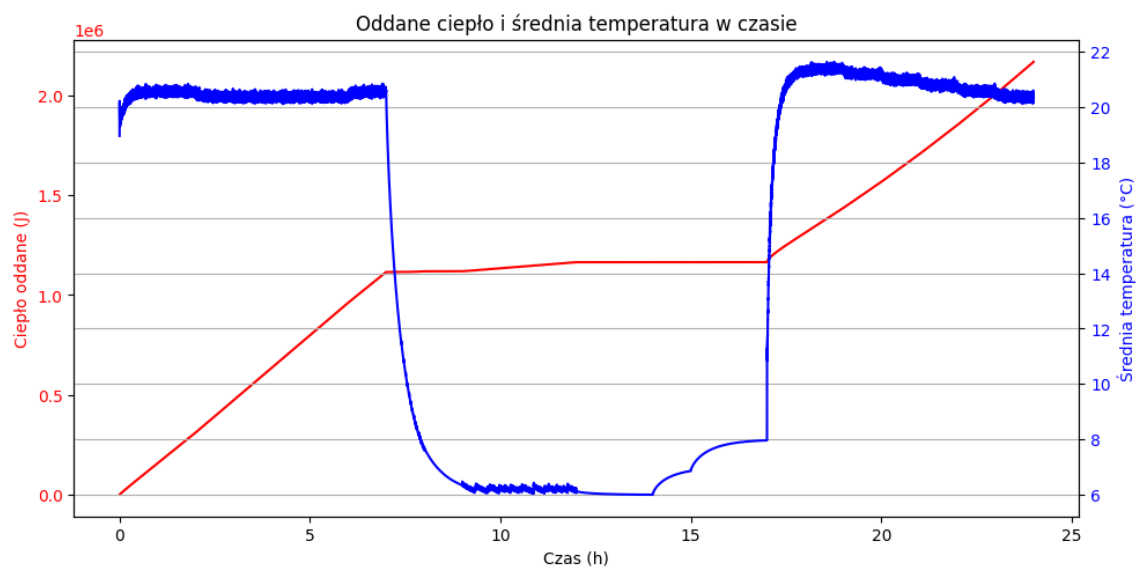
Mapy ciepła mieszkania w chłodny dzień z pokrętką ustawionym na 3



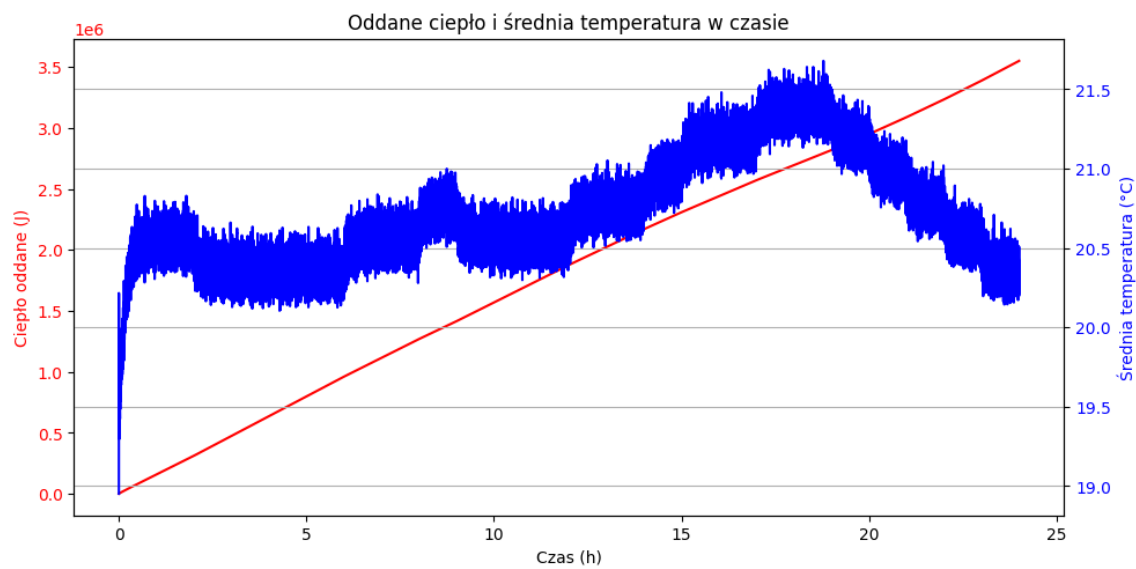
Mapy ciepła mieszkania w zimny dzień z pokrętkiem ustawionym na 1



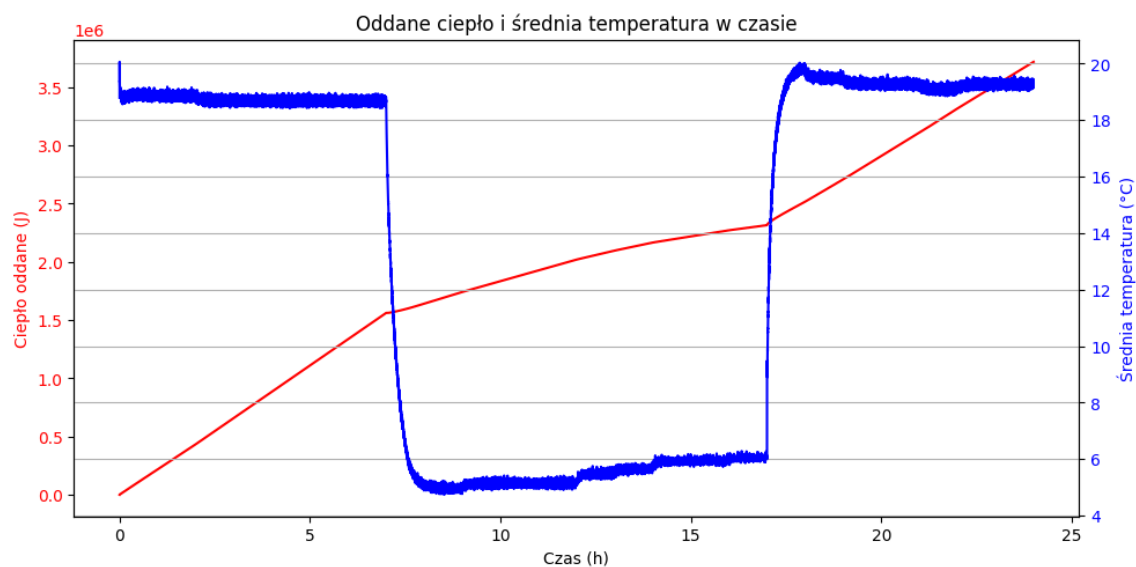
Mapy ciepła mieszkania w zimny dzień z pokrętkiem ustawionym na 3



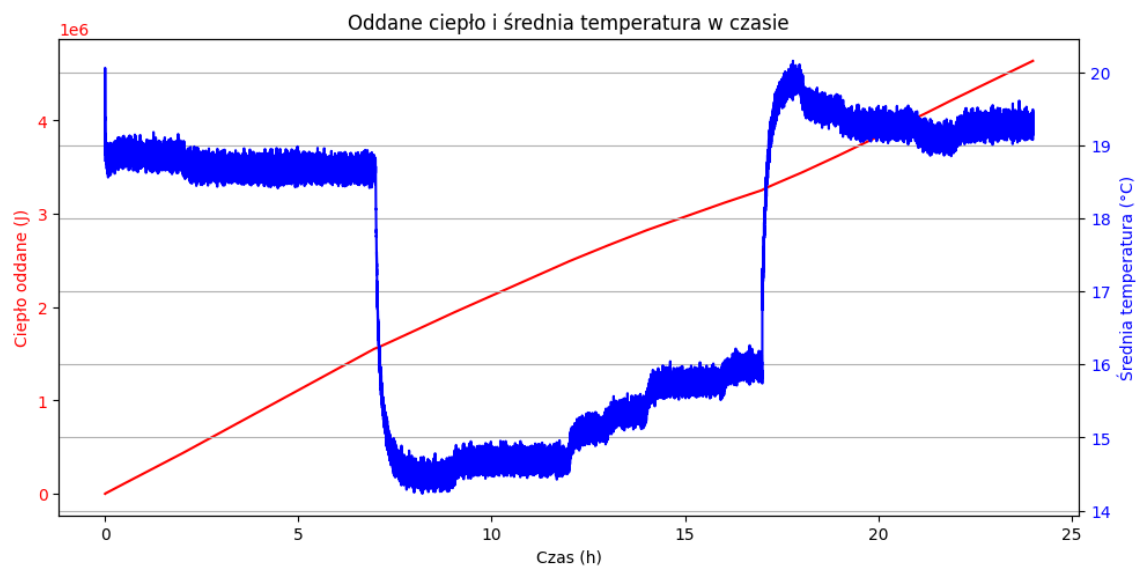
Wykres zużytej energii i średniej temperatury w chłodny dzień z pokrętkiem ustawionym na 0



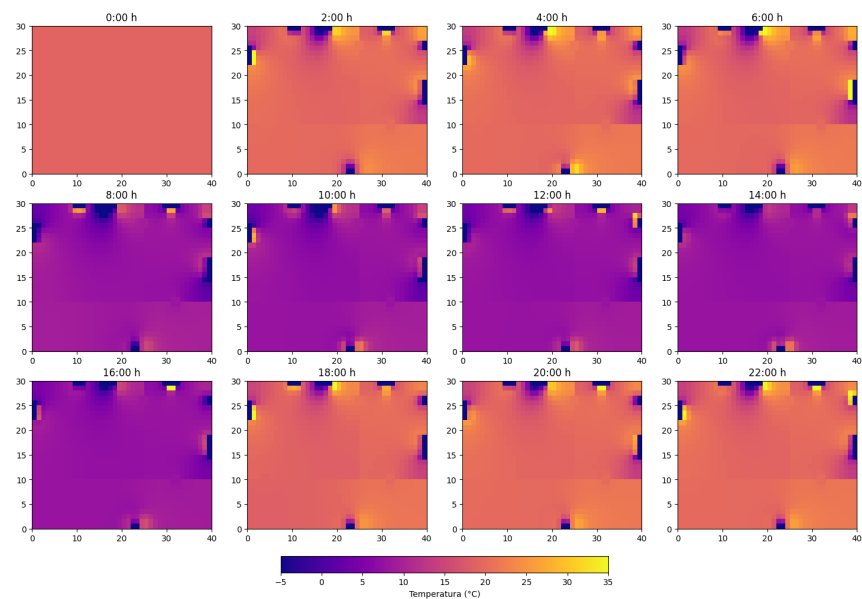
Wykres zużytej energii i średniej temperatury w chłodny dzień z pokrętkiem ustawionym na 4



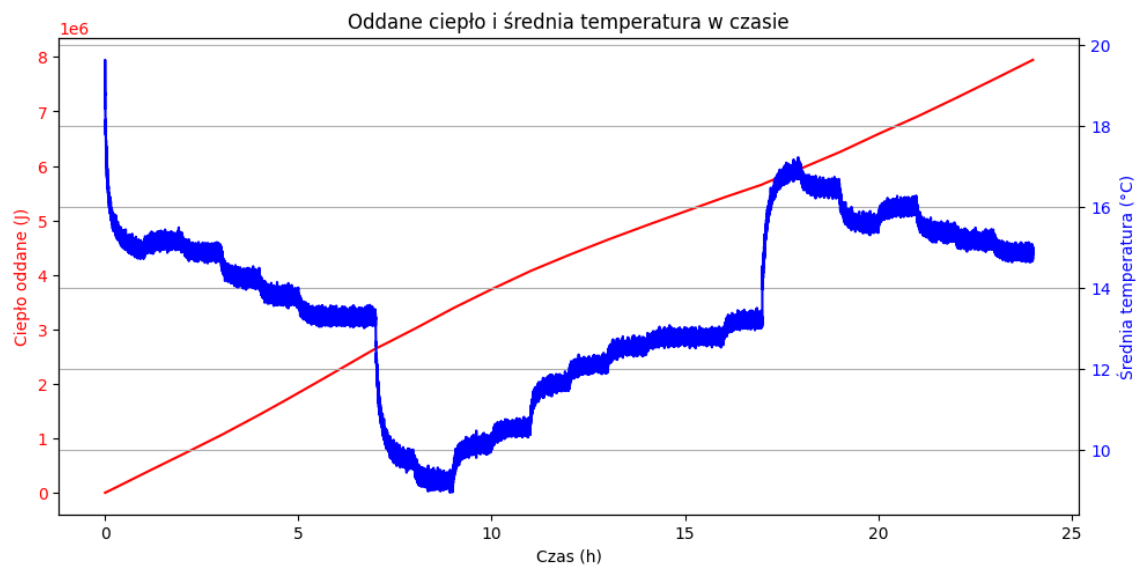
Wykres zużytej energii i średniej temperatury w zimny dzień z pokrętle ustawionym na 0



Wykres zużytej energii i średniej temperatury w zimny dzień z pokrętle ustawionym na 3



Mapy ciepła mieszkania w bardzo zimny dzień z pokrętlą ustawionym na 0



Wykres zużytej energii i średniej temperatury w bardzo zimny dzień z pokrętlą ustawionym na 3

### 4.3 Wnioski

Jak widać po wykresach i mapach ciepła, równomierne rozłożenie źródeł ciepła w pokojach przy naszych założeniach nie spełnia stawianych wymagań. Plamy zimna pozostają i rozkład jest nierównomierny. Można wnioskować, że ustawienie grzejników pod oknami jest optymalne pomimo wysokiego kosztu.

Próbne symulacje wykazały również, że przeprowadzenie doświadczenia z pokrętkiem ustawionym na temperaturę pokojową prowadzi jedynie do oziębienia pokoju przez to jak działa termostat. Nie powinno to dziwić, gdyż bardzo często w domach ustawiamy pokrętkę nawet na "piątkę" nie oczekując jednak temperatury  $28^{\circ}\text{C}$ . Stąd decyzja o domyślnym ustawieniu termostatu na "czwórkę".

Jak widać w powyższych tabelach, w warunkach zadanych w doświadczeniu (założenia projektu, projekt mieszkania i temperatury w Jekaterynburgu) zmniejszanie ogrzewania przed wyjściem jest wskazane, gdyż czasy powrotu do temperatury pokojowej są nieduże. WYjątkiem są dni bardzo zimne, gdzie przy takim układzie kaloryferów w mieszkaniu, utrzymanie temperatury pokojowej staje się niemożliwe.

Zgodnie z oczekiwaniami koszt ogrzewania rośnie radykalnie wraz ze spadkiem temperatury otoczenia, jednak przy włączonych kaloryferach temperatura w mieszkaniu utrzymuje się cały czas na podobnym poziomie wykazując lekką tendencję wzrostową dzięki działaniu termostatu.

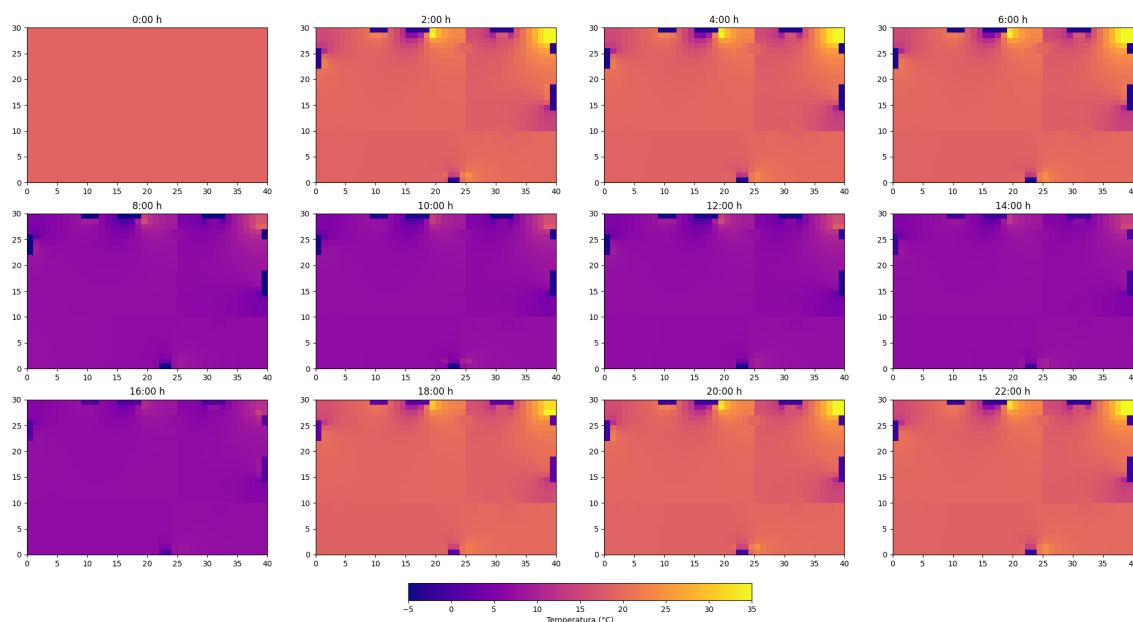
Na wykresie zużytej energii i średniej temperatury w mieszkaniu można zauważyć jak ostro rośnie zużywana energia w krótkich momentach niemal skokowego wzrostu temperatury. Utrzymanie już osiągniętej temperatury ma koszt będący w przybliżeniu funkcją liniową z nachyleniem zależnym od tego jak wysoki poziom temperatury chcemy utrzymać.

## 4.4 Kaloryfery pod oknami

W powyższych przypadkach właściwie za każdym razem, zwłaszcza w najzimniejsze dni, rozkład temperatury jest bardzo niekorzystny. Z poprzedniego doświadczenia wiemy jednak jak spróbować zaradzić takiemu problemowi. Bardzo często w mieszkaniach, zwłaszcza w blokach, kaloryfery znajdują się pod oknami. W pierwszym doświadczeniu wykazaliśmy czemu tak jest. Jednostajny rozkład temperatur w mieszkaniu jest ważniejszy dla użytkownika pomimo znacznie wyższych kosztów.

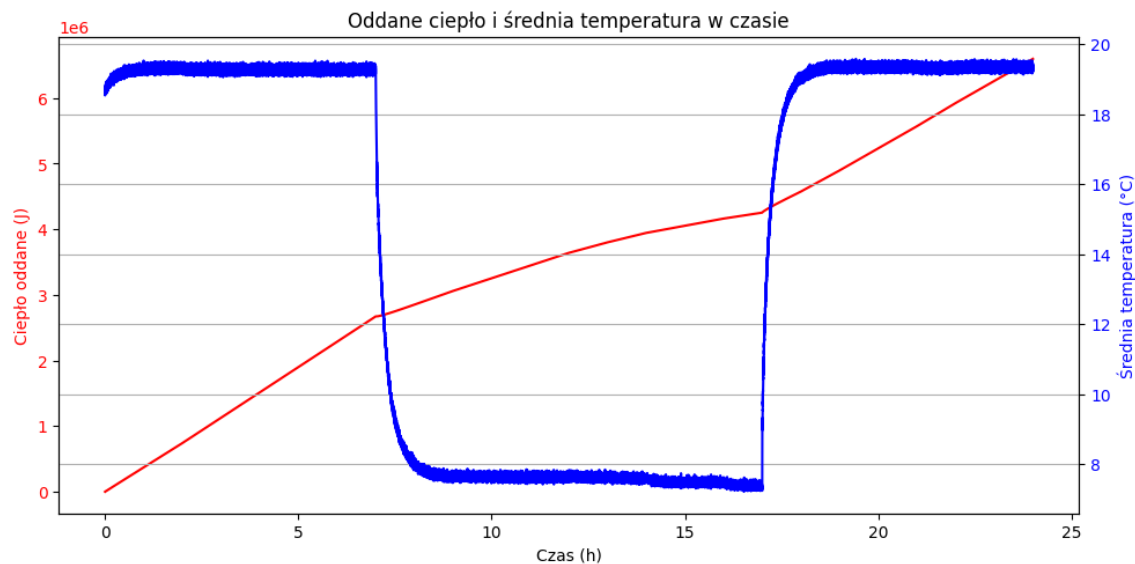
Rozważmy więc ponownie ustawienie kaloryferów pod oknami i przeprowadźmy na takim przypadku doświadczenie z wyciszaniem termostatu na czas nieobecności domowników. Ponownie przypuśćmy, że rozpoczynamy od temperatury pokojowej ( $19^{\circ}\text{C}$ ).

## 4.5 Wyniki symulacji dla mieszkania z grzejnikami pod oknami



Mapy ciepła mieszkania w zimny dzień z pokrętkiem ustawionym na 0





Wykres zużytej energii i średniej temperatury w zimny dzień z pokrętle ustawionym na 0

#### Chłodny dzień:

Pokrętko	Temperatura o 7:00 [ $^{\circ}C$ ]	Temperatura o 17:00 [ $^{\circ}C$ ]	Czas [s]	Zużyta energia [kJ]
0	19.5	8.10	2596	3370
1	19.5	12.36	2193	4310
2	19.5	15.63	1492	4827
3	19.5	19.71	0	5480

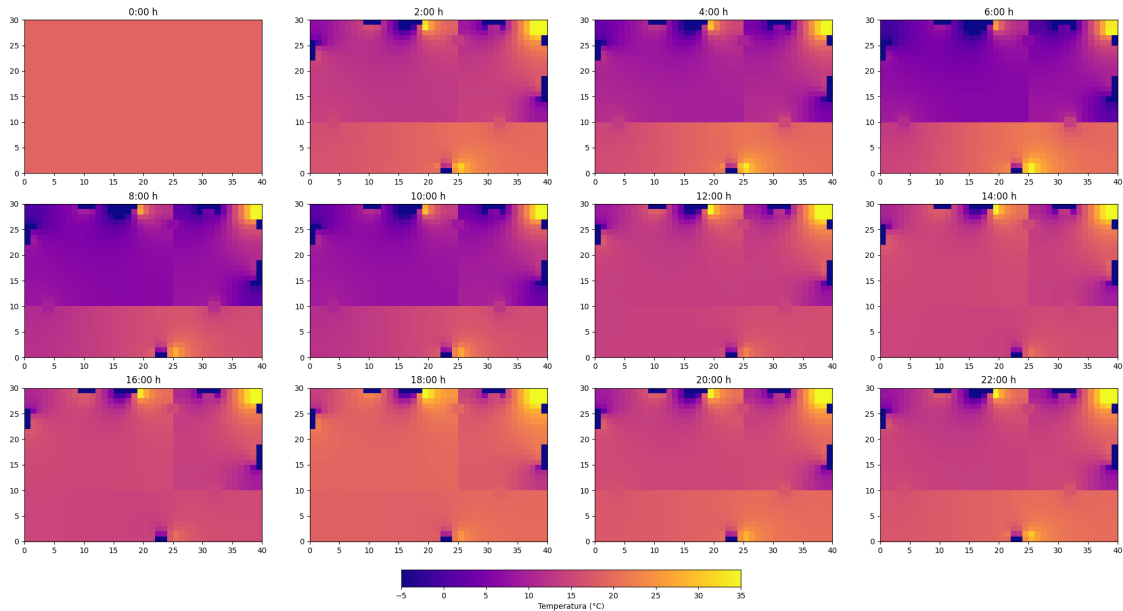
#### Zimny dzień:

Pokrętko	Temperatura o 7:00 [ $^{\circ}C$ ]	Temperatura o 17:00 [ $^{\circ}C$ ]	Czas [s]	Zużyta energia [kJ]
0	19.32	7.50	3008	6598
1	19.32	12.79	2270	7414
2	19.32	14.82	1718	7890
3	19.32	19.43	0	8353

#### Bardzo zimny dzień:

Pokrętko	Temperatura o 7:00 [ $^{\circ}C$ ]	Temperatura o 17:00 [ $^{\circ}C$ ]	Czas [s]	Zużyta energia [kJ]
0	18.63	7.60	4992	13513
1	18.63	12.79	4583	14326
2	18.63	15.34	3723	14810
3	18.63	19.05	0	15467

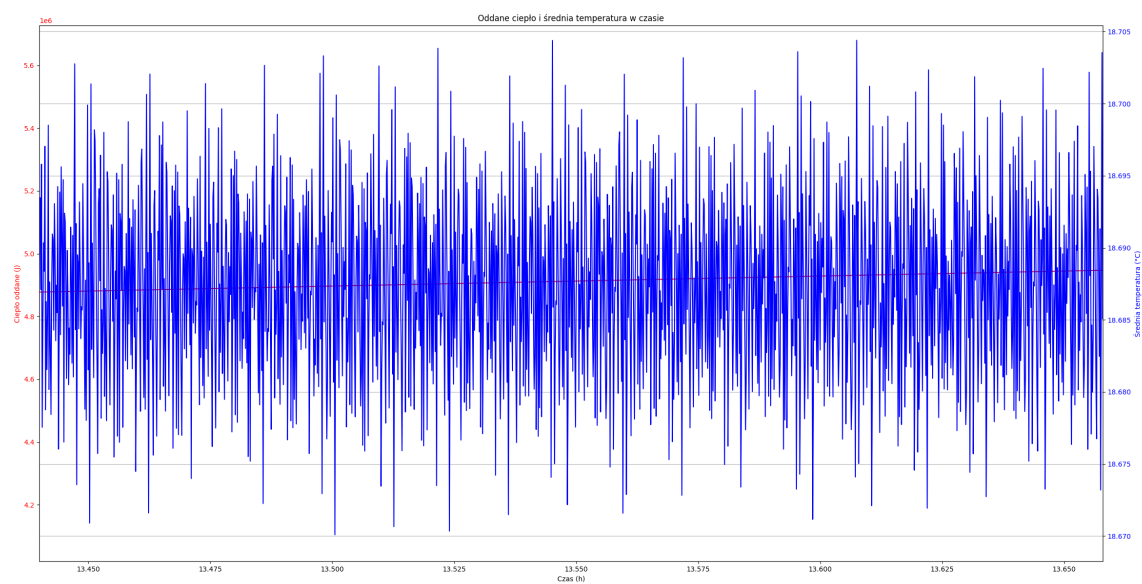
Z powyższej tabelki wnioskujemy, że przy umiarkowanie niskich temperaturach czas oczekiwania na nagrzanie mieszkania robi się uciążliwy, gdyż w przypadku pozostawienia grzejnika na ustawieniu "śnieżynka", może to wymagać niemal godziny oczekiwania na powrót odpowiedniej temperatury. Zdaje się, że wyłączanie grzejników jest mało korzystne, ale można zostawić termostat ze wskazaniem wyższej temperatury. Należy więc samemu rozważyć, które ustawienie jest najbardziej korzystne w zależności od oczekiwań. W przypadku bardzo zimnych uralskich dni i nocy okazuje się, że grzejniki w trybie domyślnym (trójka) są niewystarczające nawet do utrzymania wyjściowej temperatury pokojowej.



Mapy ciepła mieszkania w bardzo zimny dzień z pokrętlą ustawionym na 2

Mapy ciepła wskazują na bardzo dobry, niemal jednostajny rozkład temperatury w całym mieszkaniu. Zgodnie z wynikami pierwszego eksperymentu koszty ogrzewania mieszkania z tak ustawionymi kaloryferami są bardzo wysokie. Jest to logiczne, gdyż sąsiedztwo źródła ciepła i źródła zimna wymaga ciągłego dostarczania energii. Przy założeniach projektu o czułości termostatu co pół sekundy w całym pokoju powoduje to co chwila impulsy wszystkich kaloryferów, które w kolejnej chwili natychmiast ustają, żeby włączyć się ponownie w kolejnym kroku.

To zjawisko jest szczególnie wyraźnie widoczne tutaj, jednak występowało w każdym poprzednim przypadku (wahania są nieduże w stosunku do całej skali temperatury, ale rosną wraz z ustawieniem pokrętki kaloryfera). Jest to jedna z wad tego modelu. Symulacje można poprawić lepiej modelując pracę termostatu oraz modyfikując warunki brzegowe (na przykład tak: [2]).



Termostat próbuje utrzymać stałą temperaturę powodując w każdej zdyskretyzowanej chwili wahania temperatury.

## Bibliografia

- [1] Dani Schaub James Diebel Jacob Norda. *Działanie termostatu*. 2024. URL: <https://www.elektrobock.cz/pl/wyjasnienie-koncepcji-sterowania/c117>.
- [2] Eduard Marušić-Paloka i Igor Pažanin. „The Robin boundary condition for modelling heat transfer”. eng. W: *Proceedings of the Royal Society. A, Mathematical, physical, and engineering sciences* 480.2286 (2024). ISSN: 1364-5021.
- [3] Maciej Tadej. *Heat equation*. 2024. URL: [https://tadej.math.uni.wroc.pl/teaching/num\\_met-lab-i-2425](https://tadej.math.uni.wroc.pl/teaching/num_met-lab-i-2425).