Algoritmia y Complejidad

Titulación: Grado en Ingeniería Informática
Curso: 2023-2024
Trabajo: Dominating Sets es NPC
Autor: Aquiles Fernández Gambero

LENGUAJES Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Índice

- Enunciado
- Dominating Sets
- Dominating Sets es NP
- Reducción de Vertex Cover

Preámbulos

- NP Completitud:
- Un problema será NP Completo si es a la vez
  - NP
    - Verificable en tiempo polinómico.
  - NP-hard
    - Reducible en tiempo polinómico.

Enunciado

A subset of the nodes of a graph G is a dominating set if every other node of G is adjacent.

Let:

$$DOMINATING-SET = \{< G, k > \mid \text{G has a dominating set with k nodes}\}$$

Show that it is NP-Complete by giving a reduction from Vertex-Cover

DOMINATING-SET: Definición

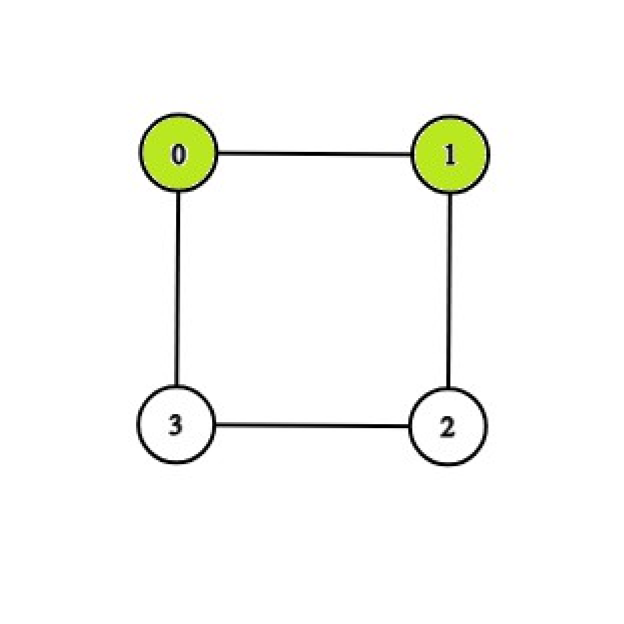
- Definición Formal:

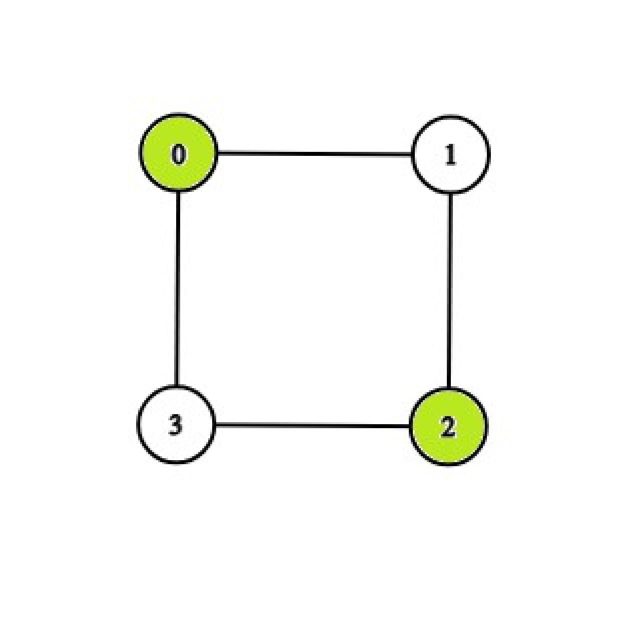
$$DOMINATING-SET = \{< G, k > \mid \text{G has a dominating set with k nodes}\}$$

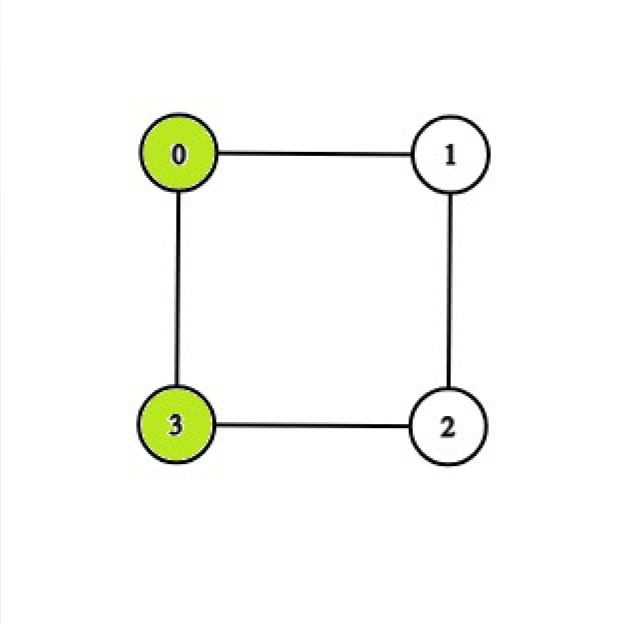
Definición informal:

G=(V,E) tendrá un conjunto dominante si tiene un subconjunto de vértices D tal que cualquier vértice del grafo es parte de D o adyacente a uno que sí lo es.
K será el número de “vértices dominantes”

Ejemplos válidos

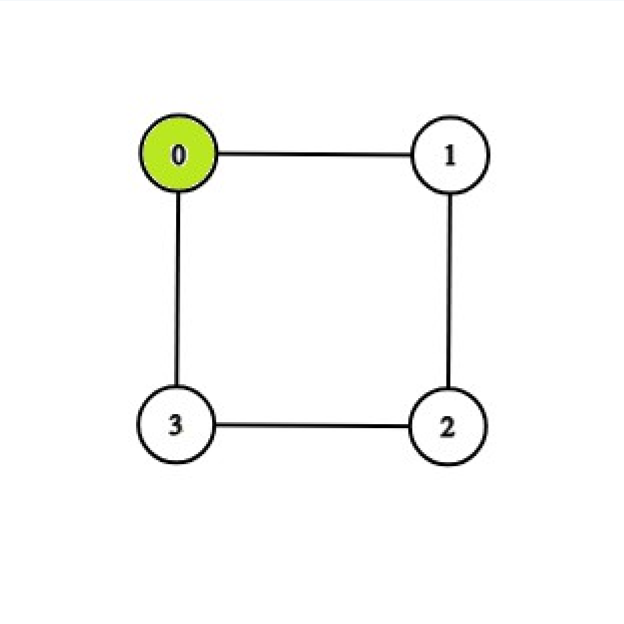






Todos ellos tienen k=2

Ejemplos no válidos



k=1 no cubre todos los vértices

DOMINATING-SET $\in NP$

- Como problema de decisión:

  Input: <G,k>
  G no orientado tal que G=(V,E);

  1. Escogemos *k* nodos de G. (Éste será D.)
  2. Para cada nodo en V:
     - ¿Está en D?
     - ¿Es adyacente a D?
  3. *True* si se cumple el paso 2 para todos los nodos.

  Comprobación en O(n^2) siendo n el número de nodos

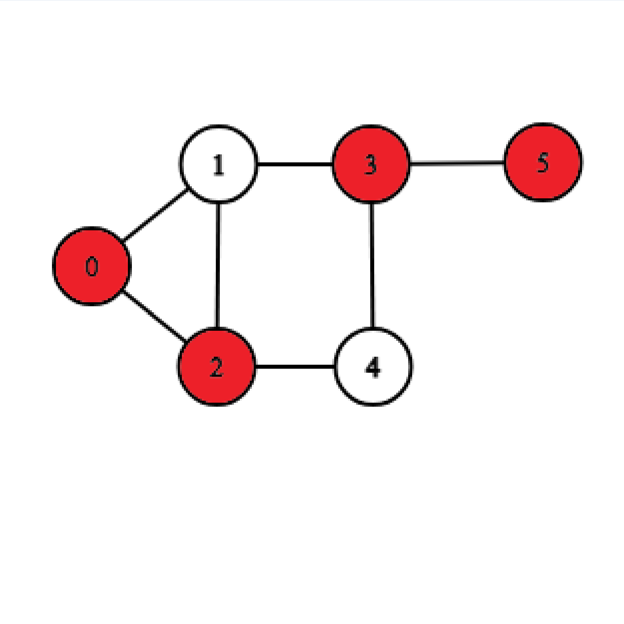
VERTEX-COVER ≤p DOMINATING-SET

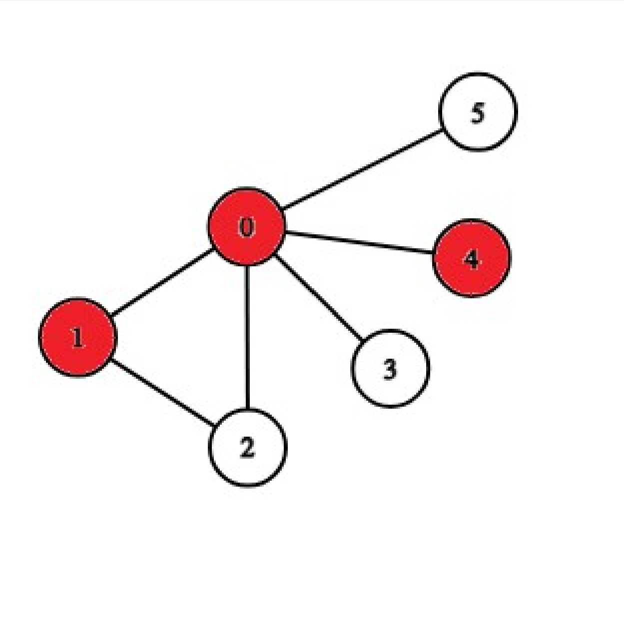
- Definición VERTEX-COVER:

- Una cobertura de vértices C de un grafo no dirigido G=(V,E) es un subconjunto de V tal que cada arista de E es al menos adyacente a un vértice dentro e C.

Ejemplos válidos de VERTEX-COVER

Los vértices rojos están en C





VERTEX-COVER ≤p DOMINATING-SET

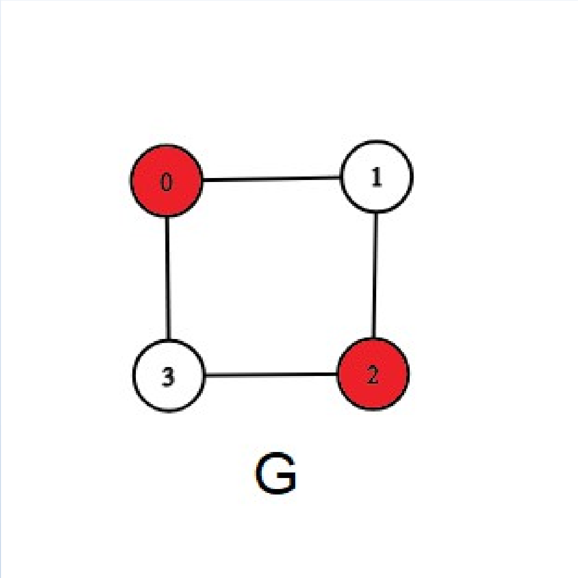
- Entrada <G,k> tal que G es un Grafo conexo no orientado y k es el tamaño de la cobertura de vértices C...

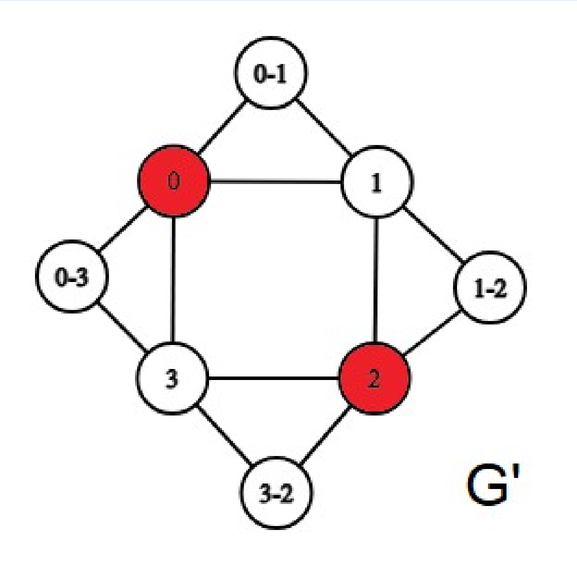
- Crearemos un nuevo grafo G' a partir de G.

- Queremos “triangular” G, añadiendo vértices y aristas sistemáticamente de la siguiente forma:

VERTEX-COVER ≤p DOMINATING-SET

- Por cada arista E={u,v} añadimos un nuevo vértice UV que sea adyacente con {u} y {v}





- Como G tiene cobertura, G' seguirá teniéndola. Cada nuevo vértice es adyacente al menos a un vértice dentro de C.

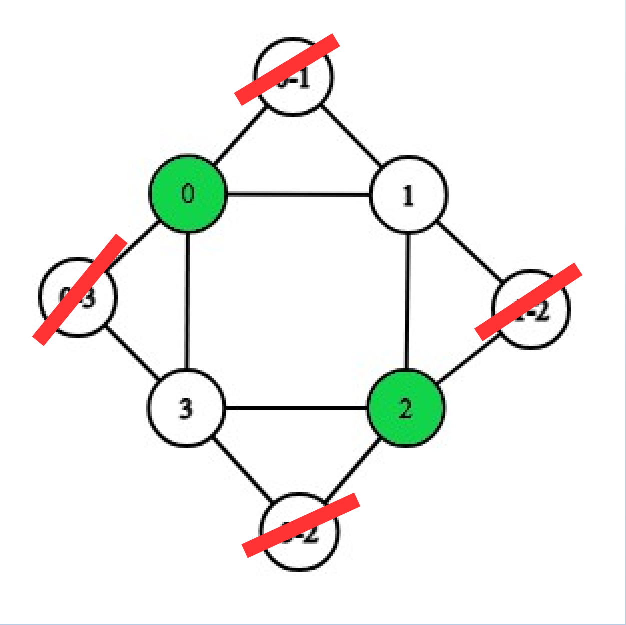
VERTEX-COVER ≤p DOMINATING-SET

- Los mismos vértices de C que estaban incluídos en G también están incluidos en G'. Por ello, si G tiene una cobertura de vértices de tamaño k, G' tendrá un conjunto dominante del mismo tamaño.

VERTEX-COVER ≤p DOMINATING-SET

- Llegados a éste punto, pueden ocurrir dos cosas:
- Los vértices del Dominating Set (DS en adelante) pueden ser uno de los nuevamente añadidos o uno de los originales de G.
- En el caso de que el nuevo vértice sea adyacente a DS y no parte de él, podrá ser reemplazado por cualquiera de los otros vértices adyacentes.

Como se trata de triángulos podremos recorrer todos los aristas originales y eliminar todos los vértices nuevos



Análisis de Complejidad

Teniendo <G,k> con $G=(V,E)$ consideramos $|V|=n$ y $|E|=m$

- Creación de G':
  - $|V'| = n + m$
  - $|E'| = m + 2m$
- Es decir, $O(n+m) + O(3m) = O(n+m)$, que efectivamente está incluído dentro de poli-t.

Por tanto, concluímos:

VERTEX-COVER $\leq_p$ DOMINATING-SET

Gracias por su atención