

برخی توزیع های احتمال

فصل پنجم

متغیر تصادفی برنولی

عبداله جلیلیان، گروه آمار، دانشگاه رازی

$$S = \{e_1, e_2\}$$

آزمایش **برنولی**: آزمایش تصادفی با دو برآمد ممکن

برآمدی که مورد بررسی است را **پیروزی** و برآمد دیگر را **شکست** در نظر می گیریم

احتمال پیروزی $0 \leq p \leq 1$ و احتمال شکست $q = 1 - p$ است

مثال: پرتاب یک سکه، سالم یا معیوب بودن یک قطعه، اتصال یا عدم اتصال یک مدار، آفتابی یا ابری بودن هوا و ...

متغیر تصادفی برنولی: اگر نتیجه ی آزمایش پیروزی بود $X = 1$ در غیر این صورت $X = 0$

تابع جرم احتمال

$$f_X(x) = p^x q^{1-x} \quad x = 0, 1$$

متغیرهای تصادفی دوجمله‌ای، هندسی و دوجمله‌ای منفی

متغیر تصادفی دوجمله‌ای: یک آزمایش برنولی در شرایط یکسان و به طور مستقل n بار تکرار می‌شود و متغیر تصادفی X بیانگر تعداد تعداد پیروزی‌ها است.

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, \dots, n$$

متغیر تصادفی هندسی: یک آزمایش برنولی در شرایط یکسان و به طور مستقل آنقدر تکرار می‌شود تا برای نخستین بار به پیروزی برسیم و X بیانگر تعداد آزمایش‌های اجرا شده است.

$$f_X(x) = p^r q^{x-r} \quad x = r, r+1, \dots$$

متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی: یک آزمایش برنولی در شرایط یکسان و به طور مستقل آنقدر تکرار می‌شود تا برای r امین بار به پیروزی برسیم و X بیانگر تعداد آزمایش‌های اجرا شده است.

$$f_X(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \quad x = r, r+1, \dots$$

متغیر تصادفی فوق هندسی

عبداله جلیلیان، گروه آمار، دانشگاه رازی

یک جامعه دارای $N \geq 2$ عضو است که $0 \leq M \leq N$ عضو آن دارای یک ویژگی معین (پیروزی) و سایر $N - M$ عضو باقی مانده فاقد این ویژگی (شکست) هستند. از این جامعه به تصادف و بدون جایگذاری تعداد $1 \leq n \leq N$ انتخاب می شود و متغیر تصادفی X بیانگر تعداد پیروزی ها (افراد با ویژگی معین در بین اعضای انتخاب شده) است.

$$f_X(x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad x = \max(0, n - N + M), \dots, \min(n, M)$$



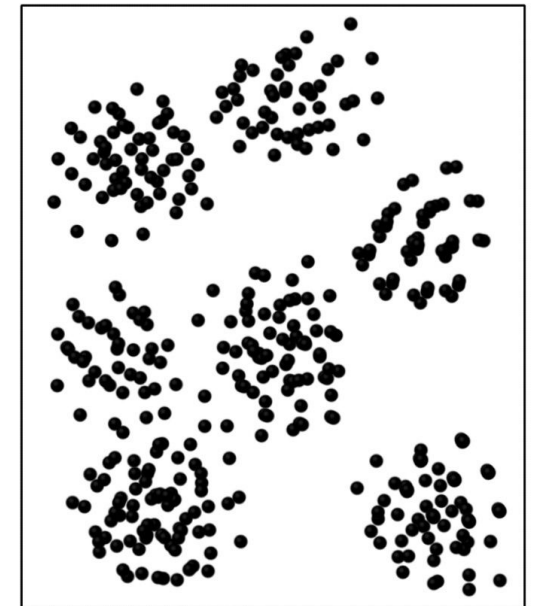
متغیر تصادفی پواسون

عبداله جلیلیان، گروه آمار، دانشگاه رازی

یک پیشامد خاص (مانند زمین‌لرزه، معیوب شدن یک دستگاه، اتصال در یک مدار و ...) در امتداد یک پیوستار (زمان یا فضا) با نرخ ثابت و معین $\lambda > 0$ در حال رخ دادن است و متغیر تصادفی X بیانگر تعداد رخدادهای این پیشامد در یک واحد زمان یا فضا است

$$f_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, \dots$$

Failures over Time



متغیر تصادفی یکنواخت و نمایی

عبداله جلیلیان، گروه آمار، دانشگاه رازی

متغیر تصادفی یکنواخت پیوسته: نقطه‌ای به تصادف از بازه‌ی $[a, b] \subset \mathbb{R}$ انتخاب و متغیر تصادفی X بیانگر نقطه‌ی انتخاب شده است.

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad a < x < b$$

متغیر تصادفی نمایی: طول عمر یک سیستم (قطعه‌ی الکترونیک) ممکن است دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

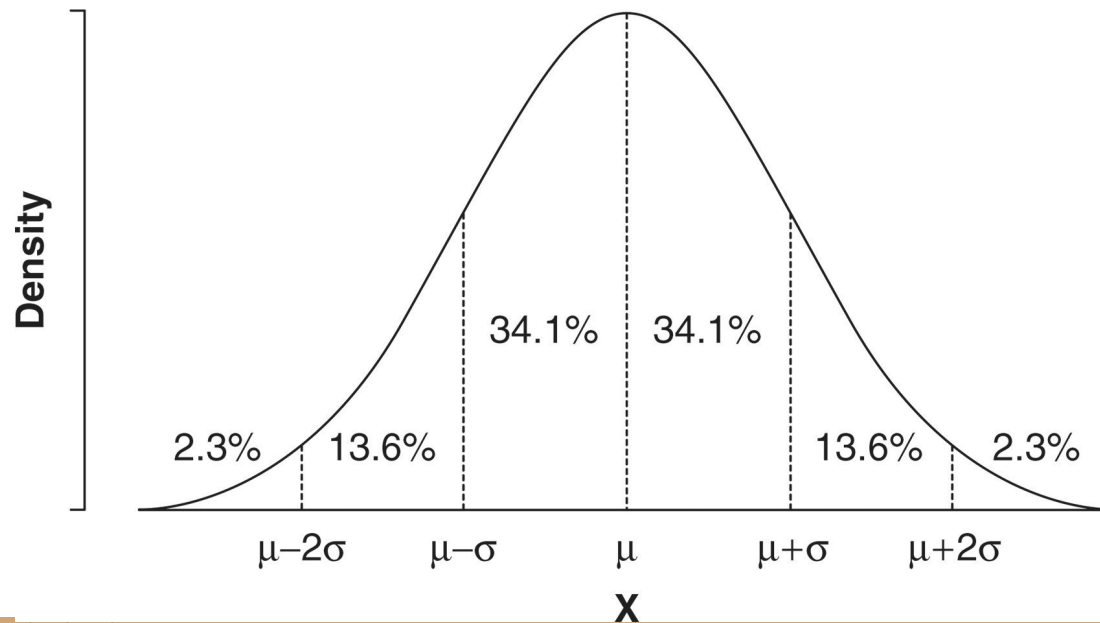
$$f_X(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad x > 0$$

توزیع نرمال

عبداله جلیلیان، گروه آمار، دانشگاه رازی

تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین $-\infty < \mu < \infty$ و انحراف معیار $\sigma > 0$ به شکل زیر است

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$



توزیع نرمال استاندارد

توزیع نرمال استاندارد: توزیع نرمال با میانگین **صفر** و انحراف معیار **یک**

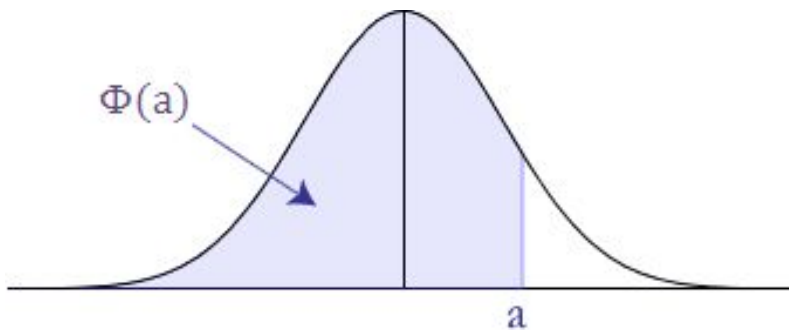
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

استاندارسازی یک متغیر تصادفی نرمال غیر استاندارد

تابع توزیع نرمال استاندارد

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

تقریب عددی انتگرال در جدول‌های انتهای کتاب یا نرم‌افزار



| توزیع | تکیه‌گاه | تابع جرم/چگالی احتمال | امید ریاضی | واریانس |
|----------------|-------------------|---|------------------------|--|
| برنولی | 0, 1 | $f_X(x) = p^x q^{1-x}$ | $E[X] = p$ | $Var(X) = pq$ |
| دوجمله‌ای | 0, 1, \dots, n | $f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ | $E[X] = np$ | $Var(X) = npq$ |
| هندسی | 1, 2, \dots | $f_X(x) = pq^{x-1}$ | $E[X] = \frac{1}{p}$ | $Var(X) = \frac{q}{p^2}$ |
| دوجمله‌ای منفی | r, r + 1, \dots | $f_X(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$ | $E[X] = \frac{r}{p}$ | $Var(X) = \frac{rq}{p^2}$ |
| فوق هندسی | 0, 1, \dots, n | $f_X(x) = \binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x} / \binom{N}{n}$ | $E[X] = n \frac{M}{N}$ | $Var(X) = \frac{N-n}{N-1} n \frac{M}{N} \frac{N-M}{N}$ |
| پواسون | 0, 1, 2, \dots | $f_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ | $E[X] = \lambda$ | $Var(X) = \lambda$ |
| یکنواخت پیوسته | [a, b] | $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ | $E[X] = \frac{a+b}{2}$ | $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ |
| نمایی | (0, \infty) | $f_X(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ | $E[X] = \theta$ | $Var(X) = \theta^2$ |
| نرمال | (-\infty, \infty) | $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ | $E[X] = \mu$ | $Var(X) = \sigma^2$ |