1) Definir TIME(f(n)), NTIME(f(n)), SPACE(f(n)) y NSPACE(f(n)).

2) Enunciar relaciones de contenido entre las clases anteriores (asignar números a cada una de esas relaciones de contenido para usarlas en preguntas posteriores).

3) Límite mínimo de las funciones de complejidad en tiempo. Límite mínimo de las funciones de complejidad en espacio. Explicar la razón de esos límites.

4) Definir las clases centrales de complejidad en tiempo (3 clases) y definir las clases centrales de complejidad en espacio (3 clases).

5) Enunciar las relaciones de contenido entre clases centrales de tiempo, y explicar la razón de cada una.

6) Enunciar las relaciones de contenido entre clases centrales de espacio, y explicar la razón de cada una.

7) Demostrar que SPACE(f(n)) $\subseteq$ TIME($2^{O(f(n))}$)

8) Enunciar las relaciones de contenido combinadas entre clases de tiempo y espacio, y explicar la razón de cada una.

9) Demostrar que P está contenido estrictamente en EXP: P$\subseteq$EXP y P$\neq$EXP.

10) Explicar con palabras la diferencia fundamental entre el recurso tiempo y el recurso espacio.

11) Dada una clase de complejidad C, definir co-C. Escribir y explicar las relaciones de contenido entre P, co-P, NP y co-NP.

12) Explicar las razones (2 razones) de por qué al definir las clases de complejidad se usa la notación O (o mayúscula).

1) Definir TIME(f(n)), NTIME(f(n)), SPACE(f(n)) y NSPACE(f(n)).

$TIME(f(n)) = \{ L \subseteq \Sigma^* \mid \exists M_L \in mTD : M_L$ decide L, nº pasos $\leq f(n) \}$

$NTIME(f(n)) = \{ L \subseteq \Sigma^* \mid \exists N_L \in mTnD : N_L$ decide L, nº pasos $\leq f(n)$ $\forall$ los cálculos no deterministas$\}$.

$SPACE(f(n)) = \{ L \subseteq \Sigma^* \mid \exists M_L \in mTD : M_L$ decide L, nº celdas $\leq f(n) \}$.

$NSPACE(f(n)) = \{ L \subseteq \Sigma^* \mid \exists N_L \in mTnD : N_L$ decide L, nº celdas $\leq f(n)$ $\forall$ los cálculos no deterministas$\}$.

2) Enunciar relaciones de contenido entre las clases anteriores (asignar números a cada una de esas relaciones de contenido para usarlas en preguntas posteriores).

Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con $f(n) \leq g(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(1). $TIME(f(n)) \subseteq NTIME(f(n))$.

(2). $SPACE(f(n)) \subseteq NSPACE(f(n))$.

(3). $TIME(f(n)) \subseteq TIME(g(n))$

(4). $SPACE(f(n)) \subseteq SPACE(g(n))$.

(5). $NTIME(f(n)) \subseteq NTIME(g(n))$.

(6). $NSPACE(f(n)) \subseteq NSPACE(g(n))$.

(7). $TIME(f(n)) \subseteq SPACE(f(n))$.

(8). $NTIME(f(n)) \subseteq NSPACE(f(n))$.

(9). $NTIME(f(n)) \subseteq SPACE(f(n))$.

(10). $NTIME(f(n)) \subseteq TIME(2^{f(n)})$

(11). $SPACE(f(n)) \subseteq TIME(2^{f(n)})$.

3) Límite mínimo de las funciones de complejidad en tiempo. Límite mínimo de las funciones de complejidad en espacio. Explicar la razón de esos límites.

- El límite mínimo de las funciones de complejidad en tiempo es $n = |w|$ puesto que una mT necesita al menos n pasos para leer su entrada.

- El límite mínimo de las funciones de complejidad en espacio es $\log n$ donde $n = |w|$ ya que podemos expresar la cadena como logaritmo.

4) Definir las clases centrales de complejidad en tiempo (3 clases) y definir las clases centrales de complejidad en espacio (3 clases).

- Clases centrales de complejidad en tiempo:

$$P = \bigcup_k TIME[n^k] \quad (3)$$

$$NP = \bigcup_k NTIME[n^k] \quad (4)$$

$$EXP = \bigcup_k TIME[2^{n^k}] \quad (6)$$

- Clases centrales de complejidad en espacio:

$$L = SPACE[\log(n)] \quad (1)$$

$$NL = NSPACE[\log(n)] \quad (2)$$

$$PSPACE = \bigcup_k SPACE[n^k] \quad (5)$$

5) Enunciar las relaciones de contenido entre clases centrales de tiempo, y explicar la razón de cada una.

- Veamos primero que $P \subseteq NP$:

  Sabemos que $TIME(f(n)) \subseteq NTIME(f(n)) \quad \forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

  Por lo tanto:

$$TIME[n^k] \subseteq NTIME[n^k] \quad \forall k \in \mathbb{N} \implies$$

$$\implies \bigcup_k TIME[n^k] \subseteq \bigcup_k NTIME[n^k] \iff P \subseteq NP.$$

- Veamos a continuación que $NP \subseteq EXP$:

  Sabemos que $NTIME(f(n)) \subseteq TIME(2^{f(n)}) \quad \forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

  Por lo tanto:

$$NTIME[n^k] \subseteq TIME[2^{n^k}] \quad \forall k \in \mathbb{N} \implies$$

$$\implies \bigcup_k TIME[n^k] \subseteq \bigcup_k TIME[2^{n^k}] \iff NP \subseteq EXP.$$

- De estas dos inclusiones deducimos que $P \subseteq EXP$.

6) Enunciar las relaciones de contenido entre clases centrales de espacio, y explicar la razón de cada una.

- Veamos primero que $L \subseteq NL$:

  Sabemos que $SPACE(f(n)) \subseteq NSPACE(f(n)) \quad \forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

  Por lo tanto:

$$SPACE(\log n) \subseteq NSPACE(\log n) \iff L \subseteq NL.$$

- Veamos a continuación que $NL \subseteq PSPACE$:

  Para ello, veamos que $NL \subseteq P$:

  Sea un lenguaje $L \in NL = NSPACE[\log n] \implies$

  $\implies \exists N_L$ mTnD que decide L en espacio $O(\log n)$.

  Digamos que el nº de celdas ocupadas es $\log n \implies$

$\Longrightarrow$ Como N_L NO puede repetir configuraciones (habría bucle infinito), el número máximo de pasos que da será el número de configuraciones posibles:

$$n^{\circ} \text{ pasos} \leq |\Sigma|^{\log n} \cdot |Q| \cdot \log n = n^{\log |\Sigma|} \cdot |Q| \cdot \log n =$$
$$= n^{k} \cdot |Q| \cdot \log n < n^{k+1} \Longrightarrow L \text{ es decidido en tiempo } O(n^{k+1}).$$

Luego $L \in P$.

Por lo tanto, $NL \subseteq P$.

Veamos que $P \subseteq PSPACE$:

Sabemos que $TIME(f(n)) \subseteq SPACE(f(n)) \quad \forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Por lo tanto:

$$TIME[n^k] \subseteq SPACE[n^k] \quad \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \bigcup_k TIME[n^k] \subseteq \bigcup_k SPACE[n^k] \Longleftrightarrow P \subseteq PSPACE.$$

Luego deducimos que $NL \subseteq PSPACE$.

- De estas dos inclusiones deducimos que $L \subseteq PSPACE$.

7) Demostrar que $SPACE(f(n)) \subseteq TIME(2^{O(f(n))})$

Sea un lenguaje $L \in SPACE(f(n)) \Longrightarrow \exists M_L$ mTD que decide L cuando nº celdas $\leq f(n)$.

Tenemos que el nº máximo de configuraciones es

$$|\Sigma|^{f(n)} \cdot f(n) \cdot |Q| = c^{f(n)} \cdot f(n) \cdot d.$$

nº símbolos del alfabeto

cantidad de estados

$$\Longrightarrow n^{\circ} \text{ pasos} \leq c^{f(n)} \cdot f(n) \cdot d = 2^{\log(c^{f(n)} \cdot f(n) \cdot d)} =$$
$$= 2^{f(n) \cdot \log c + \log(f(n)) + \log d} = 2^{O(f(n))} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow SPACE(f(n)) \subseteq TIME(2^{O(f(n))})$.

8) Enunciar las relaciones de contenido combinadas entre clases de tiempo y espacio, y explicar la razón de cada una.

- Veamos primero que $NL \subseteq P$ (lo que implica que $L \subseteq P$):

  (demostrado en el 6).

- Veamos a continuación que $NP \subseteq PSPACE$ (lo que implica que $P \subseteq PSPACE$).

  Sabemos que $NTIME(f(n)) \subseteq SPACE(f(n)) \quad \forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

  Por lo tanto:

$$NTIME[n^k] \subseteq SPACE[n^k] \quad \forall k \in \mathbb{N} \implies$$

$$\implies \bigcup_k NTIME[n^k] \subseteq \bigcup_k SPACE[n^k] \iff NP \subseteq PSPACE.$$

- Veamos ahora que $PSPACE \subseteq EXP$.

  Sabemos que $SPACE[f(n)] \subseteq TIME[2^{f(n)}] \quad \forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

  Por lo tanto:

$$SPACE[n^k] \subseteq TIME[2^{n^k}] \quad \forall k \in \mathbb{N} \implies$$

$$\implies \bigcup_k SPACE[n^k] \subseteq \bigcup_k TIME[2^{n^k}] \iff PSPACE \subseteq EXP.$$

9) Demostrar que P está contenido estrictamente en EXP: $P \subseteq EXP$ y $P \neq EXP$.

Ya hemos visto que $P \subseteq EXP$ (ej. 5). Veamos que $P \subsetneq EXP$.

Para ello debemos encontrar un lenguaje L que cumpla que:

(1). $L \in EXP$.

(2). $L \notin P$.

Sea $L = \{x : x = \langle M \rangle \#1^c\#1^e\#, M$ No acepta x en tiempo $c \cdot |x|^e\}$.

Veamos (1):

Construimos una mT N que decide L. N tiene varias cintas:

cinta 1: $\langle M \rangle \#1^c\#1^e\#$

cinta 2: simulación

cinta 3: $c \cdot |x|^e$

Tras muchos pasos, tenemos dos opciones:

a) Cinta 3 sea "cero" y NO acaba.

Entonces N va al estado q^N_{acc}.

b) Cinta 3 sea "NO cero" y M ya esté en su estado de aceptación q^M_{acc}.

Entonces N va al estado q^N_{rej}.

Veamos cuánto tiempo tarda en el peor caso:

$$n^o \text{ pasos} \leq c\cdot|x|^e \overset{c\leq|x|,\ e\leq|x|}{\leq} |x|\cdot|x|^{|x|} = |x|^{|x|+1} \overset{|x|=n}{=} n^{n+1} = 2^{\log n^{n+1}} =$$

$$= 2^{(n+1)\cdot\log n} \leq 2^{n^2}, \text{ luego } L \in EXP.$$

Veamos ahora (2):

Supongamos que $L \in P$. Entonces existe M_L mT que decide L en tiempo polinómico. Para cada $x \in L$, M_L acepta x en n^o pasos $O(n^e)$: $c\cdot n^e = c\cdot|x|^e$.

Ahora elijo la cadena x: $x = \langle M_L\rangle \# 1^c \# 1^e \#$.

Veamos si $x \in L$:

- $x \in L \Rightarrow M_L$ NO acepta x en tiempo $c\cdot|x|^e \Rightarrow x \notin L$.
- $x \notin L \Rightarrow M_L$ acepta x en tiempo $c\cdot|x|^e \Rightarrow x \in L$.

Hemos llegado a una contradicción, por lo tanto $L \notin P$ por reducción al absurdo.

Por lo tanto, queda probado que $P \subsetneq EXP$.

10) Explicar con palabras la diferencia fundamental entre el recurso tiempo y el recurso espacio.

El recurso del espacio se puede reutilizar ya que se puede reescribir en una misma celda cuantas veces queramos, mientras que el de tiempo evidentemente NO se puede reutilizar.

11) Dada una clase de complejidad C, definir co-C. Escribir y explicar las relaciones de contenido entre P, co-P, NP y co-NP.

$$co\text{-}C = \{\overline{L} : L \in C\}$$

- Primero veamos que $co\text{-}P = P$.

Sea $\overline{L} \in co\text{-}P \Rightarrow L \in P \Rightarrow \exists M_L$ mTD : $w \in L \Leftrightarrow q_0 w \vdash^{*}_{poli\text{-}t} u \cdot q_{acc} v$

$w' \notin L \Leftrightarrow q_0 w' \vdash^{*}_{poli\text{-}t} u' q_{rej} v'$.

$M'_{\overline{L}}$ $\Rightarrow$ cuando M_L acepta $\rightarrow$ rechaza ($poli\text{-}t + 1 \equiv poli\text{-}t$).

$\Rightarrow$ cuando M_L rechaza $\rightarrow$ acepta ($poli\text{-}t + 1 \equiv poli\text{-}t$).

$M'_{\overline{L}}$ reconoce $\overline{L}$ en poli-t, $\overline{L} \in P \Rightarrow co\text{-}P = P$.

También sabemos que si $A \subseteq B$, entonces $co\text{-}A \subseteq co\text{-}B$, luego como $P \subseteq NP$, tenemos que $co\text{-}P \subseteq co\text{-}NP$. Por lo tanto:

- $P = co\text{-}P$
- $P \subseteq NP$ (visto anteriormente).
- $P \subseteq co\text{-}NP$ (ya que $P = co\text{-}P$ y $co\text{-}P \subseteq co\text{-}NP$).
- $co\text{-}P \subseteq NP$ (ya que $co\text{-}P = P$ y $P \subseteq NP$)
- $co\text{-}P \subseteq co\text{-}NP$.

12) Explicar las razones (2 razones) de por qué al definir las clases de complejidad se usa la notación O (o mayúscula).

- La O viene de clasificar el ORDEN (ORDER).
- Para diferenciar de Ω y de Θ.