UNIVERSIDAD NACIONAL
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

TALLER

Profesores: H. Fabián Ramírez y S. Carolina García

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y VECTORES EN $\mathbb{R}^n$

OBSERVACIONES: "N.A" significa "Ninguna de las Anteriores". "F.I" significa "Falta Información".
-La expresión $(A|b)$ se refiere a una nueva matriz que tiene una columna más que A, es decir, ya no es la matriz ampliada, sino una nueva matriz de coeficientes (donde la columna b ya no representan los términos independientes, sino una columna de coeficientes de una nueva variable)

1. Encuentre todos los valores de a para los cuales cada una de las siguientes ecuaciones

   $(a-5)x = 5$ $\quad$ $(ii)\ -2x = a$ $\quad$ $(iii)\ (a^2-9)x = 0$ $\quad$ $(iv)\ (a^2-2)x = a+2$

   - tiene exactamente una solución.
   - tiene infinitas soluciones.
   - no tiene solución (es inconsistente).

2. Los siguientes sistemas de ecuaciones son no lineales. Encuentre sustituciones de las variables que conviertan cada uno de ellos en un sistema de ecuaciones lineales y utilice este último para resolver el sistema inicialmente dado.

   $$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=0 \qquad -2^a+2(3^b)=1 \qquad x^2-y^2=3$$
   $$\frac{4}{x}+\frac{3}{y}=1 \qquad 3(2^a)-4(3^b)=1 \qquad x^2+2y^2=6$$

3. Dar condiciones sobre a tales que el sistema de ecuaciones lineales

   $$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+5y-z=3 \\ x+(a+2)y+(a^2-1)z=2a \end{cases}$$

   - No tenga solución
   - Tenga infinitas soluciones (dar la solución general y geométricamente que es?)
   - Tenga solución única (dar la solución)

4. Considere los sistemas de ecuaciones lineales

   $$(1.)\begin{cases} x+2y-5z=a \\ 2x-3y+4z=b \\ 3x-y-z=c \end{cases} \qquad (2.)\begin{cases} ax+y+z=a \\ x+by+z=b \\ x+y+cz=c \end{cases}$$

   De las condiciones sobre los parámetros a, b, c para que los sistemas dados tengan

   - Solución única
   - Infinitas soluciones
   - Ninguna solución

5. Dar condiciones sobre el parámetro a, para que el sistema:

   $$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+(a^2-5)z=a \end{cases}$$

   (a) No tenga solución.
   (b) Tenga infinitas soluciones (dar la solución general).
   (c) Tenga solución única (dar la solución).

6. Si al escalonar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \pi & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^2-b & b \end{array}\right)$$

- Es el sistema consistente cuando $a = b = 0$? En caso de serlo, es la solución única?
- Es el sistema consistente cuando $a = 1$ y $b = 0$? En caso de serlo, es la solución única?
- Es el sistema consistente cuando $a = 0$ y $b = 1$? En caso de serlo, es la solución única?
- Si $b = 2$ y $a \neq 0$, qué puede decirse del conjunto solución?
- Si $b = 1$ y $a \neq 0$, qué puede decirse del conjunto solución?
- Si $a \neq 0$, dé un valor de b (diferente de 0), en caso de que exista, para que el sistema sea consistente.
- Si $a \neq 0$, para que valores de b el sistema tiene infinitas soluciones?
- Si $a \neq 0$, para que valores de b el sistema tiene solución única?
- Si $a \neq 0$, para que valores de b el sistema es inconsistente?

7. Al resolver el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se obtuvo la siguiente forma escalonada reducida de A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diga cuáles de los siguientes vectores de $\mathbb{R}^5$ son soluciones del sistema original

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -a \\ -a-1 \\ -a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_4 = t\mathbf{v}_3 \quad t \in \mathbb{R}$$

8. Justifique POR QUÉ cada una de las siguientes afirmaciones son VERDADERAS

(a) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución única, su sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado también tiene solución única.

(b) Un sistema de ecuaciones lineales con 14 variables y 10 ecuaciones no tiene solución única.

(c) Un sistema de ecuaciones lineales con 27 variables y 13 ecuaciones puede no tener solución.

(d) Un sistema de ecuaciones lineales con 100 variables y 300 ecuaciones puede tener solución única.

(e) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 10 variables y 7 ecuaciones tiene infinitas soluciones.

(f) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 14 variables y 10 ecuaciones no tiene solución única.

(g) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 100 variables y 300 ecuaciones puede tener solución única.

(h) Un sistema de ecuaciones lineales consistente con 10 variables y 7 ecuaciones tiene infinitas soluciones.

(i) Un sistema de ecuaciones lineales consistente con 14 variables y 10 ecuaciones no tiene solución única.

(j) Un sistema de ecuaciones lineales consistente con 100 variables y 300 ecuaciones puede tener solución única.

9. Justifique POR QUÉ cada una de las siguientes afirmaciones son FALSAS

(a) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución, cualquier otro sistema de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes también tiene solución

(b) Un sistema de ecuaciones lineales tiene solución siempre que su sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado tenga solución.

(c) El tipo de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales y el del sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado siempre es el mismo

(d) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 27 variables y 13 ecuaciones puede no tener solución.

(e) Un sistema de ecuaciones lineales con 10 variables y 7 ecuaciones tiene infinitas soluciones

(f) Un sistema de ecuaciones lineales con 20 variables y 20 ecuaciones tiene solución única.

(g) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 20 variables y 20 ecuaciones tiene solución única

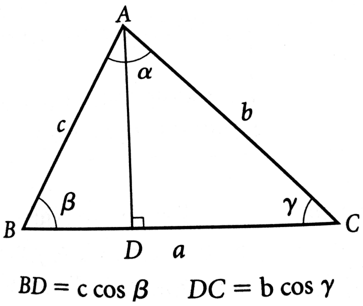
(h) Un sistema de ecuaciones lineales consistente con 20 variables y 20 ecuaciones tiene solución única.

10. APLICACIONES

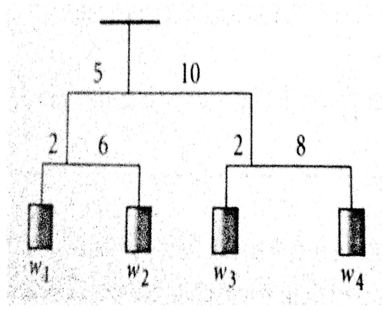
- **Transportes**
  La compañía de transportes Rodríguez se especializa en carga pesada, para lo cual dispone únicamente de tractomulas T, camiones grandes C de motor $900c.c.$ y los llamados dobletroques D. Los talleres Reina de Bogotá se disponen abrir una sucursal en la zona franca de Cali con una base de 32 tornos industriales y 10 fresadoras manuales. Para el transporte de dicha maquinaria contratan a los Rodríguez quienes les informan que cada T puede transportar solo 2 tornos, cada C un torno y una fresadora, mientras que cada D un torno y 2 fresadoras. Determine el número de T, C y D que han de utilizar los Rodríguez para cumplirle a los talleres Reina.
- **Hacer insecticidas**
  Para fabricar insecticidas se utilizan tres clases de compuestos. Una unidad del insecticida Magnon requiere $10mls$ de Nuvan, $30mls$ de Citronela B y $60mls$ de petróleo. Una unidad del Baygon requiere $20mls$ de Nuvan, $30mls$ de Citronela y $50mls$ de petróleo. Una unidad del insecticida Nocaut, requiere $50mls$ de Nuvan y $50mls$ de petróleo. Si se disponen de $1600mls$ de Nuvan, $1200mls$ de Citronela y $3200mls$ de petróleo. Determine cuántas unidades de los tres insecticidas pueden producirse usando todos los componentes disponibles.
- **Edición de libros**
  Un editor publica un posible éxito de librería en tres presentaciones distintas: libro de bolsillo, club de lectores y edición de lujo. Cada libro de bolsillo necesita un minuto para el cosido y 2 para el pegado. Cada libro para el club de lectores necesita 2 minutos para el cosido y 4 para el pegado. Cada libro en edición de lujo necesita 3 minutos para el cosido y 5 para el pegado. Si la planta de cosido está disponible 6 horas diarias y la planta de pegado 11 horas, ¿cuántos libros de cada presentación se pueden producir

por día de modo que las plantas se aprovechen toda su capacidad?

- **Fabricación de muebles**
  Un mueblero fabrica sillas, mesas para café y mesas para comedor. Se necesitan 10 minutos para lijar una silla, 6 para pintarla y 12 para barnizarla. Se necesitan 12 minutos para lijar una mesa para café, ocho para pintarla y 12 para barnizarla. Se necesitan 15 minutos para lijar una mesa para comedor, 12 para pintarla y 18 para barnizarla. La mesa de lijado está disponible 16 horas a la semana, la mesa de pintura 11 horas a la semana y la mesa de barnizado 18 horas. ¿Cuántas unidades de cada mueble deben fabricarse por semana de modo que las mesas de trabajo se ocupen todo el tiempo disponible?
- **Cambio de divisas**
  Una empresaria necesita en promedio cantidades de yenes japoneses, libras inglesas y marcos alemanes durante cada viaje de negocios. Este año viajo tres veces. La primera vez cambio 2550 dolares con las siguientes tasas 100 yenes por dólar, 0.6 libras por dólar y 1.6 marcos por dólar. La segunda vez cambio 2840 dolares en total con las tasas de 125 yenes, 0.5 libras y 1.2 marcos por dólar. La tercera vez cambió un total de 2800 a 100 yenes, 0.6 libras y 1.2 marcos por dólar. Cuántos yenes, libras y marcos compró cada vez?
- **Una aplicación a la trigonometría**
  Demuestre la ley de los cosenos.



  Es decir, que para el triángulo ABC se cumple
  $$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$
- **Parábola** Determine la ecuación de la parábola, con eje vertical y en el plano xy que pasa por los puntos $(1, 4)$, $(-1, 6)$ y $(2, 9)$.
- **Balanceo de Reacciones Químicas**
  El balanceo de reacciones químicas consiste en introducir coeficientes enteros frente a cada uno de los reactivos, para que la cantidad de átomos de cada elemento sea igual en ambos lados de la ecuación. Balancee la reacción
  $$a\,CH_4 + b\,O_2 \to c\,CO_2 + d\,H_2O.$$
  Es decir, calcule los coeficientes a, b, c, d que balanceen la ecuación
  Ayuda: Note que la cantidad de átomos de C, H y O deben ser iguales en ambos lados.
- **Un problema de palancas en estática**
  Calcule los pesos w_1, w_2, w_3 y w_4 para balancear las siguientes palancas



  Ayuda: **Ley de la palanca Arquímedes:** Dos masas en una palanca se equilibran cuando sus pesos son inversamente proporcionales a sus distancias al punto de apoyo

11. Determine si el primer vector es combinación lineal de los otros.

$$a) \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} -2a - 2b \\ -a + 6b \\ 5a - b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

12. Verifique que cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Podemos afirmar que $\mathbb{R}^3$ es generado por estos vectores?

13. Determine para que valores de α, $gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^3$

14. Dados $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $H = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, determine cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas
    (a) El vector $\mathbf{v}$ está en H.
    (b) El vector $\mathbf{w}$ está en H.
    (c) El vector $\mathbf{v}$ está en $\text{Gen}\{H\}$.
    (d) El vector $\mathbf{w}$ está en $\text{Gen}\{H\}$.
    (e) El vector $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ está en $\text{Gen}\{H\}$.
    (f) El vector $\mathbf{u} + 3\mathbf{w}$ está en $\text{Gen}\{H\}$.
15. Explique por qué, si el conjunto M contiene un vector no nulo, $\text{Gen}(M)$ tiene infinitos vectores.
16. Dado un vector $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^2$, geométricamente, qué es $\text{Gen}\{\mathbf{u}\}$? $\text{Gen}\{\mathbf{u}, 2\mathbf{u}\}$?
17. Dados los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^2$, geométricamente, qué es $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$? qué es $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}\}$?
18. Dados los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$, geométricamente, qué es $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$? qué es $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}\}$?
19. Escriba un conjunto generador de $\text{Gen}\{\mathbf{u}, 2\mathbf{u}\}$. Existe otro conjunto generador con menos elementos?
20. Escriba un conjunto generador de $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Existe otro conjunto generador con menos elementos?
21. Escriba un conjunto generador de $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}\}$. Existe otro conjunto generador con menos elementos?
22. Verifique que $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \text{Gen}\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\}$.

23. Si $H = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es $l.i.$, determine cuál de la siguientes afirmaciones es falsa.

    (a) $Gen\,\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w}\} \subseteq Gen(H)$ (b) $H \subseteq Gen(H)$ (c) $\mathbf{0} \in Gen(H)$
    (d) $\{\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\}$ es $l.d$ (e) $\mathbf{w} \in H$

24. Considere los vectores en $\mathbb{R}^3$ dados por $\mathbf{u} = (2, -1, 1), \mathbf{v} = (0, 1, 1)$, y $\mathbf{w} = (2, 1, 3)$. Muestre que $\text{Gen}\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w}\} \subseteq \text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, y determine si estos conjuntos son iguales.

25. Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son $l.i.$? $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

    a) $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0}\}$ *b)* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, 2\mathbf{u}\}$. *c)* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\}$. *d)* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \text{tales que } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0\}$

.

26. Dados los vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$ y $H = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, seleccione entre las siguientes afirmaciones una VERDADERA.

    □ $Gen\{\mathbf{u}\} \subseteq Gen(H)$. □ $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$. □ $Gen(H) = Gen\{\mathbf{u}\} \cup Gen\{\mathbf{v}\}$. □ $Gen\{\mathbf{u}\} = Gen\{\mathbf{v}\}$

27. Dados los vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, seleccione entre las siguientes afirmaciones, una VERDADERA

    □ $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0}\}$ es $l.i.$ □ $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \lambda\mathbf{u}\}$ es $l.i.$ □ $\{\mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ tales que } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0\}$ es $l.i.$ □ $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\}$ es $l.i.$ □ N.A

28. Sean A una matriz de m filas y n columnas y U una matriz escalonada equivalente a A. Si **para cualquier vector $\mathbf{b}$** de $\mathbb{R}^m$, el sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz aumentada es $[A|\mathbf{b}]$, **tiene solución única**, determine cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.
    (a) El vector b es combinación lineal de las columnas de A.
    (b) El vector b es combinación lineal de las columnas de U.
    (c) Cada fila de U tiene un pivote.
    (d) Cada columna de U tiene un pivote.

(e) La matriz U tiene n pivotes.

(f) La matriz U tiene m pivotes.

(g) $m = n$.

(h) Las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$

29. Sean A una matriz de m filas y n columnas y U una matriz escalonada equivalente a A. Si **para cualquier vector b** de $\mathbb{R}^m$, el sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz aumentada es $[A|b]$, **tiene infinitas soluciones**, determine cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.

    (a) El vector b es combinación lineal de las columnas de A.

    (b) El vector b es combinación lineal de las columnas de U.

    (c) Cada fila de U tiene un pivote.

    (d) Cada columna de U tiene un pivote.

    (e) La matriz U tiene n pivotes.

    (f) La matriz U tiene m pivotes.

    (g) $m < n$.

    (h) Las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$

30. Sean A una matriz de m filas y n columnas y U una matriz escalonada equivalente a A. Si **para un vector b** de $\mathbb{R}^m$, el sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz aumentada es $[A|b]$, **es inconsistente**, determine cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas y responda a las preguntas formuladas. Justifique su respuesta.

    (a) El vector **b** es combinación lineal de las columnas de A.

    (b) El vector **b** puede ser combinación lineal de las columnas de U.

    (c) Cada fila de U tiene un pivote.

    (d) El vector **b** puede ser 0.

    (e) El vector **b** puede ser un múltiplo de alguna de las columnas de A?

    (f) El vector **b** puede ser la suma de las columnas de A?

    (g) Las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$.

    (h) Qué puede decirse del número de pivotes de U?

31. Dados los vectores $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

    (a) Para que valor de n, el vector $\mathbf{z} = A\mathbf{b}$ pertenece a $\mathbb{R}^n$?

    (b) El vector **a** pertenece al espacio nulo de A? Al espacio columna de A?

    (c) El vector cero pertenece al espacio nulo de A? Al espacio columna de A?

    (d) El vector $\mathbf{v} = A\mathbf{b}$ pertenece al espacio nulo de A? Al espacio columna de A?

    (e) El vector **c** pertenece al espacio columna de A? Al espacio nulo de A?

    (f) ¿Gen $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = $ Gen $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$?

32. Determine cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

    (a) Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ó $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

    (b) Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

    (c) Cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ es $l.i.$

    (d) Cualquier par de vectores diferentes de $\mathbb{R}^n$ son $l.i.$

    (e) Cualquier tres vectores diferentes de $\mathbb{R}^3$ son $l.i.$

    (f) Cualquier tres vectores diferentes de $\mathbb{R}^2$ generan a $\mathbb{R}^2$.

    (g) Cualquier par de vectores $l.i.$ de $\mathbb{R}^2$ generan a $\mathbb{R}^2$.

    (h) Si el conjunto de vectores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es $l.i.$, entonces el conjunto de vectores $\{\mathbf{u}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}\}$ es $l.i.$

(i) Si A es una matriz $m \times n$, cuyas columnas son vectores $l.i.$, entonces el sistema, cuya matriz aumentada asociada es $[A|\mathbf{b}]$, tiene solución para cualquier vector $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^m$.

(j) Si A es una matriz $n \times n$, cuyas columnas son vectores $l.i.$, entonces el sistema, cuya matriz aumentada asociada es $[A|\mathbf{b}]$, tiene solución única para cualquier vector $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^n$.

(k) Si el vector $\mathbf{u}$ es ortogonal a los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{u}$ es ortogonal a cualquier combinación lineal no nula de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

33. Si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es el sistema homogéneo asociado al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $(\mathbf{b} \neq \mathbf{0})$
    - Toda solución del homogéneo es solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.?
    - Si el homogéneo tiene infinitas soluciones, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ también tiene infinitas soluciones? En caso afirmativo como la hallaría?

34. Si $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
    - ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que le corresponde?
    - ¿Tiene solución única?

35. Sea $S = \{(x, y, z, w) : x + y = 0, z = 2w\}$ ¿Cuántas variables libres hay en S?

36. Sea $S = \{(x, y, z) : x = 1, y = 2z\}$. Escriba un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A_{3\times 3}$ tal que S sea su solución

37. Sean $A = [\mathbf{a_1} \quad \mathbf{a_2} \quad \mathbf{a_3} \quad \mathbf{a_4}]$ y $\mathbf{b}$ tales que una forma escalonada de la matriz aumentada del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es

$$(U|\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - \lambda & \lambda \end{array}\right)$$

- Si $\lambda = 0$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene:

  (a) única solución $\qquad (b)$ infinitas soluciones $\qquad (c)$ ninguna solución

- Si $\lambda = 1$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene:

  (a) única solución $\qquad (b)$ infinitas soluciones $\qquad (c)$ ninguna solución

- Si $\lambda = -1$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene:

  (a) única solución $\qquad (b)$ infinitas soluciones $\qquad (c)$ ninguna solución

- Para $\lambda = 0$, es correcto decir que las columnas de A son linealmente independientes?

  (a) Sí $\qquad (b)$ No $\qquad (c)$ Depende de $\mathbf{b}$

- Para $\lambda = 2$, es correcto afirmar que las columnas de A generan a $\mathbb{R}^4$?

  (a) Sí $\qquad (b)$ No $\qquad (c)$ Depende de $\mathbf{b}$

- * Para $\lambda = 0$, es correcto afirmar que las columnas de $(A|b)$ genera

  (a) un hiperplano de $\mathbb{R}^4$ $\qquad (b)$ un plano de $\mathbb{R}^4$ $\qquad (c)$ todo $\mathbb{R}^4$ $\qquad (d)$ una recta de $\mathbb{R}^4$

- Si $\lambda = 0$, el espacio nulo de A es:

  (a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad (b)$ $\mathbb{R}^4$ $\qquad (c)$ $\emptyset$ $\qquad (d)$ Gen $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad (e)$ N.A

- Para $\lambda = 1$, es correcto afirmar que las columnas de $(A|b)$ generan a $\mathbb{R}^4$?

  (a) Sí $\qquad (b)$ No $\qquad (c)$ Depende de $\mathbf{b}$

38. Sean $A = [\mathbf{a_1} \quad \mathbf{a_2} \quad \mathbf{a_3} \quad \mathbf{a_4}]$ y $\mathbf{b}$ tales que una forma escalonada de la matriz aumentada del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es

$$[\mathbf{U}|\mathbf{c}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \beta - 1 & 0 & \beta^2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 - \alpha & 3\alpha \end{array}\right)$$

- Si $\beta = 1$ y $\alpha = -1$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene:

  (a) única solución (b) infinitas soluciones (c) ninguna solución

- Si $\beta = -1$ y $\alpha = 2$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene:

  (a) única solución (b) infinitas soluciones (c) ninguna solución

- Si $\beta = 3$ y $\alpha = 1$, es correcto afirmar que el conjunto de vectores $\{\mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3},\ \mathbf{a_4}\}$ genera a $\mathbb{R}^4$?

  (a) Sí (b) No (c) Depende mucho de $\mathbf{b}$

- Si $\beta = 1$ y $\alpha = 1$, un vector del espacio columna de $\mathbf{U}$ es:

  $(a) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(b) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(d) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (e) N.A

- Si $\beta = 2$ y $\alpha = 0$, un vector del espacio nulo de A es:

  $(a) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(d) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (e) N.A

- Si $\beta = 1$ y $\alpha = 0$, el conjunto de vectores $\{\mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3},\ \mathbf{a_4}\}$

  (a) *es l.i* (b) son las columnas de U (c) *es l.d* (d) es el espacio C_A

- Si $\beta = -1$ y $\alpha = 1$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene:

  □ única solución □ infinitas soluciones □ ninguna solución

- Si $\beta = 1$ y $\alpha = 2$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene:

  □ única solución □ infinitas soluciones □ ninguna solución

- Si $\beta = 3$ y $\alpha = -1$, es correcto afirmar que el conjunto de vectores $\{\mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3},\ \mathbf{a_4}\}$ genera a $\mathbb{R}^4$?

  □ Sí □ No □ Depende del valor $\mathbf{b}$

- Si $\beta = 1$ y $\alpha = -1$, un vector del espacio columna de $\mathbf{U}$ es:

  □ $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ □ N.A

- Si $\beta = 1$ y $\alpha = 0$, un vector del espacio nulo de A es:

  □ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ □ N.A

- Si $\beta = -1$ y $\alpha \neq 0$, podemos afirmar que el conjunto de vectores $\{\mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3},\ \mathbf{a_4}\}$ es l, i?

  □ *Si* □ Si, pues aquí $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ □ No, pues aquí $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ □ *No* □ F.I. para concluir

- Para $\beta = 1$ y $\alpha = 0$, un conjunto de columnas *l.d.* de A es
  □ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ □ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ □ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ □ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4\}$

- Para $\beta = -1$ y $\alpha = 1$, el sistema homogéneo asociado a $Ax = b$
  □ es inconsistente □ tiene solución única □ tiene infinitas soluciones

- * Para $\beta = 1$ y $\alpha = 1$, el conjunto de las columnas de A, genera
  □ Un plano en $\mathbb{R}^4$ □ Un hiperplano en $\mathbb{R}^4$ □ Una recta en $\mathbb{R}^4$ □ Un punto

- * Para $\beta = 1$ y $\alpha = -1$, el espacio nulo de A, N_A genera
  □ Un plano en $\mathbb{R}^4$ □ Un hiperplano en $\mathbb{R}^4$ □ Una recta en $\mathbb{R}^4$ □ Un punto

39. Sean $A = [\mathbf{a_1} \quad \mathbf{a_2} \quad \mathbf{a_3} \quad \mathbf{a_4}]$ y $\mathbf{b}$ tales que una forma escalonada de la matriz aumentada del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es

$$[\mathbf{U}|\mathbf{c}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \beta+1 & \alpha & \beta^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-\alpha & 3\alpha \end{array}\right)$$

   - Si $\beta = 1$ y $\alpha = 0$, de un conjunto generador de $Gen\{\mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3},\ \mathbf{a_4}\}$ con menos elementos.
   - Si $\beta = 2$ y $\alpha = 3$, dar el espacio columna de la matriz A.
   - Si $\beta = -1$ y $\alpha = 1$, dar el espacio nulo de la matriz $(A|b)$.
   - * Si $\beta = 1$ y $\alpha = 1$, las columnas de $(A|b)$ genera

     □ Un plano en $\mathbb{R}^4$. □ $\mathbb{R}^3$ □ $\mathbb{R}^4$ □ Un hiperplano en $\mathbb{R}^4$.

40. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vectores unitarios y perpendiculares entre si.
   - La proyección del vector $\mathbf{v}$ sobre el vector $\mathbf{u}$, $\text{Proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ es:

     □ $\mathbf{v}$ □ $\mathbf{u}$ □ $2\mathbf{u}$ □ $\mathbf{0}$ □ N.A

   - La norma del vector $3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$ es:

     □ 15 □ 7 □ 1 □ 5 □ N.A

41. El triángulo con vértices en $P = (2, 2, 0)$, $Q = (1, 0, 1)$ y $R = (4, 1, 1)$ es:

   □ Escaleno □ Equilátero □ Isósceles □ Rectángulo □ N.A

42. Considere los vectores $\mathbf{e_1} = (1, 0, 0), \mathbf{e_2} = (0, 1, 0)$, y $\mathbf{u_a} = (1, a, 2)$ en $\mathbb{R}^3$. Encuentre los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales las proyecciones de $\mathbf{e_1}$ y $\mathbf{e_2}$ sobre $\mathbf{u_a}$ coinciden.

43. Considere los vectores en $\mathbb{R}^3$ dados por $\mathbf{u} = (1, 0, 3)$ y $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$.
   (a) Encuentre la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$:
   (b) Determine si existe un vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \text{proy}_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$;
   (c) Determine si el vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es ortogonal al vector $(1, 1, -3)$;

44. Sean $A = [\mathbf{a_1} \quad \mathbf{a_2} \quad \mathbf{a_3}]$ y $\mathbf{b}$ tales que una forma escalonada de la matriz aumentada del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es

$$[\mathbf{U}|\mathbf{c}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & a+1 & a+a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-1 \end{array}\right)$$

   - Para $a \neq -1$, el sistema original, $Ax = b$
     □ es inconsistente □ tiene infinitas soluciones □ tiene solución única
   - Para $a = 0$, el sistema original, $Ax = b$
     □ es inconsistente □ tiene infinitas soluciones □ tiene solución única

- Para $a=-1$, el sistema original, $Ax=b$
  ☐ es inconsistente ☐ tiene infinitas soluciones ☐ tiene solución única
- Para $a=-1$, un vector del espacio nulo de A es
  ☐ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ☐ N.A
- Un vector del espacio columna de A es
  ☐ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}2\\5\\0\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ ☐ N.A
- Para $a=-1$, un conjunto de columnas *l.d.* de A es
  ☐ $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3\}$ ☐ $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$ ☐ $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\}$ ☐ N.A
- Para $a\neq -1$, el sistema homogéneo asociado a $Ax=b$
  ☐ es inconsistente ☐ tiene solución única ☐ tiene infinitas soluciones ☐ N.A
- * Para $a=1$, el conjunto de las columnas de A genera a
  ☐ Un plano en $\mathbb{R}^4$ ☐ Un hiperplano en $\mathbb{R}^4$ ☐ Una recta en $\mathbb{R}^4$ ☐ N.A

45. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vectores no nulos y paralelos tales que $2(2\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=0$.
a) El vector $\mathbf{u}$ en términos del vector $\mathbf{v}$ es:
☐ $\mathbf{u}=\frac{1}{2}\mathbf{v}$ ☐ $\mathbf{u}=\mathbf{v}$ ☐ $\mathbf{u}=2\mathbf{v}$ ☐ $\mathbf{u}=4\mathbf{v}$ ☐ N.A

b) Si $\|\mathbf{v}\|=4$, entonces la norma del vector $3\mathbf{u}-2\mathbf{v}$ es:
☐ 2 ☐ 4 ☐ 8 ☐ 16 ☐ N.A

46. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores no nulos tales que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$ y $\mathbf{w}=\mathrm{Proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, entonces
☐ $\mathbf{w}=\lambda\mathbf{u}$, $\lambda\neq 0$ ☐ $\mathbf{v}=\lambda\mathbf{u}$, $\lambda\neq 0$ ☐ $\mathbf{w}=0$, ☐ N.A

47. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores no nulos paralelos y $\mathbf{w}=\mathrm{Proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, entonces
☐ $\mathbf{w}=\mathbf{u}$ ☐ $\mathbf{w}=\mathbf{v}$ ☐ $\mathbf{w}=0$ ☐ $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}=0$

48. Seleccione, entre las siguientes afirmaciones, DOS VERDADERAS.
   a) Cualquier tres vectores diferentes de $\mathbb{R}^3$ son *l.i* :
   b) $H=\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ es un conjunto *l.i.* si ninguno de los vectores es paralelo con alguno de los otros.
   c) Cualquier par de vectores de $\mathbb{R}^2$ generan a $\mathbb{R}^2$.
   d) Si A es una matriz 4×5 y el sistema $Ax=b$ tiene solución para cualquier vector b de $\mathbb{R}^4$, entonces las columnas de A son *l.d.*
   e) Dada la matriz $A=[\mathbf{a}_1\ 2\mathbf{a}_1\ 3\mathbf{a}_1]$; con $\mathbf{a}_1\in\mathbb{R}^5$, entonces el espacio nulo de A está contenido en $\mathbb{R}^3$.
   f) Si el vector $\mathbf{u}$ es paralelo a los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{u}$ es ortogonal a cualquier combinación lineal no nula de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.
   g) Dada la matriz $A=[\mathbf{a}_1\ 2\mathbf{a}_1\ 3\mathbf{a}_1]$; con $\mathbf{a}_1\in\mathbb{R}^5$, entonces el espacio columna de A es una recta contenido en $\mathbb{R}^3$.

49. Si $H=\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ es *l.i.*, determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.
(a) $Gen\{\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{v}-\mathbf{w}\}=Gen(H)$ (b) $Gen\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}\subseteq Gen(H)$ (c) $\mathbf{0}\in H$ (d) $Gen(H)$ es *l.i*
(e) $\mathbf{w}$ es combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$

50. En $\mathbb{R}^3$, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores ortogonales, determine cuál de las siguientes afirmaciones es falsa.

☐ $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}\}$ es l.d. ☐ $\{\mathbf{u},\mathbf{v},(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}\}$ es l.d. ☐ $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{2u}-\mathbf{3v}\}$ es l.d. ☐ $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{Proy_u\,2v}\}$ es l.d.

51. Seleccione, entre las siguientes afirmaciones, DOS VERDADERAS.

a) Cualquier tres vectores diferentes de $\mathbb{R}^3$ son $l.i$:

b) Si A es una matriz 4×5 y el sistema $Ax = b$ tiene solución para cualquier vector b de $\mathbb{R}^4$, entonces las columnas de A son $l.i.$

c) $H = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es un conjunto $l.i.$ si ninguno de los vectores es paralelo con alguno de los otros.

d) Si el vector $\mathbf{u}$ es paralelo a los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{u}$ es ortogonal a cualquier combinación lineal no nula de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

e) Si A es una matriz 4×4 y el sistema $Ax = b$ no tiene solución para un vector b, entonces el vector b si puede ser combinación lineal de las columnas de U.

f) Cualquier par de vectores de $\mathbb{R}^2$ generan a $\mathbb{R}^2$.

g) Dada la matriz $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]$; con $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^5$, entonces el espacio nulo de A está contenido en $\mathbb{R}^3$.

h) Dada la matriz $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]$; con $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^5$, entonces el espacio columna de A está contenido en $\mathbb{R}^3$.

52. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que $\|\mathbf{u}\| = 3$, $\|\mathbf{v}\| = 2$ y el ángulo entre ellos es π, entonces $(3\mathbf{u} + \mathbf{v}).(\mathbf{u} - 2\mathbf{v})$ es igual a:______.

53. Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^3$. La proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es $\mathbf{Proy_v u} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ y la componente ortogonal es $\mathbf{u}_c = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$.

54. Sean u, v, w vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$. Indique si son falsas o verdaderas las siguientes afirmaciones. Argumentando su respuesta

(a) Si ${}_{v+w}(u) =_v u +_w u$

(b) Si $\|u + v\| = \|u - v\| \Rightarrow\Rightarrow u \perp v$

(c) Si $\|u + v\| = 1$ y $\|u - v\| = 5 \Rightarrow u \cdot v = 5$

55. Sean $O = (0, 0, 0)$, $P = (2, 1, 0)$, $Q = (1, 1, -1)$ y $R = (0, 1, -3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$.

- Un vector unitario con la misma dirección y sentido contrario de $\overline{QR}$ es:

  (a) $\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ **(b)** $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ **(c)** $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ **(d)** $\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ **(e)** N.A

- El ángulo entre $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ es:

  □ Agudo □ Obtuso □ Recto □ F.I □ N.A

- Si $\mathbf{u} = \overline{QR}$ y $\mathbf{v} = \overline{QP}$, entonces $Proy_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ es:

  (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ **(b)** $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ **(c)** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ **(d)** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ **(e)** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

56. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Muestre que si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es un conjunto linealmente independiente entonces $\{\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\}$ es un conjunto linealmente independiente.