

Algoritmia y Complejidad

Ejercicio 32

Juan Carlos Alcausa Luque

Universidad de Málaga

Índice

1. Enunciado	2
2. Definición del problema	2
3. DOMINATING-SET pertenece a NP	2
4. Reducción desde VERTEX-COVER	2
4.1. Ejemplo de reducción	3
5. Equivalencia entre instancias	3
6. Preguntas	4
7. Conclusión	4

1. Enunciado

Demostrar que el lenguaje:

$$\text{DOMINATING-SET} = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ tiene un conjunto dominante de tamaño } k\}$$

es NP-completo, mediante una reducción desde VERTEX-COVER.

2. Definición del problema

Un conjunto $D \subseteq V$ es un **conjunto dominante** de un grafo no dirigido $G = (V, E)$ si cada vértice $v \in V \setminus D$ es adyacente a al menos un vértice en D . El problema de decisión **DOMINATING-SET** consiste en determinar, dado un grafo G y un entero k , si existe un conjunto dominante D tal que $|D| \leq k$.

3. DOMINATING-SET pertenece a NP

El problema **DOMINATING-SET** pertenece a NP porque es posible verificar una solución candidata en tiempo polinómico. Basta con verificar que todos los vértices no pertenecientes al conjunto D están conectados a al menos un vértice en D .

Teorema 1. *DOMINATING-SET pertenece a NP.*

Demostración. Dado un grafo $G = (V, E)$, un entero k y un subconjunto candidato $D \subseteq V$, se puede verificar si D es un conjunto dominante en tiempo $O(n^2)$, donde $n = |V|$. Para cada vértice $v \notin D$, se comprueba si existe al menos un vecino en D , lo cual se puede hacer recorriendo la lista de adyacencias o la matriz de adyacencia. Como hay a lo sumo n vértices y se verifican adyacencias en $O(n)$, la verificación es polinómica. \square

4. Reducción desde VERTEX-COVER

El problema **VERTEX-COVER** es NP-completo. Dado un grafo $G = (V, E)$ y un entero k , pregunta si existe un subconjunto $C \subseteq V$ de tamaño a lo sumo k tal que toda arista de G tiene al menos un extremo en C .

Construcción de la reducción

Sea $G = (V, E)$ una instancia de **VERTEX-COVER**. Definimos una función de transformación f que construye un grafo $G' = (V', E')$ para una instancia equivalente de **DOMINATING-SET**, tal que:

- Por cada arista $e = (u, v) \in E$, añadimos un nuevo vértice w_e y conectamos w_e con u y con v .
- $V' = V \cup \{w_e \mid e \in E\}$

$$\blacksquare E' = \{(u, w_e), (v, w_e) \mid e = (u, v) \in E\}$$

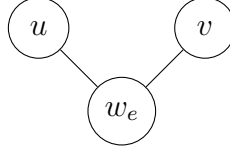


Figura 1: Gadget de la reducción para cada arista (u, v)

4.1. Ejemplo de reducción

Supongamos que el grafo G está definido como:

$$V = \{1, 2, 3\}, \quad E = \{(1, 2), (2, 3)\}$$

Una posible cobertura de vértices de tamaño 2 sería $C = \{2, 3\}$, ya que cubre ambas aristas.

Transformamos G en G' de la siguiente forma:

$$V' = \{1, 2, 3, w_{12}, w_{23}\}$$

$$E' = \{(1, w_{12}), (2, w_{12}), (2, w_{23}), (3, w_{23})\}$$

Entonces, el conjunto dominante de G' también puede ser $\{2, 3\}$, ya que domina a w_{12} , w_{23} , y también a 1, pues está conectado con w_{12} (que está conectado a 1).

5. Equivalencia entre instancias

\Rightarrow

Si $C \subseteq V$ es un conjunto de cobertura de vértices en G , entonces C es también un conjunto dominante en G' . Esto es porque:

- Todos los vértices originales de G están en V' y dominados si están en C .
- Los nuevos vértices w_e , añadidos para cada arista $e = (u, v)$, están conectados a u y v , al menos uno de los cuales está en C por definición de cobertura.

\Leftarrow

Si $D \subseteq V'$ es un conjunto dominante en G' , entonces se puede construir un conjunto de cobertura $C \subseteq V$ tal que:

- Si algún vértice añadido w_e está en D , podemos reemplazarlo por uno de sus vecinos u o v en el conjunto dominante sin perder dominancia.
- De este modo, conseguimos un conjunto $C \subseteq V$ de tamaño a lo sumo k , que cubre todas las aristas de G .

Teorema 2. $VERTEX-COVER \leq_p DOMINATING-SET$

Demostración. La transformación descrita se puede realizar en tiempo polinómico respecto al tamaño de G . Además, como se ha demostrado, G tiene un *vertex cover* de tamaño k si y solo si G' tiene un conjunto dominante de tamaño k . \square

6. Preguntas

- ¿Es toda cobertura de vértices un conjunto dominante? **Sí**, ya que si cada arista está cubierta, entonces los nodos extremos están en el conjunto o son vecinos de nodos en el conjunto.
- ¿Es todo conjunto dominante una cobertura de vértices? **No necesariamente**. Puede ocurrir que algunos vértices estén dominados por vecinos pero que una arista no tenga ninguno de sus extremos en el conjunto.
- ¿Qué ocurre si el grafo tiene vértices aislados? Estos deben formar parte obligatoriamente del conjunto dominante, ya que no tienen vecinos.
- ¿Puede un conjunto dominante tener menor tamaño que una cobertura de vértices? En general, **sí**, aunque en el caso construido por la reducción ambos tendrán el mismo tamaño.

7. Conclusión

Hemos demostrado que:

- $DOMINATING-SET$ pertenece a NP.
- Existe una reducción en tiempo polinómico desde $VERTEX-COVER$ a $DOMINATING-SET$.
- La reducción conserva la propiedad de solución entre instancias.

Por tanto, $DOMINATING-SET$ es NP-completo.