تابع احتمال

تابع (اندازه) احتمال: تابعی که به هر پیشامد عددی که بیانگر شانس رخداد آن است را تخصیص می‌دهد

$$A \overset{P}{\mapsto} P(A)$$

احتمال (شانس) رخداد یک پیشامد: بر حسب درصد یا عددی بین صفر و یک بیان می‌شود

$$\forall A \subset S : \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

تفسیر مقدار احتمال

- مقدار احتمال نزدیک به یک: شانس رخ دادن پیشامد زیاد است
- مقدار احتمال نزدیک به صفر: شانس رخ دادن پیشامد کم است
- احتمال یک: رخ دادن پیشامد حتمی است
- احتمال صفر: رخ دادن پیشامد محال است

تابع احتمال

شرایط و ضابطه‌ی تابع احتمال؟

اصول موضوع احتمال

اصل اول: احتمال رخ دادن هر پیشامد نامنفی است $P(A) \geq 0$

اصل دوم: احتمال رخ دادن فضای نمونه یک است $P(S) = 1$

اصل سوم: احتمال رخ دادن اجتماع تعداد شمارایی از پیشامدهای مجزا (ناسازگار) برابر است با جمع احتمال آن‌ها

$$A_1, A_2, \ldots \subset S, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j : \quad P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

تابع احتمال

مثال: فرض کنید فضای نمونه‌ی یک آزمایش تصادفی به صورت زیر است.

$$S = \{e_1, e_2, e_3\}$$

آیا تابع زیر در اصول موضوع تابع احتمال صدق می‌کند؟

$$P(A) = \begin{cases} 1 & A \neq \emptyset \\ 0 & A = \emptyset \end{cases}$$

در اصل‌های اول و دوم صدق می‌کند اما در اصل سوم خیر

$$A_1 = \{e_1\}, A_2 = \{e_2\}, A_3 = A_4 = \cdots = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{e_1, e_2\}$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1 \neq 2 = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

ویژگی‌های تابع احتمال

قضیه: هر تابع احتمال که در سه اصل موضوع احتمال صدق کند دارای ویژگی‌های زیر است

$(1) P(\emptyset) = 0$

$(2) A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$(3) P(A^c) = 1 - P(A)$

$(4) P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

$(5) A \subset B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)$

$(6) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$(7) P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

$$(8) P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

ویژگی‌های تابع احتمال

فرض کنید A و B دو پیشامد مربوط به یک آزمایش تصادفی باشند و داشته باشیم

$$P(A) = 0.7, \quad P(B) = 0.5, \quad P(A \cap B) = 0.3$$

احتمال رخ ندادن A:

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 0.3$$

احتمال رخ دادن A یا B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.9$$

احتمال رخ دادن A و رخ ندادن B :

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.2$$

احتمال رخ دادن ندادن هیچ کدام:

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 0.1$$

احتمال رخ دادن A یا B ولی نه هر دو:

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0.6$$

تابع احتمال هم‌شانس (یکنواخت)

فرض کنید

- فضای نمونه متناهی است
- همه‌ی برآمدهای آزمایش (پدیده) تصادفی هم‌شانس هستند

$$S = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

$$P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}$$

آن گاه تابع مجموعه‌ای

$$\forall A \subset S : \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

در اصول موضوع تابع احتمال صدق می‌کند و مدل احتمالاتی مناسبی برای چنین آزمایش (پدیده) تصادفی است

ضابطه‌ی تابع احتمال هم‌شانس: تعداد حالت‌های مطلوب تقسیم بر تعداد حالت‌های ممکن

تابع احتمال هم‌شانس (یکنواخت)

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب یک سکه‌ی سالم و احتمال پیشامد شیر آمدن

$$S = \{H, T\}, \quad A = \{H\}, \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب دو سکه‌ی سالم (دوبار پرتاب یک سکه‌ی سالم) و احتمال پیشامد شیر آمدن دو پرتاب

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}, \quad A = \{HH\}, \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

مثال: آزمایش تصادفی ریختن یک تاس سالم و احتمال پیشامد زوج بودن خال تاس

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A = \{2, 4, 6\}, \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

شمارش تعداد اعضا

مثال: آزمایش تصادفی انتخاب یک کارت از بین ۵۲ کارت در چهار رنگ قرمز، آبی، سبز و زرد که کارت‌های هر رنگ از ۱ تا ۱۳ شماره‌گذاری شده‌اند.

$$S = \{R1, \ldots, R13, B1, \ldots, B13, G1, \ldots, G13, Y1, \ldots, Y13\}$$

احتمال پیشامد آبی بودن رنگ کارت انتخاب شده

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

احتمال پیشامد دو رقمی بودن شماره کارت انتخاب شده

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

احتمال قرمز بودن و تک رقمی بودن کارت انتخاب شده

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{9}{52}$$

شمارش تعداد اعضا

مثال: آزمایش تصادفی انتخاب پنج کارت از بین ۵۲ کارت در چهار رنگ قرمز، آبی، سبز و زرد که کارت‌های هر رنگ از ۱ تا ۱۳ شماره‌گذاری شده‌اند

هر برآمد آزمایش: یک دسته‌ی پنج‌تایی از کارت‌ها

$$S = \{\{R1, R2, R3, R4, R5\}, \{R1, R2, R3, R4, R6\}, \ldots \{R9, G10, B11, Y3, R13\}\}$$

تعداد همه‌ی برآمدهای ممکن (اعضای فضای نمونه‌ای)

$$n(S) = ?$$

احتمال پیشامد هم‌رنگ بودن همه‌ی کارت‌های انتخاب شده

تعداد اعضای پیشامد مورد نظر

$$n(A) = ?$$