Итак, поменялось с предыдущего раза:

- распределение случайной величины x;
- я теперь правильно считаю дисперсию ξ;
- $g_{\mu,\sigma}(x)$ — теперь именно плотность, а не просто экспонента;
- для подобра μ и σ я беру только μ равные x_i. Последнее можно как-то обосновать, что $\log\sum\exp(x_i)$ — это softmax по множеству x_i.

Пусть случайная величина $x_L \sim \mathcal{U}[0, N_t]$ представляет собой точки концов левого паттерна, а $x_R \sim \mathcal{U}[0, N_t]$ точки начал правого паттерна. Тогда плотность распределения межточечного расстояния

$$p(x_R - x_L \mid x_L < x_R) = p_{LR}(x) = \begin{cases} (M - x)\,\frac{2}{M^2}, & x \in [0, M]; \\ 0, & x \notin [0, M]. \end{cases}$$

Это можно показать из свертки двух с.в. — потом вобью это в сам диплом. Итак, наша сумма k:

$$\begin{aligned} k &= \sum_{i=1}^{N} w_i g_{\mu,\sigma}(x_i) = \sum_{i=1}^{N} \xi_i, \\ w_i &= \alpha_i \beta_i, \\ x_i &\sim p_{LR}, \\ g_{\mu,\sigma}(x_i) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Здесь:

N— количество точек в распределении;

M— максимальное расстояние между двумя точками. Не окно!

Считаем моменты.

$$\mathbb{E}\left[g_{\mu,\sigma}\right] = \int\limits_0^M g_{\mu,\sigma}(x)\, p_{LR}(x)\, dx = \int\limits_0^M g_{\mu,\sigma}(x)\, (M - x)\, \frac{2}{M^2}\, dx \approx$$

$$\approx \frac{2}{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx - \frac{2}{M^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{M}\left(1 - \frac{\mu}{M}\right).$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g^2_{\mu,\sigma}\right] &= \int\limits_0^M g^2_{\mu,\sigma}(x)\, p_{LR}(x)\, dx = \int\limits_0^M g^2_{\mu,\sigma}(x)\,(M-x)\,\frac{2}{M^2}\,dx \approx \\
&\approx \frac{2}{M}\,\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)dx - \frac{2}{M^2}\,\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)dx = \\
&= \frac{1}{M\sqrt{\pi}\,\sigma}\left(1-\frac{\mu}{M}\right).
\end{aligned}
$$

Считаем дисперсию.

$$
\mathsf{var}\left[g_{\mu,\sigma}\right] = \mathbb{E}\left[g^2_{\mu,\sigma}\right] - \left(\mathbb{E}\left[g_{\mu,\sigma}\right]\right)^2 = \left(1-\frac{\mu}{M}\right)\left(\frac{1}{M\sqrt{\pi}\,\sigma} - \frac{\mu}{M^2}\left(1-\frac{\mu}{M}\right)\right).
$$

Теперь параметры самой с.в. ξ_i.

$$
\mathbb{E}\left[\xi_i\right] = \mathbb{E}\left[w g_{\mu,\sigma}(x)\right] = \mathbb{E}\left[w_i\right]\mathbb{E}\left[g_{\mu,\sigma}(x_i)\right] \approx \overline{w}\,\frac{2}{M}\left(1-\frac{\mu}{M}\right).
$$

Здесь $\overline{w}$ — выборочное среднее наших весов, $\hat{w}$ — выборочная дисперсия весов. Тогда запишем дисперсию произведения независимых случайных величин:

$$
\mathsf{var}\left[\xi_i\right] = \mathsf{var}\left[w\, g_{\mu,\sigma}\right] = \left(\mathbb{E}\left[g_{\mu,\sigma}\right]\right)^2\hat{w} + \mathbb{E}\left[g_{\mu,\sigma}\right]\overline{w}^2 + \hat{w}\,\mathsf{var}\left[g_{\mu,\sigma}\right].
$$

Тогда, по Ц.П.Т.:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^N \xi_i = k \sim \mathcal{N}\left(\mu_*, \sigma_*^2\right), \text{ где} \\
&\mu_* = N\,\mathbb{E}\left[\xi_i\right], \\
&\sigma_*^2 = N\,\mathsf{var}\left[\xi_i\right].
\end{aligned}
$$

Ну а теперь, берем квантиль этого нормального распределения, сравниваем с k — тут все ясно.

Одна проблема — замена пределов интегрирования(для $\mathbb{E}\left[g_{\mu,\sigma}\right]$ и $\mathbb{E}\left[g^2_{\mu,\sigma}\right]$) с 0 до M на всю прямую дает плохой результат, когда μ близко к M(близость к нулю не на столько критична, так как $p_{LR}(x)$ имеет большую плотность около 0). Я попробовал взять точный интеграл, через функцию ошибок. Пока не проверял эти формулы в деле, и ни коим образом не прошу Вас проверять их правильность.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g_{\mu,\sigma}\right] = &\int\limits_0^M g_{\mu,\sigma}(x)\,(M-x)\,\frac{2}{M^2}\,dx = \\
=&\frac{1}{M}\left[\mathsf{erf}\left(\frac{\mu-M}{\sqrt{2}\,\sigma}\right) - \mathsf{erf}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)\right] - \\
&- \frac{\sqrt{2}}{M^2\sqrt{\pi}}\left[\mu\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathsf{erf}\left(-\frac{M}{\sqrt{2}\,\sigma}\right) - \sigma\left(\exp\left(-\frac{M^2}{2\sigma^2}\right)-1\right)\right].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g_{\mu,\sigma}^2\right] &= \int\limits_0^M g_{\mu,\sigma}^2(x)\,(M-x)\,\frac{2}{M^2}\,dx = \\
&= \frac{1}{2M\sqrt{\pi}\,\sigma}\left[\mathsf{erf}\left(\frac{\mu-M}{\sigma}\right) - \mathsf{erf}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right] - \\
&\quad - \frac{1}{2M^2\,\pi\sigma}\left[\mu\sqrt{\pi}\,\mathsf{erf}\left(-\frac{M}{\sigma}\right) - \sigma\left(\exp\left(-\frac{M^2}{\sigma^2}\right) - 1\right)\right]
\end{aligned}
$$