

Netzwerke und Schaltungen II

Übung 7 Maschenstromverfahren

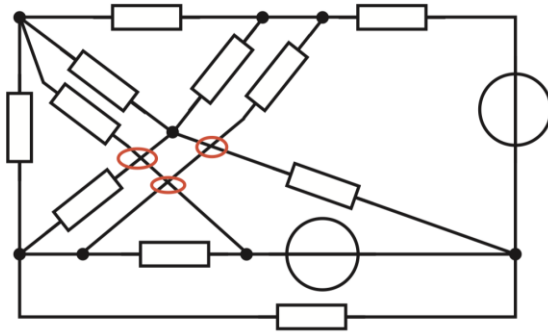


THEORIE FÜR DIE ÜBUNG

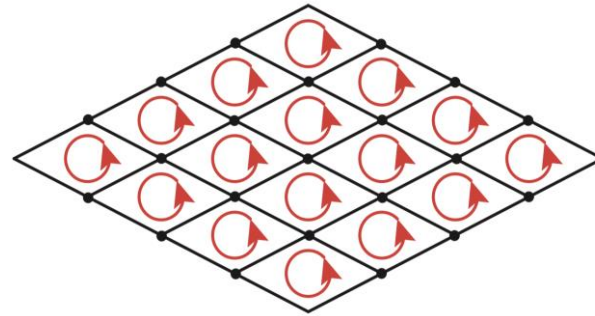
- Berechnung von Strömen und Spannungen in einem elektrischen Netzwerk
- Definition eines *Netzwerkes*:
 - Irgendeine Zusammenschaltung von Netzwerkelementen
 - Zusammenschaltung an deren Klemmen
 - Verbindungsstellen werden *Knoten* genannt
 - Teile zwischen jeweils zwei Knoten werden *Zweige* genannt

Klassifizierung von Netzwerken

- Nicht-kreuzungsfreie Netzwerke
- Kreuzungsfreie (ebene) Netzwerke
 - Zweige des Netzwerks schneiden sich nur in Knoten
 - Treten in der Praxis häufig auf

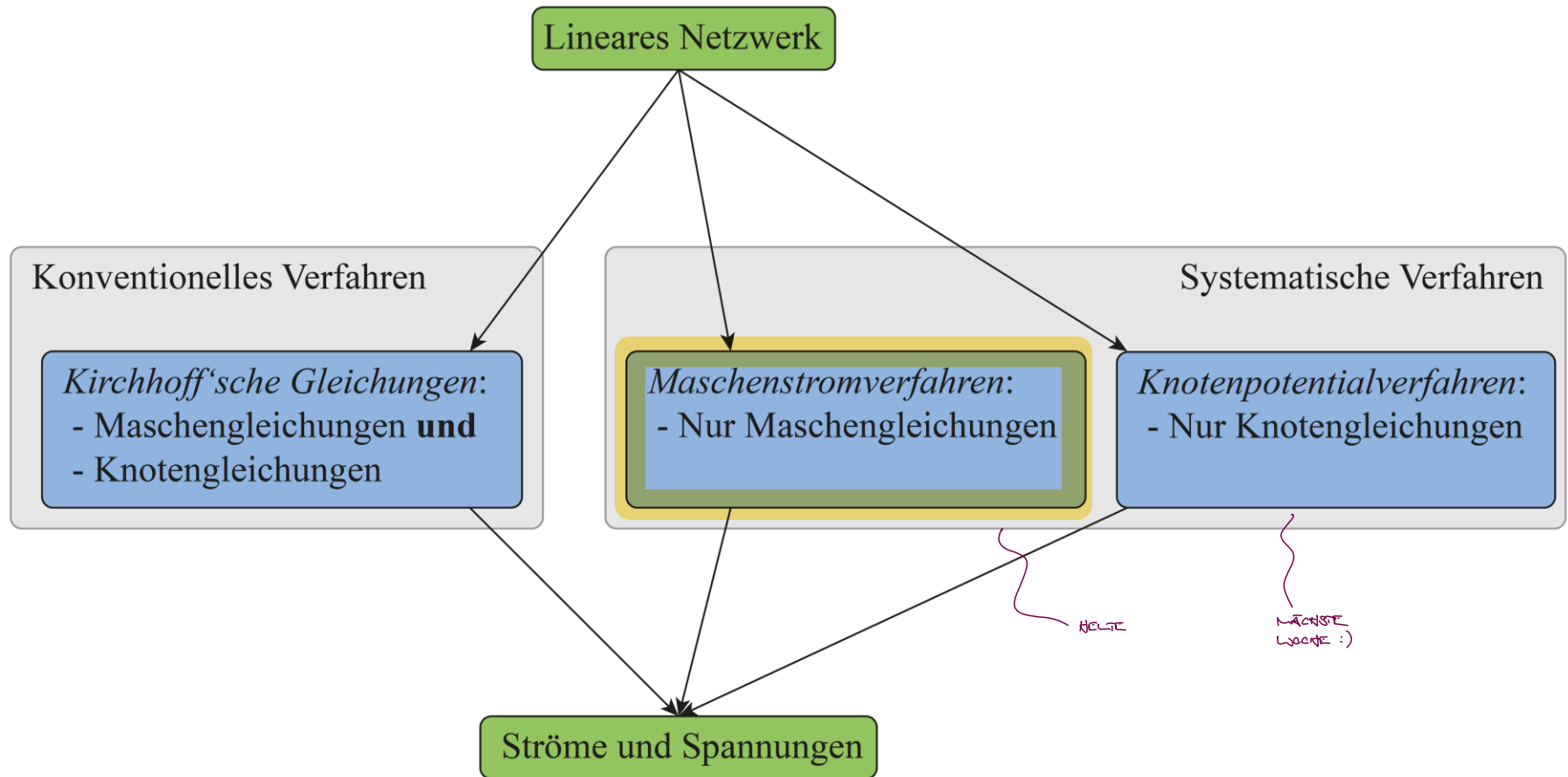


Nicht-kreuzungsfreies Netzwerk



Kreuzungsfreies (ebenes) Netzwerk

- Lineare Netzwerkelemente:
 - Widerstand
 - Induktivität
 - Kondensator
 - Unabhängige Quellen
 - Gesteuerte (abhängige) Quellen
 - Transformator (Übertrager)
- Nicht-lineare Netzwerkelemente (werden hier nicht behandelt)
 - (z.B. Dioden)

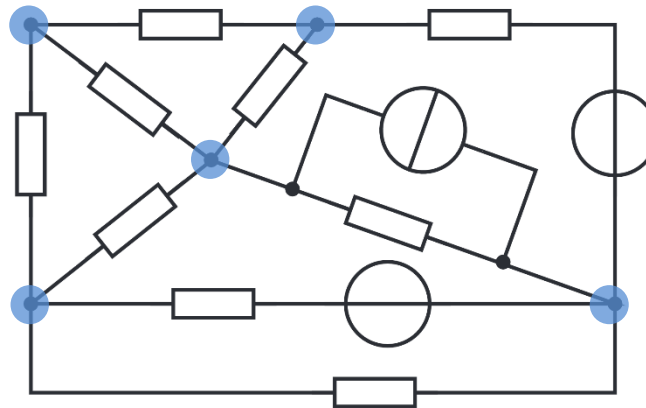


Konventionelles Verfahren

- Gegeben: Netzwerk mit K Knoten und Z Zweigen.
- Für die Berechnung der Z Zweiggrößen müssen
 - $K - 1$ linear unabhängige Knotengleichungen **und**
 - $Z - (K - 1)$ linear unabhängige Maschengleichungen aufgestellt werden.

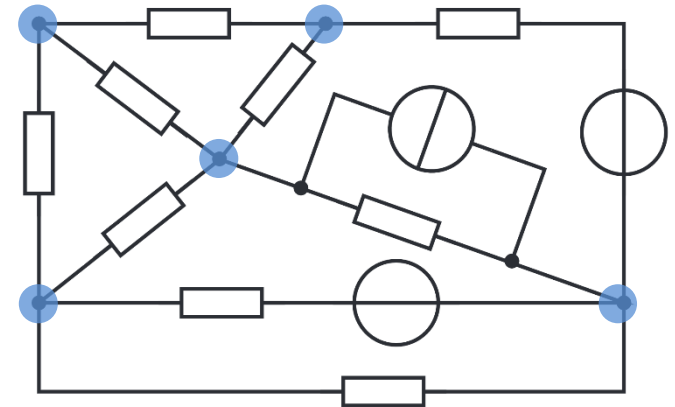
$$\hookrightarrow (K - 1) + [Z - (K - 1)] = \underline{Z}$$

- Beispielnetzwerk:
 - Netzwerk mit $K = 5$ Knoten und $Z = 9$ Zweigen
 - Konventionelles Verfahren: 9 Gleichungen



Konzept des Maschenstromverfahrens

- Anzahl Gleichungen durch das Einführen von virtuellen *Maschenströmen* reduzieren.
- Diese Maschenströme werden in den *linear unabhängigen Maschenumläufen* des Netzwerks definiert.
- Die Maschenströme erfüllen die Knotengleichungen von vornherein, da sie jeweils in einen Knoten hinein- und wieder hinausfließen.
- Es müssen nur noch $Z - (K - 1)$ Maschengleichungen aufgestellt werden.
- Beispielnetzwerk:
 - Netzwerk mit $K = 5$ Knoten und $Z = 9$ Zweigen
 - Konventionelles Verfahren: 9 Gleichungen
 - **Maschenstromverfahren: 5 Gleichungen**



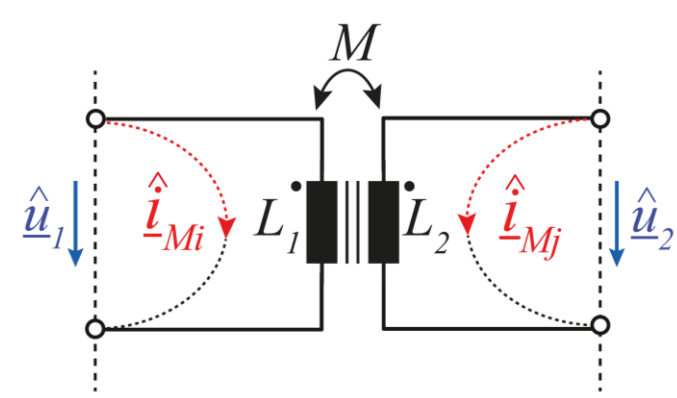
- Wie können die unabhängigen Maschen des Netzwerks ermittelt werden?
- *Elementarmaschen:*
 - Einfaches Verfahren für die in der Praxis häufig auftretenden ebenen Netzwerke.
 - Elementarmaschen sind alle Maschen, in deren Inneren sich keine Zweige befinden.
- *Vollständiger Baum:*
 - Formalisiertes Vorgehen für allgemeine Netzwerke (nicht-kreuzungsfreie und ebene Netzwerke)
 - Findet vor allem Anwendung in Berechnungsprogrammen. In der Praxis nicht geeignet.

Transformator

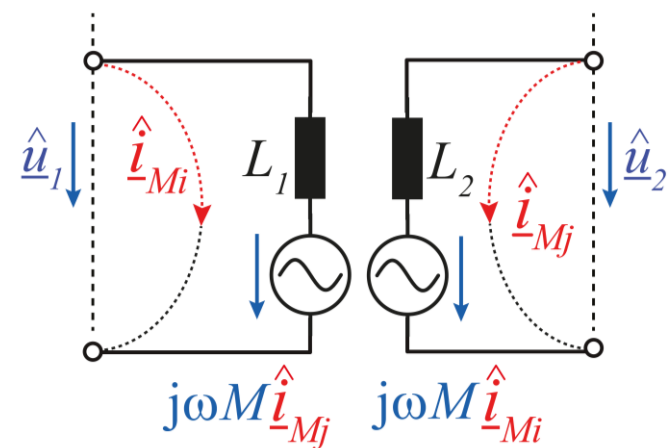
- Jede Transformatorseite wie einen separaten Netzwerkzweig behandeln
- Die entsprechenden Zweigspannungen $\underline{\hat{u}}_1$ und $\underline{\hat{u}}_2$ setzen sich zusammen aus:
 - Spannungsabfall über Selbstinduktivitäten L_1 und L_2 , sowie
 - Induzierte Spannungen $\underline{\hat{u}}_{ind,1}$ und $\underline{\hat{u}}_{ind,2}$ aufgrund der magnetischen Kopplung (Kopplungsinduktivität M) zwischen den Spulen

$$\underline{\hat{u}}_1 = j\omega L_1 \underline{\hat{i}}_{Mi} + \underline{\hat{u}}_{ind,1} \quad \underline{\hat{u}}_{ind,1} = j\omega M \underline{\hat{i}}_{Mj}$$

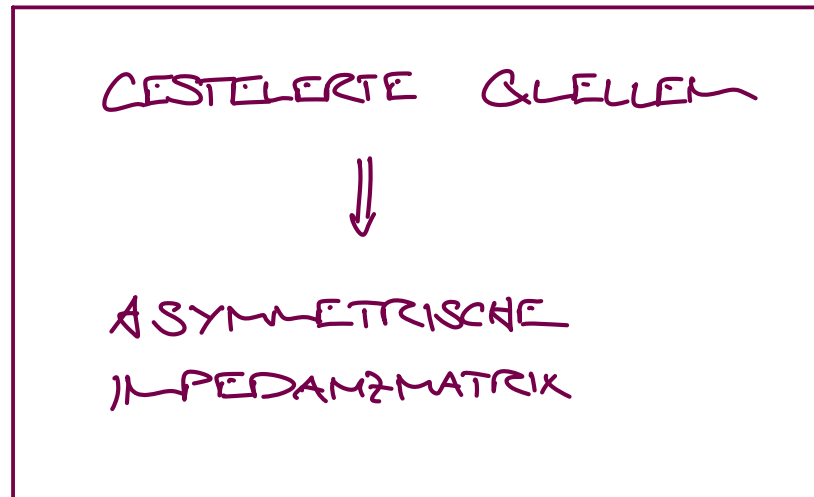
$$\underline{\hat{u}}_2 = j\omega L_2 \underline{\hat{i}}_{Mj} + \underline{\hat{u}}_{ind,2} \quad \underline{\hat{u}}_{ind,2} = j\omega M \underline{\hat{i}}_{Mi}$$



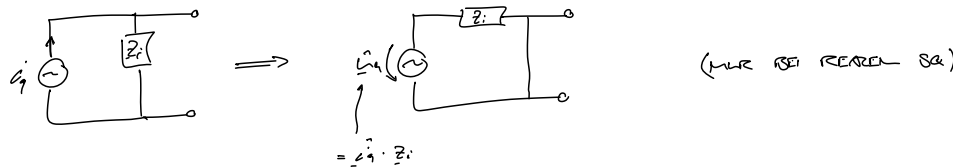
Ersatzschaltung des Transformators



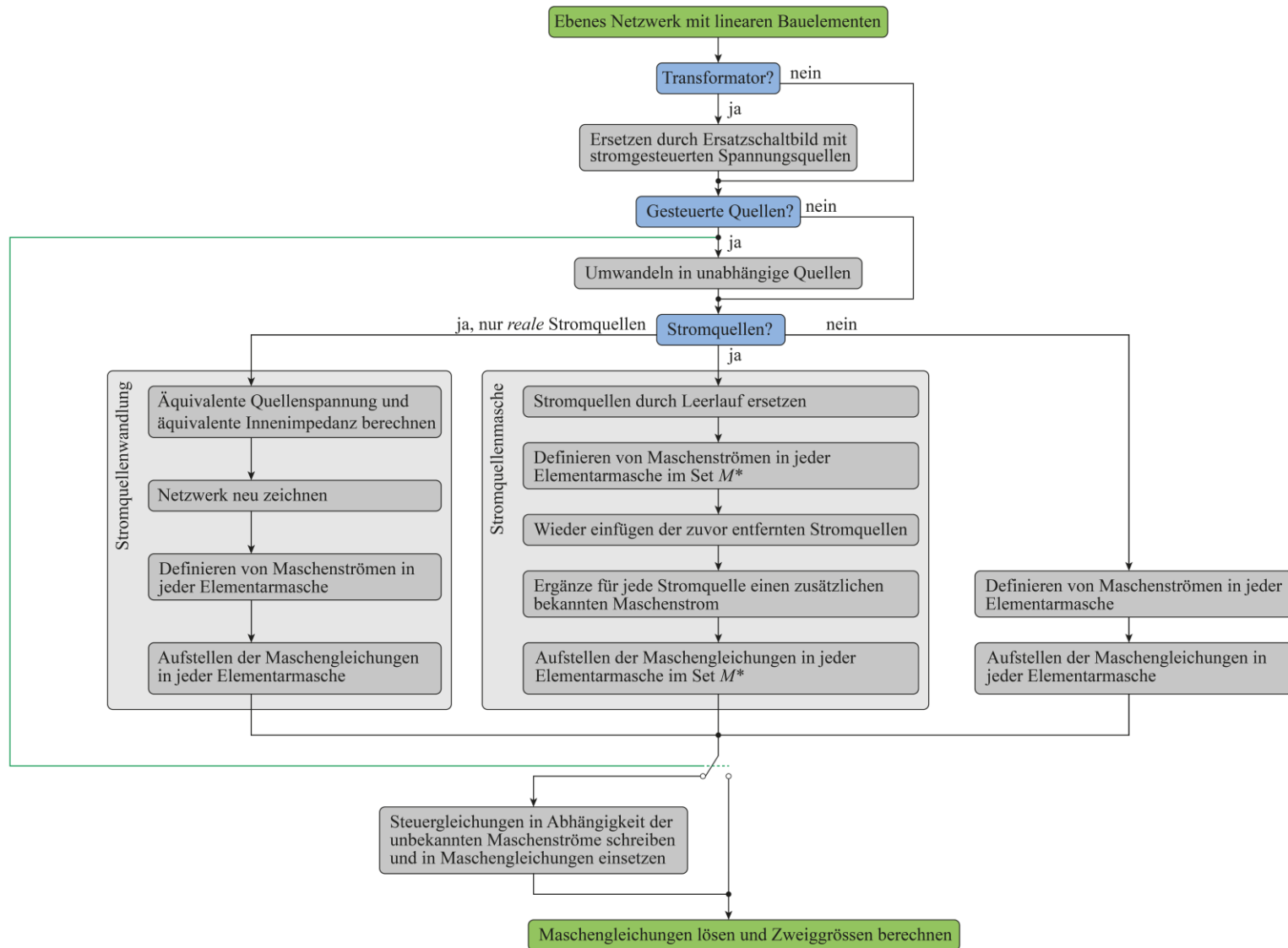
- Gesteuerte Quellen vor dem Aufstellen der Maschengleichungen in unabhängige Quellen umwandeln.
- Maschengleichungen aufstellen
- Steuergleichungen in Abhängigkeit der Maschenströme ausdrücken.
- Anschliessend Steuergleichungen in Maschengleichungen einsetzen und nach Maschenströmen auflösen.



- Stromquellen müssen beim Maschenstromverfahren speziell behandelt werden
- *Stromquellenmaschine:*
 - Bevorzugte Variante, weil anwendbar für reale und ideale Stromquellen
 - Stromquellen aus Netzwerk entfernen (durch Leerläufe ersetzen).
 - Übrig bleibt ein reduziertes Set M^* an Elementarmaschen
 - In diesem Set M^* die Maschenströme definieren
 - Stromquellen wieder hinzufügen und je einen zusätzlichen, bekannten Maschenstrom definieren, der über die jeweilige Stromquelle verläuft.
 - Dieser zusätzliche Maschenstrom ist dabei gleich dem Strom der jeweiligen idealen Stromquelle.
- *Stromquellenwandlung:*
 - Umwandeln einer realen Stromquelle in eine äquivalente Ersatzspannungsquelle.
 - Für ideale Stromquellen nur anwendbar nach einer aufwändigen Quellenteilung und – versetzung.



Kochrezept für ebene Netzwerke in Flowchart-Form



Maschengleichungen lösen

- Mögliche Varianten das Gleichungssystem nach den Maschenströmen aufzulösen:
 - Einsetzungsverfahren
 - Elementare Zeilenumformungen (Gauss'sches Eliminationsverfahren)
 - **Matrixlösung**
- Anhand der berechneten Maschenströmen können anschliessend die gesuchten Zweiggrössen ermittelt werden.
- Formel für Matrixinversen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

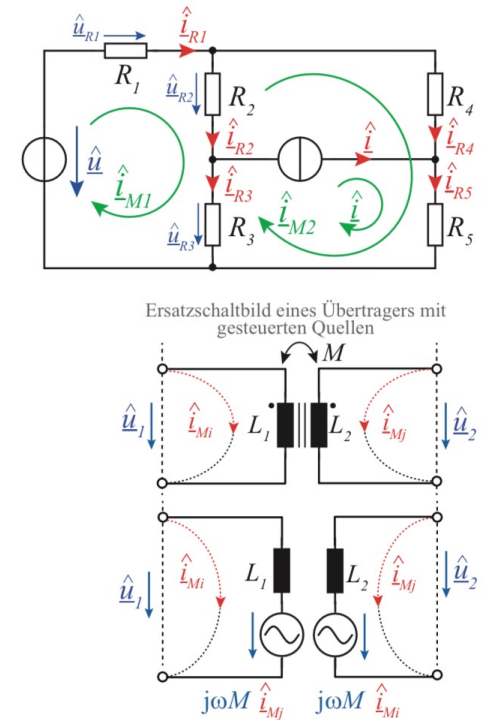
IMPEDANZMATRIZEN
SIND INVERTIERBAR
↳ WARUM?

Was sagt die Zusammenfassung dazu?

Maschenstromverfahren

1. **Vereinfachung:** Vor dem Aufstellen der Gleichungen evtl. Netzwerk vereinfachen und alle gesteuerten Quellen durch unabhängige Quellen ersetzen.
2. **Stromquellenersatz:** Stromquellen durch Leerlauf ersetzen \Rightarrow Elementarmaschen-Set M^*
3. **Maschenströme:** Weise jeder Elementarmasche im Set M^* einen Maschenstrom zu.
4. **Stromquellenmasche:** Füge Stromquellen wieder ein und ergänze für jede Stromquelle einen zusätzlichen bekannten Maschenstrom, der sich über eine beliebige Masche schliessen kann.
5. **Maschengleichungen:** Stelle für jede Elementarmasche im Set M^* die Maschengleichung auf.
6. **Gleichungsumformung:** Umformen des Gleichungssystems:
 - Steuergleichungen der gesteuerten Quellen einsetzen
 - Alle bekannten Quellengrößen auf die "rechte" Seite der Gleichungen bringen
 - Sortieren der Gleichungen nach den Maschenströmen

Anzahl der Gleichungen: $N_M = \text{Zweige} - \text{Knoten} + 1$



- Gesteuerte Quellen durch unabhängige Quellen ersetzen
- Transformatoren durch Ersatzschaltbild ersetzen
- Stromquellen durch Leerläufe ersetzen
- Maschenströme definieren
- Stromquellen wieder als Stromquellenmaschen einsetzen
- Pro Maschenstrom eine Maschengleichung aufstellen
- Gesteuerte Quellen durch Maschenströme ausdrücken
- Gleichungen in Matrixform schreiben
- Matrixinverse berechnen und damit Maschenströme ausrechnen (Man braucht meistens nicht alle Elemente der Inverse, schaut welchen Maschenstrom ihr für die Lösung braucht)

- Knotenpotentialverfahren
- Analoge Idee: Anzahl Gleichungen durch das Einführen von *Knotenspannungen* zu reduzieren...

BEISPIELAUFGABEN

Beispielaufgabe 1

Aufgabe 1 Maschenstromverfahren

Gegeben sei das Netzwerk in Abbildung 1 mit der Spannungsquelle \hat{u}_{q1} , der Stromquelle \hat{i}_{q2} sowie den Widerständen R , $2R$, $3R$ und $4R$. Berechnen Sie den Zweigstrom \hat{i}_2 in Abhängigkeit von \hat{u}_{q1} , \hat{i}_{q2} und R mit Hilfe des Maschenstromverfahrens.

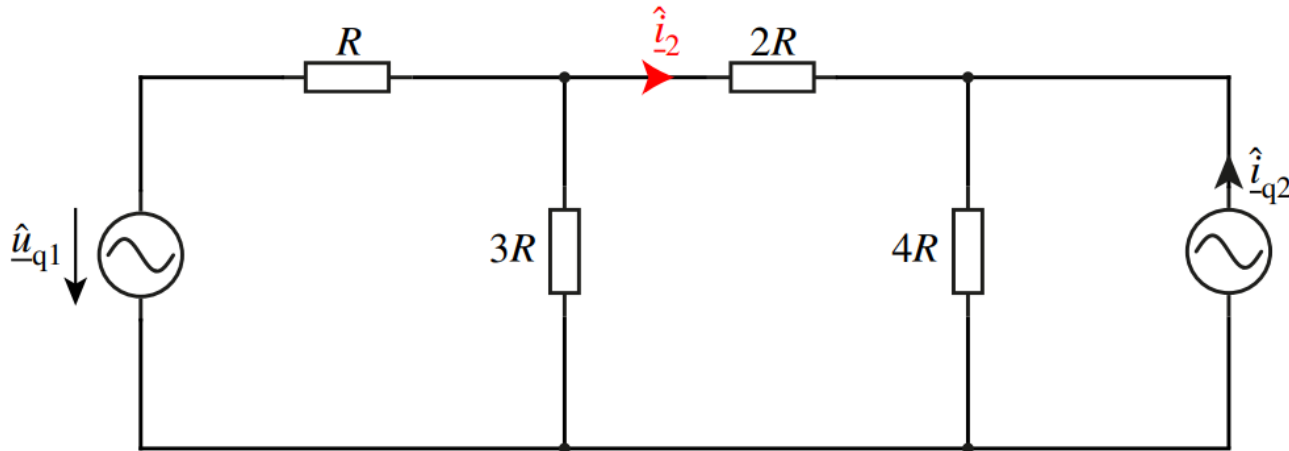


Abbildung 1: Mittels Maschenstromverfahren zu analysierendes Netzwerk. Gesucht ist der Zweigstrom \hat{i}_2 .

Aufgabe 2 Maschenstromverfahren mit gesteuerter Quelle

Gegeben sei das Netzwerk in Abbildung 2 mit der Spannungsquelle \hat{u}_{q1} und der stromgesteuerten Stromquelle $\hat{i}_{q2} = \beta \hat{i}_3$, sowie den Impedanzen \underline{Z}_n mit $n \in [1, 2, 3, 4]$. Stellen Sie die dazugehörigen Maschengleichungen in Matrixform auf.

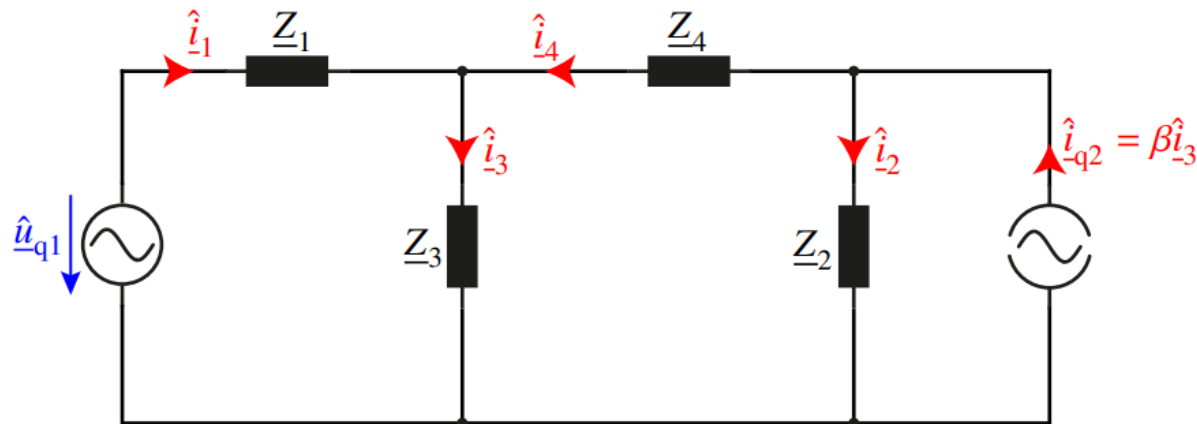


Abbildung 2: Mit dem Maschenstromverfahren zu analysierendes Netzwerk bestehend aus den Impedanzen \underline{Z}_n mit $n \in [1, 2, 3, 4]$, der Konstantspannungsquelle \hat{u}_{q1} und der stromgesteuerten Stromquelle $\hat{i}_{q2} = \beta \hat{i}_3$.