Dominating Set is NP-Complete

Fernando Javier López Cerezo

13 de mayo de 2024

Índice

1. El lenguaje Dominating Set

Nota: En este trabajo sólo se hace referencia a grafos no dirigidos.

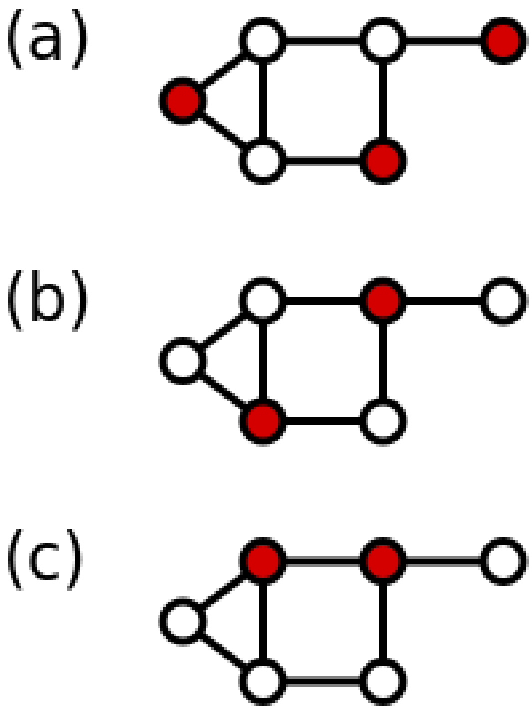
Definición. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se dice que $V' \subset V$ es un conjunto dominante de G si cada vértice que no pertenezca a V' está unido a (al menos) un miembro de V'. Es decir, si $\forall v \in V \setminus V'\ \exists v' \in V'$ tal que $(v, v') \in E$.*

Definición. *Definimos el lenguaje DOMINATING-SET $= \{\langle G, k\rangle |\ G$ tiene un conjunto dominante de tamaño $k\}$.*

Véase que todo grafo G tiene al menos un conjunto dominante, el propio V.

1.1. Ejemplos

Sea $< G >$ la codificación del siguiente grafo:



Como se puede apreciar en la imagen (a), G tiene un conjunto dominante (los vértices rojos) de tamaño 3 ya que todo vértice blanco esta unido a uno rojo. (b) y (c) son ejemplos de conjuntos dominantes de G de tamaño 2. Luego $< G, 3 > \in$ DOMINATING-SET y $< G, 2 > \in$ DOMINATING-SET. Nótese que G no tiene ningun conjunto dominante de tamaño 1 ya que no hay ningún vértice que este unido a todos los demás. Luego $< G, 1 > \notin$ DOMINATING-SET.

1.2. Campos de aplicación

En redes ad-hoc inalámbricas se usan los conjuntos dominantes conexos [6]. Esto es, conjuntos dominantes donde existe un camino entre cada par de vértices. En una red ad hoc no existe una infraestructura preexistente. En lugar de ello, cada nodo participa en el encaminamiento mediante el reenvío de datos hacia otros nodos, de modo que la determinación de estos nodos hacia la información se hace dinámicamente sobre la base de conectividad de la red. Para aumentar la eficiencia de este tipo de redes se calculan los conjuntos dominantes conexos de la red ya que los dispositivos que lo forman son especialmente útiles para el reenvío de datos.

En el campo del resumen automático de documentos un posible método es formar un grafo donde cada nodo representa una frase del documento y dos nodos están unidos si sus respectivas frases son similares. Es claro entonces que el conjunto dominante de menor tamaño posible de este grafo es un buen candidato a resumen del documento [5].

Otro problema interesante es el de monitorizar un sistema de energía eléctrica usando el menor numero posible de dispositivos de medición. Para resolverlo se usa el concepto 'power dominating set'. Esto es, un conjunto dominante cuyos vértices además cumplen una serie de reglas especificas de monitorización de sistemas de energía [2]. En este caso el objetivo es también encontrar el conjunto de este tipo de menor tamaño posible.

2. Dominating Set es NPC

2.1. Dominating Set es NP

Veamos que DOMINATING-SET $\in$ NP demostrando que es polinómicamente verificable. Dada una cadena $< G, k >$ el certificado consistirá en una cadena $< D >$ que codificará un conjunto dominante de G de tamaño k. Sea A el algoritmo que con entrada $< G, k, D >$ da los siguientes pasos ($G = (V, E)$ y $|V| = n$):

- Comprueba que el conjunto D es realmente un subconjunto del conjunto de vértices de G de tamaño k. Si D no es subconjunto de V o D no tiene tamaño k entonces el algoritmo para y rechaza. Véase que como D debe ser un subconjunto de V como mucho debería tener n vértices. Es decir, $k \leq n$. Si D tuviese más vértices el algoritmo pararía y rechazaría al detectar el $(n-1)$-ésimo vértice. Al tener G un máximo de $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas, recorrer toda la entrada requiere $O(n^2)$ pasos. Esto se deberá hacer por cada vértice de D para ver que esta en V luego en el peor caso harán falta $O(n^3)$ pasos.

- Por cada vértice v de V comprobar que o esta en D o existe alguna arista que una a ese vértice con uno de D. Un vértice puede aparecer como mucho en $n-1$ aristas (si el grafo es completo). Por cada arista (u, v) hay que recorrer la entrada para comprobar si u esta en D. En el peor caso hay que hacer $n-1$ comprobaciones de $O(n^2)$ pasos para cada uno de los n vértices. En total $O(n^4)$ pasos. Si D no es un conjunto dominante el algoritmo para y rechaza.

- Si el algoritmo llega a este paso es que D es conjunto dominante de tamaño k de G y el algoritmo acepta.

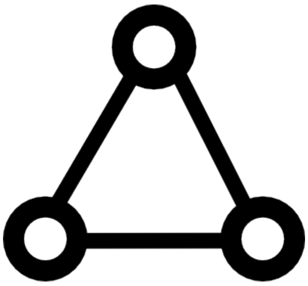
Luego A usa como mucho $O(n^4)$ pasos y DOMINATING-SET $\in$ NP.

2.2. Reducción de Vertex Cover a Dominating Set

Definición. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se dice que $V' \subset V$ es una cobertura de vértices de G si cada arista de G incide en al menos un nodo de V'. Es decir, si $\forall(u, v) \in E$ $u \in V'$ o $v \in V'$.*

Definición. *Definimos el lenguaje VERTEX-COVER = $\{\langle G, k\rangle |$ G tiene una cobertura de vértices de tamaño $k\}$.*

Sea G el siguiente grafo:



Es claro que cualquier subconjunto no vacío de vértices de G es un conjunto dominante. Sin embargo, una cobertura de vértices de G debe tener como mínimo tamaño 2. Por lo tanto $< G, 2 >\in$ VERTEX-COVER pero $< G, 1 >\notin$ VERTEX-COVER. En particular nótese que si G no tiene vértices aislados, entonces $< G, k >\in$ VERTEX-COVER $\Longrightarrow$ $< G, k >\in$ DOMINATING-SET.

Supongamos que modelamos un establecimiento tomando como vértices las habitaciones y como aristas los pasillos que las unen. Si queremos tener este establecimiento bien vigilado nos podemos plantear cual sería el numero mínimo de cámaras que habría que instalar y donde instalarlas. Una buena solución es calcular la cobertura de vértices de menor tamaño posible del grafo asociado. Así, si colocamos cámaras en las habitaciones correspondientes tendremos los ojos puestos en todos los pasillos y todos los posibles caminos por donde pueda pasar alguien.[1]

Vamos a demostrar que VERTEX-COVER $\leq_p$ DOMINATING-SET. Para ello definamos f como la función que hace lo siguiente:

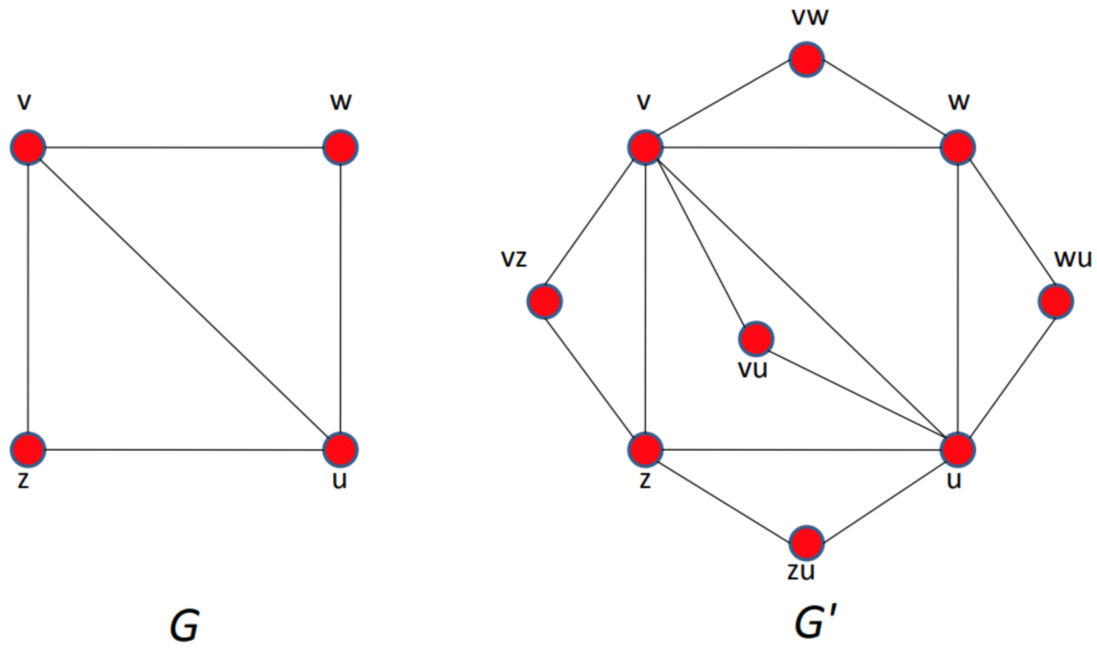
- Dada una cadena $< G, k >$ primero cuenta todos los vértices de G aislados. Es decir, los vértices sobre los que no incide arista alguna. Sea n el número de vértices de G. Harán falta $O(n)$ pasos.

- Para cada arista (u, v) de G añade un vértice w y las aristas (u, w) y (w, v). Como el número de aristas es del orden de $O(n^2)$ y recorrer la entrada entera puede llevar hasta $O(n^2)$ pasos para esta etapa pueden hacer falta hasta $O(n^4)$ pasos.

- Cambia k por $k' = k + n_I$ donde n_I es el número de vértices aislados. En el peor caso puede hacer falta recorrer la entrada para llegar hasta k. Luego $O(n^2)$ pasos.

Por lo tanto f se puede implementar usando como mucho $O(n^4)$ pasos. Es decir, f es computable en tiempo polinómico.

Por ejemplo, f manda el siguiente grafo G al grafo G': [4]



Veamos que $c \in$ VERTEX-COVER $\iff f(c) \in$ DOMINATING-SET:

- Sea $c =< G, k >\in$ VERTEX-COVER. Escribimos $G = (V, E)$. Sabemos que existe una cobertura de vértices D de G de tamaño k. Sea $f(c) =< G', k + n_I >$. Veamos que $D' = D \bigcup V_I$ es un conjunto dominante de $G' = (V', E')$ (donde V_I es el conjunto de vétices aislados de G) y que por lo tanto G' tiene un conjunto dominante de tamaño $k + n_I$. Sea $v \in V' \setminus D'$. Entonces $v \in V \setminus D'$ ó $v \in V' \setminus V$.

  Si $v \in V \setminus D'$ entonces como v tiene grado al menos 1 (en G) existe $u \in V$ tal que $(u, v) \in E \subset E'$. Como D es cobertura de vértices de G, $u, v \in V$ y $v \notin D$ debe ocurrir que $u \in D$. Luego dado $v \in V$ hemos encontrado $u \in D \subset D'$ tal que $(u, v) \in E'$.

  Si $v \in V' \setminus V$ entonces por como se ha contruido G' existen $u, w \in V$ tal que $(u, w) \in E$ y $(u, v), (v, w) \in E'$. Como D es una cobertura de vértices de G, $u, w \in V$ y $(u, w) \in E$ entonces $u \in D$ o $w \in D$. En cualquier caso v esta unido a un miembro de $D \subset D'$.

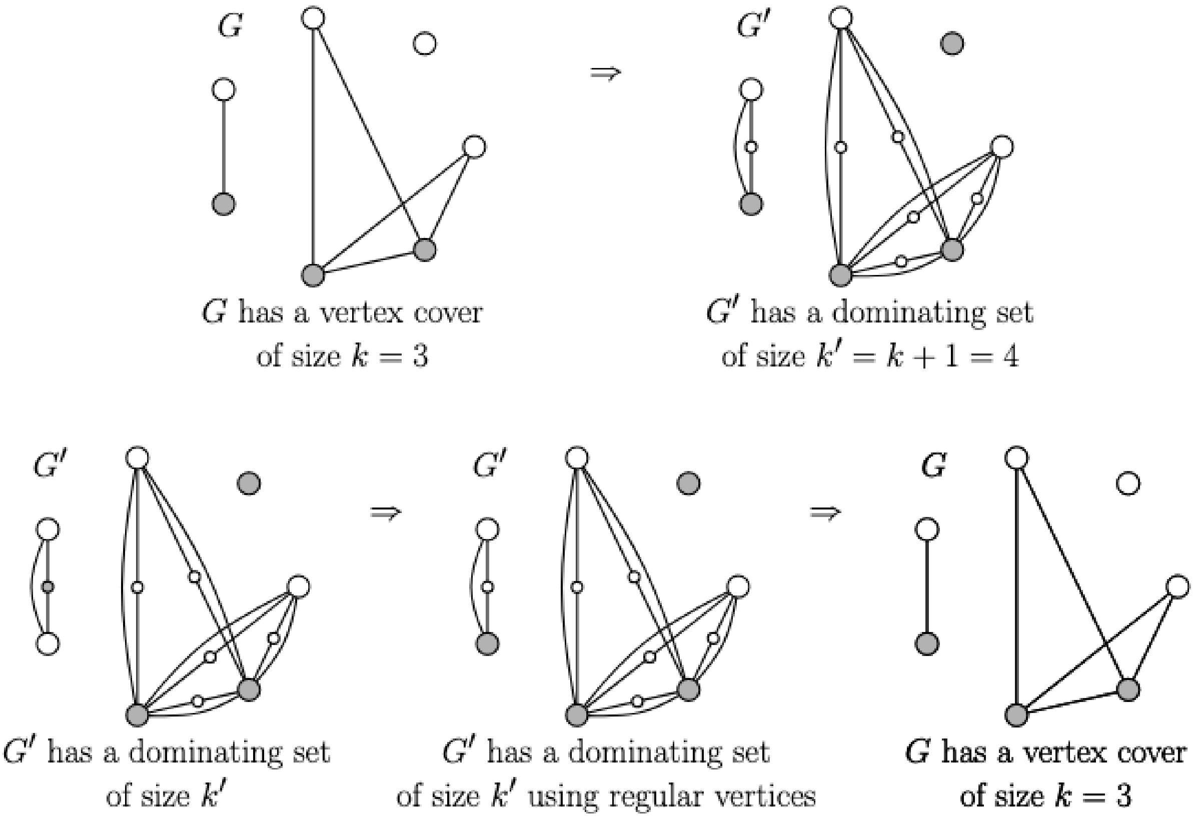
  Por lo tanto D es un conjunto dominante de G' de tamaño $k+n_I$ y $f(c) =< G', k' >\in$ DOMINATING-SET.

- Sea $f(c) =< G', k' >\in$ DOMINATING-SET. Veamos que $c =< G, k' - n_I >\in$ VERTEX-COVER. Nótese que por construcción G y G' tienen los mismos vértices aislados. Sea D' conjunto dominante de G'. Véase que D' debe contener a todos los vértices aislados de G'. Sea V_I' el conjunto de estos vértices. Sea D el conjunto construido de la siguiente forma:

- Si $v \in D'$ es tal que $v \in V \setminus V'_I$ entonces añadimos v a D.
- Si $v \in D'$ es tal que $v \in V' \setminus V$ entonces por construcción existen $u, w \in V$ con $(u, v), (v, w) \in E'$ y $(u, w) \in E$. Entonces añadimos u a D (de igual forma se podría añadir w en su lugar).

Veamos que D es una cobertura de vértices de G. Sea $(u, v) \in E$. Fijándonos en G' y por construcción existe $w \in V' \setminus V$ con $(u, w), (w, u) \in E'$. Supongamos que $u \notin D$ y $v \notin D$, entonces $w \notin D'$ ya que de lo contrario por construcción de D tendríamos $u \in D$ o $v \in D$. Tenemos pues que $w \notin D'$. Por construcción de G' w solo esta unido a u y a v y como $u \notin D$, $v \notin D$ y $u, v \in V \setminus V_I$ entonces $u \notin D'$ y $v \notin D'$. Esto contradice que D' sea conjunto dominante de G'. Luego $u \in D$ o $v \in D$.

Véase el siguiente ejemplo para ver gráficamente lo que hemos hecho: [3]



En conclusión como VERTEX-COVER $\leq_p$ DOMINATING-SET, DOMINATING-SET $\in$ NP y VERTEX-COVER $\in$ NPC hemos demostrado que DOMINATING-SET $\in$ NPC.

Referencias

[1] Vasily V. Gusev. "The vertex cover game: Application to transport networks". En: *Omega* 97 (2020), pág. 102102. ISSN: 0305-0483. DOI: https://doi.org/10.1016/j.omega.2019.08.009. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305048319303421.

[2] Teresa W. Haynes et al. "Domination in Graphs Applied to Electric Power Networks". En: *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 15.4 (2002), págs. 519-529. DOI: 10.1137/S0895480100375831. eprint: https://doi.org/10.1137/S0895480100375831. URL: https://doi.org/10.1137/S0895480100375831.

[3] Dave Mount. *CMSC 451: Lecture 21 NP-Completeness: Clique, Vertex Cover, and Dominating Set.* URL: https://www.cs.umd.edu/class/fall2017/cmsc451-0101/Lects/lect21-np-clique-vc-ds.pdf.

[4] Rhodes College Lecture Notes. *COMP 355 Advanced Algorithms Clique, Vertex Cover, and Dominating Set Chapter 8 (KT) Section 34.5(CLRS).* URL: https://cs.rhodes.edu/~welshc/COMP355_S14/Lecture26.pdf.

[5] Chao Shen y Tao Li. "Multi-document summarization via the minimum dominating set". En: *Proceedings of the 23rd International Conference on Computational Linguistics*. COLING '10. Beijing, China: Association for Computational Linguistics, 2010, págs. 984-992.

[6] Jiguo Yu et al. "Review: Connected dominating sets in wireless ad hoc and sensor networks - A comprehensive survey". En: *Comput. Commun.* 36.2 (ene. de 2013), págs. 121-134. ISSN: 0140-3664. DOI: 10.1016/j.comcom.2012.10.005. URL: https://doi.org/10.1016/j.comcom.2012.10.005.