احتمال پیشرفته		
مرجع	Rosenthal, J. S. (2006). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific Publishing Company.	
مدرس	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی	صفحه 5

جلسه‌ی سوم

سه‌تایی احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ متشکل از مولفه‌های زیر است:

- فضای نمونه Ω: همه‌ی برآمدهای آزمایش تصادفی
- سیگماجبر $\mathcal{F}$: همه‌ی پیشامدهایی از آزمایش تصادفی که احتمال آن‌ها قابل محاسبه است
- اندازه‌ی احتمال P: تابع مجموعه‌ای نامنفی که با دریافت هر پیشامد در $\mathcal{F}$، احتمال آن را برمی‌گرداند

مجموعه‌ی $\mathcal{F}$ را یک سیگماجبر از زیرمجموعه‌های Ω گویند هرگاه

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- نسبت به متمم‌گیری بسته باشد؛ یعنی اگر $A \in \mathcal{F}$، آن‌گاه $A^c \in \mathcal{F}$
- نسبت به اجتماع شمارا بسته باشد؛ یعنی اگر $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$، آن‌گاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

مجموعه‌ی $\{\emptyset, \Omega\}$ و مجموعه‌ی توانی Ω (مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های Ω) که با نماد 2^Ω نشان داده می‌شود، دو سیگماجبر بدیهی از زیرمجموعه‌های Ω هستند و همواره $\{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F} \subset 2^\Omega$.

اندازه‌ی احتمال $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ تابعی مجموعه‌ای است که در سه شرط (اصل‌های موضوع احتمال) صدق می‌کند:

- برای هر $A \in \mathcal{F}$، $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- برای هر $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ که $A_i \cap A_j = \emptyset$، $i \neq j$،

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

قضیه (ویژگی‌های اندازه‌ی احتمال): برای سه‌تایی احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ همواره داریم

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- P تابعی یکنواست؛ یعنی اگر $A \subset B$، آن‌گاه $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- P تابعی شمارا زیرجمعی است (نابرابری بول)؛ یعنی $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$