توزیع توام دو متغیر تصادفی

رفتار احتمالاتی هم‌زمان (توام) دو متغیر تصادفی X و Y

- حالت اول: هر دو متغیر گسسته
- حالت دوم: هر دو متغیر پیوسته
- سایر حالت‌ها: یکی گسسته و دیگری پیوسته (بحث نمی‌شود)

مثال: در آزمایش تصادفی ریختن دو تاس: X مجموع دو خال و Y مینیمم دو خال

مثال: در آزمایش تصادفی پرتاب دارت به صفحه‌ی دارتی به شعاع ۱۰ سانتی‌متر: X فاصله‌ی محل اصابت دارت تا مرکز صفحه‌ی دارت و Y تصویر محل اصابت دارت روی محور عمودی

تکیه‌گاه توام دو متغیر تصادفی

$$S_{X,Y} = \{(X(e), Y(e)) : e \in S\}$$

تابع توزیع توام دو متغیر تصادفی

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad F_{X,Y}(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

توزیع توام دو متغیر تصادفی گسسته

در حالت هر دو متغیر گسسته، تابع جرم احتمال توام X و Y ، یعنی

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad f_{X,Y}(x,y) = P\{X = x, Y = y\}$$

ساختار احتمالاتی مربوط به دو متغیر را مشخص می کند زیرا

$$\forall A \subset \mathbb{R}^2: \quad P\{(X,Y) \in A\} = \sum\sum_{(x,y)\in S_{X,Y}\cap A} f_{X,Y}(x,y)$$

تابع‌های جرم احتمال کناری (حاشیه‌ای) X و Y از روی تابع جرم احتمال توام بدست می‌آیند

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f_X(x) = \sum_{y:(x,y)\in S_{X,Y}} f_{X,Y}(x,y)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}: \quad f_Y(y) = \sum_{x:(x,y)\in S_{X,Y}} f_{X,Y}(x,y)$$

توزیع توام دو متغیر تصادفی گسسته

مثال: در آزمایش تصادفی ریختن دو تاس: X مجموع دو خال و Y مینیمم دو خال

$$S_{X,Y}(x,y) = \{(x,y) : x = 2,3,\ldots,12, y = 1,2,\ldots,6\}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = P\{X = x, Y = y\}$$

$y\backslash x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$f_Y(y)$
1	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	0	0	0	0	0	11/36
2	0	0	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	0	0	0	0	9/36
3	0	0	0	0	1/36	2/36	2/36	2/36	0	0	0	7/36
4	0	0	0	0	0	0	1/36	2/36	2/36	0	0	5/36
5	0	0	0	0	0	0	0	0	1/36	2/36	0	3/36
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/36	1/36
$f_X(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1

توزیع توام دو متغیر تصادفی پیوسته

در حالت هر دو متغیر پیوسته، تابع چگالی احتمال توام X و Y، یعنی

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$$

ساختار احتمالاتی مربوط به دو متغیر را مشخص می‌کند زیرا

$$\forall A \subset \mathbb{R}^2 : \quad P\{(X,Y) \in A\} = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

تابع‌های چگالی احتمال کناری (حاشیه‌ای) X و Y از روی تابع چگالی احتمال توام بدست می‌آیند

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\forall y \in \mathbb{R} : \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x$$

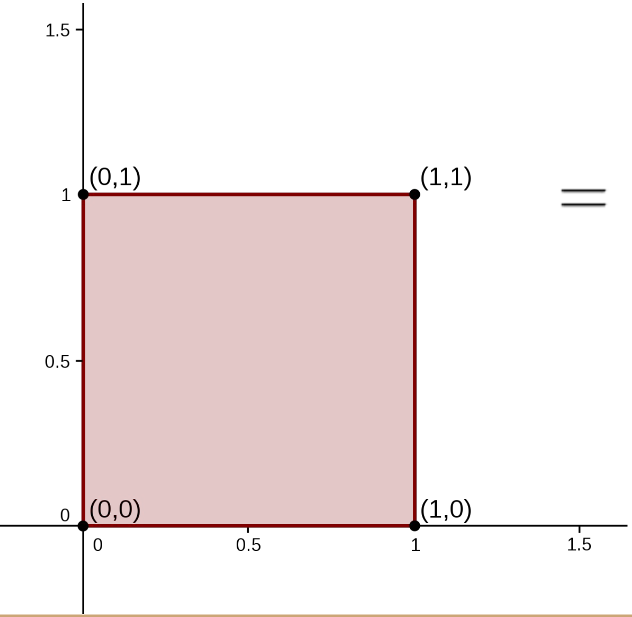
توزیع توام دو متغیر تصادفی پیوسته

در آزمایش تصادفی انتخاب یک نقطه به تصادف در مربع یکه در صفحه‌ی مختصات: X مختصات نقطه روی محور افقی و Y مختصات نقطه روی محور عمودی

$$S_{X,Y} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

تابع توزیع توام

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= P\{X \leq x, Y \leq y\} \\ &= P\{(a,b) \in S : a \leq x, b \leq y\} \\ &= \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ or } y < 0 \\ xy & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ x & 0 \leq x < 1, y \geq 1 \\ y & 0 \leq y < 1, x \geq 1 \\ 1 & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$



تابع چگالی احتمال توام

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

استقلال متغیرهای تصادفی

دو متغیر تصادفی مستقل هستند هرگاه

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

در حالت هر دو متغیر گسسته یا هر دو پیوسته شرط بالا معادل با آن است که (تابع جرم احتمال توام در حالت گسسته و تابع چگالی احتمال توام در حالت پیوسته)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

تعمیم حالت دو متغیره به چند متغیره سرراست است

جمع‌بندی فصل سوم

متغیرهای تصادفی پیوسته و گسسته

تابع توزیع

تابع جرم احتمال

تابع چگالی احتمال

توزیع توام دو متغیر تصادفی

تابع‌های جرم (چگالی) احتمال توام و کناری

مسائل حل شده و مسائل پایان فصل

امید ریاضی

فصل چهارم

مقدار مورد انتظار

فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد. مقدار مورد انتظار، میانگین یا امید ریاضی $g(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x \in S_X} g(x) f_X(x) & X \text{ is discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x & X \text{ is continuous} \end{cases}$$

میانگین

$$\mu = E[X]$$

واریانس

$$\begin{aligned} \sigma^2 = Var(X) &= E[(X-\mu)^2] \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

امید ریاضی برای متغیرهای گسسته

مثال: فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال زیر باشد

x	0	1	2	3
$f_X(x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

میانگین

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x f_X(x) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.1 = 1.4$$

واریانس

$$E[X^2] = \sum_{x \in S_X} x^2 f_X(x) = 0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.4 + 3^2 \times 0.1 = 2.8$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 2.8 - 1.4^2 = 0.84$$

امید ریاضی برای متغیرهای پیوسته

فرض کنید متغیر تصادفی X بیانگر طول عمر یک قطعه‌ی الکترونیکی و دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} 5e^{-5x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

میانگین

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) = 5\int_0^{\infty} x e^{-5x} \mathrm{d}x = \frac{1}{5}$$

واریانس

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) = 5\int_0^{\infty} x^2 e^{-5x} \mathrm{d}x = \frac{2}{25}$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{25} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

ویژگی‌های امید ریاضی

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی و $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: g, h تابع‌های دلخواهی باشند در این صورت

$$E[ag(X) + bh(X)] = aE[g(X)] + bE[h(X)]$$

اگر X و Y مستقل باشند آن گاه

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

کوواریانس و همبستگی بین دو متغیر

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند

$$E[g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_{(x,y)\in S_{X,Y}} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) & X,Y \text{ are discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y & X,Y \text{ are continuous} \end{cases}$$

کوواریانس بین دو متغییر

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، آن‌گاه

$$E[XY] = E[X]E[Y] \quad \Rightarrow \quad Cov(X,Y) = 0$$

عکس این مطلب برقرار نیست!

کوواریانس و همبستگی بین دو متغیر

ضریب همبستگی خطی پیرسون بین دو متغیر

$$\rho = \mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

ویژگی‌های ضریب همبستگی خطی

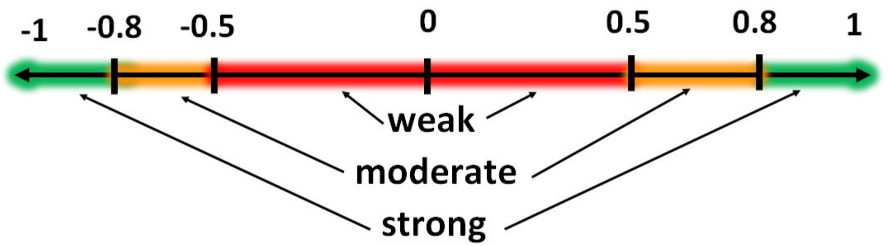
- همواره بین منفی یک تا مثبت یک است

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

- حالت $\rho = 0$ بیانگر ناهمبستگی خطی است
- استقلال ناهمبستگی خطی را نتیجه می‌دهد اما عکس آن برقرار نیست
- ضریب همبستگی یک و منفی یک بیانگر همبستگی قطعی (با احتمال یک) خطی به ترتیب با شیب مثبت و منفی است

$$\rho = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists a \in \mathbb{R}, b < 0 : \quad P\{Y = a + bX\} = 1$$

$$\rho = -1 \quad \Rightarrow \quad \exists a \in \mathbb{R}, b < 0 : \quad P\{Y = a + bX\} = 1$$



کوواریانس و همبستگی بین دو متغیر

مثال: فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال توام زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 9\dfrac{y^2}{x^4} & x > 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ضریب همبستگی خطی بین این دو متغیر را بدست آورید