Dérivation _ Étude de fonctions

I. Nombre dérivé et tangente

Définition. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.*

— *On dit que f est **dérivable en** a s'il existe un réel l tel que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l.$$

*Le nombre l, noté $f'(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}(a)$, est appelé **nombre dérivé** de f en a.*
Dans ce cas, la courbe représentative de f admet en $A(a, f(a))$ une tangente d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

La fonction affine

$$x \longmapsto f'(a)(x-a) + f(a)$$

*est appelée **approximation affine** de f au voisinage de a et on écrit*

$$f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a) \quad \text{au voisinage de } a.$$

— *On dit que f est **dérivable à droite en** a s'il existe un réel l_d tel que*

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l_d.$$

*Le nombre l_d, noté $f'_d(a)$, est appelé **dérivée à droite** de f en a. De même on définit la dérivabilité à gauche en a.*

Exemple. *On considère la fonction f définie sur $]-\infty, 1]$ par*

$$f(x) = x + 1 + 2\sqrt{1-x}.$$

Dérivabilité en -3 : *On calcule*

$$\lim_{x\to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x+3}.$$

Après rationalisation et simplification, on obtient

$$\lim_{x\to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \frac{1}{2}.$$

Donc f est dérivable en -3 et

$$f'(-3) = \frac{1}{2}.$$

La tangente à la courbe en $x=-3$ a pour équation

$$y = f'(-3)(x+3) + f(-3) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}.$$

On peut alors donner une valeur approchée de $f(-2{,}999)$:

$$f(-2{,}999) \approx g(-2{,}999) = \frac{1}{2}(-2{,}999) + \frac{7}{2} \approx 2{,}0005,$$

où $g(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$ est la fonction affine tangente.

Remarque. — *Si* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$, *alors* (C_f) *admet une tangente horizontale au point* $A(a, f(a))$.

— *Si* f *est continue en* a *et* $\lim_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ *ou* $\lim_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, *alors* (C_f) *admet une demi-tangente verticale au point* $A(a, f(a))$.

Propriété. *f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et si*

$$f'_g(a) = f'_d(a).$$

Remarque. *Si $f'_g(a) \neq f'_d(a)$, la courbe admet en $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes non parallèles : A est alors un* ***point anguleux***.

II. Opérations sur les fonctions dérivable-Monotonie d'une fonction

Propriété. — *Toute fonction polynomiale est dérivable sur* $\mathbb{R}$.

— *Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.*

— *Les fonctions* $x \mapsto \cos x$ *et* $x \mapsto \sin x$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$.

<u>Tableau des fonctions dérivées usuelles :</u>

Fonction f	**Dérivée f' et domaine**
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Propriété (Opérations sur les fonctions dérivables)**.** *Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

— *$f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.*

— *λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.*

— *fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.*

— *Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

— *Si* $f(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in I$, *alors* $\dfrac{1}{f}$ *est dérivable sur* I *et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

— *Si* $f(x) > 0$ *pour tout* $x \in I$, *alors* $\sqrt{f}$ *est dérivable sur* I *et*

$$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}.$$

Application. *I. On considère* g *définie sur* $[0, +\infty[$ *par*

$$g(x) = x\sqrt{x} - 1.$$

1. *Étudier la dérivabilité de* g *à droite en* 0 *et interpréter graphiquement.*
2. *Montrer que* g *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *puis calculer* $g'(x)$.
3. *Dresser le tableau de variations de* g.
4. *Calculer* $g(1)$ *puis déduire le signe de* g *sur* $[0, +\infty[$.

II. Soit f *définie sur* $]0, +\infty[$ *par*

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{\sqrt{x}}.$$

1. *Montrer que, pour tout* $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{x\sqrt{x}}.$$

2. *Étudier les variations de* f.
3. *Dresser le tableau de variations de* f.
4. *En déduire que, pour tout* $x > 0$,

$$f(x) \geq 3.$$

III. Dérivée de la fonction composée

Activité. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = \cos(x); g(x) = x^2 - 2x$

1. *Calculer* $f'(x)$ *et* $g'(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Calculer* $f'(x) \times g'(f(x))$.
3. *Soit* $h(x) = (gof)(x)$. *Déterminer* $h(x)$ *puis calculer* $h'(x)$.
4. *Comparer* $h'(x)$ *et* $f'(x) \times g'(f(x))$.

Propriété (Dérivée d'une composée)**.** *Soient* f *et* g *deux fonctions.*

— *Si* f *est dérivable en* a *et* g *dérivable en* $f(a)$, *alors la fonction composée*

$$h = g \circ f$$

est dérivable en a *et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

— *Si f est dérivable sur un intervalle I et g dérivable sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Exemple. *On veut dériver $h : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ sur $]0, +\infty[$.*

On écrit $h = g \circ f$ avec

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \cos x.$$

On sait que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et g dérivable sur $\mathbb{R}$, donc h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = (-\sin(\sqrt{x})) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

Application. *Calculer la dérivée des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \sin\left(x^2 - \frac{2}{3}x + 4\right), \qquad g(x) = \cos\left(\frac{4}{x^2+4}\right).$$

IV. Dérivée de la Fonction réciproque

Propriété. *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $a \in I$.*

— *Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

— *Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et, pour tout $x \in J$,*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Application. *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$.*

1. *Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$.*
2. *a) Calculer $f(1)$.*
   b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 puis déterminer $(f^{-1})'(2)$.

Conséquence. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.*

-La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

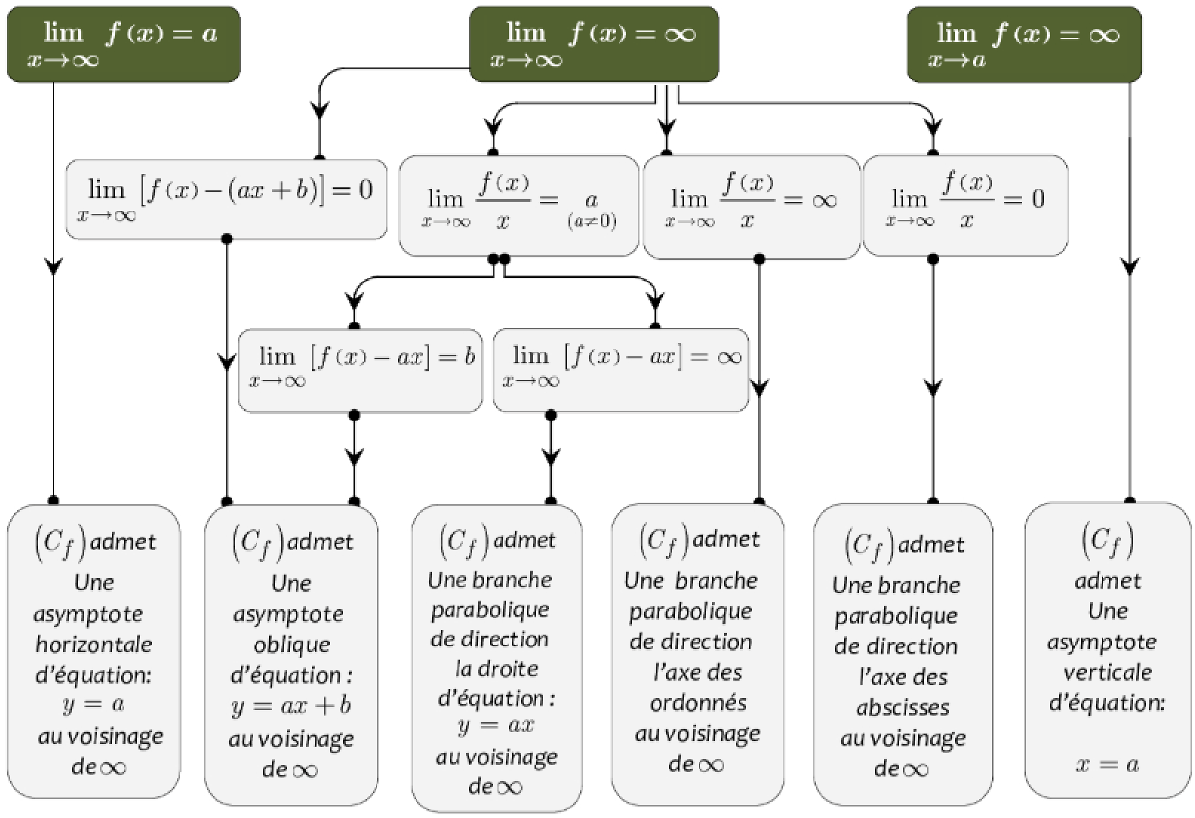
-Si f est dérivable sur un intervalle I et $f(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est dérivable sur I et

$$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{n\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^{n-1}}.$$

Application. *Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :*

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$,
b) $f(x) = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$,

V. Branches infinies (Rappels)



VI. Concavité d'une courbe - Point d'inflexion

Propriété. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe.*

- *Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors (C_f) est **convexe** sur I.*
- *Si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors (C_f) est **concave** sur I.*
- *Si $f''(a) = 0$ et change de signe en a, alors $A(a, f(a))$ est un **point d'inflexion**.*

Application. *On considère f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par*

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}.$$

Étudier la concavité de (C_f) et préciser les points d'inflexion éventuels.

VII. Éléments de symétrie d'une courbe

1. Centre de symétrie

Propriété. *Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C_f) sa courbe.*
*Le point $\Omega(a, b)$ est un **centre de symétrie** de (C_f) si et seulement si*

$$\forall x \in D, \quad 2a - x \in D \quad \text{et} \quad f(2a - x) + f(x) = 2b.$$

Application. *On considère* $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x+2}$.

Montrer que le point $\Omega(-2,-3)$ *est un centre de symétrie de la courbe de* f.

2. Axe de symétrie

Propriété. *Soit* f *une fonction définie sur un ensemble* D *et* (C_f) *sa courbe.*

La droite (Δ) *d'équation* $x = a$ *est un* ***axe de symétrie*** *de* (C_f) *si et seulement si*

$$\forall x \in D, \quad 2a - x \in D \quad \textit{et} \quad f(2a-x) = f(x).$$

Application. *Montrer que la droite* $(\Delta) : x = 1$ *est un axe de symétrie de la courbe de la fonction*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}.$$