

Exercice 1 : On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}, \quad b = \frac{\sqrt{39} - 12}{\sqrt{10}}.$$

1. Montrer que $a \geq 0$.
2. Calculer a^2 et b^2 .
3. Comparer a et b puis $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

Exercice 2 : Soient a et b deux nombres réels tels que : $a \geq 1$ et $b \geq 1$. On pose :

$$x = \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad y = \sqrt{ab + 1}.$$

1. Montrer que : $x^2 - y^2 = (a - 1)(1 - b)$.
2. Comparer x et y .
3. Application : comparer les nombres $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $\sqrt{6} + 1$.

Exercice 3 :

Soit x un nombre réel tel que $5 \leq x \leq 7$. On pose : $A = x^2 - 2x - 8$.

1. Encadrer l'expression A .
2. a) Vérifier que $A = (x - 4)(x + 2)$.
b) En déduire un autre encadrement de A .
3. a) Vérifier que $A = (x - 1)^2 - 9$.
b) En déduire un autre encadrement de A .
4. Quel est le meilleur encadrement de A ?

Exercice 4: Soient x et y deux nombres réels tels que : $1 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$. On pose :

$$A = x^2 - y^2 + x + y.$$

1. Encadrer l'expression A .
2. a) Vérifier que $A = (x + y)(x - y + 1)$.
b) En déduire un autre encadrement de A .
3. Déduire que $\frac{3}{4} \leq A \leq \frac{29}{4}$.

Exercice 5 : Soient x et y deux nombres réels tels que :

$$|x - 2| < \frac{1}{2}, \quad |y| \leq \frac{1}{2}.$$

Montrer que :

$$1 < \frac{2x}{x - y} < 5.$$

Exercice 6 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $|2x - 3| = 8$.
2. $|x - \frac{2}{3}| = -1$.
3. $|x + 8| = |2x - 1|$.
4. $||x| - 3| = |4x + 5|$.
5. $|x + 2| = |x - 3|$.

Exercice 7 : Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $|x| \leq 3$.
2. $|x| \geq 3$.
3. $|1 - x| \geq 4$.
4. $|7 - 2x| > 1$.
5. $1 \leq |x + 2| \leq 2$.

Exercice 8 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. a) Montrer que $1 + \sqrt{1 + a} > 2$.
b) En déduire que $0 < \frac{1}{1 + \sqrt{1 + a}} < \frac{1}{2}$.
c) Montrer que $1 < \sqrt{1 + a} < 1 + \frac{a}{2}$.
d) Donner un encadrement du nombre $\sqrt{1.04}$.
2. a) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a + 1}} = \sqrt{a + 1} - \sqrt{a}$.
b) En déduire la valeur de la somme

$$S = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$$

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$.
2. On considère les nombres :

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{99}{100}, \quad B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{98}{99}.$$

- (a) Montrer que $A < B$.
- (b) Calculer le produit $A \times B$.
- (c) En déduire que $A < \frac{1}{10} < B$.