BLOQUE I: 1. Sistemas basados en el conocimiento

- Incertidumbre: Es probable que hoy llueva
- Imprecisión: Juan es bastante alto

} Depende de si el sistema es incierto o impreciso trabajaremos de forma distinta

• Sistema basado en el conocimiento: APP informática capaz de solucionar un conjunto de problemas que exigen un gran conocimiento sobre un determinado tema.

Ej: en una APP de diagnóstico sanitario se necesitan datos del paciente, síntomas...

El sistema a partir de esto puede dar como resultado → emitir diagnóstico

aprender de los nuevos casos — justificar la respuesta — solicitar nueva información

todo esto hace que el sistema necesite mecanismos de razonamiento

Técnicas de razonamiento:
- * Lógica (A.C - actualidad): proposicional, de predicados, descriptivas
- * Lógica difusa (1965 - actualidad)
- Modelo probabilístico clásico (70-80)
- Factores de certeza (75-80)
- * Redes bayesianas (88 - actualidad)

Razonamiento aproximado: El modelo ideal del razonamiento es el exacto pero en el mundo real se suele razonar con información incierta (redes bayesianas) e imprecisa (lógica difusa) debido a información incompleta, errónea, imprecisa...

Redes bayesianas: características principales

• La incertidumbre se representa basándose en teoría de la probabilidad
- Información estructurada en variables y $\underbrace{\text{relacionada con influencia causal}}_{\text{independencia condicional}}$
- Parámetros: probabilidades condicionadas de cada variable dadas sus padres
- Inferencias abductivas y predictivas

↑ abducción ↓ predicción

Lógica difusa: características principales

• Motivación inicial: estudio de la vaguedad
• Solución: definir conjuntos con grados de pertenencia

Objetivo: representar la vaguedad e imprecisión inherentes en el lenguaje natural

Elementos: conjuntos difusos, variables difusas, relaciones difusas, reglas difusas que se combinan entre sí en el $\underbrace{\text{proceso de inferencias}}_{\text{incluye pasos que pasan la información nítida a difusa y viceversa}}$

FUNCIONALIDADES QUE DEBE TENER UN SBC

- Aceptar las consultas que el usuario realice
- Aceptar los datos proporcionados por el usuario y solicitar otros que el sistema estime
- Procesar esta información en busca de una respuesta a la consulta planteada
- Emitir la respuesta hallada, que normalmente debe ser análoga a las respuestas de un experto
- Justificar la respuesta emitida
- Autoaprendizaje (lo que sea posible)

4
- En la base de conocimiento: reglas o leyes bayesianas
- En motor de inferencia: acepta los datos
- En memoria de trabajo: conclusiones intermedias y finales; esto cambia en cada sesión

SBC basadas en reglas: base de conocimientos

- Contiene: conocimiento experto expresado en reglas
- Naturaleza: estática si no interviene el módulo de adquisición de conocimientos y el SBC no incluye elementos de aprendizaje.
- Representación del conocimiento: de forma computable bien sea en reglas, diagramas de inferencia causal...

- Tengo flexibilidad con las reglas
  - Reglas de diagnóstico: Si tos ent gripe
  - Regla causal: Si gripe ent tos

Representación basada en reglas

- Hechos: afirmaciones incondicionales
  - Simples: "cantidad de ropa es mucha"
  - Compuestos: "cantidad de ropa es mucha y grado de suciedad alto" utiliza conectivas Y, NO, O para agrupar hechos simples.
- Reglas: estructuras de razonamiento fundamentales Ej: si <izd> ent <dcr>
  - terminología
    - <izd> antecedente, premisa o condición.
    - <dcr> consecuente, conclusión, acción.
- En una red de inferencias hay: hipótesis inicial, intermedia y finales

SBC basadas en reglas: memoria de trabajo

- Contiene: conclusiones/hipótesis que se generan en el proceso de razonamiento a partir de los datos del caso que se esté analizando
- Naturaleza: dinámica pues se van añadiendo hipótesis/conclusiones

SBC basadas en reglas i motores de inferencia:

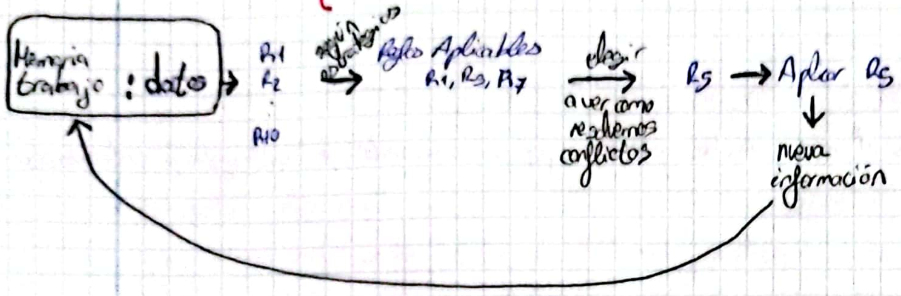
- Utiliza:
  - datos del caso
  - datos almacenados en la memoria de trabajo
  - conocimiento almacenado en la base de conocimiento

  } para obtener nuevas conclusiones/hipótesis que se añaden a la MT.

El motor de inferencias puede solicitar también nuevos datos al usuario, cuando intenta probar alguna hipótesis.

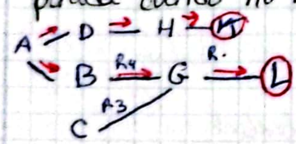
Razonamiento para SBC basado en reglas

Regla Modus Ponens	Regla Modus Tollens
Regla: Si A es cierto, ent B es cierto	Regla: Si A es cierto, ent B es cierto
Hecho: A es cierto	Hecho: B es falso
se concluye que B es cierto	se concluye que A es falso



Si $B \wedge C$ la conclusión es K
Si $B \vee C$ las conclusiones son K y L
} Porque solo tenemos de dato inicial A.

Ej: (Supuesto 1'): Motor hacia delante, orden textual para resolución de conflictos, criterio parada cuando no hay más reglas aplicables, $B \to G \wedge C \to G$



Para demostrar: partimos de la hipótesis que queremos demostrar y del dato inicial. Partimos del que queremos demostrar y miramos su antecedente, si está en la memoria de trabajo acabamos sino nos movemos al antecedente y miramos si está en la memoria de trabajo...

Estrategias: lo normal es que un sistema razone parcialmente hacia delante y parcialmente hacia atrás

Hay que determinar
- Estrategias: para decidir el conjunto de reglas aplicables
- Cómo resolver conflictos: cuando haya más de una regla aplicable
- Configuración final: qué se considera
  - ej.
    - La consulta incluye todos los hechos
    - Hay muchos objetivos posibles
    - No hay forma sencilla de asegurar el objetivo inicial

Estrategias de los motores de inferencia
- Encadenamiento de reglas hacia delante: partimos de los hechos conocidos y avanzamos razonando hacia delante.
- Encadenamiento de reglas hacia atrás: partimos de un objetivo a demostrar y vamos hacia detrás intentando probarlo, buscando los hechos que nos permiten concluir dicho objetivo
  - ej.
    - En la consulta se plantea o puede deducirse el objetivo
    - El sistema se ha implementado para ir pidiendo evidencias

CRITERIOS DE RESOLUCIÓN DE CONFLICTOS
- **Estáticos:** orden textual de reglas, utilidad reglas, utilidad hechos, especificidad, generalidad.
- **Dinámicos:** mínima espera, máxima espera.
- **Dinámicos manipulables:** los parámetros que determinan la prioridad se modifican en cada paso del motor mediante meta-reglas.

CRITERIOS DE PARADA
- aquella que contiene al menos 1 hipótesis final
- aquella que contiene 1 hipótesis final con un cierto grado de fiabilidad
- aquella en la que no es posible ya aplicar más reglas

Def: configuraciones finales de la memoria de trabajo

Ej. hipótesis intermedia es el motor recibe gasolina pq es consecuente de una regla y antecedente de otra.

(Supuesto 2)

MT = { hay gasolina, motor no enciende, luces encienden }

Reglas aplicables = { R4, R3 }

Resolución conflictos, ver si llegamos a conf. final.

MT = { recibe gasolina, hay gasolina, motor no enciende, luces encienden }

Reglas aplicables = { R3, R1 }

MT = { arranque, recibe gasolina, hay gasolina, motor no enciende, luces encienden }

Reglas aplicables = { R1 }

MT = { bujías, arranque, recibe gasolina, hay gasolina, motor no enciende, luces encienden }

Ejercicio 2: No es posible aplicar más reglas y resolución orden textual

(Supuesto 1): Motor inf hacia delante

MT = { vuela, pone huevos, cuello largo }

Reglas aplicables = { R2 }

Res. conflictos: R2

Conf. final: No

MT = { vuela, pone huevos, cuello largo, ave }

Reglas aplicables = { R13 }

Res. conflictos: R13

Conf. final: sí → conclusión: Robbie es un albatros

(Supuesto 2): Motor inf hacia atrás

MT = { tiene pelo, dientes puntiagudos, garras, ojos saltones, rayas negras, color leonado, es un tigre }
R1

Hay que demostrar: mamífero y carnívoro | R4

Hay que demostrar: carnívoro ←

Ejercicio 2:

MT = {Luisa en España, Alberto en Francia, Carmen en Egipto}

R_1: Si Tomás está en Francia, ent Luisa no está en España

R_2: Si Tomás no está en Francia, ent Luisa está en España

R_3: Si Tomás está en España, ent Alberto no está en Francia

R_4: Si Tomás no está en España, ent Alberto está en Francia

R_5: Si Tomás está en Egipto, ent Carmen no está en Egipto

R_6: Si Tomás no está en Egipto, ent Carmen está en Egipto

R_7: Si Tomás está en Japón, ent Carmen no está en Francia

R_8: Si Tomás no está en Japón, ent Carmen está en Francia

Como 2 personas no pueden estar en 2 sitios suponemos que una de esas dos afirmaciones es falsa por lo que Tomás está en Egipto o en Japón, Luisa en España y Alberto en Francia.

Con esto llegamos a que Carmen está en Egipto o en Francia, sin embargo sabemos que Carmen no puede estar en Francia puesto que si así Alberto está en Francia. Esto nos lleva a que Carmen esté en Egipto. El único país que queda es que Tomás esté en Japón, por lo que vamos a intentar demostrarlo

Bloque I: 2 redes bayesianas

REPASO CONCEPTOS PROBABILIDAD

Probabilidad condicionada: $P(X/Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)}$

Dos variables son independientes si: $P(X/Y) = P(X)$

Cond. Independencia X e Y son independientes sii $P(X,Y) = \underbrace{P(X) \cdot P(Y)}_{\text{dist. marginales}}$ = La prob. conjunta se puede factorizar

Ej distribución de prob. conjunta para X e Y

X {si, no} (fiebre)   Y {si, no} (tos)

$$\left.\begin{aligned} P(X=si, Y=si) &= 0,2 \\ P(X=si, Y=no) &= 0,2 \\ P(X=no, Y=si) &= 0,2 \\ P(X=no, Y=no) &= 0,4 \end{aligned}\right\} \text{Necesitamos } 2^2-1 \text{ datos}$$

$P(X=si) = P(X=s, Y=s) + P(X=s, Y=n) = 0,2+0,2 = 0,4$

marginalizar:
$P(X=s) = \Sigma\, P(X=s, Y)$

Th. Bayes (Th. inversión): $P(Y/X) = \frac{P(X/Y) \cdot P(Y)}{P(X)}$

Ley de probabilidad total: Sean $Y_1, \dots Y_n$ un conj de valores exhaustivos y excluyentes

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X/Y_i) \cdot P(Y_i)$$

generalización

$$P(Y_1/Y_2) = \Sigma_X\, P(Y_1/X, Y_2) \cdot P(X/Y_2)$$

Independencia condicional: De X e Y respecto a Z si $P(X/Y,Z) = P(X/Z)$

Z separa condicionalmente a X e Y

Cond. Independencia Condicional: X e Y son ... $P(X,Y/Z) = P(X/Z) \cdot P(Y/Z)$

Ej: Método probabilístico clásico

Necesitamos 2^5-1 datos de probabilidad

$P(E=S, O=S, H=S, J=S, V=S) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{0}{20}$

A partir de la frecuencia observada podemos calcular sus probabilidades

PRESENTACIÓN INTUITIVA

- En una red bayesiana, cada nodo corresponde a una variable, que a su vez representa una entidad del mundo real.
- Los arcos que unen los nodos representan relaciones de influencia causal

X = variable/nodo

x = valor

Ej 1:

$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots x_{10}$

$\;1 \quad\; 2 \quad\; 2 \quad\quad\; 2 \quad = 18+1 = \underset{\text{nos ahorramos casos}}{19 < 2^{10}-1}$

- Prevalencia: cuánto porcentaje de la población lo están padeciendo ahora mismo
- Sensibilidad: verdaderos positivos
- Especificidad: verdaderos negativos

} En medicina se buscan las pruebas con mayor grado de sensibilidad y especificidad.

$P(+y_1) = P(+y_1/+x_1) \cdot P(+x_1) + P(+y_2/\neg x_1) \cdot P(\neg x_1)$ = a priori

Inferencias a partir de los datos = sabiendo y cuál es la prob de x

↳ Probabilidades a posteriori dada una evidencia observada.

$P(x)$ = probabilidad a priori de x Ej: P(sacar 4) = 1/6

$P^*(x) = P(x/y)$ = probabilidad a posteriori. Ej: P(sacar 4 / ha salido par) = 1/3

Th. Bayes = $P^*(x) = P(x/y) = \frac{P(y/x) \cdot P(x)}{P(y)} = \alpha \cdot P(x) \cdot \lambda(x)$

$\alpha = [P(y)]^{-1}$

$\lambda(x) = P(y/x)$

$\boxed{P^*(+x) = \alpha \cdot P(+x) \cdot P(+y/x)}$

$\boxed{P^*(\neg x) = \alpha \cdot P(\neg x) \cdot P(+y/\neg x)}$

Ej 2: $P(\text{covid}) = 0{,}099$

$P^*(\text{covid}) = P(\text{covid}/\text{antígeno}) = 0{,}66$

$P(\text{covid}/\text{fiebre}) = 0{,}44$ → es menos probable tener covid solo sabiendo que tienes fiebre que tener covid en el test

$$P^*(x) = P(x/y_1,y_2) = \frac{P(x)\cdot P(y_1,y_2/x)}{P(y_1,y_2)}$$

$$P(y_1,y_2/x) = P(y_1/x)\cdot P(y_2/x)$$

si y_1 es indep de y_2 dado X → hipótesis conveniente, pero... es cierta?

; $\alpha(x) = \alpha_{y_1}(x) \cdot \alpha_{y_2}(x) \rightarrow P^*(x) = \alpha P(x)\alpha$

$$\begin{tikzcd} & \text{covid}\uparrow \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \text{fiebre}\uparrow & & \text{test}\uparrow \end{tikzcd}$$

Son variables dependientes pq si el test da positivo es más probable que tenga covid por lo que es más probable que tenga fiebre

$$\begin{tikzcd} & \text{covid} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \text{fiebre}\uparrow & & \text{test} \end{tikzcd}$$

pero ya aunque el test sea positivo no aumenta la probabilidad de tener fiebre, las probabilidades aumentan en cadena y la prob de covid no varía pq ya es positiva

Ej: $P(X/y_2, \neg y_1)$

$$P^*(+x) = P(X/y_2,\neg y_1) = \frac{P(\neg y_1, y_2/x)\cdot P(x)}{P(\neg y_1, y_2)} = \alpha \cdot P(x)\cdot P(\neg y_1/x)\cdot P(y_2/x) = \alpha \cdot 0{,}099 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}00594\alpha$$

$$P^*(\neg x) = \alpha \cdot P(\neg x)\cdot P(y_2/\neg x)\cdot P(\neg y_1/\neg x) = \alpha \cdot 0{,}901 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}95 = 0{,}085595\alpha$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{0{,}00594 + 0{,}085595} = \frac{1}{0{,}91535} = 1{,}092478}$$

$0{,}00594 \cdot 1{,}092478 = 0{,}0649$

Probabilidad de los 2 hijos:

$$\boxed{P(y_1/y_2) = P^*(+y_1) = \alpha \cdot [\underset{0{,}099}{P(x)} \cdot \underset{0{,}9}{P(y_1/x)} \cdot \underset{0{,}901}{P(\neg x)} \cdot \underset{0{,}05}{P(y_1/\neg x)}] = 0{,}004013}$$

$$\boxed{P(\neg y_1/y_2) = P^*(\neg y_1) = \alpha \cdot [\underset{0{,}099}{P(x)} \cdot \underset{0{,}1}{P(\neg y_1/x)} \cdot \underset{0{,}901}{P(\neg x)} \cdot \underset{0{,}95}{P(\neg y_1/\neg x)}] = 0{,}008474}$$

Ej: $P(y_2/y_1)$

$$P^*(+y_2) = \alpha \cdot [P(X)\cdot P(y_2/x)\cdot P(\neg X)\cdot P(y_2/\neg x)] = \alpha \cdot 0{,}099 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}901 \cdot 0{,}1 = 0{,}005$$

$$P^*(\neg y_2) = \alpha [P(x)\cdot P(\neg y_2/x)\cdot P(\neg X)\cdot P(\neg y_2/\neg x)] = \alpha \cdot 0{,}099 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}901 \cdot 0{,}9 = 0{,}0321\alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{0{,}0054 + 0{,}0321} = \frac{1}{0{,}0375} = 26{,}667 \longrightarrow 26{,}667 \cdot 0{,}0054 = 0{,}143$$

REDES BAYESIANAS

def → Variable aleatoria que toma un ejto exhaustivo y excluyente de valores.

Red Bayesiana def → un conjunto de variables proposicionales V;
→ un conjunto de relaciones binarias definidas sobre V,E;
→ una distribución de probabilidad conjunta P sobre las variables de V.

- tales que → (V,E) forman un grafo acíclico, conexo y dirigido G
→ (G,P) cumplen la hipótesis de independencia condicional/separación direccional

- Exhaustivo: cubre todo el rango de valores posibles
- Excluyentes: un valor es el contrario del otro

Pueden ser variables proposicionales aquellas que a priori vemos que no pero podríamos su mundo. (3)

Hipótesis Independencia Condicional: un grafo acíclico, conexo y dirigido $G=(V,E)$ y una distribución de probabilidad conjunta P definida sobre las variables del grafo se dice que cumplen las hipótesis de independencia condicional/separación direccional si:

→ X es ind de Y dado pa(x)

$$\boxed{\forall X \in V,\ \forall Y \in V - \{X \cup de(x) \cup pa(x)\}}$$

Si en el grafo quitamos los descendientes y los padres de 2 V y quedan ellos en pie son independientes.

Tipo 1 → Ej: Comprobar si una red es bayesiana.

1. Variables proposicionales? Sí pq cada variable es sí o no
2. Grafico conexo, acíclico y dirigido? Sí
3. Condiciones de independencia?

→ Para A: $A \,i\, Y \in V - \{A,B,C\} = \emptyset$ No existe cond. de independencia

→ Para B: $B \,i\, Y \in V - \{B,A\} = C \rightarrow \boxed{B \,i\, C \text{ dado } A}$ los padres de B

No es necesario comprobar C pq la red es simétrica

$B \,i\, C$ dado $A = P(B/A,C) = P(B/A)$ → tengo que demostrar que indep. de C el resultado no varía.

→ $P(b_1/a_1,c_1) = P(b_1/a_1)$

$P(b_1/a_1,c_1) = P(a_1,b_1,c_1)/P(a_1,c_1) = 0{,}05/0{,}2 = 1/4$

$P(b_1/a_1) = P(b_1,a_1)/P(a_1) = 0{,}15/0{,}35 = 3/7$

Como no es igual para todos los casos concluimos que NO es bayesiana

Ej: V. prop = sí ; G. Conx, acíclico, dirigido = sí ; cond. independencia:

→ Para A : $A \,i\, Y \in V - \{A,B,C\} = \emptyset$

→ Para B: $B \,i\, Y \in V - \{B,A\} = C \rightarrow B \,i\, C$ dado $A = ¿P(B/A,C) = P(B/A)$?

$P(b_1/a_1,c_1) = 0{,}084/(0{,}084+0{,}126) = \underline{0{,}4} = P(b_1/a_1) = (0{,}084+0{,}036)/(0{,}084+0{,}126+0{,}036+0{,}054) = \underline{0{,}4}$

$P(b_1/a_2,c_1) = 0{,}084/0{,}14 = \underline{0{,}6} \quad = P(b_1/a_2) = \underline{0{,}6}$

$P(b_1/a_1,c_2) = 0{,}036/0{,}09 = \underline{0{,}4} \quad = P(b_1/a_1) = \underline{0{,}4}$ Concluimos que es Bayesiana

$P(b_2/a_1,c_1) = \underline{0{,}6} \quad = P(b_2/a_1) = \underline{0{,}6}$

$P(b_2/a_2,c_1) = \underline{0{,}4} \quad = P(b_2/a_2) = \underline{0{,}4}$

$P(b_2/a_1,c_2) = 0{,}6 \quad = P(b_2/a_1) = 0{,}6$

Tipo 2 → Ej: ¿Qué independencias implica la red?

$$\boxed{\forall x \in V,\ x \ i\ y \in [V - \{x \cup de(x) \cup pa(x)\}] \text{ dado } pa(x)}$$

$X = SL \rightarrow SL\ i\ y \in \{I, Sn\}$

$X = I \rightarrow I\ i\ y \in \{S, X\}$ padres X

$X = Se \rightarrow Se\ i\ y\ Sn$ dados $\{x, x\}$

$X = Sn \rightarrow Sn\ i\ y \in \{SL, I, Se, D\}$ — aquí no tiene padres pero no se para

$X = D \rightarrow D\ i\ y \in \{SL, I, F, Sn\}$ dado Se

$X = F \rightarrow F\ i\ y \in \{SL, I, D\}$ dado $\{Se, Sn\}$

Ej:

$X = A \rightarrow A\ i\ y \in \{L, S, B\}$

$X = S \rightarrow S\ i\ y \in \{A, T\}$

$X = T \rightarrow T\ i\ y \in \{L, S, B\}$ dado A

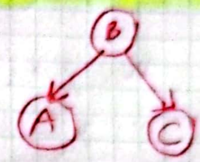
$X = L \rightarrow L\ i\ y \in \{B, A, T\}$ dado S

$X = B \rightarrow B\ i\ y \in \{A, T, L, E, X\}$ dado S

$X = E \rightarrow E\ i\ y \in \{A, S, B\}$ dados $\{T, L\}$

$X = X \rightarrow X\ i\ y \in \{A, S, T, L, B, D\}$ dado E

$X = D \rightarrow D\ i\ y \in \{A, S, T, L, X\}$ dados $\{E, B\}$



A i C dado B: Una vez que se conoce el valor de B, el valor de A no proporciona información adicional sobre el valor de C, viceversa

Ej:

Cola con cola: B i C dado A

Cabeza con cabeza: B i C / C i B

Cabeza con cola: A i C dado B / C i A dado B aunque al aplicarselo a A no sale la independencia como a C si sale pues al revés tiene que ser igual pq es simétrico.

TH. FUNDAMENTAL: FACTORIZACIÓN DE LA PROBABILIDAD

Dada una red bayesiana, su distribución de probabilidad puede expresarse como: $\boxed{P(X_1 \ldots X_n) = \prod P(X_i / pa(X_i))}$

Nos permite describir una red bayesiana a partir de las probabilidades condicionales de cada nodo dados sus padres en lugar de a partir de la probabilidad conjunta que

- requiere un nº de parámetros exponencial en el nº de nodos
- plantea el problema de verificar la independencia condicional

No hace falta $P(X_1, X_2, \ldots X_n) \xrightarrow{\text{sino}} \prod^{n} p(x_i / pa(x)) = P(X_1) \cdot P(X_2 / X_1) \cdot P(X_2 / X_3)$

Ej: Como es una red bayesiana podemos aplicar el th.

$P(A,B,C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A)$

Ej: $P(C,T,G,R,F,D) = P(C) \cdot P(T/C) \cdot P(R/T) \cdot P(G) \cdot P(F/C,G) \cdot P(D/T,G)$

Ej: $P(VM, N, THA, TG, PF, EP, SR, L, TC, CC) =$

$= P(VM) \cdot P(N) \cdot P(TG/VM,N) \cdot P(PF/VM,N) \cdot P(EP/N) \cdot P(CG/EP) \cdot P(SR/N) \cdot$

$\cdot P(L/N) \cdot P(THA) \cdot P(TC/THA,N)$

Ej 1:

a) Me

Tu i Ca dado Me

Ca i $Y \in \{Tu, Ja\}$ dado Me

Ja i $Y \in \{Me, Co, Ca\}$ dado Tu

Co i $Y \in \{Ja, Me\}$ dado $\{Tu, Ca\}$

c) Pedir la distribución conjunta

$2^5 - 1$ valores

d) $P(Me, Tu, Ja, Co, Ca) = P(Me) \cdot P(Tu/Me) \cdot$

$P(Ca/Me) \cdot P(Ja/Tu) \cdot P(Co/Tu, Ca)$

1/100000 $\overset{0,9}{P(Tu/Me)}$ → $P(Tu/\neg Me)$ 1/100000 · 0,0

b) $P(Me)$, $P(Tu/Me)$, $P(Ja/Tu)$ $P(Ja/Tu)$ $P(Ja/\neg Tu)$ 0,01

$P(Co/Me)$, $P(Co/Ca, Tu)$

$P(Ca/Me) = 0,8$

$P(Ca/\neg Me) = 0,1$ Estos no tienen que sumar 1, los que deberían sumar 1 es $P(Tu/Me)$, $P(\neg Tu/Me)$

En el examen nos pedirán valores, hay que darlos con lógica. Darlo de tal forma que no sume 1 para que vea que sabes que no es el complementario.

$P(Co/Tu, Ca) = 0,9$

$P(Co/Tu, \neg Ca) = 0,6$

$P(Co/\neg Tu, Ca) = 0,75$

$P(Co/\neg Tu, \neg Ca) = 0,1$

coherente

Ej 2: Ent es bayesiana

poner las variables en minúscula

a) A: $Y \in \{S, L\}$

S: $Y \in \{A, T, X\}$

T: $Y \in \{L, S\}$ dado A

L: $Y \in \{A, T, X\}$ dado S

X: $Y \in \{A, D, L, S\}$ dado T

D: $Y \in \{A, S, X\}$ dado $\{T, L\}$

3.5.1 ← Si alguna variable no binaria

c) $2^6 - 1$

b) 1 $P(A) = 0,20$ $P(+a)$

1 $P(S) = 0,4$ $P(+s)$

2 $P(T/A) \to P(T/+A) = 0,95$; $P(T/\neg A) = 0,01$

2 $P(X/T) \to P(X/+T) = 0,9$; $P(X/\neg T) = 0,1$

2 $P(L/S) \to P(L/+S) = 0,6$; $P(L/\neg S) = 0,01$

4 $P(D/L,T) \to P(D/L,T) = 0,9$

12

$\to P(D/\neg L, T) = 0,75$

$\to P(D/L, \neg T) = 0,8$ altos ya que es OR

$\to P(D/\neg L, \neg T) = 0,001$

esto es $P(+a, +b, +t, +d, l, +s) =$

es necesario que sea una red bayesiana

d) $P(A,S,T,L,X,D) = P(A) \cdot P(T/A) \cdot P(X/T) \cdot P(S) \cdot P(L/S) \cdot P(D/T,L)$

~~$\cdot P(S/D) \to$ Como D i S ent $P(S/D) = P(S)$~~

$P(+s/d) = \dfrac{P(+s, +d)}{P(+d)} = \dfrac{\sum_{A,T,X,L} P(A,T,X,+d,L,+s)}{\sum_{S,A,T,L,X} P(A,T,S,+d,L,S)}$

16 sumandos

32 sumandos

5 multiplicaciones para cada sumando $= AP(+a) \cdot P(+t/+a) \cdot P(+x/+t) \cdot P(+d/+t,+l) \cdot P(+l/+s) \cdot P(+s) =$

$= 2/59 \cdot 0,9 \cdot 0,999 \cdot 0,9 \cdot 0,6 \cdot 2/59$ (estos son los valores del b) que ha puesto ella)

3) a) C

T

ET i $Y \in \{C, T, DI\}$

DI i ET dado $\{C, T\}$

DD i $Y \in \{C, T\}$ dado $\{ET, DI\}$

DR i $Y \in \{C, DI, ET\}$ dado $\{T, DD\}$

b) $P(C)$, $P(T)$, $P(ET)$, $P(DI/C,T)$, $P(DD/ET, DI)$

$P(DR/DD, T) = 13$

c) $2^6 - 1$

d) $P(C) \cdot P(T) \cdot P(DI/C,T) \cdot P(ET) \cdot P(DD/ET, DI) \cdot P(DR/DD, T)$

Ej 4:

a) EA

RN

IPs

PA

CU

EC i $Y \in \{CU, RN\}$ dado $\{EA, IPs, PA, SB, EP\}$

EP

DE i $Y \in \{EA, IPs, PA, SB, EP\}$ dado $\{RN, CU, EC\}$

PADRES

BINARIO

b) $7 + 3^{(2)} + 5^2 = 41$

CUANTOS PADRES

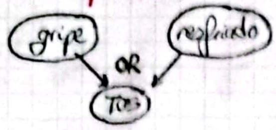
c) $P(EA) \cdot P(IPs) \cdot P(PA) \cdot P(SB) \cdot P(EP) \cdot P(EC/EA,$

$PA, SB, EP) \cdot P(RN) \cdot P(CU) \cdot P(DE/EC, CU, RN$

MODELADO CON REDES BAYESIANAS

Si se nos hace difícil pensar en probabilidades seguramente la red esté mal.

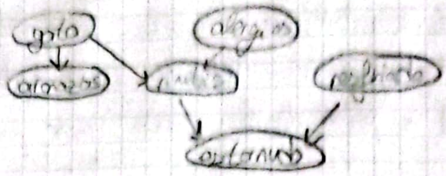
Relación tipo OR



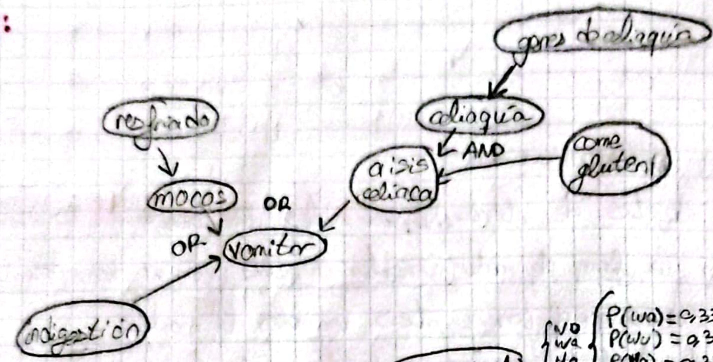
$$\begin{cases} P(tos/gripe, resfriado) = 0{,}95 \\ P(tos/\neg gripe, \neg resfriado) = 0{,}05 \\ P(tos/\neg gripe, resfriado) = 0{,}85 \\ P(tos/gripe, \neg resfriado) = 0{,}8 \end{cases}$$

problema de diagnóstico

Ej:

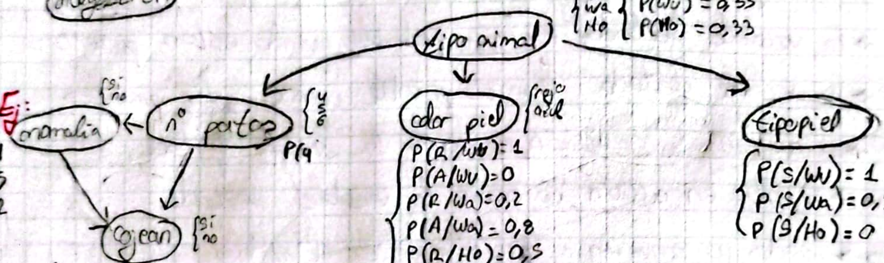


Ej:



problema de clasificación

Ej:



tipo animal: $\begin{cases} Wo \\ Wa \\ Ho \end{cases}$ $\begin{cases} P(Wa) = 0{,}33 \\ P(Wo) = 0{,}33 \\ P(Ho) = 0{,}33 \end{cases}$

anomalía: $\begin{cases} si \\ no \end{cases}$ nº patas: $\begin{cases} 4 \\ 5 \\ 6 \end{cases}$ P(4

$$\begin{cases} P(a/4) = 0{,}1 \\ P(a/5) = 0{,}5 \\ P(a/6) = 0{,}2 \end{cases}$$

cojean: $\begin{cases} si \\ no \end{cases}$

$$\begin{cases} P(C/a,4) = 0{,}1 \\ P(C/a,5) = 1 \\ P(C/a,6) = 1 \\ P(C/\neg a,4) = 0{,}2 \\ P(C/\neg a,5) = 0{,}1 \\ P(C/\neg a,6) = 0{,}2 \end{cases}$$

color piel: $\begin{cases} rojo \\ azul \end{cases}$

$$\begin{cases} P(R/Wo) = 1 \\ P(A/Wo) = 0 \\ P(R/Wa) = 0{,}2 \\ P(A/Wa) = 0{,}8 \\ P(R/Ho) = 0{,}5 \\ P(A/Ho) = 0{,}5 \end{cases}$$

tipo piel: $\begin{cases} escamosa \\ suave \end{cases}$

$$\begin{cases} P(S/Wo) = 1 \\ P(S/Wa) = 0{,}5 \\ P(S/Ho) = 0 \end{cases}$$

MODELADO CON REDES BAYESIANAS

- Modelo: representación selectiva de la realidad
- Modelado: proceso de construir modelos y en el enfoque de redes bayesianas...

consta
- Modelado Cualitativo
  - se deben definir
    - Nodos/Variables: deben tomar un cjto exhaustivo y excluyente de valores
    - Relaciones entre nodos: deben representar influencia causal
- Modelado Cuantitativo: donde se especifican los parámetros

Por el th. fundamental, los parámetros necesarios son las distribuciones de probabilidad condicionada de cada nodo dados sus padres (incluyendo la probabilidad a priori de los nodos sin padre)

TIPO VARIABLE	DESCRIPCIÓN
Objetivo	modelan objetos de interés. No observables directamente
Observación	modelan la forma de medir variables objetivo. Pueden ser observados directamente
Factor	modelan fenómenos que afectan a otras variables del modelo
Promotor	la variable afectada es más probable cuando están presentes
Inhibidor	la variable afectada es menos probable cuando están presentes
Requerido	si no entra en acción, no ocurre la variable afectada
Preventivo	si entra en acción, no ocurre la variable afectada
Auxiliares	usados por conveniencia para simplificar el modelo

Relación causal $\xrightarrow{\text{ventajas}}$ ↑ sencillo de entender y ↓ complejo en parámetros y relaciones

(1) $\boxed{\text{Si se cumple la relación de independencia: nodos sin padre} + 2^{\text{nº de padres}}}$

Si no es red Bayesiana: $2^{10}-1$

Si un nodo tiene 3 valores: $\underbrace{10}_{}+ 3 \cdot 2^{8} \to 8$ padres

pq necesitas 10 valores pq como en un nodo tienes 3 posibilidades pues con saber 2 ya sacas la otra

Para tener un modelo más legible y menos complejo podemos agrupar los nodos

→ Reduce complejidad pero pierde información

$9 + 4 \cdot 2^{3}$ → 3 valores padres

4 nodos sin padre — 4 nodos con padre

tipos de especificación

- Especificación directa: de los parámetros (con ayuda de expertos, costoso)
  - → En ausencia de información se suele suponer equiprobabilidad
  - → Se pueden utilizar relaciones tipo AND/OR
- Aprendizaje: si existen BD
  - → de parámetros: si se dispone de la estructura
  - → estructural: se aprende tanto la estructura como los parámetros
- Combinaciones: de los 2 anteriores, iterativamente

MODELOS CANÓNICOS

(17)

A) No puede ser pq son factores que provocan HTA pero es la suma de ellos no que si tienes el padre 100% provoca el hijo.

Si no hay ruido se pone 0 pero si hay alguna causa más se llama NOISY-OR y se pone casi 0 = 0,01

$$P(f/g,\neg o) = \underbrace{P(f/g)}_{\text{lo primero}} + \underbrace{P(\neg f/g)}_{\text{lo contrario}} \cdot \underbrace{P(f/\neg g,\neg o)}_{\text{lo que puesto en el anterior en } \neg \text{ y lo otro igual}}$$

lo primero + lo contrario · lo que ~~estaba~~ puesto en el anterior en ¬ y lo otro igual

$$P(\neg x \mid U_1 \ldots U_n) = \prod_{i \in T_i} q_i \; ; \; q_i = 1 - c_i$$

$$P(+f \mid +g, \neg o) = 1 - P(\neg f \mid +g, \neg o) = 1 - (0{,}2) = 0{,}8$$

$$P(f/g,+o) = 1 - P(\neg f/g,+o) = 1 - (0{,}2 \cdot 0{,}4) = 0{,}92$$

NOISY-OR: hay un 3er elemento residual que es el que provoca que no sea 0 sino 0,01

↳ Si no se indica siempre se asume presente para hacer los cálculos.

$$P(f/g,o,r) = 1 - P(\neg f/g,o,r) = 1 - (0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot \underbrace{0{,}99}_{\text{ruido}}) = 0{,}9208$$

$$P(f/\neg g,o,r) = 1 - P(\neg f/\neg g,o) = 1 - (0{,}4 \cdot \underbrace{0{,}99}_{\text{ruido}}) = 0{,}604$$

$$P(f,g,\neg o) = 1 - (0{,}2 \cdot \underbrace{0{,}99}_{\text{ruido}}) = 0{,}802$$

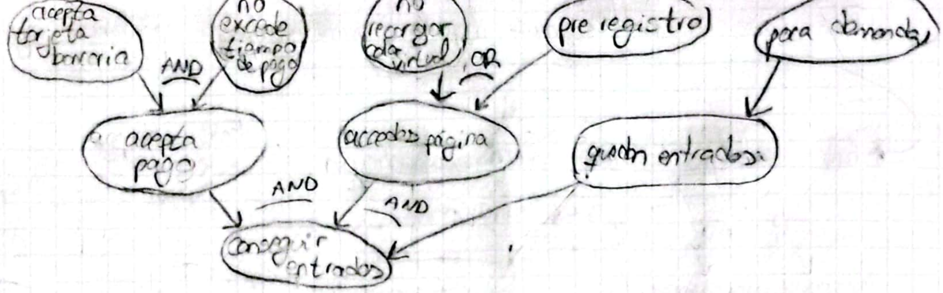
igual que el de antes pero los 2 1os sin ruido y el 3º con ruido

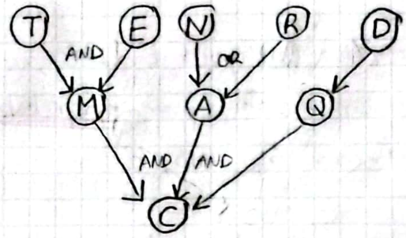
AND

Si hay que calcular puerta AND calculamos como OR con leyes de Morgan.

$$\begin{cases} (A \text{ and } B) \equiv \neg(A \text{ and } B) = \neg A \text{ or } \neg B \\ \neg(A \text{ or } B) \equiv \neg A \text{ and } \neg B \end{cases}$$

Ej foro:





1) T : $Y \in \{E, N, R, D, A, Q\}$

E : $Y \in \{T, N, R, A, D, Q\}$

N : $Y \in \{T, E, M, R, D, Q\}$

R : $Y \in \{T, E, M, N, D, Q\}$

D : $Y \in \{T, E, M, N, R, A\}$

M : $Y \in \{N, R, A, D, Q\}$ dado $\{T, E\}$

A : $Y \in \{T, E, M, D, Q\}$ dado $\{N, R\}$

Q : $Y \in \{T, E, M, N, R, A\}$ dado D

C : $Y \in \{T, E, N, R, D\}$ dado $\{M, A, Q\}$

3) $2^9 - 1$

4) $P(T,E,N,R,D,M,A,Q,C) = P(T) \cdot P(E) \cdot P(M/E,T) \cdot P(N) \cdot P(R) \cdot P(A/N,R) \cdot P(D) \cdot P(Q/D) \cdot P(C/M,A,Q)$

5) Supongamos que queremos calcular la probabilidad de conseguir entradas dado que accedes a la página y aún guardan entradas

$$P(c/a,q) = \frac{P(c,a,q)}{P(a,q)} = \frac{\sum_{T,E,M,N,R,D} P(T,E,N,R,D,M,+a,+q,+c)}{\sum_{T,E,M,N,R,D,C} P(T,E,N,R,D,M,+a,+q,C)}$$

Desarrollamos el concepto de probabilidad condicionada y en la división que obtenemos hay ciertos valores fijados tanto en el numerador como en el denominador por lo que cuando se desarrolle habrá que dejarlos fijos e ir cambiando los otros

2) $P(T)$: $P(t) = 0{,}6$

$P(E)$: $P(e) = 0{,}4$

$P(N)$: $P(n) = 0{,}7$

$P(R)$: $P(r) = 0{,}75$

$P(D)$: $P(d) = 0{,}3$

$P(A/N,R)$:
- $P(a/n,r) = 0{,}8$
- $P(a/\neg n,r) = 0{,}6$
- $P(a/n,\neg r) = 0{,}65$
- $P(a/\neg n,\neg r) = 0{,}1$

$P(M/T,E)$:
- $P(m/t,e) = 0{,}99$
- $P(m/t,\neg e) = 0{,}1$
- $P(m/\neg t,e) = 0{,}1$
- $P(m/\neg t,\neg e) = 0{,}01$

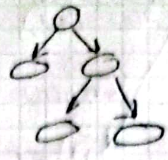
$P(Q/D)$:
- $P(q/d) = 0{,}9$
- $P(q/\neg d) = 0{,}2$

$P(C/M,A,Q)$:
- $P(c/m,a,q) = 0{,}95$
- $P(c/m,a,\neg q) = 0{,}01$
- $P(c/m,\neg a,q) = 0{,}01$
- $P(c/m,\neg a,\neg q) = 0{,}01$
- $P(c/\neg m,a,q) = 0{,}1$
- $P(c/\neg m,a,\neg q) = 0{,}01$
- $P(c/\neg m,\neg a,q) = 0{,}1$
- $P(c/\neg m,\neg a,\neg q) = 0{,}001$

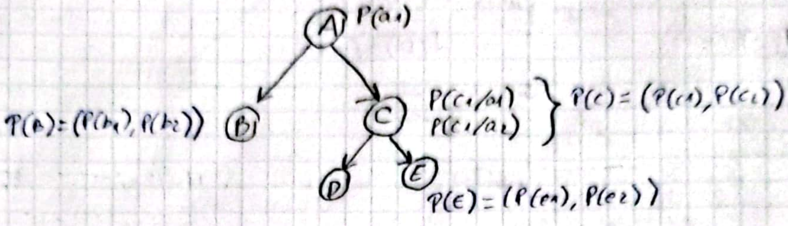
$\boxed{2^3 \text{ valores}}$

ALGORITMO DE PROPAGACIÓN EN ÁRBOLES

Solo se puede aplicar si es así

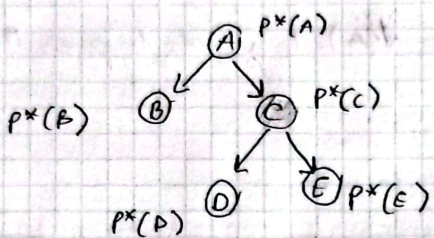


Estado S0 de la red / Estado inicial



Tenemos una evidencia de que $e = \{C = c_1\}$

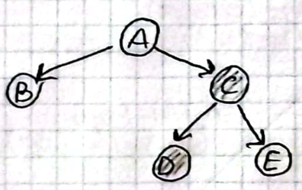
Estado S1 de la red



Una vez calculados todos P* pasamos al estado S1 de la red

Tenemos una $e = \{D = d_2\}$ --> $e = \{C = c_1, D = d_2\}$

Estado S2 de la red

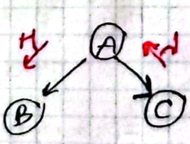


Recalculamos P* y pasamos al estado S2

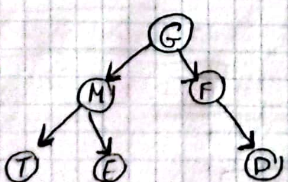
Nodos C y D instanciados

λ-valor = $\lambda(x)$ cambia cuando un hijo de X se instancia, gracias a un λ mensaje

π-valor = $\pi(x)$ cambia cuando un padre de X se instancia, gracias a un π mensaje

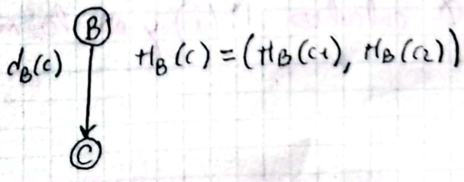


Ej:



π = el productorio se aplica en los hijos de A que no son el que le manda el msj

$\pi_{padre}(hijo)$



$\pi(A)=(0{,}1, 0{,}9)$
$P(a_1)=0{,}1$
$\lambda(A)=(1,1)$

A

$\lambda_A(B)=(1,1)$

$\lambda_A(D)=(1,1)$
$* \pi_D(A)=(0{,}1, 0{,}9)$

B
$P(b_1/a_1)=0{,}7$
$P(b_1/a_2)=0{,}2$
$\lambda(B)=(1,1)$

D
$P(d_1/a_1)=0{,}8$
$P(d_1/a_2)=0{,}4$
$\lambda(D)=(1,1)$

$\lambda_B(C)=(1,1)$

C
$P(c_1/b_1)=0{,}4$
$P(c_1/b_2)=0{,}001$
$\lambda(C)=(1,1)$

Como $P(A)=\alpha\cdot\pi(A)\cdot\lambda(A)$ y $\lambda(A)=1$ y $\alpha=1$ pues $\pi(A)=P(A)$ por lo que *

$\pi(A)\cdot\lambda_D(A)=\pi_A$ para el nodo D

EJERCICIO PASO A PASO

Estado S0.

A
$P(A)=(0{,}1, 0{,}9)$
$\pi(A)=(0{,}1, 0{,}9)$
$\lambda(A)=(1,1)$

$\lambda_B(A)=(1,1)$
$\pi_B(A)=(0{,}1, 0{,}9)$

$\lambda_D(A)=(1,1)$
$\pi_D(A)=(0{,}1, 0{,}9)$

B
$P(b_1/a_1)=0{,}7$
$P(b_1/a_2)=0{,}2$
$\lambda(B)=(1,1)$

$\boxed{\pi(B)}=(P(b_1/a_1)\cdot P(a_1)+P(b_1/a_2)\cdot P(a_2), P(b_2/a_1)\cdot P(a_1)+P(b_2/a_2)\cdot P(a_2))$
$=(0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}9, 0{,}3\cdot 0{,}1+0{,}8\cdot 0{,}9)$
$=\boxed{(0{,}25, 0{,}75)}$
$\boxed{P^*(B)=\alpha\cdot\lambda(B)\cdot\pi(B)=(0{,}25, 0{,}75)}$

$\lambda_C(B)=(1,1)$
$\pi_C(B)=(0{,}25, 0{,}75)$

D
$P(d_1/a_1)=0{,}8$
$P(d_1/a_2)=0{,}4$
$\lambda(D)=(1,1)$

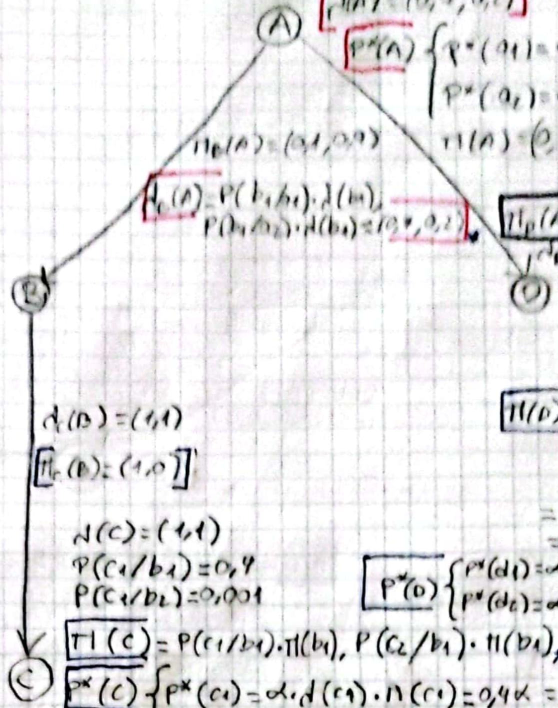
$\boxed{\pi(D)}=(P(d_1/a_1)\cdot P(a_1)+P(d_1/a_2)\cdot P(a_2), P(d_2/a_1)\cdot P(a_1)+P(d_2/a_2)\cdot P(a_2))=$
$=(0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}4\cdot 0{,}9, 0{,}2\cdot 0{,}1+0{,}6\cdot 0{,}9)=$
$=\boxed{(0{,}44, 0{,}56)}$
$\boxed{P^*(D)=\alpha\cdot\lambda(D)\cdot\pi(D)=(0{,}44, 0{,}56)}$

C
$P(c_1/b_1)=0{,}4$
$P(c_1/b_2)=0{,}001$
$\lambda(C)=(1,1)$

$\boxed{\pi(C)}=(P(c_1/b_1)\cdot P(b_1)+P(c_1/b_2)\cdot P(b_2), P(c_2/b_1)\cdot P(b_1)+P(c_2/b_2)\cdot P(b_2))$
$=(0{,}4\cdot 0{,}25+0{,}001\cdot 0{,}75, 0{,}6\cdot 0{,}25+0{,}999\cdot 0{,}75)=\boxed{(0{,}10075, 0{,}89925)}$
$\boxed{P^*(C)=\alpha\cdot\lambda(C)\cdot\pi(C)=(0{,}10075, 0{,}89925)}$

En el S0 calculas $\pi(x)$ y es lo mismo que $P^*(x)$, solo por la fórmula y ya

Estado S1 ; B=b1



$P(A)=(0{,}1,\ 0{,}9)$

$\left[\lambda(A)=(0{,}7,\ 0{,}2)\right]$

$\boxed{P^*(A)}\begin{cases} P^*(a_1)=\alpha\cdot\lambda(a_1)\cdot\pi(a_1)=0{,}07\alpha=\frac{0{,}07}{0{,}07+0{,}18}=0{,}28 \\ P^*(a_2)=\alpha\cdot\lambda(a_2)\cdot\pi(a_2)=0{,}18\alpha=\frac{0{,}18}{0{,}07+0{,}18}=0{,}72 \end{cases}$

$\pi(A)=(0{,}1,\ 0{,}9)$

$\pi_B(A)=(0{,}1,\ 0{,}9)$

$\boxed{\lambda_B(A)}=P(b_1/a_1)\cdot\lambda(b_1),\ P(b_1/a_2)\cdot\lambda(b_1)=(0{,}7,\ 0{,}2)$

$\boxed{\pi_D(A)}=\pi(a_1)\cdot\lambda_B(a_1),\ \pi(a_2)\cdot\lambda_B(a_2)=\boxed{(0{,}07,\ 0{,}18)}$

$\lambda_D(A)=(1,1)$

$\pi(B)=(0{,}25,\ 0{,}75)$
$P(b_1/a_1)=0{,}7$
$P(b_1/a_2)=0{,}2$
$\left[\begin{matrix}P^*(B)=(1,0)\\ \lambda(B)=(1,0)\end{matrix}\right]$

$P(d_1/a_1)=0{,}8$
$P(d_1/a_2)=0{,}4$
$\lambda(D)=(1,1)$

$\boxed{\pi(D)}=P(d_1/a_1)\cdot\pi(a_1)+P(d_1/a_2)\cdot\pi(a_2),\ P(d_2/a_1)\cdot\pi(a_1)+P(d_2/a_2)\cdot\pi(a_2)=$
$=0{,}8\cdot0{,}07+0{,}4\cdot0{,}18,\ 0{,}2\cdot0{,}07+0{,}6\cdot0{,}18=$
$=\boxed{(0{,}128,\ 0{,}122)}$

$\lambda_C(B)=(1,1)$

$\boxed{\pi_C(B)=(1,0)}$

$\boxed{P^*(D)}\begin{cases} P^*(d_1)=\alpha\cdot\lambda(d_1)\cdot\pi(d_1)=0{,}128\alpha=\frac{0{,}128}{0{,}25}=0{,}512 \\ P^*(d_2)=\alpha\cdot\lambda(d_2)\cdot\pi(d_2)=0{,}122\alpha=\frac{0{,}122}{0{,}25}=0{,}488 \end{cases}$

$\lambda(C)=(1,1)$
$P(c_1/b_1)=0{,}4$
$P(c_1/b_2)=0{,}001$

$\boxed{\pi(C)}=P(c_1/b_1)\cdot\pi(b_1),\ P(c_2/b_1)\cdot\pi(b_1)_{*}=0{,}4\cdot1,\ 0{,}6\cdot1=\boxed{(0{,}4,\ 0{,}6)}$

$\boxed{P^*(C)}\begin{cases} P^*(c_1)=\alpha\cdot\lambda(c_1)\cdot\pi(c_1)=0{,}4\alpha=\frac{0{,}4}{0{,}4+0{,}6}=0{,}4 \\ P^*(c_2)=\alpha\cdot\lambda(c_2)\cdot\pi(c_2)=0{,}6\alpha=\frac{0{,}6}{0{,}4+0{,}6}=0{,}6 \end{cases}$

doblar hoja

$*$ Sería $\lambda_B(A)=P(b_1/a_1)\cdot\lambda(b_1)+\cancel{P(b_2/a_1)\cdot\lambda(b_2)}\to\emptyset,\ P(b_1/a_2)\cdot\lambda(b_1)+\cancel{P(b_2/a_2)\cdot\lambda(b_2)}\to\emptyset$

El $\pi_C(B)$ se pone a 1 el que es vd y 0 el otro

$*$ Sería $\pi(C)=P(c_1/b_1)\cdot\pi(b_1)+\cancel{P(c_1/b_2)\cdot\pi(b_2)}\to\emptyset,\ P(c_2/b_1)\cdot\pi(b_1)+\cancel{P(c_2/b_2)\cdot\pi(b_2)}\to\emptyset$

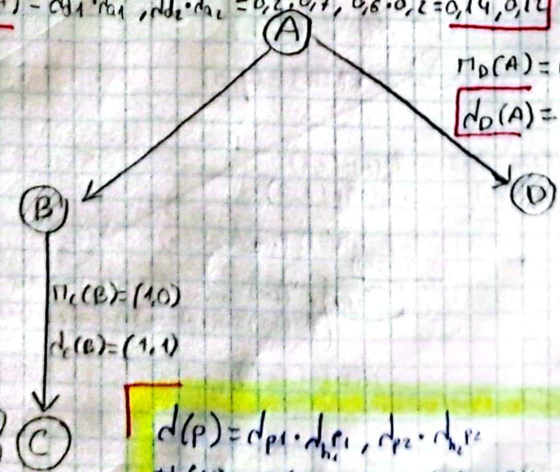
Si se envía λ-mensaje ; el padre debe cambiar λ y P^*

Si se envía π-mensaje ; el hijo debe cambiar P^* y π

Si yo cambio ; debo cambiar P^* y λ

Estado S2

D=d2



$\boxed{\lambda(A)}=\lambda_{d_1}\cdot\lambda_{a_1},\ \lambda_{d_2}\cdot\lambda_{a_2}=0{,}2\cdot0{,}7,\ 0{,}6\cdot0{,}2=\boxed{0{,}14,\ 0{,}12}$

$\boxed{P^*(A)}\begin{cases} P^*(a_1)=\alpha\cdot\lambda(a_1)\cdot\pi_{a_1}=\frac{0{,}014}{0{,}122}=0{,}11475 \\ P^*(a_2)=\alpha\cdot\lambda(a_2)\cdot\pi_{a_2}=\frac{0{,}108}{0{,}122}=0{,}88524 \end{cases}$

$\pi_D(A)=(0{,}07,\ 0{,}18)$

$\boxed{\lambda_D(A)}=P(d_2/a_1)\cdot\lambda(d_2),\ P(d_2/a_2)\cdot\lambda(d_2)=(0{,}2,\ 0{,}6)$

$\lambda(B)=(1,0)$
$\pi(B)=(0{,}25,\ 0{,}75)$
$P(B)=(1,0)$

$\left[\begin{matrix}P^*(D)=(0,1)\\ \lambda(D)=(0,1)\end{matrix}\right]$
$\pi(D)=(0{,}128,\ 0{,}122)$

$\pi_C(B)=(1,0)$

$\lambda_C(B)=(1,1)$

$\pi(C)=(0{,}4,\ 0{,}6)$
$P(C)=(0{,}4,\ 0{,}6)$
$\lambda(C)=(1,1)$

$\lambda(P)=\lambda_{p_1}\cdot\lambda_{h_i}^{p_1},\ \lambda_{p_2}\cdot\lambda_{h_i}^{p_2}$

$\pi(H)=P(h_1/p_1)\cdot\pi(p_1)+P(h_1/p_2)\cdot\pi(p_2),$
$P(h_2/p_1)\cdot\pi(p_1)+P(h_2/p_2)\cdot\pi(p_2)$

$P^*(A)\begin{cases} P^*(a_1)=\alpha\cdot\lambda(a_1)\cdot\pi(a_1)=x\alpha=\frac{x}{y+x} \\ P^*(a_2)=\alpha\cdot\lambda(a_2)\cdot\pi(a_2)=y\alpha=\frac{y}{x+y} \end{cases}$

Ej foro

S0

N

$\pi(N) = (0{,}7, 0{,}3)$
$\lambda(N) = (1,1)$
$\Pi(N) = (0{,}7, 0{,}3)$

$\lambda_A(N) = (1,1)$
$\Pi_A(N) = (0{,}7, 0{,}3)$

A

$\lambda(A) = (1,1)$
$P(a_1/n_1) = 0{,}8$
$P(a_1/n_2) = 0{,}3$

$\boxed{\Pi(A)} = P(a_1/n_1)\cdot\Pi(n_1) + P(a_1/n_2)\cdot\Pi(n_2),$
$P(a_2/n_1)\cdot\Pi(n_1) + P(a_2/n_2)\cdot\Pi(n_2) =$
$= (0{,}8\cdot 0{,}7)+(0{,}3\cdot 0{,}3), (0{,}2\cdot 0{,}7)+(0{,}7\cdot 0{,}3) = \boxed{(0{,}65, 0{,}23)}$
$\boxed{P^* = (0{,}65, 0{,}23)}$

$\lambda_C(A) = (1,1)$
$\Pi_C(A) = (0{,}65, 0{,}23)$

$\lambda_B(A) = (1,1)$
$\Pi_B(A) = (0{,}65, 0{,}23)$

C

$P(c_1/a_1) = 0{,}85$
$P(c_1/a_2) = 0{,}1$
$\lambda(C) = (1,1)$

B

$P(b_1/a_1) = 0{,}9$
$P(b_1/a_2) = 0{,}05$
$\lambda(B) = (1,1)$

$\boxed{\Pi(C)} = P(c_1/a_1)\cdot\Pi(a_1) + P(c_1/a_2)\cdot\Pi(a_2),$
$P(c_2/a_1)\cdot\Pi(a_1) + P(c_2/a_2)\cdot\Pi(a_2) =$
$= (0{,}85\cdot 0{,}65)+(0{,}1\cdot 0{,}23),$
$(0{,}15\cdot 0{,}65)+(0{,}9\cdot 0{,}23) = \boxed{(0{,}5755, 0{,}3045)}$
$\boxed{P^*(C) = (0{,}5755, 0{,}3045)}$

$\boxed{\Pi(B)} = P(b_1/a_1)\cdot\Pi(a_1) + P(b_1/a_2)\cdot\Pi(a_2),$
$P(b_2/a_1)\cdot\Pi(a_1) + P(b_2/a_2)\cdot\Pi(a_2) =$
$= (0{,}9\cdot 0{,}65)+(0{,}05\cdot 0{,}23), (0{,}1\cdot 0{,}65)+(0{,}95\cdot 0{,}23) =$
$= \boxed{(0{,}5965, 0{,}2835)}$
$\boxed{P^*(B) = (0{,}5965, 0{,}2835)}$

Estado S1 → A = a_1

N $\boxed{\lambda(N) = (0{,}8, 0{,}2)}$

$\boxed{P^*(N)}$ $\begin{cases} P(n_1) = \alpha\cdot\lambda(n_1)\cdot\Pi(n_1) = 0{,}56\alpha = \frac{0{,}56}{0{,}62} = 0{,}9 \\ P(n_2) = \alpha\cdot\lambda(n_2)\cdot\Pi(n_2) = 0{,}06\alpha = \frac{0{,}06}{0{,}62} = 0{,}097 \end{cases}$

$\Pi(N) = (0{,}7, 0{,}3)$

$\boxed{\lambda_A(N)} = P(a_1/n_1)\cdot\lambda(a_1), P(a_1/n_2)\cdot\lambda(a_1) = \boxed{(0{,}8, 0{,}2)}$
$\boxed{\Pi_A(N) = (1,1)}$

$\Pi(A) = (0{,}65, 0{,}23)$
$\lambda(A) = (1,0)$

A

$P^*(A) = (1,0)$

$\lambda_C(A) = (1,1)$
$\Pi_C(A) = (1,0)$

$\lambda_B(A) = (1,1)$
$\Pi_B(A) = (1,0)$

$\lambda(C) = (1,1)$

$\boxed{\Pi(C)} = P(c_1/a_1)\cdot\Pi(a_1), P(c_2/a_1)\cdot\Pi(a_1)$
$= \boxed{(0{,}85, 0{,}15)}$

C

$\boxed{P^*(C)}$ $\begin{cases} P^*(c_1) = \alpha\cdot\lambda(c_1)\cdot\Pi(c_1) = 0{,}85\alpha = 0{,}85 \\ P^*(c_2) = \alpha\cdot\lambda(c_2)\cdot\Pi(c_2) = 0{,}15\alpha = 0{,}15 \end{cases}$

$\boxed{\Pi(B)} = P(b_1/a_1)\cdot\Pi(a_1), P(b_2/a_1)\cdot\Pi(a_1) =$
$= \boxed{(0{,}9, 0{,}1)}$

B

$\boxed{P^*(B)}$ $\begin{cases} P^*(b_1) = \alpha\cdot\lambda(b_1)\cdot\Pi(a_1) = 0{,}9\alpha = 0{,}9 \\ P^*(b_2) = \alpha\cdot\lambda(b_2)\cdot\Pi(b_2) = 0{,}1\alpha = 0{,}1 \end{cases}$

$\lambda(B) = (1,1)$

Estado S2 → B = b1

N

$P^*(N) = (0{,}9,\ 0{,}077)$

$\lambda(N) = (0{,}8,\ 0{,}2)$

$\pi(N) = (0{,}7,\ 0{,}3)$

$\lambda_A(N) = (0{,}8,\ 0{,}2)$

$\pi_A(N) = (1,1)$

$P^*(A) = (1,0)$

$\lambda(A) = (1,0)$

A $\pi(A) = (0{,}75,\ 0{,}25)$

$\lambda_C(A) = (1,1)$

$\pi_C(A) = (1,0)$

$\boxed{\pi_B(A) = (1,0)}$

$\boxed{\lambda_B(A) = P(b_1/a_1)\cdot\lambda(b_1) + P(b_1/a_2)\cdot\lambda(b_2) =}$ $\boxed{= (0{,}1,\ 0{,}05)}$

C

$\lambda(C) = (1,1)$

$\pi(C) = (0{,}85,\ 0{,}15)$

$P^*(C) = (0{,}85,\ 0{,}15)$

B

$\pi(B) = (0{,}9,\ 0{,}1)$

$P^*(B) = (1,0)$

$\lambda(B) = (1,0)$

$$P(+f/+g,+o,\neg r) = 1 - P(\neg f/g,o,\neg r) = 1 - (0{,}2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}99) = 0{,}9208$$

S∅

A $P(a_1) = 0{,}3$; $P(a_2) = 0{,}5$; $P(a_3) = 0{,}2$

$\lambda(A) = (1,1,1)$

$\pi(A) = (0{,}3,\ 0{,}5,\ 0{,}2)$

$\lambda_B(A) = (1,1,1)$

$\pi_B(A) = (0{,}3,\ 0{,}5,\ 0{,}2)$

$\lambda_D(A) = (1,1,1)$

$\pi_D(A) = (0{,}3,\ 0{,}5,\ 0{,}2)$

$\boxed{\pi(B)} = (P(b_1/a_1)\cdot\pi(a_1) + P(b_1/a_2)\cdot\pi(a_2) + P(b_1/a_3)\cdot\pi(a_3)),$
$(P(b_2/a_1)\cdot\pi(a_1) + P(b_2/a_2)\cdot\pi(a_2) + P(b_2/a_3)\cdot\pi(a_3)) =$
$(0{,}1\cdot 0{,}3 + 0{,}3\cdot 0{,}5 + 0{,}2\cdot 0{,}2) +$
$(0{,}9\cdot 0{,}3 + 0{,}7\cdot 0{,}5 + 0{,}2\cdot 0{,}2)$
$= \boxed{(0{,}22,\ 0{,}78)}$

B $P(b_1/a_1) = 0{,}1$

$P(b_1/a_2) = 0{,}3$

$P(b_1/a_3) = 0{,}2$

$\lambda(B) = (1,1)$

$\boxed{P^*(B) = \alpha\cdot\lambda(B)\cdot\pi(B) = (0{,}22,\ 0{,}78)}$

$\lambda_C(B) = (1,1)$

$\pi_C(B) = (0{,}22,\ 0{,}78)$

D $P(d_1/a_1) = 0{,}9$; $P(d_1/a_2) = 0{,}7$; $P(d_1/a_3) = 0$

$\lambda(D) = (1,1)$

$\boxed{\pi(D)} = (P(d_1/a_1)\cdot\pi(a_1) + P(d_1/a_2)\cdot\pi(a_2) +$
$P(d_1/a_3)\cdot\pi(a_3)),\ (P(d_2/a_1)\cdot\pi(a_1) +$
$P(d_2/a_2)\cdot\pi(a_2),\ P(d_3/a_2)\cdot\pi(a_2)) =$
$= (0{,}9\cdot 0{,}3 + 0{,}7\cdot 0{,}5 + 0{,}3\cdot 0{,}2),$
$(0{,}1\cdot 0{,}3 + 0{,}3\cdot 0{,}5 + 0{,}7\cdot 0{,}8) = \boxed{(0{,}68,\ 0{,}74)}$

$\boxed{P^*(D) = \alpha\cdot\lambda(D)\cdot\pi(D) = (0{,}68,\ 0{,}74)}$

C $P(c_1/b_1) = 0{,}9$

$P(c_1/b_2) = 0{,}1$

$\lambda(C) = (1,1)$

$\boxed{\pi(C)} = (P(c_1/b_1)\cdot\pi(b_1) + P(c_1/b_2)\cdot\pi(b_2))$
$(P(c_2/b_1)\cdot\pi(b_1) + P(c_2/b_2)\cdot\pi(b_2))$
$= (0{,}9\cdot 0{,}22 + 0{,}1\cdot 0{,}78),\ (0{,}1\cdot 0{,}22 + 0{,}9\cdot 0{,}78)$
$= \boxed{(0{,}276,\ 0{,}724)}$

$\boxed{P^*(C) = \alpha\cdot\lambda(C)\cdot\pi(C) = (0{,}276,\ 0{,}724)}$

S1.

A

$\lambda(A) = (0{,}1, 0{,}3, 0{,}2)$

$\boxed{P^*(A)} = \alpha \cdot \lambda_{a1} \cdot \pi_{a1} = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03\alpha \to 0{,}14$
$\alpha \cdot \lambda_{a2} \cdot \pi_{a2} = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15\alpha \to 0{,}681$
$\alpha \cdot \lambda_{a3} \cdot \pi_{a3} = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04\alpha \to 0{,}182$

$\alpha(0{,}03 + 0{,}15 + 0{,}04) = 1$
$\alpha = \frac{1}{0{,}22} = 4{,}54$

$\pi_B(A) = (0{,}3, 0{,}5, 0{,}2)$

$\boxed{\lambda_B(A)} = P(b_1/a_1) \cdot \lambda(b_1) + \cancel{P(b_2/a_1) \cdot \lambda(b_2)}, P(b_1/a_2) \cdot \lambda(b_1) + \cancel{P(b_2/a_2) \cdot \lambda(b_2)}, P(b_1/a_3) \cdot \lambda(b_1) + \cancel{P(b_2/a_3) \cdot \lambda(b_2)} = \boxed{(0{,}1, 0{,}3, 0{,}2)}$

B

$P^*(B) = (1, 0)$

$\lambda(B) = (1, 0)$

$\pi_C(B) = (1, 0)$

$\lambda_C(B) = (0{,}22, 0{,}78)$

$\lambda(C) = (1, 1)$

C

$\boxed{\pi(C)} = P(c_1/b_1) \cdot \pi(b_1) + \cancel{P(c_1/b_2) \cdot \pi(b_2)}, P(c_2/b_1) \cdot \pi(b_1) + \cancel{P(c_2/b_2) \cdot \pi(b_2)} = \boxed{(0{,}9, 0{,}1)}$

$P^*(C) = \alpha \cdot \lambda(C) \cdot \pi(C) \begin{cases} \alpha \cdot \lambda(c_1) \cdot \pi(c_1) = \alpha 0{,}9 \\ \alpha \cdot \lambda(c_2) \cdot \pi(c_2) = \alpha 0{,}1 \end{cases} \alpha(0{,}9 + 0{,}1) = 1; \underline{\alpha = 1}$

$\boxed{P^*(C) = (0{,}9, 0{,}1)}$

$\boxed{\pi_D(A)} = 0{,}3 \cdot 0{,}1, 0{,}5 \cdot 0{,}3, 0{,}2 \cdot 0{,}2 = \boxed{(0{,}03, 0{,}15, 0{,}04)}$

$\lambda_D(A) = (0{,}3, 0{,}5, 0{,}2)$

$\boxed{\pi(D)} = P(d_1/a_1) \cdot \pi(a_1) + P(d_1/a_2) \cdot \pi(a_2) + P(d_1/a_3) \cdot \pi(a_3), P(d_2/a_1) \cdot \pi(a_1) + P(d_2/a_2) \cdot \pi(a_2) + P(d_2/a_3) \cdot \pi(a_3) =$
$= (0{,}9 \cdot 0{,}03) + (0{,}7 \cdot 0{,}15) + (0{,}3 \cdot 0{,}04), (0{,}1 \cdot 0{,}03) + (0{,}3 \cdot 0{,}15) + (0{,}7 \cdot 0{,}04) = \boxed{(0{,}144, 0{,}076)}$

$P(d_1/a_1) = 0{,}9$ $P(d_1/a_2) = 0{,}7$ $P(d_1/a_3) = 0{,}3$

D

$\boxed{P^*(D)} = \begin{cases} \alpha \cdot \lambda(d_1) \cdot \pi(d_1) = 0{,}144\alpha = 0{,}65 \\ \alpha \cdot \lambda(d_2) \cdot \pi(d_2) = 0{,}076\alpha = 0{,}35 \end{cases}$

$\to \alpha = 4{,}54$

$\lambda(D) = (1, 1)$