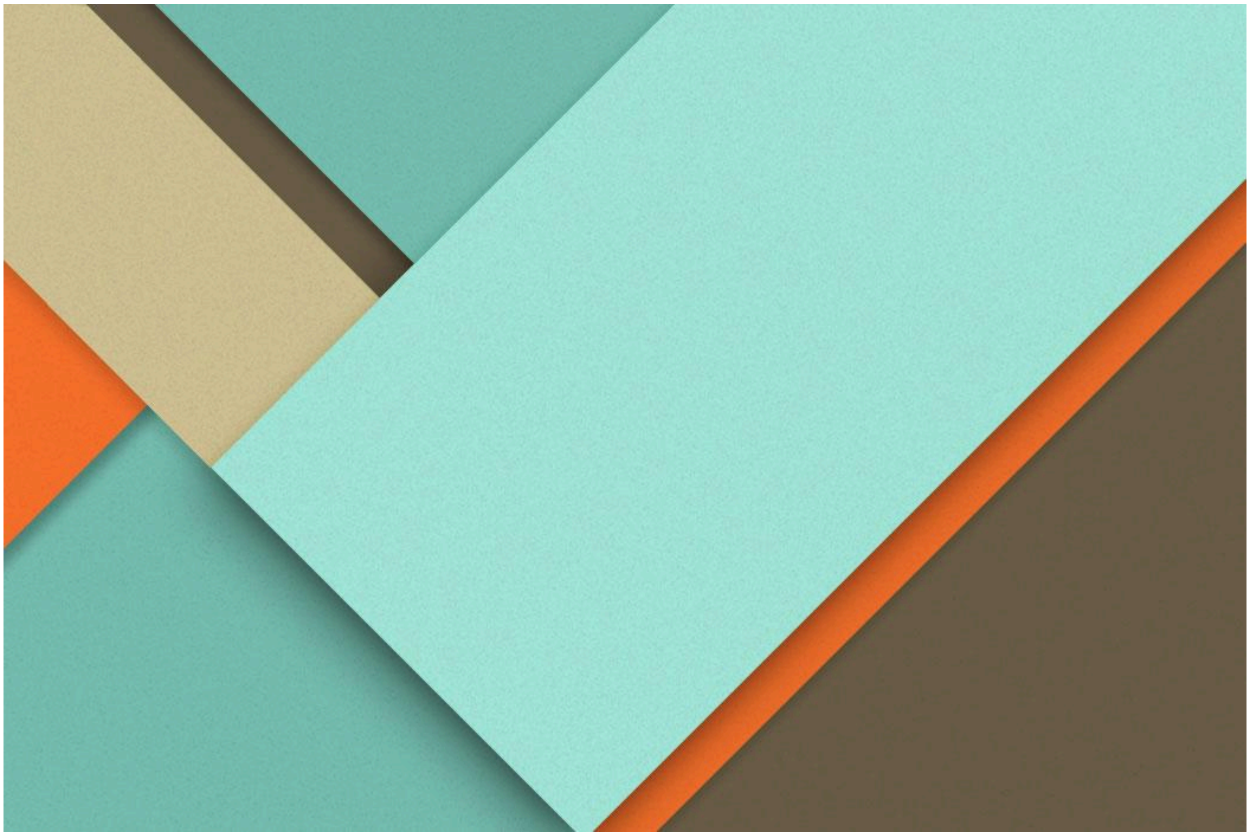


Dominating Set es NP-completo

Felipe Cantero Reyes
3º Informática B

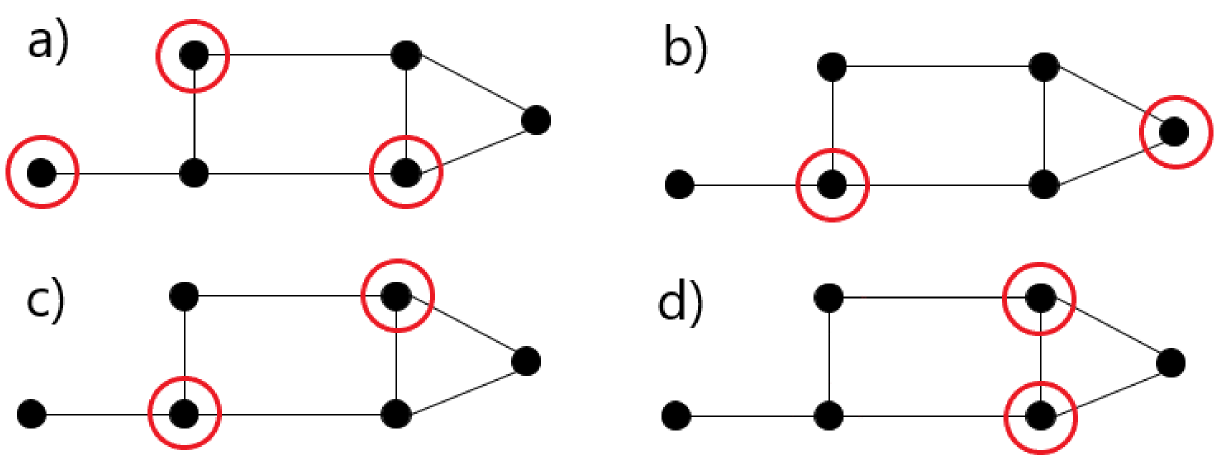
1. Introducción

En esta memoria, vamos a tratar de demostrar que el *Dominating Set Problem,* en español, problema del conjunto dominante es NP-completo.

Para empezar, los conceptos básicos que necesitamos para poder entrar en materia:

- El **conjunto dominante** de un grafo G = (V, E) es un subconjunto V' de V, de manera que todo vértice de V que no está en V' es adyacente a al menos uno de los vértices de V'.
- El **número dominante** de un grafo G, representado por γ(G), es el cardinal del conjunto dominante de G de menor tamaño.

Por ejemplo, dado el siguiente grafo, y cuatro situaciones con diferentes vértices seleccionados como conjuntos dominantes:



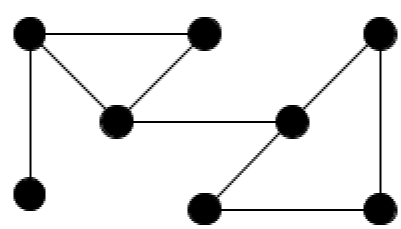
Primero vamos a determinar qué conjuntos dominantes son correctos. En los tres primeros casos, vemos como todos los vértices del grafo están seleccionados o son vecinos de éstos, por tanto son correctos. Sin embargo, en el caso d, el vértice que está más a la izquierda no está incluido en el conjunto dominante, ni tampoco es adyacente a ninguno de los vértices seleccionados, por tanto, no es correcto.

Ahora, entre los tres primeros casos, vemos que en el caso a se han seleccionado 3 vértices, a diferencia de los casos b y c en los que se han seleccionado solamente 2. También podemos comprobar a simple vista que sería imposible encontrar un conjunto dominante para éste grafo que tuviera tamaño 1. Por tanto concluimos que el número de dominante del grafo es 2.

2. Definición del problema

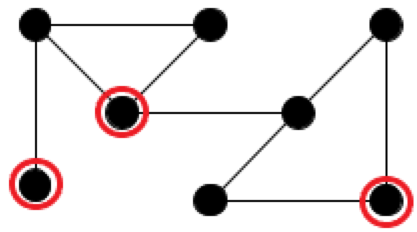
Vamos a comenzar ahora a definir el problema que nos interesa. El **Dominating Set Problem** se centra en decidir si para dado un grafo G y un número k, existe un número dominante $\gamma(G)$ menor o igual a k, y consecuentemente un conjunto dominante V' con cardinal $\gamma(G)$.

Para ilustrar mejor el problema, vamos a poner dos ejemplos sobre el siguiente grafo G:



Ejemplo válido

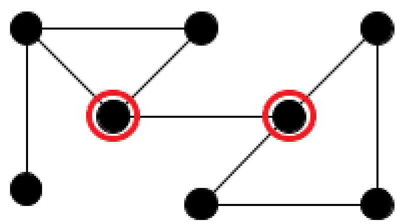
Vamos a determinar si G tiene número dominante $\leq k$, con $k = 3$.



Simplemente con probar un poco vemos que es posible abarcar todos los vértices utilizando los señalados en el grafo. Podemos comprobar como los vértices que no han sido seleccionados son adyacentes a otros que sí pertenecen al conjunto dominante, por tanto, podemos concluir que $\gamma(G) \leq 3$.

Ejemplo no válido

Ahora, vamos a comprobar si existe un conjunto dominante de tamaño 2 para G.



De la misma manera que antes, simplemente probando un par de veces podemos ver que no hay forma de abarcar todos los vértices seleccionando únicamente dos para conformar el conjunto dominante, por tanto podemos concluir que $\gamma(G) > 2$.

Tras analizar estos dos casos podemos afirmar que $\gamma(G) = 3$, ya que es el mínimo tamaño de un conjunto que domine a G.

Campos de aplicación

Cabe destacar que el problema del conjunto dominante es muy utilizado en protocolos de enrutamiento para redes Ad-hoc inalámbricas, con la finalidad de encontrar el camino más corto entre dos nodos que quieren comunicarse.

3. Demostración NP-completo

En este apartado vamos a demostrar que el problema ***Dominating Set*** **es NP-completo**.

Como ya hemos estudiado en clase, para que un problema sea NP-completo debe de cumplir dos requisitos: debe de pertenecer a la clase central de complejidad NP y cualquier lenguaje que pertenezca a NP debe ser reducible en tiempo polinómico a nuestro problema.

Aplicando esto a nuestro caso, lo que vamos a demostrar es:

Dominating Set Problem ∈ NP

Para demostrar que un problema pertenece a NP, debemos o bien construir una mTnD que sea capaz de aceptar la entrada en tiempo polinómico, o bien utilizar un verificador que sea capaz de determinar si acepta o no en tiempo polinómico.

En este caso vamos a utilizar el siguiente **verificador,** cuyo **certificado c** será en conjunto dominante:

Sea V = "Con la entrada⟨V, E, c⟩:

1) Para cada vértice v que esté en V:
    a) Comprobar si está en c.
    b) Si no, comprobar si es adyacente a alguno de los vértices de c.
2) Si se cumple alguna de las dos condiciones para todos los vértices aceptar, si no, rechazar."

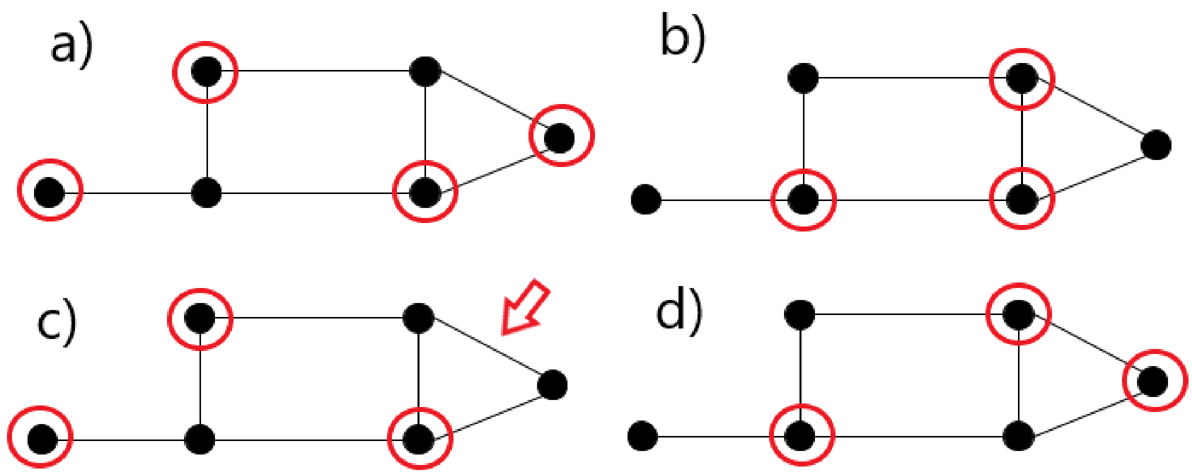
Analizando el algoritmo, vemos que tanto comprobar si los vértices están en c, como comprobar si son adyacentes a alguno se realiza en tiempo polinómico. Como hay que hacerlo para cada vértice del grafo, tendríamos que realizar n veces, siendo n el cardinal de V, una operación que tarda O(n), por tanto el verificador acaba en tiempo polinómico (O(n^2)). Por tanto, ***Dominating Set*** **es NP-completo**.

Vertex Cover $\leqslant_p$ *Dominating Set*

Para demostrar que *Dominating Set* es un problema NP-completo, vamos a comprobar si es reducible en tiempo polinómico a otro problema que ya sabemos que pertenece a esta clase. En este caso, hemos elegido *Vertex Cover.*

El problema **Vertex Cover**, o cobertura de vértices en español, trata de decidir si dado un grafo G y un número k, existe un subconjunto S de V tal que, para cada arista de *ab* de E, uno de sus vértices, a o b pertenece a S.

Vamos a ilustrar este problema para facilitar su comprensión, para ello, al igual que hemos hecho antes, vamos a ver diferentes situaciones con el mismo grafo G:



Primero vamos a analizar si alguno de los casos no es correcto. A primera vista, el caso a, b y d parecen correctos, sin embargo, en el caso c podemos comprobar que la arista señalada no tiene ninguno de sus vértices seleccionados, por tanto no es correcta.

Ahora, vemos que el tamaño del conjunto seleccionado es 4 para el caso a, y 3 para los casos b y d. A simple vista también podemos intuir que no es posible conseguir una cobertura correcta seleccionando solamente dos vértices. Por tanto, podemos concluir que las coberturas mínimas tendrán tamaño 3.

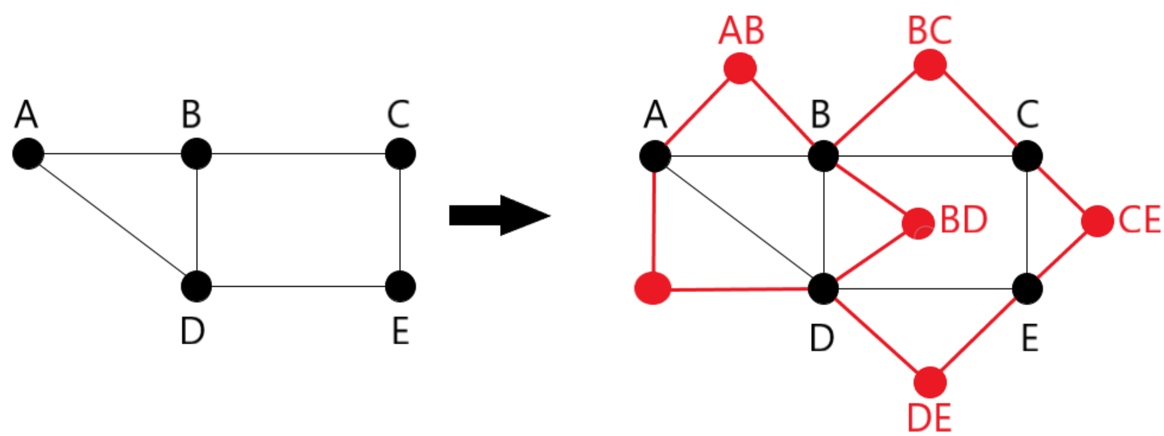
Este problema es muy utilizado para probar la pertenencia de otros problemas a la clase NPC. Además, es uno de los *21 problemas NP-completos de Karp*.

Gadget

Para realizar la reducción de *Vertex Cover* a *Dominating Set* en tiempo polinómico vamos a emplear un gadget sencillo: **por cada arista vamos a añadir un nuevo vértice y conectarlo con los dos vértices que la conforman**. Es decir, dado un grafo G = ⟨V, E⟩:

$$\forall ab \in E,\ G' = \langle V \cup \{ab\},\ E \cup \{(a, ab), (b, ab)\}\rangle$$

Por ejemplo, vamos a realizar la transformación con un grafo:



Ahora vamos a definir la función de transición. Sea f una función definida:

$$f\colon Vertex\ Cover \rightarrow Dominating\ Set$$

$$f(G) = G'$$

$$f(G\langle V, E\rangle) = G'\langle V', E'\rangle\ ,\ siendo\ \forall ab \in E,\ V' = V \cup \{ab\}\ ,\ E' = E \cup \{(a, ab), (b, ab)\}\rangle$$

Para demostrar que *Dominating Set* es NP-completo, vamos a realizar la reducción en tiempo polinómico vía la función que acabamos de definir, es decir, vamos a demostrar la siguiente implicación:

$$G \in Vertex\ Cover \leftrightarrow f(G) \in Dominating\ Set$$

Demostración de la doble implicación

Vamos ahora a demostrar que la doble implicación anterior es cierta y que, por tanto, *Dominating Set* es NP-completo.

G ∈ Vertex Cover ⟶ f(G) ∈ Dominating Set

Supongamos que un grafo G tiene cobertura de vértices de tamaño k. Cada arista de G tiene uno de sus vértices pertenecientes a *Vertex Cover.* Podemos decir entonces si un vértice u está contenido en *Vertex Cover,* entonces su adyacente v estará cubierto por un elemento del mismo.

Por tanto, los nuevos vértices añadidos son adyacentes a u y v, de los cuales al menos uno debe de estar en el conjunto de cobertura de vértices. Concluimos entonces que los vértices que conforman *Vertex Cover*, conforman de la misma manera el conjunto dominante de G', por tanto tiene un conjunto dominante del mismo tamaño.

f(G) ∈ Dominating Set ⟶ G ∈ Vertex Cover

Ahora vamos a suponer que G' tiene un conjunto dominante de tamaño k. En caso de que uno de los nuevos vértices pertenezca al conjunto dominante, puede ser sustituido por uno de los vértices originales, ya que son adyacentes. De esta manera, los vértices nuevos forman un triángulo con los originales, en el cual los vértices pueden ser sustituidos entre sí sin afectar al resto. Esto llevará a la eliminación de todos los vértices añadidos sin que afecte a las aristas abordadas por el conjunto dominante. Es decir, si G' tiene un conjunto dominante de tamaño k, también tendrá una cobertura de vértices del mismo tamaño.

f opera en tiempo polinómico

Por último, vamos a comprobar que la función de transición opera en tiempo polinómico.

Para un grafo G⟨V, E⟩:

1) Recorre todas sus aristas y las añade como vértices.
2) Añade aristas a los nuevos vértices.

Ambos pasos tardan tiempo polinómico, por lo que podemos concluir que efectivamente f opera en tiempo polinómico y que por tanto ***Dominating Set es NPC.***

4. Referencias

- Dominating Sets and Domination Numbers in Graph Theory | Baeldung on Computer Science.
- Proof that Dominant Set of a Graph is NP-Complete - GeeksforGeeks
- Dominating set - Wikipedia
- Vertex cover - Wikipedia