Posibles preguntas Examen

- **Definir**

que ~~consume~~ opera en tiempo

TIME($f(n)$) : $\{ L \in \Sigma^* \mid L$ es decidido por una MTD en $O(f(n)) \}$

$\exists M_L$ MTD que decide L en nº pasos $\leq f(n)$

NTIME($f(n)$) : $\{ L \in \Sigma^* \mid L$ es decidido por una MTnD en $O(f(n)) \}$

$\exists N_L$ MTnD que decide L en nº pasos $\leq f(n)$

SPACE($f(n)$) : $\{ L \in \Sigma^* \mid L$ es decidido por una MTD que consume espacio $O(f(n)) \}$

nº de celdas

NSPACE($f(n)$) : $\{ L \in \Sigma^* \mid L$ es decidido por una MTnD que consume espacio $O(f(n)) \}$

- **Relaciones de contenido** entre TIME y SPACE (NTIME y NSPACE)

Sean f, g funciones tal que $f(n) \leq g(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) TIME($f(n)$) $\subseteq$ NTIME($f(n)$)

2) SPACE($f(n)$) $\subseteq$ NSPACE($f(n)$)

3) TIME($f(n)$) $\subseteq$ TIME($g(n)$)

4) SPACE($f(n)$) $\subseteq$ SPACE($g(n)$)

5) NTIME($f(n)$) $\subseteq$ NTIME($g(n)$)

6) NSPACE($f(n)$) $\subseteq$ NSPACE($g(n)$)

$\boxed{7)}$ TIME($f(n)$) $\subseteq$ SPACE($f(n)$)

8) NTIME($f(n)$) $\subseteq$ NSPACE($f(n)$)

9) NTIME($f(n)$) $\subseteq$ TIME($2^{f(n)}$)

10) NTIME($f(n)$) $\subseteq$ SPACE($f(n)$)

11) SPACE($f(n)$) $\subseteq$ TIME($2^{f(n)}$)

- **Límite mínimo de las funciones de complejidad en tiempo**

$\boxed{|w| = n}$

Una máquina de Turing necesita al menos n pasos para leer su entrada.

Ejemplo $\Rightarrow$ búsqueda no estructurada en una lista desordenada, peor caso el mínimo es $O(n)$, revisar cada elemento de la lista

- **Límite mínimo de las funciones de complejidad en espacio**

$\boxed{\log n}$ donde $n = |w|$

- **Clases centrales de complejidad en tiempo y en espacio**

$P = \bigcup_k \text{TIME}[n^k]$

$NP = \bigcup_k \text{NTIME}[n^k]$

$EXP = \bigcup_k \text{TIME}[e^{n^k}]$

$L = \text{SPACE}[\log n]$

$NL = \text{NSPACE}[\log n]$

$PSPACE = \bigcup_k \text{SPACE}[n^k]$

- **Relaciones de contenido entre clases centrales de complejidad en tiempo. Lo mismo, pero entre c.c. de c. en espacio**

1) $P \subseteq NP$

Sabemos que $\text{TIME}(f(n)) \subseteq \text{NTIME}(f(n)) \quad \forall f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Si llamamos $n^k = f(n)$ tenemos :

$$TIME[n^k] \subseteq NTIME[n^k] \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bigcup_k TIME[n^k] \subseteq \bigcup_k NTIME[n^k] \Longrightarrow P \subseteq NP$$

2). NP ⊆ EXP

Sabemos que $NTIME(f(n)) \subseteq TIME(2^{f(n)}) \quad \forall f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Si llamamos $n^k = f(n)$ tenemos :

$$NTIME[n^k] \subseteq TIME[2^{n^k}] \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bigcup_k NTIME[n^k] \subseteq \bigcup_k TIME[2^{n^k}] \Longrightarrow NP \subseteq EXP$$

3) De ambas inclusiones, se deduce P ⊆ EXP

1) L ⊆ NL

Sabemos que $SPACE(f(n)) \subseteq NSPACE(f(n)) \quad \forall f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Si llamamos $\log n = f(n)$ tenemos :

$$SPACE[\log n] \subseteq NSPACE[\log n] \Longrightarrow L \subseteq NL$$

! 2) NL ⊆ PSPACE

Para demostrarlo veamos que NL ⊆ P :

Sea un lenguaje $L \in NL = NSPACE[\log n] \Longrightarrow \exists N_L$ MTND

que decide L en espacio $O(\log n)$.

Digamos que el nº de celdas ocupadas es $\log n \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ Como NL no puede repetir configuraciones, el nº máximo de pasos que da será el nº de de configuraciones posibles

$$n^o \text{ pasos} < |\Sigma|^{\log n} \cdot |Q| \cdot \log n = n^{\overbrace{\log |\Sigma|}^{\text{constante}}} \cdot |Q| \cdot \log n =$$

$$= n^k \cdot |Q| \cdot \log n < n^{k+1} \Longrightarrow L \text{ es decidido en tiempo } O(n^{k+1})$$

luego $L \in P$ y por lo tanto $NL \subseteq P$

Ahora, veamos que $P \subseteq PSPACE$

Sabemos que $TIME(f(n)) \subseteq SPACE(f(n)) \quad \forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Si llamamos $n^k = f(n)$ tenemos:

$$TIME[n^k] \subseteq SPACE[n^k] \quad \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bigcup_k TIME[n^k] \subseteq \bigcup_k SPACE[n^k] \Longrightarrow P \subseteq PSPACE$$

Por lo tanto, $NL \subseteq PSPACE$

3) De ambas inclusiones, se deduce $L \subseteq PSPACE$

- Relaciones de contenido combinadas entre clases centrales de complejidad en tiempo y en espacio.

1) $NL \subseteq P$ (implica $L \subseteq P$)

2) $NP \subseteq PSPACE$ (implica $P \subseteq PSPACE$)

Sabemos que $NTIME(f(n)) \subseteq SPACE(f(n)) \quad \forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Si llamamos $n^k = f(n)$, tenemos:

$NTIME[n^k] \subseteq SPACE[n^k] \quad \forall k \in \mathbb{N}, \ k \geq 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \bigcup_k NTIME[n^k] \subseteq \bigcup_k SPACE[n^k] \Longrightarrow NP \subseteq PSPACE$

3) $PSPACE \subseteq EXP$

esto hay que demostrarlo

Sabemos que $\boxed{SPACE(f(n)) \subseteq TIME(2^{f(n)})} \quad \forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Si llamos $n^k = f(n)$, tenemos:

$SPACE[n^k] \subseteq TIME[2^{n^k}] \quad \forall k \in \mathbb{N}, \ k \geq 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \bigcup_k SPACE[n^k] \subseteq \bigcup_k TIME[2^{n^k}] \Longrightarrow PSPACE \subseteq EXP$

- Recurso tiempo y recurso espacio

El recurso tiempo se refiere al nº de pasos de cómputo que la MT necesita para completar la tarea y el recurso espacio se refiere a la cantidad de celdas de la cinta que la máquina utiliza durante la ejecución

Diferencia : el recurso del espacio se puede reutilizar ya que se puede escribir en una misma celda cuantas veces queramos, mientras que de tiempo evidentemente no se puede reutilizar.

- **Dada una clase de complejidad C, define co-C**

co-C $\Longrightarrow$ clase de complejidad complementaria a C

$co\text{-}C = \{ \overline{L} \mid L \in C \}$

- **Relaciones de contenido entre P, co-P, NP y co-NP**

1) $co\text{-}P = P$

Sea $\overline{L} \in co\text{-}P \Longrightarrow L \in P \Longrightarrow \exists M_L$ mTD :

* $w \in L \iff q_0 w \underset{\text{poli-t}}{\overset{*}{\vdash}} u\, q_{acc}\, v$
* $w \notin L \iff q_0 w' \underset{\text{poli-t}}{\overset{*}{\vdash}} u'\, q_{rej}\, v'$

Entonces $M'_{\overline{L}}$:

* cuando M_L acepta la cadena $\longrightarrow$ rechazar (poli-t + 1 $\equiv$ poli-t)
* cuando M_L rechaza la cadena $\longrightarrow$ aceptar (poli-t + 1 $\equiv$ poli-t)

$M'_{\overline{L}}$ reconoce $\overline{L}$ en poli-t, $\overline{L} \in P \Longrightarrow$ $co\text{-}P = P$

2) Si $A \subseteq B \Longrightarrow co-A \subseteq co-B$

Como tenemos $P \subseteq NP$ tenemos también que $co-P \subseteq co-NP$

- $P = co-P$
- $P \subseteq NP$
- $co-P \subseteq NP$
- $P \subseteq co-NP$
- $co-P \subseteq co-NP$

- **Notación O (o mayúscula)**

$f(n) \in O(g(n))$ $\qquad 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$ $\qquad \lim (f(n)/g(n)) < \infty$

$\exists n_0 > 0 \ ; \ \forall n \geq n_0$

- **Demostrar $SPACE(f(n)) \subseteq TIME(2^{O(f(n))})$**

Sea un lenguaje $L \in SPACE(f(n)) \Longrightarrow \exists M_L$ mTD que decide L y consume espacio $O(f(n))$ (n^o de celdas $\leq f(n)$)

Tenemos que el número máximo de configuraciones:

$|\Sigma|^{f(n)} \cdot f(n) \cdot |Q| = c^{f(n)} \cdot f(n) \cdot d$

n^o de pasos $\leq c^{f(n)} \cdot f(n) \cdot d = 2^{\log(c^{f(n)} \cdot f(n) \cdot d)} =$

$= 2^{(f(n) \cdot \log c + \log f(n) + \log d)} = 2^{O(f(n))} \Longrightarrow$

de L

$(TIME(f(n)) \subseteq SPACE(f(n)))$

$\Longrightarrow SPACE(f(n)) \subseteq TIME(2^{O(f(n))})$

$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

Preguntas Tipo Test : conceptos

- PSPACE

  Clase de lenguajes que es decidible en espacio polinómico determinista.

- La clase SPACE(n) está contenida estrictamente en SPACE(n · log n)

- Si un problema PSPACE-completo se demuestra que está en NP, entonces se cumple que PSPACE = NP

- SPACE(n) ⊆ NSPACE(n)

- La clase TIME(n) está contenida estrictamente en TIME(n · log n)

- La clase TIME(n^2) esta contenida estrictamente en P.

- <u>Verdadero o Falso</u>. Cada lenguaje en NP es verificable en tiempo polinómico determinista (existe un verificador)

  Verdadero