فضای نمونه متناهی و برآمدهای ناهم‌شانس

فرض کنید فضای نمونه‌ی یک آزمایش (پدیده) تصادفی متناهی است $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$

برآمدهای ناهم‌شانس هستند و احتمال رخداد هر کدام از آن‌ها را می‌توان به شیوه‌ای تعیین کرد

$$\forall i = 1, \ldots, n: \quad P(\{e_i\}) = p_i, \quad p_i \geq 0 \text{ and } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

در این‌صورت تابع زیر در اصول موضوع تابع احتمال صدق می‌کند و مدل مناسبی برای این آزمایش تصادفی است

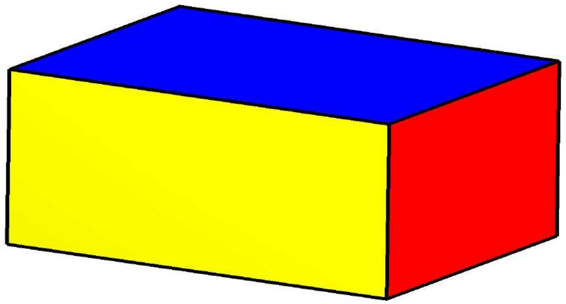
$$P(A) = \sum_{i: e_i \in A} p_i$$

فضای نمونه متناهی و برآمدهای ناهم‌شانس

مثال: یک مکعب مستطیل چوبی با طول ۵ سانتی‌متر، عرض ۳ سانتی‌متر و ارتفاع ۲ سانتی‌متر به گونه‌ای رنگ‌آمیزی شده است که وجه‌های حاصل از طول و عرض (بالا و پایین) آبی، وجه‌های کناری حاصل از طول و ارتفاع (جلو و عقب) زرد و وجه‌های کناری حاصل از عرض و ارتفاع (چپ و راست) قرمز باشند.

این مکعب به صورت تصادفی پرتاب می‌شود و روی یکی از شش وجه خود خواهد نشست

احتمال این که رنگ وجه ظاهر شده (از منظر بالا) آبی نباشد؟



$$S = \{B, Y, R\}$$

$$P(\{B\}) \propto \text{area of } B = 5 \times 3 = 15$$

$$P(\{Y\}) \propto \text{area of } Y = 5 \times 2 = 10$$

$$P(\{R\}) \propto \text{area of } R = 3 \times 2 = 6$$

$$P(\{B\}) = \frac{15}{31}$$

$$P(\{Y\}) = \frac{10}{31}$$

$$P(\{R\}) = \frac{6}{31}$$

فضای نمونه نامتناهی شمارا

فرض کنید فضای نمونه نامتناهی شمارا است، یعنی می‌توان آن را با مجموعه‌ی اعداد طبیعی در تناظر یک به یک قرار داد

$$S = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\} \qquad S \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\forall i = 1, 2, 3, \ldots \; P(\{e_i\}) = p_i, \quad p_i \geq 0 \text{ and } \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

در این‌صورت تابع زیر در اصول موضوع تابع احتمال صدق می‌کند و مدل مناسبی برای این آزمایش تصادفی است

$$P(A) = \sum_{i: e_i \in A} p_i$$

در این حالت برآمدها نمی‌توانند هم‌شانس باشند

$$p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = a \Longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} a = \begin{cases} \infty & a > 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases}$$

فضای نمونه نامتناهی شمارا

مثال: یک سکه‌ی سالم آنقدر پرتاب می‌شود تا برای نخستین بار شیر بیاید. احتمال پیشامد این که حداکثر در چهار پرتاب نخست به شیر برسیم

$$S = \{H, TH, TTH, TTTH, TTTTH, TTTTTH, \ldots\},$$
$$A = \{H, TH, TTH, TTTH\}$$

$$P(\{H\}) = \frac{1}{2}, P(\{TH\}) = \frac{1}{4}, P(\{TTH\}) = \frac{1}{8}, P(\{TTTH\}) = \frac{1}{16}, \ldots$$

$$P(\{e_i\}) = p_i = \frac{1}{2^i}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

$$P(A) = \sum_{i:e_i \in A} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

فضای نمونه نامتناهی ناشمارا

فرض کنید فضای نمونه نامتناهی ناشمارا است، یعنی با مجموعه‌ی اعداد حقیقی در تناظر 1-1 نیست $S \overset{1-1}{\not\leftrightarrow} \mathbb{N}$

در این حالت تابعی که در اصول موضوع احتمال صدق کند، غیر از تعداد متناهی یا نامتناهی شمارایی به سایر پیشامدهای تک‌عضوی احتمال صفر اختصاص می‌دهد

$$\forall e \in S \backslash \mathcal{N} : \quad P(\{e\}) = 0$$

بنابراین در این حالت تخصیص احتمال به برآمدها امکان‌پذیر نیست و باید احتمال را به پیشامدها تخصیص داد

مثال: آزمایش تصادفی انتخاب یک نقطه از بازه‌ی صفر تا یک

$$S = [0, 1]$$

احتمال هر پیشامد $A \subset S$ متناسب است با طول آن

$$P(A) \propto \ell(A) \Rightarrow P(A) = \frac{\ell(A)}{\ell(S)}$$

پیشامد بزرگتر از نیم بودن عدد انتخاب شده

$$P((0.5, 1]) = \frac{\ell((0.5, 1])}{\ell([0, 1])} = 0.5$$

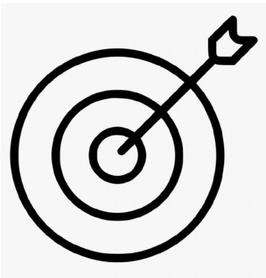
پیشامدهای با طول صفر (یک نقطه یا اجتماع شمارایی از نقاط) دارای احتمال صفر هستند

فضای نمونه نامتناهی ناشمارا

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب یک دارت به صفحه‌ی دارتی به شعاع ۱۰ سانتی‌متر،

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 10^2\}$$

با فرض هم‌شانس بودن همه‌ی برآمدهای ممکن، احتمال هر پیشامد $A \subset S$ متناسب است با مساحت آن



$$P(A) \propto \text{area}(A) \Rightarrow P(A) = \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(S)}$$

پیشامد این که فاصله‌ی محل اصابت دارت تا مرکز صفحه‌ی دارت کمتر از ۳ سانتی‌متر باشد

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3^2\}$$

$$P(B) = \frac{\text{area}(B)}{\text{area}(S)} = \frac{\pi 3^2}{\pi 10^2} = \frac{9}{100}$$

احتمال شرطی

اگر بدانیم پیشامد $S \supset A$ رخ داده است، احتمال رخ دادن پیشامد $S \supset B$ تغییری می کند؟

$$P(B) \stackrel{?}{=} P(B|A)$$

احتمال شرطی رخ دادن پیشامد B به شرط رخ دادن پیشامد A: $P(B|A)$

اگر پیشامد A رخ داده باشد، تنها برآمدهایی که در $A = A \cap S$ هستند برآمدهای ممکن خواهند بود

پس در این حالت B تنها زمانی رخ می‌دهد که $A \cap B$ رخ دهد، پس

$$P(B|A) \propto P(B \cap A) \quad \Rightarrow \quad P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

این تعریف برای احتمال شرطی تنها زمانی معتبر است که $P(A) > 0$

احتمال شرطی

مثال: دو تاس سالم را پرتاب می کنیم

$$S = \{(1,1), \ldots, (1,6), (2,1) \ldots, (6,6)\}, \quad n(S) = 6 \times 6 = 36$$

پیشامد مجموع دو خال برابر با هفت

$$A = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}, \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36}$$

پیشامد مینیمم دو خال برابر با سه

$$B = \{(3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3), (3,6), (6,3)\}, \quad P(B) = \frac{7}{36}$$

احتمال اتفاق افتادن هم‌زمان دو پیشامد (مینیمم دو خال برابر با سه و مجموع دو خال برابر با هفت)

$$A \cap B = \{(3,4), (4,3)\}, \quad P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{36}$$

احتمال شرطی

احتمال شرطی پیشامد مینیمم دو خال برابر با سه به شرط پیشامد مجموع دو خال برابر با هفت

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/36}{6/36} = \frac{2}{6}$$

احتمال شرطی پیشامد مجموع دو خال برابر با هفت به شرط پیشامد مینیمم دو خال برابر با سه

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{7/36} = \frac{2}{7}$$

توجه کنید که در این مثال، اطلاع از رخ دادن هر یک از این دو پیشامد، شانس رخ دادن دیگری را افزایش می‌دهد

$$P(B|A) = \frac{2}{6} > \frac{7}{36} = P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{2}{7} > \frac{1}{6} = P(A)$$

استقلال پیشامدها

استقلال: اگر اطلاع از رخ دادن یکی از پیشامدها تاثیری بر احتمال رخ دادن پیشامد دیگر نداشته باشد

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{or} \quad P(B|A) = P(B)$$

در این صورت

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

مثال: در مثال ریختن دو تاس سالم، پیشامدهای مجموع دو خال برابر با ۷ و مینیمم دو خال برابر با ۳ مستقل نیستند زیرا

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} \neq \frac{6}{36} \times \frac{7}{36} = P(A)P(B)$$

توجه داشته باشید که مفهوم استقلال پیشامدها با ناسازگاری (مجزا بودن) پیشامدها ارتباطی ندارد

استقلال پیشامدها

پیشامدهای $A_1, A_2, \ldots, A_m$ مستقل‌اند اگر

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j), \quad i \neq j,$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), \quad i \neq j \neq k,$$

$$\vdots$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_m)$$

تعداد برابری‌هایی که باید برای استقلال m پیشامد بررسی شوند: $2^m - m - 1$

اگر $m = 7$، آن‌گاه $2^m - m - 1 = 120$

استقلال پیشامدها

مثال: فرض کنید فضای نمونه‌ی یک آزمایش تصادفی از چهار برآمد هم‌شانس تشکیل شده است و پیشامدهای زیر در اختیارند.

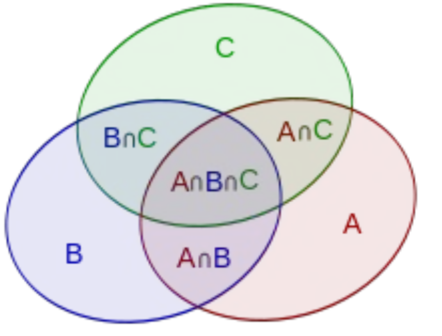
$$S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}, \quad A = \{e_1, e_4\}, B = \{e_2, e_4\}, C = \{e_3, e_4\}$$

درا این‌صورت این سه پیشامد دو به دو مستقل هستند اما هر سه مستقل نیستند

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(B)P(C)$$



$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)P(B)P(C)$$

قانون (فرمول) ضرب احتمال

با توجه به تعریف احتمال شرطی داریم

$$P(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$
$$P(B) > 0 \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

یعنی احتمال رخ دادن هم‌زمان دو پیشامد برابر است با احتمال رخ دادن یکی ضرب در احتمال شرطی رخ دادن دیگری به شرط پیشامد اول

تعمیم به بیش از دو پیشامد

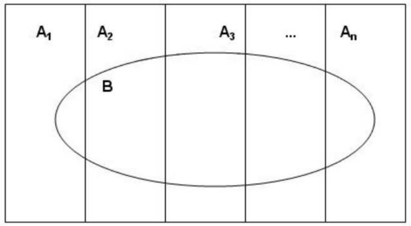
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots$$
$$\cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

نسبت بخت‌های پسین (پس از اطلاع از رخ دادن پیشامد دیگر) به پیشین (پیش از اطلاع از رخ دادن پیشامد دیگر)

$$P(A) > 0, P(B) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B|A)}{P(B)}$$

قانون (فرمول) احتمال کل

فرض کنید $A_1, A_2, \ldots, A_m$ یک افراز از فضای نمونه باشند؛ یعنی



$$A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \quad S = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$$

در این‌صورت برای هر پیشامد دلخواه $B \subset S$ داریم

$$B = B \cap S = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{m} (B \cap A_i)$$

بنابراین

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) P(B|A_i)$$

قانون (فرمول) احتمال کل

مثال: ظرفی حاوی ۷ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه است. از این ظرف مهره‌ای به تصادف انتخاب و با یک مهره‌ی دیگر خارج از ظرف و هم‌رنگ خود به ظرف برگردانده می‌شود. سپس مهره‌ی دیگری به تصادف از این ظرف خارج می‌شود. احتمال سفید بودن مهره‌ی استخراج دوم؟

پیشامد سفید بودن مهره‌ی استخراج دوم B

پیشامد سفید بودن مهره‌ی استخراج اول A_1

پیشامد سیاه بودن مهره‌ی استخراج اول A_2

$$P(A_1) = \frac{7}{11}, P(A_2) = \frac{4}{11}$$

$$P(B|A_1) = \frac{8}{12}, P(B|A_2) = \frac{7}{12}$$

$$A_2 = A_1^c \quad \Rightarrow S = A_1 \cup A_2$$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$$
$$= \frac{7}{11} \times \frac{8}{12} + \frac{4}{11} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{11}$$

قضیه (قانون، قاعده) بیز

از تعریف احتمال شرطی نتیجه می‌شود که

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(A_j)P(B|A_j)}$$

تفسیر: بدست آوردن احتمال‌های پسین با داشتن احتمال‌های پیشین و درستنمایی

- احتمال پیشین A_i (پیش از رخ دادن B) $\quad P(A_i)$
- احتمال پسین A_i (پس از رخ دادن B) $\quad P(A_i|B)$
- درستنمایی (میزان محتمل بودن) رخ دادن B وقتی A_i رخ داده است $\quad P(B|A_i)$

توماس بیز: چطور می‌توان از معلول به علت رسید، چقدر احتمال دارد A_i باعث رخ دادن B شده باشد

قضیه (قانون، قاعده) بیز

مثال: در مثال قبل، اگر مهره استخراج دوم سفید باشد، چقدر احتمال دارد مهره‌ی استخراج اول سیاه بوده باشد؟

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{11} \times \frac{7}{12}}{\frac{7}{11}} = \frac{1}{3}$$

مشاهده‌ی رنگ مهره‌ی استخراج دوم (اطلاع از رخ دادن B) باعث تغییر احتمال‌های پیشین رنگ مهره‌ی استخراج اول به احتمال‌های پسین شد:

$$P(A_1) = \frac{7}{11} < \frac{2}{3} = P(A_1|B)$$

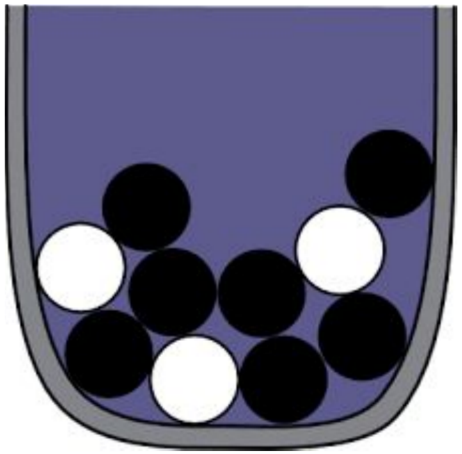
$$P(A_2) = \frac{4}{11} > \frac{1}{3} = P(A_2|B)$$

تمرین

فرض کنید ظرفی حاوی سه مهره‌ی سفید و ۷ مهره‌ی سیاه است. از این ظرف دو مهره به تصادف انتخاب می‌شود. هر یک از دو مهره‌ی انتخاب شده با مهره‌ی دیگری خارج از ظرف که رنگ متضادی دارد جایگزین و به ظرف باز گردانده می‌شود. سپس دو مهره‌ی دیگر از ظرف خارج می‌شود.

الف) احتمال هم‌رنگ بودن مهره‌های استخراج دوم؟

ب) اگر مهره‌های استخراج دوم هم‌رنگ باشند، چقدر احتمال دارد هر دو مهره‌ی استخراج اول سفید بوده باشند؟



جمع‌بندی فصل دوم

عدم حتمیت، آزمایش تصادفی و فضای نمونه‌ای

پیشامد، تابع احتمال و اصول موضوع احتمال

تابع احتمال هم‌شانس و روش‌های شمارش

فضاهای نمونه‌ای نامتناهی و تابع‌های احتمال ناهم‌شانس

احتمال شرطی و استقلال پیشامدها

قانون ضرب احتمال، قانون احتمال کل و قضیه‌ی بیز

مسائل حل شده و مسائل پایان فصل