

احتمال پیشرفته		
Rosenthal, J. S. (2006). <i>A first look at rigorous probability theory</i> . World Scientific Publishing Company.		مرجع
صفحه 3	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی	مدرس

جلسه‌ی دوم

آزمایش (پدیده‌ی) تصادفی: نتیجه‌ی آن از قبل به طور قطعی قابل تعیین نباشد.

فضای نمونه Ω : مجموعه‌ی همه‌ی برآمدها (نتیجه‌های) آزمایش تصادفی.

تابع (اندازه‌ی) احتمال: با دریافت هر $A \subset \Omega$ ، مقدار تابع به ازای A ، یعنی $P(A)$ ، بیانگر احتمال A رخداد است.

انتظارات شهودی ما از یک تابع احتمال

- $P(A)$ مقداری بین صفر و یک است.

- احتمال فضای نمونه برابر با کل احتمال است (برآمد نهایی آزمایش حتماً در فضای نمونه است)، یعنی

$$P(\Omega) = 1$$

- احتمال اجتماع $A, B \subset \Omega$ که $A \cap B = \emptyset$ برابر است با جمع احتمال هر یک از آن‌ها

$$(*) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ویژگی (*) که جمعی بودن تابع (اندازه‌ی) احتمال نامیده می‌شود با استقرای ریاضی قابل تعمیم به هر تعداد متناهی

دلخواهی است، یعنی اگر $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ که $A_i \cap A_j = \emptyset$ ، $i \neq j$ ، آن‌گاه

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

اما ویژگی (*) در حالت کلی قابل تعمیم به شمارا جمعی بودن نیست. ویژگی شمارا جمعی بودن بیانگر آن است که

اگر $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$ که $A_i \cap A_j = \emptyset$ ، $i \neq j$ ، آن‌گاه

$$(**) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

با این حال ویژگی شمارا جمعی بودن (**) باعث می‌شود تابع (اندازه‌ی) احتمال P دارای ویژگی ریاضی مطلوب

پیوستگی شود. به همین دلیل ویژگی شهودی (*) با ویژگی ریاضی (**) جایگزین می‌شود.

اما آیا می‌توان برای هر فضای نمونه Ω همواره می‌توان تابع (اندازه‌ی) احتمال مطلوبی یافت که ویژگی شمارا

جمعی بودن (**) را دارای باشد؟

احتمال پیشرفته		
Rosenthal, J. S. (2006). <i>A first look at rigorous probability theory</i> . World Scientific Publishing Company.		مرجع
صفحه 4	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی	مدرس

قضیه: برای $\Omega = [0, 1]$ ، تابع $A \mapsto P(A)$ وجود ندارد که در ویژگی‌های زیر صدق کند.

1. نامنفی باشد.

2. $P(\Omega) = 1$.

3. شمارا جمعی باشد.

4. نسبت به انتقال ناوردا باشد، یعنی برای هر $A \subset \Omega$ و $x \in \mathbb{R}$ ، $P(A \oplus x) = P(A)$.

بنابراین برای برقراری ویژگی شمارا جمعی بودن (***) در برخی از حالت‌ها چاره‌ای جز محدود کردن دامنه‌ی تعریف تابع (اندازه‌ی) احتمال نیست. به عبارت دیگر، برای برقراری شمارا جمعی بودن در برخی از حالت‌ها احتمال برای هر گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای تعریف می‌شود و برای برخی از زیرمجموعه‌های Ω احتمال قابل تعریف نیست.