

تابع احتمال

تابع (اندازه) احتمال: تابعی که به هر پیشامد عددی که بیانگر شانس رخداد آن است را تخصیص می دهد

$$A \xrightarrow{P} P(A)$$

احتمال (شانس) رخداد یک پیشامد: بر حسب درصد یا عددی بین صفر و یک بیان می شود

$$\forall A \subset S : 0 \leq P(A) \leq 1$$

تفسیر مقدار احتمال

- مقدار احتمال نزدیک به یک: شانس رخ دادن پیشامد زیاد است
- مقدار احتمال نزدیک به صفر: شانس رخ دادن پیشامد کم است
- احتمال یک: رخ دادن پیشامد حتمی است
- احتمال صفر: رخ دادن پیشامد محال است

تابع احتمال

شرایط و ضابطه‌ی تابع احتمال؟

اصول موضوع احتمال

اصل اول: احتمال رخ دادن هر پیشامد نامنفی است

$$P(A) \geq 0$$

اصل دوم: احتمال رخ دادن فضای نمونه یک است

$$P(S) = 1$$

اصل سوم: احتمال رخ دادن اجتماع تعداد شمارایی از پیشامدهای مجزا (ناسازگار) برابر است با جمع احتمال آنها

$$A_1, A_2, \dots \subset S, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j : \quad P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

ویژگی‌های تابع احتمال

قضیه: هر تابع احتمال که در سه اصل موضوع احتمال صدق کند دارای ویژگی‌های زیر است

- 1) $P(\emptyset) = 0$
- 2) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 3) $P(A^c) = 1 - P(A)$
- 4) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 5) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- 6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 7) $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$
- 8) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

تابع احتمال هم‌شانس (یکنواخت)

فرض کنید

$$S = \{e_1, \dots, e_n\}$$

$$P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}$$

- فضای نمونه متناهی است
- همه‌ی برآمدهای آزمایش (پدیده) تصادفی هم‌شانس هستند

آن گاه تابع مجموعه‌ای

$$\forall A \subset S : \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

در اصول موضوع تابع احتمال صدق می‌کند و مدل احتمالاتی مناسبی برای چنین آزمایش (پدیده) تصادفی است

تابع احتمال هم‌شانس (یکنواخت)

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب یک سکه‌ی سالم و احتمال پیشامد شیر آمدن

$$S = \{H, T\}, \quad A = \{H\}, \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب دو سکه‌ی سالم (دو بار پرتاب یک سکه‌ی سالم) و احتمال پیشامد شیر آمدن دو پرتاب

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}, \quad A = \{HH\}, \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

مثال: آزمایش تصادفی ریختن یک تاس سالم و احتمال پیشامد زوج بودن خال تاس

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A = \{2, 4, 6\}, \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

شمارش تعداد اعضا

مثال: آزمایش تصادفی انتخاب یک کارت از بین ۵۲ کارت در چهار رنگ قرمز، آبی، سبز و زرد که کارت‌های هر رنگ از ۱ تا ۱۳ شماره‌گذاری شده‌اند.

$$S = \{R1, \dots, R13, B1, \dots, B13, G1, \dots, G13, Y1, \dots, Y13\}$$

احتمال پیشامد آبی بودن رنگ کارت انتخاب شده

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

احتمال پیشامد دو رقی بودن شماره کارت انتخاب شده

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

احتمال قرمز بودن و تک رقی بودن کارت انتخاب شده

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{9}{52}$$

شمارش تعداد اعضا

مثال: آزمایش تصادفی انتخاب پنج کارت از بین ۵۲ کارت در چهار رنگ قرمز، آبی، سبز و زرد که کارت‌های هر رنگ از ۱ تا ۱۳ شماره‌گذاری شده‌اند

هر برآمد آزمایش: یک دسته‌ی پنج‌تایی از کارت‌ها

$$S = \{\{R1, R2, R3, R4, R5\}, \{R1, R2, R3, R4, R6\}, \dots, \{R9, G10, B11, Y3, R13\}\}$$

تعداد همه‌ی برآمدهای ممکن (اعضای فضای نمونه‌ای)

$$n(S) = ?$$

احتمال پیشامد هم‌رنگ بودن همه‌ی کارت‌های انتخاب شده

تعداد اعضای پیشامد مورد نظر

$$n(A) = ?$$