احتمال پیشرفته		
مرجع	Rosenthal, J. S. (2006). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific Publishing Company.	
مدرس	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی	صفحه 6

جلسه‌ی چهارم

مجموعه‌ی $\mathcal{J}$ از زیرمجموعه‌های Ω را یک شبه‌جبر (نیم‌جبر) گویند هرگاه

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{J}$
- نسبت به اشتراک متناهی بسته است؛ یعنی اگر $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{J}$، آن‌گاه $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{J}$
- اگر $A \in \mathcal{J}$، آن‌گاه $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{J}$ وجود دارند به طوری که $A_i \cap A_j = \emptyset$، $i \neq j$، و $A^c = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$

مثال ۱: اگر $\Omega = [0,1]$ و $\mathcal{J}$ مجموعه‌ی همه‌ی بازه‌های درون Ω باشد، آن‌گاه $\mathcal{J}$ یک شبه‌جبر از زیرمجموعه‌های Ω است.

مثال ۲: فرض کنید $\Omega = \{(r_1, r_2, r_3, \ldots) : r_i \in \{0,1\}\}$ و

$$\mathcal{J} = \{A_{a_1 a_2 \cdots a_n} : n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \{0,1\}\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$$

که در آن

$$A_{a_1 a_2 \cdots a_n} = \{(r_1, r_2, r_3, \ldots) \in \Omega : r_1 = a_1, \ldots, r_n = a_n\}$$

استوانه‌ای با قاعده‌ی $a_1, \ldots, a_n \in \{0,1\}$ را تعریف می‌کند. در این صورت $\mathcal{J}$ یک شبه‌جبر از زیرمجموعه‌های Ω است.

مثال ۳: اگر $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ و

$$\mathcal{J} = \{[a,b] \times [c,d] : 0 \leq a \leq b \leq 1, 0 \leq c \leq d \leq 1\} \cup \emptyset$$

آن‌گاه $\mathcal{J}$ یک شبه‌جبر از زیرمجموعه‌های Ω است.

قضیه (قضیه توسیع): فرض کنید $\mathcal{J}$ یک شبه‌جبر از زیرمجموعه‌های Ω و $P : \mathcal{J} \to [0,1]$ تابع مجموعه‌ای باشد که $P(\emptyset) = 0$ و $P(\Omega) = 1$ و به علاوه در دوشرط زیر صدق کند

- برای هر $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{J}$ که که $A_i \cap A_j = \emptyset$، $i \neq j$، و $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{J}$ داشته باشیم

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- برای هر $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{J}$ که $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ داشته باشیم

$$P\left(A\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

در این صورت سیگماجبر $\mathcal{M}$ از زیرمجموعه‌های Ω و اندازه‌ی احتمال P^* روی $\mathcal{M}$ موجود هستند به‌طوری که $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}$ و به ازای هر $A \in \mathcal{J}$، $P^*(A) = P(A)$.

ایده‌ی قضیه: ساختن سه‌تایی احتمال $(\Omega, \mathcal{M}, P^*)$ بر اساس شبه‌جبر $\mathcal{J}$ و تابع مجموعه‌ای P

قضیه: شرط‌های تابع مجموعه‌ای P در قضیه‌ی توسیع را می‌توان با شرط زیر جایگزین کرد.

- برای هر $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{J}$ که $A_i \cap A_j = \emptyset$، $i \neq j$، و $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{J}$ داشته باشیم

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

در مثال ۱، تابع مجموعه‌ای $P((a,b)) = P([a,b)) = P((a,b]) = P([a,b]) = b-a$ در شرط بالا صدق و در نتیجه بنابر قضیه‌ی توسیع قابل گسترش به P^* (اندازه‌ی لبگ) روی $\mathcal{M}$ (سیگماجبر لبگ) است. در این مثال می‌توان نشان داد که $H \subset \Omega$ وجود دارد به طوری که $H \notin \mathcal{M}$؛ یعنی $\mathcal{M} \neq 2^{\Omega}$.

در مثال ۲، تابع مجموعه‌ای $P(A_{a_1 a_2 \cdots a_n}) = 1/2^n$ در شرط بالا صدق و در نتیجه بنابر قضیه‌ی توسیع قابل گسترش به P^* روی $\mathcal{M}$ است.

در مثال ۳، تابع مجموعه‌ای $P([a,b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c)$ در شرط بالا صدق و در نتیجه بنابر قضیه‌ی توسیع قابل گسترش به P^* روی $\mathcal{M}$ است.