Continuité

I. Continuité d'une fonction numérique

1. Continuité en un point

Définition. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.*
*On dit que f est **continue en** a si et seulement si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

*Dans le cas contraire, on dit que f est **discontinue en** a.*

Exemple. *1. On considère la fonction définie par*

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \quad \text{si } x \neq 3, \qquad f(3) = 6.$$

Pour $x \neq 3$, on a

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3.$$

Ainsi

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}(x+3) = 6 = f(3),$$

donc f est continue en 3.

2. On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \qquad f(0) = 1.$$

On a

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \to 0} 3\frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \neq f(0),$$

donc f est discontinue en 0.

Application. *Étudier la continuité des fonctions suivantes au point a.*

1. $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-2x+1}{x-1}; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ *et $a = 1$.*
2. $\begin{cases} g(x) = \frac{x\sqrt{x+2}-4}{x-2}; \quad x \in [-2;2[\cup]2;+\infty[\\ g(2) = \frac{5}{2} \end{cases}$ *et $a = 2$.*

2. Continuité à droite et à gauche

Définition. — *Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a-r, a]$ avec $r > 0$. On dit que f est **continue à gauche en** a si*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

— *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, a+r[$ avec $r > 0$. On dit que f est **continue à droite en** a si*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Exemple. *On considère la fonction*

$$f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} \quad \text{si } x \neq 1, \qquad f(1) = 2.$$

Pour $x > 1$, $|x-1| = x-1$ *donc*

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2 = f(1).$$

f *est donc continue à droite en* 1.

Pour $x < 1$, $|x-1| = -(x-1)$ *donc*

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-}(-(x+1)) = -2 \neq f(1).$$

f *est discontinue à gauche en* 1.

Propriété. f *est continue en* a *si et seulement si* f *est continue à gauche et à droite en* a*, c'est-à-dire :*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

Application.

1. *Soit* f *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{si } x > 2, \\ \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} & \text{si } x \leq 2. \end{cases}$$

   Étudier la continuité de f *à droite et à gauche en* 2.

2. *Soit* g *définie par*

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + ax & \text{si } x > -1, \\ -x+1 & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

   Déterminer la valeur de a *pour que* g *soit continue en* -1.

3. Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition.

— f *est* ***continue sur l'intervalle ouvert*** $]a,b[$ *si elle est continue en tout point de* $]a,b[$.

— f *est* ***continue sur*** $[a,b]$ *si elle est continue en tout point de* $]a,b[$*, continue à droite en* a *et continue à gauche en* b.

Remarque. *On définit de manière analogue la continuité sur les intervalles* $[a,b[$, $]a,b]$, $[a,+\infty[$ *et* $]-\infty,b]$.

Propriété.

— *Toute fonction polynomiale est continue sur* $\mathbb{R}$.

— *Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.*

— *Les fonctions* $x \mapsto \sin x$ *et* $x \mapsto \cos x$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$.

— *La fonction* $x \mapsto \tan x$ *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.
— *La fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$.
— *La fonction* $x \mapsto |x|$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Application. *On considère* f *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4 & \text{si } x < 3, \\ \dfrac{6-x}{x} & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Montrer que f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

II. Image d'un intervalle par une fonction continue

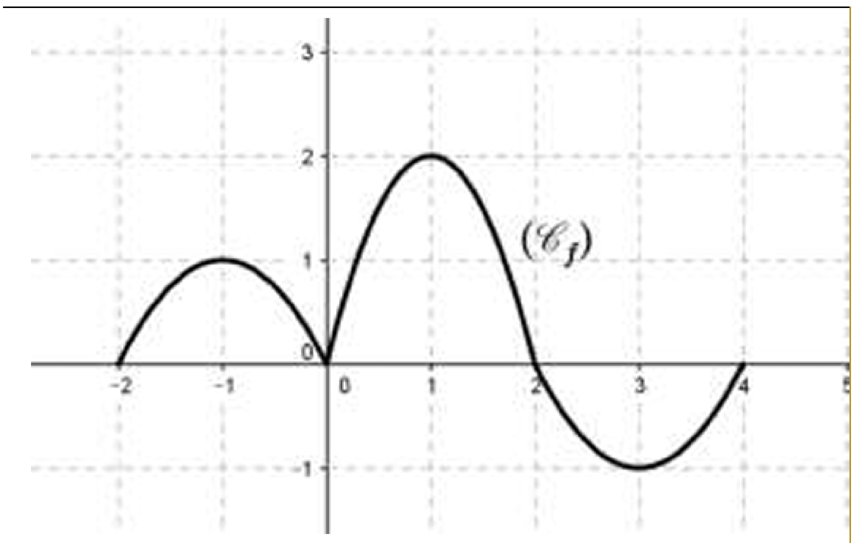
1. Image d'un segment-Image d'un intervalle

Propriété. — *L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*
— *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Remarque. *Si* f *est continue sur un segment* $[a, b]$ *et* M *et* m *sont respectivement le maximum et le minimum de* f *sur* $[a, b]$*, alors*

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Exemple. *On donne la courbe d'une fonction* f *définie sur* $[-2, 4]$. *On demande de déterminer* $f([-2, 3])$, $f([0, 1])$, $f([1, 3])$ *et* $f(]-1, 1])$ *à partir du graphique.*



Propriété (Cas d'une fonction monotone)**.** *Soit* f *une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle* $I = [a, b]$ *ou variantes (*$[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$*, etc.(a et b sont deux nombres réels ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$*.)). On dispose du tableau suivant :*

Intervalle I	f *strict. croissante*	f *strict. décroissante*
$[a, b]$	$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \to b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b]$	$]\lim_{x \to a^+} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \to a^+} f(x)[$
$]a, b[$	$]\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \to b^-} f(x), \lim_{x \to a^+} f(x)[$

Exemple. *On considère* $f(x) = x^2 - 4x - 1$.
f est strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$ *et strictement croissante sur* $[2, +\infty[$.
On peut alors déterminer :

— $f([2, 4]) = [f(2), f(4)] = [-5, -1]$;
— $f([-1, 1]) = [f(1), f(-1)] = [-4, 4]$;
— $f([2, +\infty[) = [f(2), +\infty[= [-5, +\infty[$.

Application. *Soit* $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-4}$.

1. *Déterminer* D_f.
2. *Étudier la monotonie de* f.
3. *Déterminer* $f([0, 1])$, $f(]4, +\infty[)$ *et* $f(]-\infty, 4[)$.

III. Opérations sur les fonctions continues

Propriété. *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

— *Les fonctions* $f + g$, $f \cdot g$, λf *et* $|f|$ *sont continues sur* I.
— *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *la fonction* f^n *est continue sur* I.
— *Si* $g(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in I$, *alors* $\dfrac{1}{g}$ *et* $\dfrac{f}{g}$ *sont continues sur* I.
— *Si* $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in I$, *alors* $\sqrt{f}$ *est continue sur* I.

Application. *Montrer que la fonction f est continue sur I dans les cas suivants :*

1. $f(x) = x^2 + 1 + \sin x$ *sur* $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \cos x \cdot \sqrt{4x^2 + 5}$ *sur* $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \dfrac{4\sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$ *sur* $I =]2, +\infty[$.

Propriété (Continuité de la composée)**.** *Soient f et g deux fonctions.*

— *Si f est continue sur un intervalle I et g continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors la composée*
$$h = g \circ f$$
est continue sur I.

Application. *On considère* $h(x) = \sin(x^2 - 4x + 1)$. *Montrer que h est continue sur* $\mathbb{R}$.

IV. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème . *Soit f une fonction continue sur un segment* $[a, b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que
$$f(c) = k.$$

Propriété. *Soit f une fonction continue sur un segment* $[a, b]$.
Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, *alors l'équation* $f(x) = 0$ *admet au moins une solution dans* $[a, b]$. *Si de plus f est strictement monotone, cette solution est unique.*

Exemple. *Montrons que l'équation* $(E) : x^3 + x^2 + 1 = 0$ *admet une unique solution* α *telle que* $-1 < \alpha < 0$.
On considère f *la fonction définie par* $f(x) = x^3 + x^2 + 1$.
L'équation (E) *est équivalente à l'équation* $f(x) = 0$.
La fonction f *est continue et strictement croissante sur* $[-1; 0]$ *et on a* $f(-1) \times f(0) < 0$.
Donc d'après T.V.I l'équation (E) *admet une solution unique* α *tel que* $-1 < \alpha < 0$.

Donnons un encadrement de $\boldsymbol{\alpha}$ ***d'amplitude 0,25.(la dichotomie)***

On a $-1 < \alpha < 0$, *alors* $\alpha = -\frac{1}{2}$ *ou* $\alpha \in]-1, -\frac{1}{2}[$ *ou* $\alpha \in]-\frac{1}{2}, 0[$.

Or $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$, *alors* $\alpha \neq -\frac{1}{2}$. *Et puisque* $f(-1) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$, *alors* $\alpha \in]-1, -\frac{1}{2}[$ *et l'amplitude de cet encadrement est* $-\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} > 0,25$.

On répète donc le procédé précédent. On a $\alpha \in]-1, -\frac{1}{2}[$, *alors* $\alpha = -\frac{3}{4}$ $\Big(-\frac{3}{4}$ *est le centre de* $\alpha \in]-1, -\frac{1}{2}[$ *)ou* $\alpha \in]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}[$ *ou* $\alpha \in]-1, -\frac{3}{4}[$.

Puisque $f\left(-\frac{3}{4}\right) \neq 0$ *et* $f\left(-\frac{3}{4}\right) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$, *alors* $\alpha \in]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}[$ *et l'amplitude de cet encadrement est* $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 0,25$.

V. Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Activité. *Soit la fonction* f *définie sur l'intervalle* $I = [1, 4]$ *par*

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

1. *Montrer que* f *est continue et strictement croissante sur* I.
2. *Déterminer l'intervalle* J, *image de* I *par* f.
3. *Soit* $x \in J$ *et* $y \in I$. *Montrer que*

$$f(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = 1 + \sqrt{x+1}.$$

4. *On considère la fonction* g *définie sur* J *par*

$$g(x) = 1 + \sqrt{x+1}.$$

   a) *Compléter le tableau suivant :*

x	$f(x)$	$g(x)$
1		$g(-1) =$
2		$g(0) =$
4		$g(8) =$

   b) *Que remarquez-vous ?*

La fonction g est appelée la fonction réciproque de f et on la note par f^{-1}.

Propriété. *Si* f *est continue et strictement monotone sur un intervalle* I, *alors* f *admet une fonction réciproque, notée* f^{-1}, *définie de* $J = f(I)$ *vers* I *telle que :*

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

Conséquence. - $(\forall x \in I) : (f^{-1}\ of)(x) = x$.
- $(\forall x \in J) : (fof^{-1})(x) = x$.

Exemple. *La fonction* $f : x \longmapsto \sqrt{x} + 2$ *est continue et strictement croissante sur* $[0, +\infty[$, *donc* f *admet une fonction réciproque* f^{-1} *continue et strictement croissante sur* $f([0, +\infty[) = [2, +\infty[$. *Déterminons l'expression de* f^{-1} *: Soient* $y \in [0, +\infty[$ *et* $x \in [2, +\infty[$, *on a :*

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y} + 2 = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y} = x - 2 \\ &\Leftrightarrow y = (x-2)^2 \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow y = (x-2)^2$. *Il en résulte :* $(\forall x \in [2, +\infty[) f^{-1}(x) = (x-2)^2$.

Application. 1. *On considère la fonction* f *définie sur* $[1, +\infty[$ *par*

$$f(x) = \sqrt{2x - 4}.$$

a) Déterminer l'intervalle de définition réel effectif de f.

b) Montrer que f *admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur un intervalle* J *à déterminer.*

c) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in J$.

2. *On considère la fonction* g *définie sur* $]-\infty, -1[$ *par*

$$g(x) = \frac{2x+3}{x+1}.$$

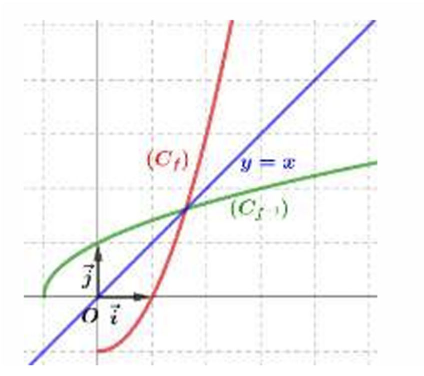
a) Montrer que g *admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur un intervalle* J *à déterminer.*

b) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in J$.

Propriété. *Soit* f *une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle* I.

— *La fonction réciproque* f^{-1} *est continue sur* $f(I)$ *et a le même sens de variation que* f.

— *Les courbes représentatives de* f *et de* f^{-1}, *dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite d'équation* $y = x$.



VI. Fonction racine n-ième

Soit n un entier naturelle tel que : $n \geq 1$ et Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$par $f(x) = x^n$.

- f est une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$ par suite sur $\mathbb{R}^+$.
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, du fait que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f'(x) = nx^{n-1} \geq 0$.

Alors f admet une fonction réciproque f^{-1}, appelée fonction racine $\boldsymbol{n}$-ième, définie sur $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$.

- l'image du nombre x de $\mathbb{R}^+$par f^{-1} est note $\sqrt[n]{x}$ et on a :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right)\left(\forall y \in \mathbb{R}^+\right) : x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$$

Remarque. *pour tout $x \in IR^+$on a :*

- $\sqrt[1]{x} = x$.
- $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.
- $\sqrt[3]{x}$ *est appelée la racine cubique de x.*

Propriété. - $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\, x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$.

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$.
- *La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.*
- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Exemple.

— $\sqrt[4]{16} = 2$, *car* $2^4 = 16$.

— $\sqrt[5]{5} > \sqrt[5]{3}$, *puisque* $5 > 3$ *et la fonction* $x \mapsto \sqrt[5]{x}$ *est croissante.*

— $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[5]{x} = +\infty$.

— *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, $x^5 = 32 \Longleftrightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2$.

Application. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :*

1. $x^7 = 5$;
2. $x^6 = -2$;
3. $x^4 = 81$;
4. $x^5 = -32$;
5. $\sqrt[3]{3x-1} = 2$;
6. $\sqrt[5]{2x-3} < 2$.

Propriété. *Soient a et b deux réels strictement positifs, et $n, p \in \mathbb{N}^*$.*

— $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

— *Si $b \neq 0$, alors*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

— $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$.

— $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$.

— $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$.

Application. *Simplifier les nombres suivants :* $A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{256}}\times\sqrt[4]{64}}{\sqrt[5]{24300000}\times\sqrt[3]{1024}}$ *et* $B = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{3}}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[4]{9}}{\sqrt[5]{729}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$.

Propriété. *Soit f une fonction positive sur l'intervalle I et $x_0 \in I$.*
- *Si f est continue sur I alors $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est continue sur I.*
- *Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \geq 0$ alors $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.*
- *Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.*

(Les deux propriétés précédentes restent vraies au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$)

Application. *1. On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt[3]{3x^2+4}$.*
a. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
b. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Calculer les limites suivantes :
a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$
b. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - 2x$
c. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1} - x$

VII. Puissances rationnelles

Définition. *Soit $a > 0$ et soit r un nombre rationnel tel que*

$$r = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*.$$

On appelle ***puissance rationnelle*** *de base a et d'exposant r le nombre*

$$a^r = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Exemple. *Pour $a > 0$:*

$$3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2}, \qquad 3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{3^5}, \qquad \sqrt[5]{6} = 6^{1/5}, \qquad 2^{-\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^{-5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}.$$

Propriété. *Pour $a, b > 0$ et $r, r' \in \mathbb{Q}$:*
- $a^r \cdot a^{r'} = a^{r+r'}$;
- $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$;
- $\frac{1}{a^r} = a^{-r}$;
- $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$;
- $(ab)^r = a^r\, b^r$;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Application. *Écrire sous la forme d'une seule puissance rationnelle :*

$$A = \frac{\sqrt[3]{4}\times 8^{1/2}\times\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{4}} \quad et \quad B = \frac{27^{2/7}\times 81^{1/4}}{3^{17/3}}.$$