Ejercicio 24 Complejidad Temporal

Yolanda Sarmiento Rincón

A 2cnf-formula is an AND of clauses where each clause is an OR of at most two literals. Let $2SAT = \{< \Phi > | \Phi \text{ is a satisfiable 2cnf-formula}\}$. Show that $2SAT \in P$.

Una 2cnf-formula es una conjunción de cláusulas dónde cada una de ellas es una disyunción de como mucho dos literales. Sea $2SAT = \{< \Phi > | \Phi \text{ es una 2cnf-formula satisfacible}\}$. Demuestra que $2SAT \in P$.

Para ello deberemos encontrar una forma de hayar una asignación de verdad a las variables que haga que la fórmula dada sea verdadera en tiempo polinómico.

1 Representación del problema

Consideremos $\Phi = c_1 \wedge ... \wedge c_s$ donde $c_i = x_i$ o $c_i = x_i \vee y_i$ con variables $x_1, x_2, ..., x_n$.

Sabemos que cada una de las cláusulas $x \vee y$ es lógicamente equivalente a $(\bar{x} \to y)$ y a $(\bar{y} \to x)$ y que $x \equiv x \vee x \equiv \bar{x} \to x$. Por lo que podemos sustituir cada cláusula por la conjunción de ambas implicaciones. Quedandonos $\Phi \equiv \tilde{\Phi} = (\bar{x}_1 \to y_1) \wedge (\bar{y}_1 \to x_1) \wedge ... \wedge (\bar{x}_s \to y_s) \wedge (\bar{y}_s \to x_s)$. En el caso de que la cláusula tuviese un único literal se nos quedarán dos implicaciones idénticas.

Formemos entonces un grafo dirigido G donde los nodos serán las variables y sus respectivas negaciones, es decir $V = \{x_1, x_2, ..., x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n\}$ y una arista de x a y por cada implicación $(x \to y)$ de $\tilde{\Phi}$. Notese que si hay una arista de x a y entonces también la hay de $\bar{y}$ a $\bar{x}$.

2 Algoritmo

Si encontramos un camino de x_i a $\bar{x}_i$ y de $\bar{x}_i$ a x_i, es decir $x_i \implies \bar{x}_i$ y $\bar{x}_i \implies x_i$ entonces tenemos que $x_i \iff \bar{x}_i$ lo cual es falso, por lo que si en el grafo existen estos caminos, entonces Φ es insatisfacible. Veamos que si no existen ambos caminos, entonces Φ es satisfacible.

Sea una variable x_i, como no existen ambos caminos, no se puede dar simultáneamente $x_i \implies \bar{x}_i$ y $\bar{x}_i \implies x_i$. Si $x_i \implies \bar{x}_i$ es falso, tomamos el literal x_i, en caso contrario tomamos $\bar{x}_i$.

A continuación asignamos verdadero al literal seleccionado así como a todos aquellos para los que exista un camino. Notese que nunca asignaremos verdadero simultáneamente a x_m y a $\bar{x}_m$ ya que si $x_i \implies x_m$ y $x_i \implies \bar{x}_m$ entonces $x_m \implies \bar{x}_i$ luego $x_i \implies \bar{x}_i$ pero en tal caso habríamos seleccionado $\bar{x}_i$, analogamente, si $\bar{x}_i \implies x_m$ y $\bar{x}_i \implies \bar{x}_m$ entonces $x_m \implies x_i$ luego $\bar{x}_i \implies x_i$ pero en tal caso habríamos seleccionado x_i y $\bar{x}_i$ sería falso.

Finalmente eliminamos todos los nodos cuyos literales (o su complemento) hayan sido asignados y repetimos el proceso hasta que todas esten asignadas. Luego la asignación de valores resultante satisface todas las implicaciones y por tanto Φ es satisfacible.

3 Conclusión

Por tanto Φ es satisfacible si y solo si no existe un camino de x_i a $\bar{x}_i$ y otro de $\bar{x}_i$ a x_i simultáneamente. Esta búsqueda se realiza en tiempo polinómico con algoritmos de búsqueda en profundidad, es más la complejidad temporal de estos algoritmos será O(2n + k) siendo 2n el número de nodos y k el número de aristas que será menor o igual que 2s. Luego la compjedidad será lineal obteniendo que $2SAT \in P$

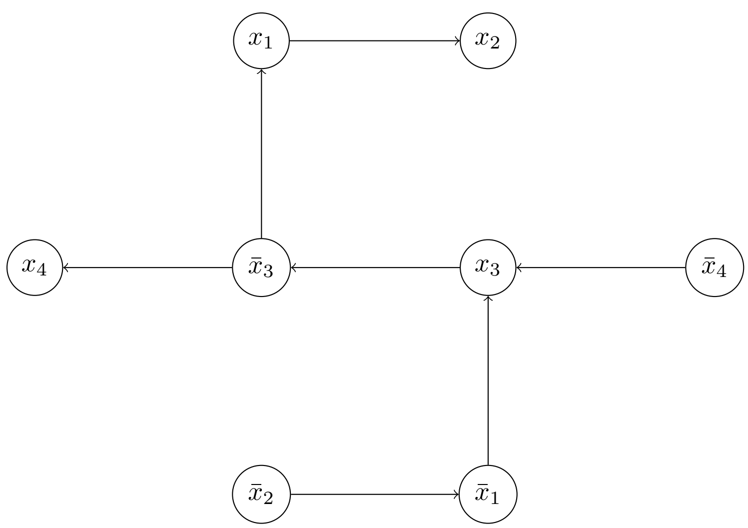
4 Ejemplos

4.1 $\Phi = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge \bar{x}_3 \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge \bar{x}_2$ pertenece a 2SAT.

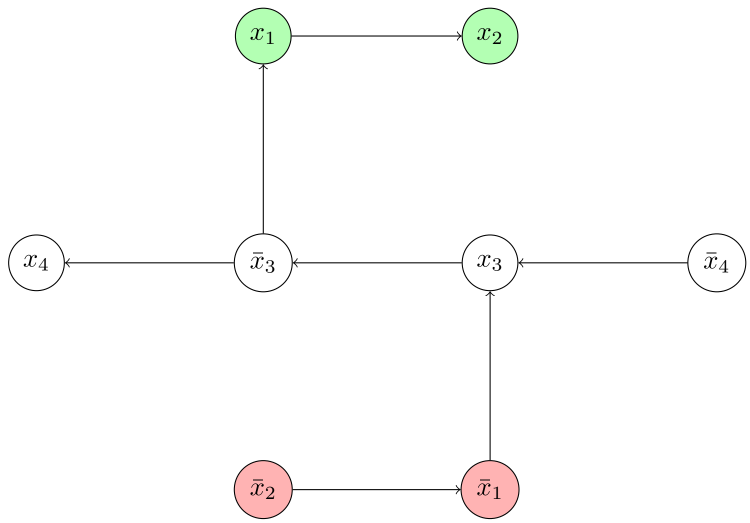
En primer lugar formamos el grafo con nodos $\{x_1, x_2, x_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ y sus correspondientes aristas.

Ahora seleccionamos a la variable x_3 por ejemplo, pero existe camino de x_3 a $\bar{x}_3$ y de $\bar{x}_3$ a x_3, luego Φ es insatisfacible.

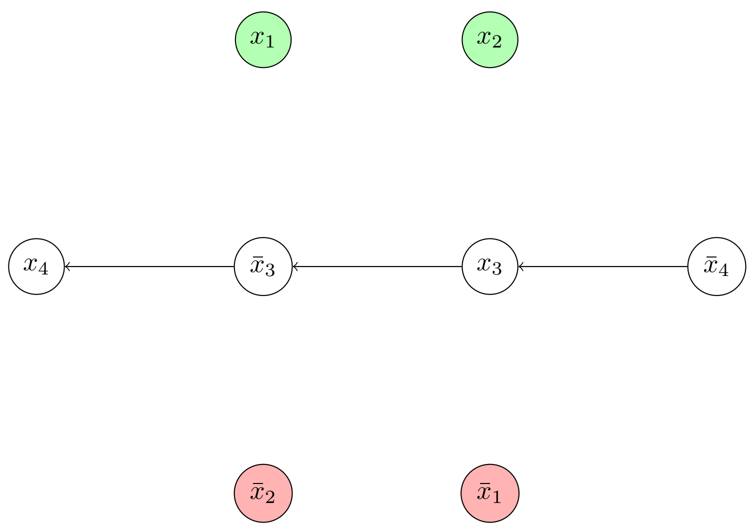
4.2 $\Phi = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge \bar{x}_3 \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_4) \in$ 2SAT.



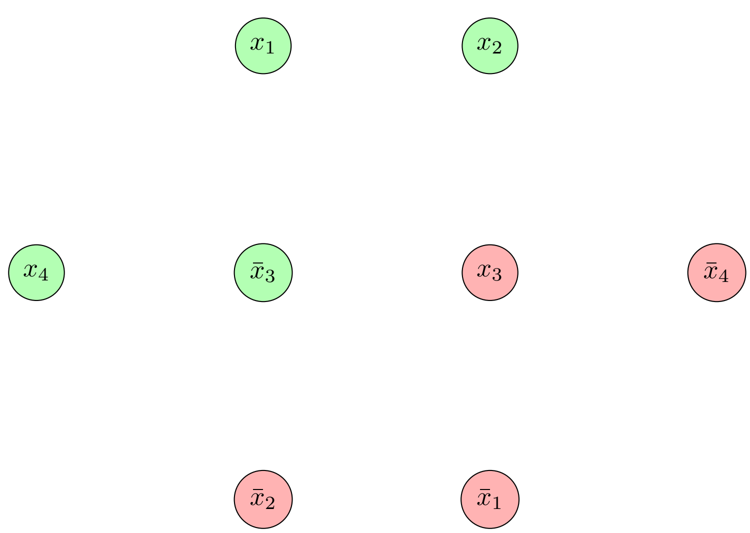
Ahora seleccionamos a la variable $_1$, como no existe camino de x_1 a $\bar{x}_1$, le asignamos verdadero a x_1 y a todos los nodos tales que exista un camino desde x_1.



A continuación eliminamos del grafo los literales ya asignados.



Si seleccionamos la variable $_3$, como existe camino de x_3 a $\bar{x}_3$, le asignamos verdadero a $\bar{x}_3$ y a todos los nodos tales que exista un camino desde $\bar{x}_3$ y los eliminamos del grafo.



Como ya no nos queda ninguna variable sin asignar, entonces Φ es satisfacible cuando $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 1)$.