فصل سوم

متغیرهای تصادفی

متغیر تصادفی

تابعی از فضای نمونه به مجموعه‌ی اعداد حقیقی

$$X : S \to \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

تکیه‌گاه (برد) متغیر تصادفی: مجموعه‌ی مقادیری که متغیر تصادفی اختیار می کند

$$S_X = \{X(e) : e \in S\}$$

توجه: متغیر تصادفی با مقداری که اختیار می کند تفاوت دارد: $X(e) = x$

تابع جرم احتمال متغیر تصادفی: احتمال اختیار هر مقدار حقیقی توسط متغیر تصادفی

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f_X(x) = P\{X = x\} = P(\{e \in S : X(e) = x\})$$

انواع متغیرهای تصادفی

- متغیر تصادفی گسسته: دارای تکیه‌گاه متناهی یا نامتناهی شمارا

$$S_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \quad \text{or} \quad S_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

تابع جرم احتمال ساختار احتمالاتی متغیر تصادفی را مشخص‌سازی می کند و

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f_X(x) \geq 0 \quad \text{and} \quad \sum_{x \in S_X} f_x(x) = \sum_i f_X(x_i) = 1$$

- متغیر تصادفی پیوسته: دارای تکیه‌گاه نامتناهی ناشمارا

$$S_X = (a, b) \quad \text{or} \quad S_X = [0, \infty) \quad \text{or} \quad S_X = \mathbb{R}$$

تابع جرم احتمال همواره صفر است و استفاده از آن هیچ اطلاعی در مورد ساختار احتمالاتی متغیر تصادفی در اختیار نمی گذارد

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f_X(x) = 0$$

مثالی از یک متغیر تصادفی

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب سه سکه‌ی سالم

$$S = \{TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH\}$$

متغیر تصادفی: تعداد شیرها

$$X(TTT) = 0$$

$$X(TTH) = X(THT) = X(HTT) = 1$$

$$X(THH) = X(HTH) = X(HHT) = 2$$

$$X(HHH) = 3$$

تکیه‌گاه متغیر تصادفی

$$S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

متغیر تصادفی گسسته است و تابع جرم احتمال

$$f_X(0) = \frac{1}{8}, \quad f_X(3) = \frac{1}{8}, \quad f_X(1) = \frac{3}{8}, \quad f_X(2) = \frac{3}{8}$$

مثالی از یک متغیر تصادفی

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب دو تاس سالم

$$S = \{(i,j) : i,j = 1,2,\ldots,6\}$$

متغیر تصادفی: مجموع دو خال

$$X((1,1)) = 2$$
$$X((1,2)) = X((2,1)) = 3$$
$$X((1,3)) = X((3,1)) = X((2,2)) = 4$$
$$X((1,4)) = X((4,1)) = X((3,2)) = X((2,3)) = 5$$
$$X((1,5)) = X((5,1)) = X((2,4)) = X((4,2)) = X((3,3)) = 6$$
$$X((1,6)) = X((6,1)) = X((5,2)) = X((2,5)) = X((3,4)) = X((4,3)) = 7$$
$$X((2,6)) = X((6,2)) = X((3,5)) = X((5,3)) = X((4,4)) = 8$$
$$X((3,6)) = X((6,3)) = X((4,5)) = X((5,4)) = 9$$
$$X((4,6)) = X((6,4)) = X((5,5)) = 10$$
$$X((5,6)) = X((6,5)) = 11$$
$$X((6,6)) = 12$$

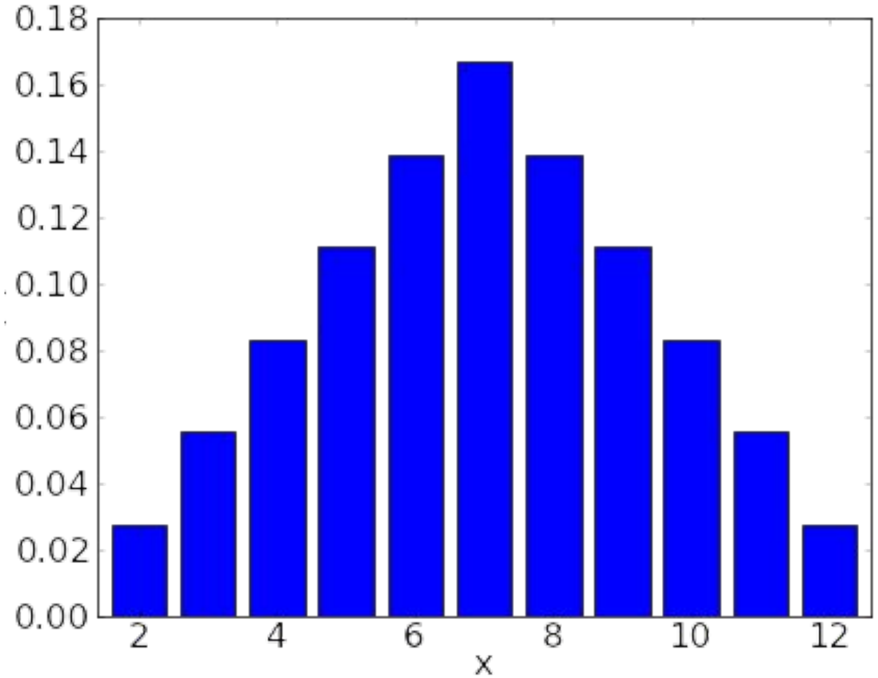
تکیه‌گاه متغیر تصادفی

$$S_X = \{2,3,\ldots,11,12\}$$

مثالی از یک متغیر تصادفی

متغیر تصادفی گسسته است و تابع جرم احتمال (نمایش جدولی، جبری یا نموداری)

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{6-|7-x|}{36} & x = 2, 3, \ldots, 12 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

مثالی از یک متغیر تصادفی

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب یک تاس سالم تا رسیدن به نخستین شش

$$S = \{6, (1,6), \ldots, (5,6), (1,1,6), \ldots, (5,5,6), \ldots\}$$

متغیر تصادفی: تعداد پرتاب‌های لازم برای رسیدن به نخستین شش

$$X(6) = 1$$
$$X((1,6)) = X((2,6)) = \cdots = X((5,6)) = 2$$
$$X((1,1,6)) = X((1,2,6)) = \cdots = X((5,5,6)) = 3$$
$$\vdots$$

تکیه‌گاه متغیر تصادفی

$$S_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

متغیر تصادفی گسسته است و تابع جرم احتمال

$$f_X(1) = \frac{1}{6}, f_X(2) = \frac{1}{36}, f_X(3) = \frac{1}{216}, \ldots, f_X(x) = \frac{1}{6^x}, \ldots$$

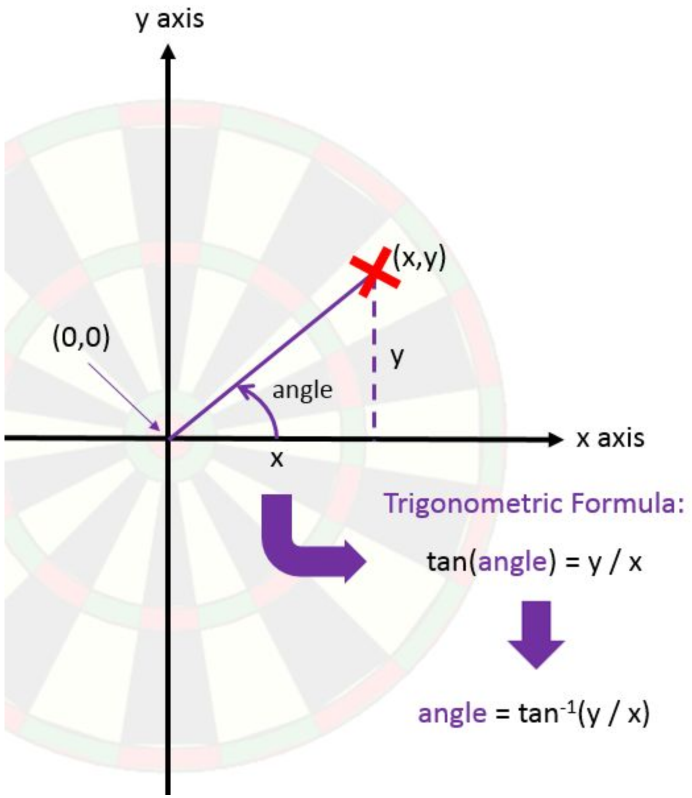
مثالی از یک متغیر تصادفی

مثال: آزمایش تصادفی پرتاب دارت به صفحه‌ی دارتی با شعاع ۱۰ سانتی‌متر

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 10^2\}$$

متغیر تصادفی: فاصله‌ی محل اصابت دارت تا مرکز صفحه‌ی دارت

$$X((x,y)) = \|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



تکیه‌گاه متغیر تصادفی

$$S_X = [0, 10]$$

متغیر تصادفی پیوسته است و تابع جرم احتمال

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f_X(x) = 0$$

تابع توزیع متغیر تصادفی

برای هر متغیر تصادفی دلخواه تابع توزیع یا تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad F_X(x) = P\{X \leq x\}$$

ویژگی‌های تابع توزیع

- غیرنزولی (صعودی) است

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad F_x(x) \leq F_X(y)$$

- از راست پیوسته است

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad F_X(x^+) \lim_{t \to x^+} F_X(t) = F_X(x)$$

- دارای دو مجانب افقی است

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

- مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگی آن متناهی یا نامتناهی شماراست

$$\{x \in \mathbb{R} : F_X(x^-) < F_X(x)\} = \{x_1', x_2', \ldots\}$$

تابع توزیع متغیرهای تصادفی گسسته

برای متغیرهای تصادفی گسسته، تابع توزیع یک تابع پله‌ای است

- تابع توزیع در نقاط تکیه‌گاه جهش‌هایی به اندازه‌ی مقدار تابع جرم احتمال دارد
- در سایر نقاط ثابت است

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad F_X(x) - F_X(x^-) = P\{X = x\} = f_X(x)$$

رابطه‌ی تابع توزیع و تابع جرم احتمال برای متغیرهای تصادفی گسسته

$$F_X(x) = \sum_{t \in S_X : t \leq x} f_X(t)$$

تابع توزیع متغیرهای تصادفی گسسته

مثال: فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه‌گاه

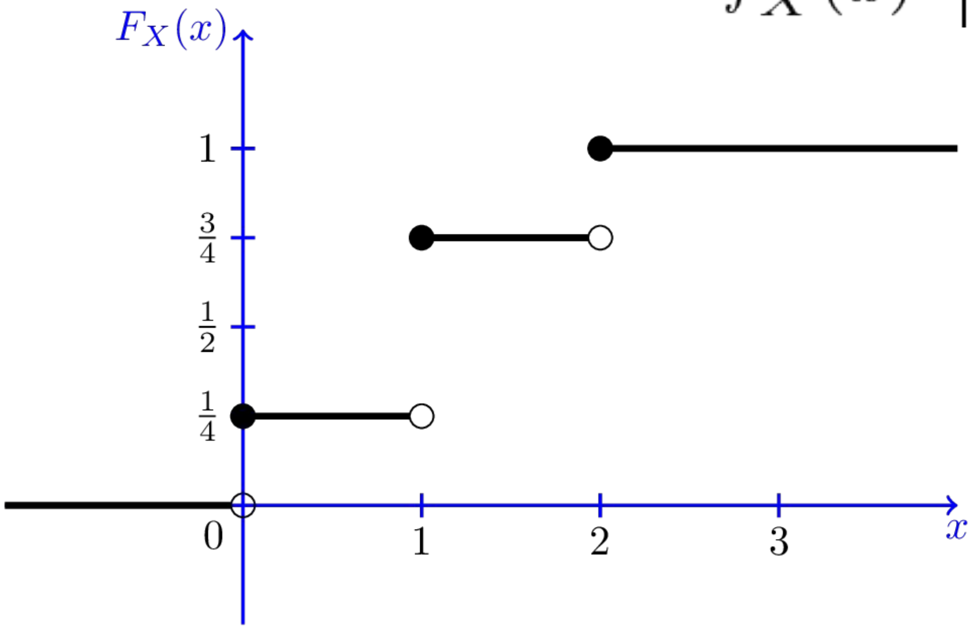
$$S_X = \{0, 1, 2\}$$

و تابع جرم احتمال

x	0	1	2
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

باشد. در این صورت

x	0	1	2
$F_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{4}$



تابع توزیع متغیرهای تصادفی پیوسته

برای متغیرهای تصادفی پیوسته، تابع توزیع یک تابع پیوسته است (فرض می‌کنیم تحت شرایطی مشتق پذیر باشد)

تابع چگالی احتمال: مشتق تابع توزیع

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x)$$

تابع چگالی احتمال برای متغیرهای تصادفی پیوسته ساختار احتمالاتی متغیر تصادفی را مشخص‌سازی می‌کند و

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f_X(x) \geq 0 \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$$

به علاوه

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$$

تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی گسسته در نقاط تکیه‌گاه تعریف نشده و در سایر نقاط همواره صفر است و استفاده از آن هیچ اطلاعی در مورد ساختار احتمالاتی متغیر تصادفی در اختیار نمی‌گذارد

تابع توزیع، جرم احتمال و چگالی احتمال

خلاصه‌ی مطالب مطرح شده در مورد تابع‌های تعریف شده برای متغیرهای تصادفی

تابع	تعریف	متغیرهای تصادفی گسسته	متغیرهای تصادفی پیوسته
تابع توزیع	$F_X(x) = P\{X \leq x\}$	ساختار احتمالاتی را مشخص می کند	ساختار احتمالاتی را مشخص می کند
تابع جرم احتمال	$f_X(x) = P\{X = x\}$	ساختار احتمالاتی را مشخص می کند	همواره صفر است
تابع چگالی احتمال	$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x)$	تعریف نشده یا صفر است	ساختار احتمالاتی را مشخص می کند

مثالی از یک متغیر تصادفی پیوسته

مثال: برای متغیر تصادف فاصله‌ی محل اصابت دارت تا مرکز صفحه‌ی دارتی به شعاع ۱۰ سانتی‌متر داریم

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\pi x^2}{\pi 10^2} = \frac{x^2}{100} & 0 \leq x < 10 \\ 1 & x \geq 10 \end{cases}$$

بنابراین تابع چگالی احتمال آن برابر است با

$$f_X(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} \frac{x}{50} & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

احتمال‌های مربوط به یک متغیر تصادفی

فرض کنید $a < b$ اعداد حقیقی دلخواهی باشند. در این‌صورت

$$P\{X \leq b\} = F_X(b)$$

$$P\{X < b\} = F_X(b^-)$$

$$P\{X > a\} = 1 - F_X(a)$$

$$P\{X \geq a\} = 1 - F_X(a^-)$$

$$P\{a < X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P\{a \leq X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a^-)$$

$$P\{a < X < b\} = F_X(b^-) - F_X(a)$$

$$P\{a \leq X < b\} = F_X(b^-) - F_X(a^-)$$