قواعد شمارش: اصل جمع و ضرب

اصل جمع شمارش: فرض کنید کار A به n روش و کار B به m روش قابل اجرا باشند و اجرای هم‌زمان آن‌ها امکان‌پذیر نیست. در این صورت کار مرکب C که با اجرای کار A یا کار B انجام می‌شود به $m+n$ روش قابل اجراست.

$$\left.\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right\} \text{or} \left\{\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{array}\right.$$

اصل ضرب شمارش: فرض کنید کار A به n روش و کار B به m روش قابل اجرا باشند و اجرای هم‌زمان آن‌ها امکان‌پذیر است. در این صورت کار مرکب C که با اجرای کار A و کار B انجام می‌شود به $m \times n$ روش قابل اجراست.

$$\left.\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right\} \text{and} \left\{\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{array}\right.$$

قواعد شمارش: اصل جمع و ضرب

مثال: اگر برای حرکت از کرمانشاه به مشهد پنج شرکت اتوبوسرانی و سه شرکت هواپیمایی امکان جابه‌جایی مسافران را فراهم کرده باشند، در این صورت هشت شرکت برای انتقال مسافران از کرمانشاه به مشهد با اتوبوس یا هواپیما در اختیار هستند.

$$5 + 3 = 8$$

مثال: برای رنگ سرامیک کف یک سالن سه انتخاب و برای رنگ دیوارهای آن چهار انتخاب وجود دارد. برای انتخاب رنگ کف و دیوار این سالن دوازده ترکیب رنگ در اختیارند.

$$3 \times 4 = 12$$

مثال: یک رستوران برای شام ۳ نوع پیش‌غذا، ۵ نوع غذای اصلی و ۴ نوع دسر را در منوی خود رائه کرده است. هر مشتری می‌تواند یک، دو یا هر سه وعده‌ی پیش‌غذا، غذای اصلی و دسر را انتخاب و از هر کدام تنها یک نوع را سفارش دهد. به این ترتیب چند نوع سفارش غذای متفاوت امکان‌پذیر است؟

$$3 + 5 + 4 + 3 \times 5 + 3 \times 4 + 5 \times 4 + 3 \times 5 \times 4 = 119$$

قواعد شمارش: جایگشت

با کنار هم قرار دادن اعداد ۱ تا ۶، چند عدد شش‌رقمی متمایز بدست می‌آید؟

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$$

جایگشت: هر چینش مرتب که ابتدا و جهت چینش مشخص باشد

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

قرارداد: $0! = 1$

مثال: به چند روش می‌توان پرچم پنج کشور موسس OPEC (ایران، عراق، عربستان، کویت و ونزوئلا) را برای مشخص کردن ترتیب سخنرانی نمایندگان آن‌ها کنار هم چید؟

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

قواعد شمارش: جایگشت

مثال: به چند روش می‌توان سیزده کارت که با شماره‌های ۱ تا ۱۳ شماره‌گذاری شده‌اند را در یک ردیف از بالا به پایین پشت سر هم چید؟

$$13! = 6,227,020,800$$

جایگشت دوری: چینش مرتب حول یک دایره که جهت چینش (ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد) مشخص باشد

تعداد جایگشت‌های دوری n شیء متمایز:

$$(n-1)\times(n-2)\times 2\times 1=(n-1)!$$

مثال: به چند روش می‌توان پرچم پنج کشور موسس OPEC (ایران، عراق، عربستان، کویت و ونزوئلا) را برای مشخص کردن ترتیب سخنرانی نمایندگان آن‌ها دور یک میز چید؟

$$4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$$

قواعد شمارش: جایگشت گروهی

فرض کنید n شیء به k گروه متمایز تقسیم می‌شوند به‌طوری که اعضای هر گروه نامتمایز از یکدیگرند

$$n \begin{cases} n_1 & : \text{group } 1 \\ n_2 & : \text{group } 2 \\ \vdots & \quad \vdots \\ n_k & : \text{group } k \end{cases}$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

تعداد جایگشت‌های این n شیء

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

با کنار هم قرار دادن حروف کلمه‌ی accommodation چند کلمه‌ی متمایز می‌توان ساخت

$$\frac{13!}{2! \times 2! \times 3! \times 2!} = \frac{6227020800}{48} = 129,729,600$$

قواعد شمارش: ترتیب

تعداد روش‌های انتخاب k شیء از n شیء متمایز به ترتیب و بدون جایگذاری

$$_nP_k = [n]_k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$$

مثال: به چند روش می‌توان از بین ۷ نفر ۳ را برای تشکیل یک کمیته‌ی سه نفری انتخاب کرد به طوری که نفر اول رییس کمیته، نفر دوم معاون کمیته و نفر سوم دبیر کمیته باشد؟

ترتیب انتخاب اهمیت دارد: تعیین‌کننده‌ی جایگاه فرد در کمیته است

$$\frac{7!}{(7-3)!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

قواعد شمارش: ترتیب

مثال: چند رمز ۴ رقمی برای کارت بانکی خود می‌توانید انتخاب کنید به طوری که هیچ رقم تکراری نداشته باشند؟

از بین ارقام 0 تا 9 باید چهار رقم را انتخاب کرد و جایگاه هر رقم (یکان، دهگان، صدگان و هزارگان) باعث تمایز ۶۷۴۳ از ۳۴۷۶ می‌شود

$$\frac{10!}{(10-4)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

تعداد روش‌های انتخاب k شیء از n شیء متمایز به ترتیب و باجایگذاری

$$\overbrace{n \times n \times \cdots \times n}^{k \text{ times}} = n^k$$

تعداد رمزهای چهاررقمی با مجاز بودن رقم‌های تکراری:

$$10^4 = 10000$$

قواعد شمارش: ترکیب

تعداد روش‌های انتخاب k شیء از n شیء متمایز بدون ترتیب و بدون جایگذاری

$$ {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{[n]_k}{k!} $$

مثال: به چند روش می‌توان از بین ۷ نفر ۳ را برای تشکیل یک کمیته‌ی سه نفری با اختیارات یکسان انتخاب کرد؟

$$ \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35 $$

تعداد روش‌های انتخاب k شیء از n شیء متمایز بدون ترتیب و باجایگذاری

$$ \binom{n+k-1}{k} $$

قواعد شمارش: مدل‌های نمونه‌گیری

تعداد روش‌های انتخاب k شیء از n شیء متمایز (نمونه‌گیری k-تایی از جامعه‌ای با حجم n)

	بدون جایگذاری	با جایگذاری
ترتیب انتخاب مهم است	$[n]_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	n^k
ترتیب انتخاب مهم نیست	$\dbinom{n}{k}$	$\dbinom{n+k-1}{k}$

قواعد شمارش: مدل‌های نمونه‌گیری

مثال: تعداد ۴۰ مهره در ظرفی قرار دارند که از ۱ تا ۴۰ شماره‌گذاری شده‌اند و مهره‌های شمارای ۱ تا ۱۰ با رنگ آبی، ۱۱ تا ۲۰ با رنگ قرمز، ۲۱ تا ۳۰ با رنگ سبز و ۳۱ تا ۴۰ با رنگ بنفش رنگ‌آمیزی شده‌اند.
از این ظرف ۷ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. تعداد برآمدهای ممکن در هر یک از حالت‌های زیر چقدر است

الف) انتخاب با جایگذاری نباشد و شماره و رنگ مهره‌ها مهم نباشد $\binom{40}{7}$

ب) انتخاب با جایگذاری باشد و شماره و رنگ مهره‌ها مهم نباشد $\binom{46}{7}$

ج) انتخاب با جایگذاری نباشد و شماره‌ی مهره‌ها مهم باشد $\frac{40!}{33!}$

د) انتخاب با جایگذاری باشد و شماره‌ی مهره‌ها مهم باشد 40^7

تمرین: انتخاب با جایگذاری نباشد و فقط رنگ مهره‌ها مهم باشد

تمرین: انتخاب با جایگذاری باشد و فقط رنگ مهره‌ها مهم باشد

قواعد شمارش: مدل‌های جعبه و مهره

تعداد روش‌های توزیع k مهره در n جعبه‌ی متمایز

	تکرار مجاز نیست (هر جعبه حداکثر یک مهره دارد)	تکرار مجاز است (هر جعبه تعداد دلخواه مهره دارد)
مهره‌ها متمایزند (شماره یا رنگ مختلف دارند)	$[n]_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	n^k
مهره‌ها نامتمایزند	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

قواعد شمارش: مدل‌های جعبه و مهره

مثال: چند پلاک خودرو با شماره‌ی شهر کرمانشاه (ایران ۱۹) می‌تواند وجود داشته باشد که حرف ص یا ط دارند (بدون رقم‌های صفر)؟

$$2 \times 9^{2+3} = 2 \times 9^5 = 118098$$

مثال: چند دسته‌ی پنج تایی از بین ۵۲ کارت می‌توان انتخاب کرد (ترتیب انتخاب مهم نیست)؟

$$\binom{52}{5} = 2,598,960$$

مثال: اگر برای انتخاب گذرواژه (Password) در یک سامانه‌ی اینترنتی فقط مجاز به استفاده از حروف کوچک الفبا (a,b,c, ...,z) باشیم، چند گذرواژه‌ی ۵ حرفی با حروف متمایز می‌توانیم انتخاب کنیم؟

$$[26]_5 = \frac{26}{(26-5)!} = 7,893,600$$

قواعد شمارش: چند مثال

مثال: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی زیر را بدست آورید؟

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

پاسخ: مقدار هر متغیر را می‌توان با تعداد مهره‌ها در یک جعبه مدل‌سازی کرد. پس تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی برابر است با تعداد روش‌های توزیع k مهره‌ی نامتمایز در n جعبه‌ی متمایز که در آن تکرار مجاز است.

$$\binom{n+k-1}{k}$$

مثال: به چند روش می‌توان ۱۵ پرتقال را بین ۵ نفر تقسیم کرد؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$$

$$\binom{5+15-1}{5} = \binom{19}{5} = \frac{19!}{5!(19-5)!} = 11,628$$

قواعد شمارش: چند مثال

مثال: تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی

$$\binom{n}{k}$$

مثال: تعداد همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

بسط دوجمله‌ای (نیوتون): برای هر عدد طبیعی n و هر دو عدد حقیقی دلخواه a و b

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

تعداد همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

تعداد همه‌ی زیرمجموعه‌های ناتهی یک مجموعه‌ی n عضوی

$$2^n-1$$

شمارش تعداد اعضا

مثال: آزمایش تصادفی انتخاب پنج کارت از بین ۵۲ کارت در چهار رنگ قرمز، آبی، سبز و زرد که کارت‌های هر رنگ از ۱ تا ۱۳ شماره‌گذاری شده‌اند

احتمال پیشامد دو رقمی بودن شماره‌ی همه‌ی کارت‌های انتخاب شده

$$P(A) = \frac{\binom{16}{5}}{\binom{52}{5}}$$

احتمال پیشامد هم‌رنگ بودن همه‌ی کارت‌های انتخاب شده

$$P(B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$$

احتمال پیشامد این که دو کارت از یک رنگ و سه کارت دیگر از رنگ دیگری باشند

$$P(C) = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{13}{3}\binom{13}{2}}{\binom{52}{5}}$$

شمارش تعداد اعضا

مثال: سازمان غذا و دارو تصمیم دارد در یک شهر خاص، تعداد ۱۰ بسته از یک داروی خاص را در اختیار سه داروخانه‌ی الف، ب و ج قرار دهد. فرض کنید هر یک از این بسته‌ها به صورت کاملا تصادفی (با قرعه‌کشی) به یکی از این سه داروخانه اختصاص پیدا می‌کند.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

احتمال پیشامد این که به داروخانه‌ی ج دقیقا ۲ بسته تخصیص یابد

$$P(A) = \frac{\binom{2+8-1}{8}}{\binom{3+10-1}{10}} = \frac{\binom{9}{8}}{\binom{12}{10}} = \frac{9}{66}$$

احتمال این پیشامد که به داروخانه‌ی الف حداکثر ۳ بسته برسد

$$P(B) = \frac{\binom{2+10-1}{10} + \binom{2+9-1}{9} + \binom{2+8-1}{8} + \binom{2+7-1}{7}}{\binom{3+10-1}{10}}$$

تمرین: احتمال این که دست کم به یک داروخانه هیچ بسته‌ای تعلق نگیرد (راهنمایی: احتمال متمم را محاسبه کنید)