

Lycée: El maghreb el arabi	<b>Série 3 :</b> <b>L'ordre dans <math>\mathbb{R}</math></b>	Niveau : T.C.S.F
Année scolaire : 2025/2026		Prof : Jamal ATTMANI

**Exercice 1 :** On considère les nombres  $a$  et  $b$  tels que :

$$a = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}, \quad b = \frac{\sqrt{39} - 12}{\sqrt{10}}.$$

1. Montrer que  $a \geq 0$ .
2. Calculer  $a^2$  et  $b^2$ .
3. Comparer  $a$  et  $b$  puis  $\frac{1}{a}$  et  $\frac{1}{b}$ .

**Exercice 2 :** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que :  $a \geq 1$  et  $b \geq 1$ . On pose :

$$x = \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad y = \sqrt{ab+1}.$$

1. Montrer que :  $x^2 - y^2 = (a-1)(1-b)$ .
2. Comparer  $x$  et  $y$ .
3. Application : comparer les nombres  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  et  $\sqrt{6} + 1$ .

**Exercice 3 :**

Soit  $x$  un nombre réel tel que  $5 \leq x \leq 7$ . On pose :  $A = x^2 - 2x - 8$ .

1. Encadrer l'expression  $A$ .
2. a) Vérifier que  $A = (x-4)(x+2)$ .  
b) En déduire un autre encadrement de  $A$ .
3. a) Vérifier que  $A = (x-1)^2 - 9$ .  
b) En déduire un autre encadrement de  $A$ .
4. Quel est le meilleur encadrement de  $A$  ?

**Exercice 4 :** Soient  $x$  et  $y$  deux nombres réels tels que :  $1 \leq x \leq 2$  et  $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$ . On pose :

$$A = x^2 - y^2 + x + y.$$

1. Encadrer l'expression  $A$ .
2. a) Vérifier que  $A = (x+y)(x-y+1)$ .  
b) En déduire un autre encadrement de  $A$ .
3. Déduire que  $\frac{3}{4} \leq A \leq \frac{29}{4}$ .

**Exercice 5 :** Soient  $x$  et  $y$  deux nombres réels tels que :

$$|x-2| < \frac{1}{2}, \quad |y| \leq \frac{1}{2}.$$

Montrer que :

$$1 < \frac{2x}{x-y} < 5.$$

**Exercice 6 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $|2x-3| = 8$ .
2.  $|x - \frac{2}{3}| = -1$ .
3.  $|x+8| = |2x-1|$ .
4.  $||x|-3| = |4x+5|$ .
5.  $|x+2| = |x-3|$ .

**Exercice 7 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $|x| \leq 3$ .
2.  $|x| \geq 3$ .
3.  $|1-x| \geq 4$ .
4.  $|7-2x| > 1$ .
5.  $1 \leq |x+2| \leq 2$ .

**Exercice 8 :** Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .

1. a) Montrer que  $1 + \sqrt{1+a} > 2$ .  
b) En déduire que  $0 < \frac{1}{1 + \sqrt{1+a}} < \frac{1}{2}$ .  
c) Montrer que  $1 < \sqrt{1+a} < 1 + \frac{a}{2}$ .  
d) Donner un encadrement du nombre  $\sqrt{1.04}$ .
2. a) Montrer que  $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$ .  
b) En déduire la valeur de la somme

$$S = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$$

**Exercice 9 :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$ .
2. On considère les nombres :

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{99}{100}, \quad B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{98}{99}.$$

- (a) Montrer que  $A < B$ .
- (b) Calculer le produit  $A \times B$ .
- (c) En déduire que  $A < \frac{1}{10} < B$ .