# Algoritmia y Complejidad

Ejercicio 32

Juan Carlos Alcausa Luque

Universidad de Málaga

# Índice

# 1. Enunciado

Demostrar que el lenguaje:

$$\texttt{DOMINATING-SET} = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ tiene un conjunto dominante de tamaño } k\}$$

es NP-completo, mediante una reducción desde `VERTEX-COVER`.

# 2. Definición del problema

Un conjunto $D \subseteq V$ es un **conjunto dominante** de un grafo no dirigido $G = (V, E)$ si cada vértice $v \in V \setminus D$ es adyacente a al menos un vértice en $D$. El problema de decisión `DOMINATING-SET` consiste en determinar, dado un grafo $G$ y un entero $k$, si existe un conjunto dominante $D$ tal que $|D| \leq k$.

# 3. DOMINATING-SET pertenece a NP

El problema `DOMINATING-SET` pertenece a NP porque es posible verificar una solución candidata en tiempo polinómico. Basta con verificar que todos los vértices no pertenecientes al conjunto $D$ están conectados a al menos un vértice en $D$.

**Teorema 1.** *`DOMINATING-SET` pertenece a NP.*

*Demostración.* Dado un grafo $G = (V, E)$, un entero $k$ y un subconjunto candidato $D \subseteq V$, se puede verificar si $D$ es un conjunto dominante en tiempo $O(n^2)$, donde $n = |V|$. Para cada vértice $v \notin D$, se comprueba si existe al menos un vecino en $D$, lo cual se puede hacer recorriendo la lista de adyacencias o la matriz de adyacencia. Como hay a lo sumo $n$ vértices y se verifican adyacencias en $O(n)$, la verificación es polinómica. □

# 4. Reducción desde VERTEX-COVER

El problema `VERTEX-COVER` es NP-completo. Dado un grafo $G = (V, E)$ y un entero $k$, pregunta si existe un subconjunto $C \subseteq V$ de tamaño a lo sumo $k$ tal que toda arista de $G$ tiene al menos un extremo en $C$.

## Construcción de la reducción

Sea $G = (V, E)$ una instancia de `VERTEX-COVER`. Definimos una función de transformación $f$ que construye un grafo $G' = (V', E')$ para una instancia equivalente de `DOMINATING-SET`, tal que:

- Por cada arista $e = (u, v) \in E$, añadimos un nuevo vértice $w_e$ y conectamos $w_e$ con $u$ y con $v$.
- $V' = V \cup \{w_e \mid e \in E\}$

- $E' = \{(u, w_e), (v, w_e) \mid e = (u, v) \in E\}$

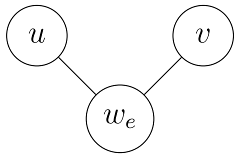

Figura 1: Gadget de la reducción para cada arista $(u, v)$

## 4.1. Ejemplo de reducción

Supongamos que el grafo $G$ está definido como:

$$V = \{1, 2, 3\}, \quad E = \{(1, 2), (2, 3)\}$$

Una posible cobertura de vértices de tamaño 2 sería $C = \{2, 3\}$, ya que cubre ambas aristas.

Transformamos $G$ en $G'$ de la siguiente forma:

$$V' = \{1, 2, 3, w_{12}, w_{23}\}$$
$$E' = \{(1, w_{12}), (2, w_{12}), (2, w_{23}), (3, w_{23})\}$$

Entonces, el conjunto dominante de $G'$ también puede ser $\{2, 3\}$, ya que domina a $w_{12}$, $w_{23}$, y también a 1, pues está conectado con $w_{12}$ (que está conectado a 1).

## 4.2. Equivalencia

$\Rightarrow$

Si $C \subseteq V$ es un conjunto de cobertura de vértices en $G$, entonces $C$ es también un conjunto dominante en $G'$. Esto es porque:

- Todos los vértices originales de $G$ están en $V'$ y dominados si están en $C$.
- Los nuevos vértices $w_e$, añadidos para cada arista $e = (u, v)$, están conectados a $u$ y $v$, al menos uno de los cuales está en $C$ por definición de cobertura.

$\Leftarrow$

Si $D \subseteq V'$ es un conjunto dominante en $G'$, entonces se puede construir un conjunto de cobertura $C \subseteq V$ tal que:

- Si algún vértice añadido $w_e$ está en $D$, podemos reemplazarlo por uno de sus vecinos $u$ o $v$ en el conjunto dominante sin perder dominancia.
- De este modo, conseguimos un conjunto $C \subseteq V$ de tamaño a lo sumo $k$, que cubre todas las aristas de $G$.

**Teorema 2.** *VERTEX-COVER* $\leq_p$ *DOMINATING-SET*

*Demostración.* La transformación descrita se puede realizar en tiempo polinómico respecto al tamaño de $G$. Además, como se ha demostrado, $G$ tiene un *vertex cover* de tamaño $k$ si y solo si $G'$ tiene un conjunto dominante de tamaño $k$. $\square$

# 5. Preguntas

- ¿Es toda cobertura de vértices un conjunto dominante? **Sí**, ya que si cada arista está cubierta, entonces los nodos extremos están en el conjunto o son vecinos de nodos en el conjunto.
- ¿Es todo conjunto dominante una cobertura de vértices? **No necesariamente**. Puede ocurrir que algunos vértices estén dominados por vecinos pero que una arista no tenga ninguno de sus extremos en el conjunto.
- ¿Qué ocurre si el grafo tiene vértices aislados? Estos deben formar parte obligatoriamente del conjunto dominante, ya que no tienen vecinos.
- ¿Puede un conjunto dominante tener menor tamaño que una cobertura de vértices? En general, **sí**, aunque en el caso construido por la reducción ambos tendrán el mismo tamaño.

# 6. Conclusión

Hemos demostrado que:

- `DOMINATING-SET` pertenece a NP.
- Existe una reducción en tiempo polinómico desde `VERTEX-COVER` a `DOMINATING-SET`.
- La reducción conserva la propiedad de solución entre instancias.

**Por tanto, `DOMINATING-SET` es NP-completo.**