EJERCICIOS
CAPITULO I y II
SISTEMAS
INTELIGENTES
II

Clase 2. Ejemplo 1. Supuesto 1. || (Ejercicio 1.1. Apuntes)

Supongamos un motor de inferencias hacia delante con resolución de conflictos según orden de las reglas y cuya configuración final es que se de demuestre alguna hipotesis.

1) Comentamos inicializando la memoria de trabajo (MT)

MT = { hay gasolina, motor no enciende, luces ~~sí~~ encienden }

2) Seleccionamos reglas aplicables

R = { R4, R3 }

3) Resolución de conflictos. Seleccionamos la regla con más prioridad, por el orden, R3.

4) Aplicamos R3 ; Motor no enciende ∧ luces sí ⇒ arranque

5) Actualizamos MT

MT = { hay gasolina, motor no, luces sí, arranque }

6) ¿Hemos acabado? Ya hemos probado una hipotesis así que sí.

Concluimos que el problema es de arranque.

Clase 2. Ejemplo 1. Supuesto 2. ||

Supongamos un motor de inferencias hacia delante con resolución por orden inverso de reglas y configuración final cuando no pueden aplicarse más reglas.

1) Inicializamos MT

MT = { hay gasolina, motor no, luces sí }

2) Seleccionamos reglas

R = { R3, R4 }

3) Conflictos elegimos R4

4) Aplicamos R4 y actualizo MT

MT = { hg, mn, ls, mrg }

5) ¿He acabado? No

6) Reglas Aplicables R = { R3, R1 }

6) Conflictos elige R3

7) Aplico y actualizo MT

MT = { hg, mn, ls, mrg, arranque }

8) Fin? No

9) Selecciono reglas R = { R1 }

10) No hay conflictos

11) Aplica R1 y actualiza MT

MT = { hg, mn, ls, mrg, arranque, bujías }

12) Fin? Sí

Concluye que el problema de arranque y bujías.

Ejemplo 1 Supuesto 3

Supongamos motor hacia atrás cuya configuración fuerte es probar una hipótesis y el objetivo es bujías

1) Iniciamos memoria de trabajo

MT = { bujías }

2) objetivo = { bujías }

3) La regla aplicable es R1.

4) No hay conflictos

5) Antecedentes = { Motor no, Recibe Gasolina }

6) Actualizar MT. Como Motor no es dado

MT = { Bujías, ~~Motor~~ Gasolina }

7) Como no he acabado sigo

8) objetivo = Recibe Gasolina

9) Reglas Aplicable = { R4 }

10) No conflicto.

11) Aplica y hay gasolina = antecedente es cierto

luego tengo probado ~~Rec~~ Recibe Gasolina y por ello Bujías.

Ejercicio 1.2. Apartado

a) Hacia Delante

MT = { Animal ~~vuela~~, Huevos, Cuello Largo }

Ya tenemos la MT. Seleccionamos reglas aplicables

R = { R2 }

Aplicamos R2 y actualizo MT = { Vuela, Huevos, Cuello Largo, Ave }

No hemos acabado. Seleccionamos Reglas

R = { R13 }

Aplicamos y actualiza MT = { Vuela, Huevos, Cuello Largo, Ave, Albatros }

Como ahora no hay más reglas aplicables concluye que es un Albatros.

b) Hacia atrás

MT = { pelo, pelo, dientes puntiagudos, garras, ojos saltones, rayas, color leonado }

Objetivo = Tigre.

Seleccionamos Reglas: { R8 }, sin conflictos.

Antecedentes = { mamífero, carnívoro, color leonado, rayas }

Conocemos Color leonado y rayas, luego

Objetivos = { mamífero, carnívoro }

Reglas Aplicables = { R3, R4, R1 }

Aplicamos R4 y obtenemos carnívoro

Objetivos = { mamífero }

Reglas Aplicables: { R1 }

Antecedentes: pelo ó leche

Conocemos pelo

Entonces tenemos mamífero probado y no quedan objetivos, hemos acabado probando que es un tigre.

Ejercicio 1.8 Apuntes

HT = { Francia: Luisa en España, España: Alberto Francia
Egipto: Carmen Egipto, Japón: Carmen Francia
Tomás miente, Resto Dicen la verdad }

•) Si Tomás en Francia ⇒ Luisa no está en España
luego Luisa está en Egipto o en Japón
Si Luisa en Egipto ⇒ Carmen en Egipto pero como
Tomás está en Francia Contradicción ~~luego~~ sería
falso que Carmen Esté en Francia.

~~•) Si Tomás está en España ⇒ Alberto no en Francia~~

Así que Luisa no está en Egipto.
Si Luisa estuviese en España Alberto estaría en Francia y
diría la verdad pero Luisa no esta en España, luego nada.
Si Luisa en Japón ocurre igual

•) Si Tomás en España.
Alberto no Francia. Si ~~Alberto España~~ contradicción
Si Alberto Egipto ⇒ Carmen Egipto
⇒ Carmen no Francia ⇒ Japón: Carmen
Francia miente y no es Tomás
contradicción

•) Si Tomás Japón:
Carmen No Francia.
Si Carmen Egipto ⇒ Alberto Francia y Luisa España ✓

Hemos estado buscando probar que Tomás está en algún
~~lugar~~ hacia atrás, Es decir,

El sistema basado en reglas iría hacia atrás con
objetivo Tomás está en Japón, las reglas descritas

Si no (~~alguien~~ alguien en lugar2) ⇒ Tomás en lugar1
siendo lugar1: alguien en lugar 2 la afirmación
y si (alguien en lugar2) ⇒ Luisa en Lugar1
ó Alberto en lugar 1 ó Carmen en lugar1.

EJERCICIO 2.1. APUNTES

a) Discretizar temperatura con ≤ 20, $20 < t < 26$ y ≥ 26.

b) Discretizar humedad con < 60 y ≥ 60

No son más que modificar las tablas

c) $\mathbb{P}[\text{soleado} \cap \geq 26\% \cap \geq 60\% \cap \text{falso}, \text{no}] =$

$= 1/14$

$\mathbb{P}[\text{soleado}, \cap \geq 26\% \cap \geq 60\% \cap \text{falso}] = 1/14$

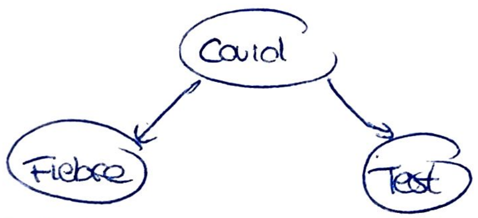
$\mathbb{P}[\text{no soleado} \cap \geq 26, \geq 60\%, \text{falso}] = \dfrac{\mathbb{P}[\cdots \cap \text{no}]}{\mathbb{P}[\cdots]} = \dfrac{1/14}{1/14} = 1$

$\mathbb{P}[\text{no} \cap \geq 26] = 2/4 = 1/2$

$\mathbb{P}[\text{soleado}] = 5/14$

Es puro conteo.

EJERCICIO EJEMPLO PRESENTACIÓN INTUITIVA



$\mathbb{P}[x_1] = 0'099$
$\mathbb{P}[x_2] = 0'901$

$\mathbb{P}[t_1 | x_1] = 0'9$
$\mathbb{P}[t_1 | x_2] = 0'05.$

$\mathbb{P}[f_1 | x_1] = 0'6$
$\mathbb{P}[f_1 | x_2] = 0'1$

a) $\mathbb{P}[x_1 | f_1]$

b) $\mathbb{P}[x_1 | f_1, t_1]$

c) $\mathbb{P}[t_1 | f_1]$

d) $\mathbb{P}[x_1 | t_2, f_1]$

e) $\mathbb{P}[f_1 | t_1]$

Th. Prob Total

Comentamos

a) $\mathbb{P}[x_1|f_1] = \dfrac{\mathbb{P}[f_1|x_1]\mathbb{P}[x_1]}{\mathbb{P}[f_1]} = \dfrac{\mathbb{P}[f_1|x_1]\mathbb{P}[x_1]}{\mathbb{P}[f_1|x_1]\mathbb{P}[x_1] + \mathbb{P}[f_1|x_2]\mathbb{P}[x_2]}$

Th. Bayes

$= \dfrac{0'6 \cdot 0'099}{0'6 \cdot 0'099 + 0'1 \cdot (1 - 0'099)} = 0'397$

b) $$\underset{\text{Th. Bayes}}{\mathbb{P}[x_1 | f_1, t_1] =} \frac{\mathbb{P}[f_1, t_1 | x_1]\,\mathbb{P}[x_1]}{\mathbb{P}[f_1, t_1]} = (*)$$

Buscamos $\mathbb{P}[f_1, t_1]$ y $\mathbb{P}[f_1 t_1 | x_1]$

Como conociendo que tengo covid, el hecho de tener fibre y de dar positivo son independientes, por caracterización de probabilidad independiente condicionalmente

$$\mathbb{P}[f_1\, t_1 | x_1] = \mathbb{P}[f_1 | x_1] \cdot \mathbb{P}[t_1 | x_1] = 0'6 \cdot 0'9 = 0'54$$

Por otro lado

$$\mathbb{P}[f_1, t_1] \underset{\text{Th. Prob Total}}{=} \mathbb{P}[f_1\, t_1 | x_1]\,\mathbb{P}[x_1] + \mathbb{P}[f_1\, t_1 | x_2]\,\mathbb{P}[x_2]$$

Luego calculemos $\mathbb{P}[f_1\, t_1 | x_2] \underset{\text{indep}}{=} 0'1 \cdot 0'05 = 0'005$

Así $$(*) = \frac{0'54 \cdot 0'099}{0'54 \cdot 0'099 + 0'005 \cdot 0'901} = 0'92228$$

c) $\mathbb{P}[t_1 | f_1] = \cancel{\frac{\mathbb{P}[f_1 t_1]\,\mathbb{P}[f_1]}{\mathbb{P}[f_1]}}$

~~P[f1] ... P[f1] ...~~

$$\underset{\text{definición}}{=} \frac{\mathbb{P}[t_1, f_1]}{\mathbb{P}[f_1]} \underset{\text{Th. Prob total}}{=} \frac{\mathbb{P}[t_1, f_1 | x_1]\,\mathbb{P}[x_1] + \mathbb{P}[t_1, f_1 | x_2]\,\mathbb{P}[x_2]}{\mathbb{P}[f_1 | x_1]\,\mathbb{P}[x_1] + \mathbb{P}[f_1 | x_2]\,\mathbb{P}[x_2]}$$

$$= \frac{0'54 \cdot 0'099 + 0'005 \cdot 0'901}{0'6 \cdot 0'099 + 0'1 \cdot 0'901} = 0'3877$$

d) $\mathbb{P}[x_1 \mid t_2, f_1] \overset{\text{Th. Bayes}}{=}$

$$= \frac{\mathbb{P}[t_2, f_1 \mid x_1]\,\mathbb{P}[x_1]}{\mathbb{P}[t_2, f_1]} = (*)$$

indep cond: $\mathbb{P}[t_2, f_1 \mid x_1] = \mathbb{P}[t_2 \mid x_1]\,\mathbb{P}[f_1 \mid x_1] = (1-0'9)(0'6) = 0'06$

prob total + indep cond: $\mathbb{P}[t_2, f_1] = \mathbb{P}[t_2, f_1 \mid x_1]\,\mathbb{P}[x_1] + \mathbb{P}[t_2, f_1 \mid x_2]\,\mathbb{P}[x_2] =$

$= 0'06 \cdot 0'099 + (1-0'05)(0'1)\,0'901 =$

$= 0'091$

$$\Rightarrow (*) = \frac{0'06 \cdot 0'099}{0'091} = 0'06489$$

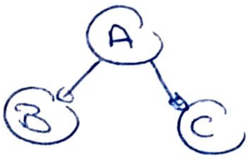
e) $\mathbb{P}[f_1 \mid t_1] = \dfrac{\mathbb{P}[f_1 \cap t_1]}{\mathbb{P}[t_1]} = \dfrac{\mathbb{P}(t_1 \cap f_1)}{\mathbb{P}(t_1)} =$ Calculado en c + Prob Total

$$= \frac{0'54 \cdot 0'099 + 0'005 \cdot 0'901}{\mathbb{P}[t_1 \mid x_1]\,\mathbb{P}[x_1] + \mathbb{P}[t_1 \mid x_2]\,\mathbb{P}[x_2]} =$$

$$= \frac{\sim}{0'9 \cdot 0'099 + 0'05 \cdot 0'901} = 0'43209$$

EJERCICIO 1. CLASE 4.
DEF FORMAL R. BAYESIANA

Comprobar que la siguiente red es bayesiana.



$\mathbb{P}[a_1 b_1 c_1] = 0'084$ $\qquad$ $\mathbb{P}[a_1 b_1 c_2] = 0'036$
$\mathbb{P}[a_1 b_2 c_1] = 0'126$ $\qquad$ $\mathbb{P}[a_1 b_2 c_2] = 0'054$
$\mathbb{P}[a_2 b_1 c_1] = 0'084$ $\qquad$ $\mathbb{P}[a_2, b_2, c_1] = 0'056$
$\mathbb{P}[a_2, b_1 c_2] = 0'336$ $\qquad$ $\mathbb{P}[a_2 b_2 c_2] = 0'224$

Debemos verificar que se trata de un grafo acíclico y conexo además de dirigido por un lado. Luego hay que ver las hipótesis de independencia condicional.

1) Grafo acíclico conexo dirigido es claro.

2) $\forall X \in V,\ Y \in V \setminus \{X \cup de(X) \cup pa(X)\}$ X i Y. Veámoslo.

Debe darse que B i C, C i B dado A con ver una la otra se tiene. $\mathbb{P}[b_1 \mid a_1, c_1] = \mathbb{P}[b_1 \mid a_1]$ es lo que debemos probar

$$\mathbb{P}[b_1 | a_1 c_1] \underset{\substack{\downarrow \\ \text{def prob condicional}}}{=} \frac{\mathbb{P}[a_1 b_1 c_1]}{\mathbb{P}[a_1 c_1]} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Th. Prob Total}}}{=} \frac{\mathbb{P}[a_1 b_1 c_1]}{\mathbb{P}[a_1 b_1 c_1] + \mathbb{P}[a_1 b_2 c_1]} =$$

$$= \frac{0'084}{0'21} = 2/5$$

$$\mathbb{P}[b_1 | a_1] = \frac{\mathbb{P}[b_1 a_1]}{\mathbb{P}[a_1]} = \frac{\mathbb{P}[b_1 a_1 c_2] + \mathbb{P}[b_1 a_1 c_1]}{\left(\mathbb{P}[a_1 b_1 c_1] + \mathbb{P}[a_1 b_2 c_1] + \mathbb{P}[a_1 b_1 c_2] + \mathbb{P}[a_1 b_2 c_2]\right)}$$

$$= \frac{0'036 + 0'084}{0'036 + 0'084 + 0'126 + 0'054} = 2/5 \quad y \quad 2/5 = 2/5 \checkmark$$

Se hace la comprobación equivalente para ver

$\mathbb{P}[b_2 | a_2 c_2] = \mathbb{P}[b_2 | a_2]$

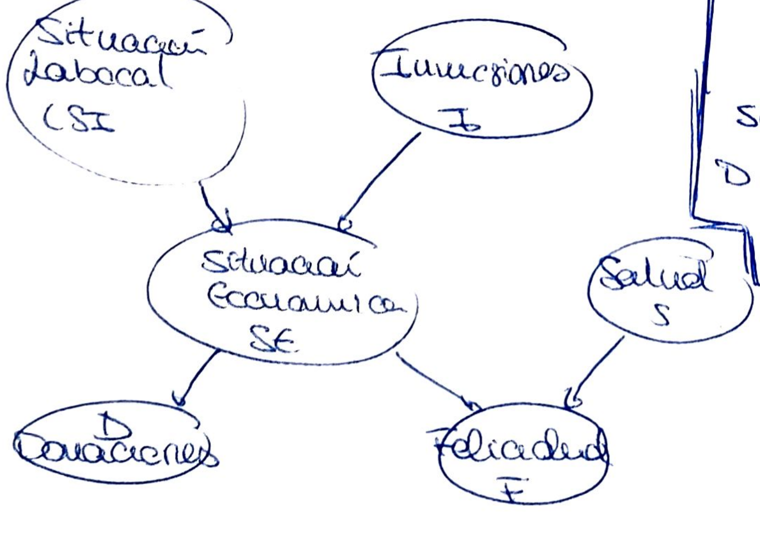
$\mathbb{P}[b_1 | a_2 c_2] = \mathbb{P}[b_1 | a_2]$

$\mathbb{P}[b_1 | a_1 c_2] = \mathbb{P}[b_1 | a_1]$

$\mathbb{P}[b_1 | a_2 c_1] = \mathbb{P}[b_1 | a_2]$ ... hasta cubrir todas las opciones

EJERCICIO 2. CLASE 4 DEF FORMAL RED BAYES

¿Qué independencias implica la red?



independencias.

SI i I S

I i SI S

S i SI I

SE i S dados {SI, I}

D i SI, I, S F dado SE

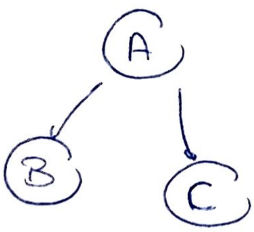
F i SI, I, D dados SE S

EJERCICIO 3.
INDEPENDENCIAS
RED ASIA. CL4

- A i ye{S L B}
- S i ye{A, T}
- B i ye{L, E, X, A, T} dado S
- E i ye{A, S, B} dados T, L
- X i ye{A T, D, L, S, B} dado E
- D i ye{L, S, A, T, X} dados E, B
- T i ye{L, S, B} dado A
- L i ye{A, T, B} dado S

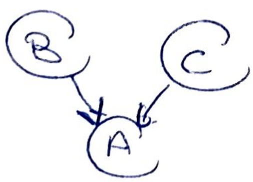
EJERCICIO 4. INDEPENDENCIAS
ESTRUCTURAS CON 3 NODOS
CLASE 4

a) Cola con Cola



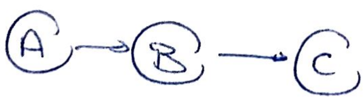
B i C dado A
C i B dado A
A i ye{B, C}

b) Cabeza con cabeza



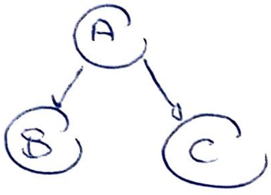
B i C
C i B

c) Cabeza con cola



~~A i ye{B, C}~~
~~No hay independencias~~
C i A dado B
A i C dado B

EJEMPLO TEOREMA FUNDAMENTAL CLASE 4



Conocemos

$\mathbb{P}[a_1] = 0'6$

$\mathbb{P}[b_1|a_1] = 0'3$

$\mathbb{P}[b_1|a_2] = 0'4$

$\mathbb{P}[c_1|a_1] = 0'7$

$\mathbb{P}[c_1|a_2] = 0'2$

Calcular $\mathbb{P}[A,B,C]$

Conocemos por el Th. Fundamental de las Redes Bayesianas que $\mathbb{P}[A,B,C] = \prod_{X\in\{A,B,C\}} \mathbb{P}[X|Pa(X)]$

es decir $\mathbb{P}[A,B,C] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B|A]\mathbb{P}[C|A]$

Por tanto

$\mathbb{P}[a_1, b_1\, c_1] = \mathbb{P}[a_1]\mathbb{P}[b_1|a_1]\mathbb{P}[c_1|a_1] = 0'6 \cdot 0'3 \cdot 0'7$

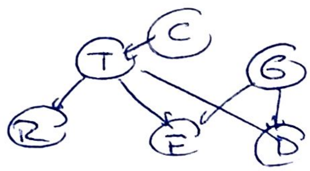
$\mathbb{P}[a_1, b_1\, c_2] = \mathbb{P}[a_1]\mathbb{P}[b_1|a_1]\mathbb{P}[c_2|a_1] = 0'6 \cdot 0'3 \cdot 0'3$

$\mathbb{P}[a_1, b_2\, c_1] = \mathbb{P}[a_1]\mathbb{P}[b_2|a_1]\mathbb{P}[c_1|a_1] = 0'6 \cdot 0'7 \cdot 0'7$

$\mathbb{P}[a_1\, b_2\, c_2] = 0'6 \cdot 0'7 \cdot 0'3$

$\mathbb{P}$ . . . – – ——

EJERCICIO 1. CLASE 4 TH. FUNDAMENTAL



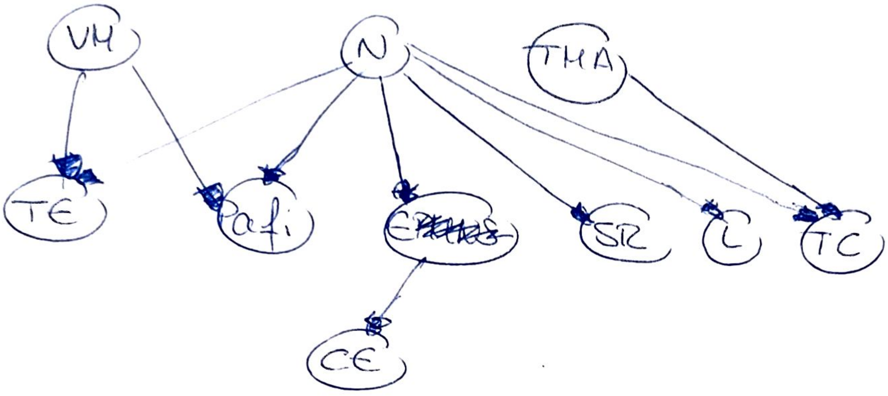
Como calcularías $\mathbb{P}[C,T,G,R,F,D]$. Por Th. Fundamental

$\mathbb{P}[C,T,G,R,F,D] = \prod_{X\in\{C,T,G,R,F,D\}} \mathbb{P}[X|Pa(X)]$

Como
$pa(C) = \emptyset$
$pa(T) = C$
$pa(G) = \emptyset$
$pa(R) = \{T\}$
$pa(F) = \{T,G\} = pa(D)$

$\mathbb{P}[C,T,G,R,F,D] = \mathbb{P}[C]\mathbb{P}[T|C]\mathbb{P}[G]\mathbb{P}[R|T]\mathbb{P}[F|T,G]\cdot$
$\cdot\,\mathbb{P}[D|T,G]$

EJERCICIO 2. CLASE 4
TEOREMA FUNDAMENTAL



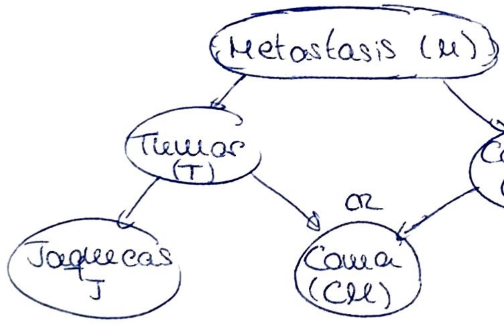
Como calcular la distribución conjunta

Aplicando el Th. Fundamental

$\mathbb{P}[VM, N, TMA, TE, Pafi, E, SR, L, TC] =$

$= \mathbb{P}[VM]\,\mathbb{P}[N]\,\mathbb{P}[TMA]\,\mathbb{P}[TE \mid VM, N]\,\mathbb{P}[Pafi \mid VM, N] \cdot$
$\cdot\, \mathbb{P}[E \mid N]\,\mathbb{P}[SR \mid N]\,\mathbb{P}[L \mid N]\,\mathbb{P}[TC \mid N, TMA]\,\mathbb{P}[CE \mid E]$

EJERCICIO DE REPASO 1
CLASE 4



a) independencias
b) probs necesarias bajo hip. indep?
dar valores
c) Si no hip indep. Cuantas prob?
d) Conjunta?
$\mathbb{P}[M_1 \mid CM_1]$?

a) T i y E {C} dado M
C i y E {T, J} dado M
CM i y E {M, J} dados {T, C}
J i y E {M, C, CM} dado T

c) $2^5 - 1$ (2 por nodo menos una que saco yo)

d) $\mathbb{P}[M, T, J, CM, C] = \mathbb{P}[M] \cdot \mathbb{P}[C \mid M]$
$\cdot\, \mathbb{P}[T \mid M] \cdot \mathbb{P}[CM \mid C, T] \cdot \mathbb{P}[J \mid T]$

$\mathbb{P}[M_1 \mid CM_1] = \dfrac{\mathbb{P}[m_1 \cap CM_1]}{\mathbb{P}[CM_1]} =$

$= \dfrac{\sum \mathbb{P}[m_1, T, J, cm_1, C]}{\sum \mathbb{P}[M, T, J, CM_1, C]}$

b) Suponiendo todas binarias

$2 + 4 + 2 + 2 + 1 =$
$= 11$

$\mathbb{P}[m_1] = 0'1$
$\mathbb{P}[t_1 \mid m_1] = 0'8$ $\quad \mathbb{P}[t_1 \mid m_2] = 0'2$
$\mathbb{P}[c_1 \mid m_1] = 0'9$ $\quad \mathbb{P}[c_1 \mid m_2] = 0'15$
$\mathbb{P}[cm_1 \mid t_1 c_1] = 0'95$
$\mathbb{P}[cm_1 \mid t_1 c_2] = 0'6$
$\mathbb{P}[cm_1 \mid t_2 c_1] = 0'9$
$\mathbb{P}[cm_1 \mid t_2 c_2] = 0'05$
$\mathbb{P}[j_1 \mid t_1] = 0'96$
$\mathbb{P}[j_1 \mid t_2] = 0'2$

EJERCICIO DE REPASO 2 CLASE 4

Red Asia

a) $A \perp\!\!\!\perp y \in \{L, S\}$ $\quad T \perp\!\!\!\perp y \in \{L, S\}$ dado A

$S \perp\!\!\!\perp y \in \{A, T, X\}$ $\quad L \perp\!\!\!\perp y \in \{A, T, X\}$ dado S

$X \perp\!\!\!\perp y \in \{A, D, L, S\}$ dada T

$D \perp\!\!\!\perp y \in \{A, S, X\}$ dados T, L

b) Suponiendo variables binarias $2+4+2+2+1+1=12$

$\mathbb{P}[a_1] = 0'3$ $\quad \mathbb{P}[l_1 | s_1] = 0'7$

$\mathbb{P}[s_1] = 0'2$ $\quad \mathbb{P}[l_1 | s_2] = 0'1$

$\mathbb{P}[t_1 | a_1] = 0'4$ $\quad \mathbb{P}[d_1 | t_1, l_1] = 0'95$

$\mathbb{P}[t_1 | a_2] = 0'005$ $\quad \mathbb{P}[d_1 | t_1, l_2] = 0'85$

$\mathbb{P}[x_1 | t_1] = 0'95$ $\quad \mathbb{P}[d_1 | t_2, l_1] = 0'85$

$\mathbb{P}[x_1 | t_2] = 0'1$ $\quad \mathbb{P}[d_1 | t_2, l_2] = 0'05$

c) $2^6 - 1 = 63$

d) Conjunta $\mathbb{P}[A, T, X, D, L, S] = \prod_{Z \in \{A, T, X, D, L, S\}} \mathbb{P}[Z | Pa(Z)]$

$$\mathbb{P}[s_1 | d_1] = \frac{\mathbb{P}[s_1, d_1]}{\mathbb{P}[d_1]} = \frac{\sum \mathbb{P}[A, T, X, d_1, L, s_1]}{\sum \mathbb{P}[A, T, X, d_1, L, S]}$$

$$= \cancel{\frac{\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[s_1]\mathbb{P}[T|A]\mathbb{P}[X|T]\mathbb{P}[d_1|T, L]\mathbb{P}[L|s_1]}{\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[S]\mathbb{P}[T|A]\mathbb{P}[X|T]\mathbb{P}[d_1|T, L]\mathbb{P}[L|S]}}$$

$$\cancel{= \frac{\mathbb{P}[s_1]\mathbb{P}[L|s_1]}{\mathbb{P}[S]\mathbb{P}[L|S]}}$$

EJERCICIO 3 DE REPASO CLASE 4

$C \in \{$alta, media, baja$\}$ $\quad$ DE, DD, DR $\in$

$T \in \{$pequeño, mediano, grande$\}$ $\quad \{$pocas, normal, muchas$\}$

$ET \in \{$poco, normal, mucho$\}$

a) $C \perp\!\!\!\perp y \in \{T, ET\}$ $\quad$ DE $\perp\!\!\!\perp y \in \{ET\}$ dados C, T

$T \perp\!\!\!\perp y \in \{C, ET\}$ $\quad$ DD $\perp\!\!\!\perp y \in \{C, T\}$ datos ET, DI

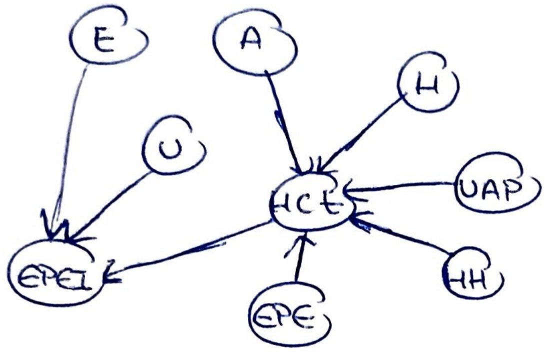
$ET \perp\!\!\!\perp y \in \{C, T\}$ $\quad$ DR $\perp\!\!\!\perp y \in \{C, DI, ET\}$ dados DD, T

b) $3^2 + 3^2 + 3^2 + 2 + 2 + 2 = 3 \cdot 9 + 6 = 27 + 6 = 33$

c) $3^6 = 729$

d) $\mathbb{P}[C, T, ET, DD, DE, DR] = \mathbb{P}[C]\mathbb{P}[T]\mathbb{P}[ET]\mathbb{P}[DI | C, T]$
$\mathbb{P}[DD | ET, DI]\mathbb{P}[DR | DD, T]$

EJERCICIO DE REPASO 4 CLASE 4



a) • E i y $\in$ {U, A, H, UAP, HH, EPE, HCE}
- U i y $\in$ {E, A, H, UAP, HH, EPE, HCE}
- EPEI i y $\in$ {A, H, UAP, HH, EPE} dados E, U, HCE
- A i y $\in$ {E, U, H, UAP, HH, EPE}
- H i y $\in$ {E, U, A, UAP, HH, EPE}
- UAP i y $\in$ {E, U, A, H, HH, EPE}
- HH i y $\in$ {E, U, A, H, UAP, EPE}
- EPE i y $\in$ {E, U, A, H, UAP, HH}
- HCE i y $\in$ {E, U} dados A, H, UAP, HH, EPE

b) Todas variables binarias y red bayesiana. ¿Probs?

E, U, A, H, UAP, HH, EPE necesitan 1, ie, llevamos 7

2^p con $p = \#Pa(X)$ para $X \in$ {EPEI, HCE}, es decir

$4 + 2^5 \Rightarrow 32 + 7 + 4 = 43$

c) $\mathbb{P}[E, U, A, UAP, H, HH, EPE, HCE, EPEI]$

$= \mathbb{P}[E]\mathbb{P}[U]\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[UAP] \times$

$\times \mathbb{P}[H]\mathbb{P}[HH]\mathbb{P}[EPE] \times$

$\times \mathbb{P}[EPEI \mid E, U] \times$

$\times \mathbb{P}[HCE \mid A, H, UAP, HH, EPE]$

EJEMPLO SNEEZING EXAMPLE. CLASE 5

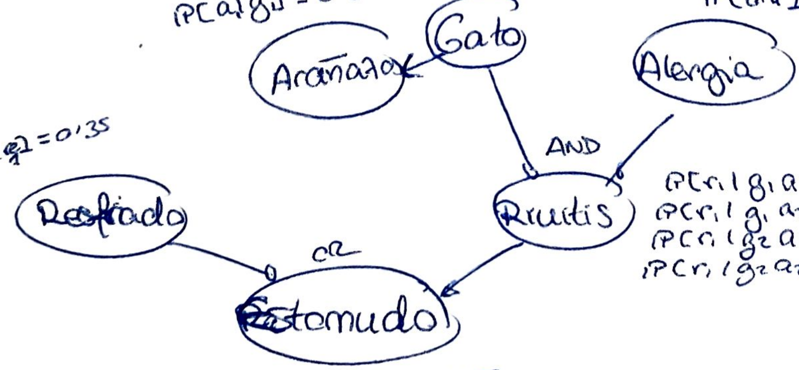
Luis va a visitar a Antonia y de repente comienza a estornudar. Luis piensa que se ha resfriado, pero de repente, ve arañazos en los muebles y piensa que si tuviese un gato, podría ser que los estornudos vengan de una crisis de alergia o por una rinitis

$\mathbb{P}[a_1 \mid g_2] = 0'05$ $\mathbb{P}[g] = 0'15$

$\mathbb{P}[a_1 \mid g_1] = 0'8$

$\mathbb{P}[a] = 0'4$

$\mathbb{P}[r_1] = 0'35$



$\mathbb{P}[r_1 \mid g_1 a_1] = 0'9$

$\mathbb{P}[r_1 \mid g_1 a_2] = 0'1$

$\mathbb{P}[r_1 \mid g_2 a_1] = 0'1$

$\mathbb{P}[r_1 \mid g_2 a_2] = 0'01$

$\mathbb{P}[e_1 \mid re_1 r_1] = 0'95$

$\mathbb{P}[e_1 \mid re_1 r_2] = 0'9$

$\mathbb{P}[e_1 \mid re_2 r_1] = 0'9$

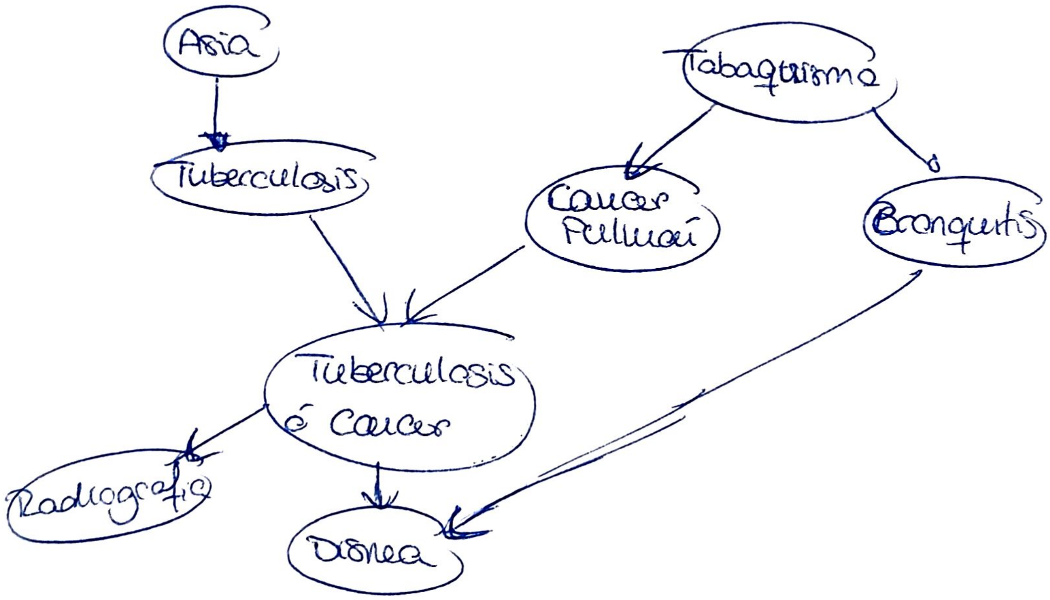
$\mathbb{P}[e_1 \mid re_2 r_2] = 0'1$

Todas binarias en sí o no

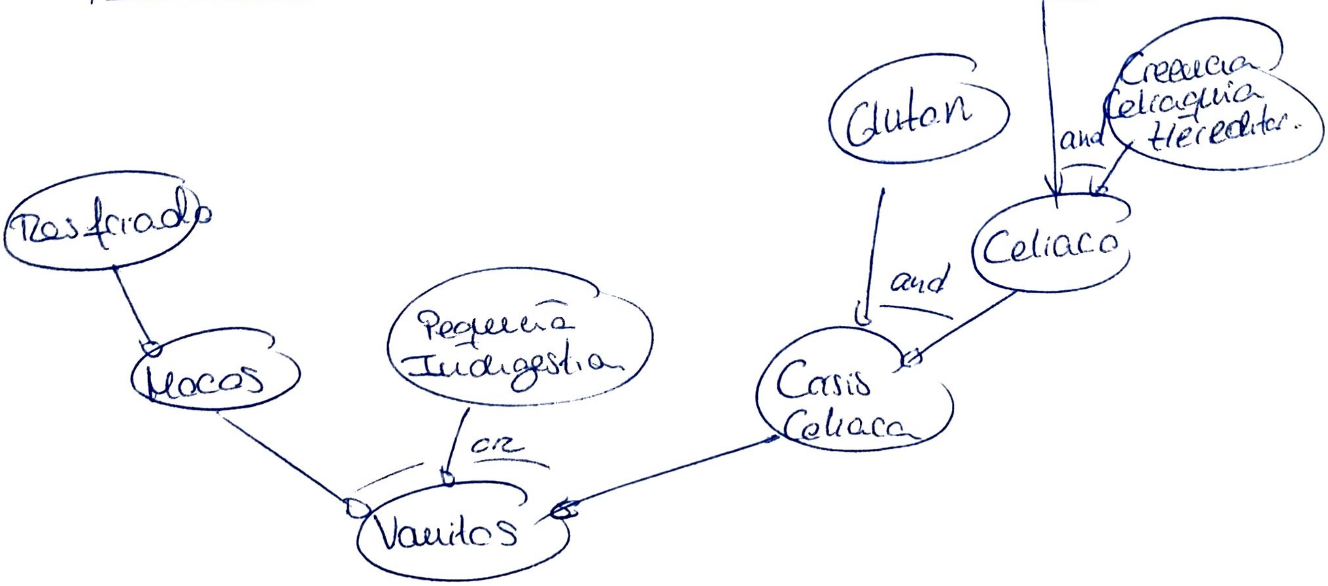
O podríamos medir el nivel de arañazos en muchos normal pocos

EJEMPLO RED ASIA

La disnea puede deberse a enfermedades como tuberculosis o cancer de pulmon o bronquitis o a ninguno de ellos o a más de uno. Una visita reciente a Asia aumenta probabilidad de tuberculosis mientras el tabaquismo es un factor de riesgo de bronquitis y cancer. Una radiografía no discrimina entre cancer y tuberculosis como tampoco lo hace la ausencia o presencia de disnea.



EJEMPLO [illegible]TO



EJEMPLO
HOBEXAS WACKAS
WURROS

~~Especie~~ ∈ { Wacka, Wurro, Hobexa }

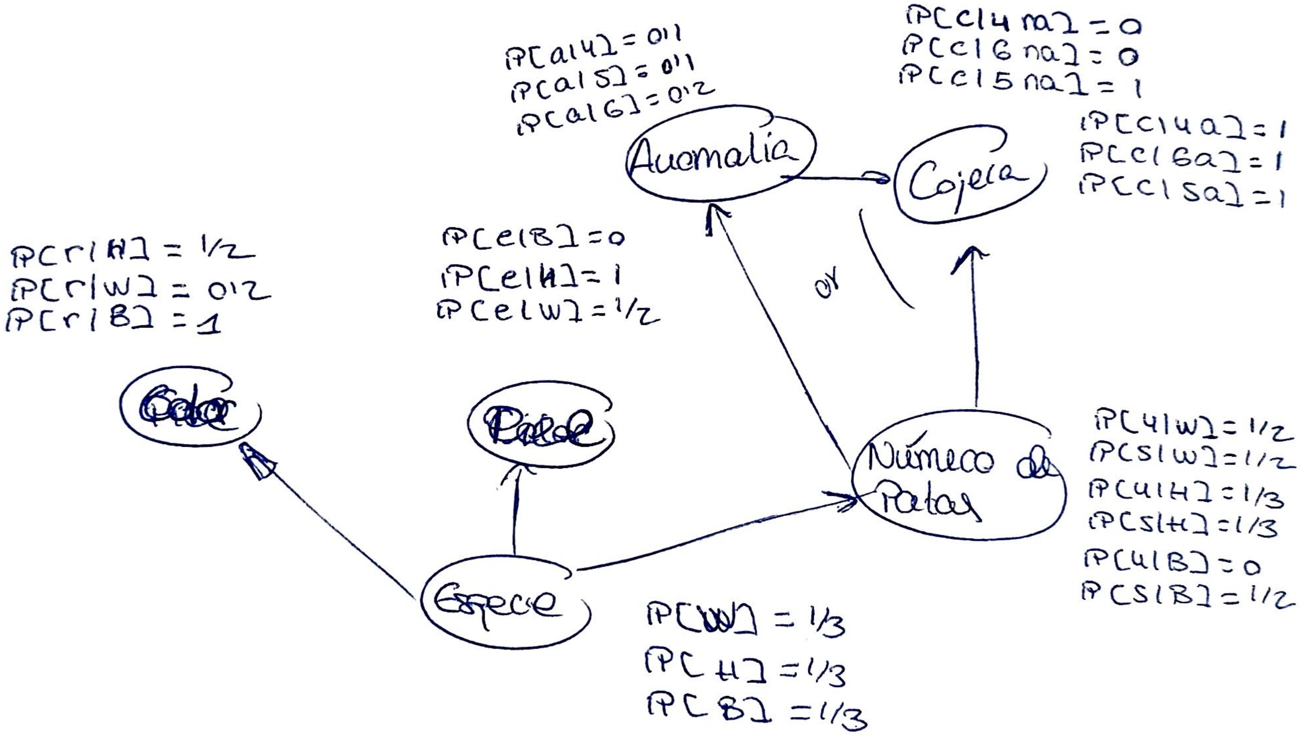
Piel ∈ { Escamas, pelo }

NumeroPatas ∈ { 4, 5, 6 }

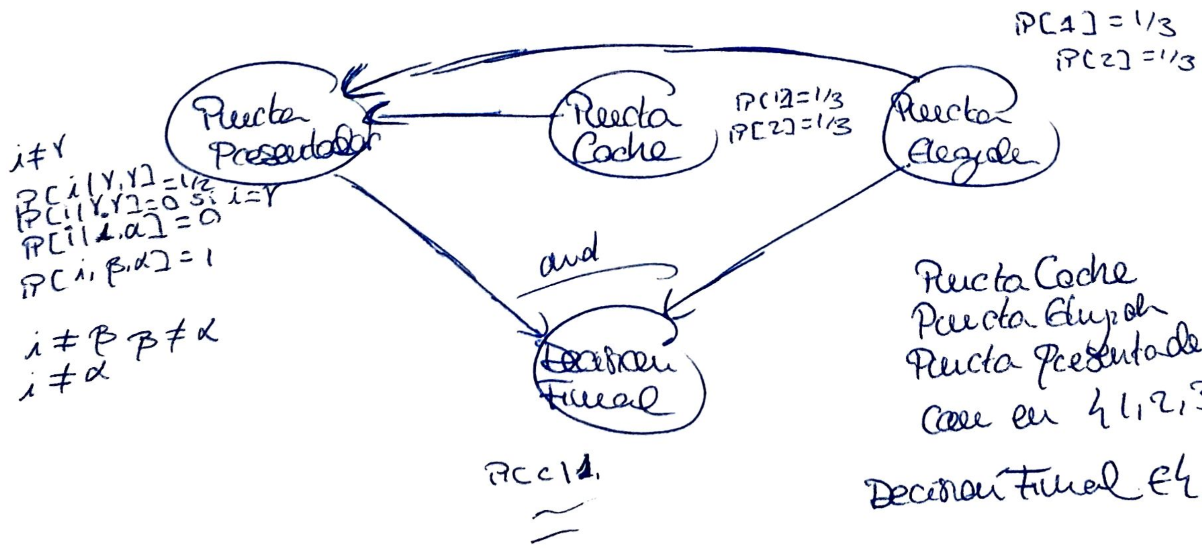
Color ∈ { rojito, azul }

Cojera ∈ { Si (c), No (nc) }

Anomalía ∈ { Si (a), No (na) }



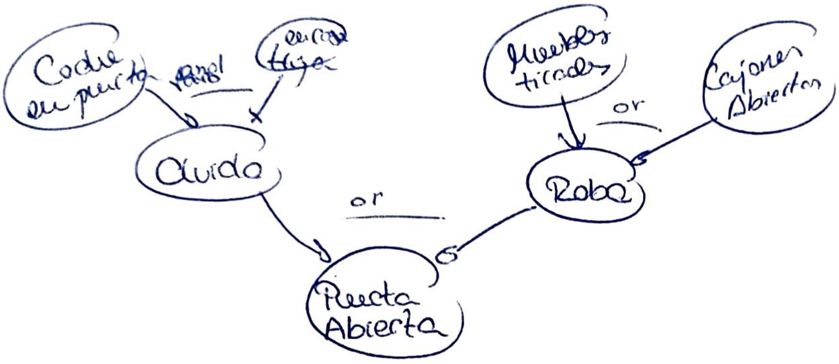
EJEMPLO
MONTY HALL



Puerta Coche
Puerta Elegida
Puerta Presentada
Coche en {1, 2, 3}

Decision Final ∈ { Cambiar, Mantener }

EJERCICIOS PRÁCTICA 1 JUAN Y LUISA ~ Ejercicio 8.8



Toman todos valores de sí y no.

$\mathbb{P}[cep] = 0'5$ $\qquad$ $\mathbb{P}[mt] = 0'05$

$\mathbb{P}[hijacasa] = 0'5$ $\qquad$ $\mathbb{P}[ca] = 0'3$

$\mathbb{P}[o \mid cp, hc] = 0'95$	$\mathbb{P}[r \mid mt, ca] = 0'9$	$\mathbb{P}[pa \mid o, r] = 0'95$
$\mathbb{P}[o \mid cp, \neg hc] = 0'1$	$\mathbb{P}[r \mid mt\ \neg ca] = 0'8$	$\mathbb{P}[pa \mid o, \neg r] = 0'9$
$\mathbb{P}[o \mid \neg cp, hc] = 0'7$	$\mathbb{P}[r \mid \neg mt\ ca] = 0'6$	$\mathbb{P}[pa \mid \neg o, r] = 0'9$
$\mathbb{P}[o \mid \neg cp\ \neg hc] = 0'05$	$\mathbb{P}[r \mid \neg mt\ \neg ca] = 0'1$	$\mathbb{P}[pa \mid \neg o, \neg r] = 0'1$

Hacen falta $4+4+4+4 = 4 \cdot 4 = 16$

Si no fuese bayesiana necesitaría $2^7 - 1 = 127$

Podemos calcular $\mathbb{P}[PA, O, R, MT, CA, CP, HC] =$

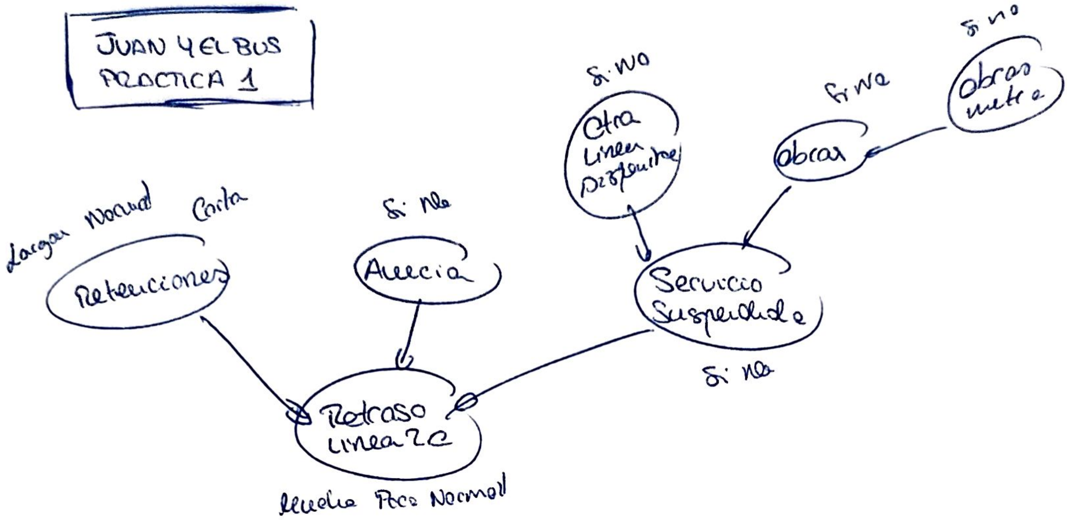
$$= \mathbb{P}[CP]\,\mathbb{P}[HC]\,\mathbb{P}[MT]\,\mathbb{P}[CA]\,\mathbb{P}[O \mid CP, HC]\,\mathbb{P}[R \mid MT, CA]\,\mathbb{P}[PA \mid O, R]$$

Por ejemplo si queremos

$$\mathbb{P}[pa \mid mt] = \frac{\mathbb{P}[pa, mt]}{\mathbb{P}[mt]} =$$

$$= \frac{\sum_{O, R, CA, CP, HC} \mathbb{P}[pa, O, R, mt, CA, CP, HC]}{\sum_{PA, O, R, CA, CP, HC} \mathbb{P}[PA, O, R, mt, CA, CP, HC]}$$

JUAN Y EL BUS
PRACTICA 1

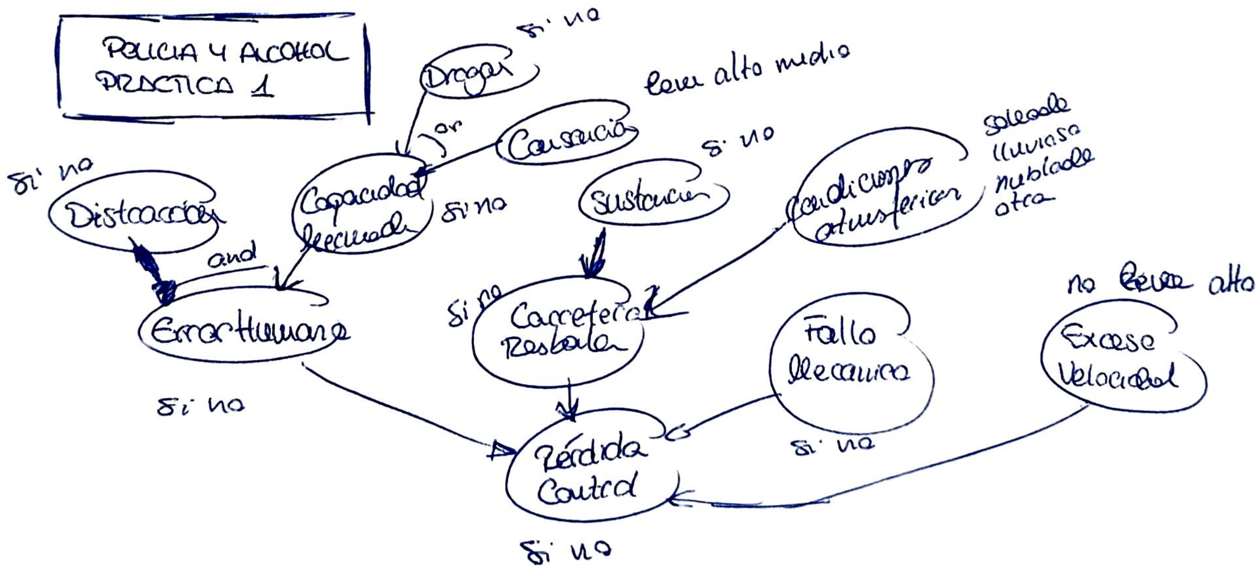


Necesitamos 1 para A, OLD y OM. 2 para R y para O
4 para SS. y $2 \cdot 12$ para RL2C, ie $2 \cdot 12 + 4 + 4 + 3 = 47 - 12 = 35$

Mucho y Poco
para Normal hacemos 1 − ...

En caso de no ser Bayesiana necesita $3^2 \cdot 2^5 = 9 \cdot 32 = \dots$

POLICIA Y ALCOHOL
PRACTICA 1



Necesitamos $1+1+2+3+2+1+1$ para nodos sin padre
$3 \cdot 2$ para capacidad mermada 8 para carretera resbaladiza
2^3 para pérdida de control

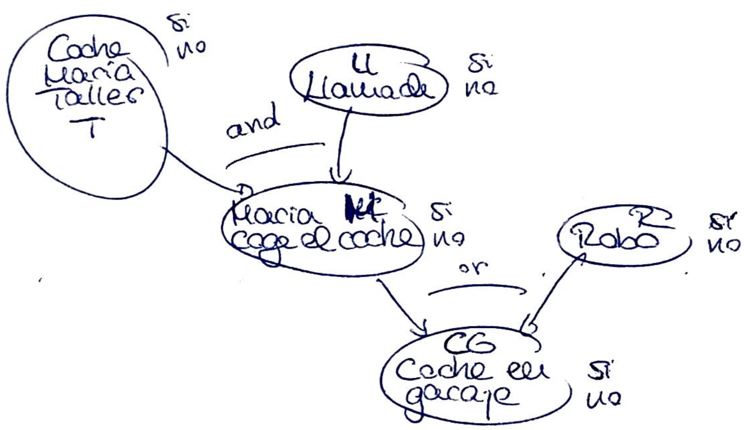
$1+1+2+3+2+1+1+6+8+8 = 33$

EJERCICIO 2.8.

Juan y Luisa observan coche no está en garaje. Piensan que lo han robado. Piensa Luisa que su hija a podido cogerlo sin avisar, puesto que el coche de su hija está en el taller y había ~~grabado~~ una llam de rara

a) Modelo
b) independencias
c) Probs con hip. indep cond. Darlas
d) Total?
e) $\mathbb{P}[r \mid cg_2, ll_1]$

a)



b) T i y $\in \{Ll, R\}$
Ll i y $\in \{T, R\}$
R i y $\in \{T, Ll, M\}$
M i R dados T, Ll
CG i y $\in \{T, Ll\}$ dados R, M

c) 1 para cada nodo sin padre y 2^2 para M y CG, luego un total de 11 probabilidades. Damos las siguientes:

$\mathbb{P}[t_1] = 0'1$
$\mathbb{P}[ll_1] = 0'3$
$\mathbb{P}[r_1] = 0'1$

$\mathbb{P}[m_1 \mid t_1\, ll_1] = 0'95$
$\mathbb{P}[m_1 \mid t_1\, ll_2] = 0'1$
$\mathbb{P}[m_1 \mid t_2\, ll_1] = 0'1$
$\mathbb{P}[m_1 \mid t_2\, ll_2] = 0'05$

$\mathbb{P}[cg_1 \mid m_1\, r_1] = 0'01$
$\mathbb{P}[cg_1 \mid m_1\, r_2] = 0'1$
$\mathbb{P}[cg_1 \mid m_2\, r_1] = 0'1$
$\mathbb{P}[cg_1 \mid m_2\, r_2] = 0'9$

d) Habría que haber pedido la conjunta que ~~es~~ $\mathbb{P}[T, Ll, M, R, CG]$ que son un total de $2^5 - 1$ valores, es decir, 31.

e) $$\mathbb{P}[r \mid cg_2, ll_1] = \frac{\mathbb{P}[r_1, cg_2, ll_1]}{\mathbb{P}[cg_2, ll_1]} = \frac{\sum_{T,M} \mathbb{P}[T, ll_1, M, r_1, cg_2]}{\sum_{T,M,R} \mathbb{P}[T, ll_1, M, R, cg_2]}$$

donde $\mathbb{P}[T, Ll, M, R, CG]$ se calcula como $\mathbb{P}[T]\,\mathbb{P}[Ll]\,\mathbb{P}[R]\,\mathbb{P}[M \mid T, Ll]\,\mathbb{P}[CG \mid M, R]$ por el Th. Fundamental Redes Bayesianas.

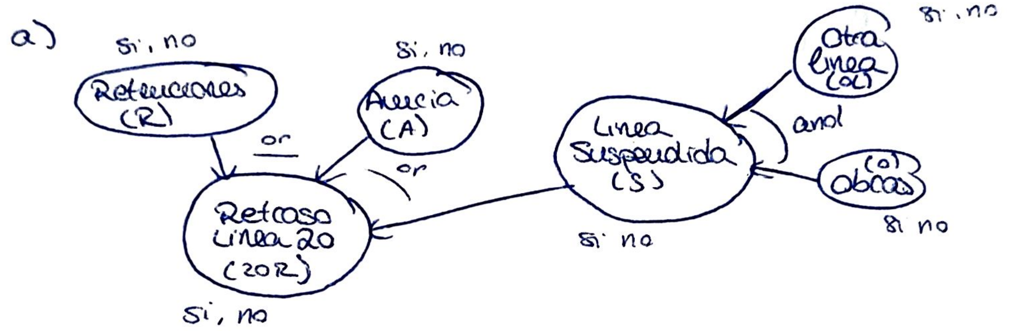
EJERCICIO 2.9.

Juan está esperando la línea 20 y ésta se retrasa. Juan piensa en retenciones de tráfico, pero puede que tenga una avería o esté suspendido por obras del metro. El servicio se suspende si se ve afectado por obras y hay otra línea que lo cubra.

a) Modelo
b) Independencias
c) Conjunta
d) $\mathbb{P}[S_1 \mid 20r_1, O_1]$

— o —

a)



b)

R i y ∈ {A, S, O, OL}   OL i y ∈ {R, A, O}

A i y ∈ {R, S, O, OL}   O i y ∈ {OL, R, A}

S i y ∈ {A, R} dadas OL y O

20R i y ∈ {OL, O} dadas R, A, S

c) Hay que dar únicamente $4+2^3+2^2 = 8+8=16$ probabilidades para calcular la conjunta gracias al Th. Fundamental Redes Bayesianas

$$\mathbb{P}[R,A,S,O,OL,20R] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[R]\mathbb{P}[OL]\mathbb{P}[O]\mathbb{P}[S \mid OL,O]\mathbb{P}[20R \mid R,A,S]$$

d)

$$\mathbb{P}[S_1 \mid 20r_1, O_1] \underset{\text{def prob cond}}{=} \frac{\mathbb{P}[S_1, 20r_1, O_1]}{\mathbb{P}[20r_1, O_1]} = \frac{\sum_{R,A,OL} \mathbb{P}[R,A,S_1,O_1,OL,20r_1]}{\sum_{R,A,OL,S} \mathbb{P}[R,A,S,O_1,OL,20r_1]}$$

Apartado d Ejercicio 2.10

$$\mathbb{P}[eh_1 \mid e_1, S_1] = \frac{\mathbb{P}[eh_1, e_1, S_1]}{\mathbb{P}[e_1, S_1]} =$$

$$= \frac{\sum \mathbb{P}[EV, M, A, e_1, eh_1, S_1, C, CM, D, V, CA]}{\sum \mathbb{P}[EV, M, A, e_1, EH, S_1, C, CM, D, V, CA]}$$

EJERCICIO 2.10

Policía ....

a) Modelo

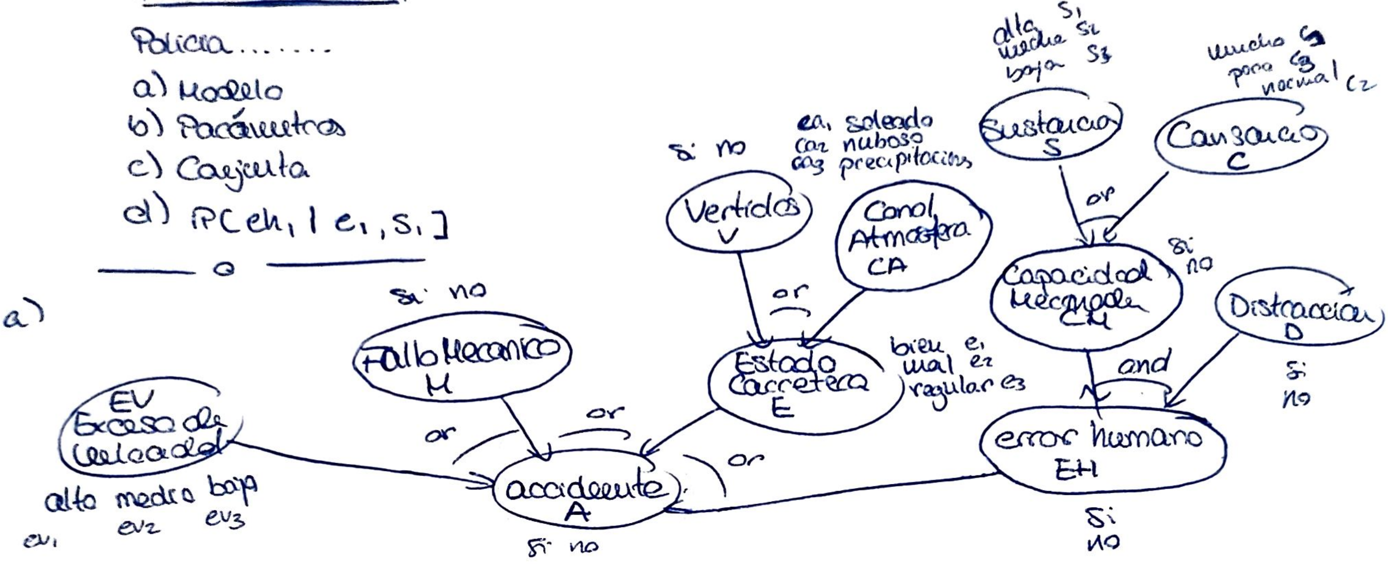
b) Parámetros

c) Conjunta

d) $\mathbb{P}[eh_1 \mid e_1, s_1]$

---

a)



b) Necesitamos dar las probabilidades condicionadas necesarias para la red

$\mathbb{P}[ev_1] = 0'1$

$\mathbb{P}[ev_2] = 0'45$

$\mathbb{P}[m_1] = 0'05$

$\mathbb{P}[v_1] = 0'2$

$\mathbb{P}[ca_1] = 275/365$

$\mathbb{P}[ca_2] = 65/365$

$\mathbb{P}[s_1] = 0'05$

$\mathbb{P}[s_2] = 0'1$

$\mathbb{P}[c_1] = 0'4$

$\mathbb{P}[c_2] = 0'5$

$\mathbb{P}[d_1] = 0'15$

$\mathbb{P}[e_1 \mid v_1, ea_1] = 0'4$

$\mathbb{P}[e_1 \mid v_1, ea_2] = 0'2$

$\mathbb{P}[e_1 \mid v_1, ea_3] = 0'1$

$\mathbb{P}[e_1 \mid v_2, ea_1] = 0'9$

$\mathbb{P}[e_1 \mid v_2, ea_2] = 0'8$

$\mathbb{P}[e_1 \mid v_2, ea_3] = 0'6$

$\mathbb{P}[e_2 \mid v_1\, ea_1] = 0'6$

$\mathbb{P}[e_2 \mid v_1\, ea_2] = 0'8$

$\mathbb{P}[e_2 \mid v_1\, ea_3] = 0'9$

$\mathbb{P}[e_2 \mid v_2\, ea_1] = 0'1$

$\mathbb{P}[e_2 \mid v_2\, ea_2] = 0'2$

$\mathbb{P}[e_2 \mid v_2\, ea_3] = 0'4$

$\mathbb{P}[cm_1 \mid s_1, c_1] = 0'999$

$\mathbb{P}[cm_1 \mid s_1, c_2] = 0'95$

$\mathbb{P}[cm_1 \mid s_1, c_3] = 0'9$

$\mathbb{P}[cm_1 \mid s_2 c_1] = 0'95$

$\mathbb{P}[cm_1 \mid s_2 c_2] = 0'9$

$\mathbb{P}[cm_1 \mid s_2 c_3] = 0'85$

$\mathbb{P}[cm_1 \mid s_3 c_1] = 0'8$

$\mathbb{P}[cm_1 \mid s_3 c_2] = 0'5$

$\mathbb{P}[cm_1 \mid s_3 c_3] = 0'1$

$\mathbb{P}[eh_1 \mid cm_1 d_1] = 0'99$

$\mathbb{P}[eh_1 \mid cm_1 d_2] = 0'1$

$\mathbb{P}[eh_1 \mid cm_2 d_1] = 0'2$

$\mathbb{P}[eh_1 \mid cm_2 d_2] = 0'05$

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}[a_1 \mid ev_1\; m_1\; e_1\; eh_1] \\ \mathbb{P}[a_1 \mid ev_1\; m_1\; e_1\; eh_2] \\ \mathbb{P}[a_1 \mid ev_1\; m_1\; e_2\; eh_1] \\ \mathbb{P}[a_1 \mid ev_1\; m_1\; e_2\; eh_2] \\ \mathbb{P}[a_1 \mid ev_1\; m_1\; e_3\; eh_1] \\ \mathbb{P}[a_1 \mid ev_1\; m_1\; e_3\; eh_2] \end{array}\right\}$ .... 36 son en total estas solo y no lo voy a escribir

c) Para la conjunta necesitamos $2+1+1+2+2+2+1$ de nodos sin padre. Para E necesito $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, para CM necesito $3 \cdot 3 = 9$, para error humano 4, para A 36. En total de 72 probabilidades pues gracias al Th. Fundamental

$$\mathbb{P}[EV, M, A, E, V, CA, S, C, CM, D, EH] = \prod_{X \in V} \mathbb{P}[X \mid p(X)]$$

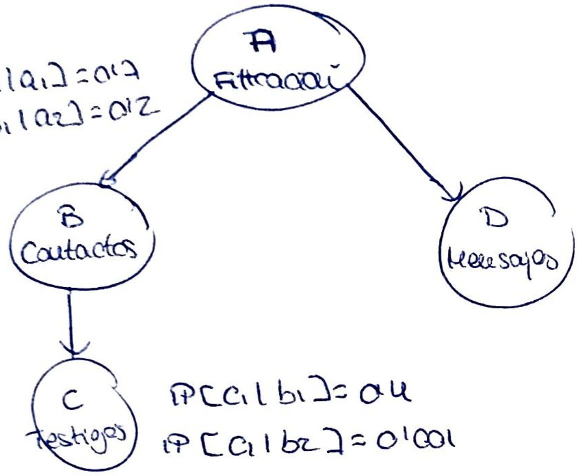
Con V el conjunto de nodos y $p(X)$ los padres de X. En caso de no tener la hip. independencia condicional necesitaría.

$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 \cdot 2^5 = 32 \cdot 243 = 7776$ valores

EJEMPLO 2.8.
CLASE 7.
FILTRO INFO

$\mathbb{P}[a_1] = 0'1$

$\mathbb{P}[b_1|a_1] = 0'7$
$\mathbb{P}[b_1|a_2] = 0'2$



$\mathbb{P}[d_1|a_1] = 0'8$
$\mathbb{P}[d_1|a_2] = 0'4$

$\mathbb{P}[c_1|b_1] = 0'4$
$\mathbb{P}[c_1|b_2] = 0'001$

Evidencia 1
b_1
Evidencia 2
d_2

① Inicializar

- Ponemos λ-mensajes y λ valores a 1

$\lambda(A) = (1,1)$ $\qquad$ $\lambda_B(A) = (1,1)$
$\lambda(B) = (1,1)$ $\qquad$ $\lambda_D(A) = (1,1)$
$\lambda(C) = (1,1)$ $\qquad$ $\lambda_C(B) = (1,1)$
$\lambda(D) = (1,1)$

- Ponemos el π-valor de A

$\pi(A) = (0'1,\ 0'9)$

Enviamos π-mensaje de A a B y a D

$$\pi_B(A) = \pi(A) \prod_{\substack{C\in S(A)\\ C\neq B}} \lambda_C(A) = (0'1,\ 0'9)$$

$$\pi_D(A) = \pi(A) \prod_{\substack{C\in S(A)\\ C\neq D}} \lambda_C(A) = (0'1,\ 0'9)$$

- B recibe su π-mensaje

$$\pi(B) = \sum_{j=1}^{2} \mathbb{P}[B|a_j]\,\pi_B(a_j) = (0'7\cdot 0'1 + 0'2\cdot 0'9,\ 0'3\cdot 0'1 + 0'8\cdot 0'9)$$
$$= (0'25,\ 0'75)$$

$\mathbb{P}^*[B] = \alpha \mathbb{P}\,\lambda(B)\pi(B) = (\alpha 0'25,\ \alpha 0'75)$ como
$\alpha\, 0'25 + \alpha\, 0'75 = 1 \Rightarrow \alpha = 1$, luego $\mathbb{P}^*[B] = (0'25,\ 0'75)$

Envía π-mensaje a C

$$\pi_C(B) = \pi(B) \prod_{\substack{\alpha \in S(B) \\ \alpha \neq C}} \lambda_\alpha(A) = \pi(B) = (0'25, 0'75)$$

•) D recibe su π-mensaje de A

$$\pi(D) = \sum_{j=1}^{2} P[D|a_j]\,\pi_D(a_j) =$$

$$= (0'8 \cdot 0'1 + 0'4 \cdot 0'9,\ 0'2 \cdot 0'1 + 0'6 \cdot 0'9) = (0'44, 0'56)$$

$$P^*[D] = \alpha\lambda(D)\pi(D) = (\alpha 0'44, \alpha 0'56)$$

Como $(0'44 + 0'56)\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1$ luego

$$P^*[D] = (0'44, 0'56)$$

No envía π-mensaje pues no tiene hijos

•) C recibe π-mensaje de B

$$\pi(C) = \sum_{j=1}^{2} P[C|b_j]\,\pi(b_j) =$$

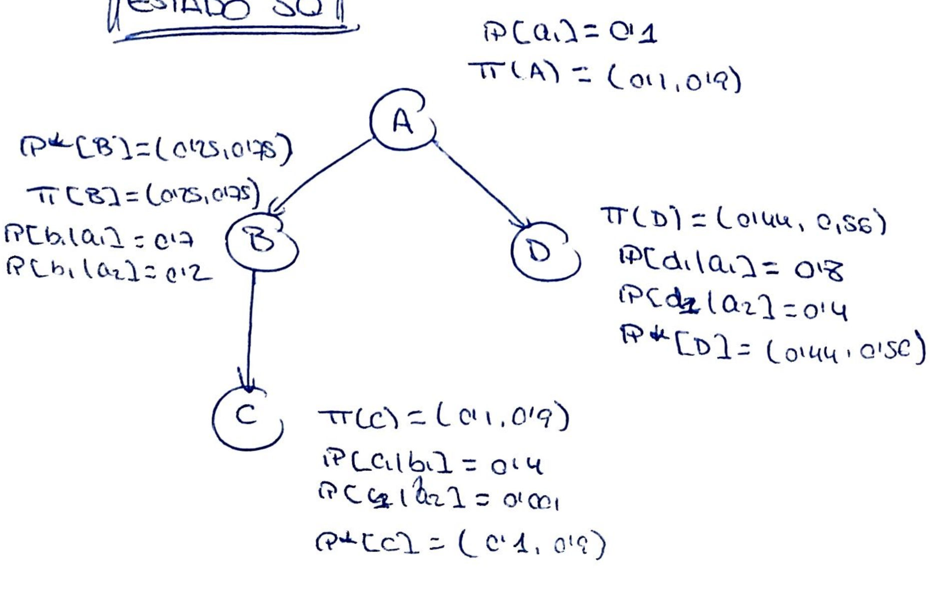
$$= (0'4 \cdot 0'25 + 0'001 \cdot 0'75,\ 0'6 \cdot 0'25 + 0'999 \cdot 0'75) =$$

$$= (0'10075, 0'89925)$$

$$P^*[C] = \alpha\lambda(C)\pi(C) = (\alpha \cdot 0'10075, \alpha 0'89925)$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow P^*[C] \simeq (0'1, 0'9)$$

$\boxed{\text{ESTADO S0}}$



Ahora supongamos que se instancia $B = b_1$

•) Iniciamos $\mathbb{P}^*[B] = (1,0)$

Calculamos $\lambda(B)$

$$\lambda(B) = \prod_{c \in S(B)} \cancel{\lambda_c(B)} = (1,0)$$

Envia λ-mensaje a A y π-mensaje a S

$$\lambda_B(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[b_i | A] \lambda(b_i) = (0'7 \cdot 1, 0'2) =$$
$$= (0'7, 0'2)$$

$$\pi_{C}(B) = \pi(B) \prod_{\substack{\alpha \in S(B) \\ \alpha \neq C}} \lambda_c(B) = (\cancel{0'1} \cdot 1, \cancel{0}) = (1, 0)$$

•) A recibe su λ-mensaje de B

$$\lambda(A) = \prod_{c \in S(A)} \lambda_c(A) = (0'7 \cdot 1, 1 \cdot 0'2) = (0'7, 0'2)$$

$$\mathbb{P}^*[A] = \alpha \lambda(A) \pi(A) = (\alpha \cdot 0'7 \cdot 0'1, \alpha \cdot 0'2 \cdot 0'9) = (\alpha 0'07, \alpha 0'18)$$

$$\Rightarrow \alpha(0'07 + 0'18) = 1 \Rightarrow \alpha = 4$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^*[A] = (0'28, 0'72)$$

Envia π-mensaje a D

$$\pi_D(A) = \pi(A) \prod_{\substack{c \in S(A) \\ c \neq D}} \lambda_c(A) = (0'1 \cdot 0'7, 0'9 \cdot 0'2) =$$
$$= (0'07, 0'18)$$

• C recibe su π-mensaje de B

$$\pi(C) = \sum_{j=1}^{2} \mathbb{P}(\cancel{c_i} | b_j) \pi_c(b_j) = (0'4 \cdot \cancel{0'1} + 0'001 \cdot 0, 0'6 \cdot 1)$$
$$= (0'4, 0'6)$$

$$\mathbb{P}^*(C) = \alpha \lambda(C) \pi(C) = (\alpha \cdot 0'4 + \alpha \cdot 0'6)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\cancel{0'04 + 0'6}} = \cancel{1'5625} \Rightarrow \cancel{\mathbb{P}^*[C] = (0'0625, 0'9375)}$$

$$\mathbb{P}^*[C] = (0'4, 0'6)$$

∘) D recibe su π-mensaje

$$\pi(D) = \sum_{j=1}^{2} P[D|a_j]\,\pi_D(a_j)$$

$$= (0'8 \cdot 0'07 + 0'4 \cdot 0'18\ ,\ 0'2 \cdot 0'07 + 0'6 \cdot 0'18) =$$

$$= (0'128\ ,\ 0'122) \neq$$

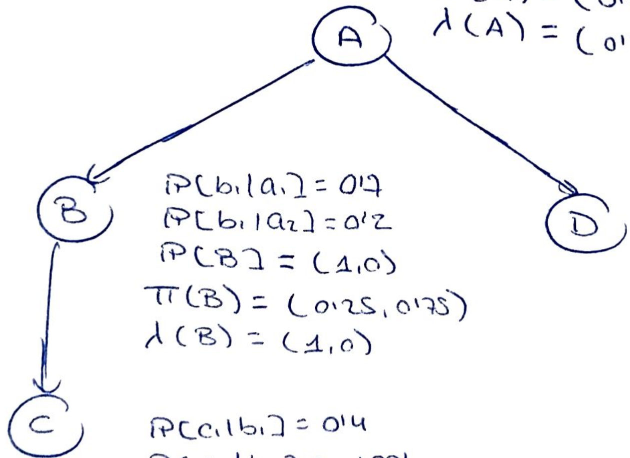
$$P^*[D] = \alpha\,\lambda(D)\,\pi(D) = (\alpha \cdot 0'128\ ,\ \alpha\, 0'122)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{0'128 + 0'122} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^*[D] = (0'512\ ,\ 0'488)$$

$\boxed{\text{ESTADO } S_1}$

$P[A] = (0'28, 0'72)$
$P[a_1] = 0'1$
$\pi(A) = (0'1, 0'9)$
$\lambda(A) = (0'7, 0'2)$



$P[b_1|a_1] = 0'7$
$P[b_1|a_2] = 0'2$
$P[B] = (1, 0)$
$\pi(B) = (0'25, 0'75)$
$\lambda(B) = (1, 0)$

$P[d_1|a_1] = 0'8$
$P[d_1|a_2] = 0'4$
$P[D] = (0'512, 0'488)$
$\pi[D] = (0'128, 0'122)$
$\lambda(D) = (1, 1)$

$P[c_1|b_1] = 0'4$
$P[c_1|b_2] = 0'001$
$\pi(C) = (0'4, 0'6)$
$P[C] = (0'4, 0'6)$
$\lambda(C) = (1, 1)$

∘) Ahora suponemos $D = d_2$.

$P^*[D] = (0, 1)$

$\lambda[D] = (0, 1)$

Envía λ-mensaje a A

$$\lambda_D(A) = \sum_{i=1}^{2} P[d_i|A]\,\lambda(d_i) = (0'2\ ,\ 0'6)$$

- A recibe el λ-mensaje de D

$$\lambda(A) = \prod_{C \in S(A)} \lambda_C(A) = \left(\lambda_B(a_1)\lambda_D(a_1),\ \lambda_B(a_2)\lambda_D(a_2) \right) =$$

$$= (0'2 \cdot 0'7,\ 0'6 \cdot 0'2) = (0'14,\ 0'12)$$

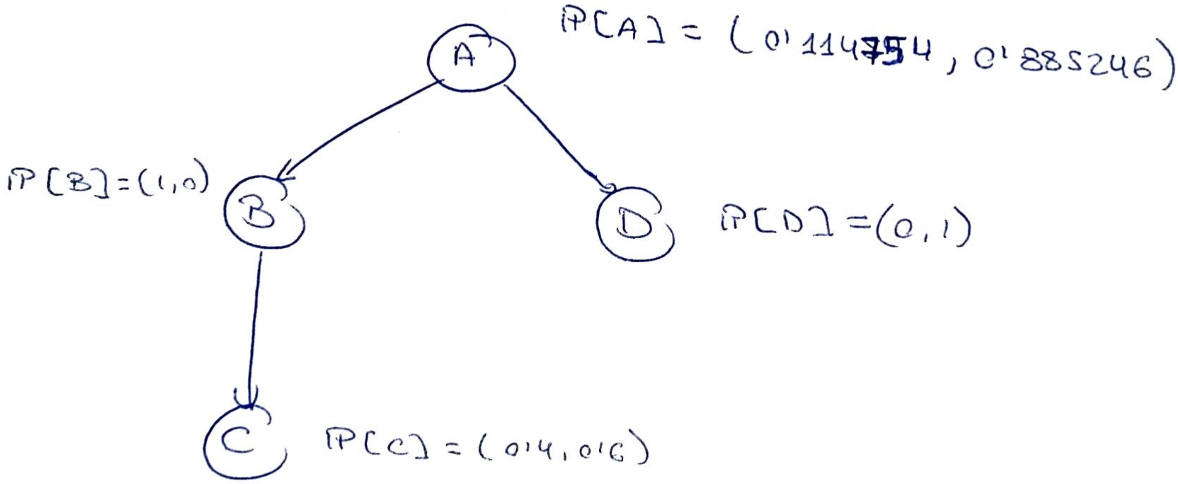
$$P^*[A] = \alpha\lambda(A)\pi(A) = (\alpha \cdot 0'14 \cdot 0'1,\ \alpha \cdot 12 \cdot 0'9) =$$

$$= (\alpha \cdot 0'014,\ \alpha \cdot 0'108) \Rightarrow \alpha = 8'19\ldots$$

$$\Rightarrow P^*[A] = (0'114754\ \ 0'8852459)$$

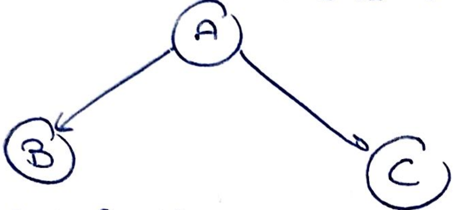
Envía π-mensaje a B pero como está inicializada de igual

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Estado } S_2}$



EJERCICIO 2.11

$\mathbb{P}[a_1] = 0'2$



$\mathbb{P}[c_1|a_1] = 0'8$
$\mathbb{P}[c_2|a_2] = 0'2$
$\mathbb{P}[c_2|a_1] = 0'1$
$\mathbb{P}[c_2|a_2] = 0'7$

$\mathbb{P}[b_1|a_1] = 0'2$
$\mathbb{P}[b_1|a_2] = 0'6$

Calcular $\mathbb{P}[A]$ y $\mathbb{P}[C]$ dado que $B = b_1$

— o —

Comenzamos calculando el estado inicial

•) λ-valores y λ-mensajes a 1.

$\lambda(A) = (1,1)$ $\qquad \lambda_B(A) = (1,1)$

$\lambda(B) = (1,1)$ $\qquad \lambda_C(A) = (1,1)$

$\lambda(C) = (1,1,1)$

•) $\pi(A) = (0'2, 0'8) = \mathbb{P}[A]$

•) Envía $\boxed{\pi\text{-mensaje a } B \text{ y a } C.}$

$$\pi_B(A) = \pi(A) \prod_{\substack{C \in S(A) \\ C \neq B}} \lambda_C(A) = (0'2, 0'8)$$

$$\pi_C(A) = \pi(A) \prod_{\substack{\alpha \in S(A) \\ \alpha \neq C}} \lambda_\alpha(A) = (0'2, 0'8)$$

•) $\boxed{B \text{ recibe } \pi\text{-mensaje}}$

$$\pi(B) = \sum_{j=1}^{m} P(B|a_j)\pi_B(a_j) = (0'2\cdot 0'2 + 0'6\cdot 0'8,\ 0'8\cdot 0'2 + 0'4\cdot 0'8)$$

$$= (0'52, 0'48)$$

$\mathbb{P}^*[B] = (0'52, 0'48)$

No tiene hijos

• C recibe un π-mensaje

$$\pi(c) = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}[c \mid a_j]\,\pi_{c}(a_i) =$$

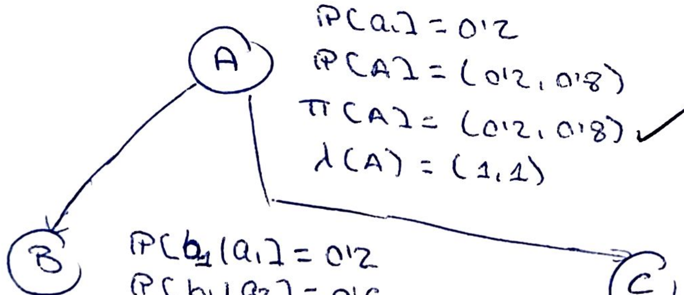
$$= (0'8 \cdot 0'2 + 0'2 \cdot 0'8,\ 0'1 \cdot 0'2 + 0'7 \cdot 0'8;\ 0'1 \cdot 0'2 + 0'1 \cdot 0'8) =$$

$$= (0'32,\ 0'58,\ 0'1)$$

$\mathbb{P}^*[C] = (0'32, 0'58, 0'1)$

No tiene hijos

Estado S0



$\mathbb{P}[a_1] = 0'2$
$\mathbb{P}[A] = (0'2, 0'8)$
$\pi(A) = (0'2, 0'8)$ ✓
$\lambda(A) = (1,1)$

$\mathbb{P}[b_1 \mid a_1] = 0'2$
$\mathbb{P}[b_1 \mid a_2] = 0'6$
$\mathbb{P}[B] = (0'52, 0'48)$
$\pi(B) = (0'52, 0'48)$ ✓
$\lambda(B) = (1,1)$
$\lambda_B(A) = (1,1)$
$\pi_B(A) = (0'2, 0'8)$

$\mathbb{P}[c_1 \mid a_1] = 0'8$
$\mathbb{P}[c_1 \mid a_2] = 0'2$
$\mathbb{P}[c_2 \mid a_1] = 0'1$
$\mathbb{P}[c_2 \mid a_2] = 0'7$
$\mathbb{P}[C] = (0'32, 0'58, 0'1)$
$\pi(C) = (0'32, 0'58, 0'1)$ ✓
$\lambda(C) = (1,1,1)$
$\lambda_C(A) = (1,1)$
$\pi_C(A) = (0'2, 0'8)$

Ahora instanciamos $B = b_1$

$\mathbb{P}^*[B] = (1,0)$

$\lambda(B) = (1,0)$

Envía λ-mensaje a A

$$\lambda_B(A) = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}[b_i \mid a_j]\,\lambda(b_i) = (0'2,\ 0'6)$$

A recibe el λ-mensaje de B

$$\lambda(A) = \prod_{B \in S(A)} \lambda_B(A) = (0'2, 0'6)$$

$$\mathbb{P}^*[A] = \alpha\,\lambda(A)\,\pi(A) = (0'04\alpha,\ 0'48\alpha)$$

$$\alpha = \frac{1}{0'04 + 0'48} = 1'92\ldots \Rightarrow \mathbb{P}^*[A] = (1/13, 12/13) = (0'0769, 0'923076)$$

Envía π-mensaje a C

$$\pi_C(A) = \pi(A) \prod_{\substack{B\in S(A)\\ B\neq C}} \lambda_B(A) = (0'2\cdot 0'2,\ 0'8\cdot 0'6) = (0'04,\ 0'48)$$

$\boxed{\text{C recibe } \pi\text{-mensaje}}$

$$\pi(C) = \sum_{j=1}^{2} P(C \mid a_j)\, \pi_C(a_j) =$$

$$= (0'8\cdot 0'04 + 0'2\cdot 0'48,\ 0'1\cdot 0'04 + 0'7\cdot 0'48,\ 0'1\cdot 0'04 + 0'1\cdot 0'48)$$

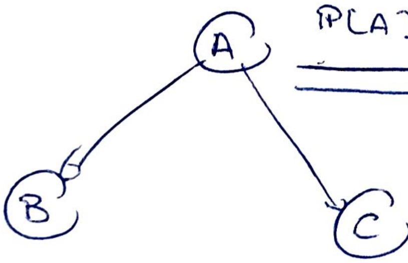
$$= (0'128,\ 0'34,\ 0'052)$$

$$P^*[C] = \alpha \lambda(C) \pi(C)$$

$$= (\alpha\, 0'128,\ \alpha\cdot 0'34,\ \alpha\cdot 0'052) \Rightarrow \alpha = \frac{25}{13} = 1'923077$$

$$\Rightarrow P^*[C] = (0'2461538,\ 0'653861,\ 0'1)$$

Estado S_1



$P[A] = (0'0769,\ 0'923076)$ ✓

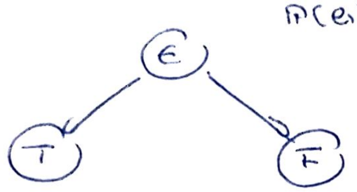
$P[C] = (0'246,\ 0'654,\ 0'1)$ ✓

$P[B] = (1,0)$ ✓

Comprobado en Genie

EJERCICIO 2.12.

$\mathbb{P}[e_1] = 0'003$



$\mathbb{P}[f_1|e_1] = 0'98$

$\mathbb{P}[f_1|e_2] = 0'017$

$\mathbb{P}[t_1|e_1] = 0'992$

$\mathbb{P}[t_2|e_2] = 0'994 \quad \Rightarrow \mathbb{P}[t_1|e_2] = 0'006$

— o —

Inicializamos la red

$\lambda(E) = (1,1) \qquad \lambda_T(E) = (1,1)$

$\lambda(T) = (1,1) \qquad \lambda_F(E) = (1,1)$

$\lambda(F) = (1,1)$

$\pi(E) = (0'003, 0'997)$

$\mathbb{P}[E] = (0'003, 0'997)$

Envia π-mensaje a T y F

$$\pi_T(E) = \pi(E) \prod_{\substack{C \in S(E) \\ C \neq T}} \lambda_C(E) = (0'003, 0'997)$$

$$\pi_F(E) = \pi(E) \prod_{\substack{C \in S(E) \\ C \neq F}} \lambda_C(E) = (0'003, 0'997)$$

T recibe el π-mensaje de E

$$\pi(T) = \sum_{i=1}^{m} P(T|e_i)\pi_T(e_i) = (0'992 \cdot 0'003 + 0'006 \cdot 0'997, \; 0'008 \cdot 0'003 + 0'994 \cdot 0'997)$$

$$= (0'008958, 0'991042)$$

$\mathbb{P}^*[T] = \alpha\lambda(T)\pi(T) = \pi(T) \simeq (0'009, 0'991)$

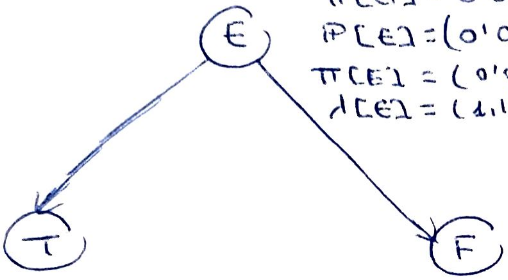
Envia pero no tiene hijos

F recibe π-mensaje

$$\pi(F) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}[F|e_i]\pi_F(e_i) = (0'98 \cdot 0'003 + 0'017 \cdot 0'997, \; 0'02 \cdot 0'003 + 0'983 \cdot 0'997)$$

$= (0'019, 0'981) = \mathbb{P}^*[F]$ y no tiene hijos

Estado S_0



$P[e_1] = 0'003$

$P[E] = (0'003, 0'997)$

$\pi[E] = (0'003, 0'997)$

$\lambda[E] = (1,1)$

$P[f_1|e_1] = 0'98$

$P[f_2|e_2] = 0'017$

$P[F] = (0'019, 0'981)$

$\pi[F] = (0'019, 0'981)$

$\lambda[F] = (1,1)$

$P[t_1|e_1] = 0'992$

$P[t_2|e_2] = 0'006$

$P[T] = (0'009, 0'991)$

$\pi(T] = (0'009, 0'991)$

$\lambda[T] = (1,1)$

Supongamos $F = f_1$

Entonces

$P^*[F] = (1,0)$

$\lambda[F] = (1,0)$

Envía λ-mensaje a E

$$\lambda_F(E) = \sum_{i=1}^{2} P[f_1|e_i]\lambda(f_i) =$$

$$= (0'98 \cdot 1,\ 0'017)$$

E recibe el λ-mensaje

$$\lambda(E) = \prod_{C \in S(E)} \lambda_C(E) = (0'98, 0'017)$$

$$P^*(E] = \alpha\lambda(E)\pi(E) = (0'98 \cdot 0'003\alpha + 0'017 \cdot 0'997\alpha) = (0'00294\alpha,\ 0'016949\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha = 50'279 \Rightarrow P^*(E] = (0'1478,\ 0'8522)$$

Envía π-mensaje a T

$$\pi_T(E) = \pi(E) \prod_{\substack{C \in S(E) \\ C \neq T}} \lambda_C(E) = (0'003 \cdot 0'98,\ 0'997 \cdot 0'017) =$$

$$= (0'00294,\ 0'016949)$$

Recibe T el π-mensaje

$$\pi(T) = \sum_{j=1}^{m} P[T|e_j]\,\pi_T(e_j) =$$

$$= (0'992 \cdot 0'00294 + 0'006 \cdot 0'016949,\ 0'008 \cdot 0'00294 + 0'994 \cdot 0'016949)$$

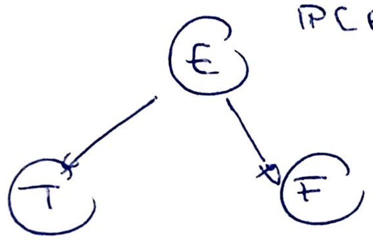
$$= (0'003018156,\ 0'016870828)$$

$$P^*[T] = \alpha\,\lambda(T)\,\pi(T) =$$

$$= \alpha\,\pi(T) \Rightarrow \alpha = 1/0'019888982$$

$$\Rightarrow P^*[T] = (0'1517451479,\ 0'8482548521)$$

Concluimos en el estado S_1



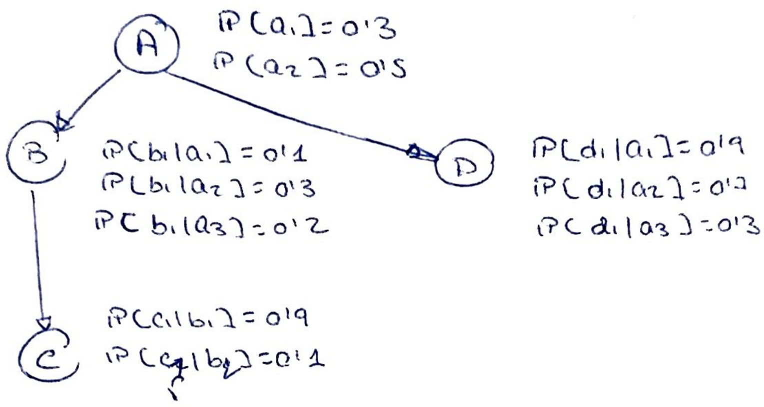
$P[E] = (0'1478,\ 0'8522)$ ✓

$P[F] = (1, 0)$ ✓

$P[T] = (0'15,\ 0'85)$ ✓

Probado con GeNIe

EJERCICIO 2.13



Inicializamos la red

$\lambda(A) = \lambda(B) = \lambda(D) = \lambda(C) = (1)_j$ con $j \in \{2,3\}$

siendo j la dimensión de la variable

$\lambda_B(A) = (1,1,1)$ $\lambda_D(A)$

$\lambda_C(B) = (1,1)$

$\mathbb{P}[A] = \pi[A] = (0'3,\ 0'5,\ 0'2)$

~~A envía π-mensaje a B y D~~

$\cancel{\pi_B(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}[b_i | A]\lambda(b_i) =}$

$\cancel{= (}$

- A envía π-mensaje a B y D.

$$\pi_B(A) = \pi(A) \prod_{\substack{\beta \in S(A) \\ \beta \neq B}} \lambda_D(A) = \pi(A) = (0'3,\ 0'5,\ 0'2)$$

$$\pi_D(A) = (0'3,\ 0'5,\ 0'2)$$

- B recibe π-mensaje de A.

$$\pi(B) = \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}[B | a_j]\pi_B(a_j) = \begin{pmatrix} 0'1 \cdot 0'3 + 0'3 \cdot 0'5 + 0'2 \cdot 0'2, \\ 0'9 \cdot 0'3 + 0'7 \cdot 0'5 + 0'8 \cdot 0'2 \end{pmatrix}$$

$$= (0'22,\ 0'78)$$

$$\mathbb{P}^*[B] = (0'22,\ 0'78)$$

Envía π-mensaje a C

$$\pi_C(B) = \pi(B) \prod_{\substack{\beta \in S(B) \\ \beta \neq C}} \lambda_\beta(B) = \pi(B) = (0'22,\ 0'78)$$

- D recibe su π-mensaje

$$\pi_D(D) = \sum_{i=1}^{3} P[D|a_j]\,\pi_D(a_j) =$$

$$= (0'9\cdot 0'3 + 0'7\cdot 0'5 + 0'3\cdot 0'2,\ 0'1\cdot 0'3 + 0'3\cdot 0'5 + 0'7\cdot 0'2) = (0'68,\ 0'32)$$

$$P^*[D] = (0'68,\ 0'32)$$

- C recibe π-mensaje

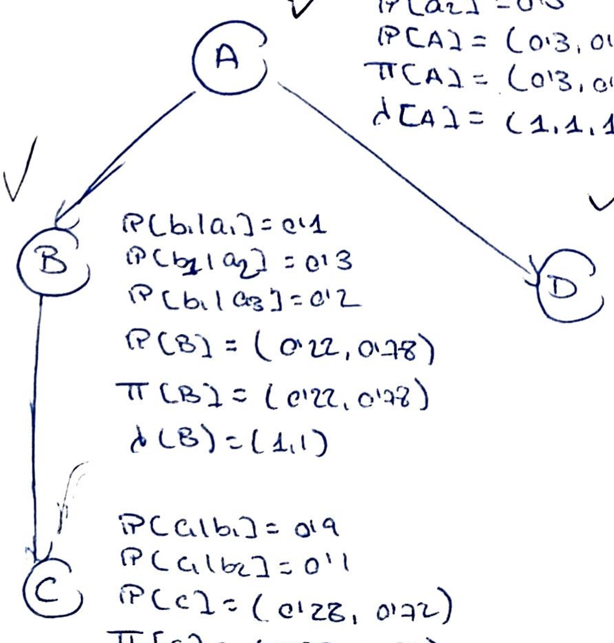
$$\pi(C) = \sum_{i=1}^{2} P[C|b_i]\,\pi_C(b_i) =$$

$$= (0'9\cdot 0'22 + 0'1\cdot 0'78;\ 0'1\cdot 0'22 + 0'9\cdot 0'78)$$

$$= (0'276,\ 0'724)$$

$$P^*[C] = (0'276,\ 0'724)$$

Estado S_0



$P[a_1] = 0'3$
$P[a_2] = 0'5$
$P[A] = (0'3, 0'5, 0'2)$
$\pi[A] = (0'3, 0'5, 0'2)$
$\lambda[A] = (1, 1, 1)$

$P[b_1|a_1] = 0'1$
$P[b_1|a_2] = 0'3$
$P[b_1|a_3] = 0'2$
$P(B) = (0'22, 0'78)$
$\pi[B] = (0'22, 0'78)$
$\lambda(B) = (1, 1)$

$P[d_1|a_1] = 0'9$
$P[d_1|a_2] = 0'7$
$P[d_1|a_3] = 0'3$
$P[D] = (0'68, 0'32)$
$\pi[D] = (0'68, 0'32)$
$\lambda[D] = (1, 1)$

$P[c_1|b_1] = 0'9$
$P[c_1|b_2] = 0'1$
$P[c] = (0'28, 0'72)$
$\pi[c] = (0'28, 0'72)$
$\lambda(C) = (1, 1)$

Supongamos ahora que $B = b_2$

$\mathbb{P}^*[B] = (0, 1)$

$\lambda(B) = (0, 1)$

Envía λ-mensaje a (A)

$$\lambda_B(A) = \sum_{i=1}^{2} P(b_i|A)\lambda(b_i) = (0'9, 0'7, 0'8)$$

Envía π-mensaje a C

~~$\pi_c(B) = \pi(B) = (0'22, 0'78)$~~ B se instancia $\pi_c(B) = (0, 1)$

- C recibe el π-mensaje

$$\pi(C) = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}[C|b_i]\, \pi_C(b_i) = \begin{pmatrix} 0'9 \cdot 0'22 + 0'1 \cdot 0'78, \\ 0'1 \cdot 0'22 + 0'9 \cdot 0'78 \end{pmatrix} =$$

$$= (0'2[illegible], 0'[illegible])$$

$\mathbb{P}^*[C] = ([illegible], [illegible])$

- A recibe λ-mensaje

$$\lambda(A) = \prod_{B \in S(A)} \lambda_B(A) = \lambda_B(A) = (0'9, 0'7, 0'8)$$

$$\mathbb{P}^*[A] = \alpha \lambda(A) \pi(A) =$$

$$= \alpha (0'9, 0'7, 0'8)(0'3, 0'5, 0'2) =$$

$$= \alpha(0'27, 0'35, 0'16) \Rightarrow \alpha = 1/\ldots = 50/39$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^*[A] = (0'35, 0'45, 0'2)$$

Envía π-mensaje a D

$$\pi_D(A) = \pi(A)\lambda_B(A) = (0'9 \cdot 0'3, 0'7 \cdot 0'5, 0'8 \cdot 0'2) =$$

$$= (0'27, 0'35, 0'16)$$

D recibe π-mensaje.

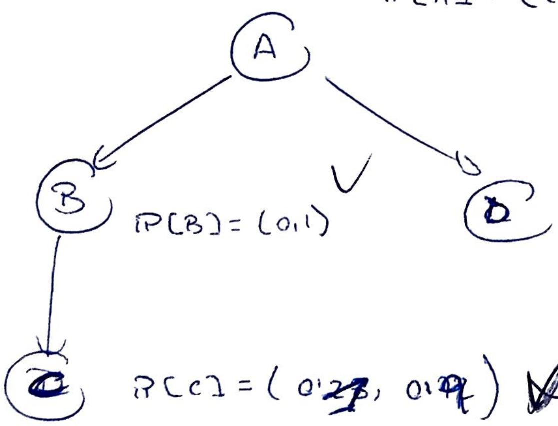
$$\pi(D) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}[D/a_i]\,\pi_D(a_i) =$$

$$= (0'9 \cdot 0'27 + 0'7 \cdot 0'35 + 0'3 \cdot 0'16,$$
$$0'1 \cdot 0'27 + 0'3 \cdot 0'35 + 0'7 \cdot 0'16) =$$
$$= (0'536,\ 0'244)$$

$$\mathbb{P}^*[D] = \alpha\,\pi(D) \Rightarrow \alpha = 50/39 = 1'282$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^*[D] = (0'69,\ 0'31)$$

Estado S_1



$\mathbb{P}[A] = (0'35,\ 0'45,\ 0'2)$

$\mathbb{P}[B] = (0, 1)$

$\mathbb{P}[D] = (0'69,\ 0'31)$

$\mathbb{P}[C] = (0'23,\ 0'77)$

CHECK BY GENIE

EJERCICIO 2.14

Cuando el conducto C funciona correctamente, la cámara A está libre de aire (casi siempre, hay un 5% en que tiene aire), la presión de la cámara B suele ser normal (salvo el 2% de veces en que es alta).

Si C se obstruye (10%) casi siempre hay aire en la cámara A (salvo 5%) y presión de cámara B es elevada (salvo 5%).

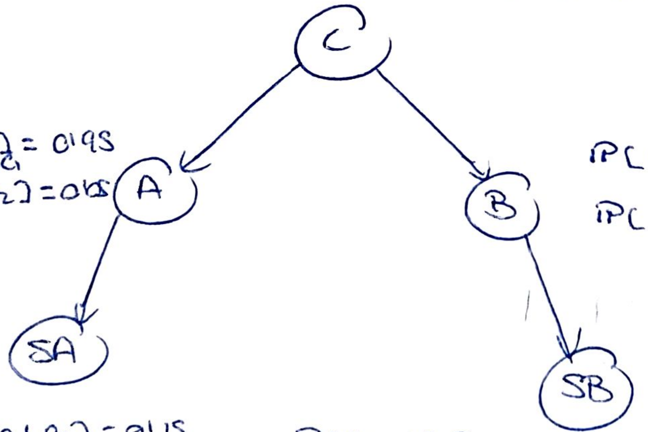
El exceso de presión de B es indicado por el sensor SB que presenta 10% de falsos positivos y 20% de falsos negativos.

La presencia de aire en A es detectada por SA sensor que presenta un 15% de falsos positivos y 15% de falsos negativos.

—— o ——

Modelar y suponer SA positivo.

$\mathbb{P}[c_1] = 0'9$



$\mathbb{P}[a_1|c_1] = 0'95$

$\mathbb{P}(a_1|c_2] = 0'05$

$\mathbb{P}[b_1|c_1] = 0'98$

$\mathbb{P}[b_1|c_2] = 0'05$

$\mathbb{P}[sb_1 | b_2] = 0'1$

$\mathbb{P}[sb_2 | b_2] = 0'2$

~~$\mathbb{P}[sa_2|a_2] = 0'15$~~

~~$\mathbb{P}(sa_1| a_2] = 0'15$~~

$\mathbb{P}[sa_2|a_1] = 0'15$

$\mathbb{P}[sa_1|a_2] = 0'15$

Falso negativo
Sensor dice libre aire
en realidad sí hay

Vamos a inicializar

$\mathbb{P}[C] = (0'9, 0'1)$

$\pi[C] = (0'9, 0'1)$

$\lambda(C) = \lambda(B) = \lambda(A) = \lambda(SB) = \lambda(SA) = (1,1) = \lambda_A(C) = \lambda_B(C) =$

$= \lambda_{SA}(A) = \lambda_{SB}(C)$

C envía π-mensaje a A y a B

$\pi_A(C) = \pi(C) = \pi_B(C) = (0'9, 0'1)$

A recibe el π-mensaje

$$\pi(A) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}[A|C_j]\,\pi_A(C_j) = \begin{pmatrix} 0'95 \cdot 0'9 + 0'05 \cdot 0'1, \\ 0'05 \cdot 0'9 + 0'95 \cdot 0'1 \end{pmatrix}$$

$$= (0'86, 0'14)$$

$\overset{*}{\mathbb{P}}[A] = (0'86, 0'14)$

Envía π-mensaje a SA.

$\pi_{SA}(A) = (0'86, 0'14)$

B recibe π-mensaje

$$\pi(B) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}[B|C_j]\,\pi_B(C_j) = \begin{pmatrix} 0'98 \cdot 0'9 + 0'05 \cdot 0'1, \\ 0'02 \cdot 0'9 + 0'95 \cdot 0'1 \end{pmatrix}$$

$$= (0'887, 0'113)$$

$\overset{*}{\mathbb{P}}[B] = (0'887, 0'113)$

Envía π-mensaje a SB

$\pi_{SB}(B) = (0'887, 0'113)$

SA recibe π-mensaje

$$\pi(SA) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}[SA|a_j]\,\pi_{SA}(a_j) = \begin{pmatrix} 0'15 \cdot 0'86 + 0'15 \cdot 0'14, \\ 0'85 \cdot 0'86 + 0'85 \cdot 0'14 \end{pmatrix}$$

$$= (0'15, 0'85)$$

$\overset{*}{\mathbb{P}}[SA] = (0'15, 0'85)$

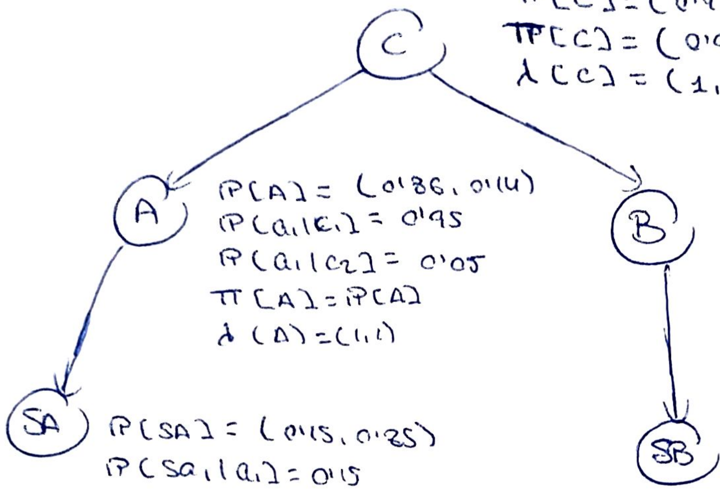
SB recibe π-mensaje

$$\pi(SB) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}[SB|b_j]\,\pi_{SB}(b_j) = \begin{pmatrix} 0'1 \cdot 0'887 + 0'2 \cdot 0'113, \\ 0'9 \cdot 0'887 + 0'8 \cdot 0'113 \end{pmatrix}$$

$$= (0'1113, 0'8887)$$

$\overset{*}{\mathbb{P}}(SB) = (0'1113, 0'8887)$

ESTADO S0



$\mathbb{P}[c_1] = 0'9$
$\mathbb{P}[C] = (0'9, 0'1)$
$\pi[C] = (0'9, 0'1)$
$\lambda[C] = (1,1)$

$\mathbb{P}[A] = (0'86, 0'14)$
$\mathbb{P}[a_1|c_1] = 0'95$
$\mathbb{P}[a_1|c_2] = 0'05$
$\pi[A] = \mathbb{P}[A]$
$\lambda(A) = (1,1)$

$\mathbb{P}[B] = (0'887, 0'113)$
$\mathbb{P}[b_1|c_1] = 0'98$
$\mathbb{P}[b_1|c_2] = 0'05$
$\pi[B] = \mathbb{P}[B]$
$\lambda(B) = (1,1)$

$\mathbb{P}[SA] = (0'15, 0'85)$
$\mathbb{P}[sa_1|a_1] = 0'15$
$\mathbb{P}[sa_1|a_2] = 0'85$
$\pi[SA] = (0'15, 0'85)$
$\lambda(A) = (1,1)$.

$\mathbb{P}[SB] = (0'113, 0'887)$
$\mathbb{P}[sb_1|b_1] = 0'1$
$\mathbb{P}[sb_1|b_2] = 0'2$
$\pi(SB) = \mathbb{P}(SB)$
$\lambda(SB) = (1,1)$

Instanciamos $SA = sa_1$

$\mathbb{P}^*[SA] = (1,0)$
$\lambda(SA) = (1,0)$
λ mensaje a A.

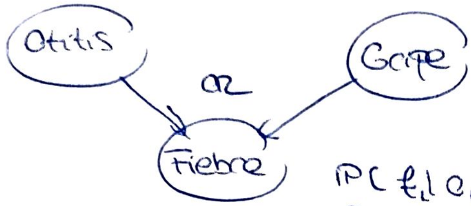
$$\lambda_{SA}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[sa_i|A]\,\lambda(sa_i) = (0'15, 0'15)$$

A recibe λ-mensaje

$\lambda(A) = (0'15, 0'15)$
$\mathbb{P}^*[A] = \alpha(0'15, 0'15)(0'86, 0'14) = (0'129\alpha, 0'021\alpha)$
$\Rightarrow \alpha = 20/3 \Rightarrow \mathbb{P}^*[A] = (0'86, 0'14)$

Esto no me cuadra. Reviso y corrijo, pero tras revisar sigue todo igual, no cambia nada. He debido interpretar mal el enunciado pues no tiene sentido que lo que diga el sensor no influya en la probabilidad de cómo esté realmente, ese sensor me sería inútil entonces.
Ya he visto el fallo, luego lo vuelvo a hacer

EJEMPLO 3
DE MIS APUNTES



$\mathbb{P}[f_1 | o_1] = 0'6$
$\mathbb{P}[f_1 | g_1] = 0'8$

Noisy-Or
Generaliz. V
como otro

$\mathbb{P}[\cancel{f_1} | o_1, g_2]$?
$\mathbb{P}[f_1 | o_1, g_2]$?
$\mathbb{P}[f_1 | o_2\ g_1]$?
$\mathbb{P}[f_1 | o_2\ g_2]$?

——— o ———

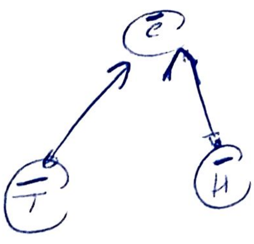
$\mathbb{P}[f_1 | o_2\ g_2] = 1 - \mathbb{P}[f_2 | o_2\ g_2] = 1 - \prod_{\emptyset} x = 1 - 1 = 0$

$\mathbb{P}[f_1 | o_2\ g_1] = 1 - \mathbb{P}[f_2 | o_2\ g_1] = 1 - (1 - 0'8) = 0'8$

$\mathbb{P}[f_1 | o_1\ g_2] = 0'6$

$\mathbb{P}[f_1 | o_1\ g_1] = 1 - \mathbb{P}[f_2 | o_1\ g_1] = 1 - (1 - 0'6)(1 - 0'8) = 0'92$

$\bar{C} \Leftrightarrow \bar{T} \cup \bar{H}$ → Construir Noisy And con Noisy OR.



Noisy Or

$1 - \mathbb{P}[H] = \mathbb{P}[\bar{H}]$

$\mathbb{P}[$

$1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2$

$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$

GE → 2
QS → 3
EA → 2 (4)
H → $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
A → 6
GU → 2^4