4 חבורות תמורות

כזכור, חבורת התמורות על קבוצה X מסומנת ב-S_X ואם $|X| = n$ הסדר שלה הוא $n!$. במקרה כזה ניתן להתאים לכל $x \in X$ "אינדקס" בין 1 ל-n ולזהות את התמורות על איברי X עם התמורות המתאימות של האינדקסים. קל לבדוק שזיהוי זה הוא איזומורפיזם $S_X \cong S_n$.

מסתבר שכל חבורה היא תת-חבורה של חבורת תמורות:

משפט 4.1 (משפט קיילי, Cayley) תהי G חבורה מסדר n. אזי G איזומורפית לתת-חבורה של S_n.

משפט קיילי

למעשה, משפט זה נכון, ועם אותה הוכחה, גם לחבורות מסדר אינסופי.

הוכחה: ראינו כבר כי G פועלת על עצמה על-ידי כפל משמאל

$$g_1 . g_2 = g_1 g_2 ,$$

והזכרנו (טענה 3.4) כי כל פעולה של G על קבוצה בגודל n מתאימה להומומורפיזם $\varphi : G \to S_n$. למשל, אם איברי החבורה הם $\{g_1 = e, g_2, \dots, g_n\}$, ניתן להגדיר את φ על-ידי:

$$\varphi\left(g\right)\left(i\right) = j \iff gg_i = g_j .$$

ההומומורפיזם זה הוא חח"ע, כלומר $\ker \varphi = \{e\}$, שכן אם $\varphi\left(g\right)\left(i\right) = i$ לכל i, או אפילו ל-i יחיד, אזי $gg_i = g_i$ ומכלל הצמצום $g = e$. זהו, אם כן, שיכון, ולכן לפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל

$$G \cong \operatorname{Im} \varphi \leq S_n .$$

■

אין לטעות ולגזור ממשפט קיילי שדי לנו לחקור את חבורות התמורות כדי לנתח את כלל החבורות. בשיכון שמספק לנו משפט קיילי אנו משכנים חבורה בגודל n בחבורה גדולה הרבה יותר: בגודל $n!$. חקר החבורה הגדולה לרוב לא יחשוף בפנינו תכונות של החבורה הקטנה. (למשל, ראו תרגילים 4.9 או 7.21 להלן.)

4.1 תמורות בכתיב מחזורים

עד כה סימנו איברים מ-S_n בצורה של טבלה שמתארת, לפי הסדר, לאן עובר כל מספר ב-$\{1, \dots, n\}$. למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 7 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

בדרך זו ניתן לכתוב כל פונקציה, לאו דווקא תמורה, מהקבוצה $\{1, \dots, n\}$ לעצמה. מסתבר שישנה דרך יעילה יותר לרישום תמורות שגם מנצלת את התכונות המיוחדות של תמורה כפונקציה חח"ע ועל: כתיב מחזורים. כתיב זה קצר יותר, וכפי שנראה להלן, גם מציג בצורה מאירת עיניים תכונות חשובות