$2SAT \in P$

Ejercicio 27 de Sipser

Juan Carlos Alcausa Luque

Universidad de Málaga

Contenido

Problema 2SAT

Definición

Una 2cnf-fórmula es un *AND* de cláusulas, donde cada cláusula es un *OR* de a lo sumo dos literales.

Problema

$2SAT = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ es una 2cnf-fórmula}\}$

¿Es $2SAT \in P$? Es decir, ¿existe un algoritmo polinómico para decidir si una 2cnf-fórmula es satisfacible?

Ejemplos de Fórmulas 2-CNF

Fórmula 1

$$\phi_1 = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3)$$

Fórmula 2

$$\phi_2 = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg z)$$

Fórmula 3

$$\phi_3 = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$$

Transformación a Grafo

Equivalencias Lógicas

Para cualquier cláusula $(a \vee b)$:

- $(a \vee b) \equiv (\neg a \to b)$
- $(a \vee b) \equiv (\neg b \to a)$

Construcción del Grafo

- Por cada variable x_i, creamos dos nodos: x_i y $\neg x_i$
- Por cada cláusula $(a \vee b)$, añadimos dos aristas dirigidas:
  - $\neg a \to b$
  - $\neg b \to a$
- Para cláusulas unitarias (a), añadimos $\neg a \to a$

Teorema

Una fórmula 2-CNF ϕ es satisfacible si y solo si no existe ninguna variable x_i tal que x_i y $\neg x_i$ estén en la misma componente fuertemente conexa (SCC) del grafo de implicaciones.

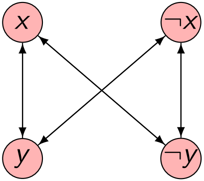
Idea

- Si x_i y $\neg x_i$ están en la misma SCC, entonces $x_i \Rightarrow \neg x_i$ y $\neg x_i \Rightarrow x_i$
- Esto crea una contradicción lógica: no existe ninguna asignación válida
- Un ciclo de inconsistencia es un ciclo que contiene tanto x_i como $\neg x_i$

Ejemplo: Fórmula No Satisfacible

Consideremos:

$$\phi_3 = \begin{array}{l} (x \vee y) \wedge \\ (\neg x \vee y) \wedge \\ (x \vee \neg y) \wedge \\ (\neg x \vee \neg y) \end{array}$$



Transformando a implicaciones:

- $(\neg x \to y)$, $(\neg y \to x)$
- $(x \to y)$, $(\neg y \to \neg x)$
- $(\neg x \to \neg y)$, $(y \to x)$
- $(x \to \neg y)$, $(y \to \neg x)$

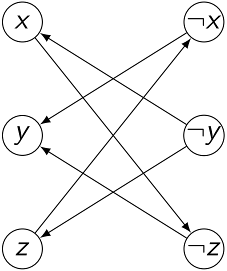
Resultado

¡Todos los nodos están en la misma SCC! Contradicción: ϕ_3 no es satisfacible.

Ejemplo: Fórmula Satisfacible

Consideremos:

$$\phi_2 = \begin{array}{l} (x \vee y)\wedge \\ (y \vee z)\wedge \\ (\neg x \vee \neg z) \end{array}$$



Transformando a implicaciones:

- $(\neg x \rightarrow y)$, $(\neg y \rightarrow x)$
- $(\neg y \rightarrow z)$, $(\neg z \rightarrow y)$
- $(x \rightarrow \neg z)$, $(z \rightarrow \neg x)$

Análisis correcto

Este grafo no tiene SCCs grandes, solo SCCs triviales (nodos individuales). No hay ciclos que contengan tanto una variable como su negación. Por tanto, la fórmula ϕ_2 es satisfacible. Una asignación válida es: $x = 1, y = 1, z = 0$.

Demostración Formal

Teorema

ϕ es satisfacible si y solo si no hay un ciclo de inconsistencia en su grafo de implicaciones.

Demostración.

- ($\Rightarrow$) Si existe un ciclo de inconsistencia, entonces $x_i \Rightarrow \neg x_i$ y $\neg x_i \Rightarrow x_i$ para algún i. Esto crea la equivalencia lógica $x_i \leftrightarrow \neg x_i$, que es una contradicción.
- ($\Leftarrow$) Si no existe ciclo de inconsistencia, podemos construir una asignación satisfactoria: elegimos una variable no asignada x_i, le asignamos un valor (y a todos sus implicados), eliminamos esos nodos y repetimos hasta asignar todas las variables.

$\square$

Algoritmo para 2SAT

Algorithm 1 2SAT (vars, cláusulas)

```
grafo ← construir_grafo_de_implicación(vars, cláusulas)
mapa_scc ← encontrar_SCCs(grafo)
for cada x ∈ vars do
    if mapa_scc[x] = mapa_scc[-x] then
        return falso
    end if
end for
return verdadero
```

Explicación

- Construimos el grafo de implicación
- Encontramos todas las componentes fuertemente conexas (SCCs)
- Verificamos que ninguna variable y su negación estén en la misma SCC

Complejidad Temporal

$$T(V,E) = O(|V| + |E| + |V| + |E| + \frac{|V|}{2} * 2) = O(|V| + |E|)$$

1. **Construcción del grafo de implicación**: $|V| + |E|$
2. **Encontrar las componentes fuertemente conexas**: $O(|V| + |E|)$
   - La función `encontrar_SCCs(grafo)` implementa el algoritmo de Kosaraju
   - Este algoritmo tiene una complejidad temporal de $O(|V| + |E|)$
   - Esta es la parte dominante de la complejidad total
3. **Verificación de contradicciones**: $|V|$
   - El bucle `for` itera sobre cada variable, habiendo $\frac{|V|}{2}$ variables
   - La comprobación de si una variable y su negación están en la misma SCC es una operación de tiempo constante (2 para cada iteración) gracias al mapa que devuelve el algoritmo.

Conclusión

El algoritmo tiene complejidad temporal $O(|V| + |E|)$, que expresado en términos de variables y cláusulas es $O(n + m)$.
Por tanto, $2SAT \in P$

Implicaciones Prácticas

Aplicaciones de 2SAT

- **Programación lógica**: Resolución eficiente de restricciones binarias
- **Planificación**: Problemas con restricciones mutuamente exclusivas
- **Verificación de hardware**: Circuitos con restricciones de dos literales
- **Toma de decisiones**: Problemas con opciones binarias y restricciones sencillas

Conclusiones

- 2SAT es un problema de satisfacibilidad resoluble en tiempo polinómico, lo que implica que $2SAT \in P$
- La clave del enfoque es la transformación del problema a un grafo de implicaciones
- La verificación de satisfacibilidad se reduce a comprobar la ausencia de ciclos de inconsistencia
- El algoritmo tiene una complejidad temporal de $O(|V| + |E|)$