



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich  
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

# Prüfungsvorbereitungskurs Netzwerke und Schaltungen 2

## 1. Halbtag

Janick Matter

FS25

# **1 Vorwort**

In diesem Dokument findet Ihr in Kürze die 'wichtigsten' Konzepte und Themen, welche ich für den Prüfungsvorbereitungskurs (PVK) des Faches "Netzwerke und Schaltungen 2" (Prof. J. Biela) im FS24 zusammengefasst habe. Das Dokument basiert auf den Vorlesungsunterlagen, den Slides der Übungsstunden, und dem Vorlesungsscript, von welchen die meisten Abbildungen stammen. Außerdem basieren der ungefähre Ablauf, sowie die Auswahl einiger Beispielaufgaben auf dem PVK von Maximilian Stralz, welcher den PVK vergangenes Jahr gehalten hatte.

Da ich dieses Semester das erste Mal PVK in NuS2 halte, bin ich für gespottete Typos oder Anregungen und Verbesserungsvorschläge besonders dankbar. Die neuste Version des Skriptes (siehe 2) findet Ihr immer auf meiner Webseite [n.ethz.ch/jamatter/](http://n.ethz.ch/jamatter/) - oder via QR code unten.

Ich wünsche euch alles Gute für eure Prüfungen ;)

[jamatter@student.ethz.ch](mailto:jamatter@student.ethz.ch)



## 2 Überarbeitungen

- 6.6.2025: Initial version
- 7.6.2025:
  - Abschnitt 6.2.3: Typo korrigiert.
  - Abschnitt 4.2.5 Abbildung 6: Typo bezüglich rotierender Zeiger in Abbildung korrigert.
  - Diverse Abschnitte: Unterstrich-Notation für komplexe Werte angefügt.
- 18.6.2025:
  - Abschnitt 5.3: Typo korrigiert.
  - Abschnitt 6.2: Typo korrigiert.
  - Abschnitt 7: Typo korrigiert.
  - Abschnitt 7: Typo korrigiert.

# Contents

<b>1 Vorwort</b>	<b>1</b>
<b>2 Überarbeitungen</b>	<b>2</b>
<b>3 Übersicht</b>	<b>5</b>
<b>4 Basics</b>	<b>6</b>
4.1 Kenngrößen Periodischer Signale . . . . .	6
4.1.1 Winkelgeschwindigkeit . . . . .	6
4.1.2 Spitzenwert (Amplitude) . . . . .	6
4.1.3 Mittelwert . . . . .	6
4.1.4 Spitz-Spitze-Wert . . . . .	6
4.1.5 Effektivwert . . . . .	7
4.1.6 Gleichrichtwert . . . . .	7
4.1.7 Kenngrößen Skizze . . . . .	7
4.2 Zeitbereich vs. Zeigerbereich . . . . .	8
4.2.1 Cosinusförmiges Zeitsignal . . . . .	8
4.2.2 Transformation zu rotierendem Zeiger . . . . .	9
4.2.3 Stille Zeiger . . . . .	10
4.2.4 Rücktransformation zu Zeitsignal . . . . .	10
4.2.5 Zeit zu Zeiger - in a nutshell . . . . .	10
<b>5 Impedanzen</b>	<b>12</b>
5.1 Basics . . . . .	12
5.2 Wirkung in Zeit- und Bildbereich . . . . .	14
5.3 Vorgehen . . . . .	15
<b>6 Schwingkreise und Filter</b>	<b>16</b>
6.1 Resonanz . . . . .	16
6.1.1 Serienschwingkreis . . . . .	16
6.1.2 Parallelschwingkreis . . . . .	18
6.2 Passive Filter . . . . .	19
6.2.1 Grenzfrequenz . . . . .	20
6.2.2 Hochpassfilter . . . . .	21
6.2.3 Tiefpassfilter . . . . .	22
<b>7 Bodeplots</b>	<b>23</b>
7.1 Vorgehen: Bodeplot zeichnen . . . . .	25
7.1.1 Beispiel . . . . .	25

**A Extremstellen von**  $f(x) = |\sin(x) + \sin(2x)|$

**27**

### 3 Übersicht

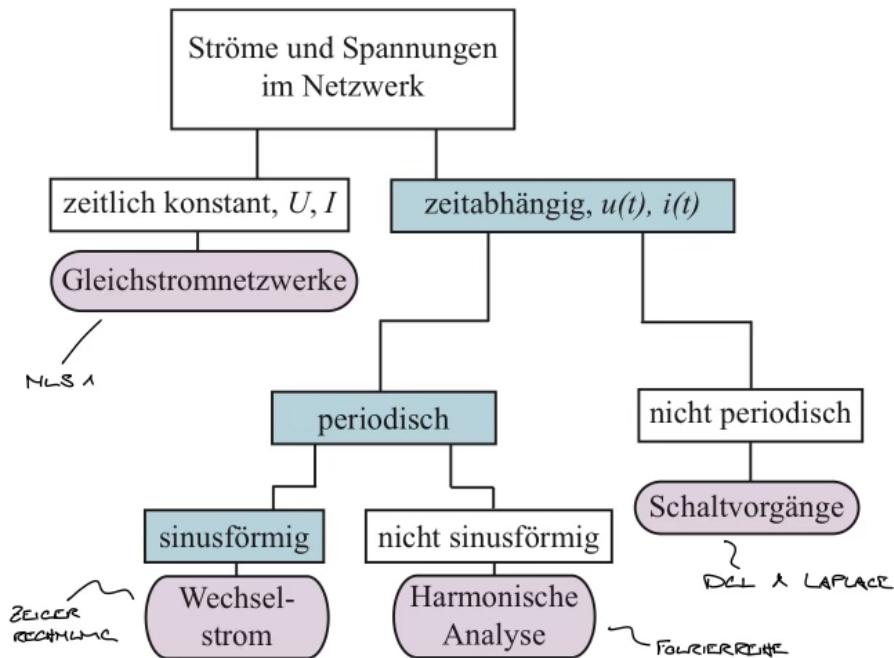


Figure 1: Übersicht möglicher Spannungs- und Stromformen in elektrischen Netzwerken.

## 4 Basics

### 4.1 Kenngrößen Periodischer Signale

Dieser Abschnitt behandelt wichtige fundamentale Kenngrößen periodischer Signale.

#### 4.1.1 Winkelgeschwindigkeit

Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  eines periodischen Signals mit Periodendauer  $T$  ist definiert als:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (1)$$

#### 4.1.2 Spitzenwert (Amplitude)

Der Spitzenwert  $\hat{u}$  eines periodischen Signals  $u(t)$  mit Periodenlänge  $T$  ist definiert als der maximale absolute Wert des Signals über eine vollständige Periodendauer:

$$\hat{u} = \max(|u(t)|) \quad (2)$$

#### 4.1.3 Mittelwert

Der Mittelwert  $\bar{u}$  eines periodischen Signales  $u(t)$  mit Periodenlänge  $T$  ist gegeben durch:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (3)$$

#### 4.1.4 Spitz-Spitze-Wert

Der Spitz-Spitze-Wert  $U_{ss}$  eines periodischen Signals  $u(t)$  mit Periodenlänge  $T$  ist definiert als die Differenz zwischen dem maximalen und dem minimalen Wert des Signals über eine vollständige Periodendauer:

$$U_{ss} = \max(u(t)) - \min(u(t)) \quad (4)$$

#### 4.1.5 Effektivwert

Der Effektivwert, auch als Root Mean Square Value bezeichnet,  $U_{\text{eff}}$  eines periodischen Signals  $u(t)$  mit Periodenlänge  $T$  ist definiert als die quadratische Mittelwert des Signals über eine vollständige Periodendauer:

$$U = U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt} \quad (5)$$

Der Effektivwert eines Wechselstromes, ist definiert durch den Gleichstrom  $I$ , der dieselbe Wärmeleistung in einem Widerstand erzeugen würde.

#### 4.1.6 Gleichrichtwert

Der Gleichrichtwert  $U_{\text{GR}}$  eines periodischen Signals  $u(t)$  mit Periodenlänge  $T$  ist definiert als der Mittelwert der absoluten Werte des Signals über eine vollständige Periodendauer:

$$|\bar{u}| = U_{\text{GR}} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt \quad (6)$$

#### 4.1.7 Kenngrößen Skizze

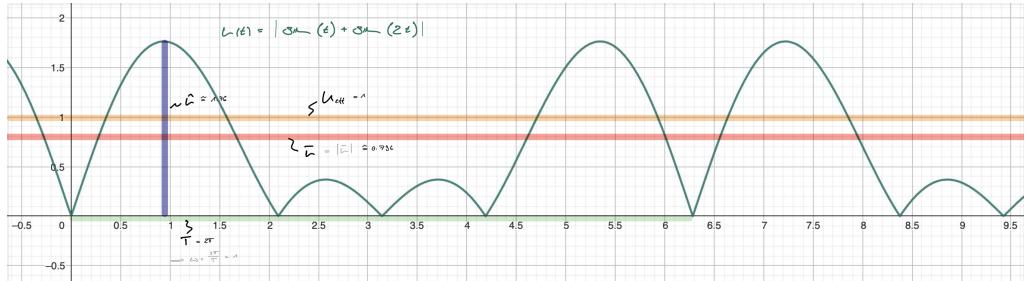


Figure 2: Kenngrößen der Funktion  $u(t) = |\sin(t) + \sin(2t)|$ . Herleitung der Extremstellen (Amplitude) im Anhang A.

## 4.2 Zeitbereich vs. Zeigerbereich

### 4.2.1 Cosinusförmiges Zeitsignal

Damit wir alle messbaren Größen als Realteile von komplexen Werten darstellen können (Konvention), werden wir ausschliesslich Cosinussignale im Zeitbereich verwenden, und müssen Sinussignale zuerst entsprechend umwandeln:

$$\begin{aligned}\cos(t) &= \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin(t) &= \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\tag{7}$$

Zeitsignale haben allgemein folgende Form:

$$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi)\tag{8}$$

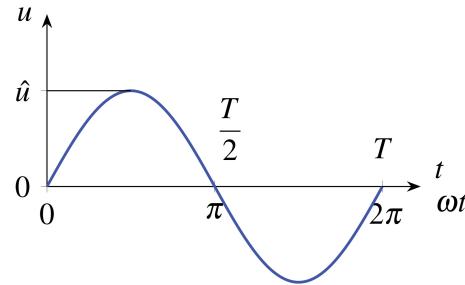


Figure 3: Cosinusförmiges Zeitsignal:  $u(t) = \hat{u} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ .

#### 4.2.2 Transformation zu rotierendem Zeiger

Cosinusförmige Zeitsignale  $u(t)$  (zb. 8) können anschliessend in rotierende Zeiger  $\hat{u}'$  umgewandelt werden:

$$\hat{u}' = \hat{u} e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \hat{u} e^{j(\varphi + j\omega t)} \in \mathbb{C} \quad (9)$$

Dieser Zeiger rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in mathematisch positive Richtung in der komplexen Zahlenebene.

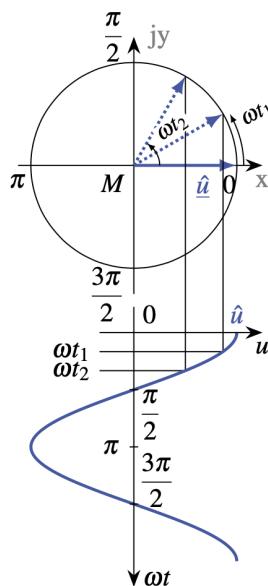


Figure 4: Cosinusförmiges Signal im Zeit- und Bildbereich und  $t_1 < t_2$ .

Falls mehrere Zeiger mit einer Phasendifferenz  $\varphi$ , aber derselben Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotieren, können die Zeiger einerseits addiert werden, und andererseits widerspiegelt sich die (konstante) Phasendifferenz auch im Zeitdiagramm:

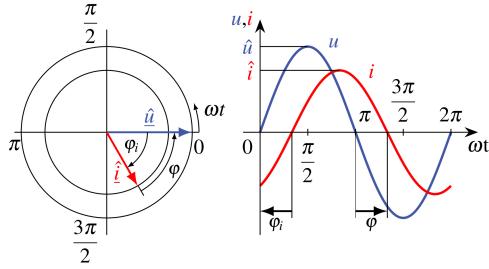


Figure 5: Rotierender Strom und Spannungszeiger mit Phasendifferenz  $\varphi$  im Zeiger- und Zeitbereich.

#### 4.2.3 Stille Zeiger

Im Gegensatz zum Abschnitt 4.2.2 betrachten wir das Signal in Berechnungen oft nur zu einem bestimmten Zeitpunkt, weshalb wir Signale als stille, zeitunabhängige Zeiger  $\underline{\hat{u}}$  darstellen. Das erreichen wir, indem wir den zeitabhängigen Teil der Gleichung 9 ignorieren:

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u} e^{j\varphi} \in \mathbb{C} \quad (10)$$

#### 4.2.4 Rücktransformation zu Zeitsignal

Rotierende Zeiger  $\underline{\hat{u}'}$  wie in Gleichung 9 können mittels Realteilbildung wieder in den Zeitbereich zurücktransformiert werden:

$$u(t) = \operatorname{Re}(\underline{\hat{u}'}) = \operatorname{Re}(\hat{u} e^{j\varphi} e^{j\omega t}) = |\hat{u}| \cos(\omega t + \arg(\hat{u})) \quad (11)$$

#### 4.2.5 Zeit zu Zeiger - in a nutshell

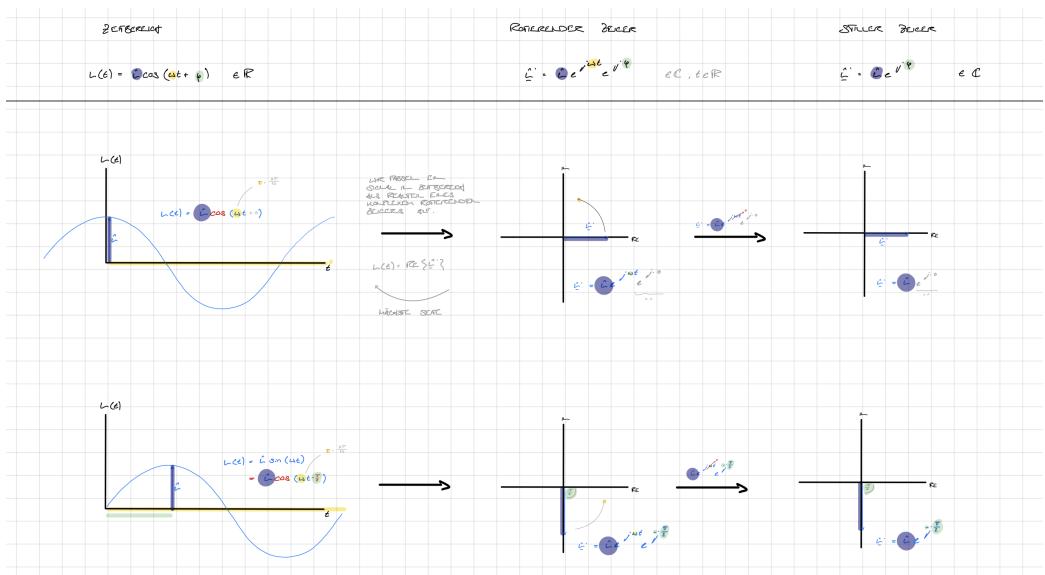


Figure 6: Beispiel: Umwandlung von Zeit- zu Zeigerbereich cosinusförmiger Signale - in a nutshell. Vollständiges Dokument auf der Webseite (Zeit zu Zeiger).

## 5 Impedanzen

Im Folgenden betrachten wir die frequenzabhängigen Impedanzen  $\underline{Z} = R + jX$  von Widerständen, Induktivitäten und Kondensatoren, sowie die Wirkungen der einzelnen Bauteile auf den Zeit- und Bildbereich.

### 5.1 Basics

Die Impedanzen der Bauteile sind gegeben durch:

$$\underline{Z}_R = R \quad (12)$$

$$\underline{Z}_L = j\omega L \quad (13)$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} \quad (14)$$

Aufgrund der Formeln 12-14 wird das Verhalten der Impedanzen für sehr kleine, beziehungsweise Sehr hohe Frequenzen  $\omega$  klar:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \underline{Z}_R = \lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{Z}_R = R \quad (\text{unverändert}) \quad (15)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \underline{Z}_L = \lim_{\omega \rightarrow \infty} j\omega L = \infty \quad (\text{Leerlauf}) \quad (16)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{Z}_L = \lim_{\omega \rightarrow 0} j\omega L = 0 \quad (\text{Kurzschluss}) \quad (17)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \underline{Z}_C = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{j\omega C} = 0 \quad (\text{Kurzschluss}) \quad (18)$$

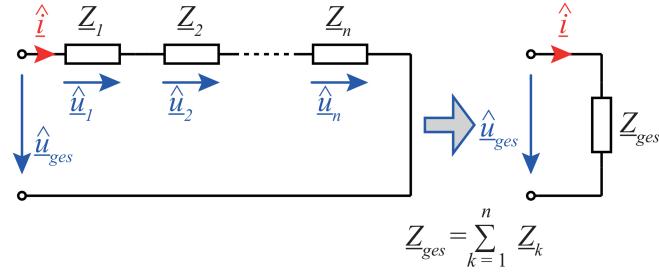
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{Z}_C = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{j\omega C} = \infty \quad (\text{Leerlauf}) \quad (19)$$

Der Kehrwert einer Impedanz nennt man Admittanz  $\underline{Y} = 1/\underline{Z} = G + jB$  wobei  $G$  als Konduktanz und  $B$  als Suszeptanz bezeichnet werden.

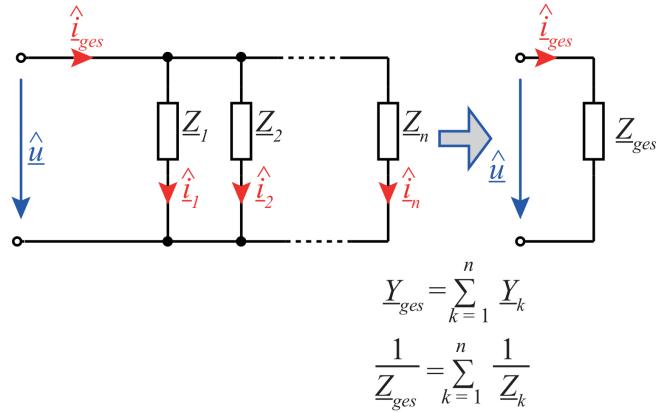
Dabei gilt (analog zur 'URI'-Beziehung in NUS1) generell die 'UZI'-Beziehung, jetzt allerdings im komplexen Zeigerbereich:

$$\hat{\underline{u}} = \underline{Z} \hat{\underline{i}} \quad (20)$$

Es gelten ausserdem die gleichen Formeln zum Berechnen von Gesamtimpedanzen  $\underline{Z}_{Ges} = R + jX$  für Serien- beziehungsweise Parallelschaltungen von Impedanzen, wie bei Gleichstromgrössen.



(a) Serienschaltung von Impedanzen, sowie Berechnung der Gesamtimpedanz  $Z_{Ges}$ .



(b) Parallelschaltung von Impedanzen, sowie Berechnung der Gesamtimpedanz  $Z_{Ges}$ .

Figure 7: Serie und Parallelschaltungen, sowie Berechnung der Gesamtimpedanz bzw. Admittanz.

Des weiteren gelten die Knoten und Maschengleichungen weiterhin auch für Wechselgrößen zu jedem Zeitpunkt, und somit auch im Bildbereich. Spannungs- und Stromteiler gelten auch weiterhin.

Den Realteil  $R$  einer komplexwertigen Impedanz nennt man dabei Wirkwiderstand oder Resistanz, und den Imaginärteil  $X$  Blindwiderstand oder Reaktanz. Impedanzen (später auch Netzwerke) werden je nach Verhalten in zwei Kategorien unterteilt:

- induktiv, falls  $X > 0$
- kapazitiv, falls  $X < 0$

## 5.2 Wirkung in Zeit- und Bildbereich

*In Induktivitäten, die Ströme sich verspäten.  
Im Kondensator geht der Strom vor.*

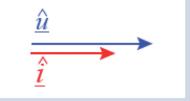
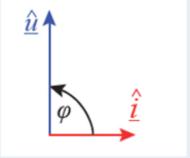
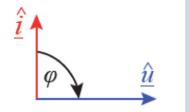
Bauelement	Zeitbereich	Bildbereich	Zeigerdiagramm
Widerstand	$u_R = R \cdot i_R$	$\hat{u}_R = R \cdot \hat{i}_R$	
Induktivität	$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$	$\hat{u}_L = j\omega L \cdot \hat{i}_L$	
Kondensator	$u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i_C dt$	$\hat{u}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \hat{i}_C$ $= -\frac{j}{\omega C} \cdot \hat{i}_C$	

Figure 8: Bauteile, deren Impedanzen und Auswirkungen auf Zeit- und Bildbereich, sowie Zeigerdiagramm.

Tabelle 8 beschreibt die Wirkungen der jeweiligen Bauteile auf den Zeit- sowie Bildbereich und das Zeigerdiagramm. Durch die UZI-Beziehung, und das Einsetzen der Impedanzen im Bildbereich werden die Phasenverschiebungen von  $\pm 90^\circ$  im Zeigerdiagramm zwischen Strom und Spannung für Induktivitäten und Kapazitäten eingeführt.

### 5.3 Vorgehen

Oft werden in Netzwerken mit AC-Strom- oder Spannungsquellen explizit oder implizit verschiedene Teilströme, Teilspannungen oder Impedanzen gesucht. Für 'simple', lineare Netzwerke mit nur einer Quelle kann folgendermassen vorgegangen werden:

1. Transformation in den Bildbereich
  - Spannungs- und Stromsignale vom Zeitbereich in komplexe (stille) Zeiger umwandeln:  $u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{u} = \hat{u} e^{j\varphi} \in \mathbb{C}$
2. Impedanzen aller Bauteile mit Formeln 12-14 berechnen  $\rightarrow$  Gesamtmpedanz berechnen.
3. Analyse im Bildbereich:
  - Spannungs-/Stromteiler
  - Knoten-/Maschengleichungen
  - "UZI"-Beziehungen
4. (Falls gefragt: Zeigerdiagramm zeichnen).
5. Rücktransformation der gesuchten Grösse in den Zeitbereich:
  - $\underline{u} = \hat{u} e^{j\varphi} \rightarrow u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi)$ , wobei  $\hat{u} = \sqrt{\text{Im}^2 + \text{Re}^2}$  und  $\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right)$

# 6 Schwingkreise und Filter

## 6.1 Resonanz

In Serien- und Parallelschwingkreisen tritt Resonanz auf, wenn die Gesamtimpedanz (an der Resonanzfrequenz  $f_0$ ) minimal wird - sich also die Imaginärteile der Teilimpedanzen gerade aufheben. Die Güte beschreibt, wie stark der Schwingkreis schwingen kann, und Dämpfung sagt aus, wie schnell die Energie der Schwingung verloren geht.

### 6.1.1 Serienschwingkreis

Die Gesamtimpedanz eines Serienschwingkreises ist gegeben durch:

$$\underline{Z_{ges}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (21)$$

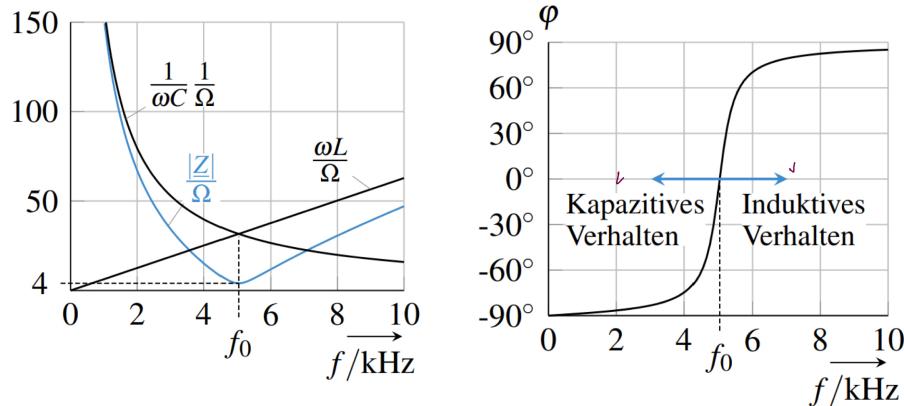


Figure 9: Frequenzabhängige Gesamtimpedanz eines Serienschwingkreis und resultierende Betriebsart.

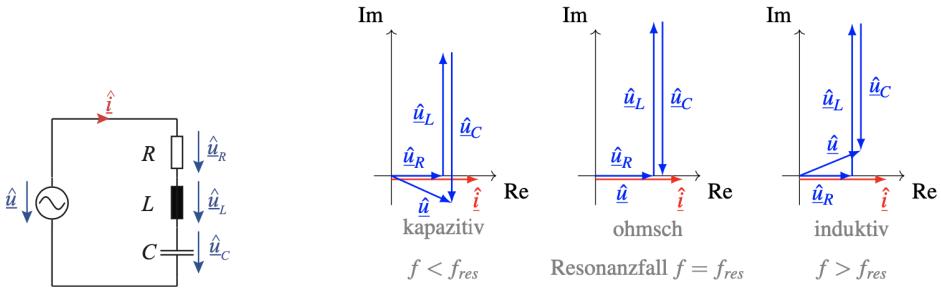


Figure 10: Phasenverschiebungen der Teilspannungen im Serienschwingkreis je nach Betriebsart (abhängig von  $\omega$  bzw.  $f$ ) Siehe Merkspruch in Abschnitt 5.2. Im Resonanzfall kann es zu Spannungsüberhöhungen von  $\hat{u}_c$  und  $\hat{u}_L$  kommen.

Für den Serienschwingkreis (analog zum Parallelschwingkreis) ergibt sich eine Resonanzfrequenz genau an der Frequenz  $\omega_{res}$  wo der Imaginärteil der Gesamtmpedanz  $Im(\underline{Z}_{ges}) = 0$  wird. Durch Einsetzen in 21 erhält man:

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (22)$$

Für den Serienschwingkreis ergibt sich folgende Güte  $Q_S$ , beziehungsweise Dämpfung  $d_s$ :

$$Q_S = \frac{\hat{u}_L}{\hat{u}} = \frac{\hat{u}_C}{\hat{u}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{d_s} \quad (23)$$

### 6.1.2 Parallelschwingkreis

Die Gesamtadmittanz eines Parallelschwingkreises ist gegeben durch:

$$\underline{Y}_{ges} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \quad (24)$$

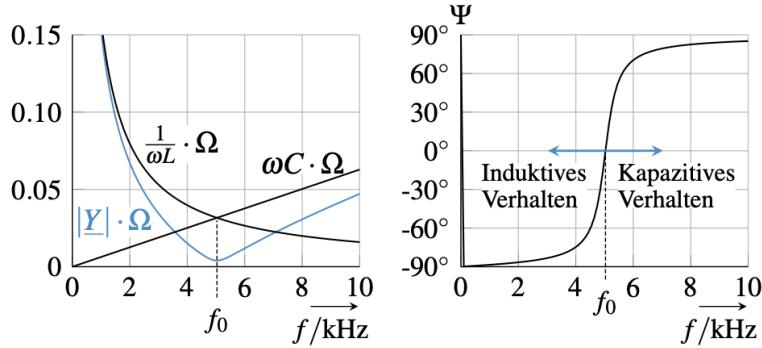


Figure 11: Frequenzabhängige Gesamtadmittanz eines Parallelschwingkreises und resultierende Betriebsart.

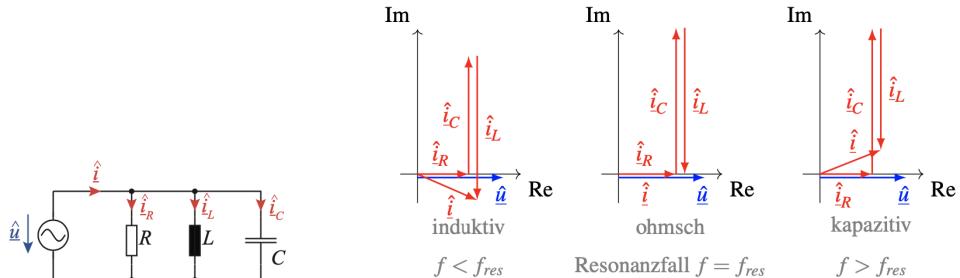


Figure 12: Phasenverschiebungen der Teilspannungen im Parallelschwingkreis je nach Betriebsart (abhängig von  $\omega$  bzw.  $f$ ). Siehe Merkspruch in Abschnitt 5.2. Im Resonanzfall kann es zu Stromüberhöhungen von  $\hat{i}_c$  und  $\hat{i}_L$  kommen.

Für den Parallelschwingkreis (analog zum Serienschwingkreis) ergibt sich die Resonanzfrequenz genau an der Frequenz  $\omega_{res}$  wo der Imaginärteil der Gesamtmpedanz  $Im(\underline{Z}_{ges}) = 0$  wird. Durch Einsetzen in 24 erhält man:

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (25)$$

Für den Parallelschwingkreis ergibt sich folgende Güte  $Q_P$ , beziehungsweise Dämpfung  $d_p$ :

$$Q_P = \frac{\hat{i}_L}{\hat{i}} = \frac{\hat{i}_C}{\hat{i}} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{d_p} \quad (26)$$

## 6.2 Passive Filter

Passive Filter (1. Ordnung) werden unterschieden in Hoch- und Tiefpassfilter, wobei die Netzwerke nur aus passiven Bauteilen bestehen, und daher keine Verstärkung (zwischen Ausgang und Eingang des Filters) grösser als 1 erzielen können. Die Filter werden durch ihre Übertragungsfunktion  $G(j\omega)$  zwischen Eingangssignal  $\underline{\hat{u}_1}$  und Ausgangssignal  $\underline{\hat{u}_2}$  charakterisiert:

$$G(j\omega) = \frac{\underline{\hat{u}_2}}{\underline{\hat{u}_1}} \quad (27)$$

Die Verstärkung von Spannung (oder Strom)  $\nu_u(j\omega)$  passiver Filter wird oft in der dB-Skala angegeben  $\nu_{u,dB}(j\omega)$ , da sie über viele grössenordnungen analysiert wird:

$$\nu_u(j\omega) = |G(j\omega)| = \left| \frac{\underline{\hat{u}_2}}{\underline{\hat{u}_1}} \right| \quad (28)$$

$$\nu_{u,dB}(j\omega) = 20dB \cdot \log_{10}(|G(j\omega)|) = 20dB \cdot \log_{10}\left(\left| \frac{\underline{\hat{u}_2}}{\underline{\hat{u}_1}} \right|\right) \quad (29)$$

Dabei kann für jede Frequenz auch eine Phasenverschiebung angegeben werden:

$$\angle G(j\omega) = \varphi_{u_2} - \varphi_{u_1} \quad (30)$$

Klammerbemerkung: Für die Verstärkungsberechnung in dB von Leistungen müsste ein Vorfaktor von 10 (anstatt 20) in der Formel (29) verwendet werden.

### 6.2.1 Grenzfrequenz

Die Grenzfrequenz  $\omega_g$  wird als diejenige bestimmt, an welcher gerade noch ca. 70.7% der Amplitude übertragen wird:

$$|G(j\omega_g)| = \sqrt{\frac{1}{2}} = 70.7\% = -3dB \quad (31)$$

An der Grenzfrequenz  $\omega_g$  werden der Betrag des Wirk- und Blindwiderstandes gerade gleich gross, und die Phase ist gerade  $\pm 45^\circ$ :

$$\angle G(j\omega_g) = \pm 45^\circ \quad (32)$$

$$|Re(G(j\omega_g))| = |Im(G(j\omega_g))| \quad (33)$$

Figur 13 visualisiert die Grenzfrequenz in einem Ampliden-Bodeplot:

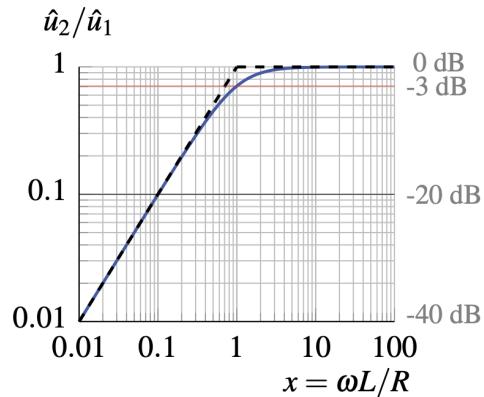


Figure 13: Grenzfrequenz bei  $x = 1$  (skaliertes  $\omega$ ). Das Amplitudenverhältnis beträgt dort  $-3dB$  und wird  $0dB$  für  $x \rightarrow \infty$

### 6.2.2 Hochpassfilter

Hochpassfilter 1. Ordnung werden wie folgt realisiert, wobei diese hochfrequente Signale gut übertragen, und tieffrequente Signale sperren:



Figure 14: RL-Hochpassfilter (links) und CR-Hochpassfilter (rechts).

Die Übertragungsfunktionen für den RL- beziehungsweise CR-Hochpassfilter lauten wie folgt:

$$G(j\omega) = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \quad \text{RL-Hochpassfilter} \quad (34)$$

$$G(j\omega) = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad \text{CR-Hochpassfilter} \quad (35)$$

Anhand des Grenzwertes für  $\omega \rightarrow \infty$  der beiden Übertragungsfunktionen wird das Übertragen von hochfrequenten Signalen klar:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = 1 \quad (\text{perfekte Übertragung}) \quad (36)$$

Analog kann das Verhalten auch für  $\omega \rightarrow 0$  hergeleitet werden.

### 6.2.3 Tiefpassfilter

Tiefpassfilter 1. Ordnung werden wie folgt realisiert, wobei diese tieffrequente Signale gut übertragen, und hochfrequente Signale sperren:



Figure 15: LR-Tiefpassfilter (links) und RC-Tiefpassfilter (rechts).

Die Übertragungsfunktionen für den LR- beziehungsweise RC-Tiefpassfilter lauten wie folgt:

$$G(j\omega) = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{R}{R + j\omega L} \quad \text{LR-Tiefpassfilter} \quad (37)$$

$$G(j\omega) = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad \text{RC-Tiefpassfilter} \quad (38)$$

Anhand des Grenzwertes für  $\omega \rightarrow 0$  der beiden Übertragungsfunktionen wird das Übertragen von tieffrequenten Signalen klar:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{R}{R + j\omega L} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{1 + j\omega RC} = 1 \quad (\text{perfekte Übertragung}) \quad (39)$$

Analog kann das Verhalten auch für  $\omega \rightarrow \infty$  hergeleitet werden.

## 7 Bodeplots

In einem Satz versucht: Bodeplots sind grafische Darstellungen, die die Frequenzabhängigkeit von Amplitude und Phase eines Netzwerkes beschreiben (eigentlich 2 Plots). Da die Abhängigkeit oft über viele Größenordnungen untersucht wird, werden für den Amplituden-Teil oft doppellogarithmische Skalen verwendet.

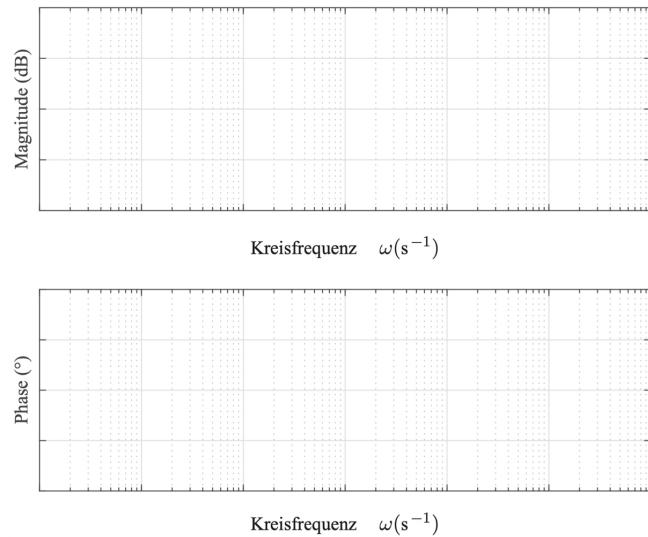


Figure 16: Leerer Bodeplot mit doppellogarithmischer Skala für den Amplitudenplot (dB-Skala).

Die Logarithmische Skala hat ebenfalls den Vorteil, dass sich Produkte in Summen von Logarithmen verwandeln:  $\log_{10}(A \cdot B) = \log_{10}(A) + \log_{10}(B)$  und wir somit die einzelnen Grundbausteine unserer Übertragungsfunktion im Bodeplot einfach überlagern können. Dazu können die Übertragungsfunktion des Netzwerkes in folgende Grundbausteine aufgeteilt werden:

	Formula	Amplitude		Phase	
Left Half-Plane Pole	$\frac{1}{1 + j\omega/\omega_p}$	-20dB per decade from pole		-90° over two decades	
Right Half-Plane Pole	$\frac{1}{1 - j\omega/\omega_p}$	-20dB per decade from pole		+90° over two decades	
Left Half-Plane Zero	$1 + j\omega/\omega_z$	+20dB per decade from zero		+90° over two decades	
Right Half-Plane Zero	$1 - j\omega/\omega_z$	+20dB per decade from zero		-90° over two decades	

	Formula	Amplitude		Phase	
Zero at $\omega = 0$	$j\omega/\omega_0$	+20dB per dec., 0dB at $\omega = \omega_0$		+90°	
Pole at $\omega = 0$	$\omega_0/j\omega$	-20dB per dec., 0dB at $\omega = \omega_0$		-90°	
Constant	$k$	$20 \log_{10}  k $		$\varphi(k)$	

Figure 17: Grundbausteine der Übertragungsfunktionen mit ihren Auswirkungen auf die Amplitude und Phase im Bodeplot.

Nach dem Berechnen eines (beliebigen) Startwertes des Amplitudenvorhältnisses können also die verschiedenen Grundbausteine im Bodeplot an der richtigen Frequenz einfach überlagert werden. Dieses Vorgehen braucht ein wenig Übung, und wird im nächsten Abschnitt versucht zu erklären.

## 7.1 Vorgehen: Bodeplot zeichnen

1. Übertragungsfunktion des Netzwerkes aufstellen und nach Grundbausteinen der Tabelle 17 aufsplitten:

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{(z_1 - j\omega)}{(p_2 - j\omega) \cdot (p_3 - j\omega)} \quad (40)$$

2. Einzelne Grenzfrequenzen der Grundbausteine berechnen (und aufsteigend sortieren:  $\omega_1 < \omega_2 < \dots$ )
3. Einflüsse der einzelnen Grundbausteine aus der Tabelle 17 ablesen(!)
4. Startpunkt des Amplitudenverhältnisses im Bodeplot berechnen:
  - $20dB \cdot \log_{10}(|G(j\omega_1)|) = \dots$
  - Startpunkt an  $\omega_1$  einzeichnen und Achsen beschriften
5. Einfluss der Grundbausteine an den Frequenzen  $\omega_2, \omega_3, \dots$  im Bodeplot überlagern
6. Fertig:)

### 7.1.1 Beispiel

Ein erstes Beispiel zum Zeichnen eines Bodeplots anhand der obigen Anleitung:

## Bodeplots: Beispiel 1

SATION 1  
CRUCIAL STEPS  
(FACTORIZED)

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{(100 - j\omega)}{(1 + j\omega) \cdot (5000 - j\omega)}$$

DA EIN NEGATIVER,  
LEERZUG GEMACHT,  
LEERZUG FÜR DIE  
KAPAZITÄTEN

DA IM NENNER  
→ POLE

I:

LHP POLE:  
(LEFT HALFPLANE POLE)

KOMPLEX !!

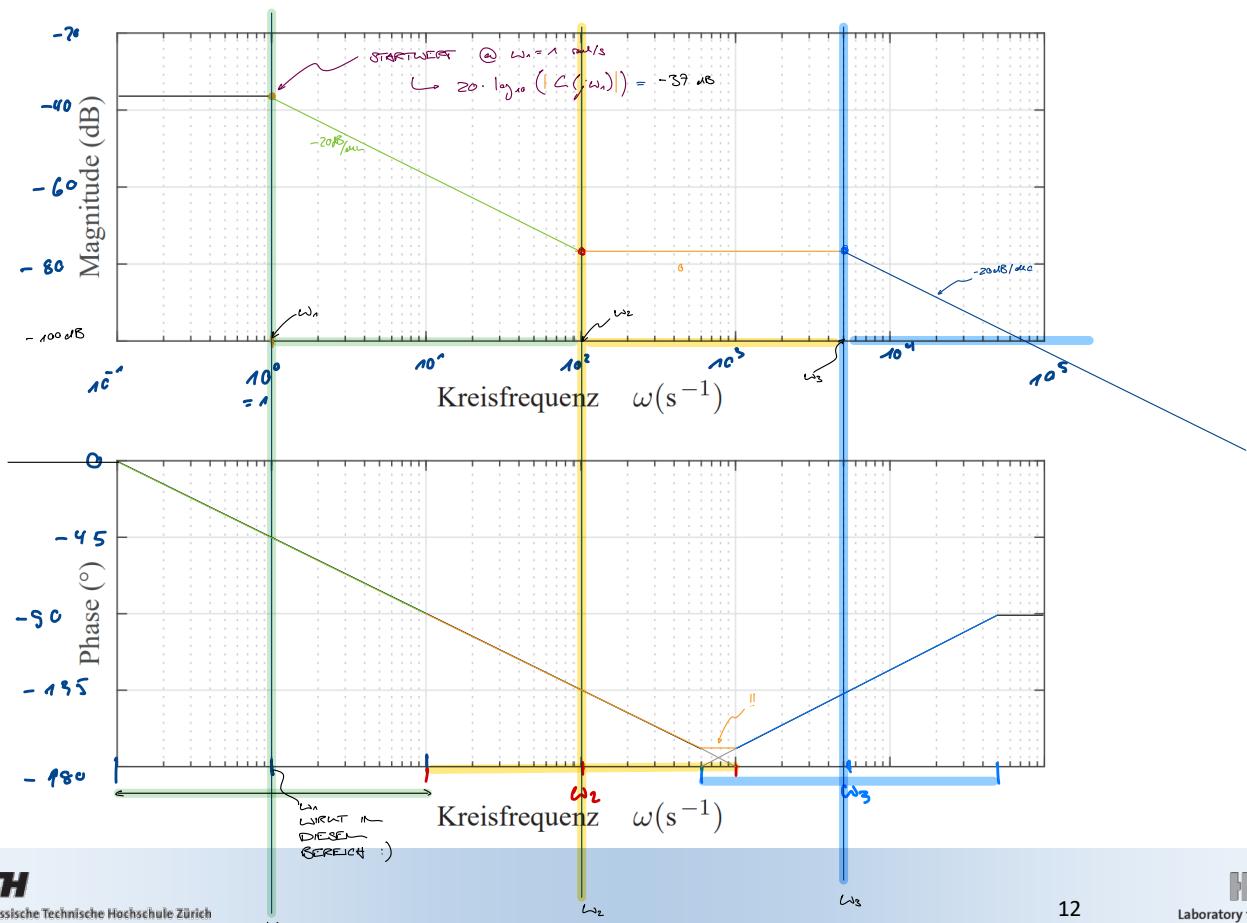
	AMPLITUDE	PHASE
I:	-20 dB / dec	-70° OVER 2 dec
II:	+20 dB / dec	-90° OVER 2 dec
III:	-20 dB / dec	+90° OVER 2 dec

ALFSTEIGEND  
SORTIEREN  
VEREINFACHT VIELES:  
 $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3$

ABLESEN ALS  
"ZUSAMMENFASSUNG"

## Bodeplots: Beispiel 1

ACHSEN BEGRIFFEN!



## A Extremstellen von $f(x) = |\sin(x) + \sin(2x)|$

### Ableitung und Bedingung

Extremstellen liegen an den Nullstellen der ersten Ableitung:

$$f'(x) = \cos(x) + 2\cos(2x) = 0.$$

Die Betragsstriche können zuerst vergessen werden.

### Trigonometrische Umformung

Verwende:

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} \cos(x) + 2(2\cos^2(x) - 1) &= 0 \\ \Rightarrow \cos(x) + 4\cos^2(x) - 2 &= 0 \end{aligned}$$

### Substitution

Setze  $u = \cos(x)$ :

$$4u^2 + u - 2 = 0$$

### Lösung

Mitternachtsformel:

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

### Rücksubstitution

$$\cos(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8} \Rightarrow x = \arccos\left(\frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}\right)$$

### Allgemeine Lösung

Da  $\cos(x) = \cos(2\pi - x)$ , ergeben sich insgesamt 4 Lösungen pro Periode:

$$x = \pm \arccos\left(\frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## Numerische Auswertung der Lösungen im Intervall $[0, 2\pi]$

Setzt man die Näherungswerte ein:

$$\cos(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8} \approx \begin{cases} 0.593, \\ -0.843, \end{cases}$$

so ergeben sich durch  $x = \arccos(u)$  folgende vier Extremstellen im Intervall  $[0, 2\pi]$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= \arccos(0.593) \approx 0.936, \\ x_2 &= \arccos(-0.843) \approx 2.574, \\ x_3 &= 2\pi - x_2 \approx 3.709, \\ x_4 &= 2\pi - x_1 \approx 5.347. \end{aligned}$$

## Funktionswerte an den Extremstellen

Setzt man diese  $x$ -Werte in  $f(x) = |\sin(x) + \sin(2x)|$  ein, erhält man:

$$\begin{aligned} x_1 \approx 0.936 &\Rightarrow f(x_1) \approx 1.76 \quad (\text{Maximum}) \\ x_2 \approx 2.574 &\Rightarrow f(x_2) \approx 0.37 \\ x_3 \approx 3.709 &\Rightarrow f(x_3) \approx 0.37 \\ x_4 \approx 5.347 &\Rightarrow f(x_4) \approx 1.76 \quad (\text{Maximum}) \end{aligned}$$

## Fazit

Die Funktion  $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$  besitzt im Intervall  $[0, 2\pi]$  genau vier Extremstellen:

- Zwei Maxima bei  $x \approx 0.936$  und  $x \approx 3.709$
- Zwei Minima bei  $x \approx 2.574$  und  $x \approx 5.347$