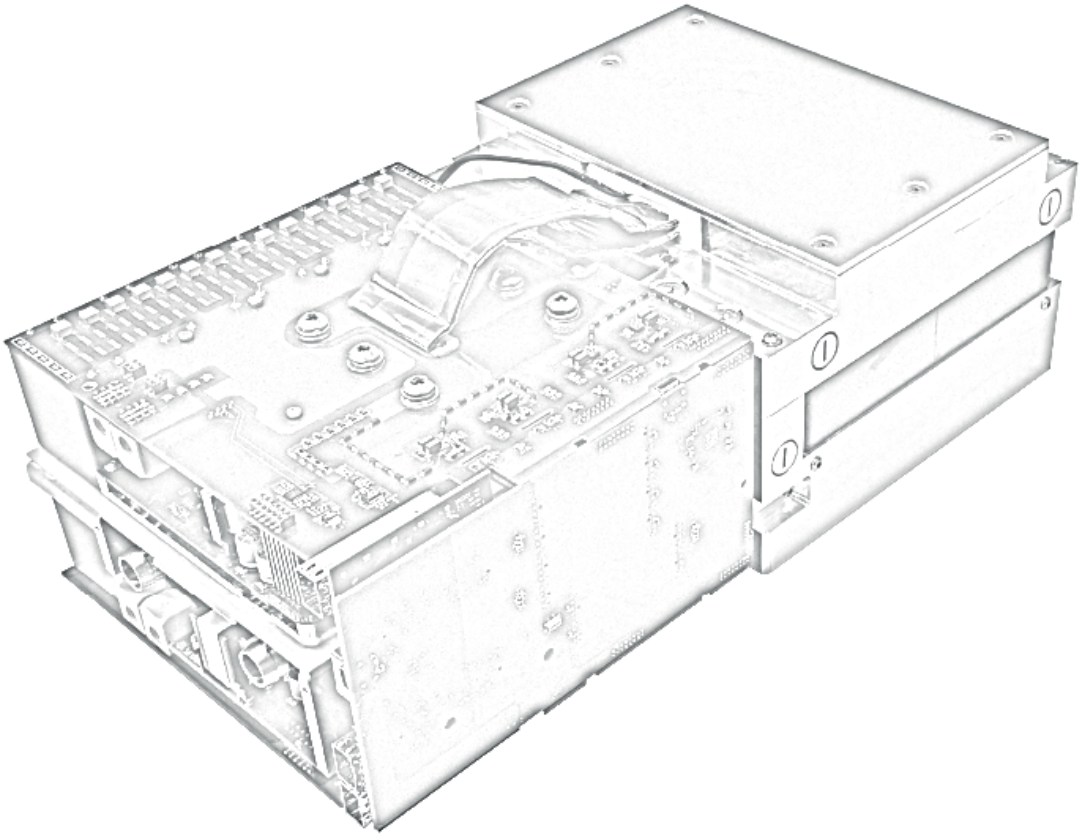
ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

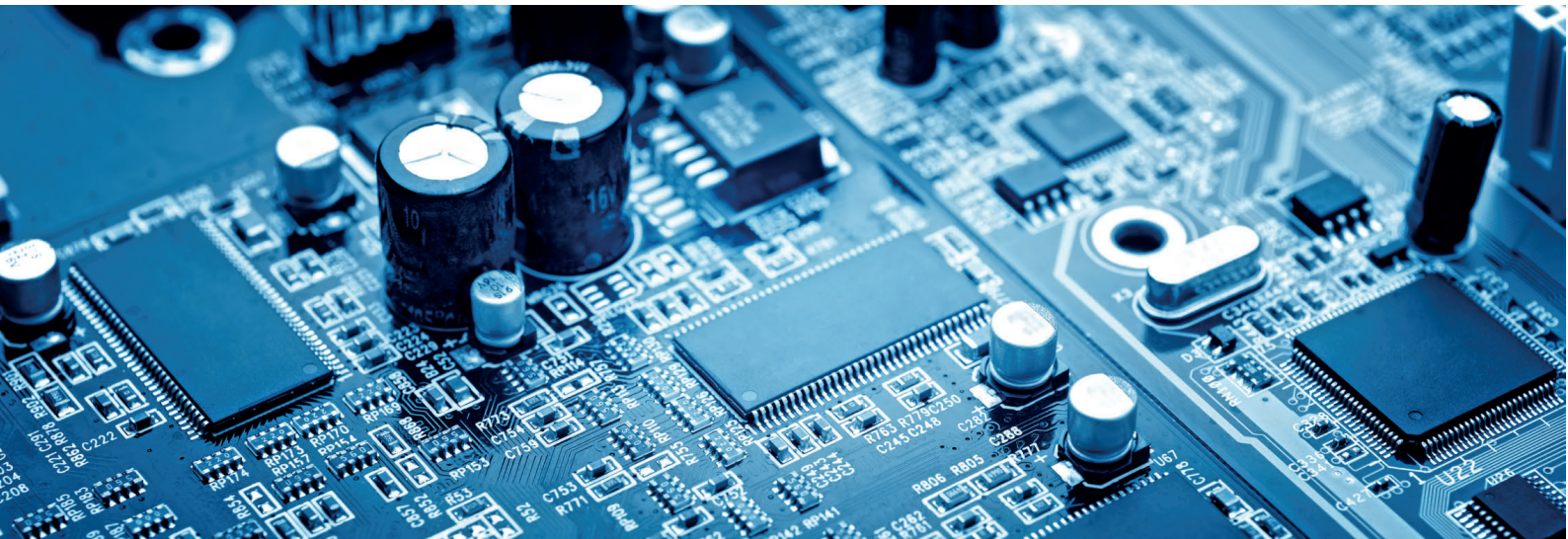
LABORATORY FOR HIGH POWER ELECTRONIC SYSTEMS

Netzwerke & Schaltungen II



Prof. Dr. J. Biela

Version: February 15, 2024



Nutzungsbestimmungen: Die Inhalte der Vorlesungsunterlagen sind urheberrechtlich geschützt und ausschliesslich für die in die Vorlesung "NUS II" eingeschriebenen Studierenden bestimmt. Eine Nutzung durch andere Personen ist nicht erlaubt. Die Inhalte dürfen nicht kopiert, online gestellt, an Dritte weitergegeben werden oder anderweitig als für das Studium an der ETH Zurich genutzt werden. Bilder und Textabschnitte wurden teilweise aus den Büchern

- Elektrotechnik: Albach; 2. Auflage; Pearson Studium 2020; ISBN: 9783863268947
- Grundlagen der Elektrotechnik – Netzwerke; Schmidt / Schaller / Martius; 2. Auflage; Pearson Studium 2014; ISBN: 9783868942392
- Microelectronic Circuits; Sedra / Smith; 7. Auflage; Oxford University Press 2015; ISBN: 9780199339143

übernommen und zum Teil auch adaptiert.

Contents

1 Periodische Signalformen **9**

1.1 Zeitabhängige Ströme und Spannungen . . . 9

1.1.1 Quasistationäre Rechnung . . . 9

1.1.2 Strom-/Spannungsbeziehungen der Komponenten . . . 10

1.1.3 Grundbegriffe Wechselgrössen . . . 11

1.1.4 Messgeräte . . . 15

1.2 Zeigerdiagramme . . . 17

1.2.1 Analytische Addition . . . 20

1.3 Bauelemente im Wechselstromkreis . . . 20

1.3.1 Widerstand im Wechselstromkreis . . . 20

1.3.2 Induktivität im Wechselstromkreis . . . 21

1.3.3 Kondensator im Wechselstromkreis . . . 22

1.3.4 Beispiel – Konstruktion eines Zeigerdiagramms . . . 23

1.3.5 Grundbegriffe der komplexen Rechnung . . . 24

1.3.6 Komplexe Wechselstromrechnung . . . 25

1.4 Berechnung von Netzwerken . . . 27

1.4.1 Berechnung von Netzwerken mit Zeigern . . . 27

1.4.2 Strom-Spannungs-Beziehungen im Bildbereich . . . 28

1.4.3 Impedanzen und Admittanzen . . . 30

1.4.4 Umwandlung von Reihen- und Parallelschaltung . . . 31

1.4.5 Kirchoffsche Gesetze im Bildbereich . . . 32

1.4.6 Reihen- und Parallelschaltung von Impedanzen . . . 33

1.4.7 Zeitbereich vs. komplexe Darstellung . . . 34

1.4.8 Komplexe Wechselstromrechnung - Beispiel . . . 34

1.4.9 Strom-Spannungs- und Widerstandsdiagramm . . . 38

1.5 Frequenzabhängige Spannungsteiler . . . 39

1.5.1 *RL* Hochpass . . . 39

1.5.2 *RL* Tiefpass . . . 41

1.5.3 *RC* Hochpass . . . 42

1.5.4 *RC* Tiefpass . . . 43

1.5.5 Frequenzweiche . . . 44

1.5.6 Frequenzkompensierter Spannungsteiler . . . 44

1.6 Resonanzschaltungen . . . 47

1.6.1 *RLC*-Serienschwingkreis . . . 47

1.6.2 Wirkungsgrad verschiedener Lichtquellen . . . 55

1.6.3 Parallelschwingkreis . . . 56

1.6.4 Zeigerdiagramme für Serien-/Parallelschwingkreis . . . 62
1.7 Ortskurven . . . 66
1.7.1 Impedanz *RL*-Reihenschaltung . . . 66
1.7.2 Ortskurve Admittanz: Inversion der Impedanz-Ortskurve . . . 68
1.7.3 Ortskurven von komplizierteren Netzwerken . . . 69
1.7.4 Ortskurven typischer Zweipolschaltungen . . . 74
1.8 Energie und Leistung bei Wechselspannung . . . 75
1.8.1 Widerstand . . . 75
1.8.2 Blindenergie . . . 76
1.8.3 Impedanz . . . 78
1.8.4 *RL*-Schaltung . . . 79
1.8.5 Scheinleistung . . . 81
1.8.6 Komplexe Leistung . . . 81
1.8.7 Leistungsanpassung mit Impedanzen . . . 82
1.8.8 Maximalleistung mit reinem Wirkwiderstand . . . 83
1.8.9 Blindstrom-/leistungskompensation . . . 84

2 Drehstromsysteme **87**
2.1 Leistung Drehstrom . . . 87
2.1.1 Dreiphasensystem – Sternschaltung . . . 87
2.1.2 Leistungsberechnung im Drehstromsystem . . . 89
2.1.3 Dreileitersystem / Sternpunktverschiebung . . . 90
2.1.4 Dreieckschaltung eines Verbrauchers . . . 93
2.1.5 Eigenschaften des Drehstromsystems . . . 97
2.1.6 Erzeugung 3-phasige Spannung . . . 99
2.1.7 Erzeugung Drehfeld . . . 101
2.1.8 Energieübertragung mit Drehstromsystemen . . . 103
2.1.9 Drehstromsystem – Zusammenfassung . . . 104

3 Netzwerksanalyse **107**
3.1 Quelle und Last . . . 107
3.1.1 Spannungsquellen . . . 107
3.1.2 Stromquellen . . . 108
3.1.3 Äquivalente Quellen . . . 108
3.1.4 Beschaltung einer Quelle mit Last . . . 109
3.1.5 Gesteuerte Quellen . . . 110
3.1.6 Ersatzquellen und Ersatzlast . . . 113
3.2 Berechnung einfacher Schaltungen . . . 114
3.2.1 Überlagerungssatz . . . 114
3.2.2 Ähnlichkeitssatz . . . 118
3.2.3 Versetzen und Aufspalten von Quellen . . . 119
3.2.4 Quellensubstitutionen . . . 120
3.2.5 Unbedingt äquivalente Schaltungen . . . 121
3.2.6 Äquivalenz Stern- und Polygonschaltung . . . 122
3.3 Maschenstromverfahren . . . 126
3.3.1 Analyse von Netzwerken – Motivation . . . 126

3.3.2 Konzept des Maschenstromverfahrens . . . 126
3.3.3 Maschenauswahl . . . 129
3.3.4 Stromquellen . . . 131
3.3.5 Übertrager . . . 134
3.3.6 ”Kochrezept” . . . 136
3.3.7 Matrixdarstellung . . . 137
3.4 Knotenpotenzialverfahren . . . 137
3.4.1 Spannungsquellen . . . 140
3.4.2 Gesteuerte Quellen und Übertrager . . . 142
3.4.3 ”Kochrezept” für das Knotenpotenzialverfahren . . . 144
3.4.4 Matrixdarstellung . . . 145
3.4.5 Erläuterung zu Potenzialen . . . 146
3.4.6 Maschenstrom- vs. Knotenpotenzialverfahren . . . 147

4 Beliebige periodische Vorgänge 149
4.1 Überlagerung von Gleich- und Wechselgrössen . . . 149
4.1.1 Einleitung . . . 149
4.1.2 Überlagerung von einer Gleich- & einer Wechselspannung . . . 150
4.1.3 Überlagerung zweier Wechselspannungen . . . 151
4.1.4 Überlagerung sinusförmiger Verläufe (Schwebung, Grund- & Oberschwingung) 153
4.2 Fourierreihen . . . 155
4.2.1 Normalform . . . 155
4.2.2 Spektralform . . . 156
4.2.3 Orthogonalitätsrelation . . . 158
4.2.4 Berechnung der Fourierkoeffizienten . . . 158
4.2.5 Komplexe Form . . . 160
4.2.6 Vereinfachte Berechnung Fourierkoeffizienten . . . 162
4.2.7 Symmetrie . . . 163
4.2.8 Herleitung weiterer Fourierreihen . . . 169
4.2.9 Zusammenfassung Fourierreihen . . . 171
4.3 Harmonische Analyse . . . 172
4.3.1 Fourierreihen in der Schaltungsanalyse . . . 172
4.3.2 *RL*-Schaltung mit gleichgerichteter Spannung . . . 174
4.3.3 Effektivwert periodischer Verläufe . . . 176
4.3.4 Leistung eines allgemeinen Zweipols . . . 178
4.3.5 Scheinleistung, Blindleistung, Leistungsfaktor . . . 180
4.3.6 Weitere Kenngrössen periodischer Funktionen . . . 181
4.3.7 Beispiel: Welligkeit bei *RL*-Reihenschaltung . . . 182

5 Schaltvorgänge in elektrischen Netzwerken 185
5.1 Transiente Vorgänge – Einleitung . . . 185
5.2 Anregung durch DC-Quellen . . . 186
5.2.1 *RC*-Reihenschaltung an Gleichspannung . . . 186
5.2.2 Reihenschaltung von Kondensator & Stromquelle . . . 188
5.2.3 *RL*-Reihenschaltung an Gleichspannung . . . 189
5.2.4 Parallelschaltung einer Spule & und einer Spannungsquelle . . . 190

5.3 Anregung durch allgemeine periodische Quellen . . . 191
5.3.1 Schaltvorgang bei Wechselspannungsanregung . . . 191
5.3.2 Schaltvorgang allgemeine periodische Quellen . . . 194
5.3.3 Konsequenz aus den Stetigkeitsforderungen . . . 194
5.4 Einfache Analyse von Netzwerken mit nur einem L oder C . . . 195
5.4.1 Vereinfachte Analyse mit einem Kondensator . . . 195
5.4.2 Vereinfachte Analyse mit einer Spule . . . 196
5.4.3 Spannungswandlerschaltung . . . 198
5.4.4 Wirkungsgrad des Ladevorgangs im RC-Netzwerk . . . 201
5.4.5 Wirkungsgrad bei Schaltvorgang mit Stromquelle & RC-Netzwerk . . . 204
5.4.6 Ergänzung: RC-Netzwerk in Defibrillator . . . 205
5.5 Netzwerke mit mehreren Speichern . . . 206
5.5.1 Beispiel: Serienschwingkreis an DC-Spannung . . . 209
5.5.2 Beispiel: Serienschwingkreis an AC-Spannung . . . 212
5.5.3 Maschenstromverfahren für transiente Vorgänge . . . 214

6 Laplace-Transformation 219
6.1 Fourier-Integral . . . 219
6.1.1 Fourier-Transformation . . . 222
6.1.2 Laplace-Transformation . . . 224
6.1.3 Hilfssätze . . . 229
6.1.4 Strom-/Spannungsbeziehung im Bildbereich . . . 236
6.1.5 Netzwerksanalyse mit Laplace-Transformation . . . 238
6.1.6 Partialbruchzerlegung . . . 243
6.1.7 Korrespondenztabelle . . . 244
6.1.8 Vergleich Fourier- und Laplace-Transformation . . . 244

7 Übertragungsfunktion & Bode-Diagramm 247
7.1 Übertragungsfunktion . . . 247
7.1.1 Beispiel Übertragungsfunktion LC-Tiefpass . . . 248
7.2 Bode-Diagramm . . . 251
7.2.1 Beispiel: RC-Tiefpass 1. Ordnung . . . 252
7.2.2 Übertragungsfunktion kaskadierter 2-Tore . . . 252
7.2.3 Beispiel: RC-Tiefpass 2. Ordnung . . . 254
7.2.4 Beispiel: LC-Tiefpass 2. Ordnung . . . 255
7.2.5 Glieder 0. & 1. Ordnung . . . 258
7.2.6 Glieder 2. Ordnung . . . 260
7.2.7 Erstellen Bode-Diagramm . . . 261

8 Verstärkerschaltungen 267
8.1 Grundlagen . . . 267
8.1.1 Verstärkertypen . . . 267
8.1.2 Verstärker – Versorgungsspannung . . . 268
8.1.3 Sättigung des Verstärkers . . . 269
8.1.4 Biasing und Kleinsignalverstärkung . . . 270
8.1.5 Ersatzschaltbilder von Verstärkern . . . 271

8.1.6 Frequenzverhalten von Verstärkern . . . 274
8.1.7 Whd.: Übertragungsglieder 1. Ordnung . . . 274
8.1.8 Frequenzantwort des Verstärkers . . . 275
8.1.9 Operationsverstärker – Einleitung . . . 277
8.1.10 Idealer Operationsverstärker . . . 277
8.1.11 Realer Operationsverstärker . . . 278
8.1.12 Realer OPV – Frequenzabhängigkeit der Differenzverstärkung . . . 280
8.1.13 Realer OPV – Slew Rate . . . 281
8.1.14 Realer OPV – Gleichtaktunterdrückung . . . 282
8.1.15 Rückkopplung des OPVs . . . 284
8.2 Verstärkerschaltungen . . . 285
8.2.1 Nicht-invertierender Verstärker als Regelkreis . . . 285
8.2.2 Nicht-invertierender Verstärker mit idealem OPV . . . 286
8.2.3 Invertierender Verstärker als Regelkreis . . . 287
8.2.4 Invertierender Verstärker mit idealem OPV . . . 289
8.2.5 Beispiel für invertierenden & nicht-invertierenden Verstärker . . . 289
8.2.6 Vergleich: Invertierender & nicht-invertierender Verstärker . . . 290
8.2.7 Belastung der Eingangsspannung . . . 291
8.2.8 Invertierender Verstärker mit hohem Eingangswiderstand . . . 292
8.2.9 Einfluss der Verstärkerbandbreite . . . 293
8.2.10 Summierverstärker . . . 295
8.2.11 Subtraktions/-Instrumentationsverstärker . . . 295
8.2.12 Spannungspuffer und Spannungsquellen . . . 298
8.2.13 Strompuffer und Stromquellen . . . 298
8.2.14 Integrierschaltung . . . 299
8.2.15 Mittelwertbildung . . . 302
8.2.16 Frequenzabhängige Rückkopplung . . . 302
8.2.17 PI-Regler . . . 304
8.2.18 Sample & Hold / Abtast-Halte-Glied . . . 305
8.3 Komparatorschaltungen . . . 307
8.3.1 Komparator . . . 307
8.3.2 Komparator mit Hysterese . . . 308
8.3.3 Invertierender Diskriminator . . . 308
8.3.4 Regelungstechnisches Modell invertierender Diskriminator . . . 311
8.3.5 Nicht-invertierender Diskriminator . . . 312
8.3.6 Fenster-Diskriminator . . . 315
8.3.7 Astabiler Multivibrator – Rechteckgenerator . . . 315
8.3.8 Rechteckgenerator mit einstellbarem Tastverhältnis . . . 316
8.3.9 Beispiel für invertierenden und nicht-invertierendem Diskriminator . . . 318
8.3.10 Vergleich: Negative und positive Rückkopplung . . . 318
8.3.11 Beispiel: Nicht-invertierender Verstärker . . . 319
8.3.12 Beispiel: Invertierender Verstärker . . . 320
8.3.13 Beispiel: Invertierender Diskriminator . . . 320
8.3.14 Beispiel: Nicht-invertierender Diskriminator . . . 321
8.3.15 Zusammenfassung OPV und Komparatoren . . . 323

A Lernziele **325**
A.1 Lernziele – Periodische Signalformen . . . 325
A.2 Lernziele – Frequenzabhängige Spannungsteiler . . . 326
A.3 Lernziele – Resonanzschaltungen . . . 327
A.4 Lernziele – Ortskurven . . . 328
A.5 Lernziele – Leistung im Wechselstromkreis . . . 329
A.6 Lernziele – Drehstromsysteme . . . 330
A.7 Lernziele – Quelle & Last . . . 331
A.8 Lernziele – Maschenstrom- und Knotenpotenzialverfahren . . . 332
A.9 Lernziele – Beliebige periodische Vorgänge . . . 333
A.10 Lernziele – Schaltvorgänge in elektrischen Netzwerken . . . 334
A.11 Lernziele – Laplace-Transformation . . . 335
A.12 Lernziele – Übertragungsfunktion & Bode-Diagramm . . . 336
A.13 Lernziele – Verstärkerschaltungen . . . 337

B Tabellensammlung **339**
B.1 Einheiten, Konstanten . . . 339
B.2 Komplexe Zahlen . . . 341
B.3 Additionstheoreme . . . 341
B.4 Ableitungen und Integrale . . . 342
B.4.1 Wichtige Ableitungen . . . 342
B.4.2 Wichtige Integrale . . . 343
B.5 Fourier Transformation . . . 347
B.6 Laplace Transformation . . . 351
B.7 Schaltzeichen . . . 354
B.8 Verzeichnis der verwendeten Symbole . . . 356

C Referenzen **359**

Chapter 1

Periodische Signalformen

1.1 Zeitabhängige Ströme und Spannungen

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde überwiegend vorausgesetzt, dass die auftretenden Spannungen und Ströme zeitlich konstant sind. Daneben haben in der Elektrotechnik zeitabhängige Vorgänge, die in periodische und einmalige Vorgänge unterteilt werden, eine sehr grosse Bedeutung (siehe Abbildung 1.1a).

Periodische Grössen sind allgemein dadurch gekennzeichnet, dass sich die Art der Änderung periodisch in einem festen Zeitabstand (der Periodendauer T) wiederholt. Die periodischen Grössen können dabei in sinusförmige und nicht sinusförmige Signale unterteilt werden.

Nicht periodische Vorgänge entstehen z.B. beim erstmaligen Anschliessen eines Systems an eine Spannungsversorgung oder beim Einschalten/in Betrieb nehmen eines Netzwerks. Beispiele für nicht periodische Vorgänge sind Einschwingvorgänge und transienten Vorgänge in *RC*- und *RL*-Netzwerken, die später noch betrachtet werden.

1.1.1 Quasistationäre Rechnung

Bei hochfrequenten Vorgängen können die mechanischen Abmessungen l einer Schaltung gegebenenfalls in der Grössenordnung der Wellenlänge $\lambda = cT = \frac{c}{f}$ (mit $c \approx 3 \times 10^8$m/s) der betrachteten elektrischen Signale liegen, so dass innerhalb der Schaltung Phasendifferenzen eines Signals auftreten können. In Abbildung 1.2 ist dazu beispielhaft eine vereinfachte elektrische Schaltung zusammen mit einem elektrischen Signal mit der Wellenlänge λ dargestellt. Im betrachteten Fall ist die mechanische Grösse der Schaltung relativ gross im Verhältnis zur Wellenlänge, so dass innerhalb der Schaltung erhebliche Phasendifferenzen auftreten.

Beispielhaft wird eine Schaltung mit einer räumlichen Ausdehnung von l = 20cm betrachtet und es soll die obere Frequenzgrenze ermittelt werden, bei welcher maximal eine Phasendifferenz von 5° innerhalb der Schaltung aufgrund der endlichen Ausdehnungsgeschwindigkeit der Signale auftritt:

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{l}{cT} = \frac{lf}{c} \leq \frac{5}{360} \quad \Rightarrow \quad f \leq 20.8MHz \tag{1.1}$$

Um die Berechnungen im Folgenden zu vereinfachen, wird dabei immer angenommen, dass die Wellenlänge des elektrischen Signals sehr gross im Verhältnis zu den mechanischen Abmessungen der Schaltung ist, d.h. $\lambda \gg l$. Damit ist die Änderungsgeschwindigkeit der Ströme und Spannungen so klein, dass trotz der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des elektromagnetischen Feldes die gesamte Schaltung praktisch gleichzeitig von den Änderungen betroffen ist – d.h. es wird vom quasistationären Fall ausgegangen.

Für die quasistationäre Betrachtung können die Bauelemente R, L und C als konzentrierte Elemente (d.h. als ein einzelnes Element) aufgefasst werden bzw. das Verhalten der Bauelemente kann mit einfachen Netzwerken von konzentrierten Bauelementen modelliert werden. Weiterhin können die Kirchhoffschen Gesetze (Knoten- und Maschenregel) unmittelbar auf das Netzwerk angewendet werden.

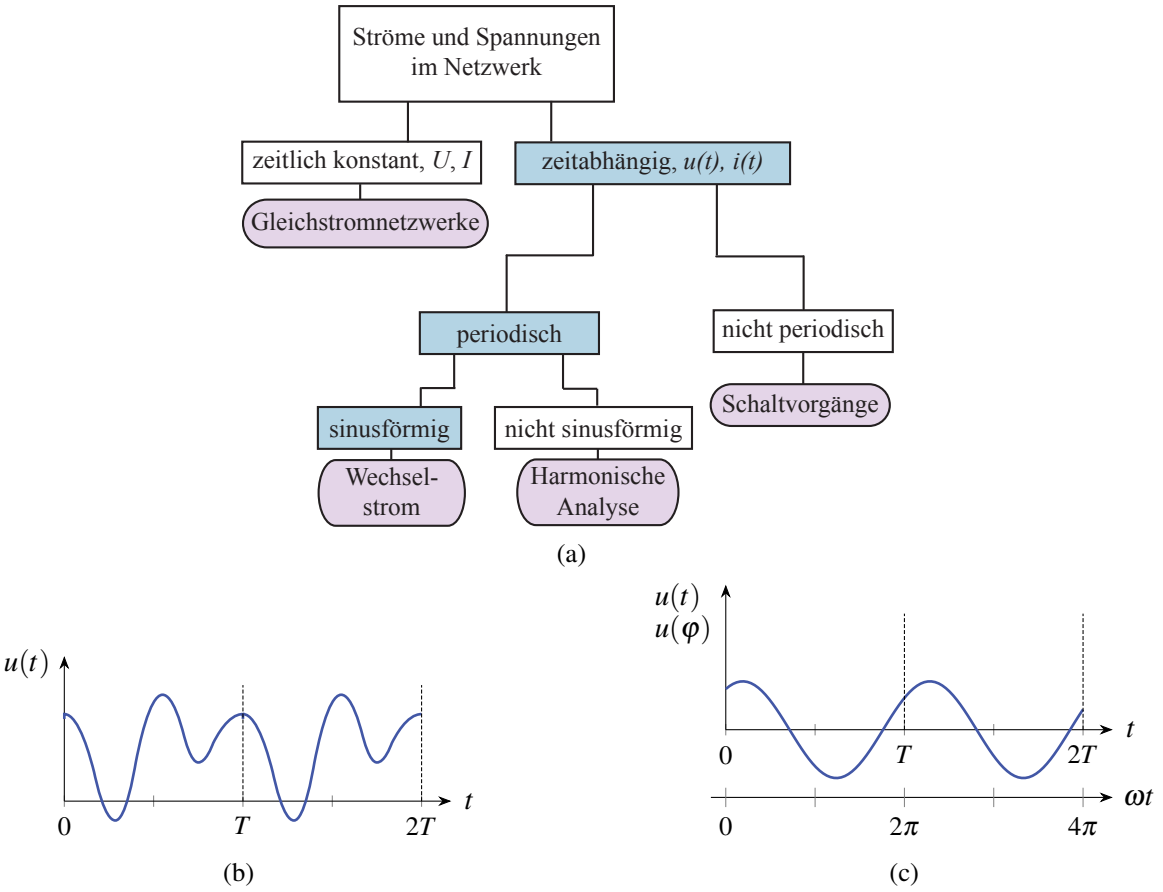


Figure 1.1: a) Übersicht über mögliche Strom- und Spannungsformen in elektrischen Netzwerken. b) Beliebiger periodischer Spannungsverlauf. c) Sinusförmiger Spannungsverlauf.

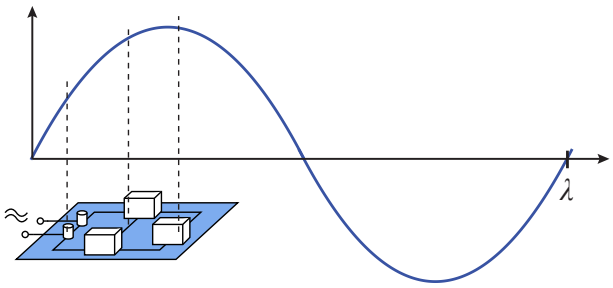


Figure 1.2: Veranschaulichung der Ausbreitung eines elektrischen Signals mit der Wellenlänge λ in einer Schaltung.

1.1.2 Strom-/Spannungsbeziehungen der Komponenten

Allgemein liegen bei einem Netzwerk mit z Zweigen 2 z Unbekannte vor – dies sind die Spannung u und der Strom i pro Zweig. Mit den Beziehungen zwischen den z Ströme und den z Spannungen an den Komponenten (siehe Abbildung 1.3) verbleiben z linear unabhängige Gleichungen, welche über die Knoten- und Maschenregel ermittelt werden können.

Bei k Knoten können $k-1$ linear unabhängige Knotengleichungen aufgestellt werden. Die restlichen $z-(k-1)=m$ Gleichungen ergeben sich aus den m Maschenbeziehungen.

In den Kapiteln 3.3 und 3.4 werden später noch 2 Verfahren zum systematischen Aufstellen der Netzwerksgleichungen vorgestellt, die eine deutliche Reduzierung des Rechenaufwands ermöglichen.

1.1.3 Grundbegriffe Wechselgrössen

Bevor die Analyse von Netzwerken mit sinusförmigen Anregungen untersucht wird, werden im Folgenden zuerst noch einige Grundbegriffe für Wechselgrössen eingeführt. Dazu ist in Abbildung 1.4a beispielhaft der zeitliche Verlauf eines beliebig angenommenen Stromes gezeigt. Der zu einem bestimmten Zeitpunkt z.B. t_1 fliessende Strom wird dabei als Augenblicks- oder Momentanwert $i(t_1)$ bezeichnet.

Eine periodische Zeitabhängigkeit einer Wechselgrösse äussert sich darin, dass jeweils nach einer bestimmten Zeit, der sogenannten Periodendauer T, der gleiche Augenblickswert wieder auftritt, d.h.

$$i(t) = i(t+T) = i(t+nT) \;\; n \text{ ist ganzzahlig} \tag{1.2}$$

Sind in Abbildung 1.4a die Flächen A und B gleich gross, d.h. der Mittelwert des Stromes über eine Periode gleich null, so wird der Strom als (reiner) Wechselstrom (Analog: Wechselspannung bzw. allgemein als Wechselgrösse) bezeichnet.

Ist der Mittelwert eines periodischen Signals $\neq 0$ (d.h. (Fläche $A \neq$ Fläche B) so folgt, dass das Signal als Überlagerung einer Gleich- und einer Wechselgrösse aufgefasst werden kann. Eine solche Grösse wird als Mischgrösse bezeichnet.

Sinusförmige Signale stellen einen sehr wichtigen Sonderfall in der Gruppe der periodischen Signale dar. Eine sinusförmige Spannung kann z.B. mit einer Anordnung erzeugt werden wie in Abbildung 1.5b dargestellt: Eine Rechteckspule (Höhe h, Länge l) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω in einem homogenen Magnetfeld mit der Flussdichte B. Mit dem zeitlichen Verlauf des Flusses Φ durch die Spule erhält man mit dem Induktionsgesetz die induzierte sinusförmige Spannung u.

$$\Phi = BA = Bhl\cos(\omega t) \Rightarrow u = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = NBhl\omega\sin(\omega t) \tag{1.3}$$

Da in der Gleichung (1.3) für den Ausdruck $\sin(\omega t) \leq 1$ gilt, ist die maximale Grösse der induzierten Spannung gleich:

$$\hat{u} = NBhl\omega \;\; \Rightarrow \;\; u(t) = \hat{u}\sin(\omega t) \tag{1.4}$$

Die Variable $\hat{u}$ wird dabei als Scheitelwert bzw. Spitzenwert der Spannung $u(t)$ bezeichnet.

Der Spitze-Spitze-Wert eines Zeitverlaufs ergibt sich aus der Differenz zwischen dem Maximal- und Minimalwert. Für sinusförmige Signale gilt: $u_{SS} = 2\hat{u}$.

Neben einer Darstellung als Funktion der Zeit t, werden sinusförmige Signale häufig als Funktion des Winkels ωt dargestellt – siehe Abbildung 1.5b. Aus der Abbildung 1.5b ergibt sich auch unmittelbar die

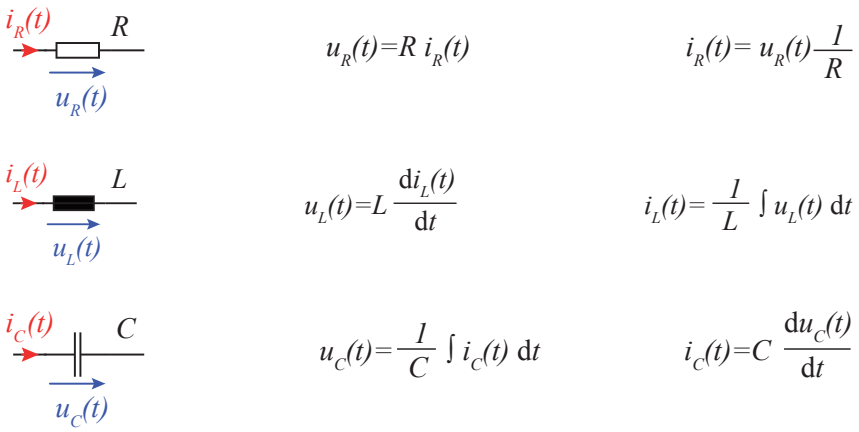


Figure 1.3: Strom-/Spannungsbeziehungen für Widerstände, Induktivitäten und Kondensatoren.

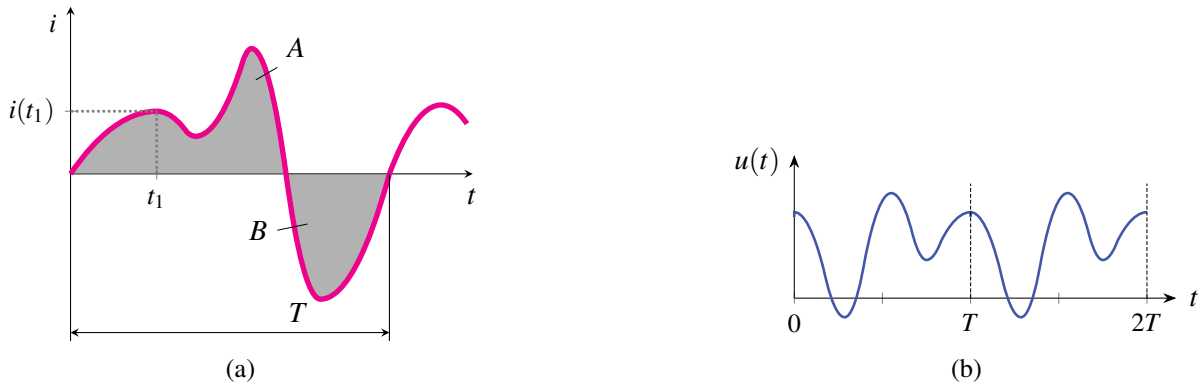


Figure 1.4: a) Mittelwertfreier Stromverlauf (Fläche A = Fläche B). b) Periodischer Spannungsverlauf einer Mischgrösse (mit einer überlagerter Gleichspannung).

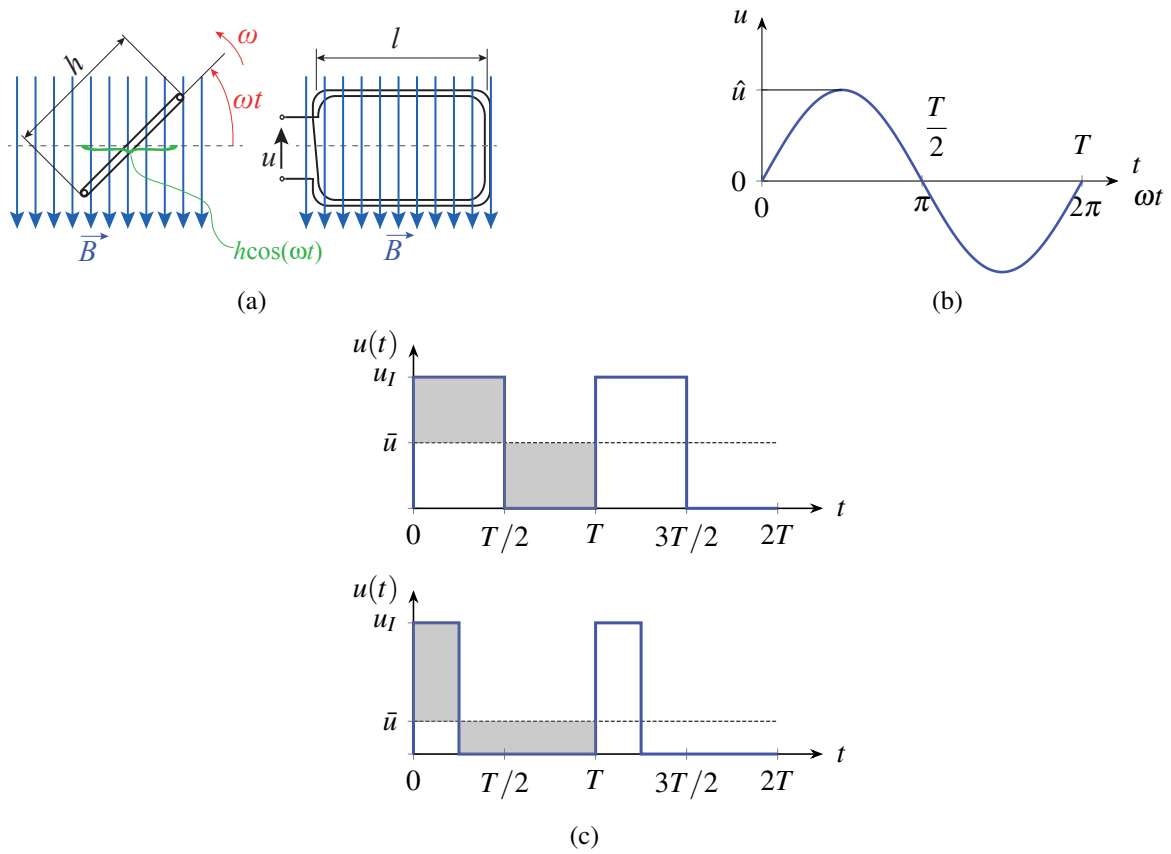


Figure 1.5: a) Prinzipdarstellung der Erzeugung einer sinusförmigen Spannung durch Induktion. b) Sinusschwingung mit der Periode T und der Amplitude $\hat{u}$. c) Rechteckfunktionen mit unterschiedlichem Mittelwert $\bar{u}$, der über die Dauer des positiven Pulses variiert werden kann (Grundprinzip einer Pulsweitenmodulation).

Periodendauer T und damit die Anzahl der Perioden pro Zeiteinheit, die Frequenz f genannt wird:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{und} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1.5}$$

$$\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{T} t \tag{1.6}$$

$$u(t) = \hat{u} \sin(\underbrace{\omega t}_{\varphi}) \;\Rightarrow\; u(\omega t + k2\pi) = u(\omega t) \tag{1.7}$$

Die Einheit der Frequenz ist $[f] = \frac{1}{s}$ = Hertz = Hz

Die Grösse ω wird als die Winkelgeschwindigkeit oder allgemein kurz als Kreisfrequenz bezeichnet. Diese hat ebenfalls die Einheit 1/s, wobei die Bezeichnung Hertz ausschliesslich für die Frequenz verwendet wird.

Der Mittelwert einer periodischen Zeitfunktion berechnet sich aus der Fläche unterhalb der Kurve (d.h. dem Integral), bezogen auf die Periodendauer T der Zeitfunktion:

$$\overline{u} = \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t=t_0+T} u(t)\mathrm{d}t \tag{1.8}$$

Beispielhaft ist in Abbildung 1.5c der Mittelwert zweier Rechteckfunktionen dargestellt. Dabei sind jeweils die beiden grauen Flächen ober- und unterhalb von des Mittelwerts $\overline{u}$ gleich. Mit der Variation der Dauer des Signals $u(t) = u_I$ (d.h. dem Einschaltintervall) kann dabei der Mittelwert $\overline{u}$ gesteuert werden. Dies wird z.B. bei der Pulsbreitenmodulation im Bereich der Leistungselektronik eingesetzt um mit sogenannten Konvertern (z.B. einem DC-DC-Wandler bzw. Gleichspannungs-Gleichspannungs-Wandler) die Ausgangsspannung zu variieren/regeln.

Gleichrichtwert

Im nächsten Schritt werden Kenngrössen betrachtet, die eine periodische Wechselgrösse gut beschreiben/charakterisieren. Der Augenblickswert einer periodischen Wechselgrösse ändert sich dauernd mit der Zeit und ist daher zur einfachen Kennzeichnung der Wechselgrösse nicht geeignet. Auch der zeitliche Mittelwert eignet sich nicht, da dieser prinzipiell gleich Null ist. Beim Scheitelwert wird die Kurvenform der Wechselgrösse und damit die mittlere Wirkung der Wechselgrösse gänzlich unberücksichtigt gelassen. Eine mögliche Kenngrösse ergibt sich, wenn man den zeitlichen Mittelwert des Betrages der Wechselgrösse verwendet. Dieser wird als Gleichrichtwert bezeichnet.

In Abbildung 1.6 ist als Beispiel der Gleichrichtwert $\overline{|i|}$ eines sinusförmigen Stromes gegeben, der mathematisch mit Hilfe von

$$\overline{|i|} = \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t=t_0+T} |i(t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi=\varphi_0+2\pi} |i(\varphi)|\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega t=\varphi_0}^{\omega t=\varphi_0+2\pi} |i(\omega t)|\mathrm{d}(\omega t) \tag{1.9}$$

ermittelt werden kann. Wie aus der Gleichung hervorgeht, ist der Gleichrichtwert gleich der mit $1/T$ gewichteten Fläche unter der Stromkurve. Folglich müssen die Flächen A_1 und A_2 gleich gross sein.

Für sinusförmige Ströme folgt mit obiger Definition und $\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x)$ allgemein:

$$\boxed{\overline{|i|}} = \frac{\hat{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin(\omega t)|\mathrm{d}(\omega t) = \frac{\hat{i}}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(\omega t)\mathrm{d}(\omega t) = \frac{-\hat{i}}{\pi}\cos(\omega t)\Big|_0^{\pi} = \boxed{\frac{2}{\pi}\hat{i}} \tag{1.10}$$

Analog ergibt sich der Gleichrichtwert für Spannungen oder andere Grössen.

Effektivwert

Neben dem Gleichrichtwert gibt es noch den häufiger verwendeten Effektivwert zur Kennzeichnung von Wechselgrössen. Dieser beschreibt die mittleren Verluste, die eine zeitabhängige Grösse in einem Widerstand hervorruft und ist wie folgt definiert: Erzeugt ein periodisch zeitabhängiger Strom in einem Widerstand im Mittel die gleiche Wärmeleistung/Verluste wie ein Gleichstrom, so ist der Effektivwert des Stromes gleich dem Wert dieses Gleichstromes.

Mit dieser Definition, folgt nun die allgemeine Berechnung des Effektivwerts für einen beliebigen periodischen Strom $i(t)$. Dieser erzeugt in einem Widerstand R die zeitabhängige Wärmeleistung: $p = i^2R$. Damit ergibt sich die in einer Periode T erzeugte Wärmeenergie W und die mittlere erzeugte Wärmeleistung P_{AC}:

$$W = \int_0^T p\,\mathrm{d}t = \int_0^T i^2R\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad P_{AC} = \frac{W}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T i^2R\,\mathrm{d}t \tag{1.11}$$

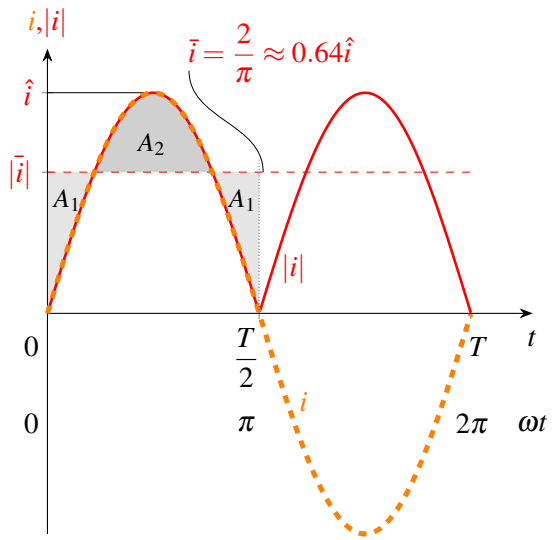


Figure 1.6: Gleichrichtwert eines sinusförmigen Stromes.

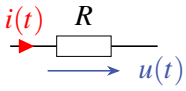
Im gleichen Widerstand würde ein Gleichstrom I die konstante Wärmeleistung $P_{DC} = I^2R$ erzeugen. Setzt man die beide Wärmeleistungen P_{AC} und P_{DC} gleich, so erhält man den allgemeinen Effektivwert I_{eff}:

$$P_{DC} = I^2R = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 R\mathrm{d}t = P_{AC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\mathrm{d}t}} \tag{1.12}$$

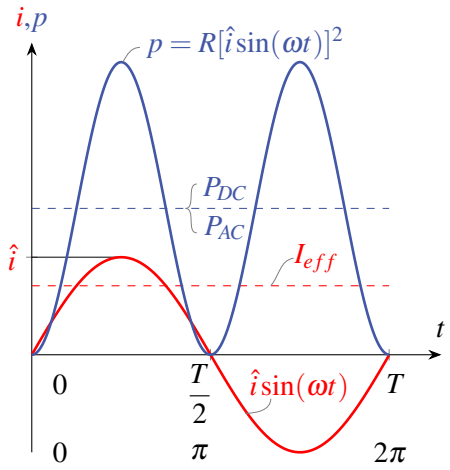
Für einen sinusförmigen Strom $i = \hat{i}\sin(\omega t)$ folgt allgemein: $\boxed{I_{eff} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}}$

Damit ist I_{eff} der zu $i(t)$ verlust-äquivalente Gleichstromwert.

Analog ergibt sich der Effektivwert für Spannungen. Der Effektivwert wird auch als RMS-Wert (Root Mean Square) bezeichnet.



(a)



(b)

Figure 1.7: a) Strom-Spannungsbeziehung an einem Widerstand. b) Zeitlicher Verlauf des sinusförmigen Stromes $i(t)$ und die dazugehörige pulsierende Leistung p. Weiterhin sind der Mittelwert P der Leistung $p(t)$ sowie der Effektivwert I des Stromes dargestellt.

Phase und Phasenverschiebung

In den bisherigen Darstellungen waren die Wechselgrössen immer gleich null für den Zeitpunkt $t = 0$. Dies muss nicht zwangsläufig so sein, wie man in Abbildung 1.8b erkennt. Dort liegt zwischen dem Beginn der positiven Halbperiode der Sinusschwingung und dem Zeitpunkt $t = 0$ bzw. $\omega t = 0$ der Winkel φ_i, der allgemein als Nullphasenwinkel bezeichnet wird. Der Winkel wird vom Nulldurchgang der positiven Halbwelle der Sinusschwingung bis zum Zeitpunkt $t = 0$ gezählt. Der Phasenwinkel ist positiv, wenn die Pfeilspitze des Winkels in Richtung der positiven Winkelzählrichtung zeigt (in Abbildung 1.8a ist die Richtung durch den Pfeil der x-Achse angegeben). Normalerweise wird der Winkel auf den Bereich $0° \leq \varphi \leq 360°$ oder $-180° \leq \varphi \leq 180°$ eingeschränkt.

In Abbildung 1.8b sind zum Beispiel eine Spannung mit einem Phasenwinkel von $\varphi_u = +50°$ und ein Strom mit einem Phasenwinkel von $\varphi_i = -40°$ dargestellt. Die Kurven können durch folgende Gleichungen beschrieben werden:

$$u = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_u) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u - \pi/2) \tag{1.13}$$

$$i = \hat{i}\sin(\omega t + \varphi_i) = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i - \pi/2) \tag{1.14}$$

Häufig ist die Phasenverschiebung zwischen zwei Signalen wichtiger als die absolute Phasenlage einer Wechselgrösse zur vertikalen Achse bei $t = 0$ bzw. $\omega t = 0$. Aus diesen Grund definiert man den Phasenverschiebungswinkel φ (hier zwischen der Spannung und dem Strom):

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \tag{1.15}$$

Im betrachteten Fall in Abbildung 1.8b, eilt die Spannung gegenüber dem Strom um 90° = 50° - (-40°) vor, d.h. $\varphi > 0$. Analog kann man sagen, dass der Strom um 90° nacheilt.

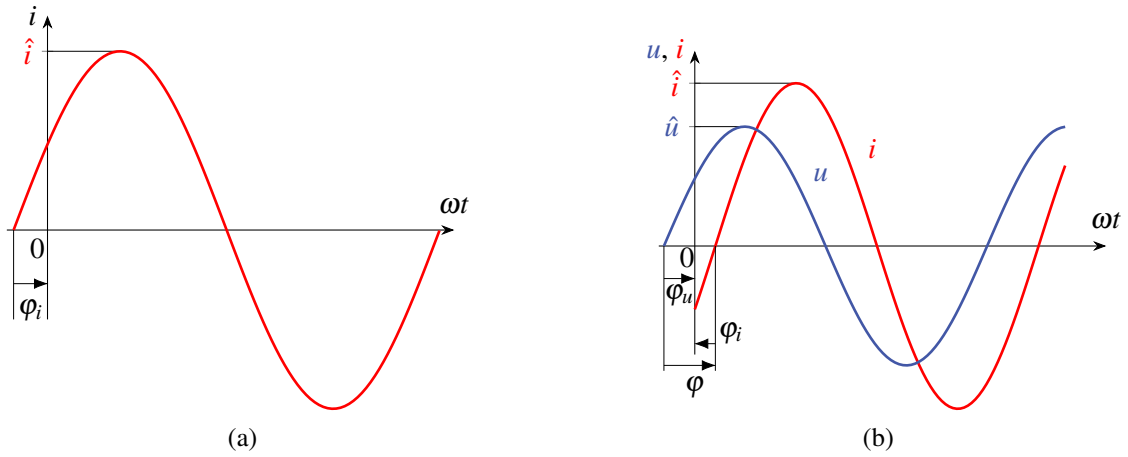


Figure 1.8: a) Sinusförmiger Strom mit einem positiven Nullphasenwinkel φ_i. b) Sinusförmige Spannung eilt gegenüber dem Strom vor.

1.1.4 Messgeräte

Digitales Oszilloskop

Zum Messen von zeitlich veränderlichen Grössen werden heutzutage digitale Oszilloskope (DSO, englisch: Digital Sampling Oscilloscope) eingesetzt. Diese tasten das zeitveränderliche Signal mittels eines Analog-Digital-Wandlers ab, so dass man ein dem analogen Signal entsprechendes digitales Signal erhält. Das digitale Signal kann dann z.B. mit Hilfe eines Rechners verarbeitet und auf einem Display dargestellt werden.

Mit dem Oszilloskop können direkt nur Signale mit Amplituden von einigen 10V gemessen werden. Um auch Signale mit grösseren Spannungsamplituden messen zu können, werden sogenannte Tastköpfe eingesetzt. Ein Tastkopf ist vom Prinzip her einen Spannungsteiler. Zu den Tastköpfen folgen im Abschnitt 1.5.6 noch weitere Informationen.

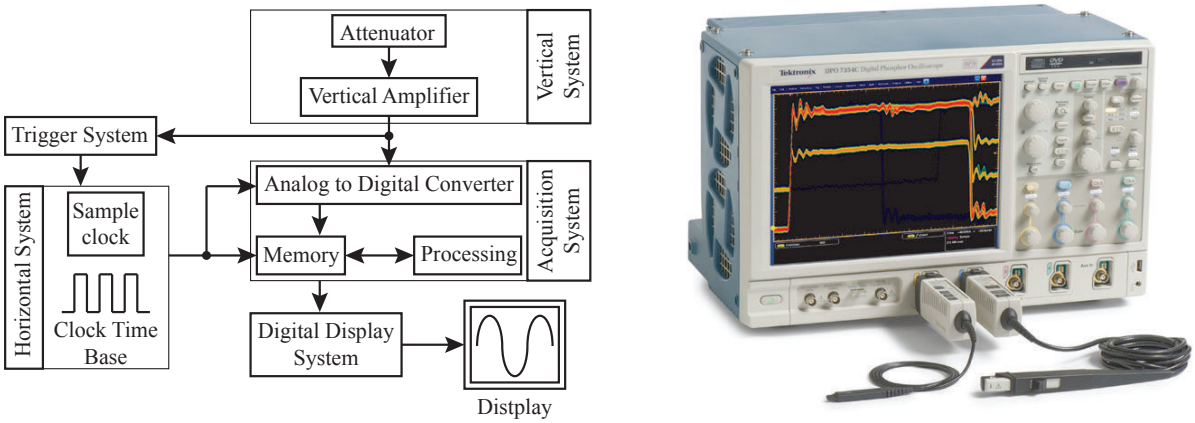


Figure 1.9: Blockdiagramm eines digitalen Oszilloskopes zur Veranschaulichung der prinzipiellen Funktionsweise und Photo eines Geräts.

Digitales Multimeter

Für die Messung von Spannungen und Strömen werden oft sogenannte Multimeter eingesetzt. Diese Geräte können meistens neben Gleich- und Wechselspannungen auch Gleich- und Wechselströme, sowie die Frequenz und Widerstände messen. Bei dem Gerät in Abbildung 1.10 wird beispielhaft die zu messende Grösse über den Drehschalter ausgewählt. Für Wechselgrössen wird meist der Effektivwert der gemessenen Grösse angezeigt, d.h. detaillierte Informationen über den zeitlichen Verlauf der Grösse können normalerweise nicht mit einem Multimeter ermittelt werden. Dazu wird ein Oszilloskop benötigt.

Figure 1.10: Beispiel für ein digitales Multimeter

Strommessgerät

Digitale Multimeter wie im letzten Abschnitt gezeigt sind prinzipiell normalerweise Spannungsmessgeräte. Diese können jedoch die Amplitude eines zu messenden Stromes mit Hilfe des ohmschen Gesetzes bestimmen, d.h. über den Spannungsabfall über einen eingebauten oder einen externen bekannten Messwiderstand R_S – auch Shunt(-Widerstand) genannt (siehe rechts in Abbildung 1.11a). So wird aus dem Spannungsmessgerät quasi auch ein Amperemeter/Strommessgerät.

Beispielhaft soll der Strom I_3 durch den Widerstand R_3 in Abbildung 1.11a gemessen werden. Dazu muss der Stromkreis zuerst unterbrochen/aufgetrennt werden und das Strommessgerät wird in Reihe zu R_3 geschaltet, damit durch das Messgerät/den Shunt der zu messende Strom I_3 fliesst. Der Strom I_3 fliesst damit auch über den Shunt R_S und ruft dort den Spannungsabfall $U_S = R_S I_3$ hervor, der mit dem Spannungsmessgerät gemessen wird. Dabei rechnet das Multimeter die gemessene Spannung um und zeigt direkt den gemessenen Strom I_3 an, da der Wert des internen Shunt-Widerstandes R_S bekannt ist.

Um die Beeinflussung des Netzwerkes durch das Strommessgerät und damit den Strommessfehler klein zu halten, muss der Wert von R_S klein gegenüber den anderen Widerständen im Netzwerk (insbesondere klein gegenüber dem Wert von R_3) sein.

Eine Erweiterung des Messbereichs erreicht man durch Parallelschalten eines externen Widerstandes zu Widerstand R_S. Damit ergibt sich ein Stromteiler, d.h. das Messgerät zeigt nicht mehr direkt den zu messenden Strom an, sondern nur den durch R_S fliessenden Teilstrom und der Gesamtstrom muss aus dem Teilstrom und dem Wert des externen Widerstandes berechnet werden.

Neben der Messung des Stromes über einen Shunt werden u.a. noch sogenannte Stromzangen verwendet, die den Strom über das vom Strom erzeugte Magnetfeld messen. Diese haben den Vorteil, dass der Stromkreis für die Messung vorher nicht aufgetrennt/unterbrochen werden muss.

1.2 Zeigerdiagramme

Im weiteren Verlauf des Kapitels werden nun Netzwerke mit sinusförmigen Strömen und Spannungen im stationären Zustand betrachtet, d.h. die Ströme und Spannungen können im Allgemeinen wie folgt dargestellt werden:

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \varphi_u) = \hat{u}\sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.16}$$

$$i(t) = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi_i) = \hat{i}\sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.17}$$

Um eine kompakte Darstellung und Berechnung der Ströme und Spannungen in solchen Netzwerken zu ermöglichen, werden die Wechselgrössen im Folgenden in Form von Zeigern dargestellt.

In Abbildung 1.12a links ist ein vom Mittelpunkt M ausgehender blauer Strahl (Pfeil) mit der Länge $\hat{u}$ dargestellt, der entgegen dem Uhrzeigersinn mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Punkt M rotiert. Der rotierende Strahl wird Zeiger genannt und mit dem Symbol $\underline{\hat{u}}$' bezeichnet.

Im Diagramm in Abbildung 1.12a rechts wird der zurückgelegte Winkel ωt waagrecht (x-Achse) und die Projektion des Zeigers $\underline{\hat{u}}$' auf die vertikale y-Achse senkrecht aufgetragen. Damit ergibt sich aus der Projektion des rotierenden Zeigers der zeitliche Verlauf der dargestellten Sinuskurve. Dies ist in Abbildung 1.12b für 8 verschiedene Winkel aufgetragen. Nimmt man die Projektion des Zeigers auf die horizontale Achse, so resultiert eine Kosinusfunktion so wie dies unten in Abbildung 1.12b dargestellt ist.

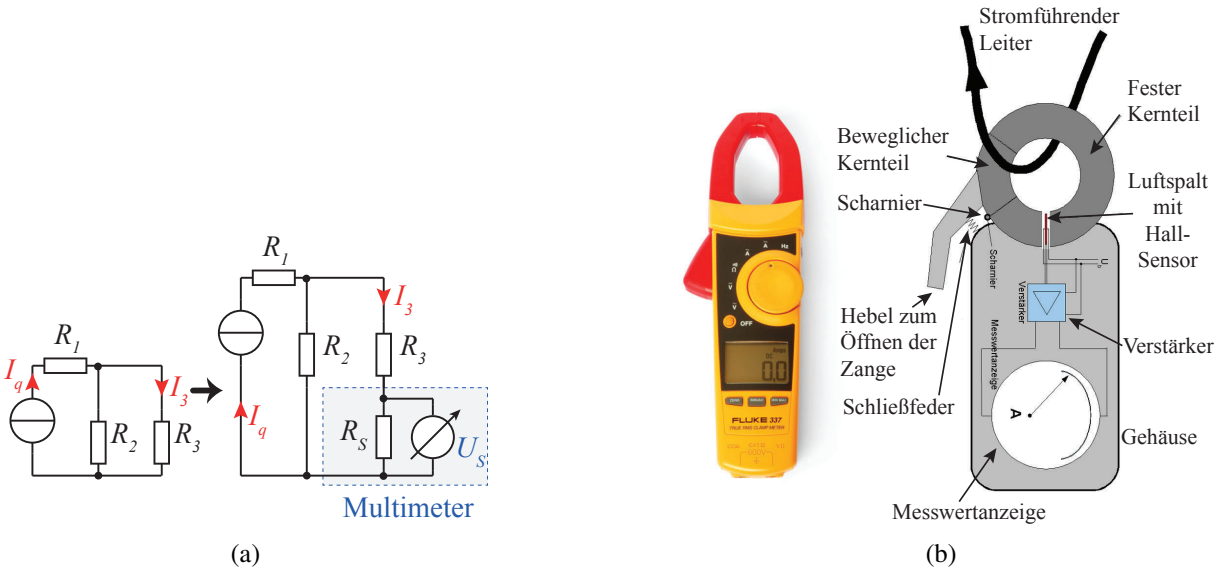


Figure 1.11: a) Beispielnetzwerk, in welchem der Strom I_3 gemessen werden soll. Dies erfolgt durch Auftrennen des Stromkreises und in Reihe schalten des Multimeters mit internem Shunt-Widerstandes R_S. b) Photo und prinzipieller Aufbau einer Stromzange.

Der Zeiger $\underline{\hat{u}}$' zu einem festen Zeitpunkt (z.B. $t = 0$) kann dabei als Repräsentant für die gesamte sinusförmige Spannung $u = \hat{u}\sin(\omega t)$ betrachtet werden. Der feststehende Zeiger für $t = 0$ wird mit $\underline{\hat{u}}$ bezeichnet.

In Abbildung 1.13a sind die zwei sinusförmigen Ströme

$$i_1(t) = \hat{i}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \overset{\varphi_1=0}{=} \hat{i}_1 \sin(\omega t) \tag{1.18}$$

$$i_2(t) = \hat{i}_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \tag{1.19}$$

mit unterschiedlichen Amplituden und unterschiedlichen Nullphasenwinkeln dargestellt. Jedoch rotieren die Zeiger für die beiden Sinusfunktionen mit der gleichen Kreisfrequenz, so dass die relative Lage der beiden Zeiger zueinander während der Rotation unverändert bleibt und diese gemeinsam mit der gleichen Frequenz um den Mittelpunkt rotieren. In dem betrachteten Beispiel eilt i_2 bezogen auf i_1 vor bzw. i_1 eilt bezogen auf i_2 nach.

Die Darstellung von mehreren Zeigern in einer komplexen Ebene wird allgemein als Zeigerdiagramm bezeichnet.

In Abbildung 1.13b sind eine sinusförmige Spannung und ein sinusförmiger Strom in einer gemeinsamen Abbildung dargestellt. In dem Beispiel hat der Strom einen negativen Nullphasenwinkel φ_i, so dass der

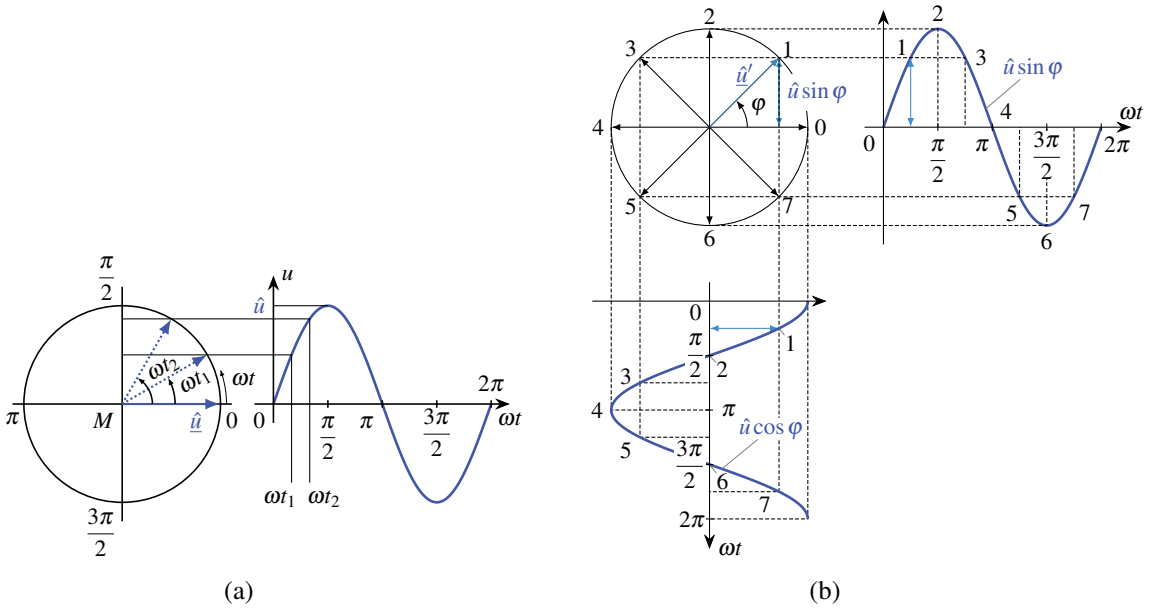


Figure 1.12: a) Rotierender Zeiger $\underline{\hat{u}}$' und der dazugehörige zeitliche Verlauf der Spannung $u(t)$. b) Rotierender Zeiger $\underline{\hat{u}}$' für 8 verschiedene Winkel und die dazugehörige Projektion auf die y-Achse, die eine Sinusfunktion darstellt, sowie die Projektion auf die x-Achse, die eine Kosinusfunktion darstellt.

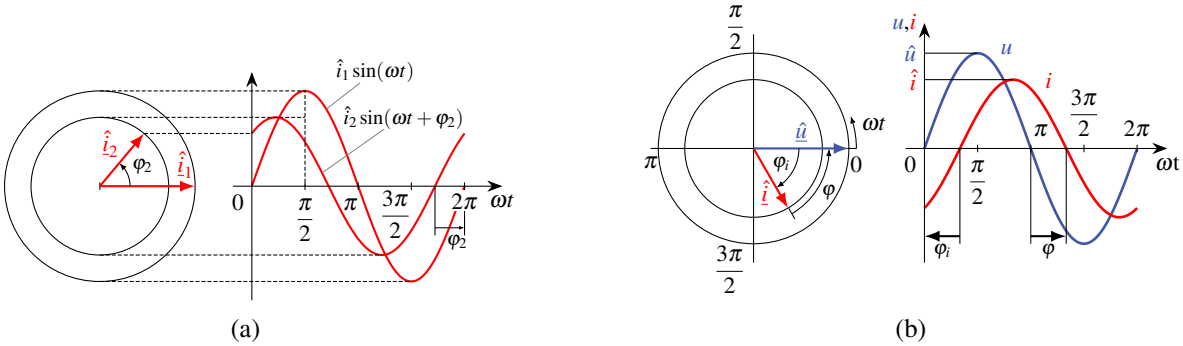


Figure 1.13: a) 2 Stromzeiger mit unterschiedlicher Amplitude und unterschiedlichem Nullphasenwinkel. Die Den Zeitverläufe der Ströme erhält man wieder über die beschriebene Projektion. b) Ein Stromzeiger, der gegenüber dem Spannungszeiger nacheilt.

Zeiger $\underline{\hat{i}}$ um den Winkel φ_i gegenüber der waagrechten x-Achse verschoben ist. Der Winkel φ zwischen den Zeigern ist gleich dem Phasenverschiebungswinkel, um den die Spannung u im betrachteten Beispiel gegenüber dem Strom i verschoben ist bzw. voreilt.

Die Länge der Zeiger ist in den Beispielen durch die Amplitude der sinusförmigen Grösse definiert. Alternativ kann man für die Länge der Zeiger auch den Effektivwert nutzen, woraus die sogenannten Effektivwertzeiger resultieren.

Bei der Berechnung von Netzwerken mit sinusförmigen Grössen werden die Augenblickswerte der jeweiligen Wechselgrössen nicht benötigt, da der Zeiger, der die sinusförmige Wechselgrösse repräsentiert, alle relevanten Informationen (Amplitude und Phasenlage) enthält. Aus diesem Grund wird bei der Berechnung der Netzwerke häufig nur ein Zeigerdiagramm (anstatt der Zeitverläufe) verwendet (siehe z.B. Abbildung 1.14a).

Da für die Berechnung prinzipiell nur die (Phasen-)Lage der Zeiger zueinander wichtig ist, kann das gesamte Zeigerdiagramm auch um einen beliebigen Winkel verdreht (Abbildung 1.14b) oder ein Zeiger parallel verschoben werden (Abbildung 1.14c). Dies kann unter Umständen bei den Berechnungen hilfreich sein. In Abbildung 1.14d sind beispielhaft noch die Effektivwertzeiger $\underline{U}$ und $\underline{I}$ dargestellt, die eine um $1/\sqrt{2}$ geringere Länge im Vergleich zu den Spitzenwertzeigern haben.

Der Vorteil der Zeigerdarstellung zeigt sich z.B. bei der Addition zweier phasenverschobener sinusförmiger Wechselgrössen mit gleicher Frequenz wie dies in Abbildung 1.14e beispielhaft dargestellt ist. Dort sollen die zwei phasenverschobenen Wechselspannungen $\underline{\hat{u}}_1$ und $\underline{\hat{u}}_2$ addiert werden. Das Ergebnis erhält man mittels geometrischer Addition der beiden Zeiger womit der Summenzeiger $\underline{\hat{u}}_3$ resultiert, d.h. die Summation zweier allgemeiner Sinusfunktionen mit der gleichen Kreisfrequenz ω resultiert wieder in eine Sinusfunktion mit derselben Frequenz.

Denkt man sich das Diagramm rotierend, so sind u_1, u_2 und u_3 die Projektionen auf die y-Achse und damit die Augenblickswerte der jeweiligen Spannungen. Für jede beliebige Lage des Diagramms gilt $u_3 = u_1 + u_2$, womit der Betrag des Zeigers $\underline{\hat{u}}_3$ den Scheitelwert der Summen-Wechselspannung darstellt. Der Phasenwinkel der Summenspannung ist durch den Winkel φ_3 gegeben.

$$u_3(t) = \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = \hat{u}_3 \sin(\omega t + \varphi_3) \tag{1.20}$$

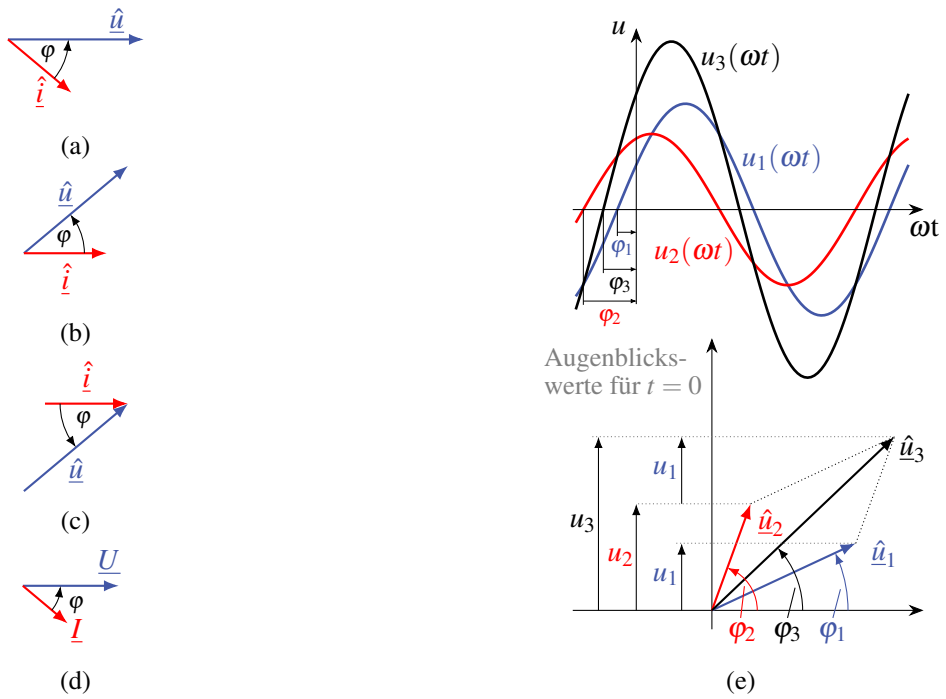


Figure 1.14: a) Zeigerdiagramm mit Spannungs- und Stromzeiger. b) Das Diagramm aus Bild a) wurde um den Winkel φ rotiert. c) Der Spannungszeiger wurde gegenüber Bild b) parallel verschoben. d) Effektivwertzeiger statt Spitzenwertzeiger. e) Veranschaulichung der Addition von 2 sinusförmigen, gleichfrequenten Wechselspannungen mittels Zeiger.

1.2.1 Analytische Addition

Im Folgenden wird noch zur Verdeutlichung der Zusammenhänge die Amplitude und der Nullphasenwinkel des Stromes $i_3(t) = \hat{i}_3 \sin(\omega t + \varphi_3) = \hat{i}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{i}_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ zum Vergleich noch analytisch berechnet. Dieser etwas aufwändige Rechenschritt ist später bei Nutzung der Beschreibung von Zeigern mittels komplexer Zahlen (siehe Abschnitt 1.3.5) nicht mehr notwendig.

Mit dem Additionstheorem $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ folgt:

$$\begin{aligned} i_1(t) + i_2(t) &= \hat{i}_1(\sin\omega t\cos\varphi_1 + \cos\omega t\sin\varphi_1) + \hat{i}_2(\sin\omega t\cos\varphi_2 + \cos\omega t\sin\varphi_2) \\ &= \left(\hat{i}_1\cos\varphi_1 + \hat{i}_2\cos\varphi_2\right)\sin\omega t + \left(\hat{i}_1\sin\varphi_1 + \hat{i}_2\sin\varphi_2\right)\cos\omega t \\ &= \hat{i}_3\cos\varphi_3\sin\omega t + \hat{i}_3\sin\varphi_3\cos\omega t = i_3(t) \end{aligned} \tag{1.21}$$

Aus dem Vergleich der Koeffizienten ergibt sich:

$$\hat{i}_3\sin\varphi_3 = \hat{i}_1\sin\varphi_1 + \hat{i}_2\sin\varphi_2 \tag{1.22}$$

$$\hat{i}_3\cos\varphi_3 = \hat{i}_1\cos\varphi_1 + \hat{i}_2\cos\varphi_2 \tag{1.23}$$

Quadrieren und addieren von (1.22) und (1.23) bzw. aufstellen des Bruches (1.22)/(1.23) zusammen mit $\tan\varphi = \sin\varphi/\cos\varphi$ liefert:

$$\hat{i}_3 = \sqrt{\hat{i}_1^2 + \hat{i}_2^2 + 2\hat{i}_1\hat{i}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{1.24}$$

$$\tan\varphi_3 = \frac{\hat{i}_1\sin\varphi_1 + \hat{i}_2\sin\varphi_2}{\hat{i}_1\cos\varphi_1 + \hat{i}_2\cos\varphi_2} \tag{1.25}$$

Die Amplitude $\hat{i}_3$ stellt dabei die Länge der Diagonalen des Parallelogramms in Abbildung 1.15b dar und der Winkel φ_3 ist der Winkel des Stromzeigers $\underline{\hat{i}}_3$ gegenüber der Horizontalen, d.h. der Nullphasenwinkel des Stromes $i_3(t)$. Damit folgt, dass der Summenzeiger einfach durch geometrische Addition der zwei Zeiger ermittelt werden.

Im Falle gleicher Nullphasenwinkel $\varphi_1 = \varphi_2$ dürfte man die Ströme auch direkt algebraisch addieren, da die beiden Grössen "in Phase" sind und die Zeiger in dieselbe Richtung zeigen.

1.3 Bauelemente im Wechselstromkreis

Bevor die Berechnung von Netzwerken mit Hilfe von Zeigern (d.h. die komplexe Wechselstromrechnung) näher erläutert wird, wird im Folgenden zuerst das Verhalten von Widerständen, Induktivitäten und Kondensatoren an einer sinusförmigen Spannungsquelle betrachtet. Ziel ist es, die Verhältnisse der Amplituden und der Phasen der Spannungen und Ströme an den Bauteilen im Zeitbereich zu ermitteln, woraus sich die prinzipielle Lage der Strom- und Spannungszeiger an den Bauteilen ableiten lässt. Später werden diese Zusammenhänge noch mit Hilfe von Zeigern abgeleitet, woraus sich die Strom-Spannungs-Beziehungen im "'Zeigerbereich"' ergeben.

Für die im Folgenden betrachteten Zeiger wird immer der Spitzenwert verwendet und der Strom als Bezugsgrösse für den Phasenwinkel angenommen.

1.3.1 Widerstand im Wechselstromkreis

In Abbildung 1.16a ist ein Widerstand an einer Wechselspannungsquelle mit der Spannung $u(t) = \hat{u}\sin(\omega t)$ dargestellt. Der Augenblickswert des resultierenden Stromes ergibt sich unmittelbar aus dem Ohmschen Gesetz $u(t) = Ri(t)$:

$$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t) \rightarrow i(t) = \tfrac{u(t)}{R} = \tfrac{\hat{u}}{R}\sin(\omega t) = \hat{i}\sin(\omega t) \rightarrow \hat{i} = \frac{\hat{u}}{R} \tag{1.26}$$

Wie man erkennt, haben der Strom und die Spannung die gleiche Phasenlage, d.h. sie sind in Phase. Das Ohmsche Gesetz beschreibt dabei den Zusammenhang zwischen den Amplituden des Stromes und der Spannung.

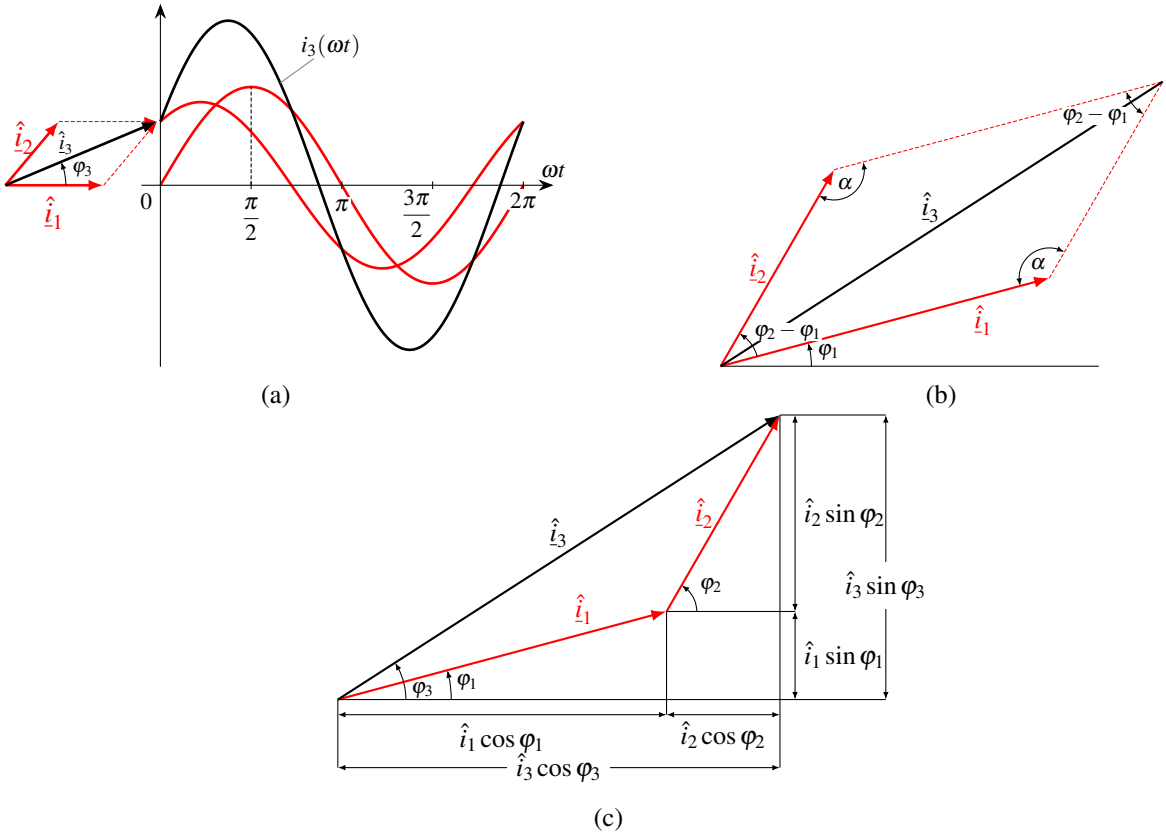


Figure 1.15: a) Darstellung der Addition von 2 sinusförmigen Signalen im Zeitbereich. b) Berechnen des Summenstromes mit Hilfe der geometrischen Addition der beiden Zeiger. c) Gegenüber Bild b) ist der Zeiger $\hat{\underline{i}}_2$ parallel verschoben und die einzelnen Anteile/Teilsummanden in x- und y-Richtung zum Berechnen von $\hat{\underline{i}}_3$ sind separat dargestellt.

In Abbildung 1.16b sind beispielhaft die Zeitverläufe des Stromes und der Spannung dargestellt. In Abbildung 1.16c sind die dazugehörigen Zeiger abgebildet.

Der Spitzenwert des Stromes beträgt $\hat{i} = \hat{u}/R$ (Effektivwert: $I = U/R$) und der Widerstand R wird in der Wechselstromtechnik – zur Unterscheidung von später noch zu erläuternden anderen Widerständen – als Wirkwiderstand und sein Kehrwert $G = 1/R$ als Wirkleitwert bezeichnet.

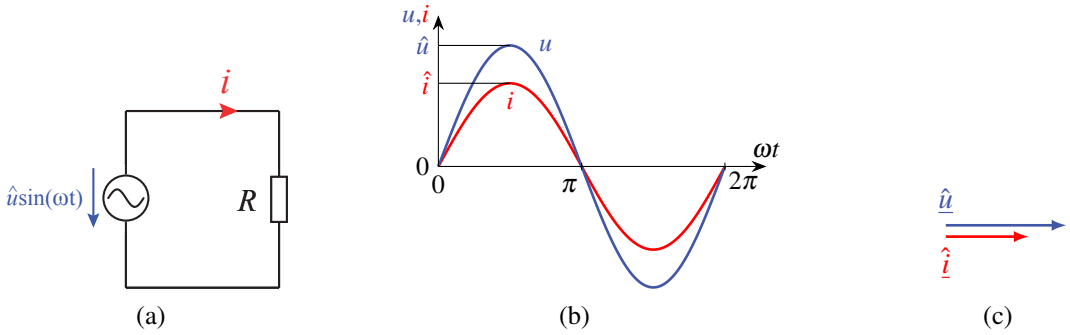


Figure 1.16: a) Widerstand an einer Wechselspannungsquelle. b) Zeitverlauf des Stromes und der Spannung für den Widerstand R und in c) die dazugehörigen Zeiger.

1.3.2 Induktivität im Wechselstromkreis

Als nächstes wird das Verhalten von Induktivitäten bei Betrieb mit sinusförmigen Grössen anhand des Netzwerkes in Abbildung 1.17a untersucht. Dort ist eine ideale lineare Induktivität an einer sinusförmi-

gen Wechselspannungsquelle angeschlossen. Der im Netzwerk fliessende zeitabhängige Strom i erzeugt ein sich änderndes Magnetfeld, wodurch es zur Selbstinduktion kommt. Die Spannung ergibt sich bei gegebenem Strom mit $u = L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$. Da alle Bauelemente linear sind, folgt mit einer sinusförmigen Quellenspannung $u(t)$ auch ein sinusförmiger Strom. Nimmt man an, dass $i = \hat{i}\sin(\omega t)$ gilt, so folgt für die Spannung:

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}\hat{i}\sin(\omega t)}{\mathrm{d}t} = \hat{i}\omega L\cos(\omega t) = \hat{i}\omega L\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.27}$$

Damit folgt, dass die Spannung gegenüber dem Strom um den Phasenverschiebungswinkel $\varphi = \pi/2 = 90°$ voreilt, wie dies auch in Abbildung 1.17b für die Zeitverläufe dargestellt ist. In Abbildung 1.17c ist das dazugehörige Zeigerdiagramm abgebildet.

Der Effektivwert bzw. der Spitzenwert der Spannung ergibt sich aus $U = \omega LI$ bzw. $\hat{u} = \omega L\hat{i}$. Dabei wird der Ausdruck $X_L = \omega L$ als (induktiver) Blindwiderstand bzw. Reaktanz bezeichnet. Diese steigt linear mit der Frequenz an und hat die Einheit $[X_L] = \Omega$. Für eine Gleichspannung (d.h. $\omega = 0$) stellt die Induktivität einen Kurzschluss, für sehr hohe Frequenzen eine Unterbrechung dar. Der negative Kehrwert $-1/\omega L$ wird als (induktiver) Blindleitwert B_L bzw. Suszeptanz bezeichnet (der Grund für das "-" wird später noch erläutert im Abschnitt 1.4.2).

Durch Messung von Spannung und Strom bei einer bekannten Frequenz kann die Induktivität ermittelt werden: $L = \frac{\hat{u}}{\omega\hat{i}}$

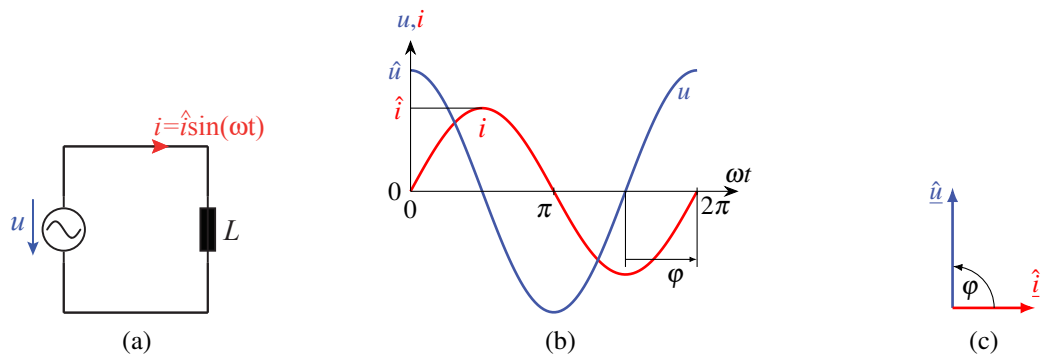


Figure 1.17: a) Induktivität an einer sinusförmigen Spannungsquelle. b) Zeitlicher Verlauf der Ströme und Spannungen für die Induktivität und in c) die dazugehörigen Zeiger.

1.3.3 Kondensator im Wechselstromkreis

Als letztes wird noch eine ideale Kapazität an einer Wechselspannungsquelle betrachtet, so wie dies in Abbildung 1.18a dargestellt ist. In diesem Netzwerk wird der Kondensator dauernd von der Wechselspannungsquelle über den Strom i aufgeladen und entladen. Für die Augenblickswerte der Spannung u und der Ladung q folgt: $u(t) = q(t)/C$ und für eine infinitesimale Spannungsänderung du ergibt sich: $\mathrm{d}q(t) = i(t)\mathrm{d}t = C\mathrm{d}u(t)$, d.h. die bekannte Strom-Spannungs-Beziehung für Kondensatoren: $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$. Ausgehend von der Quellspannung $u(t) = \hat{u}\sin(\omega t)$ folgt für den Strom:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}\hat{u}\sin(\omega t)}{\mathrm{d}t} = \omega C\hat{u}\cos(\omega t) = \omega C\hat{u}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.28}$$

Aus der Gleichung ergibt sich, dass beim Kondensator die Spannung gegenüber dem Strom um den Phasenverschiebungswinkel $\varphi = -\pi/2 = -90°$ nacheilt. Beispielhaft sind in Abbildung 1.18b entsprechende Zeitverläufe gegeben. Das dazugehörige Zeigerdiagramm ist in Abbildung 1.18c dargestellt. Eine zeitlich konstante Spannung U_0 über dem Kondensator trägt nicht zum Strom bei.

Wie man der Gleichung entnehmen kann, ergibt sich der Effektivwert bzw. der Spitzenwert des Stromes aus $I = \omega CU$ bzw. $\hat{i} = \omega C\hat{u}$. Der Ausdruck $B_C = \omega C$ wird als (kapazitiver) Blindleitwert bzw. Suszeptanz bezeichnet. Der kapazitive Blindleitwert nimmt dabei mit steigender Frequenz zu und bildet für unendlich hohe Frequenzen einen Kurzschluss. Für Gleichspannungen ($f = 0$) stellt der Kondensator einen Leerlauf

dar (Leitwert = 0). Der Blindleitwert hat die Einheit $[B_C] = 1/\Omega$. Der negative Kehrwert des Blindleitwerts wird als (kapazitiver) Blindwiderstand $X_C = -\frac{1}{\omega C}$ bzw. als Reaktanz bezeichnet (der Grund für das "-" wird später noch in Abschnitt 1.4.2 erläutert).

Durch Messung von Spannung und Strom bei einer bekannten Frequenz kann die Kapazität ermittelt werden: $C = \hat{i}/\omega\hat{u}$.

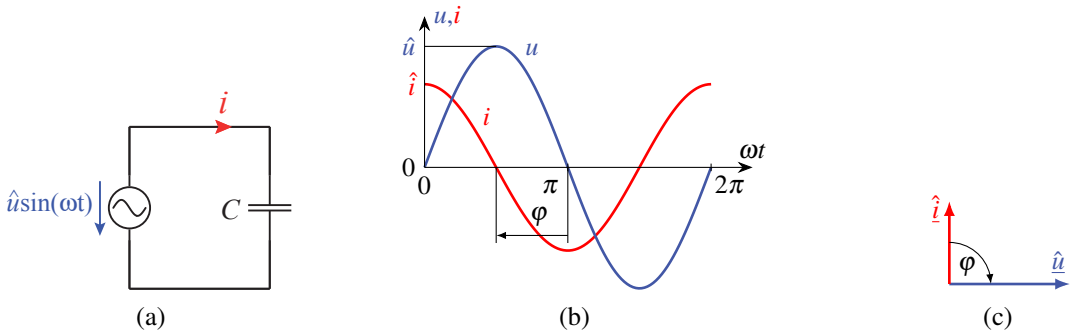


Figure 1.18: a) Kondensator an einer sinusförmigen Wechselspannungsquelle. b) Zeitverlauf des Stromes und der Spannung für den Kondensator und die dazugehörigen Zeiger in Bild c).

1.3.4 Beispiel – Konstruktion eines Zeigerdiagramms

Im Folgenden werden die Spannungen und Ströme des Netzwerkes in Abbildung 1.19a schrittweise mit Hilfe eines Zeigerdiagramms bestimmt. Die Quellenspannung $u(t) = \hat{u}\sin(\omega t)$ und die Komponentenwerte sind dabei gegeben. Die Berechnungsschritte sind:

1. Der Zeiger $\underline{\hat{u}}_1$ für die Spannung über R_1 wird als Bezugszeiger in die horizontale Achse gelegt. Der Spannungswert selbst ist noch unbekannt.
2. Der Strom i_1 ist in Phase mit u_1 ($\rightarrow$ Zeiger haben gleiche Richtung).
3. Der Strom durch den Kondensator $i_C(t)$ hat die Amplitude $\hat{i}_C = \omega C\hat{u}_1 = \omega C R_1 \hat{i}_1$ und eilt gegenüber $u_1(t)$ (=u_C) um $\pi/2$ vor. Damit ist auch das Verhältnis $\hat{i}_C/\hat{i}_1$ bekannt.
4. Gemäss der Knotengleichung $i_2(t) = i_C(t) + i_1(t)$ folgt der Zeiger $\underline{\hat{i}}_2$ über die geometrische Addition der Stromzeiger $\underline{\hat{i}}_C$ und $\underline{\hat{i}}_1$.
5. Die Spannung über R_2 ist in Phase zu i_2, d.h. die beiden Zeiger sind parallel. Für die Amplitude gilt: $\hat{u}_2 = R_2\hat{i}_2 = (R_2\hat{i}_2)/(R_1\hat{i}_1)\,\hat{u}_1$, d.h. das Verhältnis der Länge der beiden Spannungszeiger $\underline{\hat{u}}_2/\underline{\hat{u}}_1$ ist bekannt.
6. Aus der Maschengleichung $\hat{u}\sin(\omega t) = u_1(t) + u_2(t)$ folgt der Spannungszeiger $\underline{\hat{u}}$ als geometrische Summe der Zeiger für die Teilspannungen.
7. Aus der bekannten Länge von $\underline{\hat{u}}$ folgen die anderen Spannungswerte.

Figure 1.19: a) Beispielnetzwerk für die Konstruktion eines Zeigerdiagramms. b) Resultierendes Zeigerdiagramm.

8. Mit $\hat{u}_1$ ist nun auch $\hat{i}_1 = \frac{\hat{u}_1}{R_1}$ bekannt und damit die Amplituden aller Ströme.

9. Die Phasenbeziehungen der Ströme und Spannungen ergeben sich ebenfalls aus dem Zeigerdiagramm.

Die Periodizität der sinusförmigen Ströme und Spannungen spiegelt sich in der Rotation des Zeigerdiagramms wieder. Die grafische Darstellung in Abbildung 1.19b ist eine Momentaufnahme (z.B. für den Zeitpunkt $t = 0$).

Die Amplituden und Phasenbeziehungen der Zeiger sind zeitunabhängig, d.h. konstant. Folglich würde für rotierende Zeiger das gesamte Zeigerdiagramm in Abbildung 1.19b als Einheit um den Ursprung rotieren und die Lage der Zeiger zueinander würde sich nicht ändern.

1.3.5 Grundbegriffe der komplexen Rechnung

Die grafische Ermittlung eines Rechenergebnisses, wie z.B. der Summenspannung, bzw. die Berechnung eines Netzwerkes wie im vorangegangenen Abschnitt ist relativ aufwendig und ungenau. Um die grafische Berechnung zu vermeiden, beschreibt man die Zeiger im Zeigerdiagramm mit Hilfe von komplexen Zahlen, so dass z.B. der resultierende Summenzeiger analytisch mittels komplexer Rechnung bestimmt werden kann.

Zusätzlich zu den reellen Zahlen werden in der komplexen Rechnung imaginäre Zahlen verwendet. Deren Einheit j ergibt sich aus der Definition $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$. Die Summe aus einer reellen X und einer imaginären Zahl $\mathrm{j}Y$ heisst komplexe Zahl $\underline{Z} = X + \mathrm{j}Y$. Diese komplexe Zahl lässt sich in der Gauss'schen Zahlenebene darstellen, wie in Abbildung 1.20 gezeigt ist.

Dabei ist $\mathrm{Re}(\underline{Z}) = X = Z\cos(\varphi)$ der Realteil und $\mathrm{Im}(\underline{Z}) = Y = Z\sin(\varphi)$ der Imaginärteil der komplexen Zahl $\underline{Z}$.

Mit dem Real- und dem Imaginärteil folgt, dass die komplexe Zahl wie folgt dargestellt werden kann: $\underline{Z} = Z(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$. Mit dem Eulerschen Satz: $\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ ergibt sich die Exponentialform: $\underline{Z} = Z\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$. Der Betrag der komplexen Zahl kann mit $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ und der Winkel mit $\varphi = \arctan\frac{Y}{X}$ ermittelt werden.

Zu jeder komplexen Zahl $\underline{Z}$ kann man die konjugiert komplexe Zahl $\underline{Z}^*$ angeben. Diese unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils, d.h. mit $\underline{Z} = X + \mathrm{j}Y = Z\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ folgt $\underline{Z}^* = X - \mathrm{j}Y = Z\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$. Mit der konjugiert komplexen Zahl erhält man: $\underline{Z}\,\underline{Z}^* = X^2 + Y^2 = Z^2$.

Hinweis: Es gilt: $\mathrm{e}^{\mathrm{j}0} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi} = 1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} = -1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2} = j$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\pi/2} = -j$

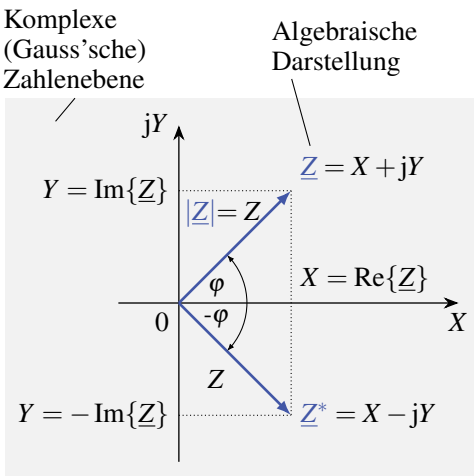


Figure 1.20: Komplexe Zahlenebene mit der komplexen Zahl $\underline{Z}$ und deren konjugiert komplexen Zahl.

Rechenoperationen mit komplexen Zahlen

Im Folgenden werden kurz zur Auffrischung einige Rechenregeln für komplexe Zahlen wiederholt.

▷ Addition/Subtraktion: Real- und Imaginärteil werden addiert bzw. subtrahiert:

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = X_1 + X_2 + \mathrm{j}(Y_1 + Y_2) \tag{1.29}$$
$$\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = X_1 - X_2 + \mathrm{j}(Y_1 - Y_2) \tag{1.30}$$

▷ Multiplikation:

$$\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = Z_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} Z_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} = Z_1 Z_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{1.31}$$

▷ Division:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{Z_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}}{Z_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{1.32}$$

▷ Multiplikation mit j $\Rightarrow$ $\underline{Z}$ wird um $\frac{\pi}{2}$ gegen Uhrzeigersinn gedreht.

▷ Division durch j $\Rightarrow$ $\underline{Z}$ wird um $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn gedreht.

$$\mathrm{j}\underline{Z} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} Z \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \qquad = Z\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi+\frac{\pi}{2})} \tag{1.33}$$
$$\frac{1}{\mathrm{j}}\underline{Z} = -\mathrm{j}\underline{Z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} Z \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \qquad = Z\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi-\frac{\pi}{2})} \tag{1.34}$$

▷ Multiplikation und Division sind prinzipiell auch in der Komponentenform $\underline{Z} = X + \mathrm{j}Y$ möglich, jedoch aufwendiger.

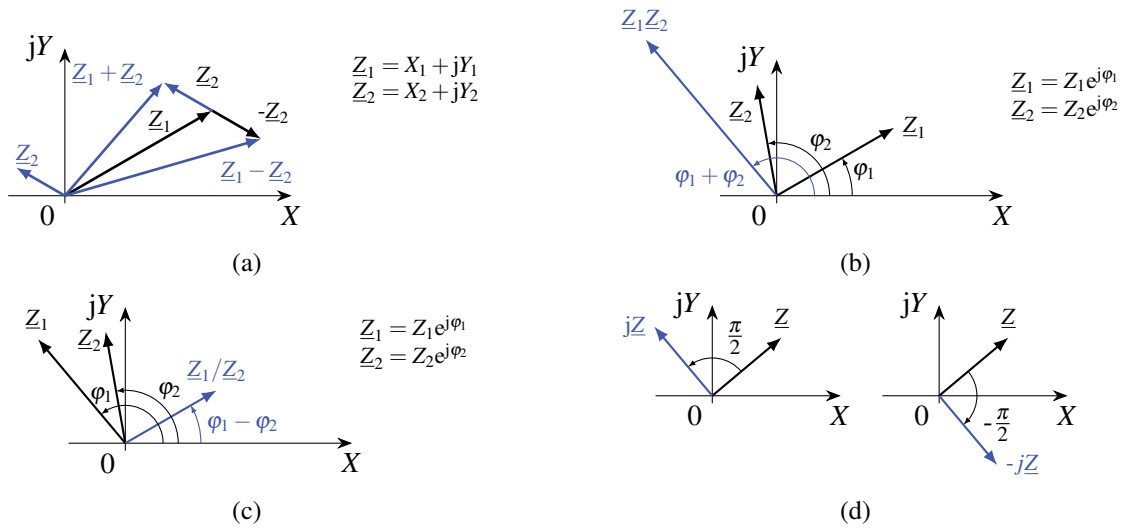


Figure 1.21: a) Addition und Subtraktion, b) Multiplikation und c) Division von 2 Zeigern. In d) ist die Rotation einen Zeigers bei Multiplikation und Division mit j.

1.3.6 Komplexe Wechselstromrechnung

Wie oben bereits erläutert, lassen sich sinusförmige Wechselgrössen allgemein durch Zeiger darstellen. Trägt man den Zeiger in die komplexe Ebene ein, so kann man diesen durch einen komplexen Ausdruck beschreiben. Dadurch kann eine geometrische Addition von Zeigern vereinfacht mit Hilfe der komplexen Rechnung durchgeführt werden.

Bei der Berechnung von Netzwerken haben die Spannungen und Ströme eines sinusförmig erregten Netzwerkes stationär ebenfalls einen sinusförmigen Verlauf mit derselben Frequenz wie die Quellenspannungen/-ströme. Daher müssen nur die Amplituden und Phasenlagen der unbekannten Grössen bestimmt werden, denn die Frequenz ist ja bekannt.

Für eine sinusförmige Spannung $u(t) = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_u)$ erhält man z.B. den rotierenden Zeiger:

$$\underline{\hat{u}}' = \Re(\underline{\hat{u}}') + \mathrm{j}\Im(\underline{\hat{u}}') = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u) + \mathrm{j}\hat{u}\sin(\omega t + \varphi_u) = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)} \tag{1.35}$$

Die Länge des Zeigers ist gleich dem Spitzenwert der Spannung und zum Zeitpunkt $t = 0$ schliesst der Zeiger mit der positiven reellen Achse den (Nullphasen-)Winkel φ_u ein (siehe Abbildung 1.22). Die Rotation des Zeigers spiegelt die Periodizität der Sinusschwingung wider und die graphische Darstellung des Zeigerdiagramms in Abbildung 1.22 ist eine Momentaufnahme für einen festen Zeitpunkt. Die relative Phasenlage der Zeiger zueinander und die Länge der Zeiger ist unabhängig von der Zeit, da das komplette Zeigerdiagramm mit der Kreisfrequenz rotiert.

Der rotierende komplexe Spannungszeiger kann in einen zeitunabhängigen Faktor und einen zeitabhängigen Faktor aufgeteilt werden:

$$\underline{\hat{u}}' = \underbrace{\hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}}_{\text{Zeitunabhängig}} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}_{\text{Zeitabhängig}} \tag{1.36}$$

Unter der Annahme, dass sich alle Grössen in dem betrachteten linearen Netzwerk mit der gleichen Kreisfrequenz ω ändern, d.h. alle sinusförmigen Grössen die gleiche Frequenz haben, kann vereinfachend der zeitabhängige Faktor weggelassen werden und man definiert:

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} \tag{1.37}$$

als (Spitzenwert-)Zeiger bzw. als Symbol für die sinusförmige Spannung $u(t)$. Die Netzwerksanalyse wird alleine mit dieser komplexen, symbolischen Grösse durchgeführt. Analog kann man z.B. auch Zeiger für Ströme definieren.

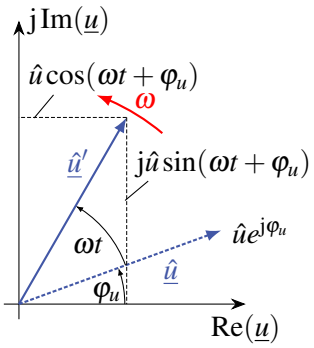


Figure 1.22: Darstellung eines rotierenden Spannungszeigers $\underline{\hat{u}}'$ und den dazugehörigen (feststehenden) Spannungszeiger $\underline{\hat{u}}$ in der komplexen Ebene.

Zeiger für komplexe Wechselstromrechnung

Die Darstellung von sinusförmigen Wechselgrössen mittels Zeiger ist eine Transformation, wobei es prinzipiell unter anderem die zwei folgenden möglichen Definitionen für die Transformation gibt.

1) Definition über Sinusfunktion und Spitzenwert $\hat{u}$:

$$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_u) \tag{1.38}$$

Rotierender Zeiger
$$\underline{\hat{u}}' = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{1.39}$$

Zeitfunktion
$$u(t) = \Im\{\underline{\hat{u}}'\} \tag{1.40}$$

Komplexe WSR
$$\underline{\hat{u}} = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} \tag{1.41}$$

$$u(t) = \hat{u}\sin\left(\omega t + \arctan\frac{\Im\{\underline{\hat{u}}\}}{\Re\{\underline{\hat{u}}\}}\right) \tag{1.42}$$

2) Definition über Kosinusfunktion und Spitzenwert $\hat{u}$:

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u) \tag{1.43}$$

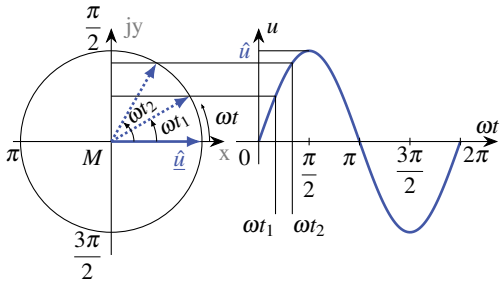
Rotierender Zeiger
$$\underline{\hat{u}}' = \hat{u}e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} \tag{1.44}$$

Zeitfunktion
$$u(t) = \Re\{\underline{\hat{u}}'\} \tag{1.45}$$

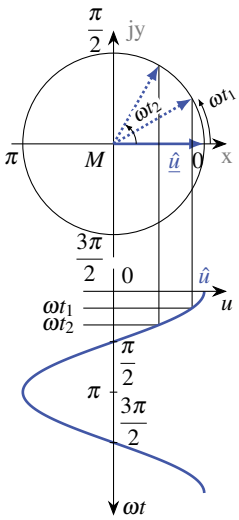
Komplexe WSR
$$\underline{\hat{u}} = \hat{u}e^{j\varphi_u} \tag{1.46}$$

$$u(t) = \hat{u}\cos\left(\omega t + \arctan\frac{\Im\{\underline{\hat{u}}\}}{\Re\{\underline{\hat{u}}\}}\right) \tag{1.47}$$

Im Folgenden werden nur Spitzenwertzeiger auf Basis der Kosinusfunktion verwendet (ausser es explizit etwas anderes angegeben).



(a)



(b)

Zeitfkt.	$\hat{u}\sin(\omega t+\varphi_u)$	
Zeiger	$\hat{u}e^{j\varphi_u}$	$\hat{u}e^{j\varphi_u-\frac{\pi}{2}}$
Basis	Sinus	Kosinus
Zeitfkt.	$\hat{u}\cos(\omega t+\varphi_u)$	
Zeiger	$\hat{u}e^{j\varphi_u+\frac{\pi}{2}}$	$\hat{u}e^{j\varphi_u}$
Basis	Sinus	Kosinus

(c)

Figure 1.23: a) Transformation mit Definition über Sinusfunktion und b) Transformation mit Definition über Kosinusfunktion. c) Darstellung von $\sin(\omega t)/\cos(\omega t)$-Funktion als Zeiger mit Sinus- oder Kosinus-Basis.

1.4 Berechnung von Netzwerken

1.4.1 Berechnung von Netzwerken mit Zeigern

Im Folgenden werden die Schritte für die Berechnung von Netzwerken mit sinusförmigen Quellen auf Basis der eingeführten Zeiger, d.h. die sogenannte komplexe Wechselstromrechnung, erläutert.

Der 1. Schritt ist die Transformation der (sinusförmigen) Quellengrössen in den Bildbereich. Die Ströme und Spannungen werden dabei als komplexe Zeiger dargestellt. Zum Beispiel gilt für eine sinusförmige

Spannung:

$$\hat{u}\cos\omega t \quad\rightarrow\quad \underline{\hat{u}} = \hat{u} \tag{1.48}$$

$$\hat{u}\cos(\omega t+\varphi_u) \quad\rightarrow\quad \underline{\hat{u}} = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} \tag{1.49}$$

$$\hat{u}\sin\omega t = \hat{u}\cos(\omega t-\pi/2) \quad\rightarrow\quad \underline{\hat{u}} = \hat{u}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} \tag{1.50}$$

$$\hat{u}\sin(\omega t+\varphi_u) = \hat{u}\cos(\omega t+\varphi_u-\pi/2) \quad\rightarrow\quad \underline{\hat{u}} = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u-\pi/2} \tag{1.51}$$

Die zeitabhängigen Grössen auf der linken Seite können dabei physikalisch gemessen werden. Dahingegen stellen die komplexen Grössen nur ein Abbild der ursprünglichen Zeitfunktionen dar. Der Übergang wird daher als Transformation in den Bildbereich bezeichnet. Wie bereits oben angemerkt, werden im Folgenden immer Spitzenwertzeiger auf Basis der Kosinusfunktion betrachtet.

Im 2. Schritt wird das Netzwerk im Bildbereich analysiert. Dies geschieht auf Basis der

- ▷ Beziehungen der Ströme und Spannungen an den Bauelementen und der
- ▷ Knoten- und Maschengleichungen.

Die Strom-Spannungs-Beziehungen für die Bauelemente und die kirchhoffschen Gesetze müssen dazu in eine für die symbolische Methode geeigneten Form überführt werden, wie im Weiteren noch gezeigt wird.

Im 3. Schritt erfolgt die Rücktransformation in den Zeitbereich. Dazu wird der berechnete komplexe Lösungszeiger, z.B. $\underline{\hat{u}}_2$, prinzipiell mit dem Zeitfaktor $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ multipliziert und dann der Realteil des resultierenden Ausdrucks ermittelt. Praktisch wird meist der Betrag $\underline{\hat{u}}_2|$ und die Phase $\arg\{\underline{\hat{u}}_2\}$ des Lösungszeigers berechnet und dann direkt die Zeitfunktion angegeben: $u_2(t) = |\underline{\hat{u}}_2|\cos(\omega t+\arg\{\underline{\hat{u}}_2\})$

Hinweis: Funktionen werden häufig mit Hilfe von Transformationsvorschriften bzw. Abbildungsverfahren (d.h. linearen Funktionen/Operatoren) in einen sogenannten Bildbereich transformiert, in welchem weitere Rechnungen einfacher möglich sind. Im Bildbereich werden dabei die betrachteten Funktionen häufig mit anderen Kenngrössen beschrieben. Im betrachteten Fall wird die sinusförmige Funktion aus dem Zeitbereich (Beschreibung durch Frequenz und Amplitude bzw. den zeitlichen Verlauf) in den Frequenzbereich transformiert, wo diese mit Phasenlage und Amplitude beschrieben wird. Dabei wird der neue Bereich allgemein als Bildbereich bezeichnet. Je nach Anwendung werden dann für den Bildbereich z.B. die Begriffe Frequenzbereich, Spektralbereich, usw. als genauere Bezeichnung verwendet.

1.4.2 Strom-Spannungs-Beziehungen im Bildbereich

Zur Ableitung der allgemeinen Strom-Spannungs-Beziehungen im Bildbereich, wird in einem ersten Schritt zuerst die Strom-Spannungs-Beziehung für eine Induktivität näher betrachtet, wobei angenommen wird, dass der Strom durch die Induktivität gegeben ist (Abbildung 1.24a). Ziel ist es eine Strom-Spannungsbeziehung für die Induktivität im Bildbereich, d.h. für die Zeiger, abzuleiten.

$$\begin{aligned} i(t) &= \hat{i}\cos(\omega t+\varphi_i) \\ &= \Re\left\{\hat{i}\cos(\omega t+\varphi_i)+\mathrm{j}\,\hat{i}\sin(\omega t+\varphi_i)\right\} \\ &= \Re\left\{\hat{i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}\right\} = \Re\left\{\hat{i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \Re\left\{\underline{\hat{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \end{aligned} \tag{1.52}$$

$$i(t) \rightarrow \underline{\hat{i}} = \hat{i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} \tag{1.53}$$

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Re\left\{\underline{\hat{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \Re\left\{\mathrm{j}\omega L\underline{\hat{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \Re\left\{\underline{\hat{u}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \tag{1.54}$$

$$\underline{\hat{u}} = \underline{Z}_L\cdot\underline{\hat{i}} = \mathrm{j}\omega L\cdot\underline{\hat{i}} = \mathrm{j}X_L\cdot\underline{\hat{i}} \qquad (\underline{Z}_L = \mathrm{j}X_L = \mathrm{j}\omega L) \tag{1.55}$$

Bei der Induktivität eilt die Spannung dem Strom um 90° vor ($\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}90^\circ}$).

Im Fall, dass die Spannung an der Induktivität vorgegeben ist (Abbildung 1.24b), folgt:

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u) \tag{1.56}$$
$$= \Re\{\hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u) + \mathrm{j}\,\hat{u}\sin(\omega t + \varphi_u)\} \tag{1.57}$$
$$= \Re\left\{\hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)}\right\} = \Re\left\{\hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \Re\left\{\underline{\hat{u}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \tag{1.58}$$
$$u(t) \rightarrow \underline{\hat{u}} = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} \tag{1.59}$$
$$i(t) = \frac{1}{L}\int u(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{L}\int \Re\left\{\underline{\hat{u}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}\mathrm{d}t = \Re\left\{\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\underline{\hat{u}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \Re\left\{\underline{\hat{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \tag{1.60}$$

$$\boxed{\underline{\hat{i}} = \underline{Y}_L \cdot \underline{\hat{u}} = \mathrm{j}B_L \cdot \underline{\hat{u}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\cdot\underline{\hat{u}} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega L}\cdot\underline{\hat{u}}} \qquad \left(\underline{Y}_L = \mathrm{j}B_L = \tfrac{1}{\underline{Z}_L} = \tfrac{1}{\mathrm{j}\omega L}\right) \tag{1.61}$$

Bei der Induktivität eilt der Strom der Spannung um 90° nach $(-\mathrm{j} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ})$.

Figure 1.24: a) Ableiten des Strom- und des Spannungszeigers für eine Induktivität im Fall, dass a) der Strom und b) die Spannung gegeben ist.

Wie oben gezeigt wurde, geht die Ableitung des Stromes durch die Induktivität in eine Multiplikation der dazugehörigen Zeiger mit $\mathrm{j}\omega$ über. Dieser Zusammenhang kann prinzipiell für alle Strom-Spannungs-Beziehungen verallgemeinert werden, in welchen zeitabhängige Grössen differenziert bzw. integriert werden, d.h. es gilt allgemein für die **Differentiation**: Die zeitliche Ableitung geht im Bildbereich in eine Multiplikation mit $\mathrm{j}\omega$ über.

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \Re\left\{\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underline{\hat{u}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)\right\} = \Re\left\{\mathrm{j}\omega\underline{\hat{u}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rightarrow \mathrm{j}\omega} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \rightarrow (\mathrm{j}\omega)^n \tag{1.62}$$

Folglich gilt allgemein für die **Integration**, dass diese im Bildbereich durch eine Division durch $\mathrm{j}\omega$ ersetzt wird.

$$\int \underline{\hat{u}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \tfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\underline{\hat{u}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \Rightarrow \boxed{\int \mathrm{d}t \rightarrow \frac{1}{\mathrm{j}\omega}} \tag{1.63}$$

Den Zusammenhang für die Induktivität erhält man alternativ auch mittels rotierender ($\underline{\hat{u}}'$) Zeiger in komplexer Darstellung. Es ergibt sich:

$$\underline{\hat{u}}'_L = \underline{\hat{u}}_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = L\frac{\mathrm{d}\underline{\hat{i}}'_L}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}\hat{i}_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega L\hat{i}_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega L\underline{\hat{i}}_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \Rightarrow \boxed{\underline{\hat{u}}_L = \mathrm{j}\omega L\underline{\hat{i}}_L} \tag{1.64}$$

bzw. für eine Betrachtung im Zeitbereich:

$$u_L(t) = \Re\left\{\underline{\hat{u}}'_L\right\} = \Re\left\{\underline{\hat{u}}_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \Re\left\{L\frac{\mathrm{d}\underline{\hat{i}}'_L}{\mathrm{d}t}\right\} = \Re\left\{L\frac{\mathrm{d}\hat{i}_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{d}t}\right\} \tag{1.65}$$
$$= \Re\left\{\mathrm{j}\omega L\hat{i}_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \Re\left\{\mathrm{j}\omega L\underline{\hat{i}}_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\hat{u}}_L = \mathrm{j}\omega L\underline{\hat{i}}_L} \tag{1.66}$$

Damit gilt wie zuvor $\hat{u}_L = \hat{i}_L \omega L$ und der Spannungszeiger ist um 90° gegenüber dem Stromzeiger vorgedreht. Weiterhin ergibt sich das "-" für den Blindleitwert: $\mathrm{j}X_L = \mathrm{j}\omega L$ und $\mathrm{j}B_L = \frac{1}{\mathrm{j}X_L} = \mathrm{j}\frac{-1}{\omega L}$.

Für den Kondensator folgt:

$$\underline{\hat{i}}'_C = \underline{\hat{i}}_C \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = C\frac{\mathrm{d}\underline{\hat{u}}'_C}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}\hat{u}_C \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega C\hat{u}_C \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega C\underline{\hat{u}}_C \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \Rightarrow \boxed{\underline{\hat{i}}_C = \mathrm{j}\omega C\underline{\hat{u}}_C} \tag{1.67}$$

bzw. wiederum für eine Betrachtung im Zeitbereich:

$$i_C(t) = \Re\left\{\underline{\hat{i}}'_C\right\} = \Re\left\{\underline{\hat{i}}_C \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \Re\left\{C\frac{\mathrm{d}\underline{\hat{u}}'_C}{\mathrm{d}t}\right\} = \Re\left\{C\frac{\mathrm{d}\hat{u}_C \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{d}t}\right\} \tag{1.68}$$

$$= \Re\left\{\mathrm{j}\omega C\hat{u}_C \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \Re\left\{\mathrm{j}\omega C\underline{\hat{u}}_C \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \Rightarrow \boxed{\underline{\hat{i}}_C = \mathrm{j}\omega C\underline{\hat{u}}_C} \tag{1.69}$$

Folglich gilt für die Stromamplitude $\hat{i}_C = \omega C\hat{u}_C$ und der Spannungszeiger ist um 90° gegenüber dem Stromzeiger zurückgedreht. Es gilt: $\mathrm{j}B_C = \mathrm{j}\omega C$ und $\mathrm{j}X_C = \frac{1}{\mathrm{j}B_C} = \mathrm{j}\frac{-1}{\omega C}$.

Figure 1.25: Strom- und Spannungszeiger für a) eine Indutkivität und b) einen Kondensator.

1.4.3 Impedanzen und Admittanzen

Der zeitunabhängige Komplexer Wechselstromwiderstand, d.h. der Quotient aus der komplexen Spannung und dem komplexen Strom wird allgemein als Impedanz $\underline{Z}$ ($[\underline{Z}] = \Omega$) bezeichnet.

$$\frac{\underline{\hat{u}}'}{\underline{\hat{i}}'} = \frac{\underline{\hat{u}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\underline{\hat{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{i}}} = \underline{Z} \Rightarrow \boxed{\underline{\hat{u}} = \underline{Z}\underline{\hat{i}}} \tag{1.70}$$

Die Impedanz setzt sich dabei allgemein aus einem Real- und einen Imaginärteil zusammen:

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X = |\underline{Z}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{1.71}$$

Dabei wird R als Wirkwiderstand (Resistanz), X als Blindwiderstand (Reaktanz) und $|\underline{Z}|$ als Scheinwiderstand bezeichnet. Dabei gilt $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$ und $\tan\varphi = X/R$ (Es gilt allgemein: $-90° \leq \varphi \leq 90°$). Die Einheit ist $[\underline{Z}] = \Omega$.

Der Kehrwert der Impedanz wird als Admittanz bezeichnet. Diese kann allgemein als

$$\underline{Y} = G + \mathrm{j}B = |\underline{Y}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Psi} \tag{1.72}$$

geschrieben werden. Dabei wird G als Wirkleitwert (Konduktanz), B als Blindleitwert (Suszeptanz) und $|\underline{Y}|$ als Scheinleitwert bezeichnet. Dabei gilt $|\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + B^2}$ und $\tan\Psi = B/G$. Die Einheit ist $[\underline{Y}] = \Omega^{-1}$.

Enthält die Impedanz $\underline{Z}$ bzw. die Admittanz $\underline{Y}$ einen Blindanteil, dann treten die Maximalwerte von Strom und Spannung phasenversetzt auf. Die Impedanz und Admittanz sind reine Rechengrössen und stellen NICHT das Verhältnis der Zeitfunktionen dar, d.h. $\underline{Z} \neq u(t)/i(t)$ und $\underline{Y} \neq i(t)/u(t)$. Die Impedanz/Admittanz ist auch kein Zeiger, da es sich ja nicht um eine sinusförmige Grösse handelt).

Die Umrechnung von Impedanzen in Admittanzen und umgekehrt erfolgt über einen Vergleich von Real- und Imaginärteil:

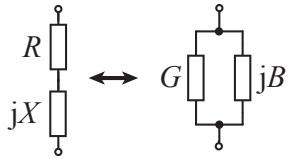


Figure 1.26: Umrechnen einer Impedanz $\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$ in eine Admittanz $\underline{Y} = G + \mathrm{j}B$ und umgekehrt.

▷ Admittanzen → Impedanzen:

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} + \mathrm{j}\frac{-B}{G^2 + B^2} \tag{1.73}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{|\underline{Y}|^2} \quad \text{und} \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2} = \frac{-B}{|\underline{Y}|^2} \tag{1.74}$$

▷ Impedanzen → Admittanzen:

$$\underline{Y} = G + \mathrm{j}B = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} + \mathrm{j}\frac{-X}{R^2 + X^2} \tag{1.75}$$

$$\Rightarrow \quad G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{|\underline{Z}|^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} = \frac{-X}{|\underline{Z}|^2} \tag{1.76}$$

▷ In Exponentialform:

$$|\underline{Z}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \frac{1}{|\underline{Y}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Psi}} = \frac{1}{|\underline{Y}|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Psi} \quad \Rightarrow \quad |\underline{Z}| = \frac{1}{|\underline{Y}|} \quad \text{und} \quad \varphi = -\Psi \tag{1.77}$$

Lineare Bauelemente im Wechselstromnetzwerk

In Abbildung 1.27 sind die Strom-/Spannungsbeziehungen der wichtigsten linearen Bauelementen in Wechselstrom-Netzwerken für die komplexe Wechselstromrechnung zusammengefasst. Der ohmsche Widerstand ist ein reiner Wirkwiderstand und Induktivitäten sowie Kondensatoren sind reine Blindwiderstände.

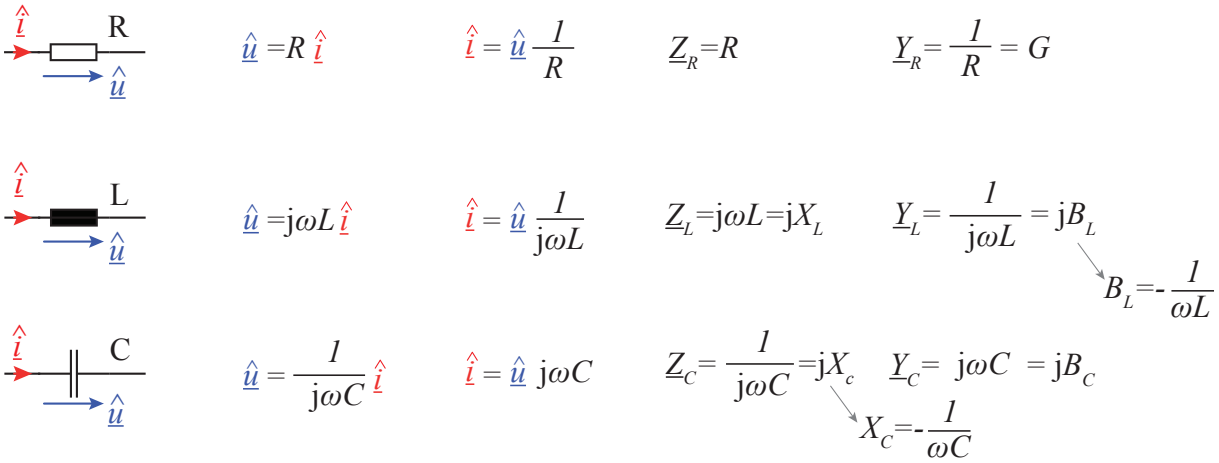


Figure 1.27: Strom-/Spannungsbeziehungen für die linearen passiven Netzwerkselemente.

1.4.4 Umwandlung von Reihen- und Parallelschaltung

Wie bei der Umrechnung der Impedanzen zu Admittanzen prinzipiell gezeigt, kann jede aus einem Wirk- und einem Blindwiderstand bestehende Reihenschaltung in eine elektrisch gleichwertige, (bedingt)

äquivalente Parallelschaltung umgewandelt werden, die die gleiche Impedanz aufweist. Die Gleichheit ist dabei nur bei einer Frequenz gegeben! Als Beispiel wird die Reihenschaltung (Abbildung 1.28a) in eine (bedingt) äquivalente Parallelschaltung (Abbildung 1.28b) umgewandelt. Analog kann natürlich auch die Parallelschaltung in eine äquivalente Reihenschaltung umgewandelt werden. In Abbildung 1.28c sind die Real- und Imaginärteile der beiden Impedanzen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ gegeben, wo die Gleichheit für f = 1kHz sichtbar ist.

Beide Netzwerke sind elektrisch gleichwertig, wenn diese bei gleicher Spannung den gleichen Strom aufnehmen und der Phasenverschiebungswinkel zwischen Strom und Spannung übereinstimmt. Dazu müssen die Realteile und die Imaginärteile der Impedanzen oder der Admittanzen der Reihen- und der Parallelschaltung gleich sein. Im betrachten Fall werden die Admittanzen der Reihen- und der Parallelschaltung gleichgesetzt. Damit erhält man:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1} \quad = \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega L_2} \tag{1.78}$$

Ziel ist es nun, die Real- und die Imaginärteile der Admittanzen der beiden Netzwerke zu ermitteln und diese gleichzusetzen. Dies erreicht man durch Multiplikation des Zählers und des Nenners der Admittanz $\underline{Y}_1$ mit dem konjugiert komplexen Nenner von $\underline{Y}_1$.

$$\left(\frac{1}{R_1+\mathrm{j}\omega L_1}\frac{R_1-\mathrm{j}\omega L_1}{R_1-\mathrm{j}\omega L_1}=\right)\frac{R_1}{R_1^2+(\omega L_1)^2} - j\frac{\omega L_1}{R_1^2+(\omega L_1)^2} \quad = \quad \frac{1}{R_2} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega L_2} \tag{1.79}$$

Durch Gleichsetzen des Real- und des Imaginärteils folgt:

$$R_2 = \frac{R_1^2 + (\omega L_1)^2}{R_1} \quad \text{und} \quad L_2 = \frac{R_1^2 + (\omega L_1)^2}{\omega^2 L_1} \tag{1.80}$$

Mit diesen Zusammenhängen folgt die Äquivalenz der beiden Schaltungen bei der jeweils betrachteten Frequenz.

1.4.5 Kirchoffsche Gesetze im Bildbereich

In den vorangegangen Abschnitten wurden die Strom-Spannungsbeziehungen für die linearen Bauelemente in den Bildbereich übertragen. Diese sind u.a. in Abbildung 1.27 zusammengefasst. Im nächsten Schritt werden nun noch die kirchhoffschen Gleichungen in den Bildbereich übertragen.

▷ **Maschenregel**
Die Summe aller Spannungen in einer geschlossenen Masche verschwindet (für beliebige t).

$$\sum_{\text{Masche}} u_\nu(t) = 0 = \sum_{\text{Masche}} \Re\{\underline{\hat{u}}_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = \sum_{\text{Masche}} \Re\{(u_{\mathrm{Re},\nu} + \mathrm{j}u_{\mathrm{Im},\nu})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} \tag{1.81}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Für } \omega t = 0: \ \Rightarrow \sum_{\text{Masche}} \Re\{(u_{\mathrm{Re},\nu} + \mathrm{j}u_{\mathrm{Im},\nu})\cdot 1\} = \sum_{\text{Masche}} u_{\mathrm{Re},\nu} = 0 \\ &\text{Für } \omega t = \frac{\pi}{2}: \ \Rightarrow \sum_{\text{Masche}} \Re\{(u_{\mathrm{Re},\nu} + \mathrm{j}u_{\mathrm{Im},\nu})\cdot \mathrm{j}\} = -\sum_{\text{Masche}} u_{\mathrm{Im},\nu} = 0 \end{aligned}\right\} \text{Damit folgt:} \tag{1.82}$$

$$\Rightarrow \sum_{\text{Masche}} (u_{\mathrm{Re},\nu} + \mathrm{j}u_{\mathrm{Im},\nu}) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\text{Masche}} \underline{\hat{u}}'_\nu = \sum_{\text{Masche}} \left(\underline{\hat{u}}_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \sum_{\text{Masche}} \underline{\hat{u}}_\nu = 0 \Rightarrow \sum_{\text{Masche}} \underline{\hat{u}}_\nu = 0 \tag{1.83}$$

▷ **Knotenregel**
Die Summe aller zu einem Knoten hinfliessenden Ströme ist gleich der Summe aller von dem Knoten wegfliessenden Ströme. Analog zu oben folgt:

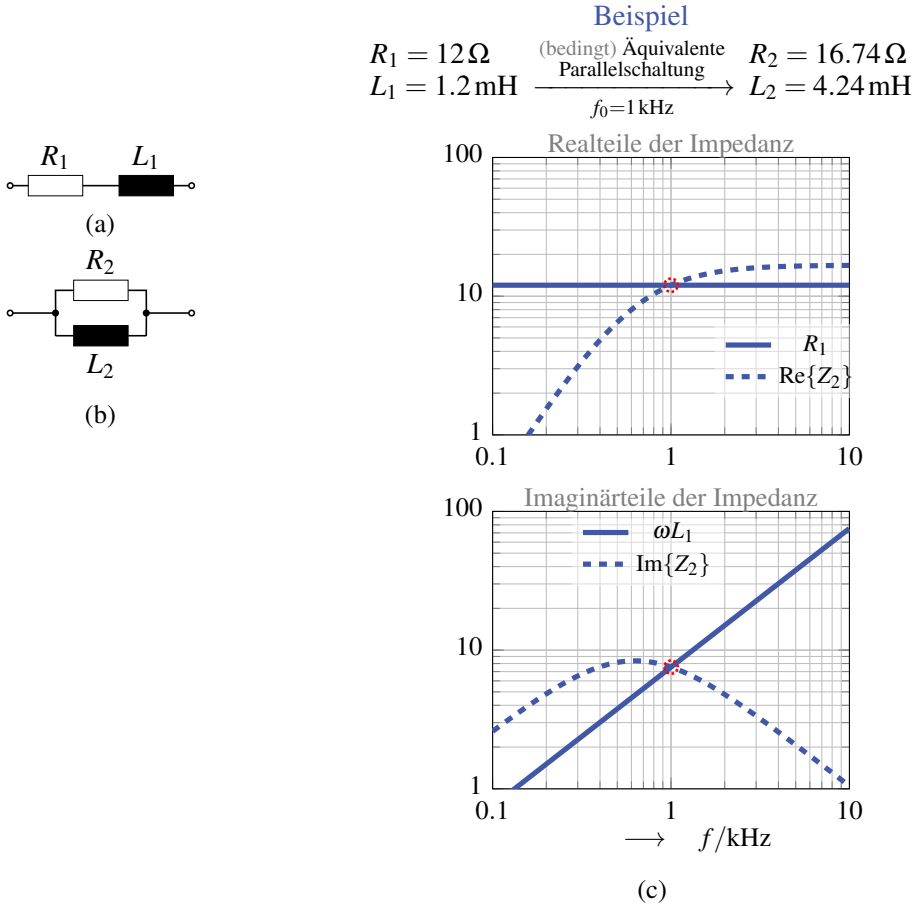


Figure 1.28: Umwandlung der Reihenschaltung in a) in eine äquivalente Parallelschaltung in b). In c) sind die Verläufe der Real- und der Imaginärteile für die Reihen- und die Parallelschaltung dargestellt.

$$\sum_{\text{Knoten}} i_\nu(t) = 0 \Rightarrow \sum_{\text{Knoten}} \hat{\underline{i}}'_\nu = \sum_{\text{Knoten}} \left(\hat{\underline{i}}_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \sum_{\text{Knoten}} \hat{\underline{i}}_\nu = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{\text{Knoten}} \hat{\underline{i}} = 0} \tag{1.84}$$

Die Kirchhoffschen Gleichungen können folglich direkt auch für die komplexe Amplituden (Zeiger) angewendet werden. Damit ist die Berechnung von Netzwerken mit Wechselgrössen relativ ähnlich zu der Berechnung von Netzwerken mit Gleichgrössen mit der wichtigen Ausnahme, dass die Grössen im Fall der Wechselgrössen komplex sind.

1.4.6 Reihen- und Parallelschaltung von Impedanzen

Für das Rechnen mit Impedanzen und Admittanzen in Wechselspannungsnetzwerken gelten analoge Rechenregeln wie für das Rechnen mit Widerständen und Leitwerten in Gleichspannungsnetzwerken. Allerdings handelt es sich um komplexe Grössen, so dass neben dem Betrag auch die Phase berücksichtigt werden muss.

Für die Darstellung einer Impedanz $\underline{Z}$ wird das gleiche Schaltungssymbol verwendet wie für den ohmschen Widerstand (z.B. Abbildung 1.29a).

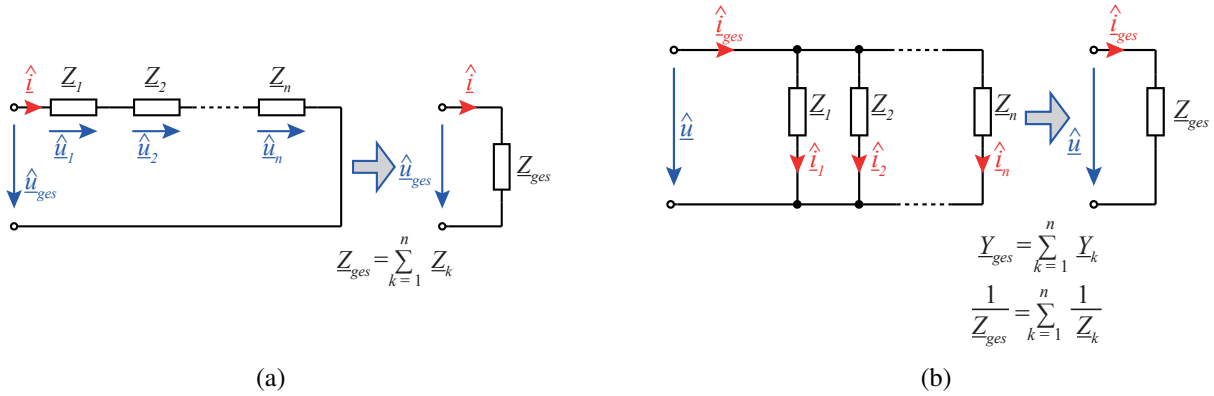
Bei der Reihenschaltung von Impedanzen – siehe Abbildung 1.29a – ergibt sich wie bei den Widerständen die Gesamtimpedanz als Summe der einzelnen Impedanzen. Weiterhin stehen beim Spannungsteiler die komplexen Amplituden der Spannungen im gleichen Verhältnis wie die einzelnen Impedanzen.

$$\boxed{\underline{Z}_{ges} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k \quad \text{und} \quad \frac{\hat{\underline{u}}_1}{\hat{\underline{u}}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\hat{\underline{u}}_1}{\hat{\underline{u}}_{ges}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_{ges}}} \tag{1.85}$$

Bei der Parallelschaltung nach Abbildung 1.29b ergibt sich der Gesamtleitwert als Summe der einzelnen Leitwerte – analog wie bei den Widerständen. Weiterhin stehen beim Stromteiler die komplexen Amplituden der Ströme im gleichen Verhältnis wie die Admittanzen.

$$\underline{Y}_{ges} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \quad \text{und} \quad \frac{\hat{\underline{i}}_1}{\hat{\underline{i}}_2} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\hat{\underline{i}}_1}{\hat{\underline{i}}_{ges}} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_{ges}} \tag{1.86}$$

Hinweis: Die Netzwerksanalyse mit Hilfe der komplexen Zeiger erfolgt prinzipiell wie bei Gleichstromnetzwerken, nur dass im Fall der komplexen Wechselstromrechnung mit komplexen Grössen gerechnet wird.



(a) (b)

Figure 1.29: a) Reihenschaltung von komplexen Widerständen/Impedanzen, die zu einer Ersatzimpedanz $\underline{Z}_{ges}$ zusammengefasst werden. b) Parallelschaltung von Impedanzen, die zu einer Ersatzimpedanz $\underline{Z}_{ges}$ zusammengefasst werden

1.4.7 Zeitbereich vs. komplexe Darstellung

Der Ausgangspunkt für die Netzwerksberechnungen ist eine beliebige Schaltung gespiesen durch sinusförmige Quellen mit einer einheitlichen Frequenz und unbekannten Strömen und Spannungen. Für die Berechnung der unbekannten Grössen, gibt es prinzipiell 2 Lösungswege: Entweder direkt im Zeitbereich über Differentialgleichungen oder über die komplexe Darstellung/symbolische Methode im Bildbereich (siehe Abbildung 1.30).

Häufig ist die Lösung des Gleichungssystems im Zeitbereich sehr aufwendig, so dass sich der "Umweg" über die komplexe Darstellung (Transformation und Rechnung im Bildbereich) lohnt.

1.4.8 Komplexe Wechselstromrechnung - Beispiel

Im Folgenden wird beispielhaft für die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes R und einer Induktivität L in Abbildung 1.31a der Strom und Spannungen an den Bauteilen mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung ermittelt. Die anregende Spannung ist: $u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$

Die unbekannten Grössen sind: $i(t), u_R(t), u_L(t)$ (jeweils Amplitude/Phase)

1. Schritt: Transformation in den Bildbereich

Als erstes werden die bekannten Quellengrössen in den Bildbereich transformiert. Zudem werden für die gesuchten Grössen Zeiger definiert.

$$\hat{\underline{u}} = \hat{u}e^{j\varphi_u} \qquad \text{(bekannt)} \tag{1.87}$$

$$\hat{\underline{i}} = \hat{i}e^{j\varphi_i} \qquad \hat{\underline{u}}_L = \hat{u}_L e^{j\varphi_{u_L}} \qquad \hat{\underline{u}}_R = \hat{u}_R e^{j\varphi_{u_R}} \qquad \text{(unbekannt)} \tag{1.88}$$

2. Schritt: Analyse des Netzwerks im Bildbereich

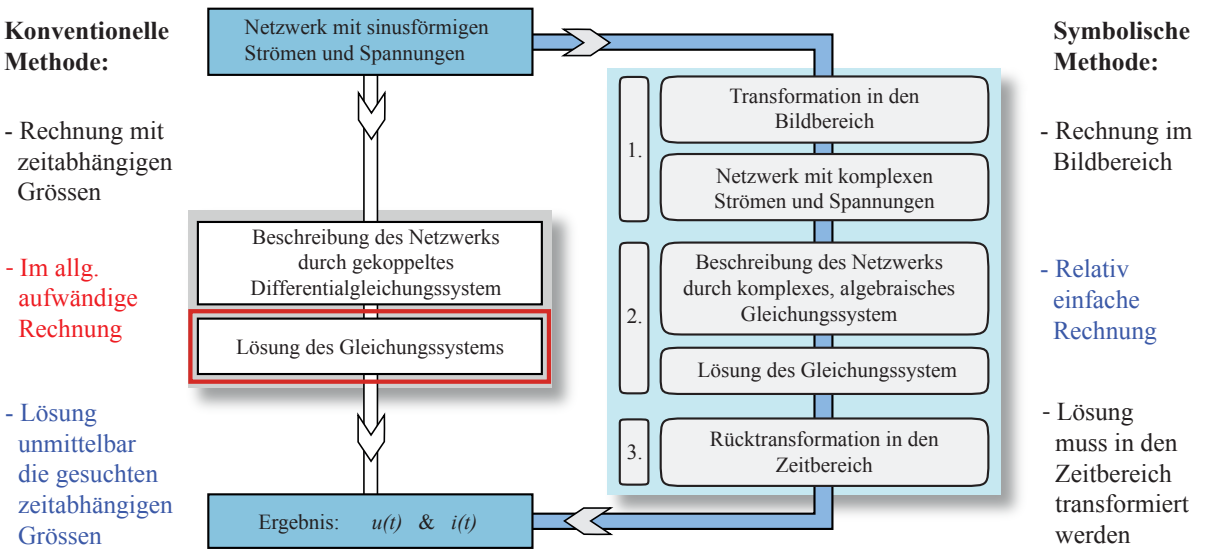


Figure 1.30: Gegenüberstellung der Vorgehensweise bie einer Netzwerksberechnung im Zeit- und im Bildbereich.

Im zweiten Schritt werden die Netzwerksgleichungen mit den kirchhoffschen Gesetzen und den Strom-/Spannungsbeziehungen der Bauelemente im Bildbereich aufgestellt.

$$\text{Maschengleichung} \quad \underline{\hat{u}} = \underline{\hat{u}}_R + \underline{\hat{u}}_L = \underline{Z}_R\underline{\hat{i}} + \underline{Z}_L\underline{\hat{i}} = \overbrace{(R + \mathrm{j}\omega L)}^{\underline{Z}}\underline{\hat{i}} = \underline{Z}\underline{\hat{i}}$$

$$\text{Berechnung von } \underline{Z} \quad \underline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

$$\text{mit} \quad \varphi = \arctan\frac{\omega L}{R}$$

Aus den Gleichungen folgt der gesuchte Strom:

$$\underline{\hat{i}} = \hat{i}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{Z}} = \frac{\hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \underbrace{\frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}}_{\hat{i}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\overbrace{(\varphi_u - \varphi)}^{\varphi_i}} \tag{1.89}$$

$$\rightarrow \quad \hat{i} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \qquad \text{und} \qquad \varphi_i = \varphi_u - \varphi \tag{1.90}$$

Im zweiten Schritt werden nun die Amplituden und der jeweilige Phasenwinkel der Spannung am Widerstand und an der Induktivität berechnet.

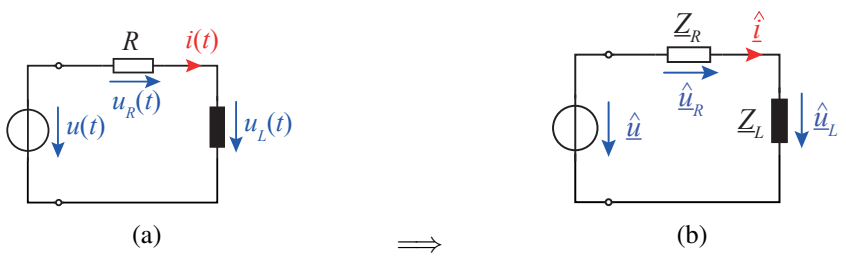


Figure 1.31: *RL*-Reihenschaltung an einer Wechselspannungsquelle im Zeitbereich a) wird in den Bildbereich b)

Berechnung von $\hat{u}_R$ $\quad \underline{\hat{u}}_R = \hat{u}_R \cdot e^{j\varphi_{u_R}} = \underline{Z}_R \cdot \underline{\hat{i}} = \overbrace{R \cdot \hat{i}}^{\hat{u}_R} e^{j\varphi_i}$

$$\hat{u}_R = R \cdot \hat{i} \quad \text{und} \quad \varphi_{u_R} = \varphi_i$$

Berechnung von $\hat{u}_L$ $\quad \underline{\hat{u}}_L = \hat{u}_L \cdot e^{j\varphi_{u_L}} = \underline{Z}_L \cdot \underline{\hat{i}} = j\omega L \cdot \hat{i} e^{j\varphi_i}$

$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j$ $\quad = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \omega L \cdot \hat{i} e^{j\varphi_i} = \overbrace{\omega L \cdot \hat{i}}^{\hat{u}_L} \cdot e^{j\left(\varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)}$

$$\hat{u}_L = \omega L \hat{i} \quad \text{und} \quad \varphi_{u_L} = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$$

In Abbildung 1.32 ist das zum Netzwerk gehörige Zeigerdiagramm dargestellt. Im betrachteten Fall ist zur einfacheren Darstellung φ_u so gewählt worden, dass $\varphi_i = 0$ gilt.

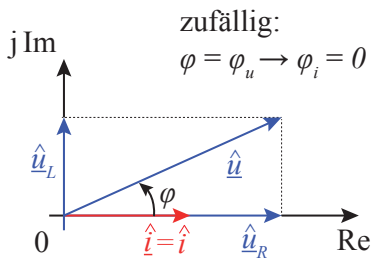


Figure 1.32: Zeigerdiagramm zum Netzwerk in Abbildung 1.31b.

3. Schritt: Rücktransformation in den Zeitbereich

Im letzten Schritt werden die gesuchten Grössen in den Zeitbereich zurücktransformiert. Dies erfolgt mit den folgenden beiden Schritten:

1) Multiplikation der komplexen Amplituden mit dem Zeitfaktor (Rotation)
2) Realteilbildung des resultierenden komplexen Ausdruckes

Für den gesuchten Strom bedeutet dies:

$$i(t) = \Re\left\{\underline{\hat{i}} e^{j\omega t}\right\} = \Re\left\{\hat{i} e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}\right\} = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i) \tag{1.91}$$

Setzt man in diese Gleichung die berechneten Werte für die Amplitude $\hat{i}$ und den Nullphasenwinkel φ_i ein, so resultiert der folgende zeitliche Verlauf:

$$i(t) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_u - \arctan\frac{\omega L}{R}\right) \tag{1.92}$$

Auf analoge Weise resultieren die Spannungen über dem Widerstand und der Induktivität:

$$u_R(t) = \hat{u}_R \cos(\omega t + \varphi_{u_R}) \tag{1.93}$$
$$u_L(t) = \hat{u}_L \cos(\omega t + \varphi_{u_L}) \tag{1.94}$$

$$u_R(t) = \frac{\hat{u} \cdot R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_u - \arctan\frac{\omega L}{R}\right) \tag{1.95}$$

$$u_L(t) = \frac{\hat{u} \cdot \omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_u - \arctan\frac{\omega L}{R} + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.96}$$

Anstatt einer Multiplikation mit $e^{j\omega t}$ und der Realteilbildung wird in der Praxis normalerweise direkt die Amplitude der Kosinus-Schwingung über den Betrag des Zeigers und der Nullphasenwinkel der Kosinus-Schwingung über den Winkel des Zeigers ermittelt.

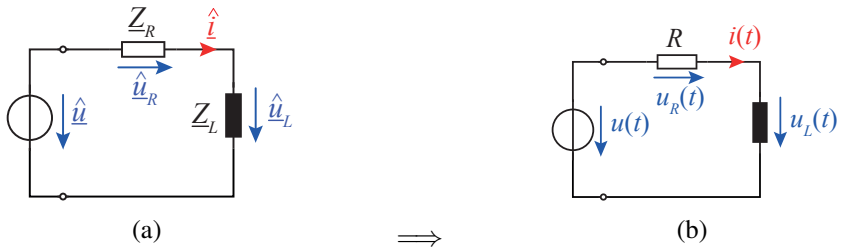


Figure 1.33: Rücktransformation der berechneten Grössen aus dem Bildbereich a) in den Zeitbereich a).

Lösung im Zeitbereich

Um den Vorteil der Berechnung mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung zu verdeutlichen, wird die *RL*-Schaltung, die oben mit der komplexen Wechselstromrechnung untersucht wurde, nun auch im Zeitbereich berechnet.

Mit der gegebenen sinusförmigen Versorgungsspannung $u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$ ergibt sich bei linearen Bauelementen auch ein sinusförmiger Strom, für den $i(t) = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i)$ mit unbekanntem $\hat{i}$ und φ_i angenommen wird. Für die Augenblickswerte gilt die Maschengleichung $u = u_R + u_L$ und mit den angenommenen Zusammenhängen folgt:

$$\hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u) = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = R\hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i) - \omega L\hat{i}\sin(\omega t + \varphi_i) =$$
$$\hat{u}\,[\cos\varphi_u\cos(\omega t) - \sin\varphi_u\sin(\omega t)] = R\hat{i}\,[\cos\varphi_i\cos(\omega t) - \sin\varphi_i\sin(\omega t)] - \omega L\hat{i}\,[\cos\varphi_i\sin(\omega t) + \sin\varphi_i\cos(\omega t)] \tag{1.97}$$

Die Gleichung (1.97) muss für alle t erfüllt sein. Dies kann nur der Fall sein, wenn jeweils die Vorfaktoren für $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ übereinstimmen. Damit folgen die beiden Gleichung zum Bestimmen von $\hat{i}$ und φ_i:

$$\hat{u}\cos\varphi_u = R\hat{i}\cos\varphi_i - \omega L\hat{i}\sin\varphi_i \tag{1.98}$$
$$\hat{u}\sin\varphi_u = R\hat{i}\sin\varphi_i + \omega L\hat{i}\cos\varphi_i \tag{1.99}$$

Zum Auflösen werden die Gleichungen (1.98) und (1.99) jeweils quadriert und anschliessend addiert. Durch Vereinfachen und mit dem Zusammenhang $\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1$ folgt

$$\hat{u}^2 = R^2\hat{i}^2 + (\omega L)^2\hat{i}^2 \quad \rightarrow \quad \hat{i} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \tag{1.100}$$

Zum Berechnen von φ_i wird die Gleichung (1.98) mit $\cos\varphi_i$ und die Gleichung (1.99) mit $\sin\varphi_i$ multipliziert und anschliessend werden beide addiert. Mit $\sin(x^2) + \cos(x^2) = 1$ folgt:

$$\hat{u}\,[\cos\varphi_u\cos\varphi_i + \sin\varphi_u\sin\varphi_i] = \hat{u}\cos(\varphi_u - \varphi_i) = R\hat{i} \tag{1.101}$$

Zusammen mit Gleichung (1.100) folgt für den Phasenwinkel:

$$\varphi_u - \varphi_i = \arccos\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \tag{1.102}$$

Diese kann noch in $\varphi_u - \varphi_i = \arctan\left(\omega L/R\right)$ umgerechnet werden. Damit resultieren die gleichen Zusammenhänge wie bei der komplexen Wechselstromrechnung, nur mit erheblich mehr Rechenaufwand.

1.4.9 Strom-Spannungs- und Widerstandsdiagramm

Für das Zeigerdiagramm einer Reihenschaltung wie z.B. in Abbildung 1.34a wird vorteilhaft der Strom als Bezugsgrösse gewählt und – wenn möglich – in die reelle Achse gelegt (d.h. $\varphi_i = 0$) – siehe Abbildung 1.34b. Die Phasenlage der Spannung stimmt dann mit jener der Impedanz überein. Die Spannung am Widerstand ist in Phase zum Strom und die Spannung an der Induktivität eilt dem Strom um $\pi/2$ voraus.

$$\hat{u}_R = R\hat{i} \tag{1.103}$$

$$\hat{u}_L = \omega L\hat{i} \tag{1.104}$$

$$\begin{aligned}\underline{\hat{u}} &= \underline{\hat{u}}_R + \underline{\hat{u}}_L = \underline{Z}_R\underline{\hat{i}} + \underline{Z}_L\underline{\hat{i}} = \underbrace{(R + \mathrm{j}\omega L)}_{\underline{Z}}\underline{\hat{i}} = \underline{Z}\underline{\hat{i}} \\ &= |\underline{Z}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\underline{\hat{i}} = |\underline{Z}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\,\hat{i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\end{aligned} \tag{1.105}$$

Für die Wahl von $\varphi_i = 0$ folgt:

$$\underline{\hat{u}} = \underline{Z}\,\hat{i} \tag{1.106}$$

d.h. wie oben schon erwähnt, stimmt die Phasenlage der Spannung mit der Phasenlage des Stromes überein.

Werden alle Spannungen durch den Strom dividiert, geht das Spannungsdiagramm in Abbildung 1.34b in das Widerstandsdiagramm in Abbildung 1.34c über. Die (komplexen) Impedanzen sind gleich wie Strom- und Spannungszeiger grafisch in der komplexen Ebene darstellbar. Zur Erinnerung: Die Impedanzen sind reine Rechengrössen und keine Zeiger im klassischen Sinne.

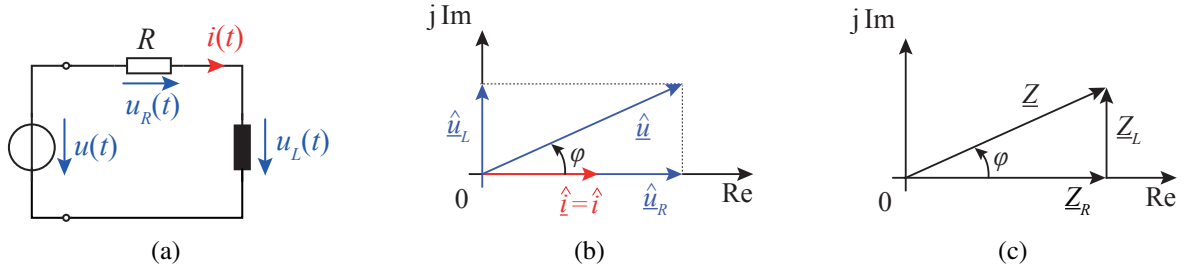


Figure 1.34: a) *RL*-Reihenschaltung mit dem dazugehörigen Zeigerdiagramm in b) und dem Widerstandsdiagramm in c).

1.5 Frequenzabhängige Spannungsteiler

Die frequenzabhängige Impedanz von Spulen und Kondensatoren kann z.B. zur Realisierung eines frequenzabhängigen Spannungsteilers (Filters) genutzt werden. Im Folgenden werden dazu vier verschiedene einfache Filtervarianten bestehend aus einem Widerstand und je einer Spule oder einem Kondensator vorgestellt.

1.5.1 *RL* Hochpass

Als erstes wird das Filternetzwerk in Abbildung 1.35b betrachtet, welches als Vierpol bzw. Zweitor dargestellt ist. Dabei werden typischerweise zwei Anschlussklemmen (hier: $u_1(t)$) für den Anschluss einer Quelle und zwei Anschlussklemmen (hier: $u_2(t)$) als Ausgang für den Anschluss von weiteren Komponenten genutzt. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass das Zweitor unbelastet ist, d.h. dass keine Komponenten an die Ausgangsklemmen mit der Spannung $u_2(t)$ angeschlossen sind.

Für die Spannungen im Netzwerk in Abbildung 1.35a bzw. 1.35b gilt mit den Strom-Spannungs-Beziehungen der Bauteile:

$$\underline{\hat{u}}_R = R\underline{\hat{i}}, \qquad \underline{\hat{u}}_2 = \underline{\hat{u}}_L = \mathrm{j}\omega L\underline{\hat{i}} \;\text{ und }\; \underline{\hat{u}}_1 = (R+\mathrm{j}\omega L)\,\underline{\hat{i}} \tag{1.107}$$

Damit kann das Verhältnis der Spannungsamplituden und die Phasenverschiebung für das Zweitor in Abbildung 1.35b berechnet werden:

$$\frac{\underline{\hat{u}}_2}{\underline{\hat{u}}_1} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{R+\mathrm{j}\omega L} = \frac{\hat{u}_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{u_2}}}{\hat{u}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{u_1}}} = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_{u_2}-\varphi_{u_1})} = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\varphi_u} \tag{1.108}$$

$$\boxed{\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}} \tag{1.109}$$

$$\boxed{\Delta\varphi_u = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega L}{R}} \tag{1.110}$$

Das Verhältnis der Spannungsamplituden $\hat{u}_2/\hat{u}_1$ und die Differenz der Phasenwinkel $\Delta\varphi_u$ $(= \varphi_{u_2} - \varphi_{u_1})$ von Ein- und Ausgangsspannung werden typischerweise in getrennten Diagrammen in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt – siehe dazu Abbildung 1.36a und 1.36b. Dabei wird das Verhältnis der Amplituden als Amplitudengang und der Verlauf der Phase als Phasengang bezeichnet.

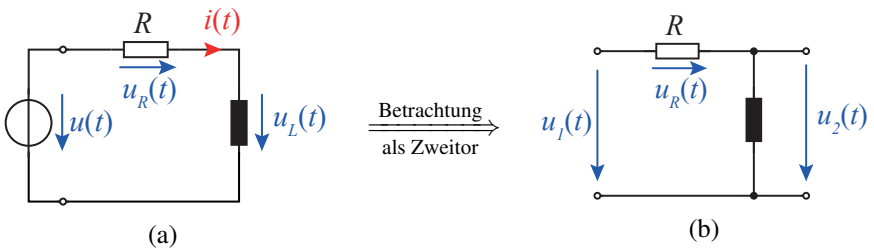


Figure 1.35: a) Frequenzabhängiger Spannungsteiler bestehend aus einem Widerstand und einer Spule. In b) ist der Teiler als Zweitor dargestellt.

Aus einer Betrachtung der beiden Extremfälle $f \to 0$ und $f \to \infty$ kann den Verlauf der Kurven in Abbildung 1.36a und 1.36b für diese Extremfälle näherungsweise ermittelt werden.

$f \to 0$: Induktivität $\to$ Kurzschluss

- ▷ Strom ist nur durch R bestimmt
- ▷ Strom $\underline{\hat{i}}$ und Spannung $\underline{\hat{u}}_1$ in Phase
- ▷ Spannung $\hat{u}_2$ um $90°$ voreilend gegenüber $\underline{\hat{i}}$ $\to \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} \approx 0,\;\; \Delta\varphi_u = 90°$

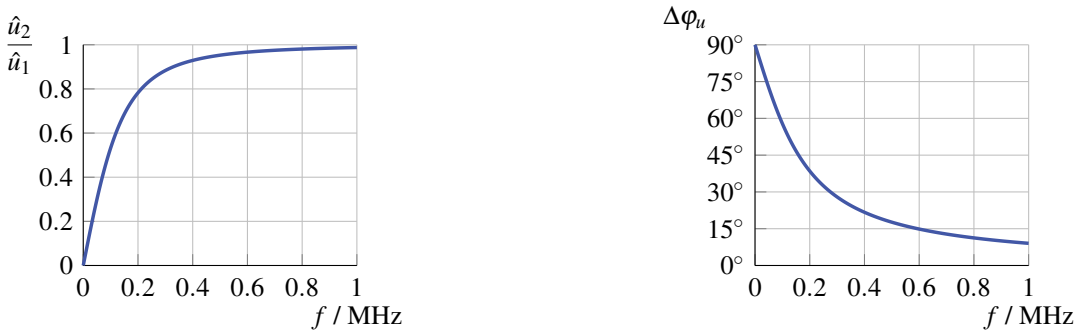
$f \to \infty$: Induktivität $\to$ Leerlauf

- ▷ R gegenüber ωL vernachlässigbar $\to \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} \approx 1,\;\; \Delta\varphi_u = 0°$

Die *RL*-Schaltung in Abbildung 1.35b lässt folglich Anteile der Eingangsspannung u_1 mit einer hohen Frequenz passieren (Durchlassbereich). Anteile mit einer tiefen Frequenz werden abgeschwächt (Sperrbereich). Aus diesem Grund handelt es sich bei der betrachteten Schaltung um einen sogenannten Hochpass(-filter). Es handelt sich dabei um einen Hochpass 1. Ordnung. Die Ordnung beschreibt dabei wie steil der Übergang zwischen dem Durchlass- und dem Sperrbereich ist – je höher die Ordnung ist, desto steiler ist der Übergang. Die Grenze zwischen dem Durchlass- und dem Sperrbereich wird dabei durch die Grenzfrequenz f_g definiert. Die Definition der Grenzfrequenz wird im folgenden noch erläutert.

Häufig wird das Verhältnis der Spannungsamplituden in dB (Decibel) angegeben. Der Wert für das Verhältnis in dB ergibt sich aus: $20\log_{10}\left(\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1}\right)$

Charakteristische Werte in dB sind u.a.: $\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = 1 \mathrel{\widehat{=}} 0\text{dB}$, $\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = 0.1 \mathrel{\widehat{=}} -20\text{dB}$, $\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = 0.01 \mathrel{\widehat{=}} -40\text{dB}\ldots$



(a) (b)

Figure 1.36: Verlauf des Verhältnisses $\hat{u}_2/\hat{u}_1$ in a) und der Phase φ_u in b) in Abhängigkeit der Frequenz für den *RL*-Hochpass in Abbildung 1.35b.

Mit einer der normierten Frequenz x ergibt sich eine von den konkreten Zahlenwerten unabhängige Darstellung des Amplitudenverhältnisses und der Phase:

$$x = \frac{\omega L}{R} = \frac{\omega}{R/L} \quad \left[\frac{s^{-1}}{\frac{V}{A}/\frac{Vs}{A}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{\omega L/R}{\sqrt{1+(\omega L/R)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{und} \quad \Delta\varphi_u = \frac{\pi}{2} - \arctan x \tag{1.111}$$

In Abbildung 1.37c ist der normierte Amplitudengang in doppellogarithmische Darstellung und in Abbildung 1.37d der Phasengang gegeben. Beide zusammen bilden den normierten Frequenzgang. Die normierten Amplituden- und Phasengänge können dabei durch Geraden sehr gut genähert werden. Die Geradennäherung des Amplitudenganges für die Extremfälle $f \to 0, x \to 0$ und $f \to \infty, x \to \infty$ ergibt sich aus:

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} \approx \begin{cases} x & \text{für } x \ll 1 \\ 1 & \phantom{\text{für }} x \gg 1 \end{cases} \text{bzw.} \begin{matrix} \omega L \ll R \\ \omega L \gg R \end{matrix} \tag{1.112}$$

Der Schnittpunkt der Geradennäherungen liegt bei $x = 1$ bzw. $\omega_g L = R$. An diesem Schnittpunkt folgt für das Amplitudenverhältnis:

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\widehat{=} -3dB) \tag{1.113}$$

Bei der Grenzfrequenz ($x = 1$) sind der Wirk- und der Blindwiderstand gleich gross und die Phasenverschiebung beträgt $+45°$. Die Grenzfrequenz ergibt sich aus:

$$x = 1 = \frac{\omega_g L}{R} \qquad f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L} \tag{1.114}$$

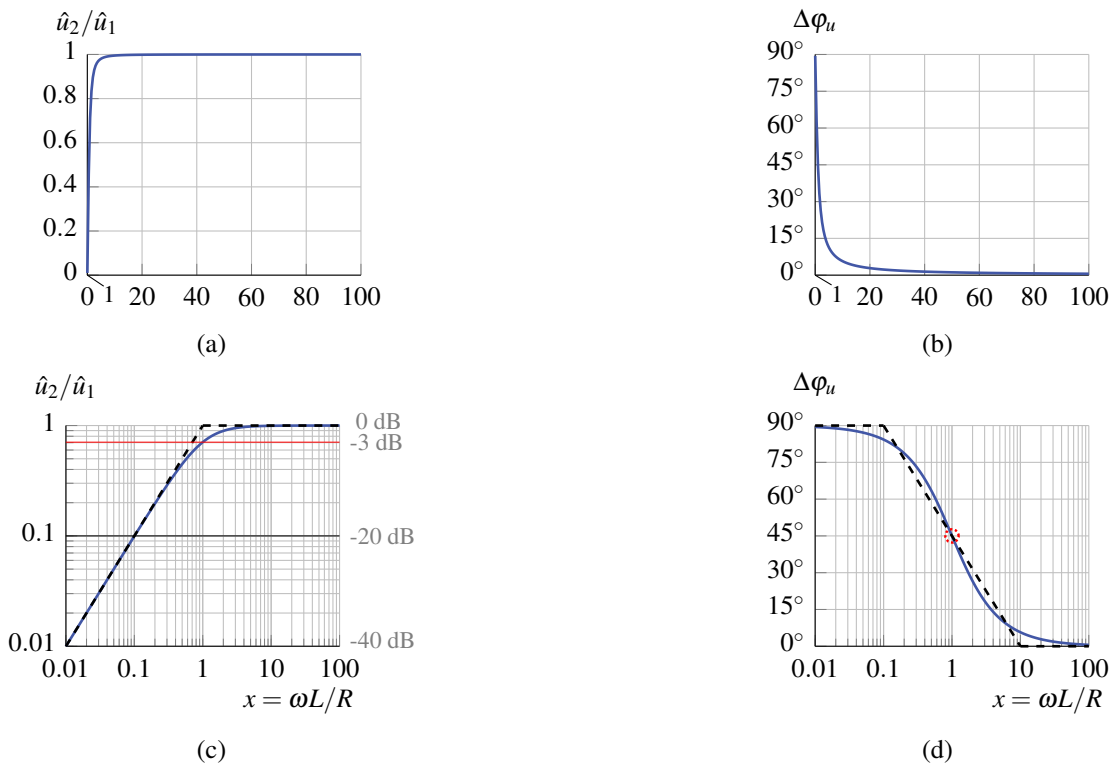


Figure 1.37: Amplitudenverhältnis $\hat{u}_2/\hat{u}_1$ in Abhängigkeit der normierten Frequenz x mit linearer Skala in a) und mit doppelt logarithmischer Skala in c). Phasenverlauf mit linearer Skala in b) und mit logarithmischer Frequenzachse in d).

1.5.2 *RL* Tiefpass

Wird die Induktivität mit dem Widerstand im Hochpass aus vorherigem Abschnitt vertauscht, so resultiert der *RL*-Tiefpass in Abbildung 1.38a. Dieser leitet Anteile von u_1 mit tiefen Frequenzen zum Ausgang weiter und dämpft Anteile mit hohen Frequenzen.

Mit den Strom-/Spannungsbeziehungen für die Bauteile

$$\underline{\hat{u}}_2 = \underline{\hat{u}}_R = R\underline{\hat{i}} \quad \text{und} \quad \underline{\hat{u}}_L = \mathrm{j}\omega L\underline{\hat{i}} \tag{1.115}$$

und der Maschengleichung

$$\underline{\hat{u}}_1 = (R + \mathrm{j}\omega L)\,\underline{\hat{i}} \tag{1.116}$$

resultiert das Verhältnis der Spannungsamplituden (Amplitudengang) und der Phasengang. Die normierte Darstellung ergibt sich wiederum mit $x = \frac{\omega L}{R}$ – siehe Abbildungen 1.38b und 1.38c.

$$\boxed{\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \tag{1.117}$$

$$\boxed{\Delta\varphi_u = -\arctan x} \tag{1.118}$$

Damit ergibt sich das Verhalten eines Tiefpasses.

Bei der Grenzfrequenz ist der Wirkwiderstand wieder gleich dem Blindwiderstand, d.h. $x = 1 \rightarrow \omega_g L = R$ und wiederum kann der Amplituden und der Phasengang in der normierten Darstellung mit doppelt logarithmischen Achsen gut mit Geraden genähert werden. Für den Amplitudengang gilt:

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} \approx \begin{cases} 1 & \text{für } x \ll 1 \\ 1/x & \text{für } x \gg 1 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} \omega L \ll R \\ \omega L \gg R \end{matrix} \tag{1.119}$$

Wird beispielhaft die Ausgangsspannung im Zeitbereich berechnet, so folgt mit der Länge $\hat{u}_1$ und der Phase φ_{u_1} des Spannungszeigers der Eingangsspannung $\underline{\hat{u}}_1 = \hat{u}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{u_1}}$

$$u_2(t) = \hat{u}_1 \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_{u_1} - \arctan\frac{\omega L}{R}\right) \tag{1.120}$$

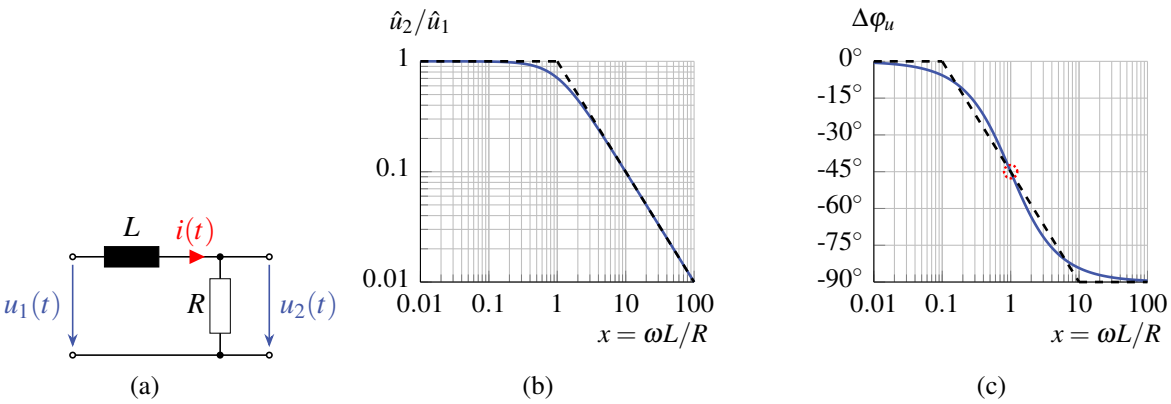


Figure 1.38: a) Schaltbild eines *RL*-Tiefpasses. b) Amplitudengang und c) Phasengang des *RL*-Tiefpasses in Abhängigkeit der normierten Frequenz inklusive Geradennäherungen.

1.5.3 *RC* Hochpass

Im Folgenden wird die Induktivität in den bisher betrachteten Spannungsteilern durch eine Kapazität ersetzt und das Übertragungsverhalten der resultierenden passiven *RC*-Netzwerke betrachtet. Zu Beginn wird das Netzwerk in Abbildung 1.39a untersucht.

Mit der Spannungsteilerregel folgt unmittelbar das Verhältnis der komplexen Amplituden/Zeiger

$$\begin{aligned}\frac{\underline{\hat{u}}_2}{\underline{\hat{u}}_1} &= \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{R}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{\mathrm{j}\omega RC}{1 + \mathrm{j}\omega RC} \\ &= \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \omega RC\right)}\end{aligned} \tag{1.121}$$

womit insgesamt das Verhalten eines Hochpasses resultiert.

Damit folgt für den Amplitudengang mit der normierten Frequenz $x = \omega RC$ $\left(\text{Einheit } \left[s^{-1} \frac{V}{A} \frac{As}{V}\right]\right)$

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \tag{1.122}$$

Die Grenzfrequenz resultiert wiederum für $x = 1$

$$f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} \tag{1.123}$$

Der Phasengang ist gleich

$$\Delta\varphi_u = \varphi_{u_2} - \varphi_{u_1} = \frac{\pi}{2} - \arctan \omega RC = \arctan \frac{1}{\omega RC} \tag{1.124}$$

Der normierte Amplituden- bzw. Phasengang ist identisch zu dem eines *RL*-Hochpasses (siehe Abbildung 1.39b).

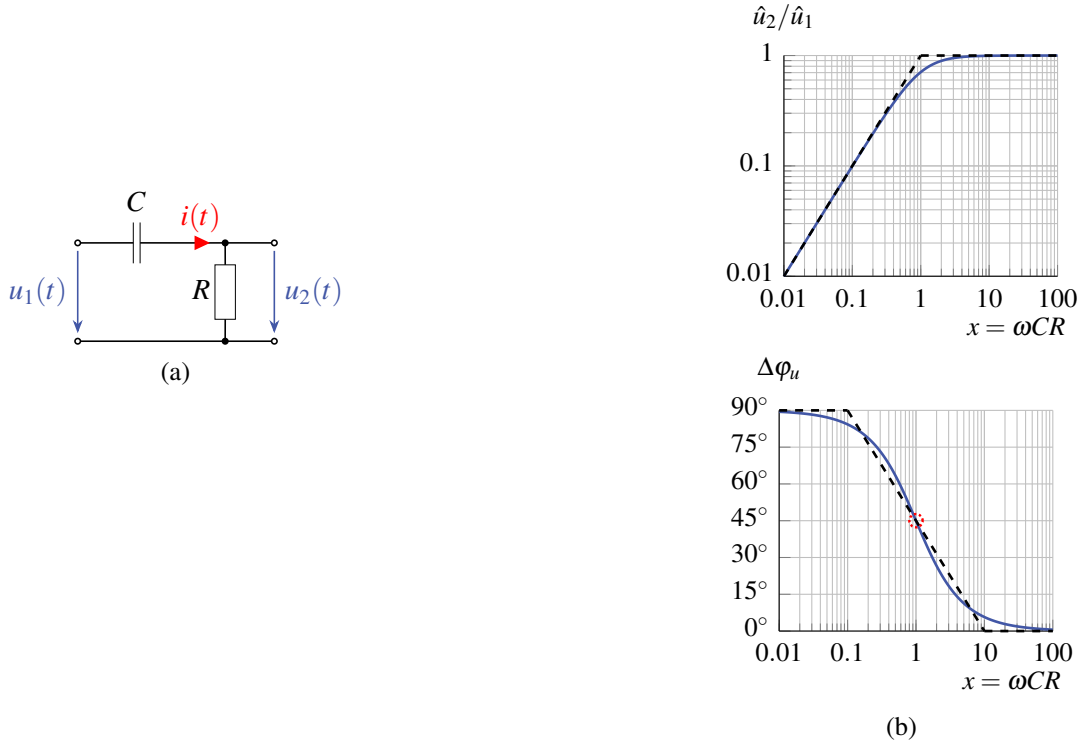


Figure 1.39: a) Schaltbild eines *RC*-Hochpassfilters mit dem dazugehörigen Amplituden- und Phasengang in Abhängigkeit der normierten Frequenz in b).

1.5.4 *RC* Tiefpass

Vertauscht man in der *RC*-Schaltung von letztem Abschnitt die Kapazität mit dem Widerstand, so erhält man die Schaltung in Abbildung 1.40a. Für diese resultiert das Verhältnis der komplexen Amplituden wiederum aus der Spannungsteilerregel.

$$\begin{aligned}\frac{\underline{\hat{u}}_2}{\underline{\hat{u}}_1} &= \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R+\underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\arctan(\omega RC)}\end{aligned} \tag{1.125}$$

Damit ist der Amplitudengang (Abbildung 1.40b) gleich

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{1.126}$$

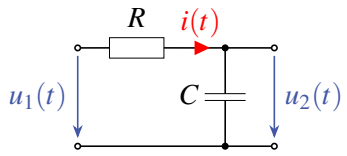
Für den Phasengang (Abbildung 1.40b) folgt

$$\Delta\varphi_u = -\arctan x = -\arctan(\omega RC) \tag{1.127}$$

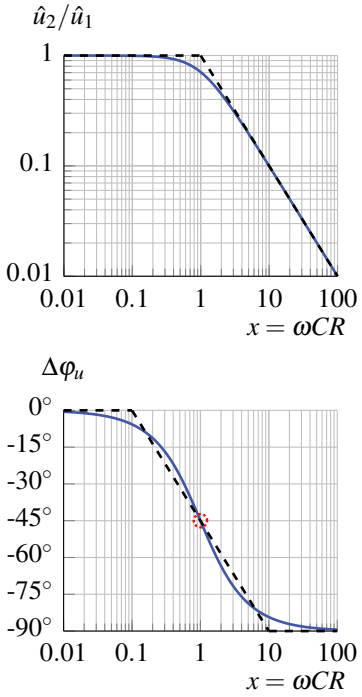
womit insgesamt das Verhalten eines Tiefpasses resultiert.

Allgemeine Anmerkungen zu frequenzabhängigen Spannungsteilern

- ▷ Zweitore mit gleichem Hoch- bzw. Tiefpassverhalten können sowohl durch *RL*- als auch *RC*-Kombinationen realisiert werden.
- ▷ In der Praxis müssen bei der Berechnung des Übertragungsverhaltens auch die parasitären Eigenschaften der Bauelemente berücksichtigt werden, da diese das Verhalten signifikant beeinflussen können (v.a. im Bereich höherer Frequenzen).



(a)



(b)

Figure 1.40: a) Schaltbild eines *RC*-Tiefpassfilters mit dem dazugehörigen Amplituden- und Phasengang in Abhängigkeit der normierten Frequenz x in b).

▷ Die (inneren) Impedanzen einer eingangsseitigen Spannungsquelle sowie einer ausgangsseitig angeschlossenen Schaltung (Last) beeinflussen ebenfalls das Übertragungsverhalten.

1.5.5 Frequenzweiche

Eine Anwendung von frequenzselektiven Netzwerken wie z.B. einem Hoch- oder einem Tiefpass sind Frequenzweichen in Mehrwege-Lautsprechern. Hier werden z.B. nur die tiefen Frequenzanteile zum Tieftöner durchgelassen und die höheren Frequenzanteile zum Hochtöner.

In realen Frequenzweichen kommen anstatt eines *RC*- oder eines *RL*-Tiefpasses meistens *LC*-Filter zum Einsatz, da diese wesentlich geringere Verluste hervorrufen und (aufgrund der höheren Filterordnung) eine bessere Filterung/Trennung der Frequenzen ermöglichen.

1.5.6 Frequenzkompensierter Spannungsteiler

Ein weitere praktische Anwendung finden frequenzabhängige Netzwerke in sogenannten Tastköpfen. Diese werden zum Beispiel genutzt, um den Spannungsmessbereich von Oszilloskopen zu erweitern (Abbildung 1.42a), so dass am Eingang des Oszilloskopes nur eine kleine Teilspannung $u_2(t)$ der zu messenden Spannung $u_1(t)$ (Abbildung 1.42b) anliegt.

Die Eingangsimpedanz eines Oszilloskopes kann vereinfachend durch eine *RC*-Parallelschaltung (R_E & C_E in Abbildung 1.42b) modelliert werden. Mit einem unkompensierten Tastkopf, d.h. nur mit dem Widerstand R_V in Abbildung 1.42b, ergäbe sich somit ein frequenzabhängiges Teilerverhältnis, was die Messungen der Spannungsamplitude und der Phasenlage verfälschen würde.

Die Frequenzabhängigkeit ergibt sich, da der Betrag der Eingangsimpedanz $\underline{Z}_E$ des Oszilloskopes mit steigender Frequenz abnimmt (die Impedanz des Kondensators C_E nimmt mit steigenden Frequenzen ab). Um ein konstantes Teilerverhältnis zu erhalten, muss der Scheinwiderstand des Tastkopfs ebenfalls mit der Frequenz abnehmen, d.h. es muss ein Kondensator parallel zu R_V geschaltet werden. Damit folgt der frequenzkompensierte Teiler in Abbildung 1.42c.

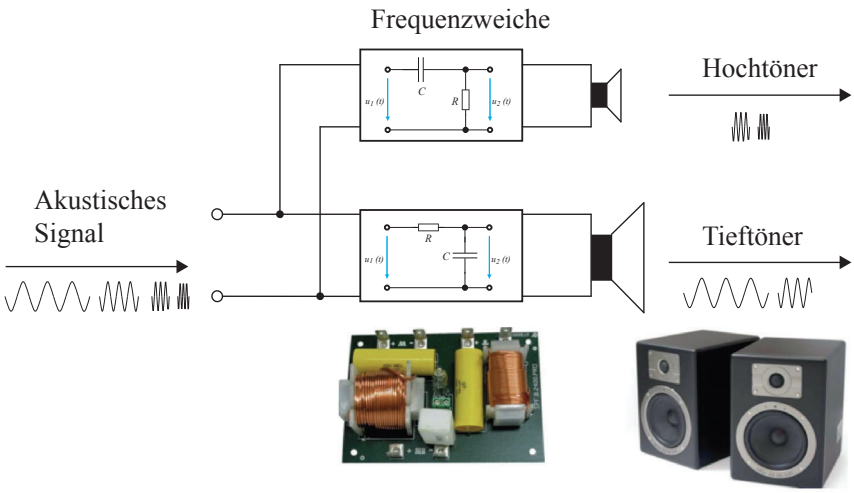


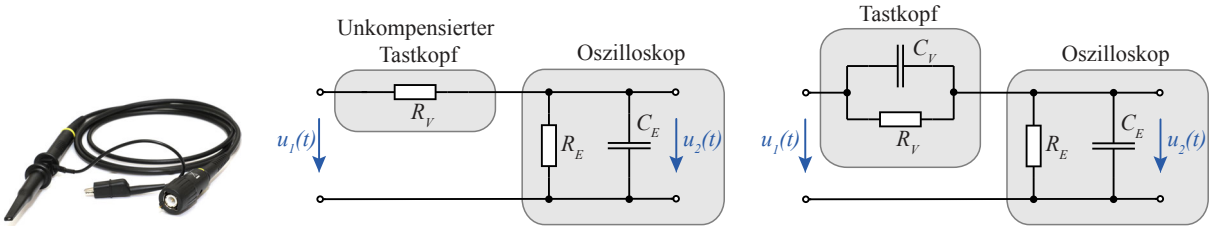
Figure 1.41: Darstellung einer Frequenzweiche für einen 2-Wege Lautsprecher mit einem Tief- und einem Hochtöner. Die Frequenzweiche leitet dabei die tiefen Frequenzanteile zum Tieftöner und die hohen Frequenzanteile zum Hochtöner weiter. In realen Frequenzweichen werden die Filternetzerke häufig mit *LC*-Filtern aufgebaut, um die Verluste zu minimieren.

Mit der Eingangsimpedanz $\underline{Z}_E$ des Oszilloskopes (R_E parallel zu C_E)

$$\underline{Z}_E = \frac{R_E \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_E}}{R_E + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_E}} = \frac{R_E}{1+\mathrm{j}\omega R_E C_E} \tag{1.128}$$

ergibt sich das Teilerverhältnis zu

$$\frac{\underline{\hat{u}}_2}{\underline{\hat{u}}_1} = \frac{\underline{Z}_E}{\underline{Z}_E + \underline{Z}_V} = \frac{\frac{R_E}{1+\mathrm{j}\omega R_E C_E}}{\frac{R_E}{1+\mathrm{j}\omega R_E C_E} + \frac{R_V}{1+\mathrm{j}\omega R_V C_V}} = \frac{R_E}{R_E + R_V \frac{1+\mathrm{j}\omega R_E C_E}{1+\mathrm{j}\omega R_V C_V}} \tag{1.129}$$



(a) (b) (c)

Figure 1.42: a) Bild eines Tastkopfs. b) Ersatzschaltung eines unkompensierten Tastkopfs an einem Oszilloskop. c) Ersatzschaltung eines kompensierten Tastkopfs an einem Oszilloskop.

Ziel ist es ein frequenzunabhängiges Teilerverhältnis zu erhalten, d.h.:

$$\frac{\underline{\hat{u}}_2}{\underline{\hat{u}}_1} = \frac{1}{n} \tag{1.130}$$

Betrachtet man das Teilerverhältnis vom vorangegangenen Abschnitt:

$$\frac{\underline{\hat{u}}_2}{\underline{\hat{u}}_1} = \frac{\underline{Z}_E}{\underline{Z}_E + \underline{Z}_V} = \frac{R_E}{R_E + R_V \frac{1+\mathrm{j}\omega R_E C_E}{1+\mathrm{j}\omega R_V C_V}} \tag{1.131}$$

so erkennt man, dass dieses frequenzunabhängig wird, wenn $R_E C_E = R_V C_V$, d.h. wenn gilt

$$\boxed{\frac{R_E}{R_V} = \frac{C_V}{C_E}} \tag{1.132}$$

Damit kürzen sich die von ω abhängigen Anteile im Teilerverhältnis heraus.
Aus dieser Bedingung für das frequenzunabhängige Teilerverhältnis folgt:

$$\frac{\underline{\hat{u}}_2}{\underline{\hat{u}}_1} = \frac{R_E}{R_E + R_V} \stackrel{!}{=} \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} R_V = (n-1)R_E \\ C_V = C_E/(n-1) \end{array}} \tag{1.133}$$

Anschaulich wird der frequenzkompensierte Teiler mit zunehmender Frequenz f zum kapazitiven Teiler. Die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_i$ des frequenzkompensierten Teilers nimmt mit steigendem f ab, d.h. die zu messende Spannungsquelle $u_1(t)$ wird zunehmend stärker belastet.

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_V + \underline{Z}_E = \frac{R_E}{1 + \mathrm{j}\omega R_E C_E} + \frac{R_V}{1 + \mathrm{j}\omega R_V C_V} = \frac{nR_E}{1 + \mathrm{j}\omega R_E C_E} \tag{1.134}$$

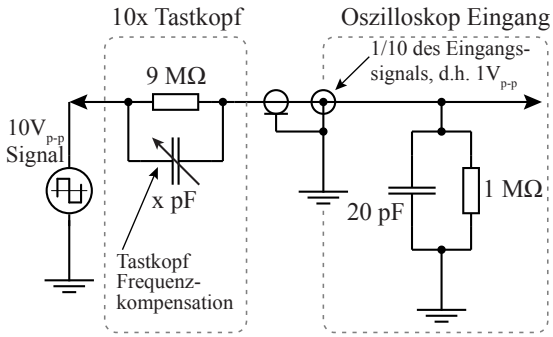


Figure 1.43: Ersatzschaltung eines kompensierten Tastkopfs an einem Oszilloskop mit typischen Bauteilwerten. Mit dem Tastkopf wird eine rechteckförmigen Spannung mit einer Spitze-Spitze-Amplitude von 10V gemessen.

1.6 Resonanzschaltungen

1.6.1 *RLC*-Serienschwingkreis

Nach den Filterschaltungen die jeweils nur aus einem Widerstand und einer Spule oder Kapazität bestanden, wird im Folgenden die Reihenschaltung aus einer Kapazität C, einer Induktivität L und einem Widerstand R wie in Abbildung 1.44a betrachtet. Die Serienschaltung von R, L und C wird dabei als Serienschwingkreis bezeichnet. Die Speisung des Schwingkreises erfolgt durch eine sinusförmige Spannungsquelle mit der frei wählbaren Kreisfrequenz ω. Die Maschengleichung für den Serienschwingkreis resultiert in

$$\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{u}}_R + \underline{\hat{u}}_L + \underline{\hat{u}}_C = (\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C)\underline{\hat{i}} = \left(R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)\underline{\hat{i}} = \underline{Z}\,\underline{\hat{i}} \tag{1.135}$$

Die Gesamtimpedanz der Reihenschaltung ist damit gleich

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |\underline{Z}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{1.136}$$

und der Betrag der Impedanz und der Phasenwinkel ergeben sich aus

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC} \tag{1.137}$$

In Abbildung 1.44b ist beispielhaft ein Zeigerdiagramm für die Serienschaltung dargestellt, wobei der Stromzeiger $\underline{\hat{i}}$ als Bezugswert in die reelle Achse gelegt wurde. Weiterhin wurde angenommen, dass die Kreisfrequenz der Quelle oberhalb der Resonanzkreisfrequenz liegt, d.h. es gilt $\omega > \omega_0$. Die Resonanzkreisfrequenz ω_0 wird unten gleich noch definiert. In Abbildung 1.44c ist die Zusammensetzung der Impedanz $\underline{Z}$ aus den einzelnen Anteilen dargestellt.

Der Phasenwinkel φ zwischen Strom und Spannung kann positiv, negativ oder im Fall von $\omega_0 L = {}^1/_{\omega_0 C}$ auch Null werden, wobei $f_0 = {}^{\omega_0}/_{2\pi}$ als Resonanzfrequenz bezeichnet wird

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0^2 L - \frac{1}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{1.138}$$

Im Resonanzfall können sogenannte Resonanzerscheinungen (Überspannungen/-ströme) auftreten, wie noch erläutert wird. Weiterhin gilt $\Im\{\underline{Z}\} = 0$ und der Quellenstrom und die Quellenspannung sind in Phase, da $\varphi = 0$.

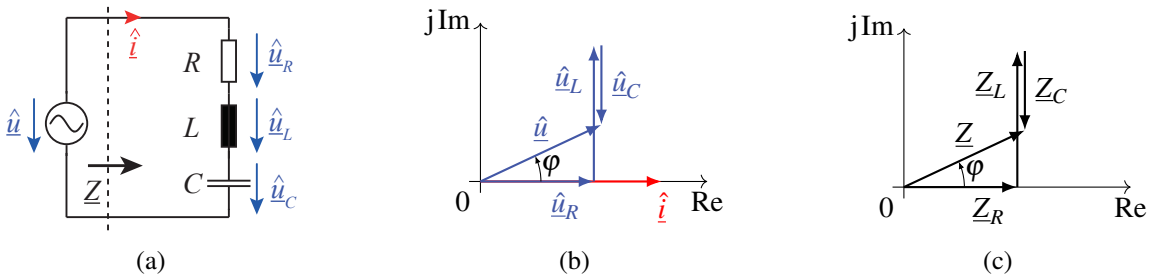


Figure 1.44: a) Schaltbild eines *RLC*-Resonanzkreises an einer sinusförmigen Spannungsquelle. b) Beispiel für ein Zeigerdiagramm für Anregung oberhalb der Resonanzfrequenz ($\underline{\hat{i}}$ ist der Bezugszeiger). c) Darstellung der komplexen Impedanz $\underline{Z}$ als Summe der einzelnen Elemente.

Impedanzverlauf

In Abbildung 1.45a sind der Betrag und die Phase der Impedanz $\underline{Z}$ sowie der Verlauf der Blindwiderstände der Kapazität und der Induktivität als Funktion der Frequenz f der Spannungsquelle für den Beispielfall: L = 1 mH, C = 1 µF und R = 4 Ω aufgetragen. Bei der Resonanzfrequenz (hier: $f_0 \approx 5$ kHz) gilt: $\underline{Z}(\omega_0) = R$, d.h. der Betrag der Impedanz $|\underline{Z}(\omega)|$ ist minimal. Hinweis: Die Güte des Serienschwingkreises, die später noch erläutert wird, ist im betrachteten Fall $Q_s \approx 7.9$. Zur Erinnerung noch kurz die Impedanzen der einzelnen Bauelemente

$$\underline{Z}_R = R \qquad \underline{Z}_L = \mathrm{j}\omega L \qquad \underline{Z}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \tag{1.139}$$

Oberhalb der Resonanzfrequenz $f > f_0$ dominiert der induktive Blindwiderstand $X_L = \omega L$ und das Verhalten des Schwingkreises wird hauptsächlich durch die Induktivität L bestimmt. Der kapazitive Blindwiderstand geht gegen Null. Dies ist sowohl am Wert des Betrages $|\underline{Z}|$ als auch an der Phase $\varphi \approx +90°$ (ähnlich wie bei einer Induktivität) in Abbildung 1.45a zu erkennen.

Unterhalb der Resonanzfrequenz $f < f_0$ dominiert der kapazitive Blindwiderstand $|X_C| = 1/\omega C$ und das Verhalten des Schwingkreises wird hauptsächlich durch die Kapazität C bestimmt. Der induktive Blindwiderstand geht gegen Null. Dies ist wiederum sowohl beim Betrag $|\underline{Z}|$ als auch an der Phase $\varphi \approx -90°$ (ähnlich bei einer Kapazität) zu erkennen.

In Abbildung 1.45b ist die Admittanz $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ des betrachteten Schwingkreises aufgetragen.

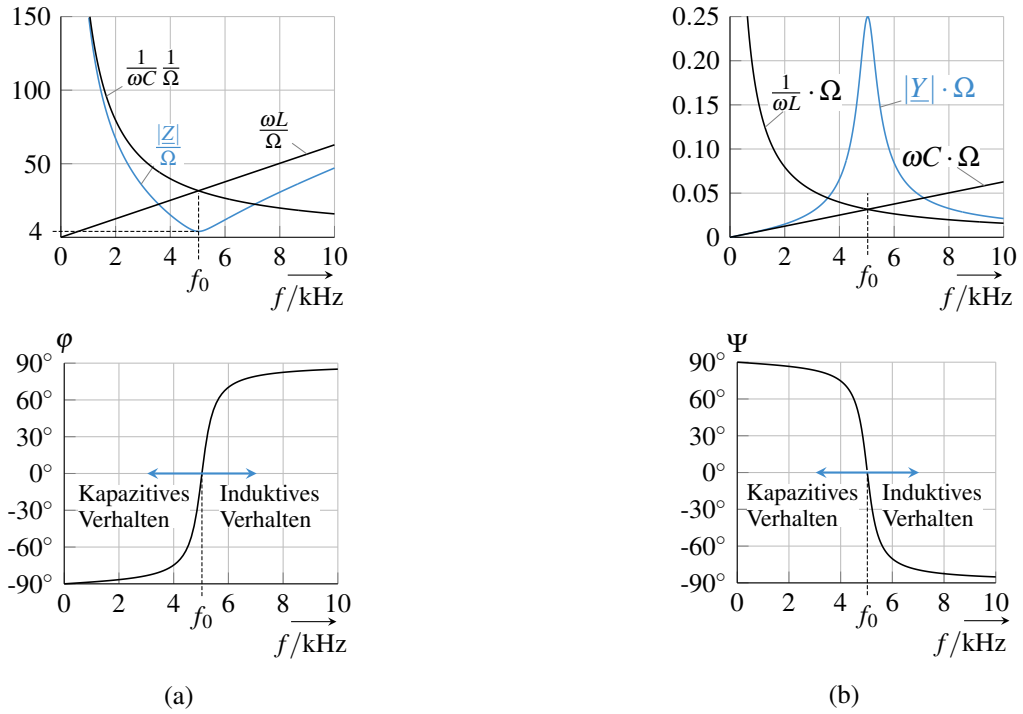


Figure 1.45: a) Betrag und Phase der Impedanz $\underline{Z}$ sowie die Blindwiderstände der Kapazität und der Induktivität als Funktion der Frequenz f der Quelle. In b) ist die dazugehörige Admittanz und die Blindleitwerte dargestellt. Dabei sind folgende Bauteilwerte angenommen worden: $\hat{u} = 1\,\mathrm{V}/R = 4\,\Omega/L = 1\,\mathrm{mH}/C = 1\,\mu\mathrm{F} \rightarrow f_0 = 5\,\mathrm{kHz}/Q_s \approx 7.9$

Bauelementespannungen

Im nächsten Schritt wird der Verlauf der Spannungsamplituden an den drei Bauelementen R, L und C als Funktion der Frequenz näher untersucht, wobei hier v.a. der Bereich der Resonanzfrequenz interessant ist.

Am Widerstand gilt allgemein für den Betrag der Spannung (siehe Spannungsteiler)

$$\frac{|\underline{\hat{u}}_R|}{|\underline{\hat{u}}|} = \frac{|\underline{Z}_R|}{|\underline{Z}|} \quad \rightarrow \quad \hat{u}_R = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}\hat{u} \tag{1.140}$$

Der Maximalwert dieser Spannung tritt bei der Resonanzfrequenz auf, da hier der Nenner minimal wird, und ist gleich der Amplitude der Eingangsspannung.
Für die Beträge der Spannungen an der Induktivität und am Kondensator folgt

$$\frac{|\underline{\hat{u}}_L|}{|\underline{\hat{u}}|} = \frac{|\underline{Z}_L|}{|\underline{Z}|} \quad \rightarrow \quad \hat{u}_L = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}\hat{u} \tag{1.141}$$

$$\frac{|\underline{\hat{u}}_C|}{|\underline{\hat{u}}|} = \frac{|\underline{Z}_C|}{|\underline{Z}|} \quad \rightarrow \quad \hat{u}_C = \frac{1}{\omega C\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}\hat{u} \tag{1.142}$$

Von besonderem Interesse sind nun die Spannungswerte für die 3 Fälle

1. $f \rightarrow 0$
2. Resonanzfall $f = f_0$ und
3. $f \rightarrow \infty$

Für den 1. und den 3. Fall folgt unmittelbar

$$\text{Fall 1:} \quad f \rightarrow 0 \qquad \hat{u}_R = 0 \quad \hat{u}_L = 0 \quad \hat{u}_C = \hat{u} \tag{1.143}$$

$$\text{Fall 3:} \quad f \rightarrow \infty \qquad \hat{u}_R = 0 \quad \hat{u}_L = \hat{u} \quad \hat{u}_C = 0 \tag{1.144}$$

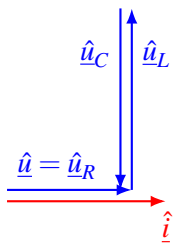


Figure 1.46: Beispiel für ein Zeigerdiagramm der Schaltung in Abbildung 1.44a für den Resonanzfall $f = f_0$. Dabei wurde aufgrund der Serienschaltung, bei welcher derselbe Strom durch alle Bauelemente fliesst, der Stromzeiger $\hat{i}$ als Referenz-/Bezugszeiger gewählt.

Für die Spannungswerte im Fall einer Resonanz ergibt sich

$$\text{Fall 2:} \quad f = f_0 \qquad \hat{u}_R = \hat{u} \qquad \hat{u}_L = \frac{\hat{u}}{R}\omega_0 L = \frac{\hat{u}}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \hat{u}_C = \frac{\hat{u}}{R}\frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\hat{u}}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{1.145}$$

Mit der folgenden Definition der Variablen Q_s ergibt sich, dass an der Spule und am Kondensator bei Resonanz die Q_s-fache Amplitude der Eingangsspannung auftritt. Den Wert Q_s bezeichnet man dabei als Güte des Serienschwingkreises

$$Q_s = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{d.h.} \quad \hat{u}_L = \hat{u}Q_S \qquad \hat{u}_C = \hat{u}Q_S \tag{1.146}$$

Da $\left[\sqrt{L/C}\right] = \left[\sqrt{\frac{Vs/A}{As/V}}\right] = \Omega$ gilt, ist die Güte Q_S einheitenlos. Die Güte Q_s beschreibt dabei das Verhältnis der gesamten im Schwingkreis gespeicherten Energie W_{ges} zu den ohmschen Verlusten ΔW, die pro Schwingungsperiode auftreten

$$Q_s = \frac{2\pi W_{ges}}{|\Delta W|} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} \tag{1.147}$$

Der Kehrwert der Güte Q_s wird als Verlustfaktor oder Dämpfung d_s bezeichnet.

$$d_s = \frac{1}{Q_s} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{1.148}$$

Da die Güte Q_s wesentlich grösser als 1 werden kann, kann die Spannungsamplitude an der Spule und dem Kondensator ein Vielfaches der Eingangsspannung $\hat{u}$ betragen. Dies it in Abbildung 1.47 für verschiedene Gütewerte dargestellt. Man bezeichnet diese Resonanzerscheinung daher als Spannungsresonanz. Die Spannungsüberhöhung kann auch zu Beschädigung von Bauelementen führen.

Die Maximalwerte der Spulenspannung und der Kondensatorspannung treten jeweils bei den Frequenzen $\omega_L = 2\pi f_L$ und $\omega_C = 2\pi f_C$ auf. Diese ergeben sich aus

$$\frac{d\hat{u}_L}{d\omega} \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad f_L = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{2LC - R^2C^2}} = f_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}d_s^2}} \quad \text{mit} \quad d_s \leq \sqrt{2} \tag{1.149}$$

$$\frac{d\hat{u}_C}{d\omega} \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad f_C = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = f_0\sqrt{1 - \frac{1}{2}d_s^2} \quad \text{mit} \quad d_s \leq \sqrt{2} \tag{1.150}$$

Bei hohen Werten für die Schwingkreisgüte ($d_s \rightarrow 0$) fallen die Frequenzen für die Maxima praktisch mit der Resonanzfrequenz zusammen. Bei kleiner Schwingkreisgüte rücken f_L und f_C weiter auseinander.

Für den folgenden Grenzfall tritt gerade keine Resonanzerscheinung mehr auf und es gilt für die Frequenzen

$$d_s = \sqrt{2} \quad \text{bzw.} \quad Q_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \rightarrow \qquad f_L = \infty, \quad f_C = 0 \tag{1.151}$$

d.h. die Maxima verschwinden.

Im Fall von $d_s > \sqrt{2}$ bzw. $Q_s < 1/\sqrt{2}$ treten keine Resonanzerscheinungen mehr auf und die über der Spule und dem Kondensator maximal auftretenden Spannungen sind dann gleich der Eingangsspannung.

Für die maximal auftretenden Spannungen folgt

$$\frac{\hat{u}_{Lmax}}{\hat{u}} = \frac{\hat{u}_{Cmax}}{\hat{u}} = \begin{cases} \frac{1}{d_s\sqrt{1-(d_s/2)^2}} = \frac{Q_s}{\sqrt{1-1/(2Q_s)^2}} & \text{für} \quad Q_s \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \quad\quad\quad\quad Q_s \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7 \end{cases} \tag{1.152}$$

Für $Q_s > 4$ gilt mit guter Näherung $\hat{u}_{Lmax}/\hat{u} = \hat{u}_{Cmax}/\hat{u} \approx Q_s$, d.h. die Spannungsüberhöhung ist bei kleiner Dämpfung bzw. hoher Güte näherungsweise gleich der Schwingkreisgüte Q_s (siehe dazu auch Abschnitt 1.6.1). Insgesamt kann damit eine Spannungsüberhöhung nur für eine Güte $Qs > 1/\sqrt{2}$ auftreten.

Einfluss der Güte

In den Abbildungen 1.47a - 1.47c sind die Stromamplitude und die jeweiligen Teilspannungen an den verschiedenen Bauelementen in Abhängigkeit der Frequenz und für verschiedene Werte der Güte dargestellt: $Q_s = 1/\sqrt{2}$ in Abbildung 1.47a, $Q_s = 2$ in Abbildung 1.47b und $Q_s = 7.9$ in Abbildung 1.47c. Dabei ist die Amplitude der Quellenspannung $\hat{u} = 1V$ unabhängig von der Frequenz und der Wert von $R = 4\Omega$ ist für alle Abbildungen identisch. Die Güte wird jeweils über das Verhältnis L/C variiert.

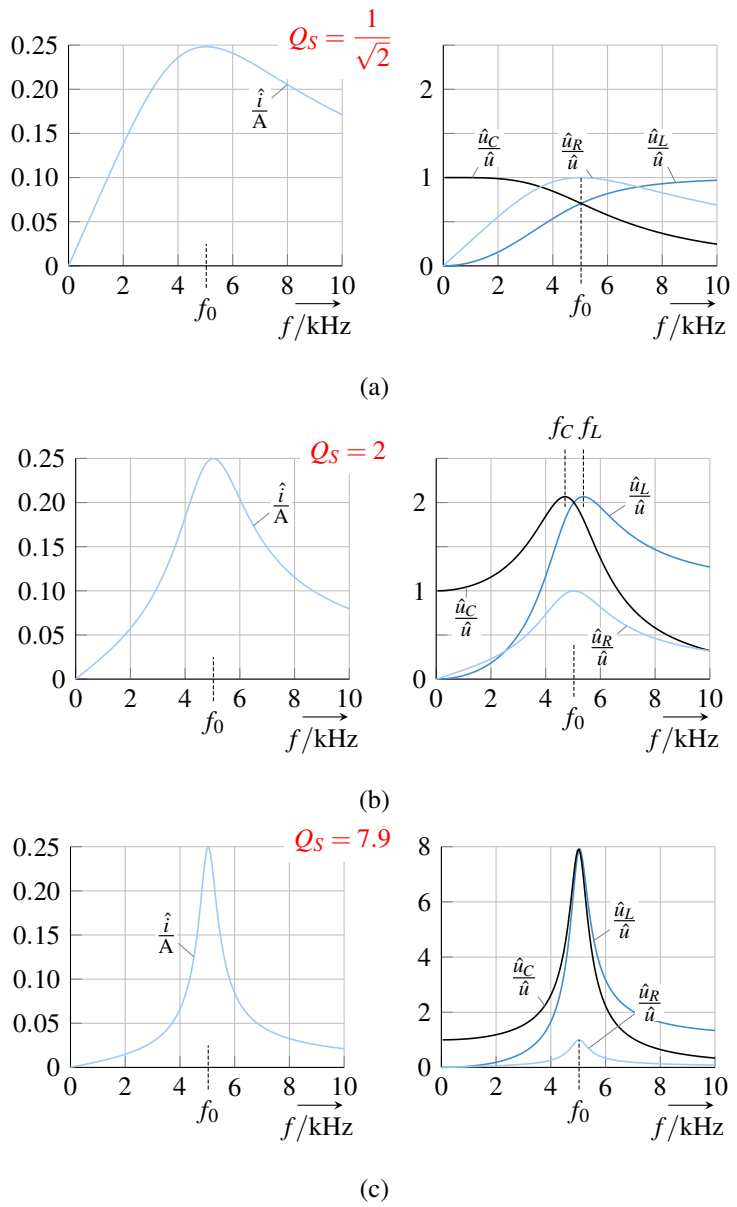


Figure 1.47: Verlauf des Stromes durch den Serienschwingkreis und der Spannungen an den einzelnen Bauelementen in Abhängigkeit der Frequenz für eine sinusförmige Eingangsspannung mit konstanter Amplitude $\hat{u} = 1\,\mathrm{V}$. Die Verläufe sind für 3 unterschiedliche Gütewerte dargestellt, wobei die Resonanzfrequenz in allen 3 Fällen gleich $f_0 = 5\,\mathrm{kHz}$ ist.

Die Stromamplitude ergibt sich aus $\hat{i} = \hat{u}/|\underline{Z}| = \hat{u}|\underline{Y}|$ und für eine frequenzunabhängige Eingangsspannung $\hat{u} = 1V$ ist der prinzipielle Verlauf von $\hat{i}$ identisch zum Verlauf der Admittanz $|\underline{Y}|$.

Bei Resonanz gilt allgemein $\underline{\hat{u}}_L = -\underline{\hat{u}}_C$, d.h. die *LC*-Serienschaltung wird zum Kurzschluss, der Strom nimmt seinen Maximalwert an, der sich aus $\hat{i} = \hat{u}/R$ ergibt und wird nur durch den Widerstand R begrenzt. Die Spannungsamplituden an der Induktivität und dem Kondensator sind jeweils um den Wert der Güte höher als die Eingangsspannung $\hat{u}$. Das Resonanzverhalten ist umso stärker ausgeprägt, je höher die Güte ist. Wie oben bereits erläutert, tritt für $Q_s \leq 1/\sqrt{2}$ keine Spannungsüberhöhung mehr auf (Abbildung 1.47a).

Für $f \to 0$ verschwindet der Strom aufgrund der Serienkapazität und für $f \to \infty$ aufgrund der Serieninduktivität. Für $f = f_0$ ist der Strom maximal. Aufgrund dieses Verlaufs von $|\underline{Y}|$ kann der *RLC*-Schwingkreis auch zum Herausfiltern eines bestimmten Frequenzbereichs genutzt werden (*Saugkreis*).

In den Abbildungen 1.47b und 1.47c ist weiterhin die grösser werdende Verschiebung der Maxima der

Spannungen u_L und u_C, d.h. der Frequenzen f_L und f_C gegenüber der Resonanzfrequenz mit abnehmender Güte deutlich zu sehen.

Zur weiteren Verdeutlichung des Einflusses der Güte Q_s auf das Verhalten des Schwingkreises sind in Abbildung 1.48a der Verlauf des Betrags der Admittanz und die Phase für verschiedene Werte der Güte in einem Graph dargestellt. Dabei ist der Wert von R, die Resonanzfrequenz f_0 sowie das Produkt LC für alle Verläufe gleich. Die unterschiedlichen Werte für Q_s werden wieder über das Verhältnis L/C eingestellt. Das Resonanzverhalten ist dabei wiederum umso stärker, je höher Q_s ist.

In Abbildung 1.48b ist noch einmal der Verlauf der Spannungen an der Induktivität und am Kondensator in Abhängigkeit der Frequenz der Quelle für $Q_s = 2$ dargestellt. Wie oben schon erläutert, ist die Güte eine gute Näherung für die Amplituden der maximal auftretenden Überspannungen. Für $Q_s = 2$ ist die maximale Spannung näherungsweise doppelt so hoch wie die Amplitude der Spannungsquelle.

Die maximal auftretenden Spannungsüberhöhungen $\hat{u}_{Lmax}/\hat{u}$ und $\hat{u}_{Cmax}/\hat{u}$ ist in Abbildung 1.48c in Abhängigkeit der Güte dargestellt. Der Verlauf dieser Funktion kann durch die zwei Geraden

$$\frac{\hat{u}_{Lmax}}{\hat{u}} = \frac{\hat{u}_{Cmax}}{\hat{u}} \approx 1 \qquad \text{für} \qquad Q_s \leq 1 \tag{1.153}$$

$$\frac{\hat{u}_{Lmax}}{\hat{u}} = \frac{\hat{u}_{Cmax}}{\hat{u}} \approx Q_s \qquad \text{für} \qquad Q_s \geq 1 \tag{1.154}$$

approximiert werden, die sich bei $Q_s = 1$ schneiden. Im Graph in Abbildung 1.48c kann man für $Q_s = 2$ auch die ungefähre Verdopplung der Spannungsamplituden ablesen, die in Abbildung 1.48b sichtbar ist. Dies ist ein erster Schritt in Richtung einer verallgemeinerten Darstellung der einzelnen Verläufe (unabhängig von den Bauteilwerten), die im Folgenden noch erweitert wird.

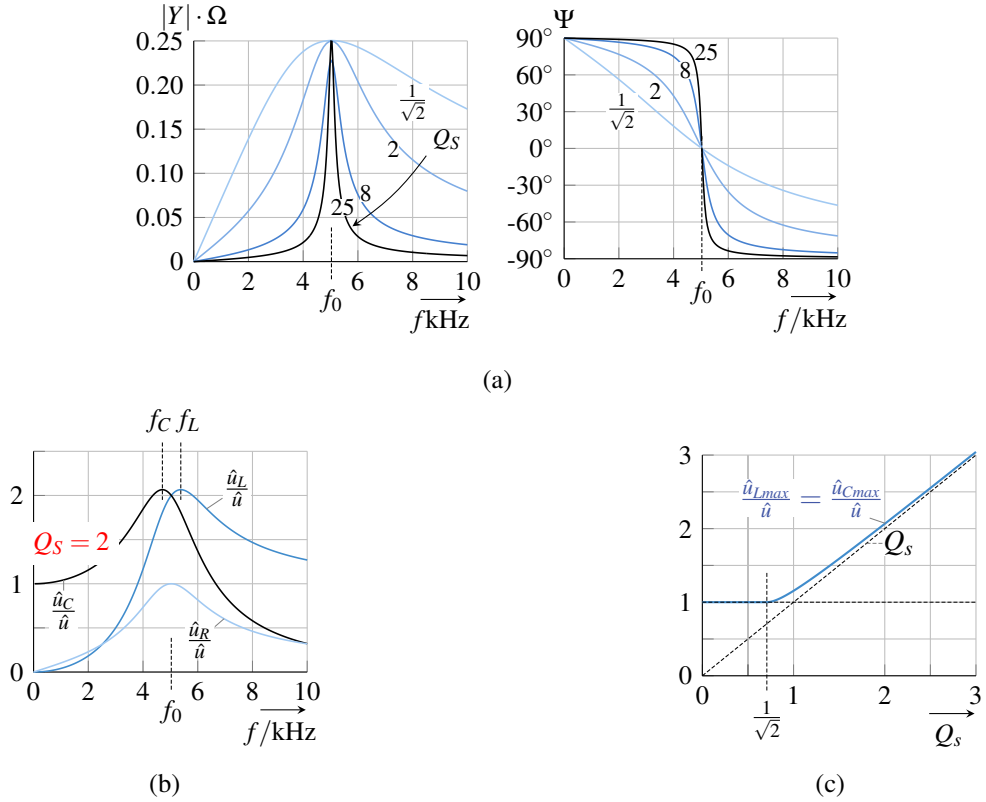


Figure 1.48: a) Verlauf der Admittanz und der Phase für verschiedene Werte der Güte. b) Verlauf der Spannungen u_L und u_C Abhängigkeit von f für $Q_s = 2$. c) Auftretenden Spannungsüberhöhungen in Abhängigkeit der Güte.

Normierte Darstellung

Die Kennlinien eines Schwingkreises werden häufig normiert, d.h. in einer von den konkreten Werten der Komponenten unabhängigen Form dargestellt. Zur Ableitung der normierten Kennlinie wird die

Impedanz $\underline{Z}$ auf den Widerstand R bezogen. Damit wird prinzipiell die "Lage" der Resonanzkurve im Bezug auf die y-Achse normiert, da ja $\underline{Z}(\omega_0)/R = 1$ folgt – unabhängig von den Bauteilwerten. Zusätzlich wird für die Normierung der x-Achse die Kreisfrequenz ω auf das Produkt $\omega_0\sqrt{LC} = 1$ ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$) bezogen. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\underline{Z}}{R} &= 1 + \mathrm{j}\underbrace{\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}_{\text{Normierte Verstimmung: }\Omega} = 1 + \mathrm{j}\frac{1}{R}\left(\frac{\omega L}{\omega_0\sqrt{LC}} - \frac{\omega_0\sqrt{LC}}{\omega C}\right)\\ &= 1 + \mathrm{j}Q_s\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\end{aligned} \tag{1.155}$$

Dabei wird der folgende Ausdruck

$$v = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \tag{1.156}$$

als Verstimmung und der Ausdruck $\Omega = \mathrm{Q_S v}$ als normierte Verstimmung bezeichnet. Die Verstimmung nimmt z.B. folgende Werte an:

- ▷ $v\left(\frac{1}{2}\omega_0\right) = -1.5$
- ▷ $v(\omega_0) = 0$
- ▷ $v(2\omega_0) = +1.5$

Für die normierte Verstimmung gilt:

- ▷ $\Omega(0) = -\infty$
- ▷ $\Omega(\omega_0) = 0$
- ▷ $\Omega(\infty) = +\infty$

Allgemein bezeichnet man als Verstimmung die relative Darstellung eines Frequenzverhältnisses, wobei eine der Frequenzen vorgegeben und als fest angesehen wird – in unserem Beispiel ist dies die Resonanzfrequenz, es kann aber auch z.B. die Mittenfrequenz eines Filters verwendet werden. Die Verstimmung beschreibt somit in normierter Form, wie das eigentliche ω von der Bezugsfrequenz (hier: ω_0) abweicht.

Da die Verstimmung (wie auch die normierte Verstimmung) den Wert 0 bei ω_0 aufweist, wird die normierte Impedanz unabhängig von der jeweiligen Resonanzfrequenz. Mit der Skalierung der Verstimmung mit der Güte ($\Omega = \mathrm{Q_S v}$) wird weiterhin der unterschiedliche Verlauf der Impedanz (bzw. der Admittanz – siehe Abbildung 1.48a) für verschiedene Gütewerte auf einen einheitlichen Kurvenverlauf normiert.

Mit der Verstimmung bzw. der normierten Verstimmung folgt damit die normierte Impedanz:

$$\frac{\underline{Z}}{R} = 1 + \mathrm{jQ_s v} = 1 + \mathrm{j}\Omega \qquad |\underline{Z}| = R\sqrt{1+\Omega^2} \qquad \tan\varphi = \Omega \tag{1.157}$$

Der Verlauf des Betrags der normierten Impedanz ist in Abbildung 1.49a und der Verlauf des Phasenwinkels in Abbildung 1.49b gegeben, wobei der Verlauf des Phasenwinkels direkt den Verlauf für $\arctan x$ beschreibt.

An der unteren Grenzfrequenzen ω_1 und an der oberen Grenzfrequenz ω_2 ist der Real- und der Imaginärteil der Impedanz betragsmässig gleich. Für die normierte Impedanz ist dies der Fall, wenn $\Omega = \pm 1$. Damit

können die beiden Grenzfrequenzen berechnet werden

$$\Omega = \pm 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \pm 1 \tag{1.158}$$

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_1}{\omega_0} = -\frac{1}{2Q_s} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_s^2}} \tag{1.159}$$

$$\omega_2 = +\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} = +\frac{1}{2Q_s} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_s^2}} \tag{1.160}$$

Die Impedanzen und die Phase haben bei $\omega = \omega_1$ und $\omega = \omega_2$ die folgenden Werte

$$|\underline{Z}(\omega_1)| = |\underline{Z}(\omega_2)| = R\sqrt{2} \qquad \varphi(\omega_1) = -45^\circ \quad \varphi(\omega_2) = +45^\circ \tag{1.161}$$

Die Resonanzfrequenz kann als das geometrische Mittel von ω_1 und ω_2 dargestellt werden:

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \tag{1.162}$$

Der Abstand von f_1 und f_2 wird dabei als Bandbreite bezeichnet

$$B = f_2 - f_1 = \frac{1}{2\pi}(\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{2\pi}\frac{R}{L} = \frac{f_0}{Q_s} \tag{1.163}$$

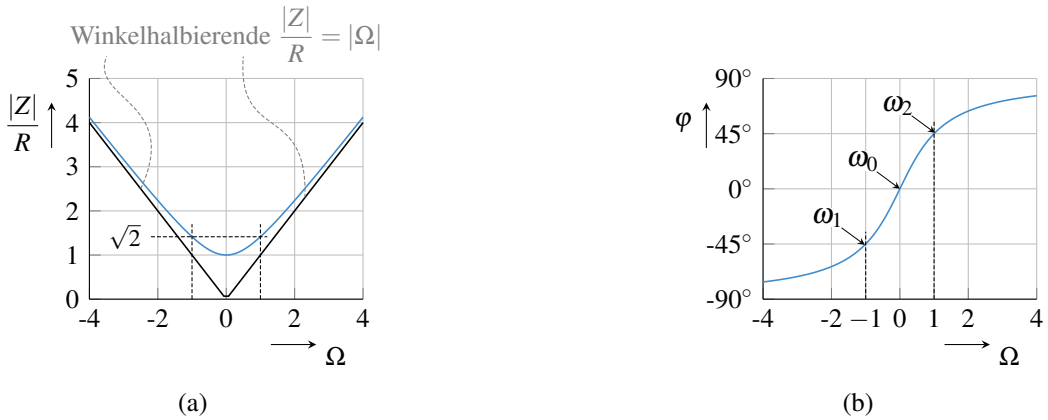


Figure 1.49: a) Betrag der normierten Impedanz und in b) Verlauf des normierten Phasenwinkels.

Anwendungsbeispiel: Zündung einer Leuchtstoffröhre

Die Spannungsüberhöhung im Serienschwingkreis wird technisch z.B. in Vorschaltgeräten für Leuchtstoffröhren genutzt. Dort wird nach dem Vorheizen der Elektroden (um das Zünden zu erleichtern), ein Schwingkreis nahe der Resonanz betrieben, um eine hohe Spannung zwischen den Elektroden zu erzeugen, die einen Entladungsvorgang (Durchschlag) startet.

In Abbildung 1.50a ist ein detaillierter Schaltplan eines Vorschaltgeräts für Leuchtstoffröhren dargestellt. Dort wird der Steuer-IC MC34262 für die Gleichrichtung der Netzspannung mit einem sinusförmigen Netzströmen (PFC) genutzt. Weiterhin wird der Steuer-IC L6574 zum Erzeugen der Spannung für die Leuchtstoffröhre eingesetzt.

In Abbildung 1.51b ist eine Fotografie der Schaltung für ein Lampenvorschaltgerät zu sehen – von oben und von unten.

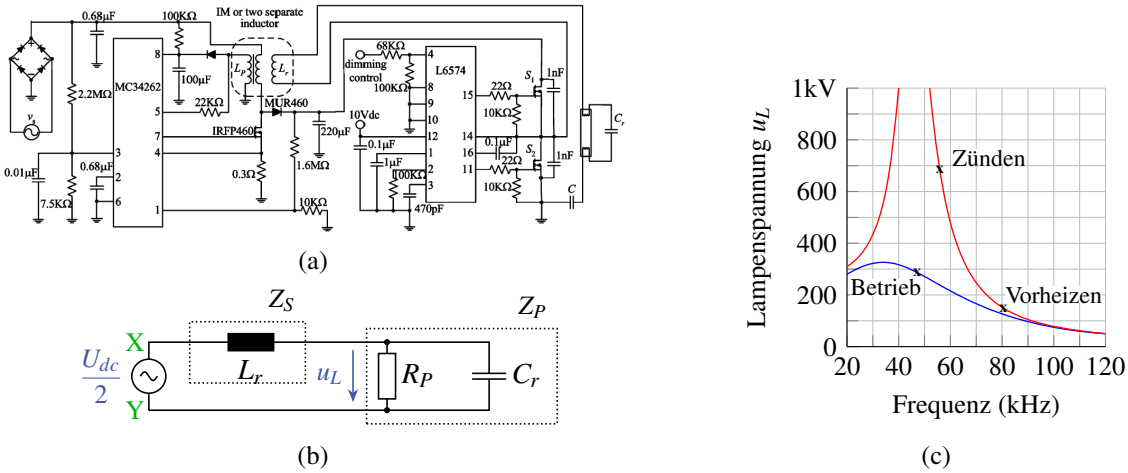


Figure 1.50: a) Vereinfachter Schaltplan eines Vorschaltgeräts. b) Prinzipschaltbild des Resonanzkreises mit anregender Spannungsquelle, die die Funktion des Konverters in Abbildung 1.51a modelliert.

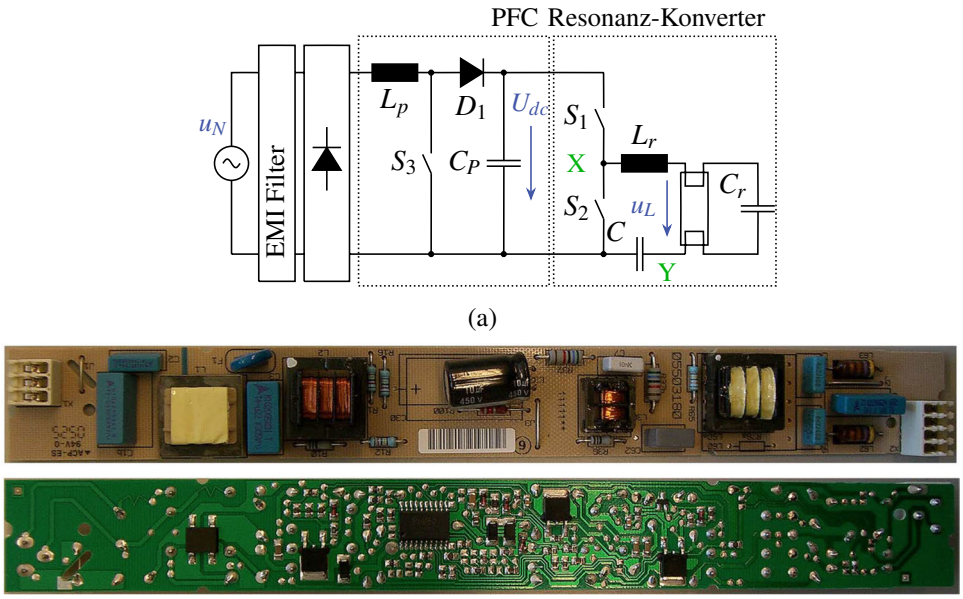


Figure 1.51: a) Blockschaltbild des Vorschaltgerätes mit einem Resonanzkonverter, der die rechteckförmige anregende Spannung für den Resonanzkreis in Abbildung 1.50b erzeugt.

1.6.2 Wirkungsgrad verschiedener Lichtquellen

In der unten stehenden Tabelle sind typische Werte für den Wirkungsgrad von verschiedenen Lichtquellen aufgelistet. In Abbildung ?? sind beispielhaft Photos von betrachteten Lichtquellen gegeben.

Glühbirne	**Halogenlampe**	**Energiesparlampe**	**Leuchtdiode**
3-5%	8-12%	15-25%	25-40%

Wirkungsgrad: Abgegebenes Licht bezogen auf die aufgenommene elektrische Leistung [1].

[1] LEDTipps.net, [2]-[5] Wikipedia, [6] Flickr

(a) Glühbirnen [2] (b) Halogenlampen [3] (c) Energiesparlampen [4] [5] (d) Halogenlampen [6]

Beispiele für verschiedene elektrische Lichtquellen

1.6.3 Parallelschwingkreis

Nach dem Serienschwingkreis wird im nächsten Schritt die Parallelschaltung von R, L und C – wie in Abbildung 1.53a dargestellt – betrachtet. Diese Parallelschaltung wird als Parallelschwingkreis bezeichnet. Die Speisung des Schwingkreises erfolgt durch eine sinusförmige Spannungsquelle mit der Kreisfrequenz ω. Die Knotengleichung für den Knoten KN1 lautet

$$\underline{\hat{i}} = \underline{\hat{i}}_R + \underline{\hat{i}}_L + \underline{\hat{i}}_C = (\underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C)\,\underline{\hat{u}} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C\right)\underline{\hat{u}} = \underline{Y}\,\underline{\hat{u}} \tag{1.164}$$

Damit folgt für die Admittanz der Parallelschaltung

$$\underline{Y} = G + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = |\underline{Y}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \tag{1.165}$$

und der Betrag der Admittanz und der Phasenwinkel ergeben sich aus

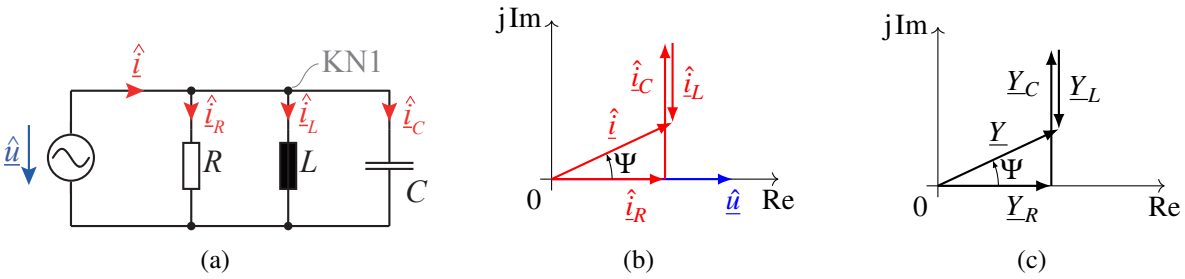
$$|\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \qquad \tan\psi = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} = \omega C R - \frac{R}{\omega L} \tag{1.166}$$

In Abbildung 1.53b ist das Zeigerdiagramm für die Parallelschaltung dargestellt, wobei der Spannungszeiger $\underline{\hat{u}}$ als Bezugswert in die reelle Achse gelegt wurde. In Abbildung 1.53c ist die Zusammensetzung der Admittanz $\underline{Y}$ aus den einzelnen Anteilen abgebildet.

Der Phasenwinkel ψ zwischen Strom und Spannung kann wiederum positiv, negativ oder im Resonanzfall, d.h. $\omega_0 C = {}^1/_{\omega_0 L}$ auch Null werden. Die Gleichung für die Resonanzfrequenz ist identisch mit der für den Serienschwingkreis gefundenen Beziehung

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{1.167}$$

Im Resonanzfall, d.h. für den Fall $\omega_0 C - {}^1/_{\omega_0 L = 0}$, gilt $\underline{Y} = G$ bzw. $\underline{Z} = R$.



(a) (b) (c)

Figure 1.53: a) Schaltbild eines Parallelschwingkreises. b) Zeigerdiagramm für eine Anregung oberhalb der Resonanzfrequenz ($\hat{u}$ ist Referenzzeiger) und das dazugehörige Admittanzdiagramm in c).

Impedanzverlauf

In Abbildung 1.54a sind der Betrag und die Phase der Admittanz $\underline{Y}$ sowie der Verlauf der Blindleitwerte der Kapazität und der Induktivität als Funktion der Frequenz f der sinusförmigen Schwingung $\underline{\hat{u}}$ aufgetragen. Die dabei angenommenen Zahlenwerte sind: $R = 250\,\Omega$, $L = 1\,\text{mH}$ und $C = 1\,\mu\text{F}$. Mit diesen Zahlenwerten folgt $f_0 \approx 5\,\text{kHz}$ und $Q_p = 7.9$ (siehe Abschnitt 1.6.3). Für den Betrieb an der Resonanzfrequenz ($f = f_0$) gilt: $\underline{Y}(\omega_0) = 1/R$, d.h. der Betrag der Admittanz $|\underline{Y}(\omega)|$ ist minimal.

$$\underline{Y} = G + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \tag{1.168}$$

Oberhalb der Resonanzfrequenz $f > f_0$ dominiert der kapazitive Leitwert $B_C = \omega C$ und das Verhalten des Schwingkreises wird hauptsächlich durch die Kapazität C bestimmt. Der induktive Blindleitwert geht gegen Null. Dies ist sowohl beim Betrag $|\underline{Y}|$ als auch an der Phase $\varphi \approx +90°$ der Gesamtadmittanz $\underline{Y}$ in Abbildung 1.54a zu erkennen, die sich für $f \gg f_0$ ähnlich wie die Admittanz einer Kapazität verhält.

Unterhalb der Resonanzfrequenz $f < f_0$ dominiert der induktive Blindleitwert $|B_L| = 1/\omega L$ und das Verhalten des Schwingkreises wird hauptsächlich durch die Induktivität L bestimmt. Der kapazitive Blindleitwert geht gegen Null. Dies ist sowohl beim Betrag $|\underline{Y}|$ als auch an der Phase $\varphi \approx -90°$ der Admittanz $\underline{Y}$ in Abbildung 1.54a zu erkennen, die sich für $f \ll f_0$ ähnlich wie die Admittanz einer Induktivität verhält.

In Abbildung 1.54b ist die Impedanz $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$ des Schwingkreises als Funktion der Frequenz f gegeben. Hier erkennt man die gleichen Zusammenhänge wie bei der Admittanz. Im betrachteten Fall ist $R = 250\,\Omega$, wie auch am Zahlenwert für $|\underline{Z}|$ an der Resonanzfrequenz erkennbar ist.

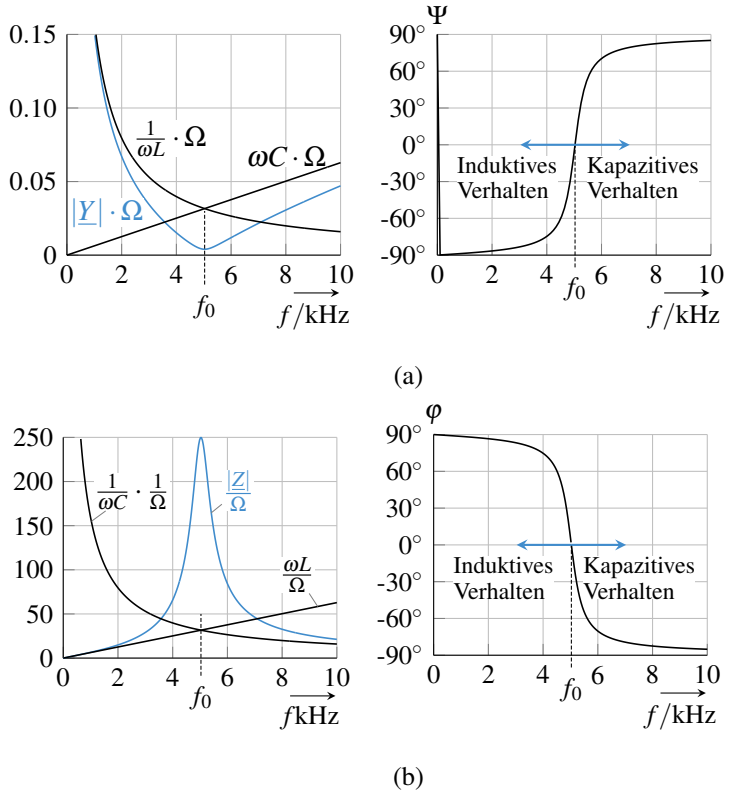


Figure 1.54: a) Verlauf des Betrages und der Phase der Admittanz $\underline{Y}$ und der Blindleitwerte der Kapazität/Induktivität in Abhängigkeit der Frequenz. In b) sind die entsprechenden Verläufe für die Impedanz und die Blindwiderstände gegeben. (Bauteilwerte: $\hat{u} = 1\,\text{V}/R = 250\,\Omega/L = 1\,\text{mH}/C = 1\,\mu\text{F} \rightarrow f_0 = 5\,\text{kHz}/Q_p \approx 7.9$)

Ungedämpfter Parallelschwingkreis

Als kurzer Einschub wird nun der Spezialfall eines ungedämpften Parallelschwingkreises bestehend aus einer idealen Spule L und einem idealen Kondensator C untersucht (d.h. $R \to \infty$ in Abbildung 1.53a) betrachtet. Dabei wird angenommen, dass der Kondensator zum Zeitpunkt $t = 0$ auf die Spannung U_0 aufgeladen ist und dass zum Zeitpunkt $t = 0$ der Schalter S geschlossen wird.

Nach dem Schliessen des Schalters wird der Kondensator über die Induktivität entladen und die Energie wird von der Kapazität zur Induktivität transferiert. Zum Zeitpunkt $\omega t = \pi/2$ ist die komplette Energie zur Induktivität transferiert worden und als nächstes wird die Energie wieder zurück zum Kondensator transferiert. Folglich schwingt die Energie mit der Resonanzfrequenz ω_0 des Schwingkreises innerhalb des Kreises hin- und her, wobei abwechselnd die Kapazität C und die Induktivität L die Rolle von Erzeuger und Verbraucher übernehmen. Die gesamte im Schwingkreis gespeicherte Energie bleibt dabei konstant

$$w(t) = w_C(t) + w_L(t) = \frac{1}{2}C\,[u_C(t)]^2 + \frac{1}{2}L\,[i_L(t)]^2 = \text{const.} \tag{1.169}$$

Da der Kreis ohne äussere Anregung schwingt, handelt es sich um eine sogenannte freie Schwingung und die Schwingfrequenz wird auch als Eigenfrequenz des Kreises bezeichnet wird. Wir der Kreis hingegen durch eine äussere Quelle mit einer beliebigen Frequenz angeregt (so wie dies bei den oben betrachteten Serien- und Parallelschwingkreis der Fall war), so spricht man von einer erzwungenen Schwingung.

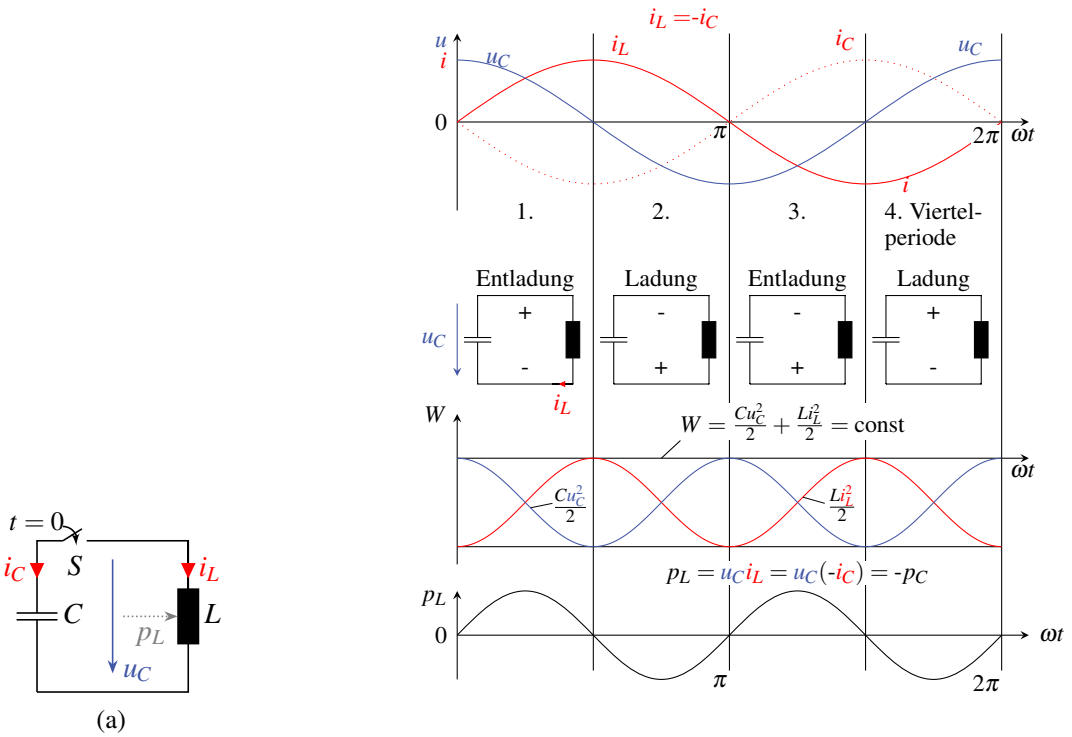
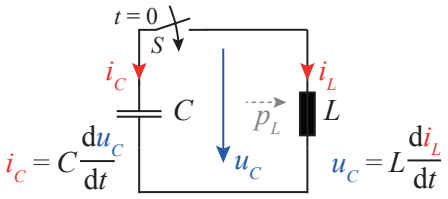


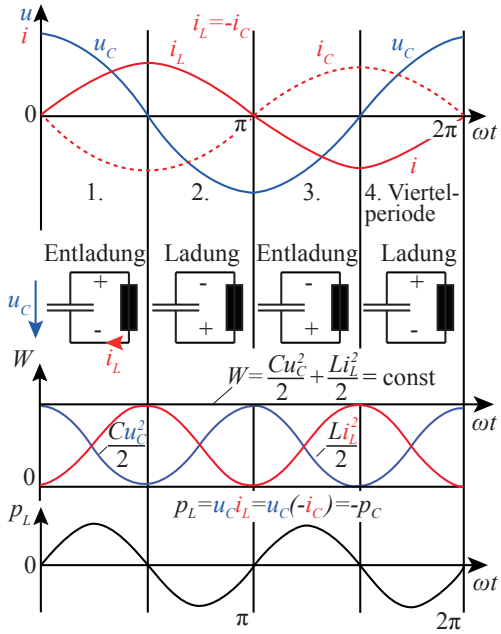
Figure 1.55: a) Schaltbild eines ungedämpften Parallelschwingkreises mit vorgeladener Kapazität ($u_c(t = 0) = U_0$). Der Schalter S wird bei $t = 0$ geschlossen. b) Zeitlicher Verlauf der Kondensatorspannung und des Induktivitätsstromes sowie der im Kondensator und in der Induktivität gespeicherten Energie.

Bauelementeströme

Nun zurück zum Parallelschwingkreis in Abbildung 1.53a bzw. 1.57 angeregt durch eine sinusförmige Quelle mit frei wählbarer Frequenz. Im Folgenden wird der Verlauf der Ströme durch die drei Bauelementen als Funktion der Frequenz untersucht. Dabei wird angenommen, dass der Kreis entweder durch eine Spannungs- (Abbildung 1.57a) oder durch eine Stromquelle (Abbildung 1.57b) gespiesen wird.



(a)



(b)

Der Strom durch den Widerstand ergibt sich unmittelbar mit der Stromteilerregel aus dem Quellenstrom $\hat{\underline{i}}$

$$\frac{|\hat{\underline{i}}_R|}{|\hat{\underline{i}}|} = \frac{|\underline{Y}_R|}{|\underline{Y}|} \quad \rightarrow \quad \hat{i}_R = \frac{G}{\sqrt{G^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}}\hat{i} \tag{1.170}$$

Bei der Resonanzfrequenz ist $\hat{i}_R = \hat{i}$. Bei Speisung mit einer Spannungsquelle ist der Strom unabhängig von der Frequenz: $\hat{i}_R = \hat{u}/R$, da die Spannungsquelle direkt die Spannung über dem Widerstand vorgibt.
Für die Beträge der Ströme durch die Induktivität und den Kondensator folgt mit der Stromteilerregel

$$\frac{|\hat{\underline{i}}_L|}{|\hat{\underline{i}}|} = \frac{|\underline{Y}_L|}{|\underline{Y}|} \quad \rightarrow \quad \hat{i}_L = \frac{1}{\omega L\sqrt{G^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}}\hat{i} \tag{1.171}$$

$$\frac{|\hat{\underline{i}}_C|}{|\hat{\underline{i}}|} = \frac{|\underline{Y}_C|}{|\underline{Y}|} \quad \rightarrow \quad \hat{i}_C = \frac{\omega C}{\sqrt{G^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}}\hat{i} \tag{1.172}$$

Von besonderem Interesse sind wieder die Werte der Ströme für die 3 Fälle:

1. $f \rightarrow 0$
2. Resonanzfall $f = f_0$ und
3. $f \rightarrow \infty$

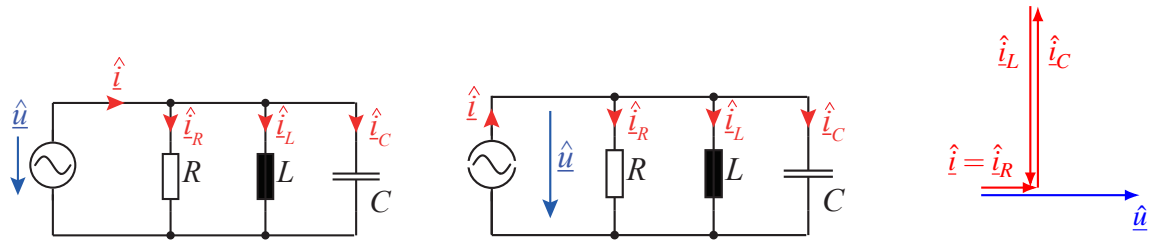
Für den ersten und den dritten Fall ergibt sich aus den obigen Gleichungen

$$\text{Fall 1:} \quad f \rightarrow 0 \qquad \hat{i}_R = 0 \quad \hat{i}_L = \hat{i} \quad \hat{i}_C = 0 \tag{1.173}$$

$$\text{Fall 3:} \quad f \rightarrow \infty \qquad \hat{i}_R = 0 \quad \hat{i}_L = 0 \quad \hat{i}_C = \hat{i} \tag{1.174}$$

Dabei ist für die Fälle 1 und 3 der Strom nur bei einer Speisung durch eine Stromquelle endlich, da für $f \rightarrow 0$ die Spule und für $f \rightarrow \infty$ der Kondensator einen Kurzschluss darstellt.
Die Stromwerte im Fall einer Anregung bei der Resonanzfrequenz sind gleich

$$\text{Fall 2:} \quad f = f_0 \qquad \hat{i}_R = \hat{i} = \hat{u}G \quad \hat{i}_L = \hat{i}\frac{1}{G\omega_0 L} = \underbrace{\hat{i}R}_{\hat{u}}\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \hat{i}_C = \hat{i}\frac{\omega_0 C}{G} = \underbrace{\hat{i}R}_{\hat{u}}\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{1.175}$$



(a) (b) (c)

Figure 1.57: Schaltplan eines Parallelschwingkreis mit Anregung durch eine Spannungsquelle in a) und einer Stromquelle in b). c) Zeigerdiagramm für den Resonanzfall $f = f_0$ ($\hat{u}$ ist Referenzzeiger).

Bei Resonanz wird die Admittanz minimal, d.h. die Impedanz maximal: $\underline{Z}(\omega_0) = R$. Damit ist die Amplitude des Quellenstromes $\hat{\underline{i}}$ im Resonanzfall bei Speisung mit einer Spannungsquelle minimal. Durch die Spule und den Kondensator fliesst im Resonanzfall der Q_p-fache Eingangs-/Quellenstrom

$$Q_p = R\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad \left(\text{zum Vergleich: } Q_s = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right) \qquad \text{d.h.} \qquad \hat{i}_L = \hat{i}_C = Q_p \hat{i} \tag{1.176}$$

Q_p ist analog zur Güte des Serienschwingkreises Q_s einheitenlos.

Der Kehrwert der Güte Q_p heisst wiederum Verlustfaktor oder Dämpfung d_p

$$d_p = \frac{1}{Q_p} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \left(\text{zum Vergleich: } d_s = R\sqrt{\frac{C}{L}}\right) \tag{1.177}$$

Im Resonanzfall sind die Spitzenwerte der Energien in der Spule und im Kondensator gleich $1/2 L\hat{i}_L^2 = 1/2 C\hat{u}_C^2 = 1/2 C\hat{u}^2$ und die Energie pendelt zwischen der Spule und dem Kondensator hin und her.

Da die Güte Q_p wesentlich grösser als 1 werden kann, kann die Stromamplitude der Ströme durch den Kondensator bzw. die Spule ein Vielfaches des Quellenstromes betragen (Stromüberhöhung), wodurch Bauteile zerstört werden können. Man bezeichnet die Resonanzerscheinung daher als Stromresonanz.

Die Maximalwerte von Spulenstrom und Kondensatorstrom treten jeweils bei den Frequenzen $\omega_L = 2\pi f_L$ und $\omega_C = 2\pi f_C$ auf. Diese ergeben sich aus

$$\frac{\mathrm{d}\hat{i}_L}{\mathrm{d}\omega} \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad f_L = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{G^2}{2C^2}} = f_0\sqrt{1 - \frac{1}{2}d_p^2} \quad \text{mit} \quad d_p \leq \sqrt{2} \tag{1.178}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{i}_C}{\mathrm{d}\omega} \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad f_C = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{2LC - G^2L^2}} = f_0\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}d_p^2}} \quad \text{mit} \quad d_p \leq \sqrt{2} \tag{1.179}$$

Bei hohen Werten für die Schwingkreisgüte ($d_p \rightarrow 0$) fallen die beiden Frequenzen praktisch mit der Resonanzfrequenz zusammen. Bei kleiner Schwingkreisgüte rücken f_L und f_C weiter auseinander.

Für den folgenden Grenzfall tritt gerade keine Resonanzerscheinung mehr auf und es gilt für die Frequenzen

$$d_p = \sqrt{2} \quad \text{bzw.} \quad Q_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad f_L = 0 \quad f_C = \infty \tag{1.180}$$

d.h. die Maxima verschwinden.

Im Fall von $d_p \geq \sqrt{2}$ bzw. $Q_p \leq 1/\sqrt{2}$ treten keine Resonanzerscheinungen mehr auf und der maximale Strom durch die Spule und den Kondensator kann dann maximal gleich dem Eingangsstrom werden.

Für die maximal auftretenden Ströme folgt

$$\frac{\hat{i}_{Lmax}}{\hat{i}} = \frac{\hat{i}_{Cmax}}{\hat{i}} = \begin{cases} \frac{1}{d_p\sqrt{1-(d_p/2)^2}} = \frac{Q_p}{\sqrt{1-1/(2Q_p)^2}} & \text{für} \quad Q_p \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \phantom{\text{für}} \quad Q_p \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \tag{1.181}$$

Für $Q_p > 4$ gilt mit guter Näherung $\hat{i}_{Lmax}/\hat{i} = \hat{i}_{Cmax}/\hat{i} \approx Q_p$. Die Stromüberhöhung ist dann näherungsweise gleich der Schwingkreisgüte. Insgesamt kann eine Stromüberhöhung nur für eine Güte $Q_p > 1/\sqrt{2}$ auftreten.

Stromaufteilung

Nun wird die Aufteilung des Eingangsstromes $\underline{\hat{i}}$ auf die drei Komponenten in Abhängigkeit der Frequenz untersucht. Dabei wird angenommen, dass der Parallelschwingkreis an von einer Stromquelle mit veränderlicher Frequenz aber konstanter Amplitude $\hat{i} = 1\,\mathrm{A}$ gespiesen wird – siehe Abbildung 1.58a. Der Wert des Widerstands ist $R = 250\Omega$.

Für den Grenzübergang $f \to 0$ wird die Spule aufgrund von $(\omega L \to 0)$ zu einem Kurzschluss und der gesamte Eingangsstrom fliess durch die Induktivität.

Wird hingegen der Grenzübergang $f \to \infty$ untersucht, so verhält sich der Kondensator aufgrund von $(1/\omega C \to 0)$ wie ein Kurzschluss und der gesamte Eingangsstrom fliesst durch die Kapazität.

Für den Fall der Resonanz $f = f_0$ ist der Strom durch den Widerstand gleich dem Eingangsstrom und der Spannungsabfall über dem Widerstand ist gleich: $\hat{u} = R\hat{i}$. Die Ströme durch die Spule und den Kondensator verschwinden jedoch nicht, sondern diese sind entgegengesetzt gleich gross, d.h. $i_L = -i_C$. Das Verhältnis ihrer Amplitude zur Amplitude des Eingangsstromes wird durch Q_p bestimmt und es tritt für $Q_p > 1/\sqrt{2}$ eine Stromüberhöhung auf (siehe Abbildung 1.58b).

Der Parallelschwingkreis hat allgemein für einen Bereich um die Resonanzfrequenz einen sehr hohen Widerstand und kann dadurch bei einem Gemisch von unterschiedlichen Frequenzen Anteile im Bereich der Resonanzfrequenz dämpfen. Daher wird der Schwingkreis auch als *Sperrkreis* bezeichnet.

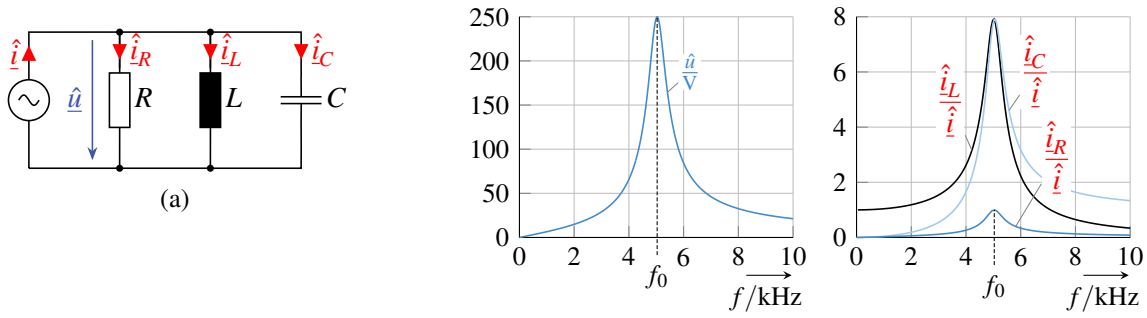


Figure 1.58: a) Parallelschwingkreis gespiesen durch eine Stromquelle. b) Verläufe der Stromaufteilung und der Spannung als Funktion der Frequenz. Angenommene Bauteilwerte: $\hat{i} = 1\,\mathrm{V}/R = 250\,\Omega/L = 1\,\mathrm{mH}/C = 1\,\mu\mathrm{F} \to f_0 = 5\,\mathrm{kHz}/Q_p \approx 7.9$

Normierte Darstellung

Zur Ableitung der normierten Darstellung für den Parallelschwingkreis wird die Admittanz $\underline{Y}$ auf den Leitwert G und die Kreisfrequenz ω auf das Produkt $\omega_0\sqrt{LC} = 1$ bezogen ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$). Daraus resultiert die normierte Admittanz

$$\frac{\underline{Y}}{G} = 1 + \mathrm{j}\underbrace{\frac{1}{G}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}_{\text{Normierte Verstimmung: }\Omega} = 1 + \mathrm{j}\frac{1}{G}\left(\frac{\omega C}{\omega_0\sqrt{LC}} - \frac{\omega_0\sqrt{LC}}{\omega L}\right) = 1 + \mathrm{j}Q_p\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \tag{1.182}$$

Mit der normierten Verstimmung Ω ist die normierte Admittanz gleich wie die normierte Impedanz beim Serienschwingkreis darstellbar.

$$Q_p v = \Omega \qquad \frac{\underline{Y}}{G} = 1 + \mathrm{j}Q_p v = 1 + \mathrm{j}\Omega \tag{1.183}$$

Aus dem Zusammenhang

$$\Omega = \pm 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{G}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \pm 1 \tag{1.184}$$

resultieren die beiden Grenzfrequenzen

$$\omega_1 = -\frac{G}{2C} + \sqrt{\frac{G^2}{4C^2} + \frac{1}{LC}} \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_1}{\omega_0} = -\frac{1}{2Q_p} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_p^2}} \tag{1.185}$$

$$\omega_2 = +\frac{G}{2C} + \sqrt{\frac{G^2}{4C^2} + \frac{1}{LC}} \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} = +\frac{1}{2Q_p} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_p^2}} \tag{1.186}$$

Bei den Grenzfrequenzen gilt für den Betrag und die Phase der Admittanz

$$|\underline{Y}(\omega_1)| = |\underline{Y}(\omega_2)| = G\sqrt{2} \tag{1.187}$$

$$\psi(\omega_1) = -45^\circ \qquad \psi(\omega_2) = +45^\circ \tag{1.188}$$

Die Resonanzfrequenz ergibt sich wieder aus dem geometrischen Mittel der beiden Grenzfrequenzen

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = {}^1\!/_{LC} = \omega_0^2 \tag{1.189}$$

Die Bandbreite des Parallelschwingkreises folgt aus

$$B = f_2 - f_1 = \frac{1}{2\pi}(\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{2\pi}\frac{G}{C} = \frac{f_0}{Q_p} \tag{1.190}$$

Beispiel: Induktionsofen

Die soeben besprochenen Parallelschwingkreise finden zum Beispiel Anwendung in Induktionsöfen, die zum Erhitzen von leitfähigen Gegenständen (z.B. Metallrohren) genutzt werden.

Im Induktionsofen wird mit Hilfe einer Heizspule ein magnetisches Wechselfeld erzeugt, wobei das Magnetfeld unter anderem proportional zum Strom in der Heizspule ist. Aufgrund der Stromüberhöhung erreicht man mit dem Parallelschwingkreis hohe Magnetfeldstärken bei einem moderatem Gesamteingangsstrom.

Durch das magnetische Wechselfeld werden aufgrund des faradayschen Induktionsgesetzes sogenannte Wirbelströme in dem zu erhitzenden Gegenstand hervorgerufen. Diese Wirbelströme führen zu ohmschen Verlusten, die den Gegenstand aufheizen.

1.6.4 Zeigerdiagramme für Serien-/Parallelschwingkreis

Abschliessend werden die Zeigerdiagramme des Serien- und des Parallelschwingkreises gegenübergestellt. Dazu sind in der Abbildung 1.61 die Zeigerdiagramme für einen *RLC*-Serienschwingkreis und für einen *RLC*-Parallelschwingkreis für einen Betrieb unterhalb der Resonanzfrequenz $f < f_0$, bei der Resonanzfrequenz $f = f_0$ und überhalb der Resonanzfrequenz $f > f_0$ dargestellt.

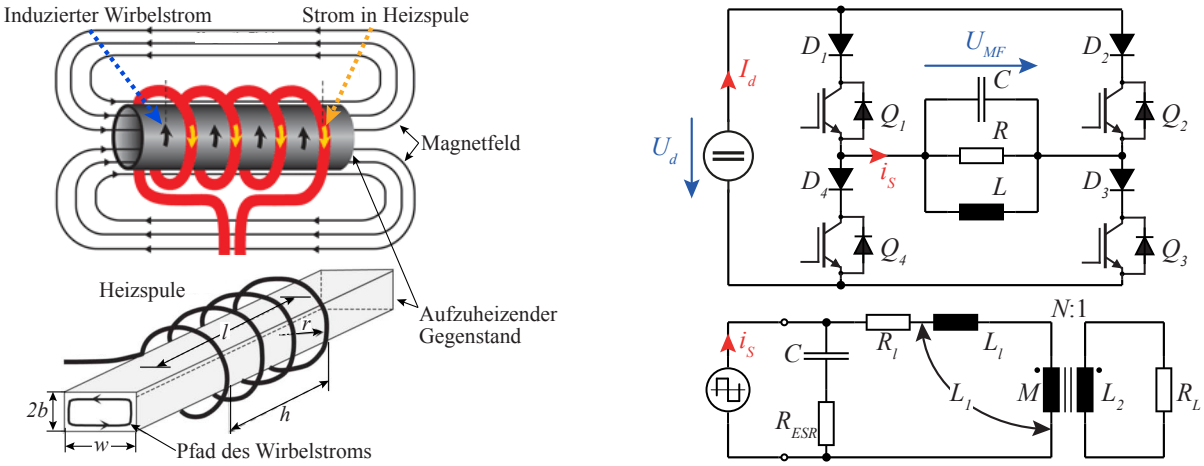


Figure 1.59: Beispiel für die Anwendung eines Parallelschwingkreises in einem Induktionsofen zum Erhitzen von elektrisch leitenden Teilen. In a) ist die Spule zum Erzeugen des Magnetfeldes und das zu erhitzende Werkstück dargestellt. In b) ist die vereinfachte Schaltung zum Erzeugen der anregenden (rechteckförmige) Spannung gegeben.

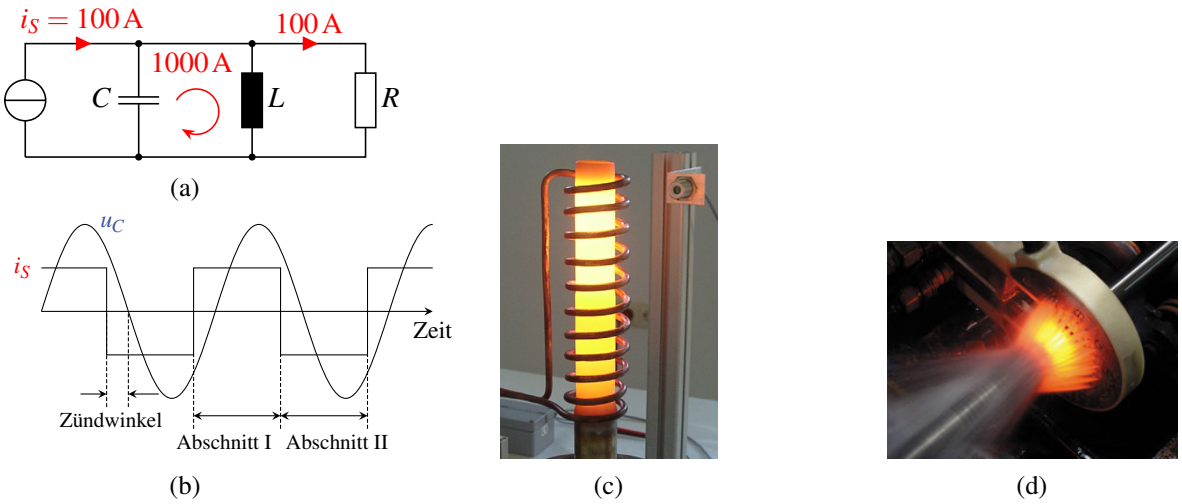


Figure 1.60: a) Parallelschwingkreis für einen Induktionsofen und der dazugehörige Stromverlauf und die Spannung in b). In c) und d) sind zwei erhitzte Bauteile dargestellt z.B. zum Härten von Metallteilen.

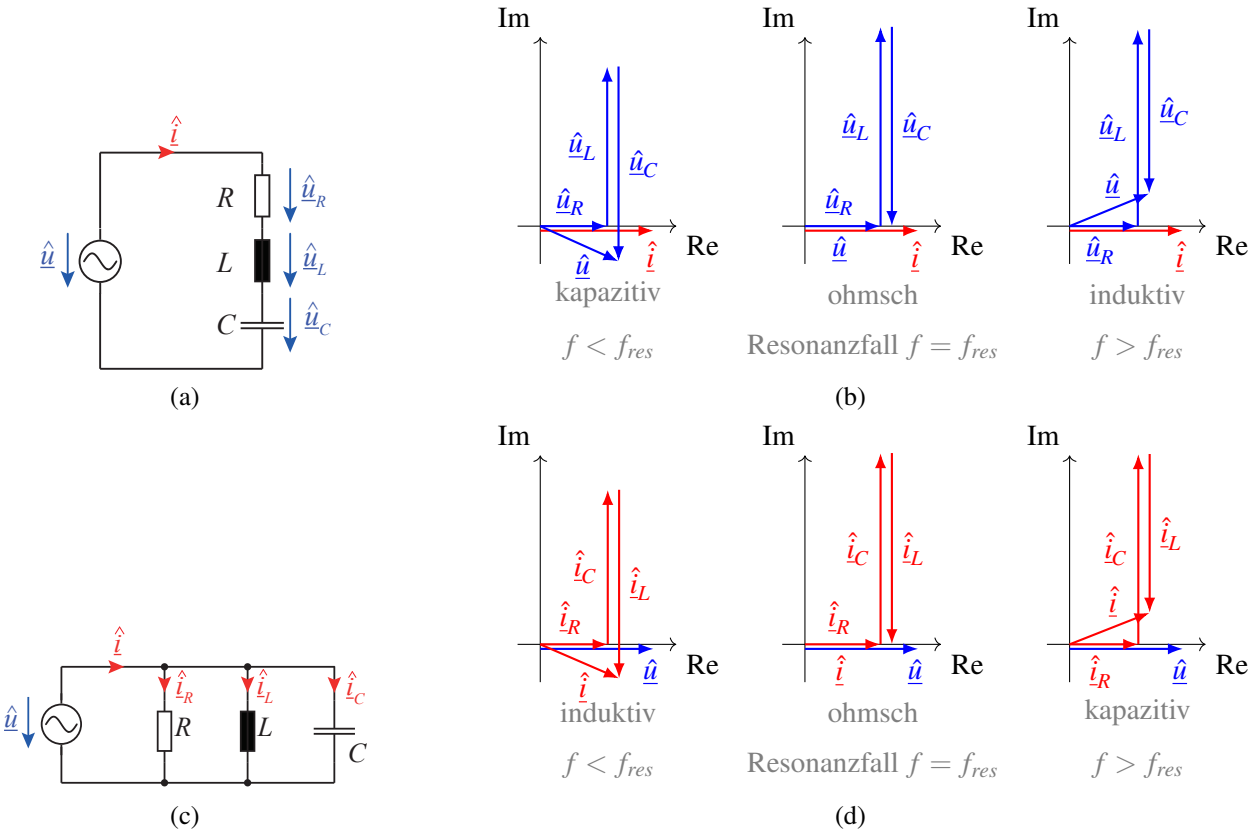


Figure 1.61: a) Schaltbild eines Serienschwingkreises und der dazugehörigen Zeigerdiagramme in b) für eine Anregung unterhalb, bei und oberhalb der Resonanzfrequenz. Dabei dient der Stromzeiger $\underline{\hat{i}}$ als Referenz. In c) und d) sind die entsprechenden Diagramme für den Parallelschwingkreis zum Vergleich dargestellt. Dabei dient der Spannungszeiger $\underline{\hat{u}}$ als Referenz.

Serien- vs. Parallelschwingkreis

In Tabelle 1.1 sind die Eigenschaften des Serien- und des Parallelschwingkreises zusammengefasst.

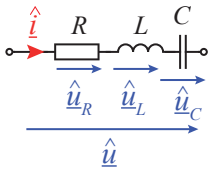
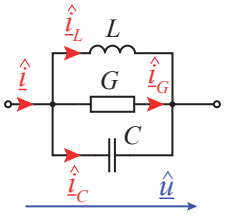
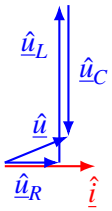
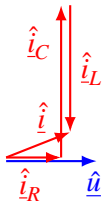
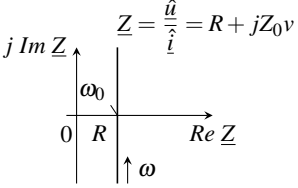
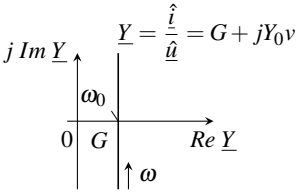
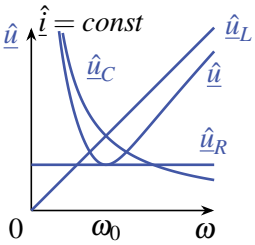
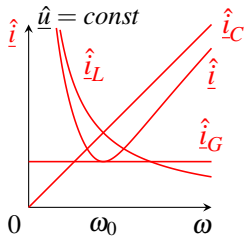
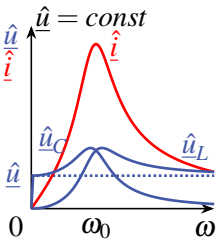
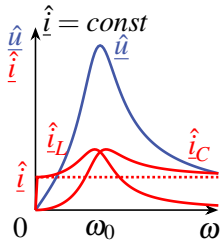
		Serienschwingkreis	Parallelschwingkreis
1	Ersatzschaltbild		
2	Klemmenverhalten	$\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{i}}\left(R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)$	$\underline{\hat{i}} = \underline{\hat{u}}\left(G + \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\right)$
3	Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme		
4	Kenngrößen	$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad Y_0 = \sqrt{\frac{C}{L}}$	
5	Ortskurve von Impedanz bzw. Admittanz (siehe Abschnitt 1.7.1)		
6	Amplitudengänge mit Resonanzminimum		
7	Amplitudengänge mit Resonanzmaxima		

Table 1.1: Gegenüberstellung der Eigenschaften von Serien- und Parallelschwingkreis.

1.7 Ortskurven

Im Rahmen der Analyse von Netzwerken ist oft von Interesse wie sich die Strom- und Spannungsverläufe oder auch die Impedanzen ändern, wenn sich Schaltungsparameter ändern, wie z.B. die Werte von Bauelementen oder die Betriebsfrequenz.

Eine mögliche Darstellungsvariante sind z.B. die im Kapitel Resonanzschaltungen verwendeten Bode Diagramme, bei denen der Betrag (Amplitudengang) und die Phase (Phasengang) einer komplexen Funktion (z.B. der Impedanz) in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt werden (siehe Abschnitt 1.6.1).

Alternativ kann die Lage eines komplexen Funktion (z.B. einer Impedanz $\underline{Z}$) oder eines komplexen Zeigers direkt in der komplexen Ebene betrachtet werden, wobei die Amplitude und auch die Phase der komplexen Funktion durch den Punkt auf der Ortskurve in der komplexen Ebene beschrieben wird. Der Punkt auf der Ortskurve kann dabei durch einen Pfeil gekennzeichnet werden, der im Ursprung startet und im Punkt auf der Ortskurve endet. Dieser Pfeil schliesst (wie bei den Zeigern) mit der reellen Achse den Phasenwinkel der komplexen Funktion ein. Ändert man nun einen Parameter (z.B. die Frequenz oder einen Bauteilwert), so ändert sich die Ort des Punktes auf der Ortskurve bzw. die Länge und Richtung des Pfeils. Für eine kontinuierliche Änderung des (reellen) Parameters beschreibt dabei die Spitze des Pfeils eine Kurve in der komplexen Ebene. Diese Kurve wird allgemein als Ortskurve bezeichnet.

Als Ortskurven lassen sich Impedanzen, Admittanzen, Ströme oder Spannungen als Funktion der Frequenz oder eines anderen Netzwerksparameters darstellen.

1.7.1 Impedanz *RL*-Reihenschaltung

Als erstes einfaches Beispiel wird nun die Ortskurve der Impedanz der *RL*-Reihenschaltung in Abbildung 1.62a betrachtet. Die Impedanz der *RL*-Reihenschaltung ist gleich:

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L = |\underline{Z}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\frac{\omega L}{R}} \tag{1.191}$$

R variabel

Bei Änderung des Widerstandswertes R ändert sich lediglich der Wirkwiderstand der Impedanz $\underline{Z}$. Der Imaginärteil bleibt konstant. Dies resultiert in der Ortskurve in Abbildung 1.62b mit R als Parameter. Die Ortskurve verläuft dabei parallel zur reellen Achse, da der Blindwiderstand/Imaginärteil konstant ist.

Figure 1.62: a) Schaltbild einer *RL*-Reihenschaltung bei welcher der Wert des Widerstandes variiert wird. b) Resultierende Ortskurve für die Impedanz $\underline{Z}$ für eine Variation des Widerstandes.

Zum Vergleich ist in Abbildung 1.63 noch der Frequenzgang der *RL*-Reihenschaltung dargestellt.

L/ω variabel

Im zweiten Schritt wird der Wert der Induktivität der *RL*-Reihenschaltung in Abbildung 1.64a variiert. Damit ändert sich der Blindwiderstand der Impedanz bei konstantem Wirkwiderstand und es resultiert die Ortskurve in Abbildung 1.64b. Diese ist parallel zur imaginären Achse, da der Wirkwiderstand konstant ist.

Derselbe Verlauf ergibt sich bei einer Änderung der Frequenz (siehe Abbildung 1.64c), denn hier ändert sich auch nur der Blindwiderstand ($X_L = \omega L$), d.h. der Imaginärteil, bei konstantem Wirkwiderstand (Realteil).

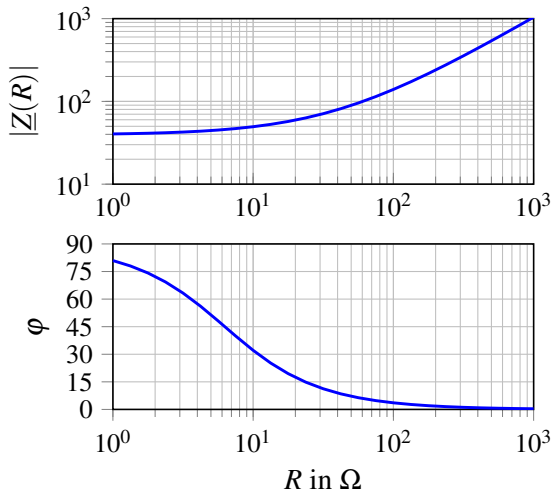


Figure 1.63: Amplitudengang und Phasengang der *RL*-Reihenschaltung in Abbildung 1.62a mit variablen Widerstand.

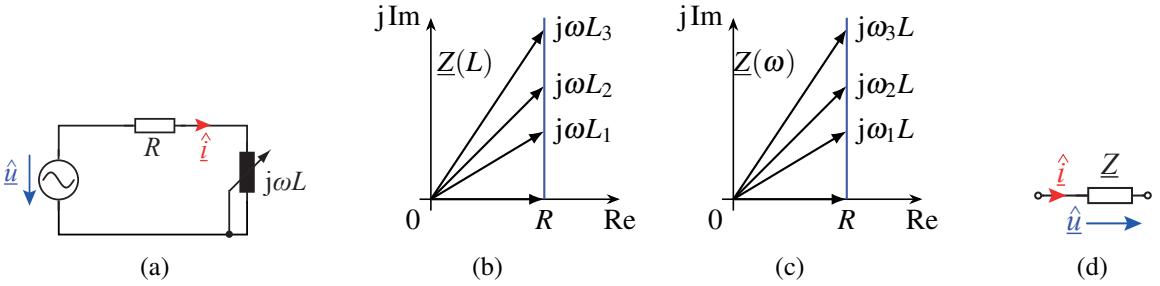


Figure 1.64: a) Schaltbild einer *RL*-Reihenschaltung bei welcher der Wert der Induktivität variiert wird. Resultierende Ortskurve für die Impedanz $\underline{Z}$ für eine Variation des Induktivitätswertes in b) und für eine Variation der Frequenz ω in c).

Allgemeine Hinweise

Ortskurven von komplexeren Schaltungen/Impedanzen zeigen typischerweise einen komplizierteren Verlauf. Jedoch kann die Ortskurve für eine Impedanz oder Admittanz generell stets nur im ersten und vierten Quadranten liegen ($-90° \leq \varphi \leq 90°$), da der Wirkwiderstand bei passiven Zweipolen nicht negativ werden kann.

Nun wird eine beliebige Reihenschaltung mit der Impedanz $\underline{Z}$ bestehend aus Widerständen, Induktivitäten und/oder Kapazitäten (siehe z.B. Abbildung 1.64d) betrachtet, durch die ein konstanter Strom fliesst. Nimmt man vereinfachend an, dass der Stromzeiger $\hat{\underline{i}}$ auf der reellen Achse liegt (d.h. $\varphi_i = 0$), so gilt

$$\hat{\underline{u}} = \underline{Z}\,\hat{\underline{i}} = \underline{Z}\,\hat{i} \tag{1.192}$$

Folglich stimmen die Ortskurven für die Spannung (bzw. die Spitze des Spannungszeigers) und die Impedanz bis auf den Skalierungsfaktor $\hat{i}$ überein.

Analog besteht bei einer Parallelschaltung, an der eine Spannung mit konstanter Amplitude und mit eine Phasenwinkel $\varphi_u = 0$ anliegt, eine Übereinstimmung der Ortskurven für den Strom und die Admittanz. Dies folgt unmittelbar aus

$$\hat{\underline{i}} = \underline{Y}\,\hat{\underline{u}} = \underline{Y}\,\hat{u} \tag{1.193}$$

Wobei hier $\hat{u}$ der Skalierungsfaktor ist.

1.7.2 Ortskurve Admittanz: Inversion der Impedanz-Ortskurve

Als nächstes wird die Ortskurve der Admittanz für die *RL*-Reihenschaltung in Abbildung 1.65a ermittelt. Dabei wird der Wert des Widerstands R variiert. Die Admittanz ergibt sich aus dem Kehrwert der Impedanz: $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$, d.h. die Ortskurve der Admittanz ergibt sich aus der sogenannten punktweisen Inversion der Ortskurve der Impedanz. Die Schritte für einer punktweisen Inversion sind:

1. Für die Inversion der Impedanz $\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$ in der Widerstandsebene in Abbildung 1.65b werden zuerst jeweils die (Einzel-)Admittanz der Wirk- und der Blindkomponente berechnet:

$$R \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{j}X \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\mathrm{j}X} = -\frac{\mathrm{j}}{X} \tag{1.194}$$

2. Die Werte für die Einzeladmittanzen werden auf der entsprechenden Achse in der Leitwertebene (Abbildung 1.65c) aufgetragen.

3. Die Punkte in der Leitwertebene werden miteinander verbunden. Dies resultiert in der Linie V in Abbildung 1.65c.

4. Die gesuchte Admittanz $\underline{Y}$ ist gleich dem Pfeil, der im Ursprung startet und auf der Verbindungslinie V endet und senkrecht auf der Linie V steht.

5. Die Schritte 1-4 werden für die weiteren Punkte wiederholt.

Dieses Vorgehen kann auch umgekehrt angewendet werden, wenn aus der Admittanz die Impedanz ermittelt werden soll $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$. Dabei gilt allgemein $\Psi = -\varphi$, da $\underline{Y} = |\underline{Y}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Psi} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{|\underline{Z}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \frac{1}{|\underline{Z}|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$ (siehe Abbildungen 1.65b & 1.65c).

Um die Inversion der Ortskurve der Impedanz oder der Admittanz zu vereinfachen, gibt es einige allgemeine (umkehrbare) Regeln:

- ▷ Eine Gerade, die durch den Ursprung geht, resultiert in einer invertierten Geraden, die ebenfalls durch den Ursprung geht.
- ▷ Eine unendlich lange Gerade, die nicht durch den Ursprung geht, wird in einen Kreis invertiert, der durch den Ursprung geht (und umgekehrt). Erstreckt sich die Gerade nicht beidseitig nach Unendlich, dann liefert die Inversion auch nur den dazugehörigen Teil des Kreises.
- ▷ Ein Kreis, der nicht durch den Ursprung geht, wird in einen Kreis invertiert, der ebenfalls nicht durch den Ursprung geht.

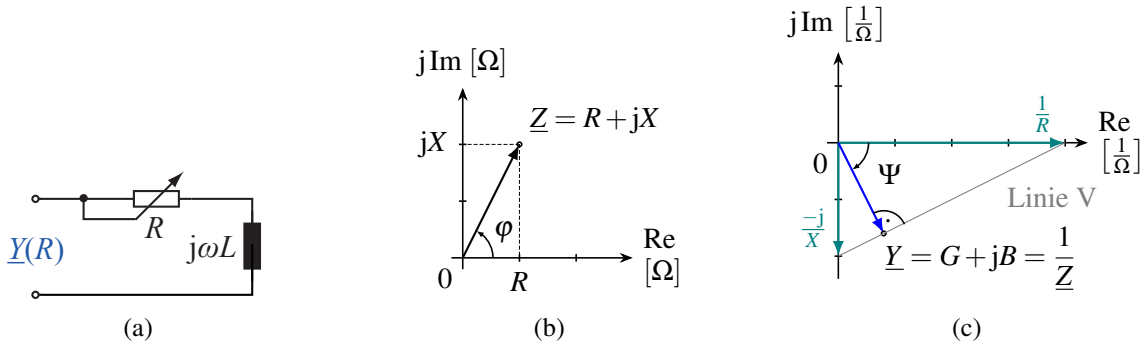


Figure 1.65: a) Schaltbild einer *RL*-Reihenschaltung bei welcher der Wert des Widerstands variiert wird. b) Impedanz in der Widerstandsebene und in c) die dazugehörige Admittanz in der Leitwertebene.

Beispiel: Admittanz *RL*-Reihenschaltung – R & ω variabel

Als Beispiel wird nun die Ortskurve der Admittanz $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ für die *RL*-Reihenschaltung in Abbildung 1.66a mit variablem Widerstands R bestimmt. Für diese folgt mit der Inversion der Ortskurve in Abbildung 1.66b der Halbkreis für $\underline{Y}$ mit den folgenden beiden Endpunkten in Abbildungen 1.66c. Die Endpunkte des Halbkreises folgen aus der Betrachtung der Impedanz-Ortskurve für den maximalen ($R \to \infty$) und den minimalen ($R = 0$) Widerstandswert. Damit folgt:

$$R = \infty \quad \Rightarrow \quad |\underline{Z}| \to \infty \quad \Rightarrow \quad \underline{Y} \to 0 \tag{1.195}$$

$$R = 0 \quad \Rightarrow \quad |\underline{Z}| = \omega L \quad \Rightarrow \quad \underline{Y} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} \tag{1.196}$$

Im zweiten Schritt wird nun wieder der Blindwiderstand / die Reaktanz der Reihenschaltung in Abbildung 1.66d variiert, indem die Frequenz verändert wird. Die Ortskurve der Admittanz folgt wieder aus der punktweisen Inversion der Ortskurve der Impedanz in Abbildung 1.66e.

Auch hier resultiert wiederum ein Halbkreis für die Admittanz $\underline{Y}$ – siehe Abbildung 1.66f. Die beiden Endpunkte des Halbkreises sind definiert durch:

$$\omega \to \infty \quad \Rightarrow \quad |\underline{Z}| \to \infty \quad \Rightarrow \quad \underline{Y} \to 0 \tag{1.197}$$

$$\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad |\underline{Z}| = R \quad \Rightarrow \quad \underline{Y} = G = \frac{1}{R} \tag{1.198}$$

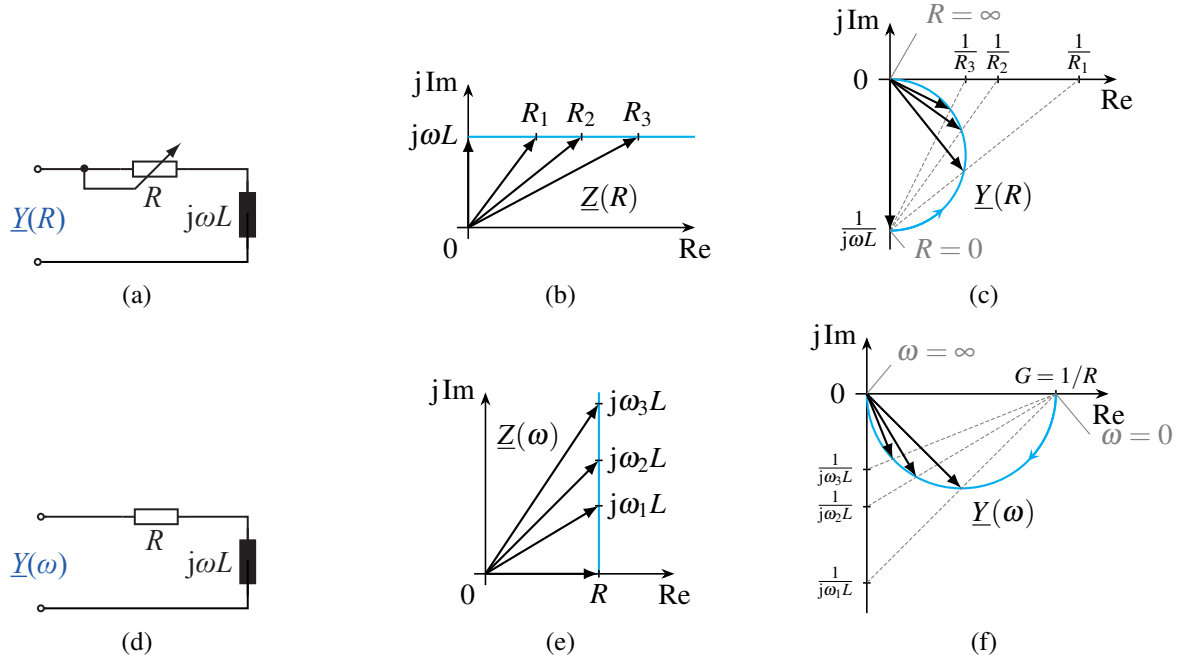


Figure 1.66: a) Schaltbild einer *RL*-Reihenschaltung bei welcher der Wert des Widerstands variiert wird. Verlauf der Ortskurve der Impedanz in b) und der dazugehörigen Admittanz in c). d) Schaltbild einer *RL*-Reihenschaltung bei welcher der Wert des Frequenz variiert wird. Verlauf der Ortskurve der Impedanz in 3) und der dazugehörigen Admittanz in f).

1.7.3 Ortskurven von komplizierteren Netzwerken

Bei der Konstruktion von Ortskurven für kompliziertere Netzwerke werden vorteilhaft bekannte/einfache Ortskurven für einfache Teilnetzwerke punktweise, d.h. bei gleichen Parameterwerten, addiert.

Als Beispiel wird die Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}$ des resonanten Netzwerkes in Abbildung 1.67a für eine variable Kreisfrequenz ω ermittelt. Wegen der Parallelschaltung des Kondensators und der *RL*-Serienschaltung müssen die Admittanz des Kondensators und die Admittanz der *RL*-Reihenschaltung

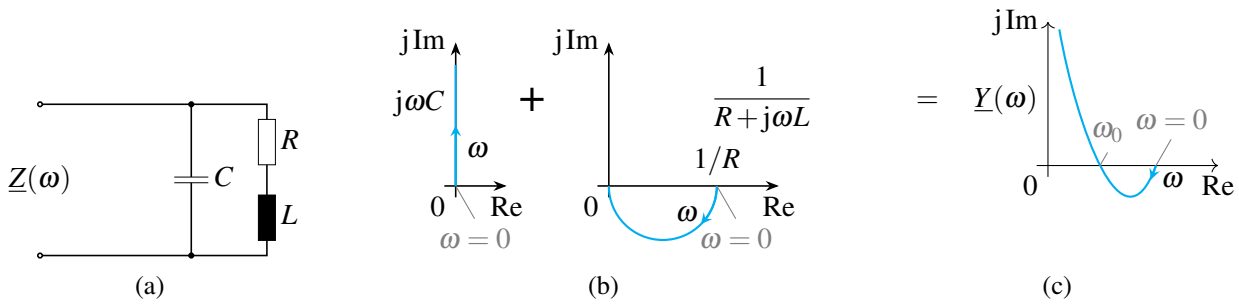


Figure 1.67: a) Schaltbild des betrachteten Schwingkreises. b) Ortskurven der beiden parallel geschalteten Admittanzen des Schwingkreises c) Resultierende Ortskurve für die Gesamtadmittanz des Schwingkreises.

addiert werden.

$$\underline{Y} = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L} \tag{1.199}$$

Die Ortskurven der beiden einzelnen Admittanzen sind in Abbildung 1.67b dargestellt. Diese starten beide bei $\omega = 0$ auf der reellen Achse. Addiert man diese punktweise, so resultiert die Ortskurve der Admittanz in Abbildung 1.67c. Der Verlauf der Kurve hängt dabei von den Werten R, L und C ab. Weist die Ortskurve z.B. bei ω_0 einen Schnittpunkt mit der reellen Achse auf, so ist der Phasenwinkel an dieser Stelle $\varphi = 0$ (bzw. $\Psi = 0$) und der Imaginärteil der Admittanz/Impedanz verschwindet. Somit ist ω_0 eine Resonanzfrequenz und es tritt eine Strom- oder Spannungsüberhöhung an den Komponenten auf. Dabei ist der Startpunkt bei $\omega = 0$ kein Schnittpunkt, da die Ortskurve nicht "durch die Achse hindurch verläuft".

Aus der Admittanz der Schaltung

$$\underline{Y} = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L} = \frac{R}{R^2+(\omega L)^2} - \mathrm{j}\omega\frac{L - C\left[R^2+(\omega L)^2\right]}{R^2+(\omega L)^2} \tag{1.200}$$

folgt die Resonanzbedingung bzw. die Resonanzfrequenz ω_0

$$L - C\left[R^2+(\omega_0 L)^2\right] = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{L}{C} - R^2} \tag{1.201}$$

Basierend auf Gleichung (1.201) ergibt sich in Abhängigkeit von den Bauteilwerten einer der drei folgenden Fälle

1. $\frac{L}{C} > R^2 \quad \rightarrow$ Resonanzfrequenz bei ω_0 (Abbildung 1.68a) (1.202)
2. $\frac{L}{C} = R^2 \quad \rightarrow$ Grenzfall mit $\omega_0 = 0$ (Abbildung 1.68b) (1.203)
3. $\frac{L}{C} < R^2 \quad \rightarrow$ Keine Resonanzerscheinung (Abbildung 1.68c) (1.204)

In der Abbildung 1.68 sind die drei Fälle dargestellt. Die Ortskurven starten dabei alle für $\omega = 0$ im Punkt $1/R$ bzw. R auf der reellen Achse. Die Ortskurven für die Admittanzen enden für $\omega \rightarrow \infty$ im Unendlichen auf der positiven imaginären Achse und die Ortskurven für die Impedanzen bei 0 (Kurzschluss durch C).

- ▷ Für den 1. Fall in Abbildung 1.68a gilt $R < \sqrt{L/C} = 5\Omega$, so dass die Ortskurven einen Schnittpunkt mit der reellen Achse bei der Resonanzfrequenz f_0 haben.
- ▷ Für den 2. Fall in Abbildung 1.68b tritt gerade der Grenzfall $R = \sqrt{L/C} = 10\Omega$ auf, so dass $\omega_0 = 0$ gilt und keine Resonanzüberhöhung auftritt.
- ▷ Für den 3. Fall in Abbildung 1.68c gilt $R > \sqrt{L/C} = 10\Omega$ und es gibt keine reellen Lösungen mehr für die Resonanzfrequenz in Gleichung (1.201).

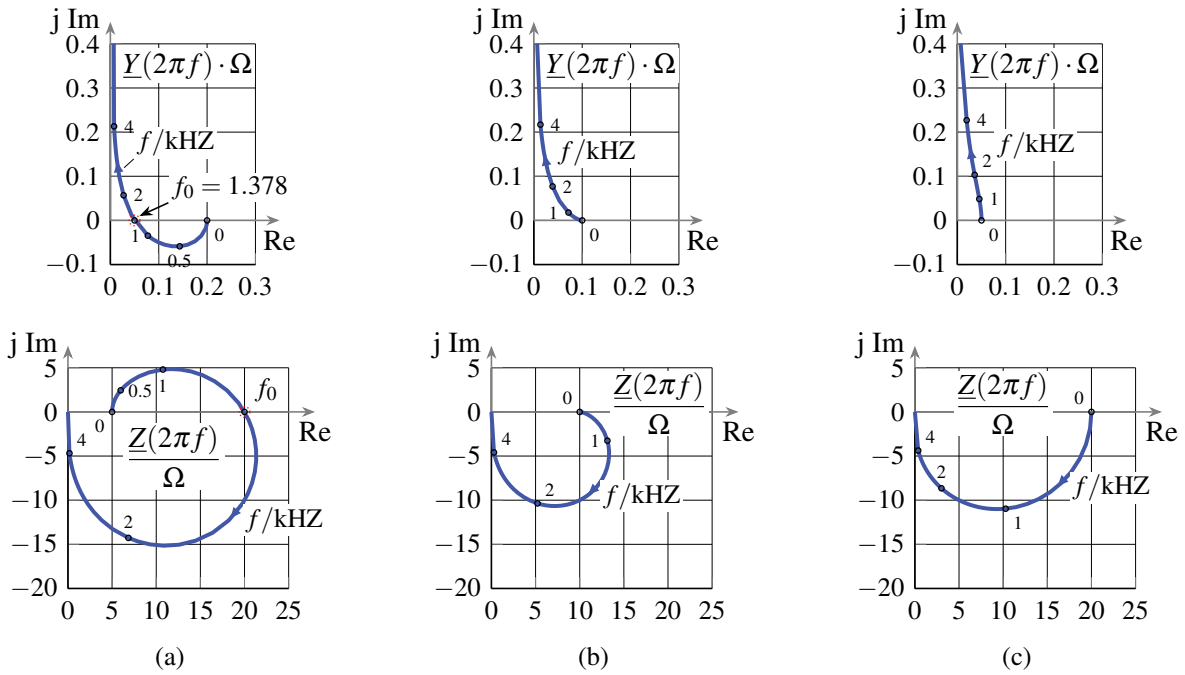


Figure 1.68: a) Ortskurven für die Admittanz (links) und die Impedanz (rechts) für den Fall einer Resonanz bei ω_0. Bauteilwerte: L = 1mH, C = 10 μF und R = 5Ω. b) Grenzfall mit $\omega_0 = 0$, d.h. es tritt gerade keine Resonanz/Überschwingen mehr auf (R=10Ω). c) Ortskurven für den stark gedämpften Fall ohne Resonanzerscheinungen (R=20Ω).

Nyquist-Diagramm

Ortskurven werden z.B. in der Regelungstechnik in Form von sogenannten Nyquist-Diagrammen genutzt, um die Stabilität von Systemen mit Rückkopplung zu beurteilen. Hier wird die Ausgangsgrösse eines Regelkreises als Ortskurve mit der Frequenz als Parameter aufgetragen.

Als Beispiel wird ein Regelkreis mit einem RC-Tiefpass dritter Ordnung betrachtet wie in Abbildung 1.69 dargestellt. Zwischen den Filterstufen erster Ordnung ist jeweils ein Entkopplungsverstärker mit unendlicher hoher Eingangsimpedanz und verschwindender Ausgangsimpedanz eingefügt. Da durch den Entkopplungsverstärker die jeweiligen Filterstufen unbelastet sind, kann die Übertragungsfunktion $\underline{\hat{u}}_3/\underline{\hat{u}}_0$ einfach durch Multiplikation der bereits bekannten Übertragungsfunktionen der RC-Filter erster Ordnung berechnet werden. Damit folgt für die Übertragungsfunktion

$$\frac{\underline{\hat{u}}_1}{\underline{\hat{u}}_0} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC} \quad \Rightarrow \quad \frac{\underline{\hat{u}}_3}{\underline{\hat{u}}_0} = \left(\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}\right)^3 \tag{1.205}$$

Die Amplitude der Ausgangsspannung $\underline{\hat{u}}_3$ des Filters wird von einem P-Regler mit der Amplitude der Referenzspannung $\underline{\hat{u}}_{ref}$ verglichen und die Differenz der beiden Spannungsamplituden wird mit der Verstärkung K des Reglers multipliziert. Mit der verstärkten Spannungsdifferenz soll die Amplitude der Spannungsquelle $\underline{\hat{u}}_0$ so gesteuert werden, dass die Amplitude von $\underline{\hat{u}}_3$ möglichst gleich der Referenzamplitude von $\underline{\hat{u}}_{ref}$ ist.

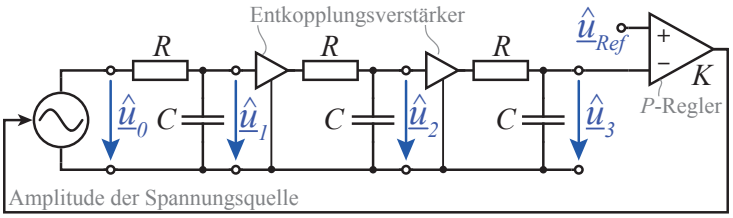


Figure 1.69: Angenommene Bauteilwerte: $R = 1\,\mathrm{k}\Omega$ & $C = 1\,\mu$F/ P-Regler mit Verstärkung K

Die Überprüfung der Stabilität des Regelkreises erfolgt mittels der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises.

$$\underline{G}_0(\mathrm{j}\omega) = K \cdot \frac{\underline{\hat{u}}_3}{\underline{\hat{u}}_0} = K \cdot \left(\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC} \right)^3 \tag{1.206}$$

Diese ist als Bode-Diagramm in Abbildung 1.70a und als Ortskurve in Abbildung 1.70b als Funktion der Kreisfrequenz ω und mit dem Parameter der gewählten Verstärkung K dargestellt. Der Regelkreis ist dabei stabil falls...

- ... die 0 dB Linie im Bode-Diagramm bei einer Phase $\varphi >$ -180° unterschritten wird bzw.
- ... der Punkt $[-1,0]$ im Nyquist Diagramm nicht umschlossen wird.

Dies ist für eine Verstärkung von K = 3 der Fall. Wird die Verstärkung auf den Wert K = 12 erhöht, so wird der Regelkreis instabil. Dies erkennt man auch in der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises in Abbildung 1.70c, wo die Spannung $u_3(t)$ für eine Verstärkung von K = 12 zum Schwingen anfängt. Für die Sprungantwort wurde angenommen, dass die Amplitude der Referenzspannung zum Zeitpunkt t = 0 sprungförmig von 0 auf den Wert 1 springt.

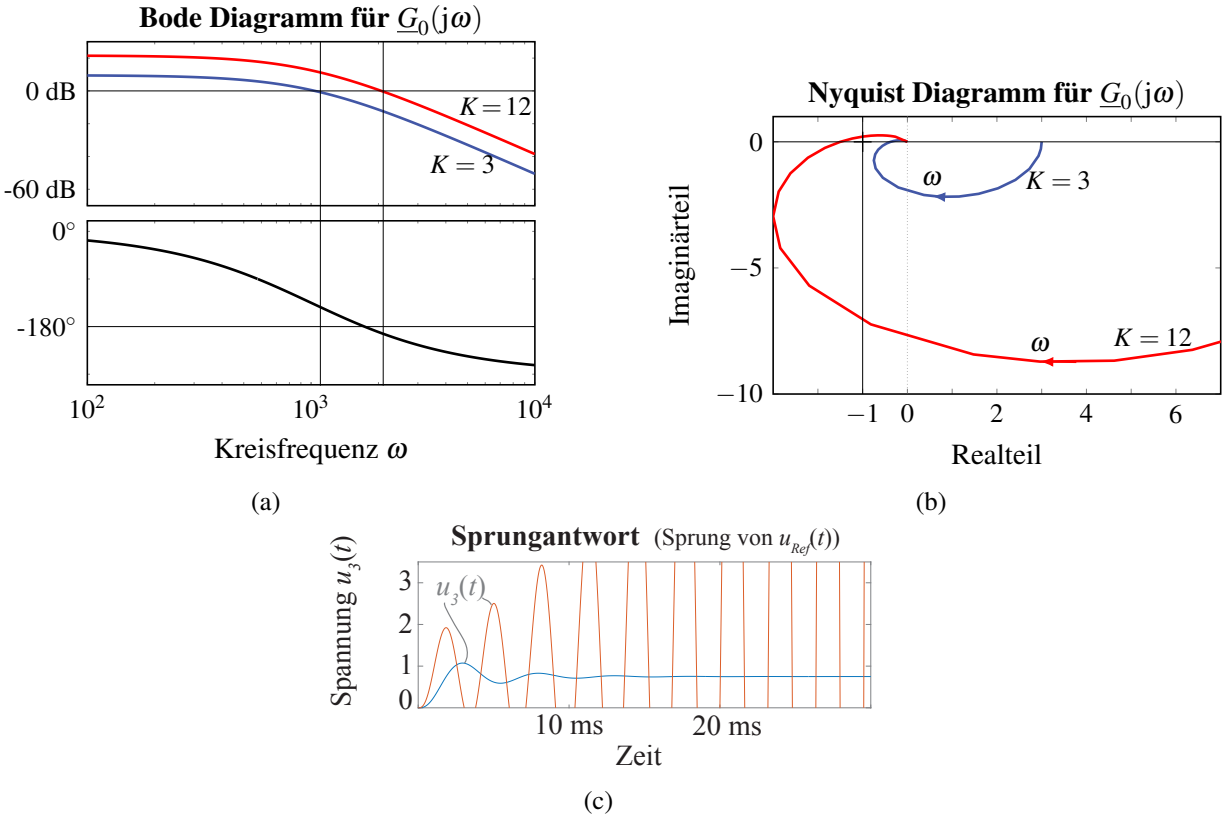


Figure 1.70: Bode-Diagram in a) und Ortskurve in b) der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises für 2 Werte der Verstärkung K. In c) ist die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises dargestellt.

Asynchronmaschine – Ortskurve Statorstrom

Eine weitere Anwendung für Ortskurven ergibt sich aus dem vereinfachten Ersatzschaltbild einer dreiphasigen Asynchronmaschine (ASM) in Abbildung 1.71a, das das Betriebsverhalten der Maschine (z.B. Stromaufnahme, Drehmoment) beschreibt. Für dieses Ersatzschaltbild ist der ständerseitige Strom, der aus

dem Netz aufgenommen wird, gleich

$$\underline{\hat{i}}_1 = \frac{\underline{\hat{u}}_1 \left(\frac{R_2'}{s} + \mathrm{j}\omega_1 L_2'\right)}{(R_1 + \mathrm{j}\omega_1 L_{\sigma 1})\left(\frac{R_2'}{s} + \mathrm{j}\omega_1 L_2'\right) + \mathrm{j}\omega_1 L_h \left(\mathrm{j}\omega_1 L_{\sigma 2}' + \frac{R_2'}{s}\right)} \tag{1.207}$$

mit $L_2' = L_{1h} + L_{\sigma 2}'$.

Trägt man die Ortskurve des Ständerstromes $\underline{\hat{i}}_1$ für eine feste Ständerspannung (Netzspannung) $\hat{u}_1$ als Funktion des Schlupfes s auf, so ergibt sich der Ossanna-Kreis in Abbildung 1.71b. Der Schlupf beschreibt dabei vereinfacht betrachtet die Drehzahl der Maschine und es gilt $s = 1 - {}^{n}/_{n_1}$, wobei n_1 die Nenndrehzahl und n die Drehzahl der ASM ist.

Bei der Ortskurve liegt die Statorspannung $\underline{\hat{u}}_1$ in der reellen, vertikalen Achse und der Ständerstrom $\underline{\hat{i}}_1$ eilt nach, da die ASM immer induktive Blindleistung aus dem Netz bezieht, d.h. sich induktiv verhält.

Die Leistung P_0 beschreibt den Leerlaufpunkt, der sich für s=0 ergibt. Hier nimmt der Motor nur den Magnetisierungsstrom (zum Erzeugen des magnetischen Feldes in der ASM) und die Leerlaufverluste (z.B. Reibung oder ohmsche Verluste in der Wicklung) auf. Für R_1=0, d.h. einem verschwindend kleinen Statorwiderstand, liegt dieser Punkt auf der imaginären Achse, d.h. die ASM ist im Leerlauf verlustlos. Dabei beinhaltet R_1 auch etwaige Reibungsverluste oder Ummagnetisierungsverluste des Eisenkreises.

Der Punkt P_A kennzeichnet den Anlaufpunkt mit s=1, d.h. den Start der Maschine aus dem Stillstand. Im idealen Kurzschlusspunkt P_∞ ist der Schlupf $s = \infty$, d.h. die Drehzahl ist unendlich hoch entgegen der Drehrichtung des Feldes, dass von der Ständerwicklung erzeugt wird.

Die ASM kann prinzipiell als Motor, Bremse oder Generator betrieben werden und aus der Ortskurve kann man für die verschiedenen Betriebsarten/-punkte anschaulich den jeweiligen aufgenommenen Strom entnehmen. Im Bremsbetrieb wird der Läufer von aussen entgegen dem Drehfeld der Ständerwicklung angetrieben und die Maschine nimmt elektrische und mechanische Leistung auf und setzt diese in Wärme um.

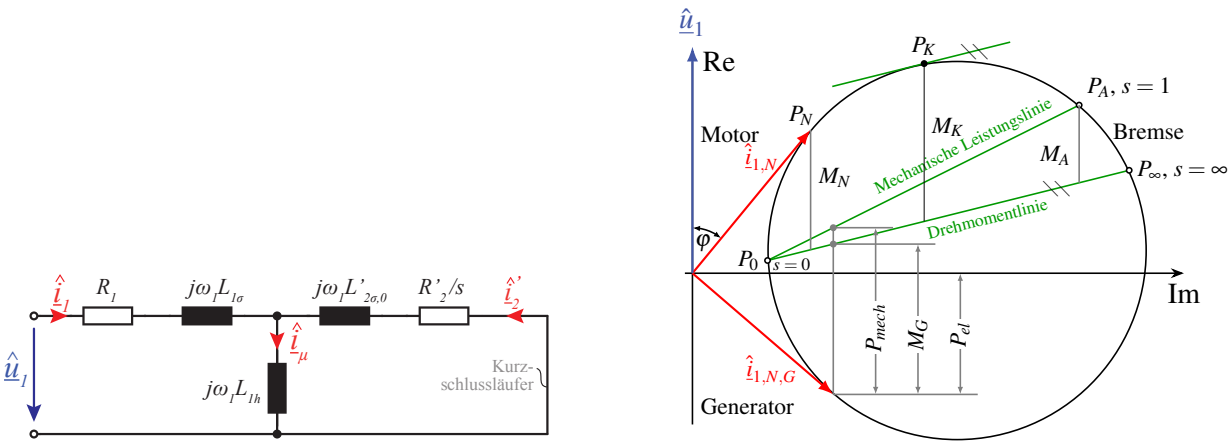
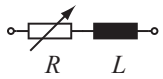
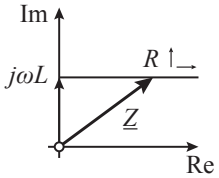
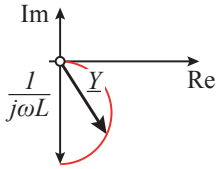
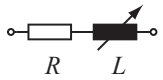
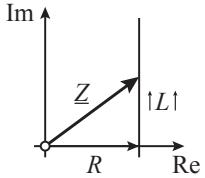
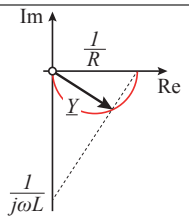
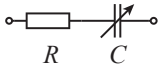
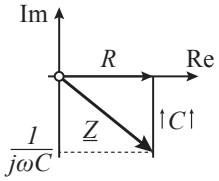
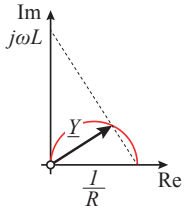
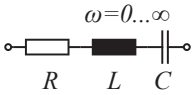
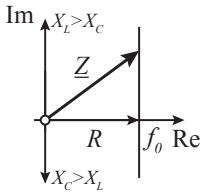
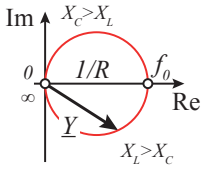
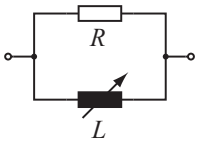
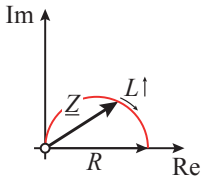
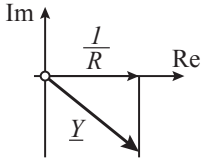
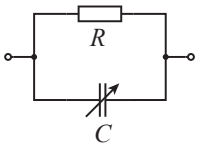
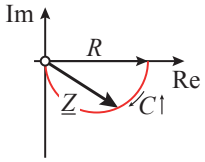
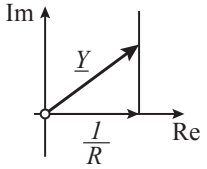
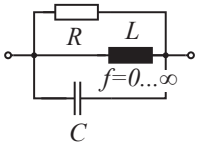
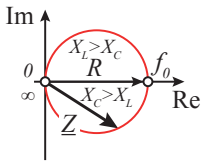
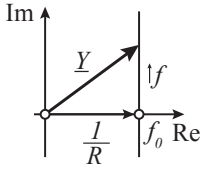


Figure 1.71: a) 1-phasiges T-Ersatzschaltbild einer Asynchronmaschine (Dreiphasenmotor mit Drehfeld). b) Ortskurve des Ständerstromes (Ossanna-Kreis) mit $\underline{\hat{i}}_{1,N}$ als Nennstrom im Motorbetrieb und $\underline{\hat{i}}_{1,N,G}$ als Nennstrom im Generatorbetrieb.

1.7.4 Ortskurven typischer Zweipolschaltungen

Schaltung		Ortskurve $\underline{Z}$	Ortskurve $\underline{Y}$
	$\frac{\underline{Z}}{\omega L} = \frac{R}{\omega L} + j$		
	$\frac{\underline{Z}}{R} = 1 + j\omega\frac{L}{R}$		
	$\frac{\underline{Z}}{R} = 1 - \frac{j}{\omega RC}$		
	$\frac{\underline{Z}}{R} = 1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$		
	$\underline{Z} = \frac{j\omega L}{1 + j\omega\frac{L}{R}}$		
	$\frac{\underline{Z}}{R} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$		
	$\frac{\underline{Z}}{R} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$		

1.8 Energie und Leistung bei Wechselspannung

Im Folgenden wird der Leistungsfluss in linearen, aus diskreten Zweipolen aufgebauten passiven Netzwerken, welche an eine Wechselspannungs- oder an eine Wechselstromquelle angeschlossen sind, untersucht.

Die Klemmengrössen des Netzwerkelementes sind in Abbildung 1.72 dargestellt. Dies sind die Spannung $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)$ und der Strom $i(t) = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i)$.

Die Augenblicksleistung p im (Verbraucherzählpfeilsystem) ist allgemein

$$p(t) = u(t)i(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)\hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i) \tag{1.208}$$

Dabei gilt

- ▷ $p(t) > 0$
  Zweipol nimmt augenblicklich Leistung auf (Verbraucher)
- ▷ $p(t) < 0$
  Zweipol gibt augenblicklich Leistung ab, d.h. es handelt sich um eine Leistungs-/Energiequelle. Dieser Fall tritt z.B. während eines Teils der Periode der Wechselgrösse auf, wenn Blindleistung zwischen Quelle und Zweipol hin- und herpendelt.

Die im zeitlichen Mittel über eine Periode aufgenommene Leistung ist für einen passiven Zweipol immer grösser oder gleich Null, d.h. es gilt

$$\text{Passiver Zweipol} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t \;\geq 0 \tag{1.209}$$

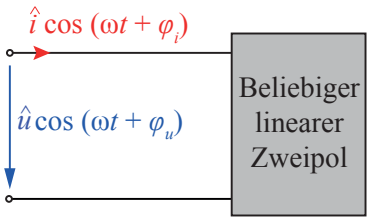


Figure 1.72: a) Linearer Zweipol mit den Klemmengrössen $u(t)$ und $i(t)$ im Verbraucherzählpfeilsystem, d.h. $p(t)$ ist grösser Null, wenn der Verbraucher Leistung aufnimmt.

1.8.1 Widerstand

Für die Berechnung der Leistung im Wechselstromkreis wird zu Beginn ein Widerstand R an einer Wechselspannungsquelle, wie in Abbildung 1.73a dargestellt ist, betrachtet. Wie bereits zuvor erläutert, sind die Ströme und Spannungen im betrachteten Netzwerk mit dem Widerstand in Phase $\varphi_u = \varphi_i$ und können wie folgt beschrieben werden

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u) \qquad i(t) = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_u) \tag{1.210}$$

Damit ergibt sich der zeitliche Verlauf der von der Spannungsquelle an den Widerstand gelieferten Leistung, d.h. der Augenblicksleistung p (siehe Abbildung 1.73b), aus der Gleichung [Effektivwerte U (= $\hat{u}/\sqrt{2}$) und I (= $\hat{i}/\sqrt{2}$)]

$$\begin{aligned} p(t) = u(t)i(t) = \hat{u}\hat{i}\cos^2(\omega t + \varphi_u) &= \frac{\hat{u}\hat{i}}{2}\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u)\right] \\ &= UI\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u)\right] \end{aligned} \tag{1.211}$$

Diese Leistung wird in dem Widerstand in Wärme umgewandelt. Der Ausdruck UI stellt den zeitlichen Mittelwert dar, um den die Augenblicksleistung mit der doppelten Frequenz, d.h. mit 2ω schwingt – siehe Abbildung 1.73b. Der Ausdruck UI stellt damit auch den mittleren Leistungsfluss von der Quelle zur Last/zum Verbraucher dar.

Die mittlere von der Quelle an den Widerstand gelieferte Leistung bzw. die im Mittel im Widerstand in Wärme umgesetzte Leistung ist die sogenannte Wirkleistung

$$\overline{P} = \tfrac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t = \boxed{UI = RI^2 = \frac{1}{R}U^2 = P} \tag{1.212}$$

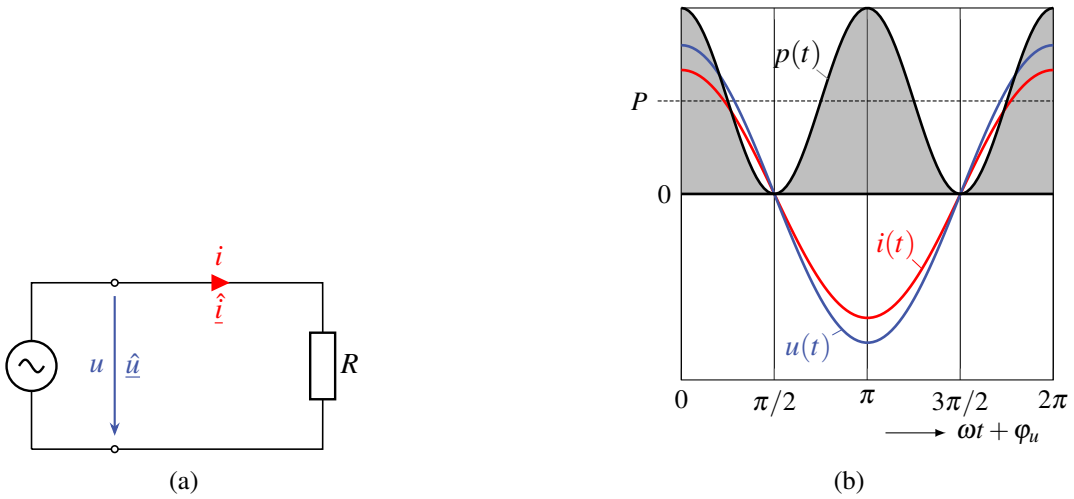


Figure 1.73: a) Widerstand an einer Wechselspannungsquelle. b) Zeitlicher Verlauf von Spannung, Strom und Leistung für eine reine Widerstandslast für den Fall $\varphi_u = \varphi_i = 0$.

1.8.2 Blindenergie

Nach der Wirkleistung bzw. der Wirkenergie wird nun die Blindenergie, die in Induktivitäten und Kapazitäten auftritt, untersucht. Zu Beginn wird der wird der Leistungsfluss in einer Induktivität an einer Wechselspannungsquelle untersucht.

Induktivität

An der Induktivität eilt der Strom der Spannung um $\pi/2$ nach, d.h. $\varphi_i = \varphi_u - \pi/2$, d.h. $2\varphi_u = 2\varphi_i + \pi$. Somit folgt mit den Additionstheoremen: $\cos(\alpha - \pi/2) = \sin\alpha$ und $\sin\alpha\cos\alpha = 1/2\sin(2\alpha)$ für den Momentanwert der Leistung

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) \\ &= \hat{u}\,\hat{i}\cos(\omega t + \varphi_u)\cos(\omega t + \varphi_u - \pi/2) = \hat{u}\,\hat{i}\cos(\omega t + \varphi_u)\sin(\omega t + \varphi_u) \\ &= \hat{u}\,\hat{i}\frac{1}{2}\sin(2\omega t + 2\varphi_u) = UI\sin(2\omega t + 2\varphi_u)\ (= -UI\sin(2\omega t + 2\varphi_i)) \end{aligned} \tag{1.213}$$

In dem betrachteten Fall ändert sich die Augenblicksleistung p mit der zweifachen Frequenz und der zeitliche Mittelwert der Leistung p ist gleich Null, d.h. die Leistung $p(t)$ ist im betrachteten Fall mittelwertfrei und die Induktivität nimmt keine Wirkleistung auf. Entsprechend dem Stromverlauf wird das Magnetfeld und damit die in der Induktivität gespeicherte Energie auf- und abgebaut, d.h. die Energie pendelt zwischen Induktivität und Quelle hin und her.

Der zeitliche Verlauf der in der Induktivität gespeicherten magnetischen Energie $W_m(t)$ ist

$$\begin{aligned} W_m(t) &= \frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{1}{2}L\left[\hat{i}\cos(\omega t+\varphi_i)\right]^2 = \frac{1}{2}L\left[\hat{i}\sin(\omega t+\varphi_u)\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}L\hat{i}^2\,\frac{1}{2}\left[1+\cos(2\omega t+2\varphi_i)\right] \end{aligned} \tag{1.214}$$

Die zwischen Quelle und Induktivität hin- und herpendelnde Energie $W_m(t)$ wird allgemein als Blindenergie bezeichnet. Der die Blindenergie hervorrufende Strom wird Blindstrom genannt. Weiterhin ist die Leistung, die den Fluss der Blindenergie zwischen Quelle und Induktivität hervorruft, im Fall von sinusförmigen Anregungen mittelwertfrei.

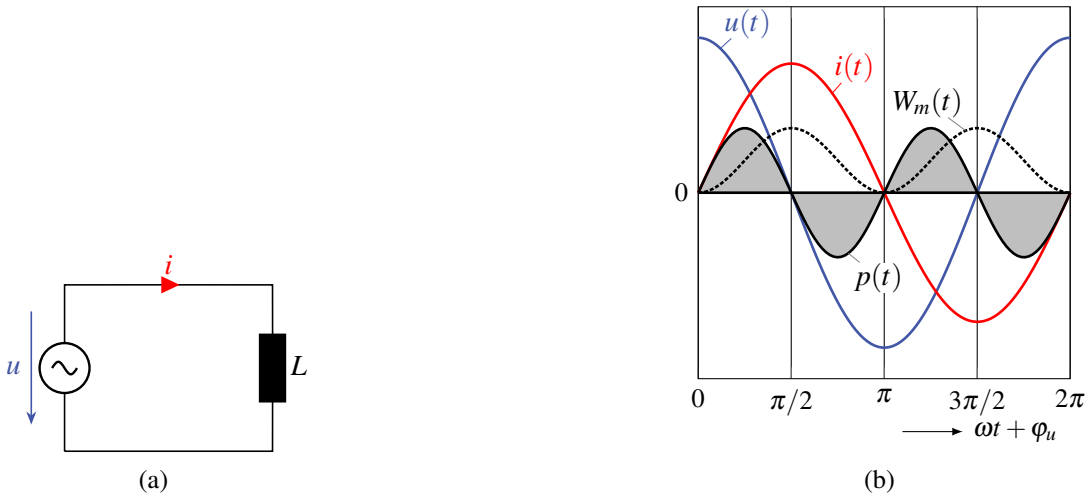


Figure 1.74: a) Induktivität an einer Wechselspannungsquelle. b) Zeitlicher Verlauf von Spannung, Strom und Leistung für eine Induktivität für den Fall $\varphi_u = 0$ bzw. $\varphi_i = -\pi/2$.

Blindenergie - Kapazität

Bei der Kapazität in Abbildung 1.75a sind die Verhältnisse ähnlich wie bei der Induktivität. Der Strom eilt hier jedoch der Spannung um $\pi/2$ voraus, d.h. $\varphi_i = \varphi_u + \pi/2$ ($2\varphi_u = 2\varphi_i - \pi$). Damit folgt für den Momentanwert der Leistung

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = \hat{u}\,\hat{i}\cos(\omega t+\varphi_u)\cos(\omega t+\varphi_u+\pi/2) \\ &= -\hat{u}\,\hat{i}\cos(\omega t+\varphi_u)\sin(\omega t+\varphi_u) = -\hat{u}\,\hat{i}\frac{1}{2}\sin(2\omega t+2\varphi_u) \\ &= -UI\sin(2\omega t+2\varphi_u) \quad (= +UI\sin(2\omega t+2\varphi_i)) \end{aligned} \tag{1.215}$$

Wiederum ändert sich die Augenblicksleistung p mit der zweifachen Frequenz und der zeitliche Mittelwert der Leistung p ist gleich Null, d.h. die Leistung $p(t)$ ist im betrachteten Fall mittelwertfrei und auch die Kapazität nimmt keine Wirkleistung auf. Entsprechend dem Spannungsverlauf wird das elektrische Feld und damit die in der Kapazität gespeicherte Energie auf- und abgebaut und die Blindenergie pendelt zwischen Quelle und Verbraucher hin und her.

Der zeitliche Verlauf der in der Kapazität gespeicherten elektrische Energie $W_e(t)$ ist

$$\begin{aligned} W_e(t) &= \frac{1}{2}Cu^2(t) = \frac{1}{2}C\left[\hat{u}\cos(\omega t+\varphi_u)\right]^2 = \frac{1}{2}C\left[\hat{u}\sin(\omega t+\varphi_i)\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}C\hat{u}^2\,\frac{1}{2}\left[1+\cos(2\omega t+2\varphi_u)\right] \end{aligned} \tag{1.216}$$

Die Leistungspendelung zwischen Quelle und Induktivität bzw. Kapazität verursacht in den Zuleitungen aufgrund des Blindstromes Verluste. In der Praxis versucht man daher Blindströme zu vermeiden bzw. zu kompensieren, wie später noch erläutert wird.

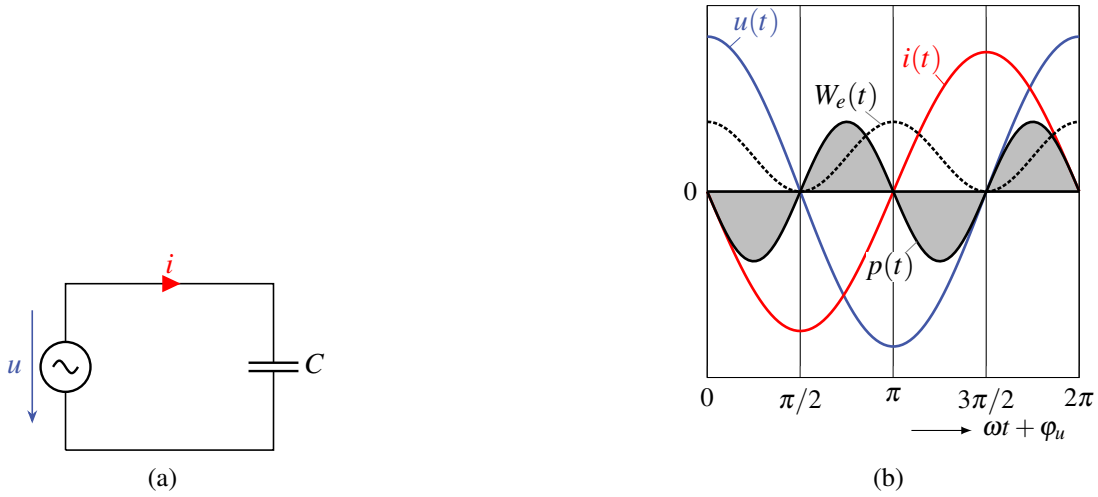


Figure 1.75: a) Kapazität an einer Wechselspannungsquelle. b) Zeitlicher Verlauf von Spannung, Strom und Leistung für eine Kapazität für den Fall $\varphi_u = 0$ bzw. $\varphi_i = +\pi/2$.

1.8.3 Impedanz

Im nächsten Schritt werden die vorangegangenen Betrachtungen auf beliebige Wechselstromverbraucher bzw. Impedanzen $\underline{Z}$ an einer Wechselspannungsquelle erweitert – siehe Abbildung 1.76a. Die Phasenverschiebung $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ zwischen Spannung und Strom liegt dabei im Bereich: $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ $(-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ)$. Für die Augenblicksleistung folgt

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = \hat{u}\hat{i}\cos(\omega t + \varphi_u)\cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= \frac{\hat{u}\hat{i}}{2}\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)\right] = UI\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)\right] \end{aligned} \tag{1.217}$$

d.h. diese setzt sich aus einem zeitunabhängigen und einem Anteil mit doppelter Frequenz zusammen.

Mit den Zusammenhängen

$$\begin{aligned} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) &= \cos\left[(2\omega t + 2\varphi_u) - \varphi)\right] = \cos(2\omega t + 2\varphi_u)\cos\varphi + \sin(2\omega t + 2\varphi_u)\sin\varphi \\ &= \cos\left[(2\omega t + 2\varphi_i) + \varphi)\right] = \cos(2\omega t + 2\varphi_i)\cos\varphi - \sin(2\omega t + 2\varphi_i)\sin\varphi \end{aligned}$$

kann die Augenblicksleistung

$$\begin{aligned} p(t) &= UI\cos\varphi\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u)\right] + UI\sin\varphi\sin(2\omega t + 2\varphi_u) \\ &= \underbrace{UI\cos\varphi\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)\right]}_{\sim\text{Schwankende Wirkenergie}\geq 0} - \underbrace{UI\sin\varphi\sin(2\omega t + 2\varphi_i)}_{\sim\text{Pendelnde Blindenergie}} \end{aligned} \tag{1.218}$$

in Abhängigkeit der Phasendifferenz φ dargestellt werden.

Der erste Summand beschreibt dabei den Leistungsanteil, der komplett von der Quelle an den Verbraucher geliefert wird (und z.B. in einem Widerstand in Wärme umgewandelt wird). Die mittlere Leistung P folgt durch Integration von $p(t)$ über eine Periode. Dies ergibt allgemein die sogenannte Wirkleistung

$$P = UI\cos\varphi = UI\cos(\varphi_u - \varphi_i) \tag{1.219}$$

mit der Einheit [P] = 1 Watt = 1 W (wie die Leistung im Gleichstromkreis).

Der Term $\lambda = \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \cos\varphi$ wird als Leistungsfaktor bezeichnet. Für ohmsche Zweipole mit $\varphi = 0$ folgt $\lambda = 1$ und für rein reaktive Zweipole mit $\varphi = \pm\pi/2$ folgt $\lambda = 0$.

Der zweite Summand in dem Ausdruck für die Augenblicksleistung (1.218) beschreibt den Leistungsanteil, der für die Änderung der im magnetischen oder im elektrischen Feld gespeicherte Energie verantwortlich ist, d.h. den Leistungsanteil der zwischen Verbraucher und Quelle hin- und herpendelt (siehe dazu Abschnitt 1.8.2).

Die Amplitude der reaktiven Leistungspendelung wird dabei als Blindleistung

$$Q = UI\sin\varphi = UI\sin(\varphi_u - \varphi_i) \tag{1.220}$$

bezeichnet. Dieser hat die Einheit [Q] = 1 VAr = (Volt-Ampere reaktiv).
Für induktive Verbraucher gilt $Q > 0$ da $\varphi > 0$ ($\underline{\hat{u}}$ eilt vor $\underline{\hat{i}}$),
für kapazitive Verbraucher gilt $Q < 0$ da $\varphi < 0$ ($\underline{\hat{u}}$ eilt nach $\underline{\hat{i}}$) und
für ohmsche Verbraucher $Q = 0$.
Für die Schaltung in Abbildung 1.76b folgt z.B. mit $I = U\omega C$ die kapazitive Blindleistung ("−", da kapazitiv)

$$Q = -UI = -U^2\omega C = -I^2\frac{1}{\omega C} \tag{1.221}$$

Und für die Schaltung in Abbildung 1.76c folgt mit $U = I\omega L$ die induktive Blindleistung ("+", da induktiv)

$$Q = +UI = \frac{U^2}{\omega L} = I^2\omega L \tag{1.222}$$

Zusammenfassend ist die Augenblicksleistung $p(t)$ allgemein darstellbar als

$$p(t) = \boldsymbol{P}\begin{matrix}[1+\cos(2\omega t+2\varphi_u)]\\[1+\cos(2\omega t+2\varphi_i)]\end{matrix} \pm \boldsymbol{Q}\begin{matrix}[\sin(2\omega t+2\varphi_u)]\\[\sin(2\omega t+2\varphi_i)]\end{matrix} \tag{1.223}$$

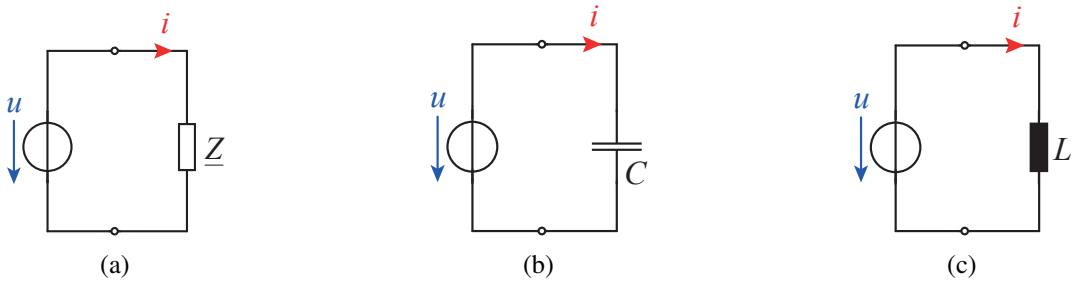


Figure 1.76: Allgemeine Impedanz in a), Kapazität in b) und Induktivität in c) an einer Wechselspannungsquelle.

1.8.4 *RL*-Schaltung

Um die beiden Varianten der allgemeinen Darstellung der Augenblicksleistung $p(t)$ in Gleichung (1.223) näher zu untersuchen, wird die *RL*-Serienschaltung in Abbildung 1.77a betrachtet. Der Strom $i(t) = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i)$ fliesst aufgrund der Serienschaltung durch alle Bauelemente und dient als Bezug im Zeigerdiagramm. Für die Spannung $u_R(t)$ am Widerstand, die in Phase zum Strom $i(t)$ ist, und die Spannung $u_L(t)$ an der Induktivität, die um $\pi/2$ gegenüber dem Strom $i(t)$ voreilt, folgt damit

$$u_R(t) = \hat{u}_R\cos(\omega t+\varphi_i) \qquad u_L(t) = \hat{u}_L\cos(\omega t+\varphi_i+\pi/2) = -\hat{u}_L\sin(\omega t+\varphi_i) \tag{1.224}$$

In Abbildung 1.77b sind die dazugehörigen Spannungs- und der Stromzeiger dargestellt. Aus Zeigerdiagramm folgt für die Spannungsamplituden ($\varphi = \varphi_u - \varphi_i$)

$$\hat{u}_R = \hat{u}\cos\varphi \qquad \hat{u}_L = \hat{u}\sin\varphi \tag{1.225}$$

Damit folgen die (Teil-)Leistungen für den Widerstand und die Induktivität

$$\begin{aligned} p_R = i(t)u_R(t) &= \hat{i}\cos(\omega t+\varphi_i)\ \hat{u}_R\cos(\omega t+\varphi_i) \\ &= \hat{i}\hat{u}\cos\varphi\cos^2(\omega t+\varphi_i) \\ &= \hat{i}\hat{u}\cos\varphi\,\frac{1}{2}\left[1+\cos(2\omega t+2\varphi_i)\right] \end{aligned} \tag{1.226}$$

$$\begin{aligned} p_L = i(t)u_L(t) &= -\hat{i}\cos(\omega t+\varphi_i)\ \hat{u}_L\sin(\omega t+\varphi_i) \\ &= -\hat{i}\hat{u}\sin\varphi\cos(\omega t+\varphi_i)\ \sin(\omega t+\varphi_i) \\ &= -\hat{i}\hat{u}\sin\varphi\,\frac{1}{2}\sin(2\omega t+2\varphi_i) \end{aligned} \tag{1.227}$$

Folglich beschreibt die untere Zeile der Gleichung (1.223) mit dem Minuszeichen zwischen den beiden grossen Termen die Augenblicksleistung $p(t) = p_R + p_L$ für eine Reihenschaltung.

Der Leistungsanteil p_R im Widerstand hat wiederum einen Gleichanteil/Mittelwert, d.h. im Mittel fliesst Energie von der Quelle zum Widerstand und der Maximalwert der Verluste tritt zeitgleich mit dem Strommaximum auf. Der Mittelwert des Leistungsanteils p_L in der Induktivität ist hingegen null – siehe Abbildung 1.77d.

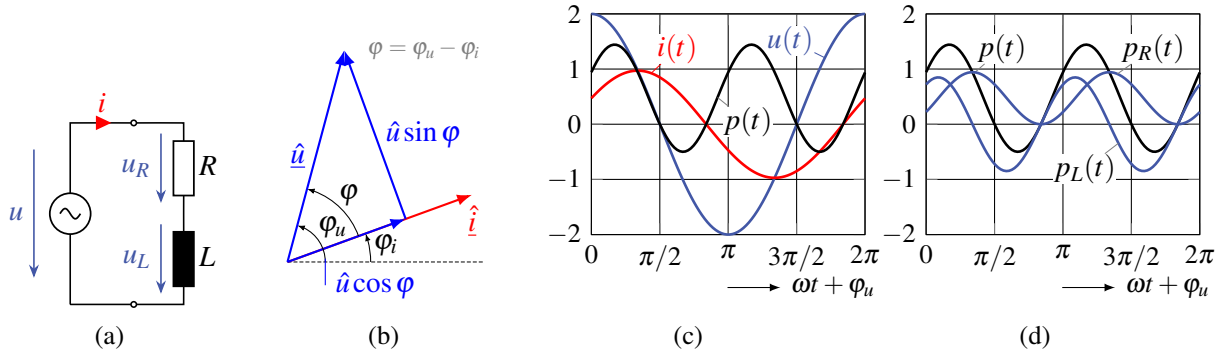


Figure 1.77: a) *RL*-Schaltung an einer Wechselspannungsquelle. b) Zeigerdiagramm c) Verlauf des Stromes, der Spannung und der Augenblicksleistung der Quelle. d) Verläufe der Leistungsanteile im Widerstand p_R, in der Induktivität p_L und in der Quelle p.

Nun wird die *RL*-Serienschaltung in die bei der Frequenz ω_0 bezüglich der Impedanz äquivalente *RL*-Parallelschaltung in Abbildung 1.78a umgewandelt und die Teilleistungen an den einzelnen Bauelementen berechnet. Die äquivalenten Bauteilwerte für die Parallelschaltung sind: $R_p = R + {(\omega_0 L)^2}/{R}$ und $L_p = L + {R^2}/{(\omega_0^2 L)}$. Aufgrund der Parallelschaltung liegt an beiden Bauelementen die gleiche Spannung $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t+\varphi_u)$ an. Weiterhin ist der Strom $i_R(t)$ durch Widerstand in Phase zu $u(t)$ und der Strom $i_L(t)$ durch die Induktivität eilt um $\pi/2$ gegenüber der Spannung $u(t)$ nach. Folglich gilt

$$i_R(t) = \hat{i}_R\cos(\omega t+\varphi_u) \qquad i_L(t) = \hat{i}_L\cos(\omega t+\varphi_u-\pi/2) = \hat{i}_L\sin(\omega t+\varphi_u) \tag{1.228}$$

In Abbildung 1.78b sind die dazugehörigen Spannungs- und der Stromzeiger dargestellt. Aus diesen folgt für die Stromamplituden ($\varphi = \varphi_u - \varphi_i$)

$$\hat{i}_R = \hat{i}\cos\varphi \qquad \hat{i}_L = \hat{i}\sin\varphi \tag{1.229}$$

Damit folgen die Teilleistungen für den Widerstand und die Induktivität

$$\begin{aligned} p_R = i_R(t)u(t) &= \hat{i}_R\cos(\omega t+\varphi_u)\ \hat{u}\cos(\omega t+\varphi_u) \\ &= \hat{i}\hat{u}\cos\varphi\cos^2(\omega t+\varphi_u) \\ &= \hat{i}\hat{u}\cos\varphi\,\frac{1}{2}\left[1+\cos(2\omega t+2\varphi_u)\right] \end{aligned} \tag{1.230}$$

$$\begin{aligned} p_L = i_L(t)u(t) &= \hat{i}_L\sin(\omega t+\varphi_u)\ \hat{u}\cos(\omega t+\varphi_u) \\ &= \hat{i}\hat{u}\sin\varphi\sin(\omega t+\varphi_u)\ \cos(\omega t+\varphi_u) \\ &= \hat{i}\hat{u}\sin\varphi\,\frac{1}{2}\sin(2\omega t+2\varphi_u) \end{aligned} \tag{1.231}$$

Folglich beschreibt die obere Zeile der Augenblicksleistung $p(t) = p_R + p_L$ in Gleichung (1.223) mit dem Pluszeichen zwischen den beiden grossen Termen die Leistungsaufteilung für eine Parallelschaltung.

Wiederum hat der Leistungsanteil p_R im Widerstand einen Gleichanteil bzw. einen Mittelwert und der Maximalwert der Verluste tritt zeitgleich mit dem Spannungsmaximum auf. Der Mittelwert des Leistungsanteils p_L in der Induktivität ist hingegen null – siehe Abbildung 1.78c.

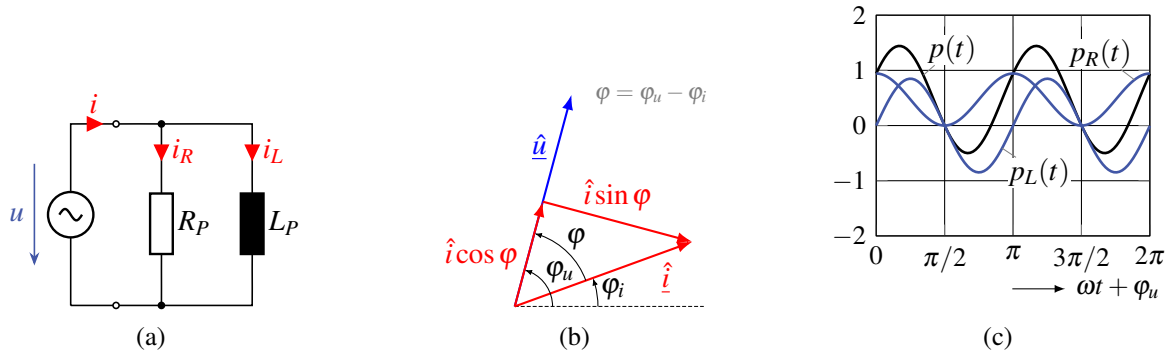


Figure 1.78: a) *RL*-Parallelschaltung an einer Wechselspannungsquelle. b) Zeigerdiagramm der Ströme. c) Verläufe der Leistungsanteile im Widerstand p_R, in der Induktivität p_L und in der Quelle p.

1.8.5 Scheinleistung

Multipliziert man die drei Seiten des Spannungszeigerdiagramms in Abbildung 1.77b mit der Stromamplitude $\hat{i}/2$ des Stromes durch die Serienschaltung, so erhält man das Leistungsdreieck in Abbildung 1.79a. Der Faktor 1/2 ist notwendig, um für $\hat{i}\hat{u}_V$ das Produkt der Effektivwerte IU_V zu erhalten.

Analog kann das Stromzeigerdiagramm in Abbildung 1.78b mit der Spannungsamplitude $\hat{u}/2$ der Spannung über der Parallelschaltung multipliziert werden, woraus das Leistungsdreieck in Abbildung 1.79b resultiert.

Dabei bilden die Wirk- P und die Blindleistung Q die Katheten des jeweiligen Leistungsdreiecks. Die Hypotenuse wird als Scheinleistung $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$ bezeichnet. Diese entspricht dem Produkt aus den Effektivwerten des Stromes und der Spannung ohne Berücksichtigung des Leistungsfaktors. Die Scheinleistung stellt dabei keine Leistung im physikalischen Sinn dar, da ja die Maxima von Strom und Spannung im Allgemeinen zu verschiedenen Zeitpunkten auftreten. Die Einheit: der Scheinleistung ist: [S] = 1 VA (Volt-Ampere).

Mit der Scheinleistung kann der oben besprochene Leistungsfaktor λ auch über das Verhältnis von Wirkleistung P zu Scheinleistung S berechnet werden

$$\lambda = \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{P}{S} \tag{1.232}$$

Aus den Leistungsdreiecken folgt auch

$$P = S\cos\varphi \tag{1.233}$$

$$Q = S\sin\varphi \tag{1.234}$$

1.8.6 Komplexe Leistung

Bisher wurde die Leistungsberechnung im Zeitbereich durchgeführt. Im Folgenden wird nun die Leistungsberechnung mit Hilfe von komplexen Zeigern untersucht, welche unmittelbar im Rahmen der komplexen Wechselstromrechnung angewendet werden kann. Dies resultiert in der komplexe Leistung $\underline{S}$, die sich aus

$$\underline{S} = \frac{1}{2}\underline{\hat{u}}\,\underline{\hat{i}}^* \tag{1.235}$$

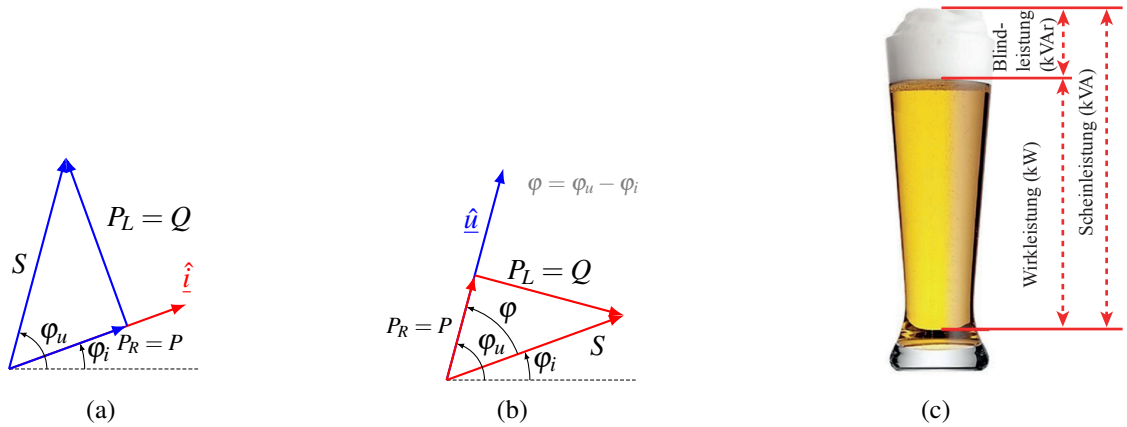


Figure 1.79: Leistungsdreieck in a) für den Serienschwingkreis und in b) für den Parallelschwingkreis. c) "Veranschaulichung" von Wirk-, Blind- und Scheinleistung.

ergibt. Dabei ist $\hat{\underline{i}}^*$ der konjugiert komplexe Stromzeiger, bei dem im Verhältnis zum Zeiger $\hat{\underline{i}}$ das Vorzeichen des Imaginärteils invertiert ist.

Durch einfaches Umformen der komplexen Leistung erhält man

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \frac{1}{2}\hat{\underline{u}}\,\hat{\underline{i}}^* = \frac{1}{2}\hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}(\hat{i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i})^* = \frac{1}{2}\hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}\hat{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_i} = UI\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u-\varphi_i)} \\ &= UI\cos(\varphi_u-\varphi_i) + \mathrm{j}UI\sin(\varphi_u-\varphi_i) = P + \mathrm{j}Q \end{aligned} \tag{1.236}$$

d.h. der Realteil von $\underline{S}$ ist gleich der Wirkleistung P und der Imaginärteil gleich der Blindleistung Q. Der Betrag ist gleich der Scheinleistung, d.h. $|\underline{S}| = |P + jQ| = \sqrt{P^2+Q^2} = S$.

Achtung: Bei der komplexen Leistung handelt es sich (wie bei der Impedanz/Admittanz) um eine Rechengrösse und nicht um einen rotierenden Zeiger, der durch Projektion in den Zeitbereich transformiert werden kann.

Beispielhaft wird nun die komplexe Leistung für den Widerstand R berechnet. Diese ergibt sich aus

$$P = \Re\{\underline{S}\} = \Re\left\{\frac{1}{2}\hat{\underline{u}}\,\hat{\underline{i}}^*\right\} = \Re\left\{\frac{1}{2}R\,\hat{\underline{i}}\,\hat{\underline{i}}^*\right\} = \Re\left\{\frac{1}{2}R\,|\hat{\underline{i}}|^2\right\} = \frac{1}{2}R\,|\hat{\underline{i}}|^2 = RI^2 \quad \text{bzw.}$$

$$P = \frac{1}{2}\frac{|\hat{\underline{u}}|^2}{R} = \frac{1}{R}U^2 \tag{1.237}$$

Die komplexe Leistung für eine allgemeine Impedanz $\underline{Z}$ bzw. Admittanz $\underline{Y}$ folgt aus

$$\underline{S} = \frac{1}{2}\hat{\underline{u}}\,\hat{\underline{i}}^* = \frac{1}{2}\underline{Z}\,\hat{\underline{i}}\,\hat{\underline{i}}^* = \frac{1}{2}\underline{Z}|\hat{\underline{i}}|^2 = \underline{Z}I^2 = \frac{1}{\underline{Y}}I^2 \tag{1.238}$$

$$\underline{S} = \frac{1}{2}\hat{\underline{u}}\,\hat{\underline{i}}^* = \frac{1}{2}\hat{\underline{u}}\,\frac{\hat{\underline{u}}^*}{\underline{Z}^*} = \frac{1}{\underline{Z}^*}U^2 = \underline{Y}^*U^2 \tag{1.239}$$

1.8.7 Leistungsanpassung mit Impedanzen

Auf Basis der Überlegungen zu der Leistung in Wechselspannungsnetzwerken wird nun der Fall der Leistungsanpassung, d.h. der maximalen Leistungsübertragung von einer Wechselspannungsquelle $\hat{\underline{u}}_q$ an einen beliebigen Verbraucher Z_L untersucht – siehe Abbildung 1.80a. Im Fall eines Gleichstromkreises ergab sich, dass die maximal mögliche Leistung von der Quelle mit der Gleichspannung U_q und dem Innenwiderstand R_i an die Last R_L abgegeben wird, wenn $R_i = R_L$ ist.

Für eine Wechselspannungsquelle $\hat{\underline{u}}_q$ mit Innenimpedanz $\underline{Z}_i = R_i + \mathrm{j}X_i$ und Verbraucher $\underline{Z}_L = R_L + \mathrm{j}X_L$ (Abbildung 1.80b) ergibt sich allgemein die Stromamplitude aus

$$|\hat{\underline{i}}| = \frac{|\hat{\underline{u}}_q|}{|\underline{Z}_i + \underline{Z}_L|} = \hat{i} = \frac{\hat{u}_q}{\sqrt{(R_i+R_L)^2 + (X_i+X_L)^2}} \tag{1.240}$$

Mit der Stromamplitude ergibt sich die dem Verbraucher zugeführte Wirkleistung (= Leistung im Widerstand R_L) aus

$$P = \frac{1}{2}\hat{i}^2 R_L = \frac{\hat{u}_q^2}{2}\frac{R_L}{(R_i+R_L)^2+(X_i+X_L)^2} \tag{1.241}$$

Damit die Wirkleistung im Widerstand R_L maximal wird, muss der Nenner der Gleichung (1.241) minimal werden, d.h. der Term mit den Blindwiderständen verschwinden. Somit folgt: $X_i = -X_L$, d.h. z.B. für einen induktiv wirkenden Innenwiderstand muss ein kapazitiv wirkender Verbraucher mit gleichem Betrag des Blindwiderstandes gewählt werden – dies entspricht prinzipiell einem Serienschwingkreis bei Resonanz.

Mit $X_i = -X_L$ nimmt die Leistungsgleichung die gleiche Form an wie die Gleichung für das Gleichspannungsnetzwerk, d.h. für die maximal übertragbare Leistung muss $R_i = R_L$ gewählt werden. Damit folgt, dass für eine maximale Wirkleistungsübertragung die Impedanzen wie folgt gewählt werden müssen: $\underline{Z}_L = \underline{Z}_i^*$. Die Wirkleistung im Verbraucher beträgt dabei $P_{max} = \hat{u}_q^2/2 \cdot 1/4R_L$, d.h. für den Fall der Leistungsanpassung beträgt der Wirkungsgrad nur 50%. Möchte man einen höheren Wirkungsgrad für die Übertragung erreichen, so muss der Innenwiderstand R_i kleiner werden als der Lastwiderstand R_L. Im Idealfall verschwindet R_i und man erreicht Werte für den Wirkungsgrad von 100%. Dies wird z.B. bei der Energieübertragung angestrebt, um die Verluste in den elektrischen Netzen zu minimieren. Folglich wird in solchen Systemen nicht der Fall der Leistungsanpassung angestrebt, sondern der Fall des maximalen Wirkungsgrades.

Für den Fall der Leistungsanpassung stellt die Schaltung einen im Resonanzpunkt betriebenen Serienschwingkreis dar und es besteht die Gefahr der Spannungsüberhöhung den beiden Impedanzen X_i und X_L.

Figure 1.80: a) Wechselspannungsquelle mit Innenimpedanz $\underline{Z}_i$ und Lastimpedanz $\underline{Z}_L$. In b) sind die Innenimpedanz $\underline{Z}_i$ und die Lastimpedanz $\underline{Z}_L$ in den Wirk- und den Blindanteil aufgeteilt.

1.8.8 Maximalleistung mit reinem Wirkwiderstand

In nächsten Schritt wird der Fall betrachtet, dass der Verbraucher ausschliesslich aus dem Wirkwiderstand R_L besteht, d.h. $X_L = 0$ – siehe Abbildung 1.81a. Die Bedingung für die maximale Wirkleistung in R_L ist mit der Gleichung für die Leistung P (1.241) aus dem letzten Abschnitt gleich

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R_L} = \frac{\hat{u}_q}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R_L}\left(\frac{R_L}{(R_i+R_L)^2+X_i^2}\right) = \frac{(R_i+R_L)^2+X_i^2-2R_L(R_i+R_L)}{\left[(R_i+R_L)^2+X_i^2\right]^2} \stackrel{!}{=} 0 \tag{1.242}$$

$$\Rightarrow \quad (R_i+R_L)^2+X_i^2-2R_L(R_i+R_L) = R_i^2-R_L^2+X_i^2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{1.243}$$

Damit ist die optimale Lastimpedanz für maximale Wirkleistung gleich

$$R_L = \sqrt{R_i^2+X_i^2} = |\underline{Z}_i| \tag{1.244}$$

und die maximal im Lastwiderstand R_L verfügbare Wirkleistung ist

$$P_{max} = \frac{\hat{u}_q^2}{2}\frac{\sqrt{R_i^2+X_i^2}}{\left(R_i+\sqrt{R_i^2+X_i^2}\right)^2+X_i^2} = \frac{\hat{u}_q^2}{4}\frac{1}{R_i+\sqrt{R_i^2+X_i^2}} \tag{1.245}$$

Die an die Last lieferbare Maximalleistung ist dabei geringer als bei der oben betrachteten konjugiert komplexe Anpassung und zwar umso mehr, je grösser der Blindwiderstand X_i ist.

In der Beispielschaltung in Abbildung 1.81b soll die Leistung an der Last maximiert werden. Die Wechselspannungsquelle hat dabei die innere Impedanz $\underline{Z}_i = 50\Omega + \mathrm{j}20\Omega$. Im Fall einer Lastimpedanz muss die positive Reaktanz der Quelle mit einer negativen Reaktanz des Verbrauchers kompensiert werden (d.h. mit einer ohmsch-kapazitiven Lastimpedanz): $\underline{Z}_L = \underline{Z}_i^* = 50\Omega - \mathrm{j}20\Omega$. Für einen rein ohmschen Lastwiderstand, wie in Abbildung 1.81c dargestellt, folgt $R_L = |\underline{Z}_i| = 53.85\Omega$.

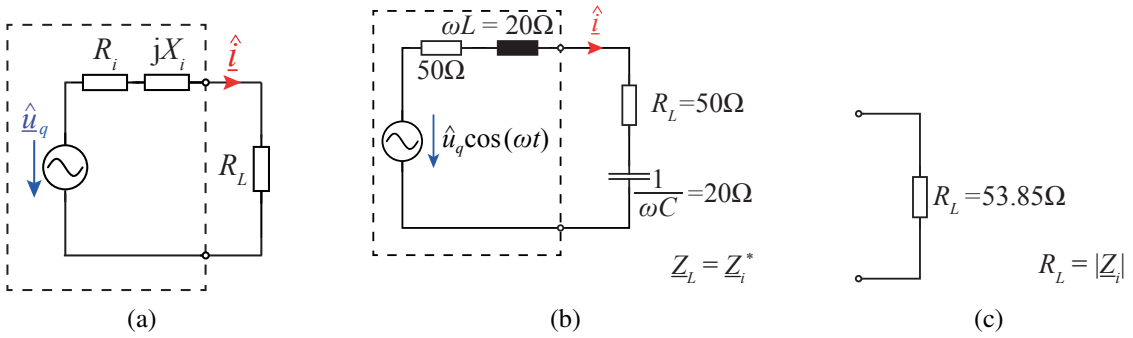


Figure 1.81: a) Wechselspannungsquelle mit Innenimpedanz $\underline{Z}_i$ und Lastwiderstand R_L. In b) ist eine Beispielschaltung für eine Leistungsanpassung mit Lastimpedanz und in c) mit Lastwiderstand gegeben.

1.8.9 Blindstrom-/leistungskompensation

Es wird nun der Fall eines ohmsch-induktiven Verbrauchers (z.B. Motor) $\underline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L$ betrachtet, der z.B. an das 50Hz-Versorgungsnetz $\hat{\underline{u}}_q$ angeschlossen ist. Ziel ist es, die (Wirk-)Leistung unter minimaler Strombelastung der Quelle und der Leitung zum Verbraucher zu übertragen, damit die Verluste in der Quelle/Leitung minimal werden. Der sich einstellende Strom $\hat{\underline{i}}$ (bzw. $\hat{\underline{i}}_N$ in Abbildung 1.82a) eilt aufgrund der ohmsch-induktiven Last gegenüber der Spannung $\hat{\underline{u}}_q$ um den Winkel $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ nach. Der Strom kann in den sogenannten Wirkstrom $\hat{i}_W = \hat{i}\cos\varphi$ bzw. $\hat{\underline{i}}_W = \hat{i}_W$, der in Phase mit $\hat{\underline{u}}_q$ ist, und den Blindstrom $\hat{i}_B = \hat{i}\sin\varphi$ bzw. $\hat{\underline{i}}_B = -\mathrm{j}\hat{i}_B$, der im betrachteten Fall um $\pi/2$ gegenüber $\hat{\underline{u}}_q$ nacheilt, zerlegt werden (siehe Zeigerdiagramm in Abbildung 1.82b).

Diese Zerlegung des Stromes ($\hat{\underline{i}} = \hat{\underline{i}}_N = \hat{i}_W - \mathrm{j}\,\hat{i}_B$) entspricht direkt der Aufteilung der von der Quelle abgegebenen komplexen Leistung

$$\underline{S} = P + \mathrm{j}Q = \frac{1}{2}\hat{\underline{u}}_q\hat{\underline{i}}^* = \frac{1}{2}\hat{u}_q\left(\hat{i}_W + \mathrm{j}\,\hat{i}_B\right) = \frac{1}{2}\hat{u}_q\hat{i}\,(cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) \tag{1.246}$$

Somit ist zum Übertragen der Wirkleistung P der Strom mit der Amplitude $\hat{i}_W$ ausreichend, da der Blindstrom $\hat{\underline{i}}_B$ keine Wirkleistung von der Quelle zum Verbraucher überträgt, sondern nur die pendelnde Blindleistung verursacht. Durch den Blindstrom entstehen jedoch in den Verbindungsleitungen von der Quelle zum Verbraucher ohmsche Verluste. Um diese zu minimieren, muss der Blindstrom $\hat{i}_B$ reduziert werden.

Dies kann durch Hinzufügen eines Kondensators nach Abbildung 1.82c erreicht werden. Im Kondensator C fliesst ein Strom $\hat{\underline{i}}_C = \hat{\underline{u}}_q(\mathrm{j}\omega C)$, der gegenüber der Spannung $\hat{\underline{u}}_q$ um $\pi/2$ voreilt. Betrachtet man den Summenstrom $\hat{\underline{i}}_N'$ in Abbildung 1.82c, so kompensiert der Strom $\hat{\underline{i}}_C$ teilweise oder ganz den Blindstrom $\hat{\underline{i}}_B$. Dies ist anschaulich auch im Zeigerdiagramm in Abbildung 1.82d zu sehen.

Unter der Annahme, dass $\hat{\underline{u}}_q$ und $\hat{\underline{i}}$ bekannt sind und ein Gesamtleistungsfaktor $\cos\varphi'$, wie in Abbildung 1.82d dargestellt, angestrebt wird, ergibt sich aus dem Zeigerdiagramm für den Strom $\hat{\underline{i}}_C$ durch den Kondensator

$$\hat{i}_C = \hat{i}_B - \hat{i}_B' = \hat{i}_W\tan\varphi - \hat{i}_W\tan\varphi' \tag{1.247}$$

Mit dem bekannten Wirkstrom $\hat{i}_W = \hat{i}\cos\varphi$ und dem Kondensatorstrom $\hat{i}_C = \hat{u}_q\omega C$ folgt für die erforder-

liche Kompensationskapazität

$$C = \frac{\hat{i}_C}{\omega \hat{u}_q} \tag{1.248}$$

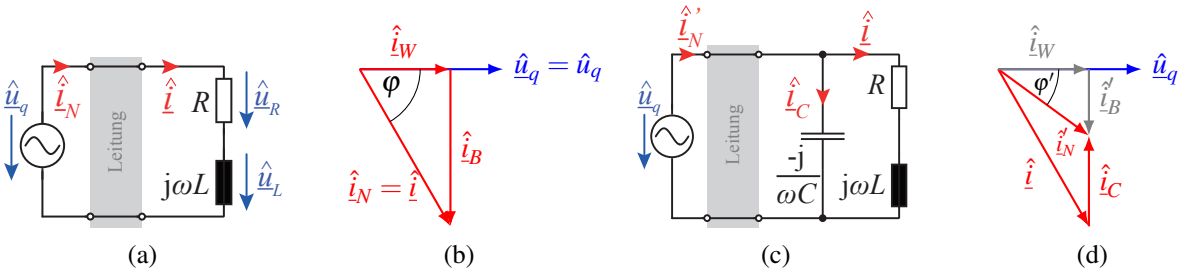


Figure 1.82: a) Ohmsch-induktive Last (z.B. Motor) an einer Wechselspannungsquelle. b) Zeigerdiagramm der Ströme für das Netzwerk in a). In c) ist das Netzwerk aus a) inklusive des Kondensators zur Kompensation des Blindstromes gezeigt. d) Zeigerdiagramm für das Netzwerk in c).

In Abbildung 1.83 ist ein Beispiel für eine Anlage zur Blindleistungskompensation dargestellt. Abbildung 1.84 zeigt ein Beispiel für ein Netzwerk wo eine Blindleistungskompensation eingesetzt wird.

Der Netzanschluss der Kondensatoren für die Blindleistungskompensation erfolgt normalerweise über eine Tonfrequenzsperre oder Serieninduktivität, um die Abschwächung von Rundsteuerimpulsen zu unterbinden.

Rundsteuerimpulse sind der Netzspannung überlagerte Steuersignale mit typischerweise einer Frequenz zwischen 160Hz…1350Hz, die von Rundsteuerempfängern ausgewertet werden, um z.B. eine Tarifumschaltung für den Strompreis oder eine Heizungssteuerung vorzunehmen.

Figure 1.83: Beispiel für eine Blindleistungskompensationsanlage

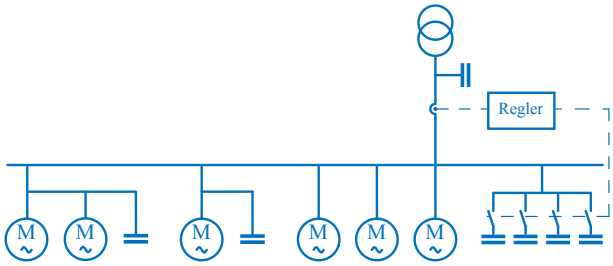


Figure 1.84: Beipielschaltung einer Anlage mit ohmsch-induktiven Verbrauchern (hier: Motoren) und einer (geregelten) Blindleistungskompensation mittels Kondensatoren.

Chapter 2

Drehstromsysteme

2.1 Leistung Drehstrom

2.1.1 Dreiphasensystem – Sternschaltung

Um die zeitliche Leistungsschwankung bei der Speisung durch eine einzelne sinusförmige Quelle zu vermeiden, werden bei höheren Leistungen (z.B. in der Energieverteilung oder bei grösseren Elektromotoren) dreiphasige Systeme eingesetzt. Diese bestehen aus 3 sinusförmigen Grössen (z.B. Spannungen), die im Idealfall je um 120° in der Phase zueinander versetzt sind und die gleiche Amplitude / Frequenz haben. Sind diese Bedingungen erfüllt, spricht man von einem symmetrischen, dreiphasigen System (z.B. von einem dreiphasigen Spannungssystem, wenn es sich um Spannungsquellen handelt).

In Abbildung 2.1a ist beispielhaft ein dreiphasiges, symmetrisches Spannungssystem mit den 3 sogenannten Strangspannungen u_1, u_2 und u_3 gegeben. Diese ergeben sich aus

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \sin(\omega t),\, u_2(t) = \hat{u}_2 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right),\, u_3(t) = \hat{u}_3 \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \tag{2.1}$$

Dabei gilt für ein symmetrisches Spannungssystem: $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = \hat{u}_3$.

Die Spannung u_1 dient häufig als Referenz/Bezugszeiger und die Spannungen u_2 / u_3 sind um -120° ($-2\pi/3$) bzw. -240° ($-4\pi/3$) gegenüber u_1 phasenverschoben. Die dazugehörigen Zeiger sind in Abbildung 2.1b dargestellt und folgen aus

$$\underline{\hat{u}}_1 = \hat{u}_{St} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}, \qquad \underline{\hat{u}}_2 = \hat{u}_{St} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} \quad \text{und} \quad \underline{\hat{u}}_3 = \hat{u}_{St} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)} \tag{2.2}$$

Die Verschiebung um $-\pi/2$, die bei allen Spannungszeigern auftritt, ergibt sich dabei aufgrund der Tatsache, dass in Gleichung (2.1) Sinus- anstatt von Kosinus-Grössen und allgemein in diesem Skript Zeiger auf Kosinus-Basis verwendet werden – siehe Abbildung 1.23c.

Mit den gewählten Phasenverschiebungen von -120° für die Spannung u_2 und von -240° für die Spannung u_3 ergibt sich eine (Phasen-)Reihenfolge der Spannungen von $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3$, wenn man entlang der Zeitachse in die positive Richtung geht. Dies ist auch in Abbildung 2.1a sichtbar. Verwendet man stattdessen eine Phasenverschiebung von +120° für die Spannung u_2 und von +240° für die Spannung u_3, so ergibt sich eine (Phasen-)Reihenfolge der Spannungen von $u_1 \rightarrow u_3 \rightarrow u_2$, wenn man entlang der Zeitachse in die positive Richtung geht. Alternativ kann man auch in die negative Richtung entlang der Zeitachse gehen, dann ergibt sich wiederum eine (Phasen-)Reihenfolge der Spannungen von $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3$.

Standardmässig wird die Definition der Spannungen in (2.1) verwendet. Hinweis: Mit dieser Definition der Phasenspannungen resultiert ein linksdrehender (d.h. gegen den Uhrzeigersinn drehender) Spannungsraumzeiger. Raumzeiger unterscheiden sich grundsätzlich von den hier betrachteten komplexen Zeigern und werden v.a. im Bereich von elektrischen Maschinen bzw. 3-phasigen Systemen verwendet, um die Berechnungen zu vereinfachen. Das Thema Raumzeiger geht dabei über die Inhalte der Vorlesung hinaus und soll hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt werden.

Um die drei Quellen u_1, u_2 und u_3 mit einem Verbraucher zu verbinden, müssen im Allgemeinen 2 Leitungen pro Quelle, d.h. insgesamt 6 Leitungen, verwendet werden. Verbindet man jedoch die Quellen

zu einer Sternschaltung so wie dies in Abbildung 2.1c dargestellt ist, so reduziert sich die Anzahl der Leitungen im Allgemeinen auf 4, d.h. man spart 2 Leitungen ein.

Der gemeinsame Knotenpunkt/Sternpunkt ist mit dem Neutralleiter N verbunden. Die drei weiteren Anschlüsse sind mit den Leitungen $L1$, $L2$ und $L3$ verbunden. Diese werden als Aussenleiter bezeichnet.

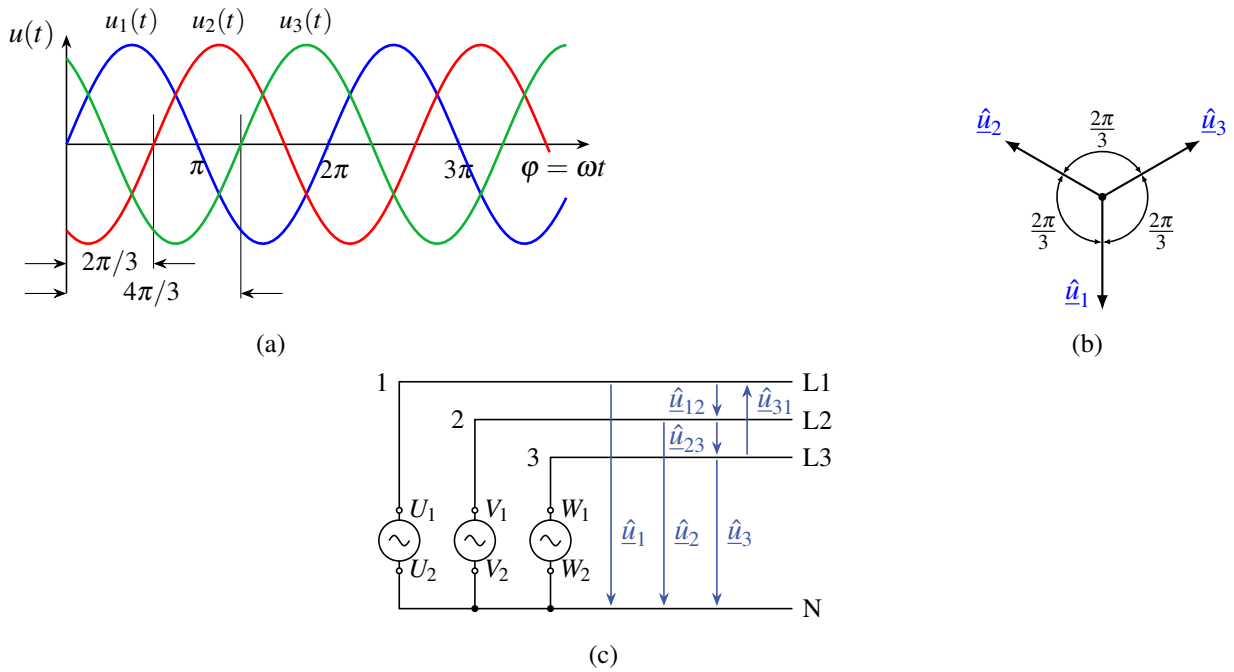


Figure 2.1: a) Zeitlicher Verlauf der Strangspannungen eines symmetrischen dreiphasigen Spannungssystems. b) Zeigerdiagramm der drei Strangspannungen. c) Verschaltung des dreiphasigen Spannungssystems zu einer Sternschaltung mit dem Sternpunkt N und den 3 Aussenleitern $L1$, $L2$ und $L3$.

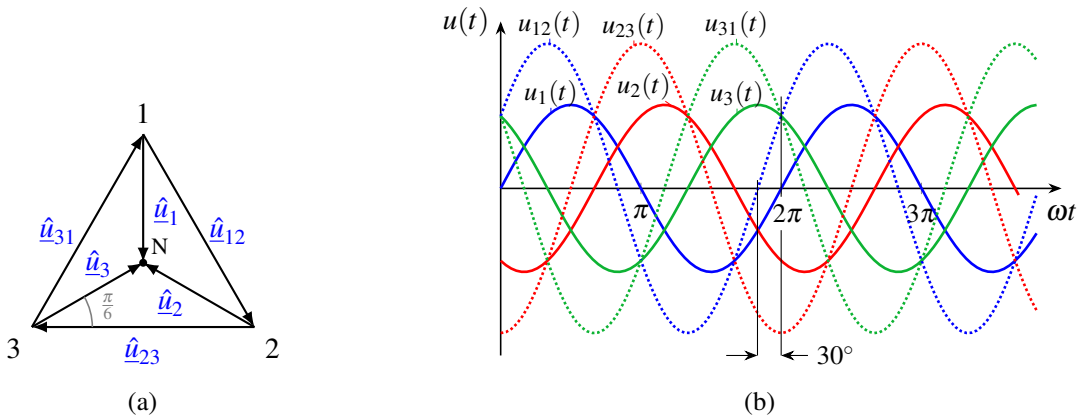


Figure 2.2: a) Zeigerdiagramm der Strang- und der Aussenleiterspannungen. b) Zeitlicher Verlauf der Strangspannungen und der Aussenleiterspannungen.

Ausgehend von dem Zeigerdiagramm in Abbildung 2.1b sind in Abbildung 2.2a die Zeiger der drei Strangspannungen (Leiter-Neutralleiter Spannungen)

$$\hat{\underline{u}}_1 (= \hat{\underline{u}}_{1N}) = \sqrt{2} U_{st} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} \tag{2.3}$$

$$\hat{\underline{u}}_2 (= \hat{\underline{u}}_{2N}) = \sqrt{2} U_{st} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} \tag{2.4}$$

$$\hat{\underline{u}}_3 (= \hat{\underline{u}}_{3N}) = \sqrt{2} U_{st} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)} \tag{2.5}$$

mit den Spitzen auf den Neutralleiter N gerichtet dargestellt, so dass die Punkte 1, 2, 3 und N in Abbildung 2.1c direkt mit dem Zeigerdiagramm in Abbildung 2.1b übereinstimmen.

Die drei Spannungen

$$\underline{\hat{u}}_{12} = \underline{\hat{u}}_1 - \underline{\hat{u}}_2 = \sqrt{2}U_L e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\sqrt{3}U_{st} e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}} \tag{2.6}$$

$$\underline{\hat{u}}_{23} = \underline{\hat{u}}_2 - \underline{\hat{u}}_3 = \sqrt{2}U_L e^{-\mathrm{j}\pi} = \sqrt{2}\sqrt{3}U_{st} e^{-\mathrm{j}\pi} \tag{2.7}$$

$$\underline{\hat{u}}_{31} = \underline{\hat{u}}_3 - \underline{\hat{u}}_1 = \sqrt{2}U_L e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\sqrt{3}U_{st} e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}} \tag{2.8}$$

zwischen den jeweiligen Aussenleitern (Abbildung 2.2a) werden als Aussenleiterspannungen bezeichnet. Dabei bezeichnet U_L den Effektivwert der Leiter-Leiter Spannung, wobei in einem symmetrischen System gilt $\sqrt{2}U_L = \hat{u}_{12} = \hat{u}_{23} = \hat{u}_{31}$.

Der Effektivwert der Strangspannungen wird auch als Sternspannung U_{St} bezeichnet, wobei gilt $\sqrt{2}U_{St} = \hat{u}_1 = \hat{u}_2 = \hat{u}_3$. Aus der Geometrie des Zeigerdiagramms in Abbildung 2.2a, d.h. z.B. der Betrachtung des Dreiecks mit den Eckpunkten 2-3-N, folgt direkt

$$U_L = 2 \cdot (U_{st} \cos 30^\circ) = \sqrt{3}U_{st} \tag{2.9}$$

d.h. die Aussenleiterspannung U_L ist $\sqrt{3}$ mal grösser als die Sternspannung. Weiterhin weisst die Aussenleiterspannung $\underline{\hat{u}}_{12}$ eine Phasenverschiebung von +30° gegenüber der Strangspannung $\underline{\hat{u}}_1$ auf – siehe Abbildung 2.2b Damit eilt die Aussenleiterspannung $\underline{\hat{u}}_{12}$ gegenüber der Strangspannung $\underline{\hat{u}}_1$ vor. Dies gilt für die gewählte Spannungsdefinition in (2.1). Wird stattdessen eine Phasenverschiebung von +120° für die Spannung u_2 und von +240° für die Spannung u_3 angenommen, so dreht sich die Phasenreihenfolge und die Aussenleiterspannung $\underline{\hat{u}}_{12}$ weisst eine Phasenverschiebung von -30° gegenüber der Strangspannung $\underline{\hat{u}}_1$ auf, d.h. die Aussenleiterspannung $\underline{\hat{u}}_{12}$ eilt gegenüber der Strangspannung $\underline{\hat{u}}_1$ nach.

2.1.2 Leistungsberechnung im Drehstromsystem

Nun wird die Schaltung in Abbildung 2.3a betrachtet, in welcher ein dreiphasiger Verbraucher mit den Impedanzen $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_3$ an einem symmetrischen dreiphasigen Spannungssystem bestehend aus $u_1(t)$, $u_2(t)$ und $u_3(t)$ mit dem Effektivwert der Spannung $U = \hat{u}/\sqrt{2}$ betrieben wird. Das Spannungssystem ist dabei auch als Sternschaltung verschaltet. Für die Spannungszeiger wird angenommen

$$\underline{\hat{u}}_1 = \hat{u}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}, \quad \underline{\hat{u}}_2 = \hat{u}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} \quad \text{und} \quad \underline{\hat{u}}_3 = \hat{u}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)} \tag{2.10}$$

Damit folgt für die Aussenleiterspannung (siehe Abbildung 2.3b – $\alpha = \pi/6 = 30^\circ$)

$$|\underline{\hat{u}}_{12}| = 2 \cdot (|\underline{\hat{u}}_2| \cos\alpha) = 2\hat{u}\cos 30^\circ \Rightarrow \boxed{|\underline{\hat{u}}_{12}| = \sqrt{3}\hat{u}} \tag{2.11}$$

Aufgrund der Vierleiter-Sternschaltung, bestehend aus den 3 Aussenleitern $L1$, $L2$ und $L3$ und dem Neutralleiter N, liegt an den Verbraucherimpedanzen jeweils direkt eine Quellenspannung an, d.h. es gilt: $\hat{u}_{Z1} = \hat{u}_1$, $\hat{u}_{Z2} = \hat{u}_2$ und $\hat{u}_{Z3} = \hat{u}_3$ ($U_Z = U$). Die gesamte Wirkleistung des Verbrauchers ergibt sich damit als Summe der drei Phasenleistungen

$$\begin{aligned} P &= U_{Z1}I_1\cos\varphi_1 + U_{Z2}I_2\cos\varphi_2 + U_{Z3}I_3\cos\varphi_3 \\ &= U_{St}\left(I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2 + I_3\cos\varphi_3\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Im Falle einer symmetrischen Belastung, d.h. $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$, folgt unmittelbar $\hat{i}_1 = \hat{i}_2 = \hat{i}_3 = \hat{i}_Z$. Damit vereinfacht sich die Gleichung für die Gesamtleistung im Verbraucher zu

$$\boxed{P = 3U_Z I_Z \cos\varphi} \tag{2.13}$$

Weiterhin ist bei symmetrischen Verbrauchern der Neutralleiter-Strom $\underline{\hat{i}}_N = \underline{\hat{i}}_1 + \underline{\hat{i}}_2 + \underline{\hat{i}}_3$ gleich 0. Für unsymmetrische Verbraucher tritt jedoch ein Strom $\underline{\hat{i}}_N$ im Neutralleiter N auf (siehe Abbildungen 2.3b, 2.3c und 2.3d).

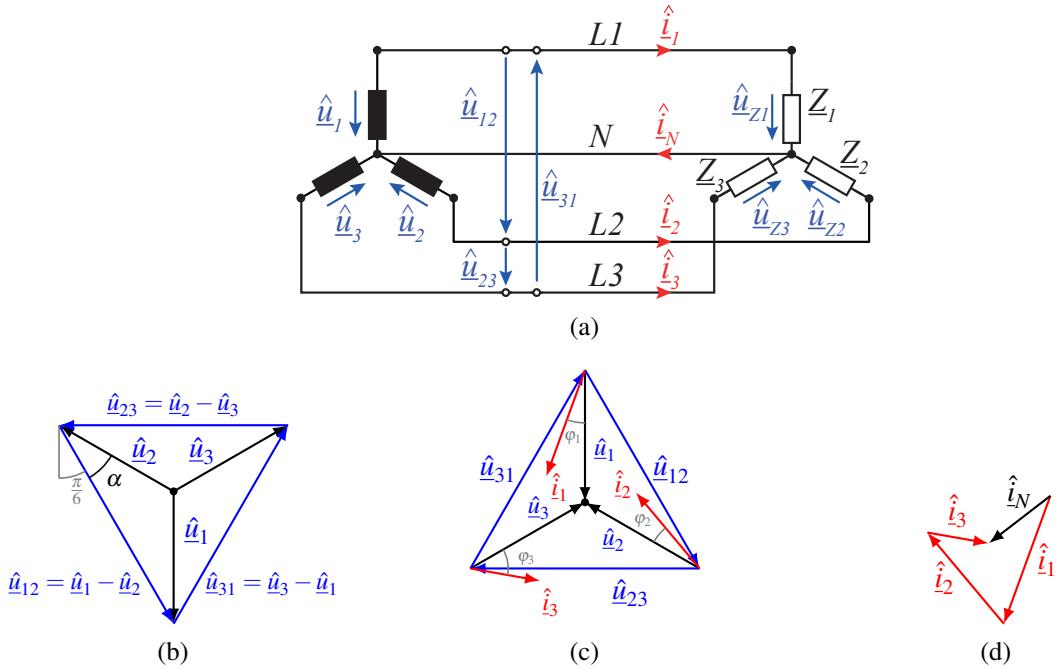


Figure 2.3: a) Verbraucher in Sternschaltung an einem 3-phasigen Spannungssystem in Sternschaltung verbunden mit 4 Leitern. b) Zeigerdiagramm der Aussenleiter- und der Strangspannungen. c) Anordnung der Strangspannungen, so dass die Zeiger zum Sternpunkt N zeigen. Weiterhin sind die Aussenleiterströme eingezeichnet, die aufgrund der Sternschaltung des Verbrauchers gleich den Strangströmen im Verbraucher sind. d) Zeigerdiagramm der Aussenleiterströme, die in Summe den Neutralleiterstom $\hat{\underline{i}}_N$ ergeben.

2.1.3 Dreileitersystem / Sternpunktverschiebung

Nun wird die Sternschaltung ohne Sternpunktleiter N untersucht, d.h. für ein Dreileitersystem wie in Abbildung 2.4 dargestellt. Bei symmetrischer Belastung weisen das Drei- und das Vierleitersystem keinen Unterschied auf, da der Strom im Neutralleiter verschwindet $\hat{\underline{i}}_N = 0$ und somit der Neutralleiter beim Vierleitersystem ohne Einfluss auf das Schaltungsverhalten weggelassen werden kann.

Bei unsymmetrischer Belastung sind nur die Aussenleiterspannungen $\hat{\underline{u}}_{12}$, $\hat{\underline{u}}_{23}$ und $\hat{\underline{u}}_{31}$ beider Systeme identisch.

Zur Berechnung der Ströme und Spannungen in den drei Last-Impedanzen werden im Fall des Dreileitersystems insgesamt 6 Gleichungen benötigt. Drei Beziehungen folgen aus den Strom-/Spannungsbeziehungen für die Impedanzen

$$\hat{\underline{i}}_1 = \frac{\hat{\underline{u}}_{Z1}}{\underline{Z}_1}, \quad \hat{\underline{i}}_2 = \frac{\hat{\underline{u}}_{Z2}}{\underline{Z}_2} \quad \text{und} \quad \hat{\underline{i}}_3 = \frac{\hat{\underline{u}}_{Z3}}{\underline{Z}_3} \tag{2.14}$$

Weiterhin gilt die Knotengleichung

$$\hat{\underline{i}}_1 + \hat{\underline{i}}_2 + \hat{\underline{i}}_3 = 0 \tag{2.15}$$

und es können 2 Maschengleichungen der ingesamt möglichen 3 Maschengleichungen für die Berechnung genutzt werden (nur 2 Maschengleichungen sind linear unabhängig)

$$\hat{\underline{u}}_{Z1} = \hat{\underline{u}}_1 - \hat{\underline{u}}_M, \quad \hat{\underline{u}}_{Z2} = \hat{\underline{u}}_2 - \hat{\underline{u}}_M \quad \text{und} \quad \hat{\underline{u}}_{Z3} = \hat{\underline{u}}_3 - \hat{\underline{u}}_M \tag{2.16}$$

Bei unsymmetrischer Belastung verschiebt sich infolge der ungleichen Verbraucherphasenspannungen das Potenzial des Verbrauchersternpunktes gegenüber dem Sternpunkt des Generators, d.h. $\hat{u}_m \neq 0$. Mit der Knotengleichung und den Strom-/Spannungsbeziehungen für die Impedanzen folgt

$$\frac{\hat{\underline{u}}_{Z1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\hat{\underline{u}}_{Z2}}{\underline{Z}_2} + \frac{\hat{\underline{u}}_{Z3}}{\underline{Z}_3} = \frac{\hat{\underline{u}}_1 - \hat{\underline{u}}_M}{\underline{Z}_1} + \frac{\hat{\underline{u}}_2 - \hat{\underline{u}}_M}{\underline{Z}_2} + \frac{\hat{\underline{u}}_3 - \hat{\underline{u}}_M}{\underline{Z}_3} = 0 \tag{2.17}$$

Nach Auflösen der Gleichungen resultiert mit dem Zusammenhang $\underline{Y}_i = 1/\underline{Z}_i$ die Spannung für die Sternpunktverschiebung

$$\underline{\hat{u}}_M = \frac{\underline{\hat{u}}_1\underline{Y}_1 + \underline{\hat{u}}_2\underline{Y}_2 + \underline{\hat{u}}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \tag{2.18}$$

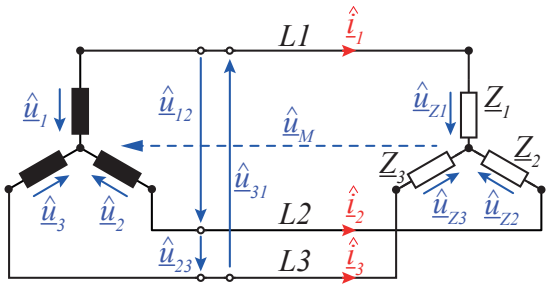


Figure 2.4: a) Verbraucher in Sternschaltung an einem 3-phasigen Spannungssystem in Sternschaltung verbunden mit 3 Leitern (Dreileitersystem).

Sternschaltung mit / ohne Sternpunktleiter

Wie oben bereits erläutert sind im Fall eines Dreiphasensystems mit ausgeführtem Neutralleiter (d.h. einem Vierleitersystem) neben den Aussenleiterspannungen auch die Strangspannungen des Verbrauchers eingeprägt. Für diese gilt

$$U_{Z1} = U_{Z2} = U_{Z3} = U_Z = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \tag{2.19}$$

Mit den Spannungen folgt für die Leistung im Verbraucher

$$P = U_Z(I_{Z1}\cos\varphi_1 + I_{Z2}\cos\varphi_2 + I_{Z3}\cos\varphi_3) \tag{2.20}$$

Wird der Neutralleiter weggelassen, so sind nur die Aussenleiterspannungen des Verbrauchers eingeprägt. Das Potenzial des Sternpunkts $\underline{\hat{u}}_M$ (wie vorher berechnet) stellt sich dabei so ein, dass auch bei unsymmetrischen Verbraucherimpedanzen die Knotengleichung

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \tag{2.21}$$

immer erfüllt ist. Für die Leistung im Verbraucher gilt dabei

$$P = U_{Z1}I_{Z1}\cos\varphi_1 + U_{Z2}I_{Z2}\cos\varphi_2 + U_{Z3}I_{Z3}\cos\varphi_3 \tag{2.22}$$

wobei sich die einzelnen Strangspannungen für den Verbraucher aus den Strangspannungen der Quellen und der Spannung für die Sternpunktverschiebung über die Maschengleichungen (2.16) ergeben.

Bei symmetrischer Belastung gilt in beiden Fällen (d.h. mit und ohne Neutralleiter) für die Leistung

$$P = 3U_Z I_Z\cos\varphi = \sqrt{3}U_L I_L\cos\varphi \tag{2.23}$$

da ja in diesem Fall $\underline{\hat{u}}_M = 0$ ist.

Drei-/Vierleitersystem - Beispiel

Im Folgenden wird beispielhaft der Betrieb von drei Heizwiderständen mit den unterschiedlichen Werten $R_1 = 1k\Omega, R_2 = 0.75k\Omega$ und $R_3 = 0.5k\Omega$ an dem Drehstromnetz mit der Leiter-Neutral-Spannung (Strangspannung der Quelle) $\hat{u} = \sqrt{2}\cdot 230\,\mathrm{V}$ ($= \hat{u}_Z$ bei Sternschaltung mit Neutral-/Sternpunktleiter) untersucht. Dabei werden die Leistungen in den Widerständen für die Fälle mit und ohne Sternpunktleiter untersucht.

(a) (b)

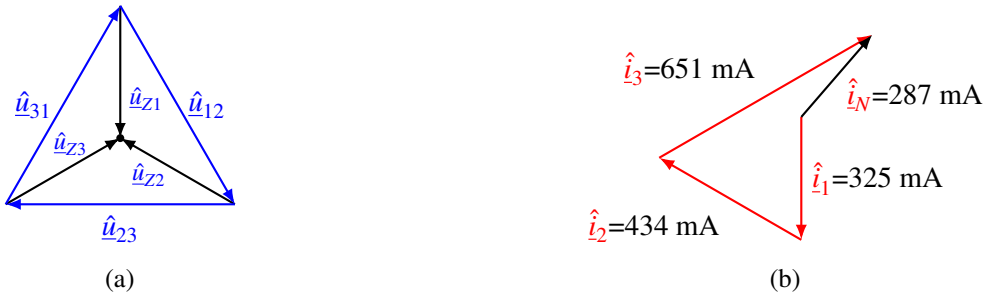
Figure 2.5: Gegenüberstellung des Zeigerdiagramms für die Vierleiterschaltung in Abbildung 2.3a mit Neutralleiter in a) und der Dreileiterschaltung in Abbildung 2.4 ohne Neutralleiter in b).

Mit angeschlossenem Sternpunktleiter N haben die Spannungen an den Verbraucherphasen alle die gleiche Amplitude ($U_Z = U$) – siehe Abbildung 2.6a. Damit ergibt sich die Leistung aus

$$\begin{aligned} P &= \frac{U_Z^2}{R_1} + \frac{U_Z^2}{R_2} + \frac{U_Z^2}{R_3} = \frac{(230\,\mathrm{V})^2}{1000\Omega} + \frac{(230\,\mathrm{V})^2}{750\Omega} + \frac{(230\,\mathrm{V})^2}{500\Omega} \\ &= 52.9\,\mathrm{W} + 70.5\,\mathrm{W} + 105.8\,\mathrm{W} = 229.2\,\mathrm{W} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Der resultierende Strom im Neutralleiter folgt durch die geometrische Addition der drei Phasenströme (Abbildung 2.6b) bzw. aus der Knotengleichung ($R_2 = {}^3\!/_4 R_1$ und $R_3 = {}^1\!/_2 R_1$)

$$\begin{aligned} \hat{\underline{i}}_N &= \hat{\underline{i}}_1 + \hat{\underline{i}}_2 + \hat{\underline{i}}_3 = \frac{\hat{\underline{u}}_1}{R_1} + \frac{\hat{\underline{u}}_2}{R_2} + \frac{\hat{\underline{u}}_3}{R_3} \\ &= \frac{\hat{u}}{R_1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3/4} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{1/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{3}} \right) \\ &= \frac{\hat{u}}{R_1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-2 + \mathrm{j}\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= 0.287\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \end{aligned} \tag{2.25}$$



(a) (b)

Figure 2.6: In a) Zeigerdiagramm der Spannungen und in b) der Ströme des Systems mit Neutralleiter (Vierleitersystem).

Ohne Sternpunktleiter N sind die Spannungen an den Verbraucherphasen unterschiedlich und es resultiert aufgrund der unsymmetrischen Belastung mit Gleichung (2.18) die Sternpunktspannung

$$\hat{\underline{u}}_M = 230\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{R_3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{3}}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} V = (43{,}3 + \mathrm{j}50)\,\mathrm{V} \tag{2.26}$$

Mit der Sternpunktspannung ergeben sich unmittelbar aus den Maschengleichungen die Verbraucherspan-

nungen

$$\begin{aligned} \underline{\hat{u}}_{Z1} &= \underline{\hat{u}}_1 - \underline{\hat{u}}_M & & U_{Z1} = \frac{|\underline{\hat{u}}_{Z1}|}{\sqrt{2}} = 267.1\,\mathrm{V} \\ \underline{\hat{u}}_{Z2} &= \underline{\hat{u}}_2 - \underline{\hat{u}}_M & \rightarrow\ & U_{Z2} = \frac{|\underline{\hat{u}}_{Z2}|}{\sqrt{2}} = 243.2\,\mathrm{V} \\ \underline{\hat{u}}_{Z3} &= \underline{\hat{u}}_3 - \underline{\hat{u}}_M & & U_{Z3} = \frac{|\underline{\hat{u}}_{Z3}|}{\sqrt{2}} = 186.4\,\mathrm{V} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Mit den Spannungen folgt die Gesamtleistung P für den Verbraucher

$$\begin{aligned} P &= \frac{U_{Z1}^2}{R_1} + \frac{U_{Z2}^2}{R_2} + \frac{U_{Z3}^2}{R_3} = \frac{(267.1\,\mathrm{V})^2}{1000\Omega} + \frac{(243.2\,\mathrm{V})^2}{750\Omega} + \frac{(186.4\,\mathrm{V})^2}{500\Omega} \\ &= 71.4\,\mathrm{W} + 78.9\,\mathrm{W} + 69.5\,\mathrm{W} = 219.8\,\mathrm{W} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Die Leistungswerte für die einzelnen Widerstände unterscheiden sich dabei zum Teil erheblich von den Werten für den Betrieb mit Sternpunktleiter (siehe Gleichung (2.24)).

Bei Sternschaltungen ohne Neutralleiter sind die Spannungen an den einzelnen Verbrauchern abhängig von den Impedanzen aller drei Verbraucher. Sie können dabei im Allgemeinen grösser oder kleiner sein als mit angeschlossenem Sternpunkt.

Ein Betrieb ohne Sternpunktleiter erfolgt dabei in der Praxis meist nur mit symmetrischer Belastung.

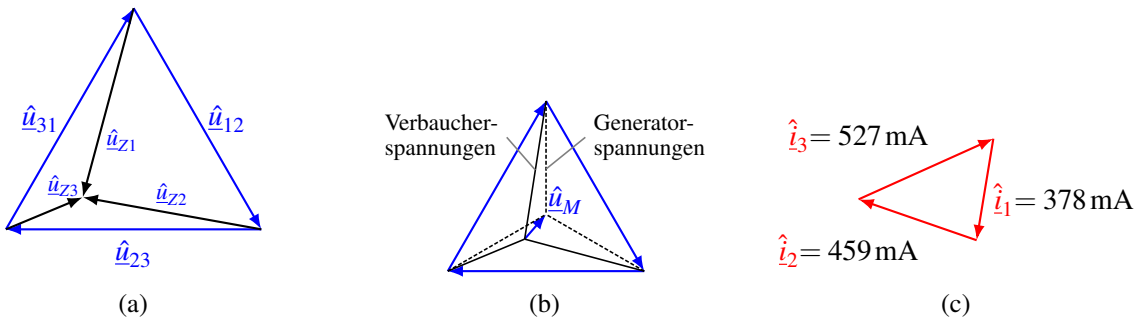


Figure 2.7: In a) Zeigerdiagramm der Spannungen und in c) der Ströme des Systems ohne Neutralleiter (Dreileitersystem). In b) sind die Zeigerdiagramme für das dreiphasige Quellensystem (Generatorspannungen) und für die dreiphasige Last (Verbraucherspannungen) für das System ohne Neutralleiter dargestellt. Dort ist auch direkt die Spannung $\underline{\hat{u}}_M$ für die Sternpunktverschiebung ersichtlich.

2.1.4 Dreieckschaltung eines Verbrauchers

Die Dreieckschaltung eines Verbrauchers oder von Quellen resultiert aus der Überlegung, dass keine Störung auftritt, wenn ein Strang jeweils die Zuleitung eines zweiten Strangs mitbenutzt. Dies ist in den beiden linken Diagrammen in Abbildung 2.8a dargestellt. Da für symmetrische dreiphasige Strangspannungen gilt, dass die Differenzspannung verschwindet, d.h.

$$\Delta u = u_a + u_b + u_c = 0 \tag{2.29}$$

können die verbleibenden Zuleitungen vereinigt werden, ohne dass ein Kreisstrom auftritt. Dies ist in der rechten Schaltung in Abbildung 2.8a dargestellt, wo eine Dreieckschaltung des Verbrauchers abgebildet ist.

In Abbildung 2.8b ist der Zeitverlauf der Aussenleiterspannungen und der Sternspannungen (Leiter-Neutralleiter-Spannung) gegeben. Das grau hinterlegte Grid für den Winkel ist in Winkelschritten von $\pi/6$ unterteilt. Der Effektivwert der Sternspannung ist U_{St} und dient im Bild als Bezugswert für die anderen Grössen. In Abbildung 2.8b sind beispielhaft die Sternspannungen gleich

$$u_1(t) = \sqrt{2}U_{st}\cos(\omega t) \tag{2.30}$$

$$u_2(t) = \sqrt{2}U_{st}\cos(\omega t - 2\pi/3) \tag{2.31}$$

$$u_3(t) = \sqrt{2}U_{st}\cos(\omega t - 4\pi/3) \tag{2.32}$$

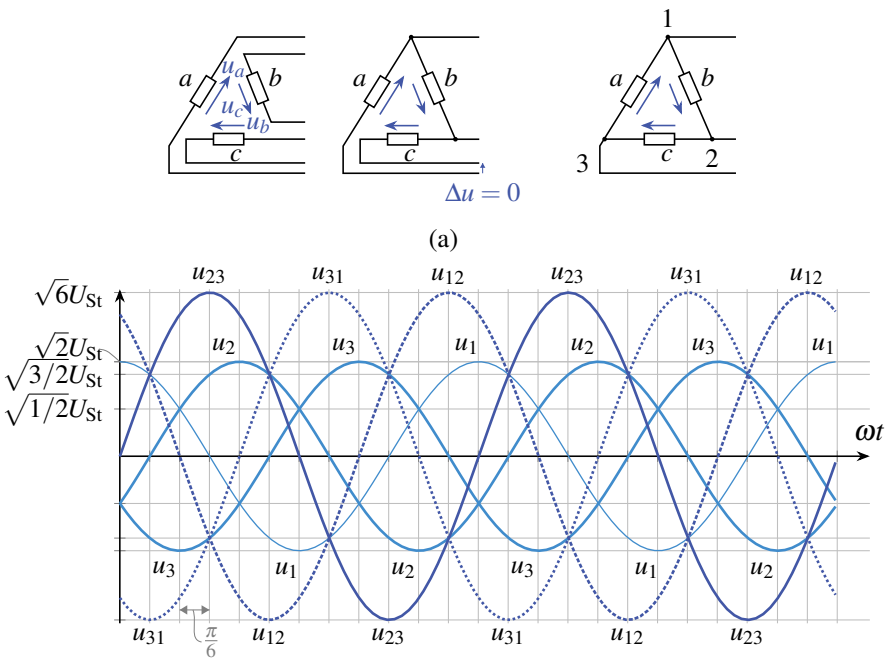


Figure 2.8: a) Schrittweise Verschaltung einer dreiphasigen Last zu einer Dreieckschaltung. Im ersten Schritt werden die Zuleitungen zusammengelegt und im zweiten Schritt aufgrund von $\Delta u = 0$ das Dreieck geschlossen. b) Zeitliche Verläufe der Aussenleiter- und der Leiter-Neutralleiter-Spannungen.

Leistungsberechnung bei Dreieckschaltung

Werden die 3 sinusförmigen Spannungen von Abschnitt 2.1.1 und die Last in Dreieck geschaltet, so resultiert die Schaltung in Abbildung 2.9a. Die Spannungen an den Verbraucherphasen sind dabei gleich den Aussenleiterspannungen. Für die Ströme in den Verbrauchersträngen folgt damit

$$\hat{\underline{i}}_{Z1} = \frac{\hat{\underline{u}}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{\hat{u}_L}{\underline{Z}_1} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad \hat{\underline{i}}_{Z2} = \frac{\hat{\underline{u}}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{\hat{u}_L}{\underline{Z}_2} e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} \tag{2.33}$$

$$\hat{\underline{i}}_{Z3} = \frac{\hat{\underline{u}}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{\hat{u}_L}{\underline{Z}_3} e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)} \tag{2.34}$$

Die aufgenommene Gesamtleistung P des Verbrauchers ist damit gleich

$$P = U_L(I_{Z1}\cos\varphi_1 + I_{Z2}\cos\varphi_2 + I_{Z3}\cos\varphi_3) \tag{2.35}$$

Für symmetrische Verbraucher sind die Ströme gleich und es gilt vereinfachend $P = 3U_L I_Z \cos\varphi$.

Mit den Strömen in den Verbraucherimpedanzen folgen aus der jeweiligen Knotengleichung direkt die Aussenleiterströme – siehe Abbildung 2.9a.

$$\hat{\underline{i}}_1 = \hat{\underline{i}}_{Z1} - \hat{\underline{i}}_{Z3}, \hat{\underline{i}}_2 = \hat{\underline{i}}_{Z2} - \hat{\underline{i}}_{Z1} \text{ und } \hat{\underline{i}}_3 = \hat{\underline{i}}_{Z3} - \hat{\underline{i}}_{Z2} \tag{2.36}$$

Im Folgenden wird die Verbraucherleistung bei Stern- und Dreieckschaltung der Last verglichen. Dabei sind zwei Verbraucher mit jeweils den gleichen Impedanzen $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = R$ einmal in Stern und einmal in Dreieck an das gleiche Drehstromnetz (Abbildung 2.9b) angeschlossen.

Die Gesamtleistung P_Δ bei Dreieckschaltung ist

$$P_\Delta = 3\frac{U_L^2}{R} \tag{2.37}$$

Die Gesamtleistung P_Y bei Sternschaltung ist bei gleichem Widerstandswert um den Faktor 3 kleiner

$$P_Y = 3\frac{(U_L/\sqrt{3})^2}{R} = \frac{U_L^2}{R} = \frac{P_\Delta}{3} \tag{2.38}$$

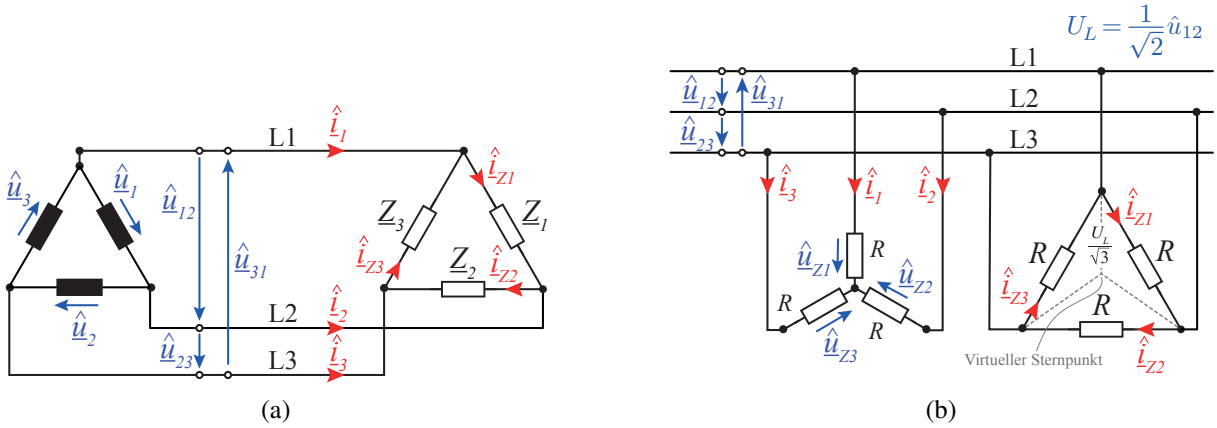


Figure 2.9: a) Verbraucher in Dreieckschaltung an einem 3-phasigen Spannungssystem in Dreieckschaltung. b) Vergleich der aufgenommenen Leistung bei Stern- und Dreieckschaltung (U_L Effektivwert der Aussenleiterspannung)

Alternativ können die 3 sinusförmigen Spannungen von Abschnitt 2.1.1 weiterhin in Stern geschaltet werden und nur die Last wird in Dreieck geschaltet. Damit resultiert die Schaltung in Abbildung 2.10a. Die Spannungen an den Verbraucherphasen sind dabei gleich den Aussenleiterspannungen, die sich aus den Zusammenhängen im Abschnitt 2.1.1 ergeben. Für die Ströme folgt damit

$$\hat{\underline{i}}_{Z1} = \frac{\hat{\underline{u}}_{12}}{\underline{Z}_1} = \frac{\hat{u}_L}{\underline{Z}_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}} \tag{2.39}$$

$$\hat{\underline{i}}_{Z2} = \frac{\hat{\underline{u}}_{23}}{\underline{Z}_2} = \frac{\hat{u}_L}{\underline{Z}_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi} \tag{2.40}$$

$$\hat{\underline{i}}_{Z3} = \frac{\hat{\underline{u}}_{31}}{\underline{Z}_3} = \frac{\hat{u}_L}{\underline{Z}_3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}} \tag{2.41}$$

Die aufgenommene Gesamtleistung P des Verbrauchers kann wiederum mit den gezeigten Zusammenhängen berechnet werden, nur dass der Wert der Spannung $U_L = \sqrt{3}U_{St}$ ist und die Ströme/Spannungen an den einzelnen Verbraucherphasen jeweils um $\pi/6$ gegenüber dem vorherigen Fall gedreht sind.

In Abbildung 2.10b sind die Ströme in den Leitern und in den Verbrauchersträngen für die beiden Fälle, dass die Quellen in Dreieck oder in Stern geschaltet ist, dargestellt. Bei der Sternschaltung der Quellen ist die Aussenleiterspannung und damit die Ströme in den Verbraucherphasen um $\sqrt{3}$ grösser als bei der Dreieckschaltung der Quellen. Weiterhin sind die Zeiger jeweils um $\pi/6$ vorgedreht.

In Abbildung 2.11a ist noch einmal ein Verbraucher in Dreieckschaltung dargestellt, der von einem symmetrischen Spannungssystem mit der Aussenleiterspannung U_L gespiesen wird. Für einen unsymmetrischen Verbraucher sind die Ströme durch die Impedanzen unterschiedlich, so wie dies beispielhaft in Abbildung 2.11b dargestellt ist.

Mit den Strömen durch die Impedanzen des Verbrauchers folgen unmittelbar die Aussenleiterströme

$$\hat{\underline{i}}_1 = \hat{\underline{i}}_{Z1} - \hat{\underline{i}}_{Z3} \qquad \hat{\underline{i}}_2 = \hat{\underline{i}}_{Z2} - \hat{\underline{i}}_{Z1} \qquad \hat{\underline{i}}_3 = \hat{\underline{i}}_{Z3} - \hat{\underline{i}}_{Z2} \tag{2.42}$$

Diese Zusammenhänge sind in dem Zeigerdiagramm in Abbildung 2.11c dargestellt. Aus der Knotenregel für die in Abbildung 2.11a angedeutete strichlierte Hüllfläche folgt unmittelbar

$$\hat{\underline{i}}_1 + \hat{\underline{i}}_2 + \hat{\underline{i}}_3 = 0 \tag{2.43}$$

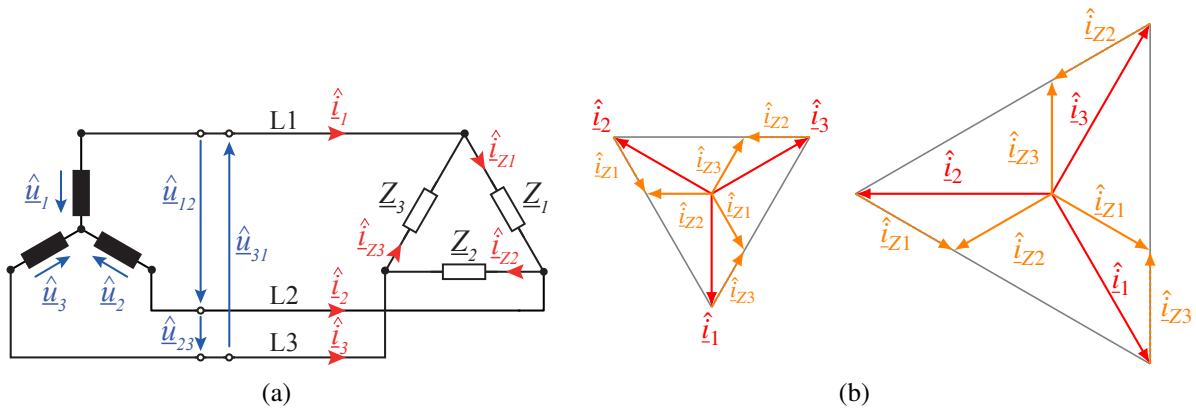


Figure 2.10: a) Verbraucher in Dreieckschaltung an einem 3-phasigen Spannungssystem in Sternschaltung. b) Vergleich der Ströme für den Fall, dass die Quellenspannungen in Dreieck (links) oder in Stern (rechts) geschaltet werden.

Für symmetrische Verbraucher mit $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$ folgt $I_{Z1} = I_{Z2} = I_{Z3}$ und $I_L = \sqrt{3} I_Z$. In diesem Fall kann die aufgenommene Gesamtleistung wie folgt allgemein berechnet werden

$$P = 3 U_Z I_Z \cos\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi \tag{2.44}$$

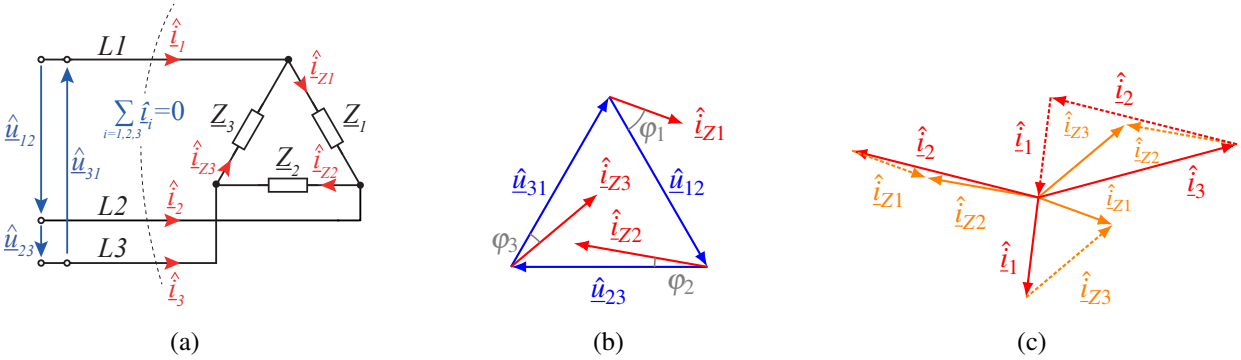


Figure 2.11: a) Verbraucher in Dreieckschaltung. b) Zeigerdiagramm der Aussenleiterspannungen und der Strang-/Verbraucherströme. c) Zeigerdiagramm der Strangströme und der Aussenleiterströme auf Basis der Gleichung (2.42).

Ergänzung: Asynchronmaschine – Stern-Dreieck Anlauf

Aus der Ortskurve des Ständerstromes von Asynchronmaschinen (ASM) bzw. dem Ossanna-Kreis von Abschnitt 1.7.3 ist ersichtlich, dass der Anlaufstrom (Schlupf $s = 1$) einer ASM relativ hoch ist. Wird eine stillstehende ASM an die volle Netzspannung geschaltet, fliesst nach Abklingen des transienten Einschaltvorganges bei noch stillstehender Maschine der 4- bis 7-fache Nennstrom. Die hohe Strombelastung kann zu Spannungseinbrüchen des Netzes und zu Störungen führen. Am öffentlichen Versorgungsnetz dürfen daher nur ASM bis zu einigen kW Leistung direkt eingeschaltet werden. Für grössere Maschinen sind Massnahmen zur Absenkung des Einschaltstromes, wie z.B. eine Stern-Dreieckschaltung, vorzusehen.

Bei einer Stern-Dreieckschaltung wird die ASM zunächst mit der Ständerwicklung in Sternschaltung bis zur Drehzahl n_Y (Abbildung 2.12b) angefahren und nach dem Hochlauf wird die Ständerwicklung zur Dreieckschaltung umgeschaltet. Die Drehzahl erhöht sich dann im betrachteten Beispiel von n_Y bis auf n_Δ. Gegenüber dem Normalbetrieb (Dreieckschaltung) beträgt die Strangspannung bei Sternschaltung nur das $1/\sqrt{3}$-fache des Nennwertes. Damit sinkt das Anzugsmoment auf $1/3$ des Betrages bei Dreieckschaltung. Gleichzeitig sinkt auch der Anlaufstrom in der Zuleitung auf $1/3$ des Normalwertes.

Eine Reduktion des Anlaufstromes mittels einer Stern-Dreieckschaltung ist allerdings nur möglich, wenn das Anlaufmoment der Last nicht zu gross ist, wie z.B. bei Pumpen, da das Anlaufmoment der Maschine in Sternschaltung deutlich reduziert ist. Dies ist links in Abbildung 2.12b für $n = 0$ erkennbar.

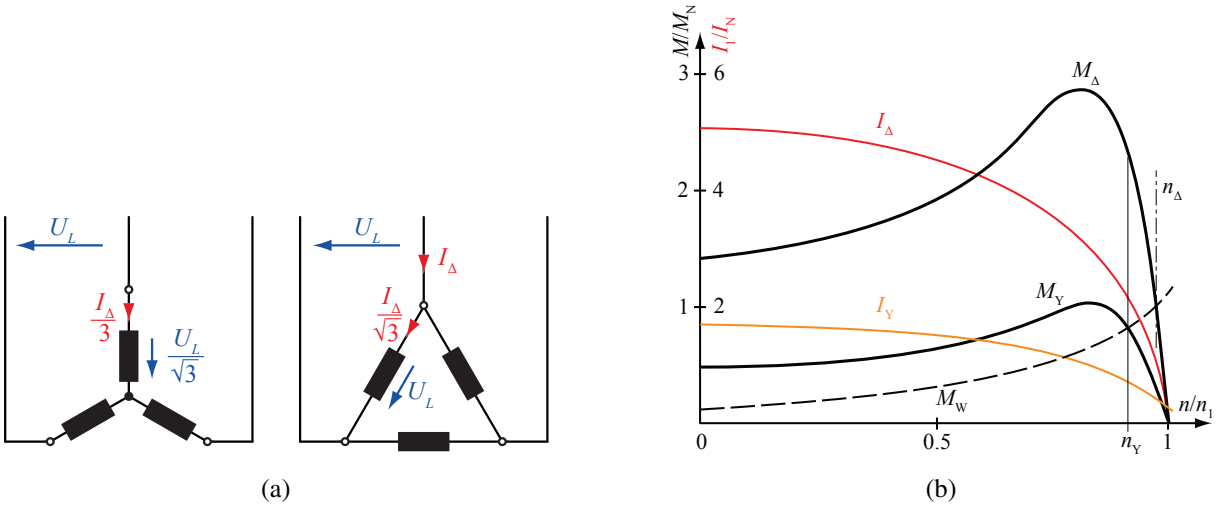


Figure 2.12: a) Stern- und Dreieckschaltung einer Asynchronmaschine. b) Strom- & Momentenverlauf M bei Stern-Dreieckanlauf: n_Y ist im betrachteten Beispiel die Nennbetriebsdrehzahl bei Sternschaltung und n_Δ die Nennbetriebsdrehzahl bei Dreieckschaltung. Die strichlierte Linie stellt den Verlauf des Lastmomentes M_W dar.

2.1.5 Eigenschaften des Drehstromsystems

Bei symmetrischer Belastung ist die Verbraucherleistung für eine Drei-/Vierleiter-Sternschaltung oder eine Dreieckschaltung gleich $P = 3U_Z I_Z \cos\varphi$. Dabei ist U_Z wiederum die Strangspannung und I_Z der Strangstrom des Verbrauchers.

Aufgrund der Zusammenhänge zwischen den Leiter- und Stranggrössen in den Abbildungen 2.13a und 2.13b kann für symmetrische Verbraucher die Gesamtleistung für Stern- und Dreieckschaltung durch dieselbe Beziehung von Leitergrössen ermittelt werden

$$P = 3\frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\varphi = 3U_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi \tag{2.45}$$

Für den Winkel φ ist die Phasenverschiebung von Strom und Spannung eines Stranges (einer Verbraucherphase) zu nehmen.

Wie man folgender Gleichung entnehmen kann, ist die Summe der Augenblicksleistungen der drei symmetrischen Verbraucherphasen im symmetrischen Drehstromsystem zeitlich konstant (Abbildung 2.13c) (Phasenverschiebung von Strangstrom und Strangspannung $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$)

$$\begin{aligned} p(t) &= \hat{u}_Z \hat{i}_Z \begin{bmatrix} \sin\omega t & \sin(\omega t + \varphi) + \\ +\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) + \\ +\sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) & \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} + \varphi\right) \end{bmatrix} \\ &= U_Z I_Z \left[3\cos\varphi - \underbrace{\cos(2\omega t + \varphi) - \cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} + \varphi\right) - \cos\left(2\omega t - \frac{8\pi}{3} + \varphi\right)}_{0} \right] \end{aligned} \tag{2.46}$$

Daraus folgt, dass ein Drehstromsystem an einen symmetrischen Verbraucher eine zeitlich konstante Gesamt-Augenblicksleistung abgibt.

Aus Gleichung (2.46) folgt, dass die mit der doppelten Frequenz schwankenden Anteile der Phasenleistung sich stets zu Null ergänzen. Damit ergibt sich die konstante Gesamtleistung für das dreiphasige

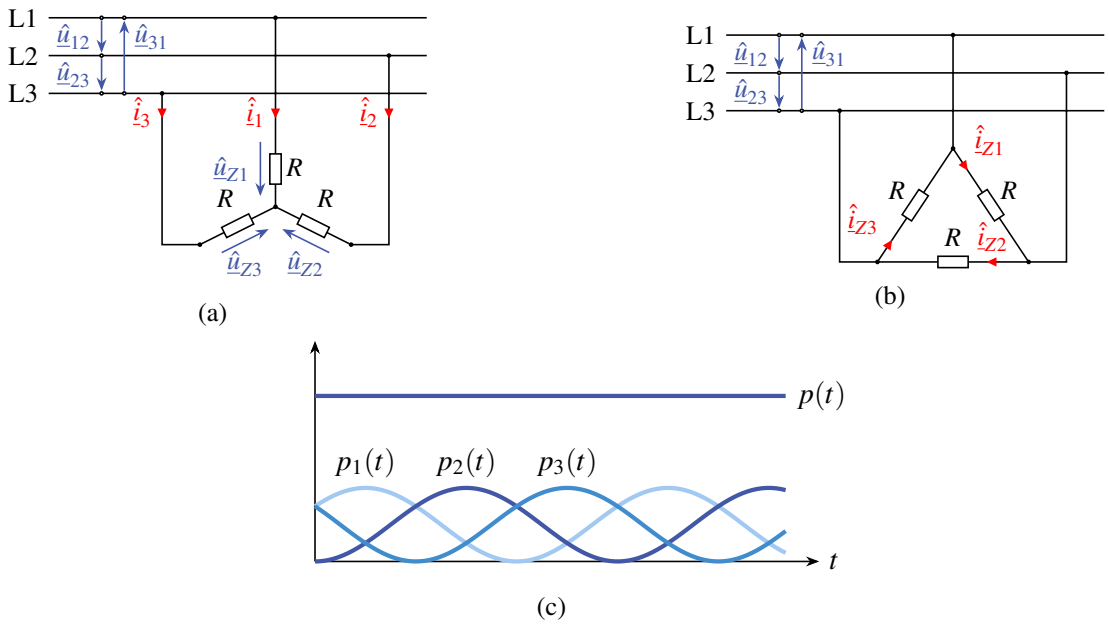


Figure 2.13: a) Sternschaltung mit: Aussenleiterströme $I_L = I_Z$ und Aussenleiterspannung $U_L = \sqrt{3}U_Z$ b) Dreieckschaltung mit: Aussenleiterströme $I_L = \sqrt{3}I_Z$ und Aussenleiterspannung $U_L = U_Z$ c) Zeitlicher Verlauf der Augenblicksleistungen der 3 Phasen und zeitlich konstante Gesamtleistung $p(t)$.

System

$$P = 3U_Z I_Z \cos\varphi \tag{2.47}$$

Falls der Verbraucher nicht rein ohmsch ist, so pendelt Blindenergie zwischen den einzelnen Verbraucherphasen und dem Generator hin und her. Dabei gleichen sich jedoch die vom Generator an einen Teil der Verbraucherphasen gelieferte Blindenergie und die im gleichen Zeitpunkt von dem anderen Teil der Verbraucherphasen zurückgespiesene Blindenergie aus, d.h. diese haben jeweils in Summe den gleichen Augenblickswert. Trotzdem belastet der mit der Blindleistung einhergehende Blindstrom das Netz/die Leitungen.

Wie im Fall von einphasigen Verbrauchern, kann die Blindleistung auch für dreiphasige Verbraucher kompensiert werden. Für einen in Stern geschalteten ohmsch-induktiven Verbraucher werden z.B. drei in Stern geschaltete Kondensatoren für die Blindleistungskompensation benötigt – siehe Abbildung 2.14a. Für eine vollständige Kompensation der Blindleistung muss die kapazitive Kompensations-Blindleistung $Q_{C,Y}$ betragsmässig gleich der zu kompensierenden induktiven Blindleistung $Q_{V,L}$ des Verbrauchers sein, d.h. es gilt: $Q_{C,Y} + Q_{V,L} = 0$. Mit dem allgemeinen Zusammenhang für die Blindleistung von Kondensatoren $Q_C = -\omega C U^2$ folgt für den Kapazitätswert des Kompensationskondensators in Sternschaltung für eine symmetrische, ohmsch-induktive Last $\underline{Z}$

$$C_Y = \frac{Q_{L,Strang}}{\omega U_Y^2} = \frac{1/3 Q_{V,L}}{\omega \left(U_L/\sqrt{3}\right)^2} = \frac{Q_{V,L}}{\omega U_L^2} \tag{2.48}$$

Sind sowohl die Last als auch die Kompensationskondensatoren in Stern geschaltet (siehe Abbildung 2.14a), so werden typischerweise zumindest die Sternpunkte der Last und des Kompensationsnetzwerkes miteinander verbunden. Im Fall von unsymmetrischen Lasten ist dies zwingend notwendig, wenn vermieden werden soll, dass ein Blindstrom über die Netzleitungen fliesst, da sich in diesem Fall die Blindströme der drei Phasen nicht mehr gegenseitig aufheben.

Alternativ können die Kondensatoren auch im Dreieck geschaltet werden (Abbildung 2.14b), wobei die Spannung über den Kondensatoren gleich der Aussenleiterspannung U_L $(= \sqrt{3}U_{St})$ ist und der benötigte Kapazitätswert aufgrund der höheren Spannung auf $C_\Delta = 1/3 C_Y$ sinkt. Der Faktor $1/3$ ergibt sich, da die Energie es Kondensators proportional zum Quadrat der Spannung ist und damit der Faktor $1/\sqrt{3}$ zu $1/3$ wird.

(a) (b)

Figure 2.14: a) Kompensation der Blindleistung eines ohmsch-induktiven Verbrauchers mittels Kondensatoren in Sternschaltung. b) Kompensation der Blindleistung eines ohmsch-induktiven Verbrauchers mittels Kondensatoren in Dreieckschaltung.

2.1.6 Erzeugung 3-phasige Spannung

Im Folgenden wird noch die prinzipielle Erzeugung eines symmetrischen dreiphasigen Spannungssystems mit Hilfe von Generatoren betrachtet.

Ausgangspunkt ist der schematische Aufbau des Generators in Abbildung 2.15a, bei welchem das vom Läufer (Rotor) erzeugte Magnetfeld rotiert. Die Feldverteilung entlang des Luftspalts ist näherungsweise räumlich sinusförmig und rotiert mit der Zeit, so dass sich vom Stator aus betrachtet eine mit der Zeit fortschreitende sinusförmige Magnetfeldwelle darstellt. Deshalb werden diese Maschinen auch als Drehfeldmaschinen bezeichnet. Vor Betrachtung der Maschinen werden die Grundzüge der Drehfeldtheorie (mit Fokus auf eine Polpaarzahl p=1, d.h. einem dreiphasigen Wicklungssystem im Stator und einem magnetischen Nord- und Südpol des Läuferfeldes) untersucht.

Zu Beginn wird die Spannungsinduktion in einer Wicklung mit den Enden $U1$ und $U2$ durch einen rotierenden Läufer bzw. durch das rotierende Feld (Abbildung 2.15a) betrachtet. In Abbildung 2.15b ist der (abgerollte) Luftspalt entlang der Statoroberfläche/Luftspaltes als x-Achse mit dem räumlichen Winkel γ_{el} dargestellt. Die Wicklungsenden befinden sich bei $U1 : \gamma_{el} = 0$ und $U2 : \gamma_{el} = \pi$. Die magnetische Feldwelle ist gleich $B(t) = \hat{B}\sin(\gamma_{el} - \omega t)$, d.h. mit fortschreitender Zeit erhöht sich der (Dreh-)Winkel ωt. Damit kann der Fluss durch die Wicklung berechnet werden, wobei die Fläche A (Abbildung 2.15a) verwendet wird.

$$\Phi = l\int_0^{\pi} \hat{B}\sin(\gamma_{el} - \omega t)\frac{\pi r}{\pi}\mathrm{d}\gamma_{el} = 2\hat{B}\cos(\omega t)rl \tag{2.49}$$

Hinweis: Aufgrund von $\oiint \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = 0$ kann dabei die Integrationsfläche A beliebig gewählt werden, wobei hier die Fläche entlang des Luftspaltes gewählt wird, da ja hier die Verteilung des magnetischen Feldes bekannt/gegeben ist.

Mit dem Fluss Φ folgt die in der Wicklung mit N Windungen induzierte (Strang-)Spannung

$$u_{St} = N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -2N\hat{B}\omega\sin(\omega t)rl \tag{2.50}$$

Mit der Induktion einer sinusförmigen Spannung in einer Ständerwicklung, kann nun das Konzept für die Erzeugung eines 3-phasigen Spannungssystems mit drei um 120° gegeneinander elektrisch verschobenen Strangspannungen abgeleitet werden. Um die 120° elektrische Phasenverschiebung zu erhalten, ordnet man im Ständer drei gleiche, räumlich um γ_{el} = 120° versetzte Wicklungen mit den Enden $U1/U2$, $V1/V2$ und $W1/W2$ an – siehe Abbildung 2.16a/2.16b.

In Abbildung 2.16b sind die magnetische Feldwelle im Luftspalt und die Enden der drei Wicklungen entlang des abgerollten Luftspaltes dargestellt. Die Wicklungsenden sind jeweils um γ_{el} =120° räumlich zueinander verschoben.

In Abbildung 2.16c ist das idealisierte, verlustfreie elektrische Ersatzschaltbild des Generators in Abbildung 2.16a für eine Sternschaltung der Wicklungen gegeben. Dies entspricht einem dreiphasigen Spannungssystem in Sternschaltung.

Um eine Netzfrequenz bzw. eine sinusförmige Spannung mit einer Frequenz von 50Hz zu erhalten, muss der Rotor bei nur einem Polpaar (Abbildung 2.16a) mit $50\mathrm{s}^{-1}$, d.h. $3000\mathrm{min}^{-1}$, rotieren.

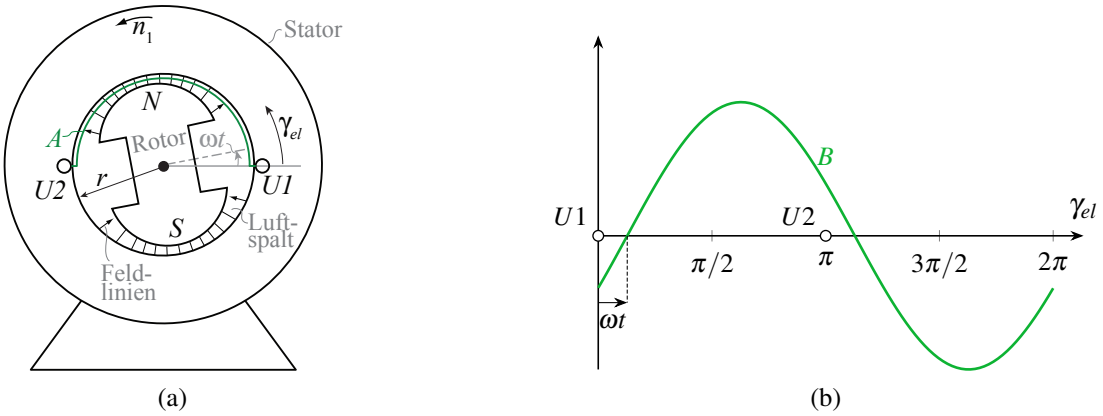


Figure 2.15: a) Erzeugung einer 1-phasigen sinusförmigen Spannung. Der betrachtete Generator hat die Länge l und eine Polpaarzahl von $p = 1$. b) Darstellung der sinusförmigen magnetischen Feldwelle im Luftspalt, der hier abgerollt entlang der x-Achse dargestellt ist.

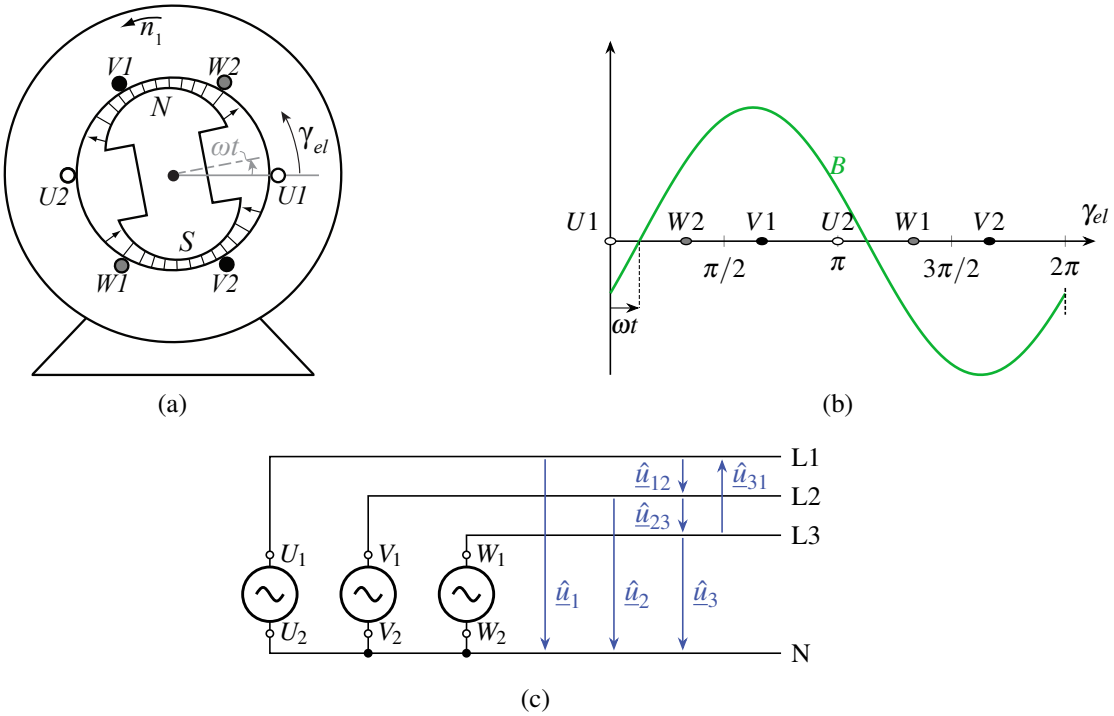


Figure 2.16: a) Generator für die Erzeugung einer 3-phasigen Spannung (Polpaarzahl $p = 1$). b) Magnetische Feldwelle im abgerollten Luftspalt. c) Elektrisches Ersatzschaltbild des 3-phasigen Generators in a) für den Fall, dass die 3 Wicklungen in Sternschaltung geschaltet sind.

Bei einem Generator mit 2 Polpaaren hat der Rotor 2 Nord- und 2 Südpole, d.h. die magnetische Feldwelle hat eine Periodenlänge von π anstatt von 2π wie bei einem Generator mit einem Polpaar. Um eine sinusförmige Spannung zu generieren, muss auch die Wicklungsanordnung im Stator so modifiziert werden, dass sich diese bereits nach dem Winkel π wiederholt, d.h. es gibt jeweils 2 U-, V- und W-Wicklungen. In diesen 2 Wicklungen wird eine sinusförmige Spannung mit der gleichen elektrischen Phasenlage induziert, so dass diese Wicklungen in Reihe oder parallel geschaltet werden können. Um eine Netzfrequenz von 50Hz zu erhalten, muss dabei der Rotor mit 2 Polpaaren (4-polig) nur mit 25s^{-1}, d.h. 1500min^{-1}, rotieren.

In realen Maschinen und Generatoren sind die Wicklungen normalerweise über den Ständerumfang zur Erhöhung der Ausnutzung verteilt, so wie dies in Abbildung 2.17 dargestellt ist. Die gleichfarbigen Leiter gehören jeweils zu einem Wicklungsstrang und die in den einzelnen Leitern induzierten Spannungen werden so in Reihe geschaltet, dass insgesamt sinusförmige Spannungen zwischen den Wicklungsenden

$U1$-$U2$, $V1$-$V2$ und $W1$-$W2$ anliegen, die jeweils um 120° elektrisch zueinander phasenverschoben sind.

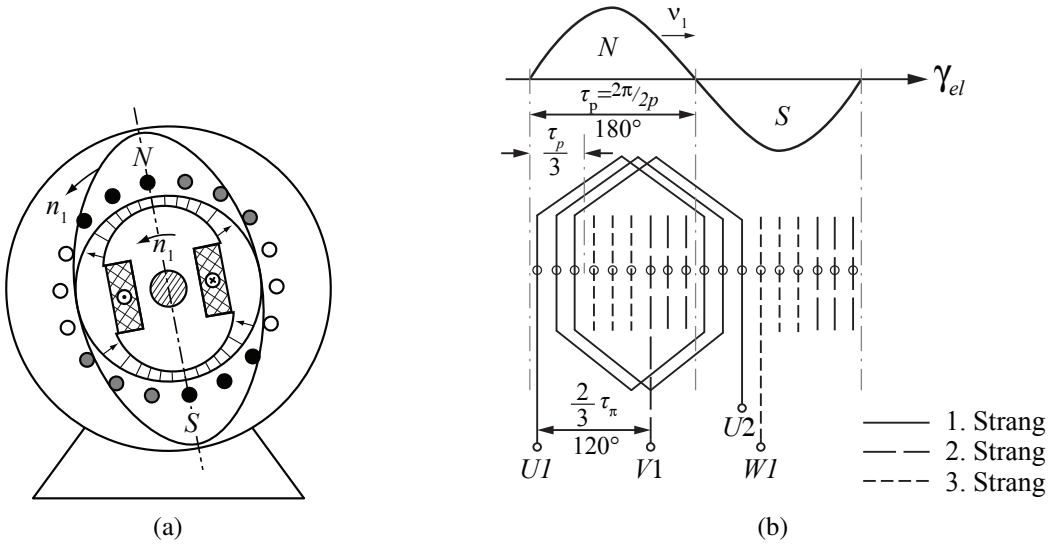


Figure 2.17: a) Prinzipieller Aufbau eines 3-phasigen Generators mit über dem Umfang verteilter Wicklung. b) Schematische Darstellung des Aufbaus der Drehstromwicklung.

2.1.7 Erzeugung Drehfeld

Im letzten Abschnitt wurde die Spannungsinduktion eines räumlich sinusförmig verteilten, rotierenden magnetischen Feldes in den Ständerwicklungen untersucht. Nun wird untersucht, was geschieht, wenn man an die Ständerwicklungen ein dreiphasiges Spannungssystem anschliesst bzw. durch die Ständerwicklungen ein dreiphasiger symmetrischer Strom fliesst. Im Folgenden wird angenommen, dass die drei je um $2\pi/3$ phasenverschobenen Strömen (Abbildung 2.18b)

$$i_1(t) = \hat{i}\cos\omega t, \quad i_2(t) = \hat{i}\cos(\omega t - 2\pi/3) \quad \text{und} \quad i_3(t) = \hat{i}\cos(\omega t - 4\pi/3) \tag{2.51}$$

durch die 3 Wicklungen/Spulen fliessen.

Das Feld im Inneren einer Spule kann dabei als näherungsweise homogen angenommen werden (Abbildung 2.18c) und mit der vektoriellen magnetischen Flussdichte $\vec{B}(\vec{r},t)$ beschrieben werden. Der Vektor zeigt dabei in Richtung der maximalen Feldstärke, welche für die Spule in Abbildung 2.18c senkrecht zur Spulenebene ist. Für Spule 1, für die das Feld proportional zum Strom $i_1(t)$ ist, folgt damit

$$\vec{B}_1(\vec{r},t) = \vec{B}_1(\vec{r})\cos(\omega t) \;\Rightarrow\; \vec{B}_1(\vec{r},t) \approx \vec{e}_x B_1(t) = \vec{e}_x \hat{B}\cos(\omega t) \tag{2.52}$$

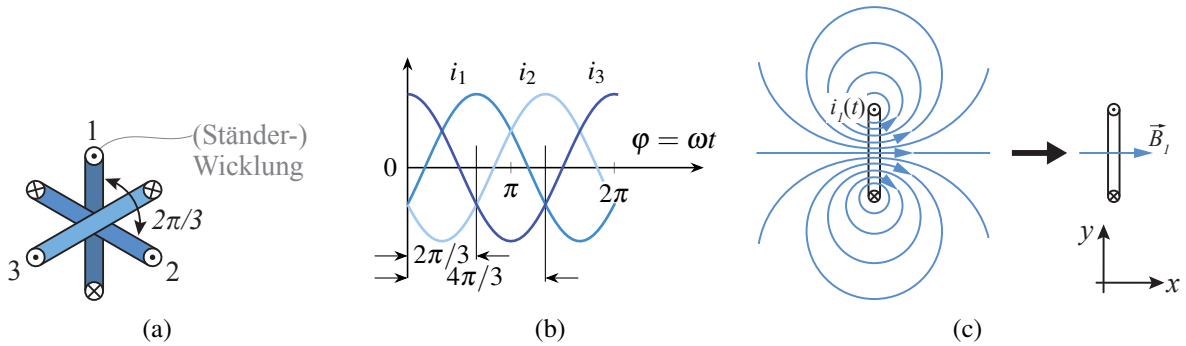


Figure 2.18: a) Schematische Darstellung der 3 räumlich je um =120° versetzten Statorwicklungen. b) Sinusförmiger Stromverlauf in den 3 Statorwicklungen, wobei die 3 Ströme jeweils um =120° elektrisch phasenverschoben sind. c) Prinzipielle Darstellung des Feldverlaufs in einer Statorwicklung.

Aufgrund der drei räumlich um 120° versetzten Ständerwicklungen setzt sich das gesamte Magnetfeld im Luftspalt zwischen dem Stator und dem Rotor aus den folgenden drei räumlich um $2\pi/3$ (=120°) versetzten Anteilen (Vektoren) zusammen (Abbildung 2.19a)

$$\vec{B}_1(\vec{r},t) = \vec{e}_x B_1(t) \tag{2.53a}$$

$$\vec{B}_2(\vec{r},t) = \left(-\vec{e}_x \cos\frac{\pi}{3} - \vec{e}_y \sin\frac{\pi}{3}\right) B_2(t) = -\frac{1}{2}\left(\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_y\right) B_2(t) \tag{2.53b}$$

$$\vec{B}_3(\vec{r},t) = \left(-\vec{e}_x \cos\frac{\pi}{3} + \vec{e}_y \sin\frac{\pi}{3}\right) B_3(t) = -\frac{1}{2}\left(\vec{e}_x - \sqrt{3}\vec{e}_y\right) B_3(t) \tag{2.53c}$$

Dabei ist die Amplitude des magnetischen Feldes und damit die Länge der Flussdichtevektoren proportional zum jeweiligen Strom in der Ständerwicklung. Für die in Gleichung (2.51) angenommenen sinusförmigen Ströme mit einer Phasenverschiebung von jeweils 120° folgt damit für den zeitlichen Verlauf der jeweiligen Flussdichteamplituden

$$B_1(t) = \hat{B}\cos(\omega t) \tag{2.54a}$$

$$B_2(t) = \hat{B}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\hat{B}\left(-\cos\omega t + \sqrt{3}\sin\omega t\right) \tag{2.54b}$$

$$B_3(t) = \hat{B}\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\hat{B}\left(-\cos\omega t - \sqrt{3}\sin\omega t\right) \tag{2.54c}$$

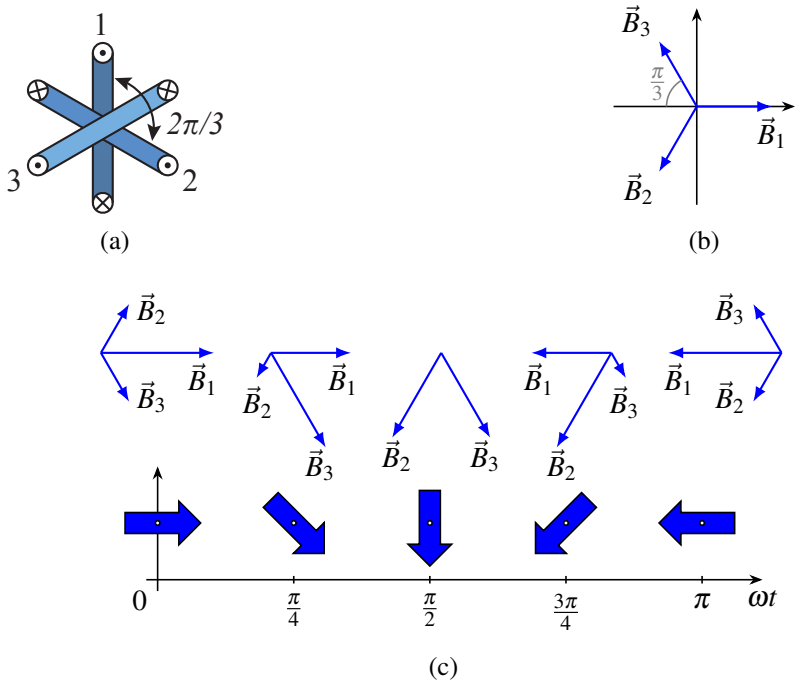


Figure 2.19: a) 3 räumlich um 120° versetzte Statorwicklungen (im Bild ist jeweils die positive Stromrichtung für die jeweilige Wicklung dargestellt). b) Vektoren für die magnetische Flussdichte der 3 räumlich um 120° versetzten Statorwicklungen. c) Schematische Darstellung der Vektoren für die Flussdichte zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Aus der vektoriellen Addition folgt der Vektor für die Gesamtflussdichte und man erkennt, das dieser Vektor mit der Zeit rotiert, d.h. ein Drehfeld bildet.

Setzt man die Amplituden (2.54) in die Vektoren (2.53) ein und überlagert (addiert) die drei magnetischen Teilfelder, so resultiert dies in einer mit konstanter Geschwindigkeit im Uhrzeigersinn rotierenden Flussdichte konstanter Amplitude, d.h. ein rotierendes Magnetfeld (Drehfeld) – siehe Abbildung 2.19c.

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_1(\vec{r},t) + \vec{B}_2(\vec{r},t) + \vec{B}_3(\vec{r},t) \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{3}{2}\hat{B}\left[\vec{e}_x\cos(\omega t) - \vec{e}_y\sin(\omega t)\right]} \tag{2.55}$$

Durch Vertauschung von zwei beliebigen Strängen (Wicklungen), d.h. z.B. bei Speisung von Ständerwicklung 2 mit Strom i_3 und Speisung von Ständerwicklung 3 mit i_2, kehrt sich die Drehrichtung des Gesamtfeldes um.

Somit kann durch Anlegen von drei um 120° phasenverschobenen Strömen an die drei räumlich um 120° versetzten Statorwicklungen ein räumlich rotierendes Magnetfeld, d.h. ein Drehfeld im Luftspalt erzeugt werden. Dieses Drehfeld wird z.B. in Synchron- und Asynchronmaschinen genutzt, um ein Drehmoment aufzubauen. Dadurch haben dreiphasige Systeme neben der Übertragung einer zeitlich konstanten Gesamtleistung den weiteren Vorteil der Erzeugung eines Drehfeldes, d.h. eines "'rotierenden Magnetfeldes"', welches insgesamt in ein konstantes Drehmoment resultiert.

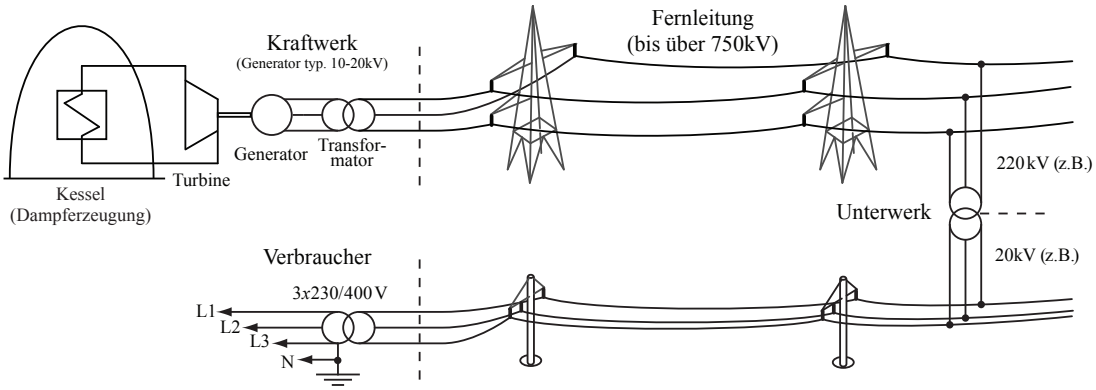
2.1.8 Energieübertragung mit Drehstromsystemen

Ein wichtiges Anwendungsgebiet für dreiphasige Systeme ist die Übertragung von elektrischer Energie. Dabei wird im Kraftwerk Primärenergie (hydraulisch, solar, thermisch, nuklear, etc.) mittels einer Turbine und eines Generators in elektrische Energie umgeformt, die dann zu den Verbrauchern übertragen werden muss. Aufgrund der konstanten Leistungsübertragung werden häufig 3-phasige Spannungssysteme genutzt, wobei verschiedene Spannungsniveaus (siehe Abbildung 2.20b) bei Netzfrequenzen von typisch 50/60Hz genutzt werden, um ein technisch / wirtschaftliches Optimum hinsichtlich Materialaufwand, Isolation und Effizienz (d.h. geringe Übertragungsverluste) zu erzielen. Die Kopplung der Spannungsebenen erfolgt dabei durch Transformatoren, die eine einfache Spannungsanpassung ermöglichen.

Dreiphasensysteme benötigen dabei einen geringeren Realisierungsaufwand als Einphasensysteme und erlauben zudem den einfachen Bau/Betrieb von elektrischen Motoren.

Die 1-phasigen Verbraucher werden dabei so auf die 3 Phasen verteilt, dass eine näherungsweise gleichmässige Lastverteilung auf die 3 Phasen erreicht wird.

(a)



(b)

Figure 2.20: a) Bild eines dreiphasigen Blocktransformators, der z.B. bei einem Kraftwerk die Generatorspannung von 18kV auf 400kV für die Energieübertragung hochtransformiert. Die Leistung beträgt 280MVA und der Transformator wird im Wasserkraftwerk Linthal eingesetzt. b) Vereinfachte Struktur eines elektrischen Energieübertragungsnetzwerks mit verschiedenen Spannungsebenen.

Drehstromsystem – Realisierungsaufwand

Im Folgenden soll kurz der Realisierungsaufwand für eine ein- oder dreiphasige Versorgung eines ohmschen Verbrauchers gegenüberstellt werden. Die an die Widerstandslast gelieferte mittlere Gesamtleistung soll dabei in allen Fällen gleich sein.

Im Fall der Speisung des Widerstands mit dem Wert $R = R_0$ mit dem einphasigen Wechselstrom $i(t) = \hat{i}\cos(\omega t)$ mit dem Effektivwert I muss die Doppelleitung in Abbildung 2.21a für den Effektivwert I $(= 1/\sqrt{2}\,\hat{i}\,)$ ausgelegt werden.

Spaltet man den Verbraucher in drei gleiche Widerstände mit dem Wert $R = 3R_0$ auf, so werden drei Zuleitungen, die jeweils für einen Strom von $I/3$ ausgelegt sind, und eine Rückleitung, die für den Strom I ausgelegt ist, benötigt (siehe Abbildung 2.21b). Insgesamt ist der gesamte benötigte Kupferquerschnitt gleich wie für den in Abbildung 2.21a dargestellten Fall.

Verschiebt man nun die Nullphasenwinkel der drei speisenden Ströme um jeweils 120° zueinander, so ist der Summenstrom gleich

$$\begin{aligned} i_N &= i_1 + i_2 + i_3 \\ &= \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i) + \hat{i}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi_i\right) + \hat{i}\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} + \varphi_i\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Da der Summenstrom verschwindet $i_N = 0$, kann der Rückleiter komplett entfallen – siehe Abbildung 2.21c mit $\varphi_i = 0$. Die drei Zuleitungen sind immer noch für einen Strom von $I/3$ auszulegen, d.h. der benötigte gesamte Kupferquerschnitt halbiert sich im Vergleich zu den Fällen in Abbildungen 2.21a und 2.21b bei gleicher übertragener Gesamtleistung. Dies ist ein entscheidender Vorteil der Energieübertragung mittels symmetrischer dreiphasiger Systeme. (Hinweis: Auch für ein 2-Phasensystem mit einer Phasenverschiebung von 90°, das für die Erzeugung eines Drehfeldes genutzt werde kann, ist der benötigte Kupferquerschnitt höher als bei einem 3-Phasensystem, da die Summe der beiden um 90° phasenverschobenen Ströme nicht gleich 0 ist.)

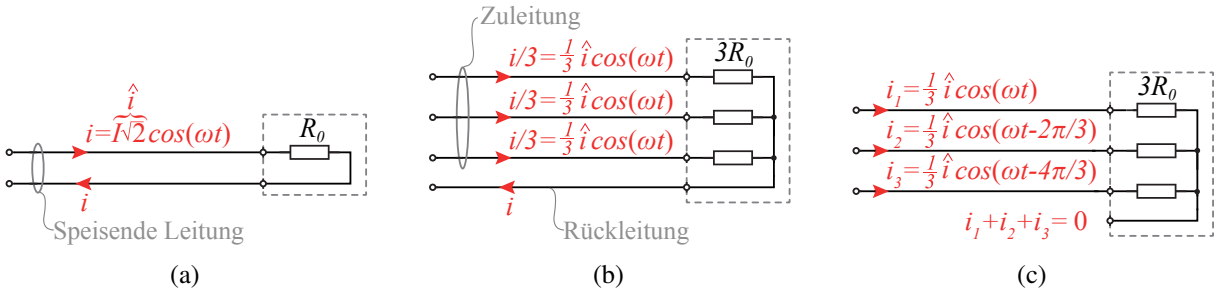


Figure 2.21: a) Speisung eines einphasigen Verbrauchers über 2 Zuleitungen. b) Aufspalten des Verbrauchers in 3 Widerstände, wobei die übertragene Gesamtleistung gleich bleibt. Der benötigte Kupferquerschnitt ist gleich zu Fall a). In c) erfolgt die Speisung über ein dreiphasiges symmetrisches System, so dass der Strom im Rückleiter verschwindet und dieser nicht mehr benötigt wird.

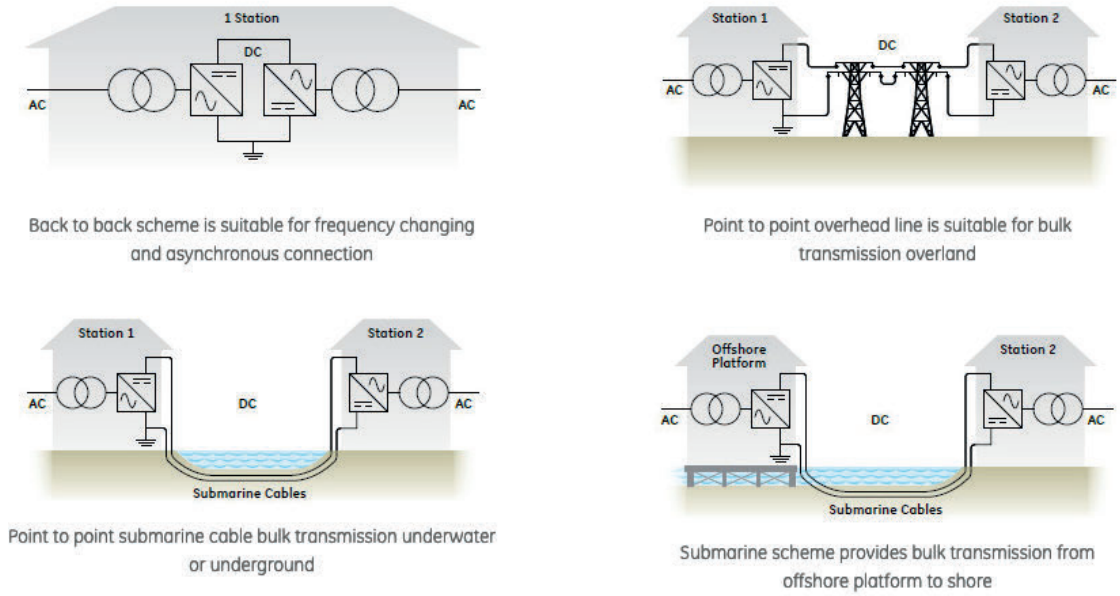
2.1.9 Drehstromsystem – Zusammenfassung

Spannung in Sternschaltung	$u_1(t) = \hat{u}_{St}\sin(\omega t)$ $\quad u_2(t) = \hat{u}_{St}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$ $\quad u_3(t) = \hat{u}_{St}\sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$
Spannungszeiger	$\underline{\hat{u}}_1 = \hat{u}_{St}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$ $\quad \underline{\hat{u}}_2 = \hat{u}_{St}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)}$ $\quad \underline{\hat{u}}_3 = \hat{u}_{St}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)}$
Aussenleiterspannung	$U_L = \sqrt{3}U_{St} = \sqrt{3}\frac{\hat{u}_{St}}{\sqrt{2}}$ $\quad$ um $\frac{\pi}{6}$ zur jeweiligen Sternspannung voreilend

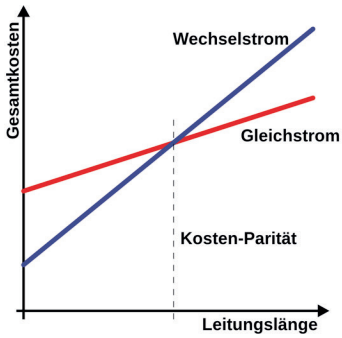
Verbraucherleistung allgemein: $P = U_{Z1}I_{Z1}\cos\varphi_1 + U_{Z2}I_{Z2}\cos\varphi_2 + U_{Z3}I_{Z3}\cos\varphi_3$		
Dreieckschaltung	**4-Leiter-System**	**3-Leiter-System**
$\boldsymbol{U_Z = U_L} = U_{Z1} = U_{Z2} = U_{Z3}$	$\boldsymbol{U_Z = U_L/\sqrt{3}} = U_{Z1} = U_{Z2} = U_{Z3}$	$\underline{\hat{u}}_{Zv} = \underline{\hat{u}}_v - \underline{\hat{u}}_M$
		$\underline{\hat{u}}_M = \frac{\underline{\hat{u}}_1\underline{Y}_1 + \underline{\hat{u}}_2\underline{Y}_2 + \underline{\hat{u}}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$ mit $\underline{Y}_v = \frac{1}{\underline{Z}_v}$
$I_{Zv} = \frac{U_L}{\lvert\underline{Z}_v\rvert}$ $\quad \underline{\hat{i}}_{Zv} = \frac{\underline{\hat{u}}_v}{\underline{Z}_v}$	$I_{Zv} = \frac{U_{St}}{\lvert\underline{Z}_v\rvert}$	$I_{Zv} = \frac{U_{Zv}}{\lvert\underline{Z}_v\rvert}$
$P = U_Z\left(I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2 + I_3\cos\varphi_3\right)$ (mit v = 1,2 oder 3)		
Symmetrische Last: $\underline{Z} = \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$ und $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \arctan\left(\Im\{\underline{Z}\}/\Re\{\underline{Z}\}\right)$		
		$\hat{u}_M = 0$
		$\boldsymbol{U_Z = U_L/\sqrt{3}} = U_{Z1} = U_{Z2} = U_{Z3}$
$\boldsymbol{I_Z = I_L/\sqrt{3}} = I_{Z1} = I_{Z2} = I_{Z3}$	$\boldsymbol{I_Z = I_L} = I_{Z1} = I_{Z2} = I_{Z3}$	$\boldsymbol{I_Z = I_L} = I_{Z1} = I_{Z2} = I_{Z3}$

$$\boldsymbol{P} = 3U_ZI_Z\cos\varphi = \sqrt{3}\boldsymbol{U_L I_L}\cos\varphi$$

Beispiel: Hochspannungs-Gleichstrom-Übertragung (HGÜ)

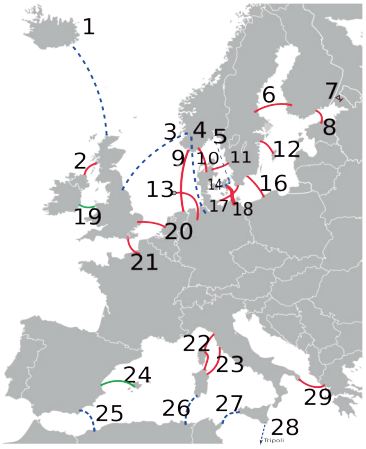


(a)



(b)

(c)



(d)

Figure 2.22: Infos zu HGÜ Systemen: a) Quelle: General Electric / https://www.gegridsolutions.com/PowerD/catalog/hvdc.htm b) Quelle: Georg-Johann / Wikipedia c) Quelle: Siemens d) HGÜ-Leitungen in Europa (nicht verlaufsgetreu) – Rot: bestehende Leitungen – Grün: in Bau befindliche Leitungen – Blau: geplante Leitungen / Quelle: J. J. Messerly / Wikipedia / 2019

Chapter 3

Netzwerksanalyse

3.1 Quelle und Last

3.1.1 Spannungsquellen

Auf den folgenden Seiten werden verschiedene Arten von Quellen untersucht. Die Quellen versorgen dabei im Allgemeinen ein Netzwerk bzw. eine Last mit elektrischer Energie.

Die Spannung an den Klemmen einer idealen (Konstant-) Spannungsquelle (Abbildung 3.1a) ist unabhängig von der Belastung gleich der Quellenspannung $\underline{\hat{u}}_q$, d.h. der Strom durch die Quelle kann beliebige Werte annehmen. Ideale Spannungsquellen dürfen nicht kurzgeschlossen werden, da sonst der Strom unendlich gross wird.

Reale Spannungsquellen haben im Allgemeinen eine komplexe innere Impedanz $\underline{Z}_i$ bzw. einen komplexen inneren Leitwert $\underline{Y}_i$ (Abbildung 3.1b). Entsprechend gilt für die Klemmengrössen der realen Quellen ($|\underline{Z}_i| \neq 0$) der folgende Zusammenhang

$$\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{u}}_q - \underline{Z}_i \cdot \underline{\hat{i}} \tag{3.1}$$

Dabei ist die Spannung $\underline{\hat{u}}$ die Klemmenspannung und es gilt im Allgemeinen für die Amplituden: $\hat{u} \leq \hat{u}_q$. Im unbelasteten Zustand, d.h. im Leerlauf ($\hat{i} = 0$ bzw. $R_a = \infty$), ist $\hat{u} = \hat{u}_q$ bzw. $\hat{u}_{Zi} = 0$. Folglich wird die Spannung $\hat{u}_q$ als Quellenspannung oder Leerlaufspannung bezeichnet. Der Strom $\hat{i}_{KS,u}$ ist der Kurzschlussstrom für $R_a = 0$ – in diesem Fall gilt $\underline{\hat{u}}_q = \underline{\hat{u}}_{Zi} = \underline{Z}_i \underline{\hat{i}}_{KS,u}$ (Abbildung 3.1c).

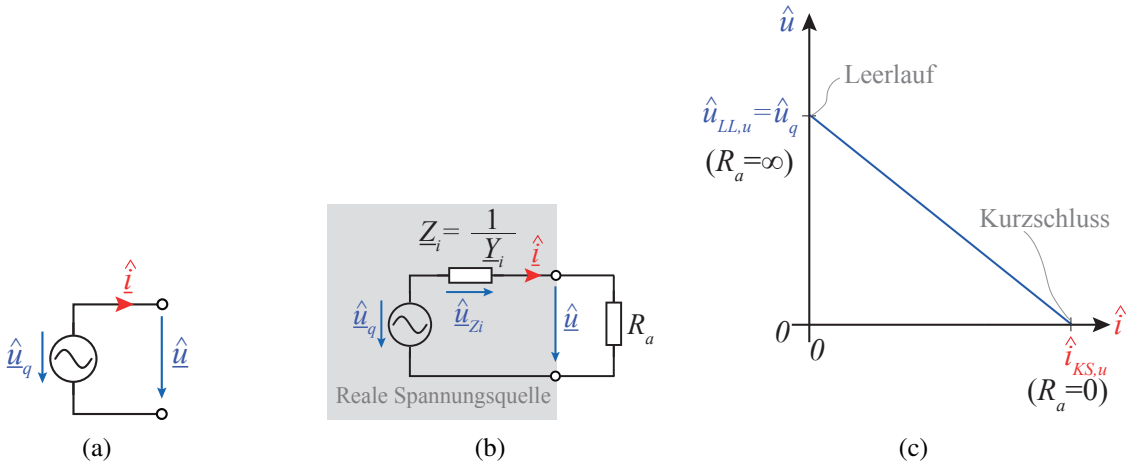


Figure 3.1: a) Ideale Spannungsquelle. b) Reale Spannungsquelle mit Innenimpedanz $\underline{Z}_i$ und Lastwiderstand R_a. c) Kennlinie einer realen Spannungsquelle mit Leerlaufspannung $\hat{u}_q$ und Kurzschlussstrom $\hat{i}_{KS,u}$.

Für den Fall, dass die Quellenspannung $\underline{\hat{u}}_q$ und die Innenimpedanz $\underline{Z}_i$ unabhängig vom Strom $\underline{\hat{i}}$ sind, spricht man von einer linearen Spannungsquelle.

Beispiele für eine reale Spannungsquelle sind ein Wechselspannungsgenerator mit Innenimpedanz oder für eine Gleichspannungsquelle eine Batterie mit Innenwiderstand.

3.1.2 Stromquellen

Neben den idealen Spannungsquellen vom letzten Abschnitt gibt es auch ideale Stromquellen (Abbildung 3.2a). Diese liefern unabhängig vom Belastungswiderstand R_a einen konstanten Strom $\underline{\hat{i}}_q$ an den Verbraucher und werden als Konstantstromquellen bezeichnet. Die Spannung $\underline{\hat{u}}$ über der Quelle kann dabei beliebige Werte annehmen und ergibt sich aus: $\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{i}}_q R_a$, d.h. diese ist vom äusseren Belastungswiderstand abhängig. Ideale Stromquellen dürfen nicht im Leerlauf betrieben werden, da sonst die Spannung über der Stromquelle unendlich hoch wird.

Wie die reale Spannungsquelle hat auch die reale Stromquelle eine Innenimpedanz bzw. -admittanz $\underline{Y}_i$ (Abbildung 3.2b). Diese ist parallel zur idealen Stromquelle geschaltet und die Klemmenspannung $\underline{\hat{u}}$ ergibt sich damit aus der Gleichung

$$\underline{\hat{u}} = \frac{\underline{Z}_i R_a}{\underline{Z}_i + R_a} \underline{\hat{i}}_q \quad \text{und für den Strom folgt:} \quad \underline{\hat{i}} = \underline{\hat{i}}_q - \underline{Y}_i \cdot \underline{\hat{u}} \tag{3.2}$$

Anmerkung: Eine Innenimpedanz in Serie zur Stromquelle hätte keinen Einfluss auf das Klemmenverhalten - analog zu einer Impedanz parallel zu einer idealen Spannungsquelle.

Bei einer realen Stromquelle fliesst im Leerlauf, d.h. für den Fall $R_a \to \infty$, der gesamte Quellenstrom über die Innenimpedanz $\underline{Z}_i$ und es ergibt sich die Leerlaufspannung $\underline{\hat{u}}_{LL,i} = \underline{\hat{i}}_q \, \underline{Z}_i$. Die Kennlinie der realen Stromquelle ist in Abbildung 3.2c dargestellt. Der Strom $\underline{\hat{i}}_q$ wird dabei als Quellenstrom oder Kurzschlussstrom (oft mit $\underline{\hat{i}}_{KS,i}$ abgekürzt) bezeichnet. Bei idealen Stromquellen ist die Innenimpedanz $\underline{Z}_i$ unendlich gross und damit wäre auch die Leerlaufspannung unendlich für $R_a \to \infty$.

Die Realisierung einer Stromquelle erfolgt häufig mit Hilfe einer elektronischen Schaltung mit Stromregelung (z.B. mit Operationsverstärkern / Bipolartransistoren). Als praktische Beispiele weisen z.B. Ladegeräte von Akkumulatoren häufig eine Stromquellencharakteristik (in gewissen Arbeitspunkten) auf.

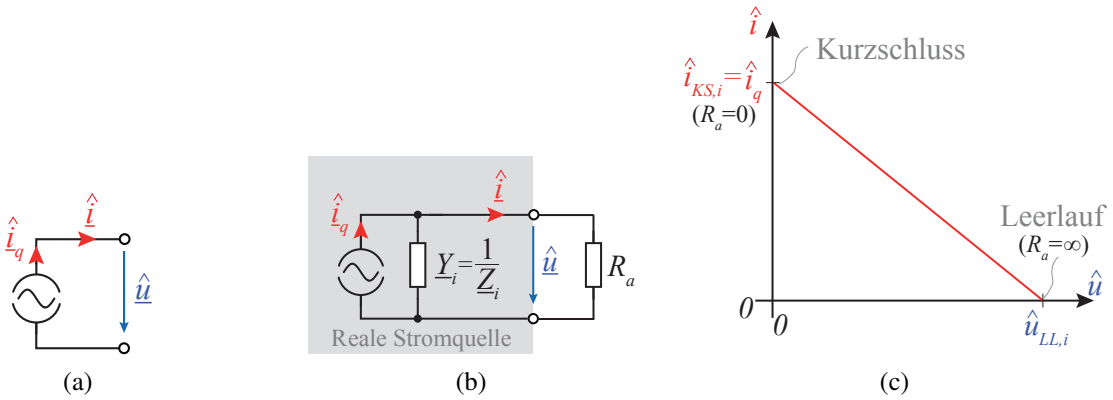


Figure 3.2: a) Ideale Stromquelle. b) Reale Stromquelle mit Innenadmittanz $\underline{Y}_i$ und Lastwiderstand R_a. c) Kennlinie einer realen Stromquelle mit Leerlaufspannung $\hat{u}_{LL,i}$ und Kurzschlussstrom $\hat{i}_q$.

3.1.3 Äquivalente Quellen

Betrachtet man die Kennlinien einer realen Spannungs- und einer realen Stromquelle in den Abbildungen 3.3b und 3.3d, so erkennt man, dass diese prinzipiell das gleiche Klemmenverhalten aufweisen (d.h. prinzipiell den gleichen Verlauf der Kennlinie haben). Folglich kann eine Spannungsquelle mit Innenimpedanz durch eine Stromquelle mit Innenimpedanz für $\underline{Z}_i \neq 0$ ersetzt werden. Aus den Zusammenhängen für den Leerlauf (LL) und dem Kurzschluss (KS) der jeweiligen Quelle folgt

	Spannungsquelle	Stromquelle
Leerlauf (LL)	$\underline{\hat{u}}_{LL,u} = \underline{\hat{u}}_q$	$\underline{\hat{u}}_{LL,i} = \underline{\hat{i}}_q\, \underline{Z}_{i,i}$
Kurzschluss (KS)	$\underline{\hat{i}}_{KS,u} = \underline{\hat{u}}_q / \underline{Z}_{i,u}$	$\underline{\hat{i}}_{KS,i} = \underline{\hat{i}}_q$

folgen die Zusammenhänge

$$\underline{\hat{u}}_{LL,u} = \underline{\hat{u}}_{LL,i} \quad \rightarrow \quad \underline{\hat{u}}_q = \underline{\hat{i}}_q\, \underline{Z}_{i,i} \tag{3.3}$$

$$\underline{\hat{i}}_{KS,u} = \underline{\hat{i}}_{KS,i} \quad \rightarrow \quad \underline{\hat{i}}_q = \underline{\hat{u}}_q / \underline{Z}_{i,u} \tag{3.4}$$

$$\rightarrow \quad \underline{Z}_{i,i} = \underline{Z}_{i,u} = \underline{Z}_i \tag{3.5}$$

Damit folgt, dass äquivalente reale Strom- und reale Spannungsquellen die gleiche Innenimpedanz ($\underline{Z}_{i,i} = \underline{Z}_{i,u}$) aufweisen.

Bei gleichem Belastungswiderstand R_a geben die äquivalenten Quellen die gleiche Leistung an den Lastwiderstand R_a ab (bzw. die Klemmenspannung und der Laststrom sind gleich). Allerdings sind die inneren Verluste in den realen Quellen im Allgemeinen unterschiedlich. Zum Beispiel sind die Leerlaufverluste (d.h. für $R_a \rightarrow \infty$) einer realen Spannungsquelle gleich 0 (da ja kein Strom fliesst), bei einer realen Stromquelle jedoch gleich $\frac{1}{2}\,|\underline{\hat{i}}_q|^2\, \Re\{\underline{Z}_{i,i}\}$, d.h. im Allgemeinen ungleich 0.

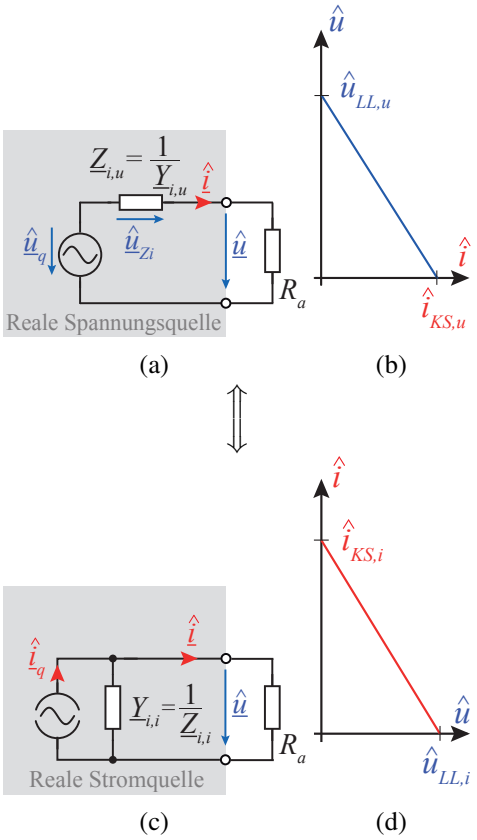


Figure 3.3: a) Reale Spannungsquelle mit Kennlinie, die äquivalent zu der idealen Stromquelle in b) ist, d.h. durch dieselbe Kennlinie beschrieben wird.

3.1.4 Beschaltung einer Quelle mit Last

Bei Beschaltung einer realen Quelle mit einer komplexen Lastimpedanz $\underline{Z}_a$ (Abbildung 3.4a) folgt eine im Bezug auf die Spannung $\underline{\hat{u}}_q$ im Betrag geänderte und phasenverschobene Spannung $\underline{\hat{u}}$ an den Klemmen der realen Quelle (Abbildung 3.4c). Die Klemmenspannung $\underline{\hat{u}}$ ergibt sich aus

$$\underline{\hat{i}} = \frac{1}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_a}\underline{\hat{u}}_q \quad \rightarrow \quad \underline{\hat{u}} = \underline{Z}_a \underline{\hat{i}} = \frac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_a}\underline{\hat{u}}_q \tag{3.6}$$

Für die mit einer Lastadmittanz beschaltete reale Stromquelle gilt völlig analog für die Klemmengrössen (Abbildung 3.4b)

$$\underline{\hat{u}} = \frac{1}{\underline{Y}_i + \underline{Y}_a}\underline{\hat{i}}_q \quad \rightarrow \quad \underline{\hat{i}} = \underline{Y}_a\underline{\hat{u}} = \frac{\underline{Y}_a}{\underline{Y}_i + \underline{Y}_a}\underline{\hat{i}}_q \tag{3.7}$$

d.h. der Strom $\underline{\hat{i}}$ ist im Allgemeinen im Betrag und in der Phase gegenüber $\underline{\hat{i}}_q$ verändert.

Für beide Quellenarten ist dabei die Änderung des Betrags und der Phase der Klemmengrösse ($\underline{\hat{u}}$ bzw. $\underline{\hat{i}}$) sowohl von der Innen- wie auch der Lastimpedanz/-Admittanz abhängig.

Wie in Abschnitt 1.8.7 schon betrachtet wird dabei die von der Quelle an die Last übertragene Wirkleistung im Fall der Leistungsanpassung maximal. Die Leistungsanpassung ist erreicht, wenn folgende Bedingung

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_a^* \qquad \underline{Y}_i = \underline{Y}_a^* \tag{3.8}$$

$$\tag{3.9}$$

erfüllt ist. Für die Leistungsanpassung ist die Leistung in der Lastimpedanz gleich

$$P_{max} = \frac{1}{8}\frac{|\underline{\hat{u}}_q|^2}{\Re\{\underline{Z}_i\}} = \frac{1}{8}\frac{|\underline{\hat{i}}_q|^2}{\Re\{\underline{Y}_i\}} \tag{3.10}$$

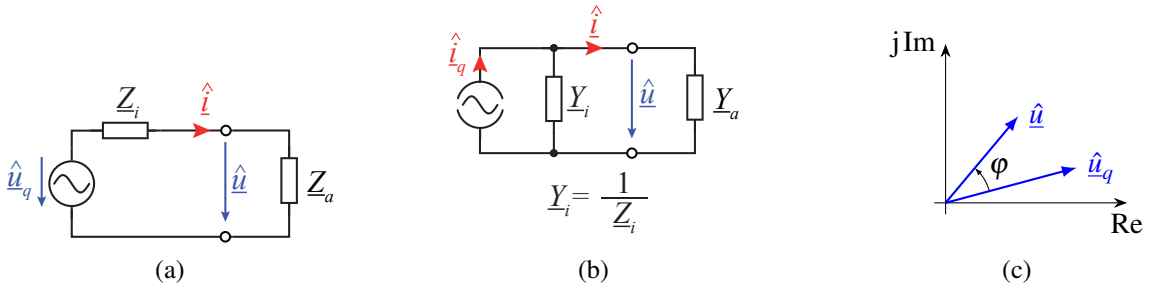


Figure 3.4: a) Reale Spannungsquelle mit Lastimpedanz $\underline{Z}_a$. b) Reale Stromquelle mit Lastadmittanz $\underline{Y}_i$. c) Amplitudenänderung und Phasenverschiebung zwischen Quellenspannung $\underline{\hat{u}}_q$ und Klemmenspannung $\underline{\hat{u}}$

3.1.5 Gesteuerte Quellen

Um physikalische Effekte oder komplexere Bauteile (z.B. Bipolartransistor) mit elektrischen Ersatzschaltbildern beschreiben zu können, werden vielfach gesteuerte Quellen benötigt. Die gesteuerten Quellen sind dabei ideal und rückwirkungsfrei, d.h. die Ausgangsgrösse wirkt nicht auf die Eingangsgrösse zurück.

Prinzipiell gibt es vier mögliche Varianten von gesteuerten Quellen:

1. Spannungsgesteuerte Spannungsquelle (Abbildung 3.5a)

$$\underline{\hat{u}}_g = \underline{\alpha} \cdot \underline{\hat{u}}_s, \qquad \underline{\alpha} \quad = \text{Leerlaufspannungsverstärkung} \quad \text{Einheit: Dimensionslos} \tag{3.11}$$

2. Stromgesteuerte Spannungsquelle (Abbildung 3.5b)

$$\underline{\hat{u}}_g = \underline{Z}_m \cdot \underline{\hat{i}}_s, \qquad \underline{Z}_m \quad = \text{Transimpedanz} \quad \text{Einheit: Widerstand / } \Omega \tag{3.12}$$

3. Spannungsgesteuerte Stromquelle (Abbildung 3.5c)

$$\underline{\hat{i}}_g = \underline{S} \cdot \underline{\hat{u}}_s, \qquad \underline{S} \quad = \text{Steilheit} \quad \text{Einheit: Leitwert / } \Omega^{-1} = S \tag{3.13}$$

4. Stromgesteuerte Stromquelle (Abbildung 3.5d)

$$\hat{\underline{i}}_g = \underline{\beta} \cdot \hat{\underline{i}}_s, \qquad \underline{\beta} \quad = \text{Kurzschlussstromverstärkung} \quad \text{Einheit: Dimensionslos} \tag{3.14}$$

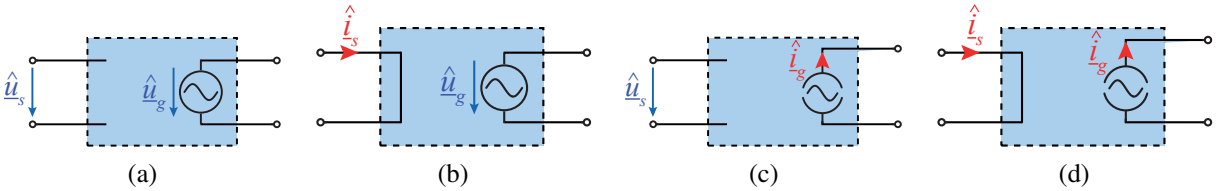


Figure 3.5: a) Spannungsgesteuerte Spannungsquelle. b) Stromgesteuerte Spannungsquelle. c) Spannungsgesteuerte Stromquelle. d) Stromgesteuerte Stromquelle.

Beispiele für die Anwendung von gesteuerten Quellen

Als Beispiel für die Anwendung von gesteuerten Quellen wird das Kleinsignal-Ersatzschaltbild in Abbildung 3.6b der Emitterschaltung bzw. des Verstärkers basierend auf dem Bipolartransistor in Abbildung 3.6a betrachtet. Das Verhalten des Bipolartransistors wird dabei mit einer stromgesteuerten Stromquelle, die die Stromverstärkung um den Faktor β zwischen Basis- $\hat{\underline{i}}_B$ und Kollektorstrom $\hat{\underline{i}}_C$ beschreibt, dem Basis-Emitter Widerstand R_{BE} und dem Kollektor-Emitter Widerstand modelliert – siehe Abbildung 3.6b.

Zum Betrieb des Transistors muss ein Arbeitspunkt (AP) in der Eingangskennlinie (u_{BE}/i_B) und der dazugehörige Arbeitspunkt in der Ausgangskennlinie (u_{CE}/i_C) festgelegt werden. Die Arbeitspunkte werden mit den Widerständen R_1/R_2 bzw. R_C/R_E eingestellt (Abbildung 3.6c). Dies kann z.B. näherungsweise mit den Kennlinien in Abbildung 3.6d erfolgen. Neben der Ein- und Ausgangskennlinie des Transistors aus dem Datenblatt, sind dort die beiden Arbeitsgeraden G_1 und G_2 für eine Quellenspannung u_Q = 20V eingetragen.

$$G_1: \quad \hat{\underline{i}}_B = \frac{\hat{\underline{u}}_Q \frac{R_2}{R_1+R_2} - \hat{\underline{u}}_{BE}}{R_1||R_2 + R_E(1+\beta)} \quad (\text{mit } \hat{\underline{i}}_C = \beta \hat{\underline{i}}_B) \tag{3.15}$$

$$G_2: \quad \hat{\underline{i}}_C = \frac{\hat{\underline{u}}_Q - \hat{\underline{u}}_{CE}}{R_C + R_E} \quad (\text{mit } \hat{\underline{i}}_a = 0) \tag{3.16}$$

Bei der betrachteten Emitterschaltung in Abbildung 3.6b steuert der Basisstrom $\hat{\underline{i}}_B$ am Eingang über die Stromverstärkung $\underline{\beta}$ den Kollektorstrom $\hat{\underline{i}}_C$ am Ausgang. Dieses Verhalten wird über eine stromgesteuerte Stromquelle modelliert. Daneben beschreiben die Widerstände R_{BE} und R_{CE} innere Verluste des Transistors. Für den Eingangskreis in der Ersatzschaltung in Abbildung 3.6b ergibt sich die Gleichung: $\hat{\underline{u}}_{BE} = R_{BE}\hat{\underline{i}}_B$ und aus der Knotengleichung für den Knoten K folgt: $\hat{\underline{i}}_C = \underline{\beta}\ \hat{\underline{i}}_B + \hat{\underline{u}}_{CE}/R_{CE}$. Dabei wird der Transistor als rückwirkungsfreier Verstärker beschrieben, d.h. die Ausgangsgrössen $\hat{\underline{u}}_{CE}$&$\hat{\underline{i}}_C$ sind von den Eingangsgrössen $\hat{\underline{u}}_{BE}$&$\hat{\underline{i}}_B$ abhängig, aber nicht umgekehrt, d.h. die gesteuerten Quellen sind rückwirkungsfrei.

Für den Verstärker in Abbildung 3.6c nimmt mit steigender Eingangsspannung u_e die Spannung u_{BE} und damit auch der Basisstrom i_B zu. Dies führt zu einem um die Stromverstärkung $\underline{\beta}$ stärkeren Anstieg von i_C. Der steigende Kollektorstrom i_C führt zu einer absinkenden Ausgangsspannung u_a. Für eines unbelasteten Verstärkers, d.h. $i_a = 0/R_{CE} \to \infty$ gilt näherungsweise $u_a/u_e \approx -R_C/R_E$.

Um die Temperaturabhängigkeit des Verstärkers zu reduzieren, wird der Arbeitspunkt über eine Stromgegenkopplung (d.h. mit dem Widerstand R_E) stabilisiert, d.h. mit steigendem Kollektorstrom $\hat{\underline{i}}_C$ reduziert sich die Basis-Emitter-Spannung $\hat{\underline{u}}_{BE}$ etwas aufgrund des Widerstands R_E.

Mit gesteuerten Quellen können neben Transistoren z.B. auch Operationsverstärker (OPV) oder Transformatoren nachgebildet/modelliert werden, so dass Schaltungen mit solchen Elementen in einfache Netzwerke mit Quellen und Widerständen/Induktivitäten/Kapazitäten umgewandelt werden können. Damit können diese Schaltungen mit den im Rahmen von NUS I/II betrachteten Netzwerkanalyseverfahren berechnet werden.

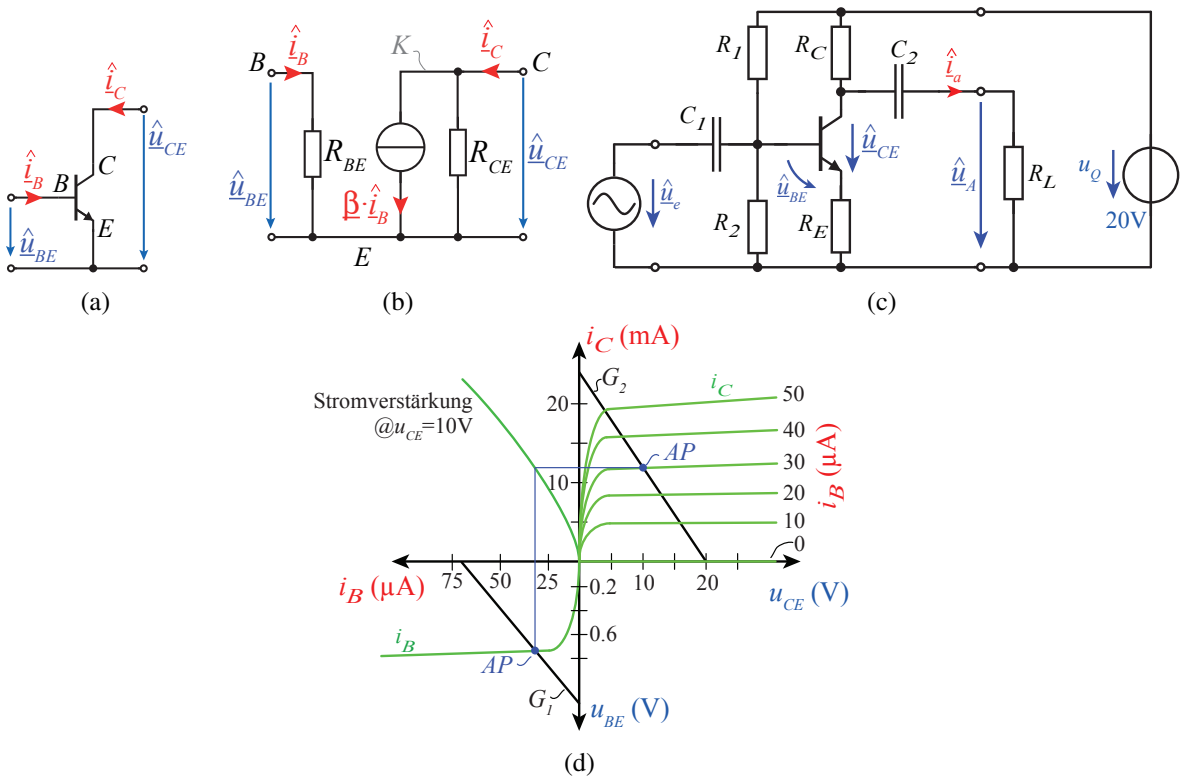


Figure 3.6: a) Symbol eines Bipolartransistors mit den 3 Anschlüssen: Basis B, Emitter E und Kollektor C. b) Ersatzschaltbild des Bipolartransistors mittels einer gesteuerten Stromquelle. c) Schaltbild eines einfachen Verstärkers auf Basis der Emitterschaltung eines NPN-Bipolartransistors. d) Kennlinienfeld der Verstärkerschaltung.

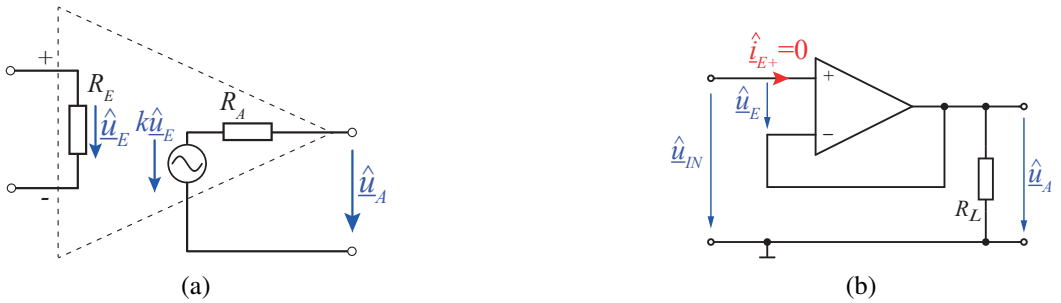


Figure 3.7: a) Modell eines Operationsverstärkers mit Eingangswiderstand R_E, Ausgangswiderstand R_A und der gesteuerten Spannungsquelle mit der Verstärkung k. b) Schaltbild eines Spannungsfolgers.

Ein weiteres Beispiel für ein Ersatzmodell auf Basis von gesteuerten Quellen ist das Modell eines idealisierten Operationsverstärkers in Abbildung 3.7a. Dabei gilt normalerweise: $R_E \gg R_A$ und $k \gg 1$. Somit wird die Eingangsdifferenzspannung $\underline{\hat{u}}_E$ mit dem Verstärkungsfaktor k multipliziert am Ausgang als Spannung $\underline{\hat{u}}_A$ zur Verfügung gestellt. Im Idealfall gilt $R_E \to \infty$, so dass der Eingangsstrom zu den beiden Eingangsklemmen "+" und "-" vernachlässigt werden kann. Weiterhin ist beim idealen Operationsverstärker der Ausgangswiderstand $R_A = 0$, d.h. dieser verhält sich näherungsweise wie eine ideale Spannungsquelle, bei welcher der Wert der Ausgangsspannung $\underline{\hat{u}}_A$ unabhängig vom Ausgangsstrom bzw. der Belastung des Operationsverstärkers am Ausgang ist. Die Verstärkung k wird beim idealen Verstärker unendlich gross, d.h. es gilt $k \to \infty$.

In Abbildung 3.7b ist als Anwendung des OPVs ein einfacher Spannungsfolger dargestellt. Bei diesem ist im Idealfall $\underline{\hat{u}}_A = \underline{\hat{u}}_{IN}$, d.h. die Ausgangsspannung folgt der Eingangsspannung. Der Vorteil des Spannungsfolgers ist, dass bei diesem die Eingangsspannung $\underline{\hat{u}}_{IN}$ nicht belastet wird, da der Eingangsstrom beim idealen OPV verschwindet, d.h. $\hat{i}_{E+} = 0$. Die Ausgangsspannung $\underline{\hat{u}}_A$ wird durch die spannungsgesteuerte Spannungsquelle zur Verfügung gestellt und für $R_A \to 0$ ist $\underline{\hat{u}}_A$ nicht vom Ausgangsstrom abhängig.

Damit wandelt der Spannungsfolger die (unendlich) hohe Eingangsimpedanz in eine sehr kleine (ideal: 0) Ausgangsimpedanz um und wir deshalb auch als Impedanzwandler bezeichnet.

3.1.6 Ersatzquellen und Ersatzlast

Bei der Netzwerkanalyse können vielfach Teile eines Netzwerkes – sogenannte Zweipole (siehe Abbildung 3.8a) – zu einfachen Ersatzzweipolen zusammengefasst werden. Ein Zweipol ist dabei ein abgeschlossenes Netzwerk, das keine elektrische oder magnetische Kopplung nach aussen aufweist und nicht von aussen gesteuert wird. Im Folgenden werden nur lineare Zweipole betrachtet, deren Verhalten unabhängig von der Aussteuerung (d.h. der Strom-/Spannungsamplitude ist).

Ein passiver Zweipol besteht dabei nur aus passiven Elementen (R, L, C und Transformatoren) und enthält keine Quellen. Aktive Zweipole hingegen enthalten neben passiven Elementen auch Quellen.

Interessiert nur das Klemmenverhalten des Zweipols (d.h. das Verhältnis von $\underline{\hat{u}}$ zu $\underline{\hat{i}}$), so kann das Verhalten auch vollständig durch eine Ersatzspannungsquelle (Abbildung 3.8b) bzw. eine Ersatzstromquelle (Abbildung 3.8c) beschrieben werden. Diese Zusammenhänge sind für Gleichspannungsnetzwerke auch als Thévenin (Satz der Ersatzspannungsquelle) bzw. als Norton (Satz der Ersatzstromquelle) Theorem bekannt.

Die Bestimmung der Ersatzgrössen $\underline{\hat{u}}_q$, $\underline{Z}_i$ bzw. $\underline{\hat{i}}_q$, $\underline{Y}_i$ erfolgt in gleicher Weise wie die Umrechnung einer realen Spannungsquelle in eine reale Stromquelle.

- ▷ Leerlauf an Anschlussklemmen, d.h. $\underline{\hat{i}} = 0 \Rightarrow$ Leerlaufspannung $\underline{\hat{u}}_{LL}$
- ▷ Kurzschluss der Anschlussklemmen, d.h. $\underline{\hat{u}} = 0 \Rightarrow$ Kurzschlussstrom $\underline{\hat{i}}_{KS}$
- ▷ Bestimmen der inneren Impedanz, wobei alle im Netzwerk vorhanden Spannungsquellen durch einen Kurzschluss und alle Stromquellen durch eine Unterbrechung (Leerlauf) ersetzt werden. Dies gilt nicht für gesteuerte Quellen.

$$\underline{\hat{i}} = 0 \rightarrow \underline{\hat{u}} = \underline{\hat{u}}_{LL} = \underline{\hat{u}}_q = \underline{\hat{i}}_q / \underline{Y}_i \tag{3.17}$$

$$\underline{\hat{u}} = 0 \rightarrow \underline{\hat{i}} = \underline{\hat{i}}_{KS} = \underline{\hat{i}}_q = \underline{\hat{u}}_q / \underline{Z}_i \tag{3.18}$$

$$-\frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{i}}} = \underline{Z}_i = \frac{1}{\underline{Y}_i} \tag{3.19}$$

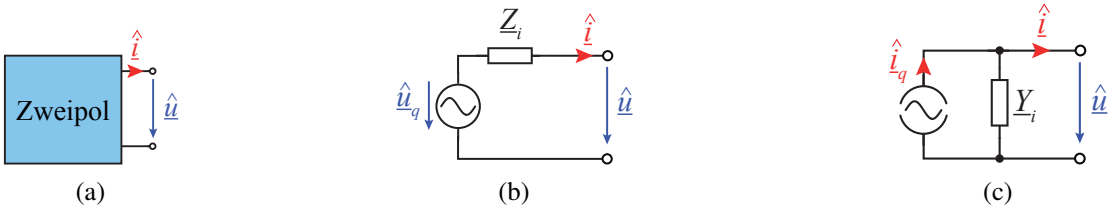


Figure 3.8: a) Aktiver oder passiver Zweipol mit den Klemmengrössen $\underline{\hat{u}}$ und $\underline{\hat{i}}$. b) Ersatzspannungsquelle c) Ersatzstromquelle

Beispiel

Als Beispiel für das oben genannte Verfahren zur Ersatzquelle wird nun das Klemmenverhalten der Schaltung in Abbildung 3.9a bezüglich der Klemmen 1-1′ durch eine Ersatzquelle modelliert werden.

Durch Betrachtung des Leerlauf-Falls, d.h. $\underline{\hat{i}}_{LL} = 0$ (siehe Abbildung 3.9b), wird die Quellenspannung $\underline{\hat{u}}_q$ der Ersatzspannungsquelle ermittelt. Alternativ kann durch die Analyse des Kurzschluss-Falls der Ausgangsklemmen in Abbildung 3.9c der Quellenstrom $\underline{\hat{i}}_q$ der Ersatzstromquelle ermittelt werden, falls das Netzwerk durch eine Stromquelle modelliert werden soll. Typischerweise wird entweder eine Ersatzspannungs- oder eine Ersatzstromquelle ermittelt.

Die Innenimpedanz der Ersatzquelle folgt durch Berechnen der Eingangsimpedanz des passiven Netzwerkes, bei welchem alle ungesteuerten Quellen unwirksam gemacht wurden – siehe Abbildung 3.9d.

Mit der Innenimpedanz und der Quellenspannung $\underline{\hat{u}}_q$ bzw. dem Quellenstrom $\hat{i}q$ folgen die Ersatzschaltungen auf der rechten Seite von Abbildung 3.9a.

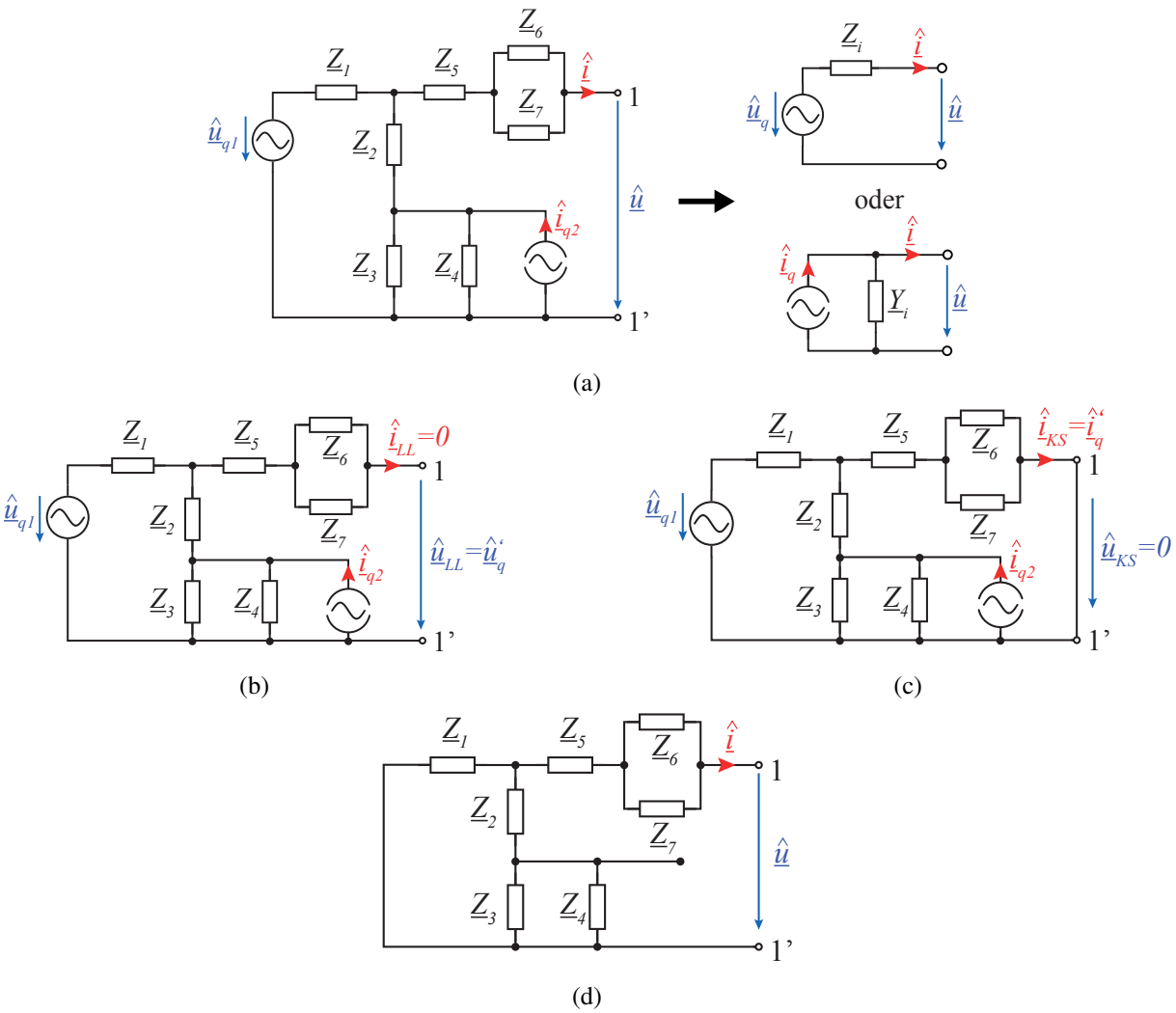


Figure 3.9: a) Beispielschaltung, die durch die Ersatzschaltungen auf der rechten Seite modelliert werden soll. b) Leerlauf-Fall der Schaltung, d.h. $\hat{\underline{i}} = 0$. c) Kurzschluss-Fall der Schaltung, d.h. $\hat{\underline{u}} = 0$. d) Netzwerk für die Berechnung der Innenimpedanz.

3.2 Berechnung einfacher Schaltungen

3.2.1 Überlagerungssatz

Beispiel – Direkte Berechnung über Gleichungssystem

Im Folgenden soll der Überlagerungssatz/das Superpositionsprinzip für die Berechnung von Strömen und Spannungen in Netzwerken mit mehreren Quellen näher untersucht werden. Dazu wird zuerst als Beispiel die Gleichung für den Strom $\hat{\underline{i}}_3$ in der Schaltung in Abbildung 3.10 ermittelt. Das Netzwerk sei dabei eingeschwungen und die Spannung $\hat{\underline{u}}_q$ und der Strom $\hat{\underline{i}}_q$ sowie die Impedanzen $\underline{Z}_i$ sind gegeben.

In dem Netzwerk gibt es die 3 unbekannten Ströme $\hat{\underline{i}}_1$, $\hat{\underline{i}}_2$ und $\hat{\underline{i}}_3$, so dass insgesamt 3 Gleichungen zur Berechnung dieser benötigt werden. Die unbekannten Spannungen folgen dann aus den Strom-Spannungsbeziehungen der einzelnen Komponenten. Zur Berechnung werden die Knotengleichung für

den Knoten $KN1$ und die zwei Maschengleichungen für die Maschen $M1$ und $M2$ aufgestellt

$$\begin{array}{rrrrcl} KN1: & \hat{\underline{i}}_1 & +\hat{\underline{i}}_2 & +\hat{\underline{i}}_3 & = & \hat{\underline{i}}_q \\ M1: & \underline{Z}_1\hat{\underline{i}}_1 & -\underline{Z}_2\hat{\underline{i}}_2 & 0 & = & \hat{\underline{u}}_q \\ M2: & \hat{\underline{z}}_1\hat{\underline{i}}_1 & 0 & -\hat{\underline{z}}_3\hat{\underline{i}}_3 & = & 0 \end{array} \tag{3.20}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{Z}_1 & -\underline{Z}_2 & 0 \\ \underline{Z}_1 & 0 & -\underline{Z}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\underline{i}}_1 \\ \hat{\underline{i}}_2 \\ \hat{\underline{i}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\underline{i}}_q \\ \hat{\underline{u}}_q \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\hat{\underline{i}}_3 = \underbrace{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_3(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)}\hat{\underline{u}}_q}_{\text{"Wirkung" der Quelle } \hat{\underline{u}}_q} + \underbrace{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_3(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)}\hat{\underline{i}}_q}_{\text{"Wirkung" der Quelle } \hat{\underline{i}}_q} \tag{3.22}$$

zeigt, dass sich der Strom $\hat{\underline{i}}_3$ als lineare Überlagerung (d.h. als Summe) der Wirkungen der unabhängigen Strom- und Spannungsquellen des Netzwerkes ergibt.

Damit kann der Strom $\hat{\underline{i}}_3$ als Summe der Einzelwirkungen der beiden Quellen $\hat{\underline{u}}_q$ und $\hat{\underline{i}}_q$ berechnet werden, wenn jeweils die andere Quelle nicht vorhanden ist. Diese Aussage gilt allgemein, wenn die Quellen unabhängig voneinander sind.

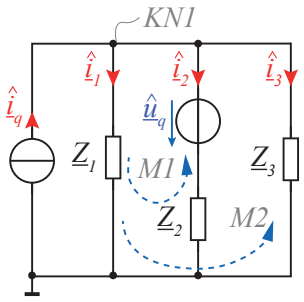


Figure 3.10: Beispielnetzwerk in dem der Strom $\hat{\underline{i}}_3$ berechnet werden soll.

Beispiel – Berechnung mittel Überlagerung

Als nächstes werden die Einzelwirkungen der beiden Quellen $\hat{\underline{u}}_q$ und $\hat{\underline{i}}_q$ separat berechnet. Für die Berechnung der Wirkung der Spannungsquelle $\hat{\underline{u}}_q$ wird die Stromquelle unwirksam gemacht, d.h. die Stromquelle wird durch einen Leerlauf ersetzt. Damit resultiert das Netzwerk in Abbildung 3.11a. Für dieses Netzwerk wird zuerst die Ersatzspannung $\hat{\underline{u}}_{qe}$ (= Leerlaufspannung) sowie die Innenimpedanz $\underline{Z}_{qe}$ bestimmt.

$$\hat{\underline{u}}_{qe} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\hat{\underline{u}}_q \qquad \underline{Z}_{qe} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} \tag{3.23}$$

Daraus resultiert der Strom $\hat{\underline{i}}_3(\hat{\underline{u}}_q)$, der von der Quelle $\hat{\underline{u}}_q$ verursacht wird.

$$\hat{\underline{i}}_3(\hat{\underline{u}}_q) = \frac{\hat{\underline{u}}_{qe}}{\underline{Z}_{qe}+\underline{Z}_3} = \frac{\dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\hat{\underline{u}}_q}{\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}+\underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_3(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)}\hat{\underline{u}}_q \tag{3.24}$$

Dies entspricht dem ersten 1. Term in Gleichung (3.22)).

Die Wirkung von $\hat{\underline{i}}_q$ ergibt sich, indem $\hat{\underline{u}}_q$ unwirksam gemacht wird, d.h. die Spannungsquelle wird durch einen Kurzschluss ersetzt. Daraus resultiert die Schaltung in Abbildung 3.11b. Für diese wird wiederum die Ersatzspannung $\hat{\underline{u}}_{qe}$ sowie die Innenimpedanz $\underline{Z}_{qe}$ bestimmt.

$$\hat{\underline{u}}_{qe} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\hat{\underline{i}}_q \qquad \underline{Z}_{qe} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} \tag{3.25}$$

Daraus resultiert der Strom $\hat{\underline{i}}_3(\hat{\underline{i}}_q)$, der von der Stromquelle $\hat{\underline{i}}_q$ verursacht wird

$$\hat{\underline{i}}_3(\hat{\underline{i}}_q) = \frac{\hat{\underline{u}}_{qe}}{\underline{Z}_{qe}+\underline{Z}_3} = \frac{\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\hat{\underline{i}}_q}{\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}+\underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_3(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)}\hat{\underline{i}}_q \tag{3.26}$$

Dies entspricht dem zweiten Term in Gleichung (3.22)).

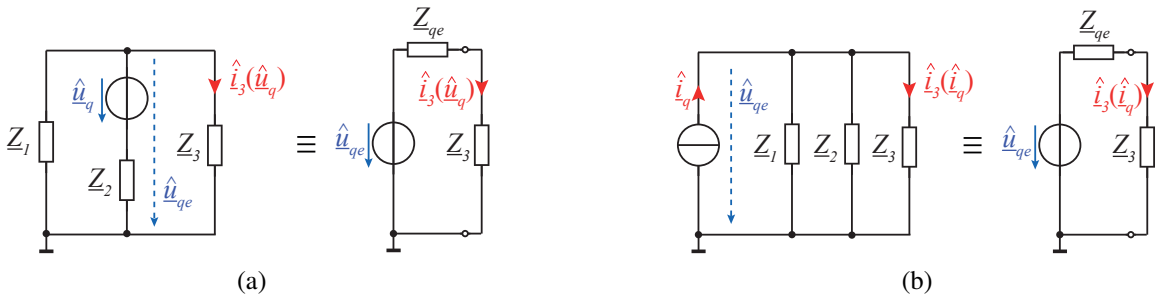


Figure 3.11: a) Berechnung der Wirkung von $\hat{\underline{u}}_q$ auf $\hat{\underline{i}}_3$ für das Netzwerk in Abbildung 3.10 durch Unwirksam-Machen der Stromquelle und Berechnen der Teilwirkung $\hat{\underline{i}}_3(\hat{\underline{u}}_q)$ mittels des Satzes der Ersatzspannungsquelle. b) Quelle $\hat{\underline{i}}_q$ wurde unwirksam gemacht und die Wirkung von $\hat{\underline{i}}_q$ auf $\hat{\underline{i}}_3$ wird mittels des Satzes der Ersatzspannungsquelle ermittelt.

Überlagerungssatz

Aus den vorangegangenen Betrachtungen folgt der behauptete Zusammenhang, dass sich der Strom $\hat{\underline{i}}_3$ als Summe (Überlagerung/Superposition) der Wirkungen der beiden Quellen im Netzwerk darstellen lässt. Dieser Zusammenhang kann auch auf eine beliebige Zahl von Quellen erweitert werden

$$\hat{\underline{i}}_3 = \hat{\underline{i}}_3(\hat{\underline{u}}_q)+\hat{\underline{i}}_3(\hat{\underline{i}}_q)+\cdots = \sum_i \hat{\underline{i}}_3(\hat{\underline{u}}_{qi}) + \sum_i \hat{\underline{i}}_3(\hat{\underline{i}}_{qi}) \tag{3.27}$$

Die gemachten Betrachtungen können im Überlagerungssatz (bzw. dem Superpositionsprinzip) verallgemeinert werden. Der allgemeine Satz lautet:

Bei einem linearen Netzwerk ist die von den unabhängigen Quellen $\hat{\underline{u}}_{qi}$ und $\hat{\underline{i}}_{qi}$ hervorgerufene gesamte Wirkung $\hat{\underline{u}}$ bzw. $\hat{\underline{i}}$ in einem Zweig die Superposition sämtlicher Teilwirkungen, die sich ergeben, wenn jeweils nur eine der Quellen vorhanden ist und alle übrigen unwirksam sind.

Die Einflussfaktoren der einzelnen Quellen werden durch die jeweilige Lage im Netzwerk, d.h. durch die Topologie des Netzwerkes bestimmt.

Prinzipiell gilt der Überlagerungssatz sowohl im Frequenz- als auch im Zeitbereich sowie auch für Quellen mit beliebiger Zeitfunktion. Weiterhin können die Quellen auch unterschiedliche Frequenzen haben. Bei der Überlagerung dürfen allerdings dann nicht die Zeiger bei den unterschiedlichen Frequenzen addiert/überlagert werden, sondern nur die Zeitfunktionen. Wichtig für die Überlagerung ist nur, dass das Netzwerk linear ist, d.h. dass alle Wert der Bauelemente konstant und unabhängig von der am jeweiligen Bauelement anliegenden Spannung bzw. unabhängig von dem durch das jeweilige Bauelement fliessenden Strom sind.

Beispiel II – Berechnung mittels Überlagerung

Als weiteres Beispiel soll für die Schaltung in Abbildung 3.12a der Strom $\hat{\underline{i}}_1$ durch den Widerstand R_1 berechnet werden. Zuerst wird nur die Wirkung der Spannungsquelle $\hat{\underline{u}}_1$ betrachtet und die Spannungsquelle $\hat{\underline{u}}_2$ unwirksam gemacht, d.h. durch einen Kurzschluss ersetzt – siehe Abbildung 3.12b. Damit

ergibt sich für den Strom $\underline{\hat{i}}_{11}$

$$\underline{\hat{i}}_{11} = \frac{\underline{\hat{u}}_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \underline{\hat{u}}_1 \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \tag{3.28}$$

Im zweiten Schritt wird nur die Wirkung der Spannungsquelle $\underline{\hat{u}}_2$ betrachtet und die Spannungsquelle $\underline{\hat{u}}_1$ unwirksam gemacht, d.h. durch einen Kurzschluss ersetzt – siehe Abbildung 3.12c. Für die Berechnung des Stromes $\underline{\hat{i}}_{12}$ wird zuerst der Strom $\underline{\hat{i}}_{22}$ ermittelt, da dies analog zur Berechnung des Stromes $\underline{\hat{i}}_{11}$ ist und damit direkt lösbar ist

$$\underline{\hat{i}}_{22} = \frac{\underline{\hat{u}}_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = \underline{\hat{u}}_2 \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \tag{3.29}$$

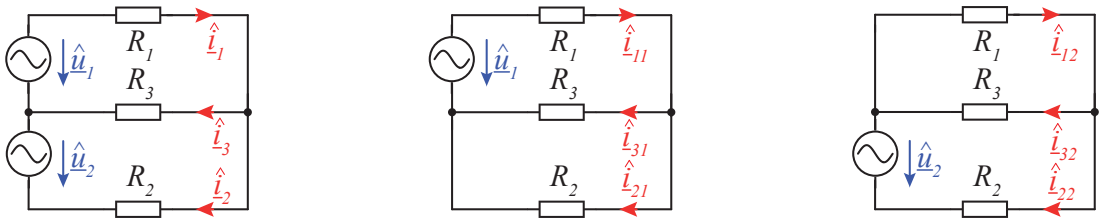
Anschliessend wird dann die Stromteilerregel für die beiden Widerstände R_1 und R_3 angewendet

$$\underline{\hat{i}}_{12} = \underline{\hat{i}}_{22} \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \underline{\hat{u}}_2 \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \tag{3.30}$$

Der im Widerstand R_1 insgesamt fliessende Strom $\underline{\hat{i}}_1$ ergibt sich für den Fall, dass beide Spannungsquellen wirksam sind, durch Überlagerung (Superposition) der beiden oben berechneten Teilströme

$$\underline{\hat{i}}_1 = \underline{\hat{i}}_{11} + \underline{\hat{i}}_{12} \tag{3.31}$$

Der Rechenaufwand beim Superpositionsprinzip steigt dabei mit der Anzahl der Quellen an. Aus diesem Grund wird das Superpositionsprinzip meist nur bei relativ einfachen Netzwerken mit wenigen Quellen angewendet. Weiterhin ist das Superpositionsprinzip u.a. Grundlage für die Harmonische Analyse, bei welcher Netzwerke bei Anregung durch nicht sinusförmige Signale mit Hilfe von Fourierreihen (=Summe/Überlagerung von Quellen) berechnet werden – siehe hierzu Abschnitt **??**.



(a) (b) (c)

Figure 3.12: a) Beispielnetzwerk für die Anwendung des Superpositionsprinzips. b) Quelle $\underline{\hat{u}}_2$ wurde unwirksam gemacht, d.h. durch einen Kurzschluss ersetzt. c) Quelle $\underline{\hat{u}}_1$ wurde unwirksam gemacht, d.h. durch einen Kurzschluss ersetzt.

Superpositionsprinzip mit gesteuerten Quellen

Mit der sogenannten Methode des *Ersatzes und der Rücknahme von gesteuerten Quellen* können auch Netzwerke mit gesteuerten Quellen durch den Überlagerungssatz, d.h. durch die Überlagerung von Teilwirkungen, berechnet werden.

Beispielhaft wird dazu für das Netzwerk in Abbildung 3.13a der Strom $\underline{\hat{i}}_q$ berechnet werden. In einem ersten Schritt wird dazu die gesteuerte Stromquelle $\beta \underline{\hat{i}}_1$ durch die unabhängige Stromquelle $\underline{\hat{i}}_2$ ersetzt, woraus das Netzwerk in Abbildung 3.13b resultiert.

Als nächstes werden die Wirkungen der Spannungsquelle $\underline{\hat{u}}_q$ (Abbildung 3.13c) und der Stromquelle $\underline{\hat{i}}_2$ (Abbildung 3.13d – Hinweis: *Zweig 1* schliesst $\underline{Z}$ kurz) ermittelt

$$\underline{\hat{i}}_q(\underline{\hat{u}}_q) = \frac{\underline{\hat{u}}_q}{\underline{Z}} \text{ (Abbildung 3.13c)} \quad \text{und} \quad \underline{\hat{i}}_q(\underline{\hat{i}}_2) = \underline{\hat{i}}_2 \text{ (Abbildung 3.13d)} \tag{3.32}$$

Da der Strom $\hat{\underline{i}}_1$ für die Steuerung der Quelle $\hat{\underline{i}}_2$ zuständig ist, müssen auch für diesen die Teilwirkungen ermittelt werden. Diese ergeben sich aus

$$\hat{\underline{i}}_1(\hat{\underline{u}}_q) = \frac{\hat{\underline{u}}_q}{\underline{Z}} \text{ (Abbildung 3.13c)} \quad \text{und} \quad \hat{\underline{i}}_1(\hat{\underline{i}}_2) = \frac{\hat{\underline{i}}_2}{2} \text{ (Abbildung 3.13d)} \tag{3.33}$$

Zum Schluss müssen die Teilwirkungen noch überlagert werden, wobei $\hat{\underline{i}}_2$ wieder durch $\beta\hat{\underline{i}}_1$ ersetzt wird.

$$\hat{\underline{i}}_q = \hat{\underline{i}}_q(\hat{\underline{u}}_q) + \hat{\underline{i}}_q(\hat{\underline{i}}_2) = \frac{\hat{\underline{u}}_q}{\underline{Z}} + \hat{\underline{i}}_2 = \frac{\hat{\underline{u}}_q}{\underline{Z}} + \beta\hat{\underline{i}}_1 \tag{3.34}$$

$$\hat{\underline{i}}_1 = \hat{\underline{i}}_1(\hat{\underline{u}}_q) + \hat{\underline{i}}_1(\hat{\underline{i}}_2) = \frac{\hat{\underline{u}}_q}{\underline{Z}} + \frac{\hat{\underline{i}}_2}{2} = \frac{\hat{\underline{u}}_q}{\underline{Z}} + \frac{\beta\hat{\underline{i}}_1}{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{\underline{i}}_1 = \frac{\hat{\underline{u}}_q}{\underline{Z}}\frac{2}{2-\beta} \tag{3.35}$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{i}}_q = \frac{\hat{\underline{u}}_q}{\underline{Z}}\frac{2+\beta}{2-\beta} \tag{3.36}$$

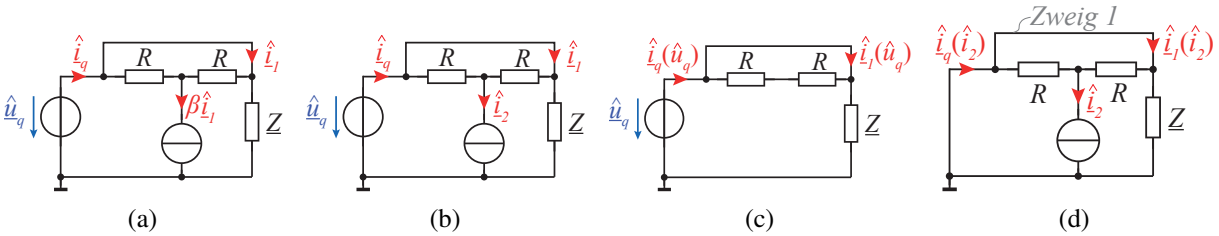


Figure 3.13: a) Beispielnetzwerk für die Anwendung des Superpositionsprinzips im Fall von gesteuerten Quellen. b) Ersatz der gesteuerten Quelle durch die unabhängige Quelle $\hat{\underline{i}}_2$. c) Netzwerk in dem die Quelle $\hat{\underline{i}}_2$ unwirksam gemacht wurde (d.h. durch einen Leerlauf ersetzt). d) Netzwerk in dem die Quelle $\hat{\underline{u}}_q$ unwirksam gemacht wurde (d.h. durch einen Kurzschluss ersetzt).

3.2.2 Ähnlichkeitssatz

Eine weitere Methode für die Berechnung von Netzwerken basiert auf dem Ähnlichkeitssatz, welcher besagt, dass für lineare Netzwerke allgemein ein proportionaler Zusammenhang zwischen der Ursache und der Wirkung besteht. Damit kann z.B. die gesuchte Grösse berechnet werden, wenn für einen beliebigen Wert der gesuchten Grösse (d.h. der Wirkung) der Wert der Ursache/Quellen bekannt ist. Dies wird nun anhand eines Beispiels näher erläutert.

In dem betrachteten Beispielnetzwerk in Abbildung 3.14 ist z.B. $\hat{\underline{u}}_q$ die Ursache und $\hat{\underline{i}}_6$ die gesuchte Wirkung. Die Wirkung und die Ursache hängen dabei über eine Proportionalitäts- bzw. Netzwerkkonstante (hier K_6) linear voneinander ab

$$\hat{\underline{i}}_6 = K_6\hat{\underline{u}}_q \tag{3.37}$$

Die Konstante K_6 bestimmt sich dabei über die Netzwerktopologie bzw. die Bauteilwerte und ist unabhängig vom eigentlichen Wert der Wirkung (oder Ursache), d.h. unabhängig von z.B. der Amplitude der Spannungsquelle. Dieser Zusammenhang soll nun dazu benutzt werden, um den Strom $\hat{\underline{i}}_6$ für das Netzwerk in Abbildung 3.14 ohne Knoten- und Maschengleichungen zu berechnen.

Dazu wird im ersten Schritt ein beliebiger Startwert für den Strom $\hat{\underline{i}}_{6S}$ (hier 1A) durch R_6 angenommen. Damit ist auch der Strom $\hat{\underline{i}}_5 = \hat{\underline{i}}_{6S}$ bekannt und die Spannung über R_4 ergibt sich aus $\hat{\underline{u}}_4 = \hat{\underline{i}}_5(R_5+R_6)$, womit $\hat{\underline{i}}_4 = \hat{\underline{u}}_4/R_4$ folgt. Der Strom durch R_3 ergibt sich aus $\hat{\underline{i}}_3 = \hat{\underline{i}}_4 + \hat{\underline{i}}_5$ und somit sind auch $\hat{\underline{u}}_{R3} = R_3\hat{\underline{i}}_3$ sowie $\hat{\underline{u}}_2 = \hat{\underline{u}}_4 + \hat{\underline{u}}_{R3}$ bekannt. Dieses Verfahren kann fortgesetzt werden, bis $\hat{\underline{u}}_{qS}$ für den angenommenen Wert $\hat{\underline{i}}_{6S}$ = 1A gegeben ist.

Da der gesuchte Strom über $\hat{\underline{i}}_6 = K_6\hat{\underline{u}}_q$ allgemeingültig linear von der Wirkung abhängt, kann im letzten Schritt der tatsächliche Wert des Stromes $\hat{\underline{i}}_6$ über folgenden Dreisatz ermittelt werden

$$\frac{\hat{\underline{i}}_6}{\hat{\underline{u}}_q} = \frac{\hat{\underline{i}}_{6S}}{\hat{\underline{u}}_{qS}} \xrightarrow{\text{Ähnlichkeitssatz}} \hat{\underline{i}}_6 = \frac{\hat{\underline{i}}_{6S}}{\hat{\underline{u}}_{qS}}\hat{\underline{u}}_q \tag{3.38}$$

Für die Werte $\hat{u}_q = 100\,\mathrm{V}$, $R_1 = R_3 = R_5 = 10\Omega$, $R_2 = R_4 = R_6 = 20\Omega$ und $\hat{i}_{6S} = 1A$ folgt zum Beispiel

$$\begin{aligned}
\hat{i}_5 &= 1\,\mathrm{A} & \hat{u}_4 &= \hat{i}_5(R_5+R_6) = 30\,\mathrm{V}\\
\hat{i}_4 &= \hat{u}_4/R_4 = 1.5\,\mathrm{A} & & \\
\hat{i}_3 &= \hat{i}_4+\hat{i}_5 = 2.5\,\mathrm{A} & \hat{u}_2 &= \hat{i}_3R_3+\hat{u}_4 = 55\,\mathrm{V}\\
\hat{i}_2 &= \hat{u}_2/R_2 = 2.75\,\mathrm{A} & \hat{i}_1 &= \hat{i}_2+\hat{i}_3 = 5.25\,\mathrm{A}\\
\hat{u}_{qS} &= \hat{i}_1R_1+\hat{u}_2 = 107.5\,\mathrm{V} \Rightarrow & \hat{i}_6 &= \hat{i}_{6S}\frac{\hat{u}_q}{\hat{u}_{qS}} = 0.93\,\mathrm{A}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

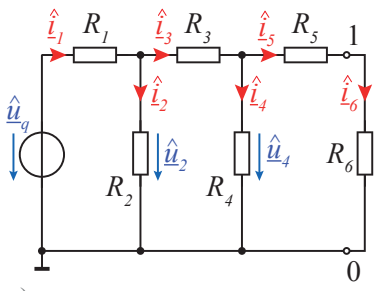


Figure 3.14: Beispielnetzwerk für die Berechnung des Stromes $\hat{i}_6$ mit Hilfe des Ähnlichkeitssatzes.

3.2.3 Versetzen und Aufspalten von Quellen

Jede ideale Spannungsquelle $\hat{u}_q$ kann prinzipiell in beliebig viele parallele Spannungsquellen aufgeteilt werden, so wie dies in Abbildung 3.15a links dargestellt ist. Da die Ausgleichsströme in den "Querverbindungszweige" gleich 0 sind, können diese Zweige auch entfernt werden, womit die Anordnung in Abbildung 3.15a rechts folgt. Damit wurde die ursprüngliche Spannungsquelle bildlich gesprochen über den Knoten KN_1 in die anderen angrenzenden Zweige "verschoben". Bei dieser Verschiebung über einen Knoten wird in jedem der abgehenden Zweige eine Spannung $\hat{u}_q$ in die gleiche Richtung eingebaut, so dass sich das Verhalten des Netzwerkes insgesamt nicht ändert.

In Abbildung 3.15b ist die Quellenverschiebung für ein Beispielnetzwerk dargestellt. Dort erkennt man zum Beispiel, dass die Verschiebung der Quellen auf die Maschengleichung für Masche $M_2: 0 = \hat{u}_C - \hat{u}_L - \hat{u}_q + \hat{u}_q$ keine Auswirkung hat, da $\hat{u}_q$ im Maschenumlauf einmal positiv und einmal negativ gezählt wird.

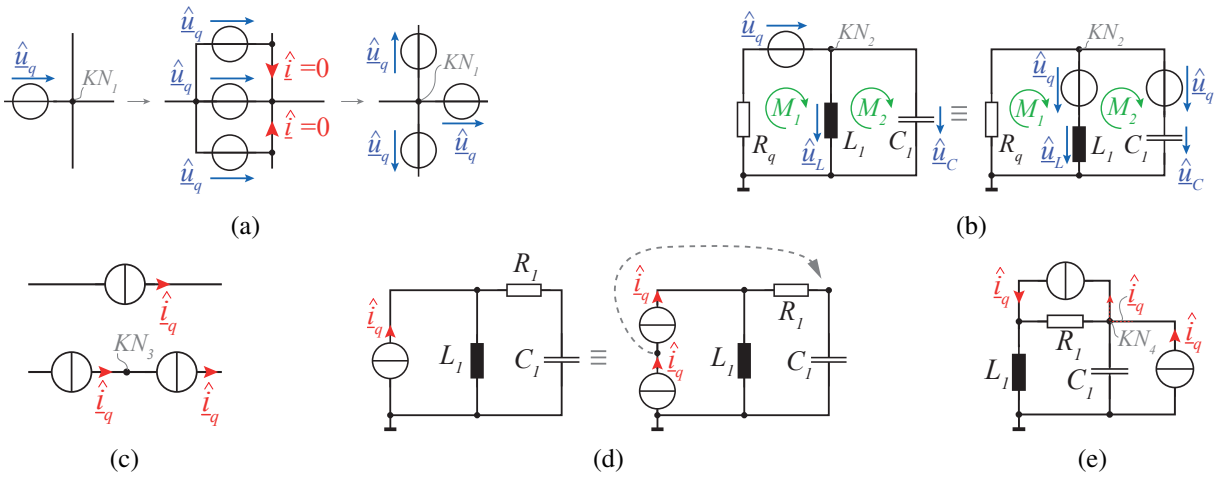


Figure 3.15: a) Aufteilen einer Spannungsquelle und "verschieben" der Quelle über den Knoten $KN1$. b) Beispielnetzwerk für die Aufteilung von Spannungsquellen. c) Aufteilen einer Stromquelle. d) Beispielnetzwerk für die Aufteilung der Stromquelle $\hat{i}_q$ in 2 Stromquellen. e) Resultierendes Netzwerk, wenn der "Verbindungspunkt" der 2 Stromquellen in Abbildung d) mit den Knoten $KN4$ verbunden wird.

Analog kann jede ideale Stromquelle $\hat{\underline{i}}_q$ in beliebig viele in Serie geschaltete Stromquellen aufgeteilt werden (Abbildung 3.15c). Im Verbindungsknoten KN_3 der Stromquellen ist die Strombilanz null: $\hat{\underline{i}}_q - \hat{\underline{i}}_q = 0$. Folglich kann dieser Verbindungsknoten beliebig mit anderen Knoten des Netzwerks verbunden werden, ohne dass sich das Verhalten des Netzwerks ändert.

In Abbildung 3.15d ist die Aufteilung der Stromquelle für eine Beispielnetzwerk dargestellt. Dort wird zuerst die Stromquelle in 2 identische Quellen aufgeteilt und anschliessend wird der Verbindungsknoten mit dem Knoten zwischen R_1 und C_1 verbunden. Daraus resultiert das Netzwerk in Abbildung 3.15e, das sich gleich verhält, wie das Netzwerk in Abbildung 3.15d (hier fliesst $\hat{\underline{i}}_q$ bildlich gesprochen quasi am Knoten KN_4 "vorbei").

3.2.4 Quellensubstitutionen

Im Folgenden werden noch einige Möglichkeiten für eine äquivalente Quellensubstitution betrachtet. Bei einer äquivalenten Quellensubstitution wird in einem Netzwerk eine Quelle so eingefügt bzw. eine Quelle durch ein Bauteil/Zweipol so ersetzt, dass sich die Ströme und Spannungen in dem Netzwerk durch die Modifikation nicht verändern.

In Abbildung 3.16a wird die Leerlaufspannung mit der Spannung $\hat{\underline{u}}_{10}$ durch eine Spannungsquelle mit $\hat{\underline{u}}_0 = \hat{\underline{u}}_{10}$ ersetzt. Dabei fliesst durch die Spannungsquelle kein Strom, da diese einen Leerlauf ersetzt. In Abbildung 3.16b wird der Kurzschluss mit dem Strom $\hat{\underline{i}}_{10}$ durch eine Stromquelle mit $\hat{\underline{i}}_0 = \hat{\underline{i}}_{10}$ ersetzt. In diesem Fall ist die Spannung über der Stromquelle gleich Null, da diese einen Kurzschluss ersetzt. Die Substitution des Leerlaus bzw. des Kurzschlusses durch eine Quelle ändert für den jeweils betrachteten Arbeitspunkt nicht das Verhalten des Netzwerks.

In Abbildung 3.16c wird die stromgesteuerte Spannungsquelle mit $\hat{\underline{u}}_{10} = \underline{A}_I \hat{\underline{i}}_{10}$ durch die Impedanz $\underline{Z} = \underline{A}_I$ ersetzt. Dies ist möglich, da für die Impedanz gilt: $\hat{\underline{u}}_Z = \underline{A}_I \hat{\underline{i}}_{10}$. Dabei fliesst der steuernde Strom $\hat{\underline{i}}_{10}$ direkt durch die stromgesteuerte Spannungsquelle. In diesem Fall kann die stromgesteuerte Spannungsquelle durch die Impedanz $\underline{Z} = \underline{A}_I$ ersetzt werden. Diese Zuordnung ist umkehrbar.

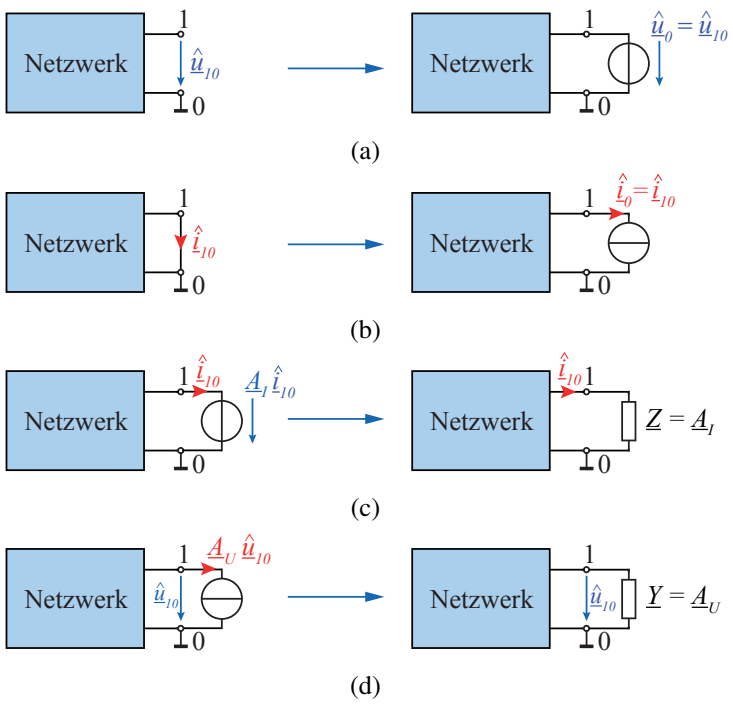


Figure 3.16: a) Substitution des Leerlaufs zwischen den Klemmen 1-0 mit Leerlaufspannung $\hat{\underline{u}}_{10}$ durch eine Spannungsquelle mit der Spannung $\hat{\underline{u}}_0 = \hat{\underline{u}}_{10}$. b) Substitution des Kurzschlusses zwischen den Klemmen 1-0 mit dem Kurzschlussstrom $\hat{\underline{i}}_{10}$ durch eine Stromquelle mit dem Strom $\hat{\underline{i}}_0 = \hat{\underline{i}}_{10}$. c) Ersatz der stromgesteuerten Spannungsquelle durch eine Impedanz. d) Ersatz der spannungsgesteuerten Stromquelle durch eine Admittanz.

Analog gilt für die spannungsgesteuerte Stromquelle $\underline{A}_U \hat{\underline{u}}_{10}$ in Abbildung 3.16d die Äquivalenz mit der Admittanz $Y = \underline{A}_U$, wenn die steuernde Spannung direkt über der spannungsgesteuerten Stromquelle anliegt. Auch diese Zuordnung ist umkehrbar.

3.2.5 Unbedingt äquivalente Schaltungen

In Abschnitt 1.4.4 wurde bereits die Umwandlung einer Parallel- in eine äquivalente Reihenschaltung untersucht. Diese äquivalente Umwandlung soll im Folgenden noch näher untersucht bzw. verallgemeinert werden.

Dazu wird in einem ersten Schritt noch einmal die Umwandlung einer Serien- und eine Parallelschaltung (Abbildung 3.17) hinsichtlich der Äquivalenz (Gültigkeit) betrachtet. Wie im Abschnitt 1.4.4 erläutert, können die Schaltungen ineinander umgerechnet werden und für die Gleichheit der Serien- und der Parallelschaltung muss gelten, dass der Realteil und der Imaginärteil beider Impedanzen

$$\underline{Z}_S = R_S \pm \mathrm{j}X_S = \frac{1}{G_p \pm \mathrm{j}B_p} = \frac{G_p \mp \mathrm{j}B_p}{G_p^2 + B_p^2} = \frac{G_p}{G_p^2 + B_p^2} \mp \mathrm{j}\frac{B_p}{G_p^2 + B_p^2} \tag{3.40}$$

oder beider Admittanzen

$$G_p \pm \mathrm{j}B_p = \frac{1}{R_S \pm \mathrm{j}X_S} = \frac{R_S \mp \mathrm{j}X_S}{R_S^2 + X_S^2} = \frac{R_S}{R_S^2 + X_S^2} \mp \frac{jX_S}{R_S^2 + X_S^2} \tag{3.41}$$

gleich sind. Die Gleichheit der Impedanzen/Admittanzen von Serien- und Parallelschaltung ist jedoch nur für eine Frequenz gegeben. Folglich sind die Schaltungen daher *nicht (unbedingt) äquivalent*, da die Äquivalenz jeweils nur unter der Bedingung gilt, dass die Betriebsfrequenz gleich der Frequenz ist, für welche die Bauteile ineinander umgerechnet wurden.

Das unterschiedliche Frequenzverhalten der Serien- und der Parallelschaltung (siehe auch Abschnitt 1.4.4) ist direkt offensichtlich, wenn man z.B. als Bauelemente jeweils einen Widerstand und einen Kondensator annimmt. Die Bauteile der Serien- und der Parallelschaltung haben dabei für die Gleichheit der Impedanzen/Admittanzen bei einer Frequenz unterschiedliche Werte. Betrachtet man z.B. das Verhalten bei Gleichspannung (d.h. $f = 0$) so stellt man fest, dass dies grundsätzlich unterschiedlich ist, da durch die Parallelschaltung von R und C ein Gleichstromfluss möglich ist. Die Serienschaltung von R und C blockiert hingegen jeglichen Gleichstrom.

Im Gegensatz dazu sind verschieden aufgebaute Schaltungen generell (unbedingt) äquivalent zueinander, wenn die Impedanz oder die Admittanz die *gleiche Frequenzabhängigkeit* zeigen bzw. wenn an den Klemmen das Verhalten von Spannung und Strom als Funktion der Zeit gleich sind.

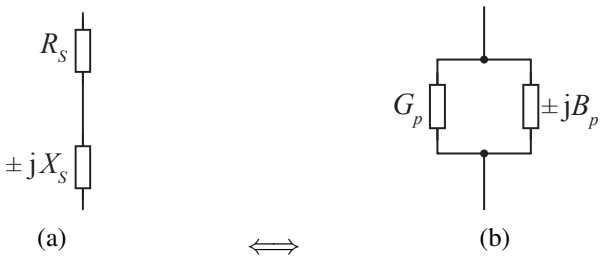


Figure 3.17

Als Beispiel für unbedingt äquivalente Schaltungen werden nun die Netzwerke inAbbildung 3.18a betrachtet. Diese sind für die angegebenen Verhältnisse der Impedanzen zueinander unbedingt äquivalent, wie im Folgenden gezeigt wird.

Für die linke Schaltung in Abbildung 3.18a ist die Eingangsimpedanz gleich

$$\underline{Z}_{12} = \frac{(n_1\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{Z}_1}{n_1\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} = \frac{n_1\underline{Z}_1^2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2}{(n_1+1)\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \tag{3.42}$$

Dabei sind $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ beliebige Impedanzen und n_1 sei eine positive reelle Zahl.

Mittels Polynomdivision des Zählers von $\underline{Z}_{12}$ durch den Nenner wird der Term $n_1/(n_1+1)\underline{Z}_1$ abgespaltet

$$\left[n_1\underline{Z}_1^2+\underline{Z}_1\underline{Z}_2\right]/\left[(n_1+1)\underline{Z}_1+\underline{Z}_2\right]=\frac{n_1}{n_1+1}\underline{Z}_1+\frac{1}{\frac{1}{\frac{\underline{Z}_1}{n_1+1}}+\frac{1}{\frac{\underline{Z}_2}{(n_1+1)^2}}} \tag{3.43}$$

Die Addition beschreibt dabei eine Reihenschaltung von Impedanzen, so dass $n_1/(n_1+1)\underline{Z}_1$ in Serie zu der Impedanz für den zweiten Term ist und der zweite Term beschreibt eine Parallelschaltung (Kehrwert der Summe von Leitwerten) – siehe Abbildung 3.18a rechts. Die Gleichheit der beiden Netzwerke ist dabei unbedingt und gilt allgemein, d.h. diese ist auch nicht von der Betriebsfrequenz abhängig.

Als Beispiel sind in Abbildung 3.18b Zahlenwerte für zwei äquivalente Schaltungen dargestellt, wobei $n_1 = 5$ gewählt wurde.

Für die Umkehrung der Berechnung (siehe Abbildung 3.18c) wird vorteilhaft die Admittanzdarstellung verwendet. Analog wird dabei aus der Admittanz $\underline{Y}_{12}$ für die Schaltung in Abbildung 3.18c links durch eine Polynomdivision die Schaltungsparameter für die rechte Schaltung in Abbildung 3.18c ermittelt.

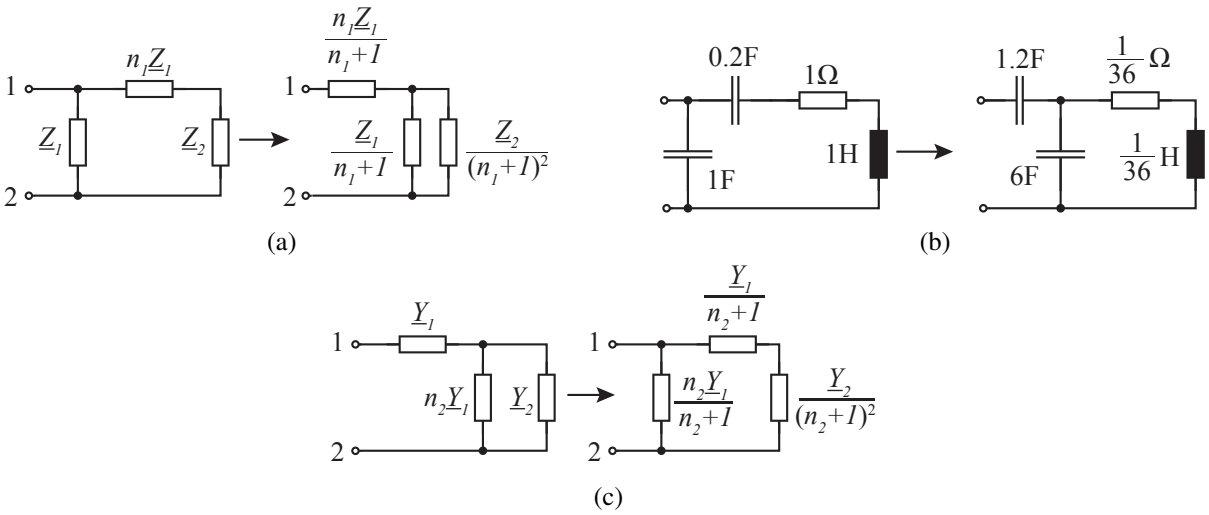


Figure 3.18: a) Umwandlung der Schaltung links in die unbedingt äquivalente Schaltung rechts. b) Bauteile/Zahlenwerte für die betrachtete, unbedingt äquivalente Schaltung. c) Umkehrung der Umwandlung der Schaltung in a) und Berechnung mittels Admittanzen.

3.2.6 Äquivalenz Stern- und Polygonschaltung

Im Folgenden wird nun untersucht, ob und unter welchen Bedingungen die allgemeine Stern- und Polygonschaltung in Abbildung 3.19 zueinander äquivalent sind. Der Spezialfall dazu ist die schon bekannte Stern-Dreiecksumwandlung.

Zum Berechnen der Äquivalenz der beiden Schaltungen wird jedem Stern- bzw. Eckpunkt (Knoten) i ein komplexes Potenzial $\underline{\varphi}_i$ zugeordnet, das auf einen frei wählbaren fiktiven Nullpunkt bezogen ist. Mit den Potenzialen folgt der Zweigstrom für den Zweig zwischen dem Knoten i und dem Knoten m aus

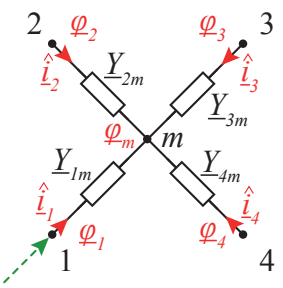
$$\hat{\underline{i}}_i = \left(\underline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_m\right)\underline{Y}_{im} \tag{3.44}$$

Als nächstes wird die Knotengleichung für den Sternpunkt m in Abbildung 3.19a aufgestellt

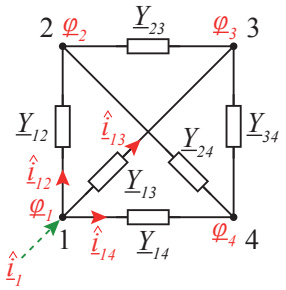
$$\sum_{i=1}^{4}\hat{\underline{i}}_i = 0 \tag{3.45}$$

Ersetz man in dieser Knotengleichung die Ströme mit den Zusammenhängen aus Gleichung (3.44), so erhält man

$$(\underline{\varphi}_1-\underline{\varphi}_m)\underline{Y}_{1m}+(\underline{\varphi}_2-\underline{\varphi}_m)\underline{Y}_{2m}+(\underline{\varphi}_3-\underline{\varphi}_m)\underline{Y}_{3m}+(\underline{\varphi}_4-\underline{\varphi}_m)\underline{Y}_{4m}=0 \tag{3.46}$$



(a)



(b)

Figure 3.19: a) Sternpunktschaltung mit Sternpunkt m und beispielhaft vier Eckpunkten. b) Polygonschaltung mit vier Eckpunkten.

Löst man dies nach dem Sternpunktpotenzial $\underline{\varphi}_m$ auf, so resultiert

$$\underline{\varphi}_m = \frac{\underline{\varphi}_1 \underline{Y}_{1m} + \cdots + \underline{\varphi}_4 \underline{Y}_{4m}}{\sum_{i=1}^{4} \underline{Y}_{im}} \tag{3.47}$$

Damit folgt für die Zweigströme bzw. Ströme zum Sternpunkt (Sternströme)

$$\begin{aligned} \hat{\underline{i}}_i &= \left(\underline{\varphi}_i - \frac{\underline{\varphi}_1 \underline{Y}_{1m} + \cdots + \underline{\varphi}_4 \underline{Y}_{4m}}{\sum_{i=1}^{4} \underline{Y}_{im}} \right) \underline{Y}_{im} \\ \hat{\underline{i}}_i &= \frac{\left(\underline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_1\right) \underline{Y}_{im} \underline{Y}_{1m} + \cdots + \left(\underline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_4\right) \underline{Y}_{im} \underline{Y}_{4m}}{\sum_{i=1}^{4} \underline{Y}_{im}} \end{aligned} \tag{3.48}$$

Folglich kann der Sternstrom $\hat{\underline{i}}_i$ als Summe von $(n-1)$ Teilströmen dargestellt werden, die jeweils vom i-ten Eckpunkt zu den übrigen Eckpunkten fliessen.
Aus der Gleichung (3.48) folgt beispielsweise für den Strom $\hat{\underline{i}}_1$ der Sternschaltung

$$\hat{\underline{i}}_1 = \frac{(\underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_2)\underline{Y}_{1m}\underline{Y}_{2m} + (\underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_3)\underline{Y}_{1m}\underline{Y}_{3m} + (\underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_4)\underline{Y}_{1m}\underline{Y}_{4m}}{\sum_{i=1}^{4} \underline{Y}_{im}} \tag{3.49}$$

Mit obigen Überlegungen folgt für den Teilstrom vom Ende des i-ten zum Ende des j-ten Zweiges (bzw. vom i-ten Eckpunkt zum j-ten Eckpunkt) für die Sternschaltung

$$\hat{\underline{i}}_{ij,S} = (\underline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_j) \frac{\underline{Y}_{im}\underline{Y}_{jm}}{\sum_{i=1}^{4} \underline{Y}_{im}} \tag{3.50}$$

Beim n-Polygon setzt sich z.B. der Strom $\hat{\underline{i}}_1$ zum Eckpunkt 1 in Abbildung 3.19b aufgrund der Knotengleichung aus den drei Teilströmen: $\hat{\underline{i}}_{12}$, $\hat{\underline{i}}_{13}$ und $\hat{\underline{i}}_{14}$ zusammen. Diese drei Teilströme entsprechen dabei jeweils den obigen Teilströmen vom i-ten Eckpunkt zum j-ten Eckpunkt bei der Sternschaltung. Beim n-Polygon ist der Strom vom i-ten Eckpunkt zum j-ten Eckpunkt gleich

$$\hat{\underline{i}}_{ij,P} = (\underline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_j)\underline{Y}_{ij} \tag{3.51}$$

Für die Äquivalenz von Stern- zu Polygonschaltung müssen die beide Strömen vom i-ten Eckpunkt zum j-ten Eckpunkt übereinstimmen, d.h. es muss gelten $\hat{\underline{i}}_{ij,S} = \hat{\underline{i}}_{ij,P}$. Daraus ergibt sich die Bedingung

$$\underline{Y}_{ij} = \frac{\underline{Y}_{im}\underline{Y}_{jm}}{\sum_{i=1}^{n} \underline{Y}_{im}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{Z}_{ij} = \underline{Z}_{im}\,\underline{Z}_{jm} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_{im}} \quad \text{für } (1 \le i \le n, i+1 \le j \le n) \tag{3.52}$$

für die Äquivalenz der beiden Schaltungen.

Mit der obigen Berechnung ist eine äquivalente Umwandlung eines n-Sterns in ein n-Polygon stets möglich.

Allerdings gibt es im Polygon n Eckpunkte und $(n-1)$ Zweige ausgehend von jedem Eckpunkt, wobei ein Zweig direkt zwei Eckpunkte direkt miteinander verbindet. Damit gibt es insgesamt $z_p = (n-1)n/2$ Zweige und Gleichungen im Polygon für die n Unbekannten des n-Sterns. Damit die Zuordnung eindeutig ist, muss $z_p = n = (n-1)n/2$ erfüllt sein, d.h. es muss gelten: $n = 3$. Folglich können nur ein Dreistern und ein Dreieck eindeutig in beide Richtungen zugeordnet werden.

Für den Fall $n \geq 4$ können die Polygonschaltung und die Sternschaltung ineinander umgerechnet werden. Allerdings hat die Polygonschaltung für $n \geq 4$ mehr Bauteile/Unbekannte Grössen als die Sternschaltung. Zum Beispiel im Fall, dass $n = 4$ ist, ergibt sich für die Polygonschaltung $(n-1) * n/2 = 6$, d.h. diese besteht aus 6 Bauteilen, und die Sternschaltung besteht nur aus n Bauelementen, d.h. im betrachteten Fall 4. Damit hat die Polygonschaltung quasi zusätzliche Freiheitsgrade/unbekannte Grössen, die bei einer Umrechnung von einer Sternschaltung in eine Polygonschaltung nicht eindeutig bestimmt sind. Diese "zusätzlichen" Bauelemente kann man prinzipiell frei wählen und dann die restlichen Bauteilwerte mit den n Gleichungen bestimmen. In dem betrachteten Fall für $n = 4$, kann also der Wert von 2 Bauelementen in der Polygonschaltung frei gewählt werden und der Rest ergibt sich aus den $n = 4$ Gleichungen. Damit ist die Zuordnung nicht mehr eindeutig, da ja 2 Werte in der Polygonschaltung frei wählbar sind und es deshalb prinzipiell unendlich viele Polygonschaltungen gibt, die sich nach aussen hin genauso verhalten wie die ursprüngliche Sternschaltung.

Umgekehrt gibt es nur eine Sternschaltung, die die n Gleichungen erfüllt, da es ja nur n Bauteile bzw. n Freiheitsgrade gibt, die alle über die n Gleichungen eindeutig bestimmt sind.

Spezialfall: Stern-Dreieck-Umwandlung

Aus den vorangegangenen Überlegungen folgt die unbedingte Äquivalenz einer Stern- und einer Dreieckschaltung für den Fall, dass die Schaltungen entweder

- ▷ nur aus Widerständen oder
- ▷ nur aus Induktivitäten oder
- ▷ nur aus Kapazitäten

aufgebaut ist, da in diesem Fall sich die Frequenzabhängigkeit, d.h. der Faktor ω, aus den Gleichungen für die äquivalenten Admittanzen/Impedanzen herauskürzen lassen. Für beliebige Impedanzen ist eine Gleichheit wiederum nur für die Frequenz gegeben, für welche die Bauteilwerte umgerechnet wurden.

Generell ist die Stern-Dreieck-Umwandlung bei der Berechnung von Schaltungen von grosser Bedeutung. Die Umwandlung einer Stern- in eine Dreieckschaltung (Abbildung 3.20a) ergibt sich aus

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{Y}_{10}\underline{Y}_{20}}{\sum \underline{Y}}, \quad \underline{Y}_{13} = \frac{\underline{Y}_{10}\underline{Y}_{30}}{\sum \underline{Y}}, \quad \underline{Y}_{23} = \frac{\underline{Y}_{20}\underline{Y}_{30}}{\sum \underline{Y}} \tag{3.53}$$

mit

$$\sum \underline{Y} = \underline{Y}_{10} + \underline{Y}_{20} + \underline{Y}_{30}$$

Für die umgekehrte Umwandlung, d.h. von einer Dreieck- in eine Sternschaltung (Abbildung 3.20b) folgt

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{13}}{\sum \underline{Z}}, \quad \underline{Z}_{20} = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23}}{\sum \underline{Z}}, \quad \underline{Z}_{30} = \frac{\underline{Z}_{13}\underline{Z}_{23}}{\sum \underline{Z}} \tag{3.54}$$

mit

$$\sum \underline{Z} = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}$$

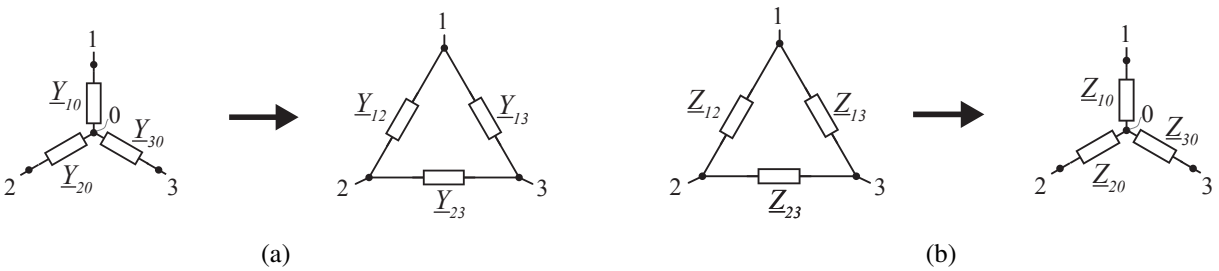


Figure 3.20: a) Umwandlung einer Stern- in eine Dreieckschaltung. b) Umwandlung einer Dreieckschaltung in eine Sternschaltung.

3.3 Maschenstromverfahren

3.3.1 Analyse von Netzwerken – Motivation

Im Folgenden werden systematische, d.h. stark formalisierte Berechnungsverfahren für Netzwerke mit einer grösseren Komplexität betrachtet wie z.B. das Netzwerk in Abbildung 3.21a mit $K = 5$ Knoten (blau hinterlegt) und $Z = 9$ Zweigen. Diese Verfahren sind auch die Grundlage von Netzwerksanalyseprogrammen wie z.B. PSpice, Simplorer oder PLECS, die mit den Verfahren die Systemgleichungen ermitteln.

Für die Analyse der Netzwerke wird dabei die folgende Konvention getroffen: Zweigspannungen $\underline{\hat{u}}_n$ (Spannung zwischen zwei über einen Zweig verbundenen Knoten) und Zweigströme $\underline{\hat{i}}_n$ (Strom durch den Zweig) sollen stets in die gleiche Richtung positiv gezählt werden, so wie dies in den Abbildungen 3.21b und 3.21c dargestellt ist.

In dem betrachteten Netzwerk sind allgemein Z Zweigspannungen und Z Zweigströme gesucht, d.h. es gibt insgesamt $2Z$ Unbekannte. Durch die Strom-/Spannungsbeziehungen für jeden Zweig kann die Zahl der Unbekannten auf Z reduziert werden. Für die beiden Zweige in den Abbildungen 3.21b und 3.21c sind die Strom-/Spannungsbeziehungen z.B. gleich

$$\underline{\hat{u}}_n = \underline{Z}_n \cdot \underline{\hat{i}}_n - \underline{\hat{u}}_{qn} \quad \text{(Abbildung 3.21b)} \tag{3.55}$$

$$\underline{\hat{i}}_n = \frac{1}{\underline{Z}_n} \cdot \underline{\hat{u}}_n - \underline{\hat{i}}_{qn} \quad \text{(Abbildung 3.21c)} \tag{3.56}$$

Für die Z Unbekannten werden nun insgesamt Z Gleichungen benötigt. Bei konventioneller Vorgehensweise würde man z.B. mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze über die Knotenregel insgesamt $(K-1)$ linear unabhängige Knotengleichungen und über die Maschenregel die noch fehlenden $Z-(K-1)$ linear unabhängige Maschengleichungen erhalten. Dabei ist es wichtig, dass die Gleichungen linear unabhängig sind. Dies erreicht man zum Beispiel indem jede neue berechnete Masche mindestens einen vorher nicht erfassten Zweig enthalten muss.

Insgesamt resultieren mit dieser Vorgehensweise eine relativ hohe Anzahl an Gleichungen – z.B. für das Netzwerk in Abbildung 3.21a ein Gleichungssystem mit 9 Gleichungen. Das Lösen dieses Gleichungssystem ist vor allem bei grösseren Netzwerken sehr aufwendig. Mit den im Folgenden vorgestellten Maschenstrom- und Knotenpotenzialverfahren kann die Anzahl an Variablen/Gleichungen deutlich reduziert werden. Weiterhin ist der Berechnungsvorgang sehr formalisiert und man erhält automatisch immer linear unabhängige Gleichungen, ohne dass man dies noch zusätzlich prüfen oder sich extra überlegen muss.

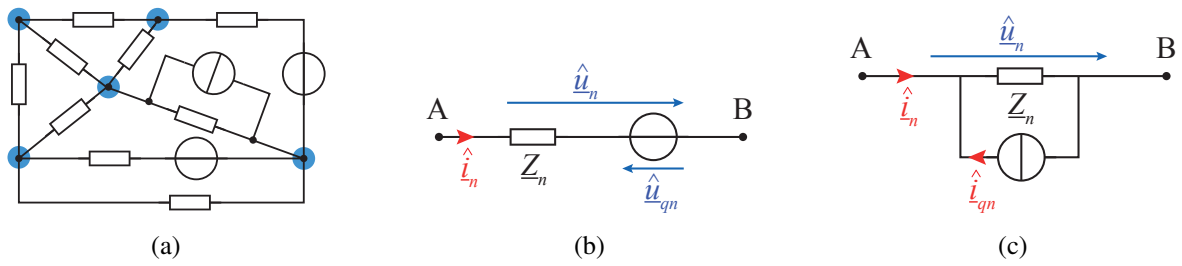


Figure 3.21: a) Beispiel für ein komplizierteres Netzwerk mit 5 Knoten und 9 Zweigen zwischen diesen Knoten. In b) ist die Konvention für die Bezugsrichtung der Zweigspannungen $\underline{\hat{u}}_n$ und des Zweigstromes $\underline{\hat{i}}_n$ im Fall einer Spannungsquelle und in c) im Fall einer Stromquelle dargestellt.

3.3.2 Konzept des Maschenstromverfahrens

Zu Beginn werden zur Vereinfachung vorerst nur Netzwerke bestehend aus R, L und C sowie aus unabhängigen Spannungsquellen betrachtet. Die Berechnung von Netzwerken mit Stromquellen, gesteuerten Quellen und Transformatoren folgt dann später. Als Beispiel dient das Netzwerk in Abbildung 3.22 mit K = 4 Knoten und Z= 6 Zweigen, d.h. bei konventioneller Vorgehensweise (siehe oben) werden insgesamt 6 Gleichungen benötigt. Im Folgenden wird das Verfahren zuerst formal abgeleitet/beschrieben und am

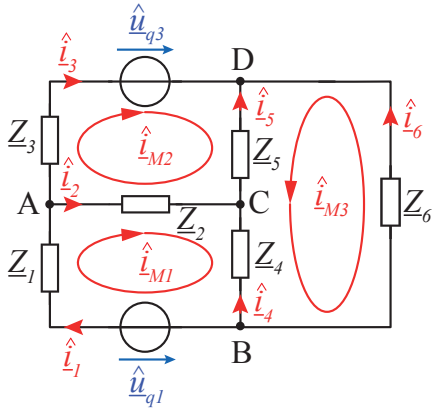


Figure 3.22: Beispielnetzwerk mit 4 Knoten und 6 Zweigen zur Demonstration des Maschenstromverfahrens. In dem Netzwerk sind 3 Maschenströme mit dem dazugehörigen Umlaufsinn eingetragen.

Ende des Kapitels kommt dann eine kompakte schrittweise Anleitung, wie das Verfahren einfach in der Praxis angewendet werden kann.

Um die Zahl der Unbekannten zu reduzieren, werden sogenannte (in sich) geschlossene (virtuelle) Maschenströme $\hat{\underline{i}}_{M1}, \hat{\underline{i}}_{M2}, \hat{\underline{i}}_{M3}$ eingeführt. Diese erfüllen die Knotengleichungen von vornherein, da ja jeder Maschenstrom jeweils in einen Knoten hinein- und auch wieder herausfliesst. Maschenströme sind dabei virtuelle Grössen und können nur in Zweigen gemessen werden, in denen Sie sich nicht mit anderen Maschenströmen überlagern. So kann z.B. in Abbildung 3.22 der Maschenstrom $\hat{\underline{i}}_{M3}$ direkt im Zweig mit der Impedanz $\underline{Z}_6$ gemessen werden.

Der jeweilige Zweigstrom ergibt sich dann aus der vorzeichenrichtigen Überlagerung der Maschenströme für den betrachteten Zweig. Für das Netzwerk in Abbildung 3.22 können die sechs Zweigströme durch die drei Maschenströme wie folgt berechnet werden

$$\begin{array}{lllll}
\hat{\underline{i}}_1 = & \hat{\underline{i}}_{M1} & & & \\
\hat{\underline{i}}_2 = & \hat{\underline{i}}_{M1} & -\hat{\underline{i}}_{M2} & & \\
\hat{\underline{i}}_3 = & & \hat{\underline{i}}_{M2} & & \\
\hat{\underline{i}}_4 = & -\hat{\underline{i}}_{M1} & & -\hat{\underline{i}}_{M3} & \\
\hat{\underline{i}}_5 = & & -\hat{\underline{i}}_{M2} & -\hat{\underline{i}}_{M3} & \\
\hat{\underline{i}}_6 = & & & \hat{\underline{i}}_{M3} &
\end{array} \quad \Rightarrow \quad \hat{\underline{\boldsymbol{i}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \hat{\underline{\boldsymbol{i}}}_M \tag{3.57}$$

In kompakter Matrixschreibweise ergibt dies

$$\hat{\underline{\boldsymbol{i}}} = \boldsymbol{A} \cdot \hat{\underline{\boldsymbol{i}}}_M \tag{3.58}$$

Die Spaltenvektoren $\hat{\underline{\boldsymbol{i}}}$ und $\hat{\underline{\boldsymbol{i}}}_M$ fassen dabei die Zweigströme bzw. die Maschenströme zusammen und sind durch die sogenannte Inzidenzmatrix $\boldsymbol{A}$ mit den Elementen $a_{ij} = [0, +1, -1]$ verknüpft.

Im nächsten Schritt werden mit Hilfe der Zweigspannungen (grün strichliert in Abbildung 3.23) Maschenumläufe (Maschengleichungen) entlang der drei Maschenströme durchgeführt. Daraus folgen die drei Maschengleichungen

$$\begin{array}{lllllll}
\text{Maschenstrom } \hat{\underline{i}}_{M1}: & \hat{\underline{u}}_1 & +\hat{\underline{u}}_2 & & -\hat{\underline{u}}_4 & & & = 0 \\
\text{Maschenstrom } \hat{\underline{i}}_{M2}: & & -\hat{\underline{u}}_2 & +\hat{\underline{u}}_3 & & -\hat{\underline{u}}_5 & & = 0 \\
\text{Maschenstrom } \hat{\underline{i}}_{M3}: & & & & -\hat{\underline{u}}_4 & -\hat{\underline{u}}_5 & +\hat{\underline{u}}_6 & = 0
\end{array} \tag{3.59}$$

Wie die Matrixdarstellung der obigen drei Gleichungen zeigt, sind die Zweigspannungen in den Maschengleichungen über die Transponierte der Inzidenzmatrix verknüpft, wobei $\hat{\underline{\boldsymbol{u}}}$ der Spaltenvektor der Zweigspannungen ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{u}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\underline{u}}_6 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{A}^T \cdot \hat{\underline{\boldsymbol{u}}} = 0 \tag{3.60}$$

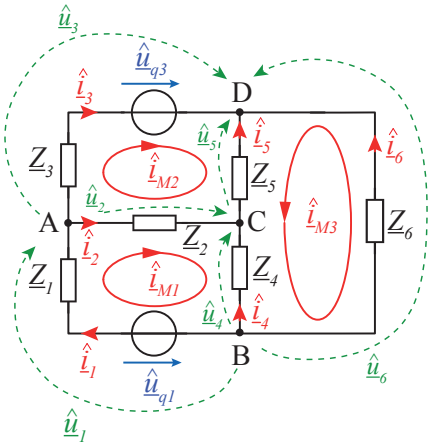


Figure 3.23: Beispielnetzwerk aus Abbildung 3.22, in welchem zusätzlich die Zweigspannungen eingetragen sind.

Dieselben drei Maschengleichungen werden nun nicht mit den Zweigspannungen, sondern mit Hilfe der Strom-Spannungsbeziehungen des jeweiligen Zweiges direkt mit den Maschenströmen aufgestellt, um von vornherein die Anzahl der Variablen zu reduzieren. Die Zweigspannungen $\underline{\hat{u}}_1$ und $\underline{\hat{u}}_5$ ergeben sich z.B. aus: $\underline{\hat{u}}_1 = -\underline{\hat{u}}_{q1} + \underline{\hat{i}}_{M1}\underline{Z}_1$ und $\underline{\hat{u}}_5 = \underline{Z}_5 \cdot (-\underline{\hat{i}}_{M2} - \underline{\hat{i}}_{M3})$. Damit können die drei Maschengleichungen wie folgt geschrieben werden.

$$\begin{aligned}
&\text{Masche 1:} && \underline{Z}_1\underline{\hat{i}}_{M1} + \underline{Z}_2(\underline{\hat{i}}_{M1} - \underline{\hat{i}}_{M2}) + \underline{Z}_4(\underline{\hat{i}}_{M1} + \underline{\hat{i}}_{M3}) = \underline{\hat{u}}_{q1} \\
&\text{Masche 2:} && \underline{Z}_2(\underline{\hat{i}}_{M2} - \underline{\hat{i}}_{M1}) + \underline{Z}_3\underline{\hat{i}}_{M2} + \underline{Z}_5(\underline{\hat{i}}_{M2} + \underline{\hat{i}}_{M3}) = -\underline{\hat{u}}_{q3} \\
&\text{Masche 3:} && \underline{Z}_4(\underline{\hat{i}}_{M3} + \underline{\hat{i}}_{M1}) + \underline{Z}_5(\underline{\hat{i}}_{M3} + \underline{\hat{i}}_{M2}) + \underline{Z}_6\underline{\hat{i}}_{M3} = 0
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Die einzelnen Terme in den drei Maschengleichungen können nun nach den Maschenströmen sortiert werden. Auf der rechten Seite stehen die bekannten Quellengrössen.

$$\begin{aligned}
(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) \cdot \underline{\hat{i}}_{M1} - \quad & \underline{Z}_2 \cdot \underline{\hat{i}}_{M2} + \quad & \underline{Z}_4 \cdot \underline{\hat{i}}_{M3} &= \underline{\hat{u}}_{q1} \\
-\underline{Z}_2 \cdot \underline{\hat{i}}_{M1} + \quad & (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5) \cdot \underline{\hat{i}}_{M2} + \quad & \underline{Z}_5 \cdot \underline{\hat{i}}_{M3} &= -\underline{\hat{u}}_{q3} \\
\underline{Z}_4 \cdot \underline{\hat{i}}_{M1} + \quad & \underline{Z}_5 \cdot \underline{\hat{i}}_{M2} + \quad & (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6) \cdot \underline{\hat{i}}_{M3} &= 0
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Damit folgt in Matrixdarstellung für die Verknüpfung der Maschenströme und der Quellengrössen die Maschenimpedanzmatrix $\underline{\boldsymbol{Z}}_M$.

$$\begin{array}{l}\text{Masche 1:}\\ \text{Masche 2:}\\ \text{Masche 3:}\end{array}
\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 & -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_4 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5 & \underline{Z}_5 \\ \underline{Z}_4 & \underline{Z}_5 & \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 \end{pmatrix}}_{\text{Maschenimpedanzmatrix } \underline{\boldsymbol{Z}}_M} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\hat{i}}_{M1} \\ \underline{\hat{i}}_{M2} \\ \underline{\hat{i}}_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\hat{u}}_{q1} \\ -\underline{\hat{u}}_{q3} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

Die Matrixgleichung kann nun nach den Maschenströmen aufgelöst werden. Aus den Maschenströmen folgen mit $\underline{\hat{\boldsymbol{i}}} = \boldsymbol{A}\,\underline{\hat{\boldsymbol{i}}}_M$ die Zweigströme und daraus mit den Strom- und Spannungsgleichungen der Zweige die Zweigspannungen. Damit ist das Netzwerk vollständig analysiert.

In der Hauptdiagonale der Maschenimpedanzmatrix $\underline{\boldsymbol{Z}}_M$ stehen die Summen aller Elemente, die vom jeweiligen Maschenumlauf berührt werden. Solange keine gesteuerten Quellen auftreten ist die Maschenimpedanzmatrix symmetrisch zur Hauptdiagonale. Die Elemente $\underline{Z}_{ij}$ ausserhalb der Hauptdiagonale werden durch die Netzwerkelemente gebildet, die jeweils von $\underline{\hat{i}}_{Mi}$ und $\underline{\hat{i}}_{Mj}$ gemeinsam durchflossen werden. Der Spaltenvektor auf der rechten Seite enthält die Spannungen der Quellen, die von dem betreffenden Maschenumlauf erfasst werden.

Durch Einführen der Maschenströme muss zum Berechnen des betrachteten Beispielnetzwerkes nur ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten anstatt mit ursprünglichen 6 Gleichungen gelöst werden. Dies vereinfacht den Rechenaufwand erheblich – v.a. bei grösseren Netzwerken.

Generell ist es empfehlenswert, für alle Maschenströme die gleiche Umlaufrichtung zu wählen (z.B. alle im Uhrzeigersinn) – dies reduziert u.a. die Wahrscheinlichkeit von Flüchtigkeitsfehlern.

3.3.3 Maschenauswahl

Im Folgenden werden zwei mögliche Verfahren gezeigt, wie die "richtigen" Maschen im Netzwerk für die Maschenströme ausgewählt werden.

Maschenauswahl über vollständigen Baum

Um die Vollständigkeit und Unabhängigkeit der benötigten $m = Z - (K-1)$ Maschengleichungen auch bei komplexen Netzwerken einfach zu gewährleisten, gibt es verschiedene Verfahren. Der allgemeinste Ansatz geht dabei von der Graphendarstellung des Netzwerkes aus, um die unabhängigen Maschen zu bestimmen. Dieser Ansatz wird als Verfahren des vollständigen Baums bezeichnet. Als Beispiel für diesen Ansatz dient das Netzwerk in Abbildung 3.24a mit der Knotenanzahl $K = 5$ und der Zahl der Zweige: $Z = 9$. Damit werden insgesamt $m = Z - (K-1) = 5$ unabhängige Maschen benötigt.

Im ersten Schritt wird die Graphendarstellung des Netzwerkes mit den folgenden Schritten/Regeln abgeleitet:

1. Alle Zweige des Netzwerks werden durch Verbindungslinien zwischen den jeweiligen zwei Knoten, die mit dem Zweig verbunden sind, ersetzt.
2. Alle Spannungsquellen werden unwirksam gemacht, d.h. durch Kurzschlüsse ersetzt.
3. Alle Stromquellen werden unwirksam gemacht, d.h. durch Leerläufe ersetzt.

Durch dieses Verfahren erhält man eine Graphendarstellung, bei der die grundsätzliche Knotenstruktur des Netzwerks erhalten bleibt. Für das Beispielnetzwerk in Abbildung 3.24a mit $K = 5$ Knoten resultiert damit die einfache Graphendarstellung in Abbildung 3.24b.

Im zweiten Schritt wird der Graph in einen vollständigen Baum umgewandelt, indem gerade so viele Zweige entfernt werden, dass keine geschlossenen Maschen mehr vorkommen. Dabei müssen jedoch weiterhin alle Knoten miteinander verbunden bleiben. In Abbildung 3.25a sind 3 mögliche Varianten $V1, V2$ und $V3$ von vollständigen Bäumen für das Netzwerk in Abbildung 3.24a dargestellt.

Der vollständige Baum weist dabei genau $(K-1)$ Baumzweige auf. Herausgenommen wurden also $Z - (K-1)$ "unabhängige" Verbindungszweige der insgesamt Z ursprünglich vorhandenen Zweige. Jeder der K Knoten des Netzwerks ist damit über die Baumzweige des vollständigen Baums erreichbar. Mit jedem der $Z - (K-1)$ unabhängigen Verbindungszweige kann nun genau eine Masche gebildet werden, die sonst nur Baumzweige enthält. Damit können $Z - (K-1)$ linear unabhängige Maschenströme festgelegt werden, die das Netzwerk vollständig beschreiben und die jeweils nur über genau einen unabhängigen Verbindungszweig verlaufen.

In Abbildung 3.25b sind 2 Varianten des Graphen für das Beispielnetzwerk auf Basis des vollständigen Baums in Abbildung 3.25a dargestellt. Dabei sind die Baumzweige als dicke schwarze Linien und

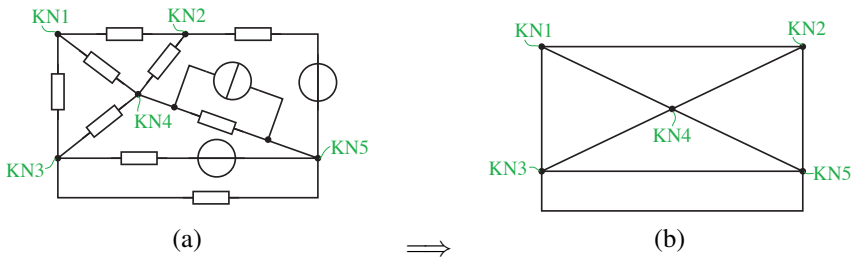


Figure 3.24: a) Beispielnetzwerk zur Erläuterung der Maschenauswahl über einen vollständigen Baum. b) Graphendarstellung für das Netzwerk in Bild a).

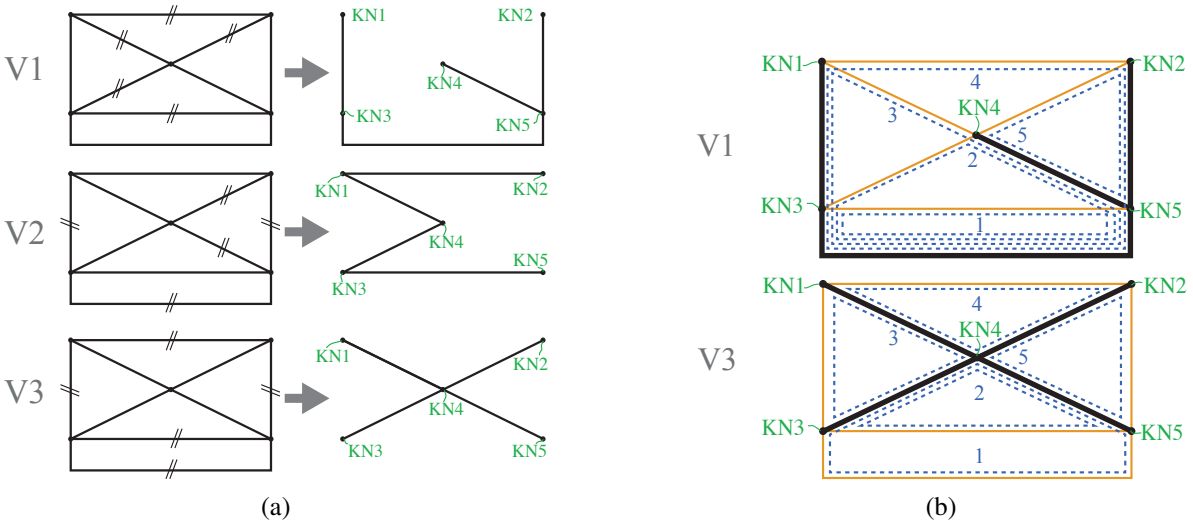


Figure 3.25: a) Drei mögliche vollständige Bäume für das Beispielnetzwerk in Abbildung 3.24a. b) Zwei Varianten des Graphen für das Beispielnetzwerk auf Basis der vollständigen Bäume $V1$ und $V3$. Die unabhängigen Verbindungszweige sind orange und die Zweige des vollständigen Baumes sind schwarz dargestellt.

die unabhängigen Verbindungszweige als dünne orange Linien dargestellt. Weiterhin sind $Z-(K-1)=5$ Maschenumläufe, die jeweils nur einen Verbindungszweig enthalten, als blaue strichlierte Linien eingezeichnet. Generell sind sternförmige Baumstrukturen wie z.B. $V3$ in Abbildung 3.25b vorteilhaft bzgl. des Rechenaufwands.

Für die erhaltenen Maschen können nun im nächsten Schritt die Maschenströme eingeführt und die Maschengleichungen wie oben beschrieben aufgestellt werden.

Maschenauswahl über Elementarmaschen

Als Alternative zur Maschenauswahl über den vollständigen Baum können die Maschen im Fall von Netzwerken, die sich kreuzungsfrei auf einer Ebene ausbreiten lassen, d.h. die Zweige des Netzwerks schneiden sich nur in Knoten, auch über die sogenannten Elementarmaschen (siehe unten) ausgewählt werden. Dieses Verfahren ist deutlich einfacher und es wird keine Graphendarstellung benötigt. Diese spezielle Art der Netzwerke wird als ebene Netzwerke bezeichnet und tritt in der Praxis sehr häufig auf. Als Beispiel für ein nicht ebenes Netzwerk ist die Schaltung in Abbildung 3.26b gegeben, die 3 Schnittpunkte aufweist, die keine Knoten sind (rot umrandet).

In einem ebenen Netzwerk werden alle Maschen, in deren Inneren sich keine Zweige befinden, als Elementarmaschen bezeichnet. Diese sind in Abbildung 3.26a durch rote Kreise mit einheitlichem Umlaufsinn gekennzeichnet. Diese Elementarmaschen stellen voneinander unabhängige Maschenumläufe dar, die für das Maschenstromverfahren genutzt werden können. Dabei müssen ideale Stromquellen im Netzwerk unwirksam gemacht werden, d.h. durch Leerläufe ersetzt werden, bevor die Elementarmaschen zum Aufstellen der Maschengleichungen bestimmt werden. Das Verfahren der Elementarmaschen wird später noch in einem Beispiel näher beschrieben.

Damit gibt es nun 2 Verfahren zum Bestimmen eines Sets M an unabhängigen Maschen, die für das Maschenstromverfahren benötigt werden: Das Verfahren des vollständigen Baums und das Verfahren der Elementarmaschen. Im Fall von nicht kreuzungsfrei darstellbaren Netzwerken wird das Verfahren des vollständigen Baums angewendet. Zum Vereinfachen der Rechnung ist dabei zu beachten:

- ▷ *Möglichst einen Baum mit sternförmiger Struktur (bzw. einfachen Maschenverläufen, die keine/wenige Zweige umschliessen,) wählen*, da sich dann erstens einfachere Maschengleichungen ergeben, da die Maschenströme jeweils durch weniger Baumzweige verlaufen. Zweitens braucht es jeweils weniger Maschenströme, um die Baumzweigströme bzw. die Zweigströme zu berechnen.

- ▷ *Ideale Spannungsquellen sollten in Baumzweigen liegen*, da in diesem Fall weniger Koppelimpedanzen in den Gleichungen/in der Matrix auftreten, da diese in Verbindungszweige verlagert werden.

- ▷ *Ideale Stromquellen sollten in Verbindungszweigen liegen*, da sich in Baumzweigen immer mehrere Maschenströme überlagern und durch die Stromquelle im Verbindungszweig direkt ein Maschenstrom definiert wird. (Erläuterung dazu: Abschnitt 3.3.4 – Verfahren der Stromquellenmaschen)
- ▷ *Sind nur einzelne Ströme im Netzwerk gesucht, so sollten diese in Verbindungszweigen fliessen*, da dann der gesuchte Strom jeweils direkt einem Maschenstrom entspricht.

Falls das Netzwerk kreuzungsfrei ist, wählt man am einfachsten die Elementarmaschen, die man im Set M zusammenfasst, für das Maschenstromverfahren.

(a) (b)

Figure 3.26: a) Symbolisches kreuzungsfreies, ebenes Netzwerk mit 16 Elementarmaschen, die jeweils mit einem roten Kreis mit Pfeil gekennzeichnet sind. b) Beispiel für ein nicht kreuzungsfreies Netzwerk.

3.3.4 Stromquellen

Bisher wurden nur Netzwerke mit R, L und C Bauelementen sowie mit unabhängigen Spannungsquellen betrachtet. Zur Berücksichtigung von (realen) Stromquellen mit konstanter Amplitude und Phase im Maschenstromverfahren gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

1. Stromquellenwandlung: Beim Verfahren der Stromquellenwandlung werden die Stromquellen in Spannungsquellen umgewandelt, so wie dies in Abschnitt 3.1.3 beschrieben wurde. Dabei ist im fall von $\underline{Y}_i = 0$ keine direkte Umwandlung möglich, da ja $\underline{Z}_i = 1/\underline{Y}_i$ gilt. Dieses Problem kann über eine Quellenteilung und -versetzung gelöst werden (siehe Abschnitt 3.2.3), womit die idealen Stromquellen in reale Stromquellen umgewandelt werden können.
2. Stromquellenmasche: Beim Verfahren der Stromquellenmasche werden die Maschenströme so gewählt, dass über eine ideale Stromquelle jeweils nur ein Maschenstrom verläuft. Da der Strom durch die ideale Stromquelle bekannt ist, ist auch der Maschenstrom bekannt, der über die Stromquelle verläuft, und damit ist dieser keine Unbekannte mehr. Folglich braucht man für die eine Masche, die die ideale Stromquelle enthält, auch keine Maschengleichung mehr aufzustellen. (Anschaulich geht ja diese eine Masche auch bei der Umwandlung der realen Stromquelle in eine reale Spannungsquelle "verloren"). Praktisch kann man beim Aufstellen der Maschengleichungen so vorgehen, dass man im ersten Schritt die idealen Stromquellen aus dem Netzwerk entfernt, d.h. durch Leerläufe ersetzt. Für dieses reduzierte Netzwerk wählt man die Maschen und führt die dazugehörigen Maschenströme ein. Im nächsten Schritt werden die entfernten idealen Stromquellen wieder hinzugefügt und für jede ideale Stromquelle wird ein zusätzlicher bekannter Maschenstrom eingeführt, der über die jeweilige Stromquelle verläuft. Dieser Maschenstrom ist dabei gleich dem Strom der jeweiligen idealen Stromquelle.

Gesteuerte Quellen: Zum Berücksichtigen von gesteuerten Quellen werden diese beim Aufstellen des Gleichungssystems zunächst wie unabhängige Quellen behandelt. Im zweiten Schritt werden die Abhängigkeiten der gesteuerten Quellen von den jeweiligen Maschenströmen eingesetzt und damit die Steuergleichung in den Systemgleichungen berücksichtigt. Ein Beispiel dazu folgt später. Zuest wird jedoch ein Beispiel für das Verfahren der Stromquellenmasche gezeigt.

Beispiel: Verfahren der Stromquellenmasche

Zum Erläutern des Maschenstromverfahrens bei ebenen Netzwerken mit Stromquellen werden nun beispielhaft die Netzwerksgleichungen für das Netzwerk in Abbildung 3.27a mit der Verfahren der

Stromquellenmasche aufgestellt. Dabei sind die Widerstände R_1 - R_5, sowie die Spannung $\underline{\hat{u}}$ und der Strom $\underline{\hat{i}}$ gegeben. Die Berechnungsschritte sind:

1. Die ideale Stromquelle $\underline{\hat{i}}$ wird durch einen Leerlauf ersetzt. Damit gibt es noch 2 Elementarmaschen im reduzierten Set M^* so wie dies in Abbildung 3.27b ersichtlich ist.

2. Den Elementarmaschen im reduzierten Set M^* werden die unbekannten Maschenströme $\underline{\hat{i}}_{M1}$ und $\underline{\hat{i}}_{M2}$ mit Umlaufsinn zugewiesen.

3. Die ideale Stromquelle $\underline{\hat{i}}$ wird wieder eingefügt und der Masche M_I mit der Stromquelle wird der Maschenstrom $\underline{\hat{i}}$ zugewiesen (Abbildung 3.27c), der bekannt ist, da ja der Strom der Stromquelle gegeben ist. (Hinweis: Im betrachteten Fall gibt es insgesamt dabei vier mögliche Verläufe für den Maschenstrom $\underline{\hat{i}}$. Die Wahl des Verlaufs hat keinen Einfluss auf das Ergebnis).

4. Für das reduzierte Set M^* werden die 2 Maschengleichungen aufgestellt (Abbildung 3.27c):

$$\underline{\hat{u}}_{R_1}+\underline{\hat{u}}_{R_2}+\underline{\hat{u}}_{R_3}-\underline{\hat{u}}=R_1\underline{\hat{i}}_{M1}+R_2\left(\underline{\hat{i}}_{M1}-\underline{\hat{i}}_{M2}\right)+R_3\left(\underline{\hat{i}}_{M1}-\underline{\hat{i}}_{M2}-\underline{\hat{i}}\right)-\underline{\hat{u}}=0 \tag{3.64}$$

$$R_4\underline{\hat{i}}_{M2}+R_5\left(\underline{\hat{i}}_{M2}+\underline{\hat{i}}\right)+R_3\left(\underline{\hat{i}}_{M2}+\underline{\hat{i}}-\underline{\hat{i}}_{M1}\right)+R_2\left(\underline{\hat{i}}_{M2}-\underline{\hat{i}}_{M1}\right)=0 \tag{3.65}$$

Fasst man die Gleichungen in der Matrixform zusammen, so folgt

$$\begin{pmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_2-R_3 \\ -R_2-R_3 & R_2+R_3+R_4+R_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\hat{i}}_{M1} \\ \underline{\hat{i}}_{M2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \underline{\hat{u}}+R_3\underline{\hat{i}} \\ -\left(R_3+R_5\right)\underline{\hat{i}} \end{pmatrix} \tag{3.66}$$

Nach Lösen des Gleichungssystems können die einzelnen Zweigströme durch folgende Zusammenhänge ermittelt werden

$$\underline{\hat{i}}_{R_1}=\underline{\hat{i}}_{M1},\ \underline{\hat{i}}_{R_2}=\underline{\hat{i}}_{M1}-\underline{\hat{i}}_{M2},\ \underline{\hat{i}}_{R_3}=\underline{\hat{i}}_{M1}-\underline{\hat{i}}_{M2}-\underline{\hat{i}},\ \underline{\hat{i}}_{R_4}=\underline{\hat{i}}_{M2},\ \underline{\hat{i}}_{R_5}=\underline{\hat{i}}_{M2}+\underline{\hat{i}} \tag{3.67}$$

Die jeweiligen Spannungen ergeben sich aus den Strom-/Spannungsbeziehungen der Bauelemente.

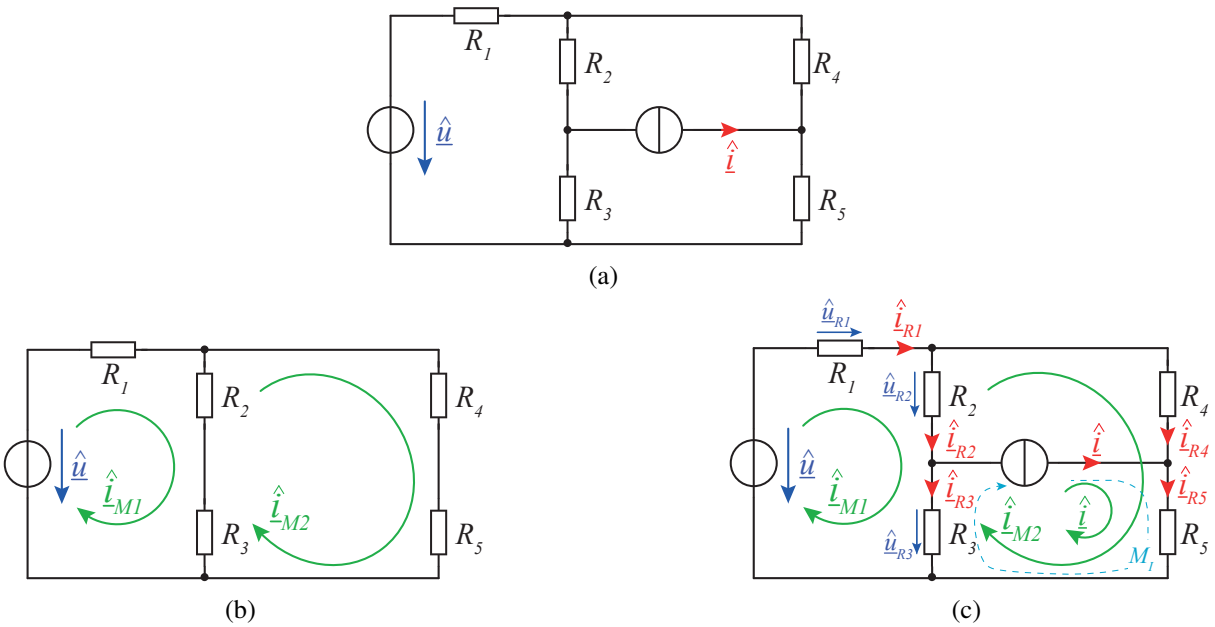


Figure 3.27: a) Beispielnetzwerk mit 3 Maschen für das Verfahren der Stromquellenmasche. b) Nach dem Entfernen der idealen Stromquelle resultieren zwei Elementarmaschen M^* mit den unbekannten Maschenströmen $\underline{\hat{i}}_{M1}$ und $\underline{\hat{i}}_{M2}$. c) Nachdem die ideale Stromquelle wieder eingefügt wurde, resultiert noch eine weitere Masche mit dem bekannten Maschenstrom $\underline{\hat{i}}$, der gleich dem Quellenstrom ist.

Gesteuerte Quelle mit Stromquellenwandlung

Im folgenden Beispiel wird noch die Anwendung des Maschenstromverfahrens bei einer gesteuerten Stromquelle anhand des Netzwerkes in Abbildung 3.28a gezeigt. Dabei wird zuerst das Verfahren der Stromquellenwandlung für die Behandlung von Stromquellen angewendet.

Im ersten Schritt wird die reale spannungsgesteuerte Stromquelle in eine reale Spannungsquelle umgewandelt. Dazu wird die Leerlaufspannung der realen Stromquelle ermittelt und auch gleich noch die Steuerspannung $\underline{\hat{u}}_s$ durch die Maschenströme in Abbildung 3.28b ausgedrückt.

$$\underline{\hat{u}}_{LL} = \underline{\hat{u}}_g = R_4 S \underline{\hat{u}}_S = R_2 R_4 S(\underline{\hat{i}}_{M1} + \underline{\hat{i}}_{M2}) \quad \text{mit} \quad \underline{\hat{u}}_S = R_2(\underline{\hat{i}}_{M1} + \underline{\hat{i}}_{M2}) \tag{3.68}$$

Der Innenwiderstand der Ersatzspannungsquelle entspricht direkt dem Widerstand R_4.

Für den vollständigen Baum in Abbildung 3.28b, den man mit dem Verfahren des vollständigen Baums erhält, folgen damit die beiden Maschengleichungen

$$R_1 \underline{\hat{i}}_{M1} + R_2(\underline{\hat{i}}_{M1} + \underline{\hat{i}}_{M2}) = \underline{\hat{u}}_q \tag{3.69}$$

$$R_2(\underline{\hat{i}}_{M1} + \underline{\hat{i}}_{M2}) + (R_3 + R_4)\underline{\hat{i}}_{M2} = \underline{\hat{u}}_g = R_2 R_4 S(\underline{\hat{i}}_{M1} + \underline{\hat{i}}_{M2}) \tag{3.70}$$

Umsortieren der Gleichungen nach den Maschenströmen liefert

$$(R_1 + R_2)\, \underline{\hat{i}}_{M1} \; + \; R_2\, \underline{\hat{i}}_{M2} = \underline{\hat{u}}_q \tag{3.71}$$

$$(R_2 - R_2 R_4 S)\, \underline{\hat{i}}_{M1} \; + \; (R_2 + R_3 + R_4 - R_2 R_4 S)\, \underline{\hat{i}}_{M2} = 0 \tag{3.72}$$

Das Gleichungssystem zur Berechnung der Maschenströme ist damit

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 - R_2 R_4 S & R_2 + R_3 + R_4 - R_2 R_4 S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\hat{i}}_{M1} \\ \underline{\hat{i}}_{M2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\hat{u}}_q \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.73}$$

Die Maschenimpedanzmatrix ist dabei aufgrund der gesteuerten Quelle unsymmetrisch.

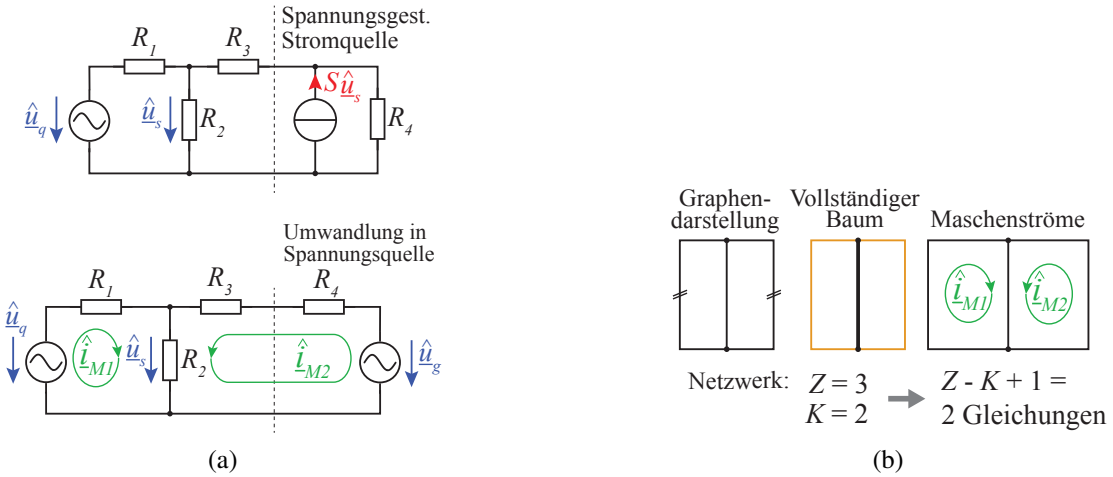


Figure 3.28: a) Beispielnetzwerk mit einer gesteuerten Stromquelle, die in eine Spannungsquelle umgewandelt wird. b) Vollständiger Baum für das Beispielnetzwerk mit der umgewandelten Spannungsquelle.

Gesteuerte Quelle mit Stromquellenmasche

Alternativ kann das Beispielnetzwerk von Abbildung 3.28a auch mit dem Verfahren der Stromquellenmasche berechnet werden, wie im Folgenden gezeigt wird. Im ersten Schritt wird dazu die spannungsgesteuerte Stromquelle durch einen Leerlauf ersetzt. Damit resultiert das Netzwerk in Abbildung 3.29b. Dieses hat zwei Maschen, für die die zwei Maschenströme $\underline{\hat{i}}_{M1}$ und $\underline{\hat{i}}_{M2}$ im zweiten Schritt eingeführt werden.

Im dritten Schritt wird die spannungsgesteuerte Stromquelle wieder zum Netzwerk hinzugefügt und der Maschenstrom $\hat{\underline{i}}_q$ eingeführt, der direkt durch die Stromquelle verläuft. Damit ist dieser Maschenstrom gleich dem gegebenen Strom durch die Stromquelle, d.h. es gilt

$$\hat{\underline{i}}_q = S\hat{\underline{u}}_S \tag{3.74}$$

Im vierten Schritt werden die Maschengleichungen für die beiden (Elementar-)Maschen in Abbildung 3.29b aufgestellt

$$R_1\hat{\underline{i}}_{M1} + R_2(\hat{\underline{i}}_{M1} + \hat{\underline{i}}_{M2}) = \hat{\underline{u}}_q \tag{3.75}$$

$$R_2(\hat{\underline{i}}_{M1} + \hat{\underline{i}}_{M2}) + R_4(\hat{\underline{i}}_{M2} - \hat{\underline{i}}_q) + R_3\hat{\underline{i}}_{M2} = 0 \tag{3.76}$$

Mit der Steuergleichung $\hat{\underline{u}}_S = R_2(\hat{\underline{i}}_{M1} + \hat{\underline{i}}_{M2})$ folgt $\hat{\underline{i}}_q = S\hat{\underline{u}}_S = SR_2(\hat{\underline{i}}_{M1} + \hat{\underline{i}}_{M2})$. Setzt man dies in die obigen Maschengleichungen ein und sortiert die Gleichungen nach den Maschenströmen, so erhält man

$$(R_1 + R_2)\,\hat{\underline{i}}_{M1} \;+\; R_2\,\hat{\underline{i}}_{M2} = \hat{\underline{u}}_q \tag{3.77}$$

$$(R_2 - R_2R_4S)\,\hat{\underline{i}}_{M1} \;+\; (R_2 + R_3 + R_4 - R_2R_4S)\,\hat{\underline{i}}_{M2} = 0 \tag{3.78}$$

Dies ist dasselbe Gleichungssystem wie beim Verfahren der Stromquellenwandlung (siehe Gleichung (3.73)).

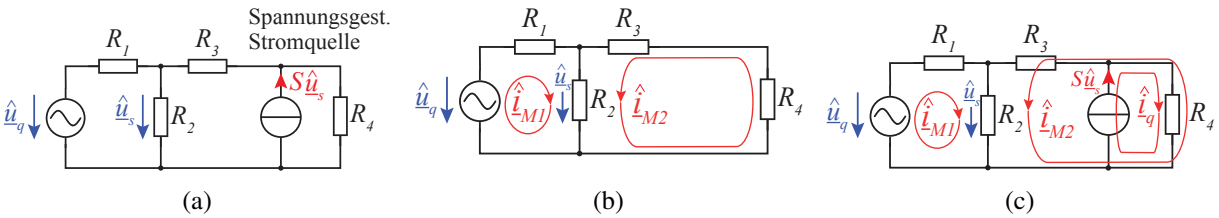


Figure 3.29: a) Beispielnetzwerk mit einer gesteuerten Stromquelle. b) Resultierendes Netzwerk nach dem Entfernen der idealen Stromquelle. c) Maschenströme für das Beispielnetzwerk inklusive dem bekannten Maschenstrom $\hat{\underline{i}}_q$.

3.3.5 Übertrager

Um Übertrager/Transformatoren beim Maschenstromverfahren zu berücksichtigen, wird jede Seite des Übertragers wie ein separater Zweig des Netzwerks behandelt. Beim Aufstellen der Maschengleichung ist dann zusätzlich zum Strom durch die Wicklung auch der Strom durch die gekoppelte Wicklung über die Gegeninduktivität zu berücksichtigen, d.h. die Spannung über der Wicklung des Transformators ergibt sich aus

$$\hat{\underline{u}}_1 = \mathrm{j}\omega L_1\hat{\underline{i}}_{Mi} + \mathrm{j}\omega M\hat{\underline{i}}_{Mj} \tag{3.79}$$

$$\hat{\underline{u}}_2 = \mathrm{j}\omega M\hat{\underline{i}}_{Mi} + \mathrm{j}\omega L_2\hat{\underline{i}}_{Mj} \tag{3.80}$$

bzw. folgt für die Maschengleichung im jeweiligen Umlauf

Maschengleichung für $\hat{\underline{i}}_{Mi}$: $\ldots \mathrm{j}\omega L_1\,\hat{\underline{i}}_{Mi} + \mathrm{j}\omega M\,\hat{\underline{i}}_{Mj}\ldots$

Maschengleichung für $\hat{\underline{i}}_{Mj}$: $\ldots \mathrm{j}\omega L_2\,\hat{\underline{i}}_{Mj} + \mathrm{j}\omega M\,\hat{\underline{i}}_{Mi}\ldots$

(Wichtig: Zählrichtung der Ströme/Spannungen beachten)

Alternativ kann der Übertrager auch durch zwei Spulen in Serie zu je einer stromgesteuerten Spannungsquelle, die die magnetische Kopplung beschreiben, modelliert werden – siehe Abbildung 3.30b. Die resultierenden Gleichungen sind identisch.

Zum Veranschaulichen der Maschenstromanalyse bei Übertragern wird als nächstes Beispiel die Schaltung in Abbildung 3.30a mit einem Transformator bzw. mit zwei gekoppelten Spulen betrachtet und

das Gleichungssystem mit Hilfe des Maschenstromverfahrens aufgestellt. Zur Verdeutlichung wird die Kopplung der beiden Spulen durch die zwei stromgesteuerten Spannungsquellen modelliert

$$\underline{\hat{u}}_{Ind,1} = \mathrm{j}\omega M \underline{\hat{i}}_4 \tag{3.81}$$

$$\underline{\hat{u}}_{Ind,2} = \mathrm{j}\omega M \underline{\hat{i}}_3 \tag{3.82}$$

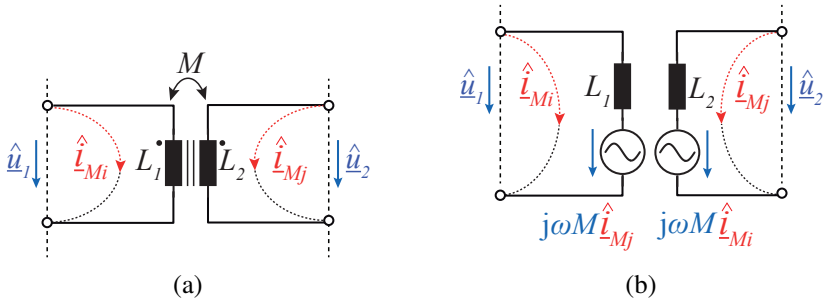


Figure 3.30: a) Übertrager mit den beiden Maschenströmen $\underline{\hat{i}}_{Mi}$ und $\underline{\hat{i}}_{Mj}$. b) Ersatzmodell des Transformators in a), wobei die magnetische Kopplung mittels zweier stromgesteuerten Spannungsquellen beschrieben wird.

Beispiel

Als Beispiel für die Anwendung des Maschenstromverfahrens bei Netzwerken mit Transformatoren, wird nun das Netzwerk in Abbildung 3.31a betrachtet. Dieses Netzwerk hat insgesamt 4 Maschen ($M_1 \ldots M_4$), für welche die vier Maschenströme $\underline{\hat{i}}_{M1} \ldots \underline{\hat{i}}_{M4}$ eingeführt werden. Mit den vier Maschenströmen können die Ströme durch die gekoppelten Spulen direkt durch einen der Maschenströme ausgedrückt werden: $\underline{\hat{i}}_3 = \underline{\hat{i}}_{M2}$ und $\underline{\hat{i}}_4 = \underline{\hat{i}}_{M3}$. Damit folgt für die induzierten Spannungen: $\underline{\hat{u}}_{Ind,1} = \mathrm{j}\omega M \underline{\hat{i}}_{M3}$ und $\underline{\hat{u}}_{Ind,2} = \mathrm{j}\omega M \underline{\hat{i}}_{M2}$

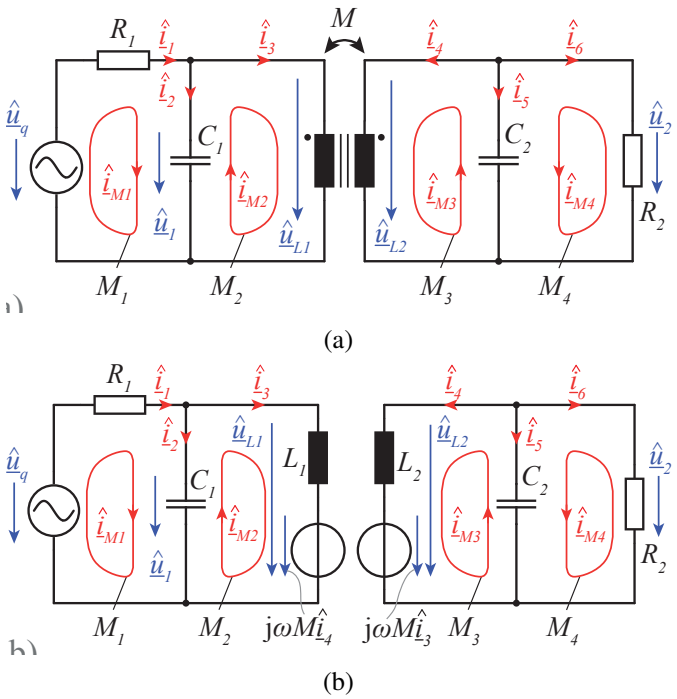


Figure 3.31: a) Beispielnetzwerk für das Maschenstromverfahren mit Transformatoren. b) Modellierung des Transformators mit zwei Spulen und zwei stromgesteuerten Spannungsquellen.

bzw. für die vier Maschengleichungen

$$\text{M1:} \quad \hat{\underline{i}}_{M1}\left(R_1+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}\right)-\frac{\hat{\underline{i}}_{M2}}{\mathrm{j}\omega C_1} = \hat{\underline{u}}_q \tag{3.83}$$

$$\text{M2:} \quad -\frac{\hat{\underline{i}}_{M1}}{\mathrm{j}\omega C_1}+\hat{\underline{i}}_{M2}\left(\mathrm{j}\omega L_1+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}\right) = -\hat{\underline{u}}_{Ind,1} = -\mathrm{j}\omega M\hat{\underline{i}}_{M3} \tag{3.84}$$

$$\text{M3:} \quad \hat{\underline{i}}_{M3}\left(\mathrm{j}\omega L_2+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}\right)-\frac{\hat{\underline{i}}_{M4}}{\mathrm{j}\omega C_2} = -\hat{\underline{u}}_{Ind,2} = -\mathrm{j}\omega M\hat{\underline{i}}_{M2} \tag{3.85}$$

$$\text{M4:} \quad -\frac{\hat{\underline{i}}_{M3}}{\mathrm{j}\omega C_2}+\hat{\underline{i}}_{M4}\left(R_2+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}\right) = 0 \tag{3.86}$$

Anstatt die Kopplung in einem zusätzlichen Schritt mit den stromgesteuerten Spannungsquellen zu modellieren, kann dies direkt über die Transformatorgleichungen (3.79) und (3.80) gemacht werden, so wie dies oben beschrieben wurde. Im betrachten Fall ergibt sich für die Spannungen über den Wicklungen des Transformators

$$\hat{\underline{u}}_{L1} = \mathrm{j}\omega L_1\hat{\underline{i}}_{M2}+\mathrm{j}\omega M\hat{\underline{i}}_{M3} \tag{3.87}$$

$$\hat{\underline{u}}_{L2} = \mathrm{j}\omega M\hat{\underline{i}}_{M2}+\mathrm{j}\omega L_2\hat{\underline{i}}_{M3} \tag{3.88}$$

3.3.6 "Kochrezept"

Im Folgenden wird die allgemeine Vorgehensweise beim Maschenstromverfahren für ebene Netzwerke zusammengefasst. Dabei werden die benötigten Maschen mit Hilfe der Elementarmaschen ermittelt (d.h. es wird von einem ebenen Netzwerk ausgegangen).

1. **Vereinfachung**: Vor dem Aufstellen der Gleichungen nach dem Maschenstromverfahren kann es unter Umständen sinnvoll sein, das Netzwerk zu vereinfachen – z.B. parallel / in Serie geschaltete Impedanzen zusammenzufassen, falls die Ströme/Spannungen der separaten Impedanzen nicht benötigt werden. Weiterhin ist es möglich, Teile des Netzwerkes, deren elektrische Grössen nicht im Detail gesucht werden, z.B. mit dem Satz der Ersatzspannungsquelle zusammenzufassen. Weiterhin werden alle gesteuerte Quellen durch unabhängige Quellen ersetzt.

2. **Stromquellenersatz**: Ersetze alle (idealen) Stromquellen durch einen Leerlauf, dabei werden die beiden Elementarmaschen, die die Stromquelle enthielten, zu einer neuen Elementarmasche zusammengefasst. Damit folgt ein neues, reduziertes Set/Menge an Elementarmaschen M^* (mit weniger Elementarmaschen).

3. **Maschenströme**: Weise jeder der Elementarmaschen im Set M^* einen (virtuellen) Maschenstrom mit Umlaufsinn zu. Dabei ist es vorteilhaft, für alle Maschenströme den gleichen Umlaufsinn zu wählen.

4. **Stromquellenmasche**: Füge die zuvor entfernten Stromquellen wieder ein. Ergänze für jede Stromquelle einen zusätzlichen Maschenstrom, der jeweils nur über die eingefügte Stromquelle fliesst und der in Richtung des Stromes der Stromquelle weist. Folglich ist der ergänzte Maschenstrom gleich dem Strom durch die jeweilige Stromquelle. Für die neu entstandene Masche wird keine Maschengleichung benötigt, da der eingefügte Maschenstrom bekannt ist.

5. **Maschengleichungen**: Stelle für jede Elementarmasche im Set M^* die Maschengleichung auf. Der Spannungsabfall über eine Impedanz $\underline{Z}$ ist dabei gleich $\underline{Z}$ mal der Summe aller Maschenströme durch diese Impedanz $\underline{Z}$.

6. **Gleichungsumformung**: Umformen des Gleichungssystems:

   – Steuergleichungen der gesteuerten Quellen einsetzen
   – Alle bekannten Quellengrössen auf die "rechte" Seite der Gleichungen bringen
   – Sortieren der Gleichungen nach den Maschenströmen

Mit diesen 6 Schritten resultieren die Gleichungen für die Maschenströme. Nach dem Lösen des Gleichungssystems für die Maschenströme, können aus den Zusammenhängen zwischen den Zweigströmen und den Maschenströmen (3.58) sowie aus den Strom-/Spannungsbeziehungen der einzelnen Komponenten und Zweige (3.56) die Gleichungen/Zahlenwerte für die gesuchten Zweigströme bzw. Zweigspannungen ermittelt werden.

3.3.7 Matrixdarstellung

Auf Basis der oben erläuterten Zusammenhänge wird im Folgenden das Maschenstromverfahren unter Verwendung der Matrixschreibweise nochmals zusammengefasst.

Im ersten Schritt müssen dabei die unabhängigen Maschen mit Hilfe der Wahl eines vollständigen Baumes oder bei ebenen Netzwerken auf Basis der Elementarmaschen bestimmt und die Maschenströme eingeführt werden.

Im zweiten Schritt werden die Zweigströme und die Maschenströme über die Inzidenzmatrix (3.58) verknüpft.

$$\underline{\hat{i}} = \boldsymbol{A} \cdot \underline{\hat{i}}_M \quad \text{mit: } \boldsymbol{A} = \text{Inzidenzmatrix mit Dimension: } Z \times Z - (K-1) \tag{3.89}$$

Danach werden die Maschengleichungen für alle unabhängigen Maschen aufgestellt. Dies resultiert in $Z-(K-1)$ Gleichungen – siehe Gleichung (3.60).

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \underline{\hat{u}} = 0 \tag{3.90}$$

Für die einzelnen Zweige wird die Verknüpfung der jeweiligen Zweigspannung mit dem dazugehörigen Zweigstrom auf Basis der Gleichung (3.56) als Matrix aufgestellt.

$$\underline{\hat{u}} = \underline{\boldsymbol{Z}}\,\underline{\hat{i}} - \underline{\hat{u}}_q \quad \text{mit: } \underline{\boldsymbol{Z}} = \text{Diagonalmatrix der Zweigimpedanzen} \tag{3.91}$$

Durch Einsetzen von (3.89) in (3.91) und der daraus entstandenen Gleichung in (3.90) erhält man das Gleichungssystem der Maschenströme mit $Z-(K-1)$ Gleichungen in Matrixform.

$$\underbrace{\boldsymbol{A}^T \underline{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{A}}_{\underline{\boldsymbol{Z}}_M} \cdot \underline{\hat{i}}_M = \boldsymbol{A}^T \cdot \underline{\hat{u}}_q \tag{3.92}$$

$\underline{\boldsymbol{Z}}_M$ wird dabei als Maschenimpedanzmatrix bezeichnet

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_M = \boldsymbol{A}^T \underline{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{A} \tag{3.93}$$

Das Gleichungssystem kann nach entsprechender Vorbereitung direkt aus einfach zu ermittelnden Teilmatrizen aufgestellt werden und ist für eine automatisierte Schaltungsanalyse besonders vorteilhaft.

Beim manuellen Aufstellen der Gleichungen werden vorteilhaft die Schritte durchgeführt, die unter Maschenstromverfahren - "Kochrezept" in Abschnitt 3.3.6 gelistet sind.

3.4 Knotenpotenzialverfahren

Das Knotenpotenzialverfahren kann als dual zur Maschenstromanalyse angesehen werden und ist vorteilhaft bei Schaltungen mit vielen Zweigen und wenigen Knoten anzuwenden. Bei der nachfolgenden Betrachtung werden zuerst wiederum nur Netzwerke mit R, L und C Bauelementen sowie mit unabhängigen Stromquellen betrachtet. Die Erweiterung des Verfahrens auf Spannungsquellen, gesteuerte Quellen und Übertrager folgt wieder später.

Das Knotenpotenzialverfahren wird im Folgenden beispielhaft anhand des Netzwerks in Abbildung 3.32 mit $K = 4$ Knoten erläutert.

- ▷ Im ersten Schritt wird jedem Knoten des Netzwerks eines der Potenziale $\underline{\hat{\varphi}}_A, \underline{\hat{\varphi}}_B, \underline{\hat{\varphi}}_C$ und $\underline{\hat{\varphi}}_D$ zugeordnet. Hinweis: Im Abschnitt 3.4.5 ist noch eine allgemeine Erläuterung zu Potenzialen gegeben.

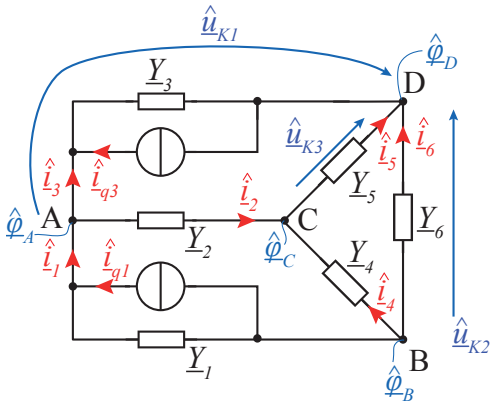


Figure 3.32: Beispielnetzwerk mit 4 Knoten zum Erläutern des Knotenpotenzialverfahrens.

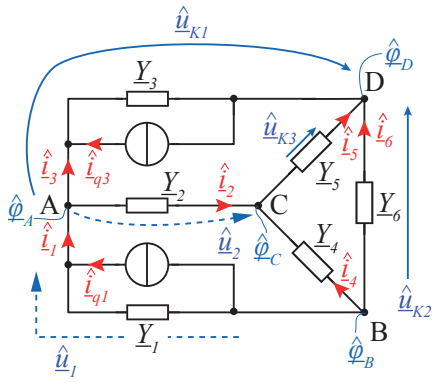


Figure 3.33: In Ergänzung zu Abbildung 3.32 sind noch die Zweigspannungen $\hat{\underline{u}}_1$ und $\hat{\underline{u}}_2$ eingetragen.

▷ Anschliessend wird ein (beliebiger) Bezugsknoten definiert. Im betrachteten Beispiel wird der Knoten D als Bezugsknoten gewählt. Weiterhin werden $K-1$ Knotenspannungen als Potenzialdifferenz zum gewählten Bezugsknoten eingeführt

$$\hat{\underline{u}}_{K1} = \hat{\underline{\varphi}}_A - \hat{\underline{\varphi}}_D \qquad \hat{\underline{u}}_{K2} = \hat{\underline{\varphi}}_B - \hat{\underline{\varphi}}_D \qquad \hat{\underline{u}}_{K3} = \hat{\underline{\varphi}}_C - \hat{\underline{\varphi}}_D \tag{3.94}$$

▷ Mit den Knotenspannungen kann jede Zweigspannung als Funktion einer oder über einen Maschenumlauf mehrerer Knotenspannungen ausgedrückt werden. Die mathematische Darstellung der Verknüpfung erfolgt vorteilhaft in Matrixform, wie im Folgenden gezeigt wird.

Für die Zuordnung der Zweigspannungen und der Knotenspannungen ergibt sich für das Beispielnetzwerk

$$\begin{array}{lrrr}
\hat{\underline{u}}_1 = & -\hat{\underline{u}}_{K1} & +\hat{\underline{u}}_{K2} & \\
\hat{\underline{u}}_2 = & \hat{\underline{u}}_{K1} & & -\hat{\underline{u}}_{K3} \\
\hat{\underline{u}}_3 = & \hat{\underline{u}}_{K1} & & \\
\hat{\underline{u}}_4 = & & \hat{\underline{u}}_{K2} & -\hat{\underline{u}}_{K3} \\
\hat{\underline{u}}_5 = & & & \hat{\underline{u}}_{K3} \\
\hat{\underline{u}}_6 = & & \hat{\underline{u}}_{K2} &
\end{array} \tag{3.95}$$

Dabei weisen die Bezugspfeile für die Zweigspannung und den Zweigstrom in einem Zweig immer in dieselbe Richtung – siehe Gleichung (3.56).

Bei Darstellung in Matrixform resultiert die Inzidenzmatrix $\boldsymbol{B}$ als Verknüpfung der Spaltenvektoren der

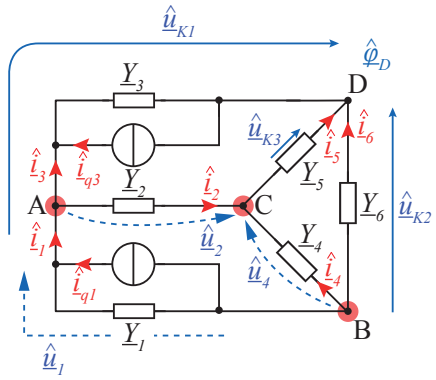


Figure 3.34: In Ergänzung zu Abbildung 3.32 sind noch die Zweigspannung $\hat{\underline{u}}_4$ eingetragen und die betrachteten Knoten A, B C hervorgehoben.

Zweig- $\hat{\underline{\boldsymbol{u}}}$ und der Knotenspannungen $\hat{\underline{\boldsymbol{u}}}_{\boldsymbol{K}}$.

$$\hat{\underline{\boldsymbol{u}}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{\underline{\boldsymbol{u}}}_{\boldsymbol{K}} \qquad \text{oder} \qquad \hat{\underline{\boldsymbol{u}}} = \boldsymbol{B} \cdot \hat{\underline{\boldsymbol{u}}}_K \tag{3.96}$$

In der Inzidenzmatrix $\boldsymbol{B}$ treten die Elemente $b_{ij} = [0, +1, -1]$ auf, abhängig davon ob und in welcher Richtung die betreffende Knotenspannung bei den Maschenumläufen verwendet wird.

So wie beim Maschenstromverfahren die Maschenströme die Kirchhoffschen Knotengleichungen von vornherein erfüllen, so erfüllen beim Knotenpotenzialverfahren die Knotenspannungen von vornherein die jeweilige Maschengleichung. Dies erkennt man z.B. an der Masche: A $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C in Abbildung 3.32 mit der Maschengleichung: $\hat{\underline{u}}_{K1} - \hat{\underline{u}}_{K3} - \hat{\underline{u}}_2 = 0$, welche mit $\hat{\underline{u}}_2 = \hat{\underline{u}}_{K1} - \hat{\underline{u}}_{K3}$ in $\hat{\underline{u}}_{K1} - \hat{\underline{u}}_{K3} - (\hat{\underline{u}}_{K1} - \hat{\underline{u}}_{K3}) = 0$ resultiert, d.h. die Knotengleichung ist erfüllt.

Im nächsten Schritt werden nun für die Berechnung der $K-1$ unbekannten Knotenspannungen insgesamt $K-1$ linear unabhängige Knotengleichungen aufgestellt. Dies ergibt für das Netzwerk in Abbildung 3.34, wo die relevanten Knoten rot hinterlegt sind, folgende Knotengleichungen

$$\begin{array}{lrcrcrl} \text{Knoten A:} & -\hat{\underline{i}}_1 & + & \hat{\underline{i}}_2 & + & \hat{\underline{i}}_3 & = 0 \\ \text{Knoten B:} & \hat{\underline{i}}_1 & + & \hat{\underline{i}}_4 & + & \hat{\underline{i}}_6 & = 0 \\ \text{Knoten C:} & -\hat{\underline{i}}_2 & - & \hat{\underline{i}}_4 & + & \hat{\underline{i}}_5 & = 0 \end{array} \tag{3.97}$$

$$\text{oder} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{\underline{\boldsymbol{i}}} = \boldsymbol{0} \tag{3.98}$$

Wie die Matrixdarstellung zeigt, sind die Zweigströme über die Transponierte der Inzidenzmatrix $\boldsymbol{B}$ miteinander verknüpft.

$$\boldsymbol{B}^T \cdot \hat{\underline{\boldsymbol{i}}} = 0 \tag{3.99}$$

Dieselben Knotengleichungen können auch als Funktion der Zweigspannungen aufgestellt werden. Dabei treten typischerweise Beziehungen in der allgemeinen Form $\hat{\underline{i}}_i = \underline{Y}_i \hat{\underline{u}}_i - \hat{\underline{i}}_{qi}$ auf – siehe Gleichung (3.56).

$$\begin{array}{rrrl} -(\underline{Y}_1\hat{\underline{u}}_1 + \hat{\underline{i}}_{q1}) & + \underline{Y}_2\hat{\underline{u}}_2 & + (\underline{Y}_3\hat{\underline{u}}_3 - \hat{\underline{i}}_{q3}) & = 0 \\ (\underline{Y}_1\hat{\underline{u}}_1 + \hat{\underline{i}}_{q1}) & + \underline{Y}_4\hat{\underline{u}}_4 + & \underline{Y}_6\hat{\underline{u}}_6 & = 0 \\ -\underline{Y}_2\hat{\underline{u}}_2 & - \underline{Y}_4\hat{\underline{u}}_4 + & \underline{Y}_5\hat{\underline{u}}_5 & = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcl} -\underline{Y}_1\hat{\underline{u}}_1 & + & \underline{Y}_2\hat{\underline{u}}_2 & + & \underline{Y}_3\hat{\underline{u}}_3 & = & \hat{\underline{i}}_{q1} + \hat{\underline{i}}_{q3} \\ \underline{Y}_1\hat{\underline{u}}_1 & + & \underline{Y}_4\hat{\underline{u}}_4 & + & \underline{Y}_6\hat{\underline{u}}_6 & = & -\hat{\underline{i}}_{q1} \\ -\underline{Y}_2\hat{\underline{u}}_2 & - & \underline{Y}_4\hat{\underline{u}}_4 & + & \underline{Y}_5\hat{\underline{u}}_5 & = & 0 \end{array} \tag{3.100}$$

Abschliessend werden noch auf Basis der Gleichungen (3.96) die Zweigspannungen durch Knotenspannungen ersetzt, womit ein inhomogenes Gleichungssystem resultiert, welches nach den $K-1$ unbekannten Knotenspannungen aufgelöst werden kann.

$$\begin{array}{l}\text{Knoten A}\\ \text{Knoten B}\\ \text{Knoten C}\end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3 & -\underline{Y}_1 & -\underline{Y}_2 \\ -\underline{Y}_1 & \underline{Y}_1+\underline{Y}_4+\underline{Y}_6 & -\underline{Y}_4 \\ -\underline{Y}_2 & -\underline{Y}_4 & \underline{Y}_2+\underline{Y}_4+\underline{Y}_5 \end{pmatrix}}_{\text{Admittanzmatrix } \underline{\boldsymbol{Y}}_M} \begin{pmatrix} \underline{\hat{u}}_{K1} \\ \underline{\hat{u}}_{K2} \\ \underline{\hat{u}}_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\hat{i}}_{q1}+\underline{\hat{i}}_{q3} \\ -\underline{\hat{i}}_{q1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.101}$$

Mit den berechneten Knotenspannungen können auf Basis von $\underline{\hat{u}} = B\,\underline{\hat{u}}_K$ die Zweigspannungen und daraus die Zweigströme berechnet werden. Das Netzwerk ist damit vollständig analysiert.

Jede Zeile der obigen Matrixgleichung ist einem Knoten zugeordnet. In der Hauptdiagonale steht dabei die Summe aller Admittanzen, welche am betreffenden Knoten angeschlossen sind. Weiterhin ist die Admittanzmatrix $\underline{\boldsymbol{Y}}_M$ symmetrisch zur Hauptdiagonale, solange keine gesteuerten Quellen im Netzwerk vorhanden sind. Der Spaltenvektor auf der rechten Seite enthält die Summe der Quellenströme aller an den jeweiligen Knoten angeschlossenen Zweige. Im betrachteten Beispiel gehen dabei dem Knoten abfliessende Ströme mit positiven Vorzeichen ein.

Wahl des Bezugsknotens: Der festzulegende Bezugsknoten ist prinzipiell frei wählbar, vorteilhaft wird jedoch ein zentraler Knoten mit möglichst vielen direkten Verbindungen zu anderen Knoten gewählt. Dies ist häufig der Masseknoten (GND), d.h. das Bezugspotenzial für die Schaltung. Hinweis: Prinzipiell kann für den Bezugsknoten auch ein beliebiger Knoten ausserhalb des Netzwerkes gewählt werden, da sich das Potenzial des Bezugsknotens in den Gleichungen gegenseitig aufhebt. Damit würde jedoch eine zusätzliche Gleichung benötigt werden.

Um die Vollständigkeit und die lineare Unabhängigkeit der Gleichungen sicherzustellen, werden die Knotenspannungen der $K-1$ Knoten gegenüber dem Bezugsknoten als unbekannte Variablen gewählt.

Hat im betrachteten Beispiel der Bezugsknoten D das Potenzial $\underline{\hat{\varphi}}_D = 0$, so sind die Knotenspannungen gleich den Knotenpotenzialen – siehe Gleichung (3.94)

$$\underline{\hat{u}}_{K1} = \underline{\hat{\varphi}}_A \qquad \underline{\hat{u}}_{K2} = \underline{\hat{\varphi}}_B \qquad \underline{\hat{u}}_{K3} = \underline{\hat{\varphi}}_C \tag{3.102}$$

3.4.1 Spannungsquellen

Bisher wurden nur Netzwerke mit R, L und C Bauelementen und Stromquellen betrachtet. Diese limitierte Auswahl an Bauelementen wird nun im nächsten Schritt auf ideale und reale Spannungsquellen erweitert. Zur Berücksichtigung von Spannungsquellen im Knotenpotenzialverfahren gibt es analog wie bei den Stromquellen beim Maschenstromverfahren zwei grundsätzliche Verfahren:

1. Spannungsquellenwandlung: Beim Verfahren der Spannungsquellenwandlung werden die Spannungsquellen in Stromquellen umgewandelt, so wie dies im Abschnitt 3.1.3 beschrieben wurde. Dabei ist im Fall von $\underline{Z}_i = 0$ keine direkte Umwandlung möglich, da ja $\underline{Y}_i = 1/\underline{Z}_i$ gilt. Dieses Problem kann über eine Quellenteilung und -versetzung gelöst werden (siehe Abschnitt 3.2.3).

2. Spannungsquellenknoten: Beim Verfahren der Spannungsquellenknoten wird um die beiden Knoten, die über die Spannungsquelle direkt miteinander verbunden sind, eine Hüllfläche gelegt. Im Beispielnetzwerk in Abbildung 3.35 sind dies die beiden Knoten B und A. Die Hüllfläche ist als grün strichlierte Linie eingezeichnet. Da die Knotenspannungen der beiden Knoten B und A über die Spannungsquelle fest über: $\underline{\hat{u}}_{K1} = \underline{\hat{u}}_q + \underline{\hat{u}}_{K2}$ miteinander verbunden ist, ist nur noch eine der beiden Knotenspannungen $\underline{\hat{u}}_{K1}$ bzw. $\underline{\hat{u}}_{K2}$ eine unabhängige Variable. Damit reduziert sich das Gleichungssystem um eine Dimension pro idealer Spannungsquelle zwischen zwei Netzwerkknoten.

   Anstatt für die beiden Knoten A und B jeweils eine Knotengleichung aufzustellen, wird eine Knotengleichung für die Hüllfläche aufgestellt (Aus diesem Grund wird die Hüllfläche in diesem Verfahren auch als Superknoten bezeichnet). Die Knotengleichung für die Hüllfläche im Beispielnetzwerk lautet

$$\underline{\hat{i}}_2 + \underline{\hat{i}}_3 + \underline{\hat{i}}_4 + \underline{\hat{i}}_6 = 0 \tag{3.103}$$

Ersetzt man die Ströme mit Hilfe der Strom-/Spannungsbeziehungen so folgt

$$(\underline{\hat{u}}_{K1} - \underline{\hat{u}}_{K3})\underline{Y}_2 + [\underline{\hat{u}}_{K1}\underline{Y}_3 - \underline{\hat{i}}_{q3}] + (\underline{\hat{u}}_{K2} - \underline{\hat{u}}_{K3})\underline{Y}_4 + \underline{\hat{u}}_{K2}\underline{Y}_6 = 0 \tag{3.104}$$

Mit der Beziehung $\underline{\hat{u}}_{K1} = \underline{\hat{u}}_q + \underline{\hat{u}}_{K2}$ ergibt sich

$$((\underline{\hat{u}}_q + \underline{\hat{u}}_{K2}) - \underline{\hat{u}}_{K3})\underline{Y}_2 + [(\underline{\hat{u}}_q + \underline{\hat{u}}_{K2})\underline{Y}_3 - \underline{\hat{i}}_{q3}] + (\underline{\hat{u}}_{K2} - \underline{\hat{u}}_{K3})\underline{Y}_4 + \underline{\hat{u}}_{K2}\underline{Y}_6 = 0 \tag{3.105}$$

Bringt man die bekannten Quellengrössen auf die rechte Seite der Gleichung so resultiert

$$\Rightarrow \quad (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_6)\,\underline{\hat{u}}_{K2} - (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_4)\,\underline{\hat{u}}_{K3} = \underline{\hat{i}}_{q3} - \underline{\hat{u}}_q(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \tag{3.106}$$

Falls zur Spannungsquelle eine Impedanz in Serie geschaltet ist, d.h. es sich um eine reale Spannungsquelle handelt, so ist es meist am einfachsten, diese in eine reale Stromquelle umzuwandeln.

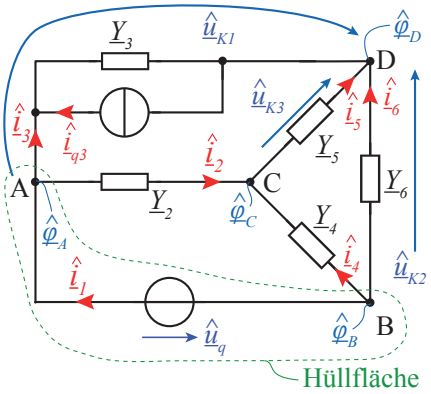


Figure 3.35: Beispielnetzwerk mit einer idealen Spannungsquelle und der Hüllfläche um die Knoten A und B.

Beispiel mit idealer Spannungsquelle

Zur weiteren Veranschaulichung der Anwendung des vorgestellten Verfahrens im Fall von idealen Spannungsquellen wird das Netzwerk in Abbildung 3.36 untersucht, wobei die Widerstände R_1 - R_8, sowie die Spannung $\underline{\hat{u}}$ und der Strom $\underline{\hat{i}}$ gegeben sind und die Zweigströme / Zweigspannungen gesucht werden.

1. Bezugsknoten wählen. Dieser hat das Potenzial 0.
2. Führe um die beiden Knoten K_5 und K_4, die über die Spannungsquelle $\underline{\hat{u}}$ direkt miteinander verbunden sind, eine Hüllfläche ein.
3. Weise den 3 Knoten K_1, K_2 und K_3 die unbekannten Knotenspannungen $\underline{\hat{u}}_{K1}$, $\underline{\hat{u}}_{K2}$ und $\underline{\hat{u}}_{K3}$ zu. Im Fall der beiden Knoten K_4 und K_5, die von einer Hüllfläche umschlossen werden, wird dem Knoten K_4 am Endpunkt des Bezugspfeils der Spannung $\underline{\hat{u}}$ die unbekannte Knotenspannung $\underline{\hat{u}}_{K4}$ und dem Knoten K_5 die abhängige Knotenspannung $\underline{\hat{u}}_{K5} = \underline{\hat{u}}_{K4} + \underline{\hat{u}}$ zugewiesen.
4. Aufstellen der Knotengleichungen und Anwendung der Strom-/Spannungsbeziehungen. Für die Knoten K_4 und K_5 wird eine Knotengleichung für die gemeinsame Hüllfläche aufgestellt.

Damit ergeben sich die folgenden Knotengleichungen

$$K_1 \rightarrow \underline{\hat{i}}_2 - \underline{\hat{i}}_1 + \underline{\hat{i}}_4 = 0 \quad \xrightarrow[\text{Beziehung}]{\underline{\hat{u}}/\underline{\hat{i}}} \quad \frac{\underline{\hat{u}}_{K1} - \underline{\hat{u}}_{K2}}{\underline{Z}_2} - \frac{\underline{\hat{u}}_{K4} + \underline{\hat{u}} - \underline{\hat{u}}_{K1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{\hat{u}}_{K1} - \underline{\hat{u}}_{K3}}{\underline{Z}_4} = 0 \tag{3.107}$$

$$K_2 \rightarrow \underline{\hat{i}}_3 - \underline{\hat{i}}_2 + \underline{\hat{i}} - \underline{\hat{i}}_8 = 0 \quad \xrightarrow[\text{Beziehung}]{\underline{\hat{u}}/\underline{\hat{i}}} \quad \frac{\underline{\hat{u}}_{K2}}{\underline{Z}_3} - \frac{\underline{\hat{u}}_{K1} - \underline{\hat{u}}_{K2}}{\underline{Z}_2} + \underline{\hat{i}} - \frac{\underline{\hat{u}}_{K4} - \underline{\hat{u}}_{K2}}{\underline{Z}_8} = 0 \tag{3.108}$$

$$K_3 \rightarrow \underline{\hat{i}}_5 - \underline{\hat{i}}_4 - \underline{\hat{i}} = 0 \quad \xrightarrow[\text{Beziehung}]{\underline{\hat{u}}/\underline{\hat{i}}} \quad \frac{\underline{\hat{u}}_{K3}}{\underline{Z}_5} - \frac{\underline{\hat{u}}_{K1} - \underline{\hat{u}}_{K3}}{\underline{Z}_4} - \underline{\hat{i}} = 0 \tag{3.109}$$

$$K_4 + K_5 \rightarrow \underline{\hat{i}}_1 + \underline{\hat{i}}_8 + \underline{\hat{i}}_6 + \underline{\hat{i}}_7 = 0 \quad \xrightarrow[\text{Beziehung}]{\underline{\hat{u}}/\underline{\hat{i}}} \quad \frac{\underline{\hat{u}}_{K4} + \underline{\hat{u}} - \underline{\hat{u}}_{K1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{\hat{u}}_{K4} - \underline{\hat{u}}_{K2}}{\underline{Z}_8} + \frac{\underline{\hat{u}}_{K4}}{\underline{Z}_6} + \frac{\underline{\hat{u}}_{K4} + \underline{\hat{u}}}{\underline{Z}_7} = 0 \tag{3.110}$$

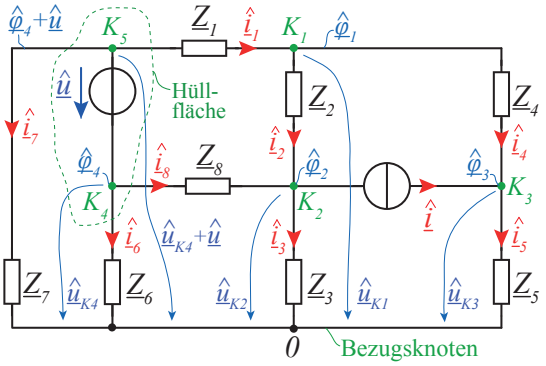


Figure 3.36: Beispielnetzwerk für das Knotenpotenzialverfahren bei Netzwerken mit idealen Spannungsquellen.

3.4.2 Gesteuerte Quellen und Übertrager

Im nächsten Schritt wird die Berücksichtigung von gesteuerten Quellen und anschliessend von Transformatoren beim Knotenpotenzialverfahren untersucht.

Gesteuerte Quellen: Zum Berücksichtigen von gesteuerten Quellen werden diese – genauso wie beim Maschenstromverfahren – beim Aufstellen des Gleichungssystems zunächst wie unabhängige Quellen behandelt. Im zweiten Schritt werden die Abhängigkeiten der Quellen von den jeweiligen Knotenspannungen eingesetzt und damit die Steuergleichung in den Systemgleichungen berücksichtigt.

Übertrager: Zum Berücksichtigen von Transformatoren beim Knotenpotenzialverfahren werden die Gleichungen für den Transformator (3.79) und (3.80) nach den Strömen aufgelöst und das Ersatzschaltbild des Transformators in Abbildung 3.37b in ein Ersatzschaltbild mit zwei spannungsgesteuerten Stromquellen umgewandelt – siehe Abbildung 3.37c.

$$\hat{\underline{i}}_1 = \underline{Y}_1\hat{\underline{u}}_1 + \underline{Y}_M\hat{\underline{u}}_2 \tag{3.111}$$

$$\hat{\underline{i}}_2 = \underline{Y}_M\hat{\underline{u}}_1 + \underline{Y}_2\hat{\underline{u}}_2 \tag{3.112}$$

mit

$$\underline{Y}_1 = \frac{L_2}{\mathrm{j}\omega(L_1L_2 - M^2)},\ \underline{Y}_2 = \frac{L_1}{\mathrm{j}\omega(L_1L_2 - M^2)} \text{ und } \underline{Y}_M = \frac{-M}{\mathrm{j}\omega(L_1L_2 - M^2)}$$

Mit dem Ersatzschaltbild basierend auf den spannungsgesteuerten Stromquellen kann der Transformator direkt im Knotenpotenzialverfahren berücksichtigt werden. Dabei kann es vorteilhaft sein, die Potenzialtrennung des Transformators beim Knotenpotenzialverfahren durch einen Kurzschluss aufzuheben, um die Anzahl der Gleichungen zu reduzieren, wenn dies keinen Einfluss auf die Spannungs-/Stromverteilung im Netzwerk hat.

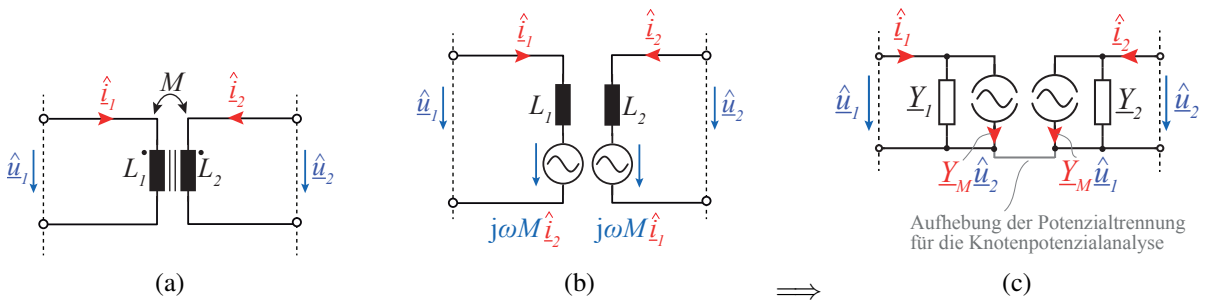


Figure 3.37: a) Schaltbild eines Transformators mit den dazugehörigen Strömen und Spannungen. b) Ersatzschaltbild eines Transformators basierend auf stromgesteuerten Spannungsquellen. c) Ersatzschaltbild eines Transformators basierend auf spannungsgesteuerten Stromquellen. Für die Netzwerksanalyse mittels Knotenpotenzialverfahrens wird die Potenzialtrennung aufgehoben, um die Anzahl der Gleichungen zu reduzieren.

Beispiel Übertrager

Auf Basis der gemachten Überlegungen zur Berücksichtigung von Transformatoren beim Knotenpotenzialverfahren wird nun die Schaltung in Abbildung 3.38a untersucht. Diese ist identisch zur Beispielschaltung für Transformatoren beim Maschenstromverfahren im Abschnitt 3.3.5.

Im ersten Schritt wird der Transformator durch sein Ersatzschaltbild auf Basis von spannungsgesteuerten Stromquellen ersetzt. Dies resultiert in dem Netzwerk in Abbildung 3.38b mit 6 Zweigen und 3 Knoten. In diesem Netzwerk wurde zudem die Spannungsquelle $\underline{\hat{u}}_q$ mit Innenwiderstand R_1 in die Stromquelle $\underline{\hat{i}}_q = \underline{\hat{u}}_q/R_1$ mit Innenwiderstand R_1 transformiert. Aufgrund der 3 Knoten werden 2 unabhängige Knotenspannungen benötigt. Knoten A wird als Bezugsknoten gewählt, womit sich die beiden Knotenspannungen $\underline{\hat{u}}_{K1} = \underline{\hat{u}}_1$ und $\underline{\hat{u}}_{K2} = \underline{\hat{u}}_2$ ergeben.
Die Knotengleichungen sind gleich

$$\text{Knoten } B \qquad \left(\frac{1}{R_1} + \mathrm{j}\omega C_1 + \underline{Y}_1\right)\underline{\hat{u}}_{K1} + \underline{Y}_M\underline{\hat{u}}_{K2} = \underline{\hat{i}}_q \tag{3.113}$$

$$\text{Knoten } C \qquad \underline{Y}_M\underline{\hat{u}}_{K1} + \left(\frac{1}{R_2} + \mathrm{j}\omega C_2 + \underline{Y}_2\right)\underline{\hat{u}}_{K2} = 0 \tag{3.114}$$

Die Gleichungen lassen sich einfach z.B. nach der Ausgangsspannung $\underline{\hat{u}}_2$ auflösen.

Im Fall einer Analyse des Netzwerks in Abbildung 3.38b mit dem Maschenstromverfahren sind insgesamt 4 Maschenströme und damit 4 Gleichungen notwendig.

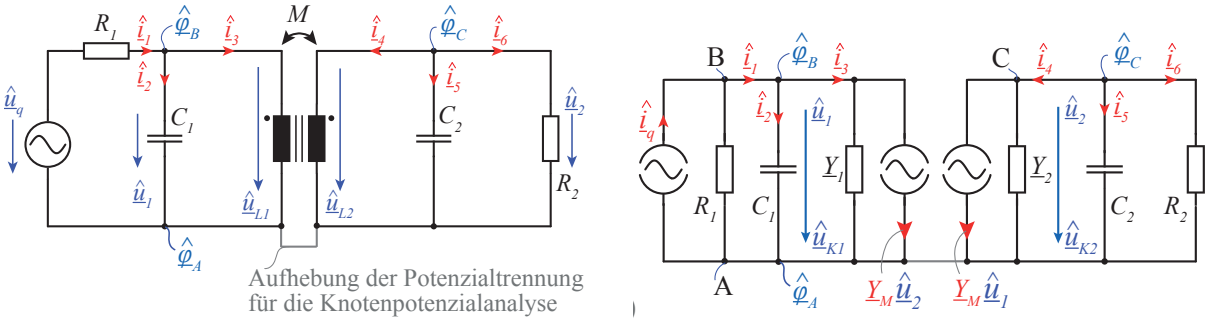


Figure 3.38: a) Beispielnetzwerk mit Transformator (siehe Abbildung 3.31a). b) Der Transformator aus a) wird mittels des Ersatzsnetzwerkes in Abbildung 3.37c modelliert und die reale Spannungsquelle durch eine reale Stromquelle ersetzt.

Beispiel mit gesteuerter Quelle

In dem Netzwerk in Abbildung 3.36 vom Abschnitt 3.4.1 wird nun die Spannungsquelle durch ein stromgesteuerte Spannungsquelle ersetzt und das resultierende Netzwerk in Abbildung 3.39 wiederum mit dem Knotenpotenzialverfahren untersucht.

1. Bezugsknoten wählen. Diesem wird das Potenzial 0 zugewiesen.

2. Ersetze gesteuerte Quelle durch unabhängige Spannungsquelle.

3. Führe um die beiden Knoten K_5 und K_4, die über die Spannungsquelle $\underline{\hat{u}}_q$ direkt miteinander verbunden sind, eine Hüllfläche ein.

4. Weise den Knoten K_1, K_2 und K_3 die unbekannten Knotenspannungen $\underline{\hat{u}}_{K1}$, $\underline{\hat{u}}_{K2}$ und $\underline{\hat{u}}_{K3}$ zu. Im Fall der beiden Knoten K_4 & K_5, die von einer Hüllfläche umschlossen werden, wird dem Knoten K_4 am Endpunkt des Bezugspfeils der Spannung $\underline{\hat{u}}$ die unbekannte Knotenspannung $\underline{\hat{u}}_{K4}$ und dem Knoten K_5 die abhängige Knotenspannung $\underline{\hat{u}}_{K5} = \underline{\hat{u}}_{K4} + \underline{\hat{u}}_q$ zugewiesen.

5. Aufstellen der Knotengleichungen und Anwendung der Strom-/Spannungsbeziehungen. Für die Knoten K_4 und K_5 wird eine Knotengleichung für die gemeinsame Hüllfläche aufgestellt. Die Gleichungen für die Knoten K_2 und K_3 sind dabei gleich wie im Abschnitt 3.4.1.

6. Setze die Steuergleichung der gesteuerte Spannung $\underline{\hat{u}}_q = k\underline{\hat{i}}_5 = k\underline{\hat{u}}_{K3}/\underline{Z}_5$ in die Knotengleichung ein.

Die resultierenden Knotengleichungen für die Knoten K_1 und K_4/K_5 sind dabei durch die gesteuerte Spannungsquelle betroffen.

$$K_1 \rightarrow \underline{\hat{i}}_2 - \underline{\hat{i}}_1 + \underline{\hat{i}}_4 = 0 \xrightarrow[\text{Beziehung}]{\underline{\hat{u}}/\underline{\hat{i}}} \frac{\underline{\hat{u}}_{K1} - \underline{\hat{u}}_{K2}}{\underline{Z}_2} - \frac{\underline{\hat{u}}_{K4} + \underline{\hat{u}}_q - \underline{\hat{u}}_{K1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{\hat{u}}_{K1} - \underline{\hat{u}}_{K3}}{\underline{Z}_4} = 0$$

$$\text{Mit } \underline{\hat{u}}_q = k\underline{\hat{i}}_5 = k\frac{\underline{\hat{u}}_{K3}}{\underline{Z}_5} \xrightarrow{\text{folgt}} \frac{\underline{\hat{u}}_{K1} - \underline{\hat{u}}_{K2}}{\underline{Z}_2} - \frac{\underline{\hat{u}}_{K4} - \underline{\hat{u}}_{K1}}{\underline{Z}_1} - \frac{k\underline{\hat{u}}_{K3}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_5} + \frac{\underline{\hat{u}}_{K1} - \underline{\hat{u}}_{K3}}{\underline{Z}_4} = 0$$

$$K_2 \rightarrow \underline{\hat{i}}_3 - \underline{\hat{i}}_2 + \underline{\hat{i}} - \underline{\hat{i}}_8 = 0 \xrightarrow[\text{Beziehung}]{\underline{\hat{u}}/\underline{\hat{i}}} \frac{\underline{\hat{u}}_{K2}}{\underline{Z}_3} - \frac{\underline{\hat{u}}_{K1} - \underline{\hat{u}}_{K2}}{\underline{Z}_2} + \underline{\hat{i}} - \frac{\underline{\hat{u}}_{K4} - \underline{\hat{u}}_{K2}}{\underline{Z}_8} = 0$$

$$K_3 \rightarrow \underline{\hat{i}}_5 - \underline{\hat{i}}_4 - \underline{\hat{i}} = 0 \xrightarrow[\text{Beziehung}]{\underline{\hat{u}}/\underline{\hat{i}}} \frac{\underline{\hat{u}}_{K3}}{\underline{Z}_5} - \frac{\underline{\hat{u}}_{K1} - \underline{\hat{u}}_{K3}}{\underline{Z}_4} - \underline{\hat{i}} = 0$$

$$K_4 + K_5 \rightarrow \underline{\hat{i}}_1 + \underline{\hat{i}}_8 + \underline{\hat{i}}_6 + \underline{\hat{i}}_7 = 0 \xrightarrow[\text{Beziehung}]{\underline{\hat{u}}/\underline{\hat{i}}} \frac{\underline{\hat{u}}_{K4} + \underline{\hat{u}}_q - \underline{\hat{u}}_{K1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{\hat{u}}_{K4} - \underline{\hat{u}}_{K2}}{\underline{Z}_8} + \frac{\underline{\hat{u}}_{K4}}{\underline{Z}_6} + \frac{\underline{\hat{u}}_{K4} + \underline{\hat{u}}_q}{\underline{Z}_7} = 0$$

$$\text{Mit } \underline{\hat{u}}_q = k\underline{\hat{i}}_5 = k\frac{\underline{\hat{u}}_{K3}}{\underline{Z}_5} \xrightarrow{\text{folgt}} \frac{\underline{\hat{u}}_{K4} - \underline{\hat{u}}_{K1}}{\underline{Z}_1} + \frac{k\underline{\hat{u}}_{K3}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_5} + \frac{\underline{\hat{u}}_{K4} - \underline{\hat{u}}_{K2}}{\underline{Z}_8} + \frac{\underline{\hat{u}}_{K4}}{\underline{Z}_6} + \frac{\underline{\hat{u}}_{K4}}{\underline{Z}_7} + \frac{k\underline{\hat{u}}_{K3}}{\underline{Z}_5\underline{Z}_7} = 0$$

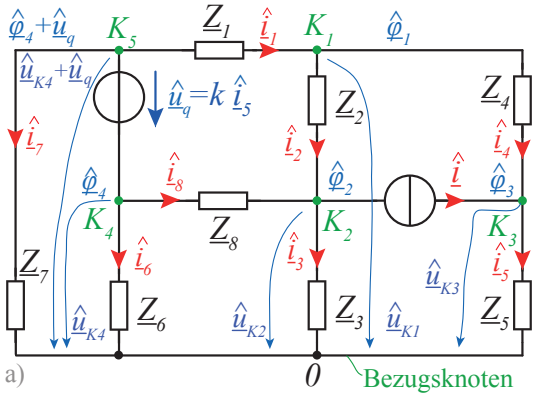


Figure 3.39: Netzwerk aus Abbildung 3.36 mit gesteuerter Spannungsquelle.

3.4.3 "Kochrezept" für das Knotenpotenzialverfahren

Wie beim Maschenstromverfahren wird im Folgenden die allgemeine Vorgehensweise beim Knotenpotenzialverfahren in einer kurzen allgemeinen Anleitung zusammengefasst.

1. **Vereinfachung**: Zu Beginn kann es sinnvoll sein, das Netzwerk zu vereinfachen – z.B. parallel / in Serie geschaltete Impedanzen zusammenzufassen, falls die Ströme/Spannungen der separaten Impedanzen nicht benötigt werden. Weiterhin ist es möglich, Teile des Netzwerkes, deren elektrische Grössen nicht im Detail gesucht werden, z.B. mit dem Satz der Ersatzspannungsquelle zusammenzufassen. Alle gesteuerten Quellen werden zuerst in unabhängige Quellen umgewandelt.

2. **Spannungsquellenwandlung**: Wandele alle realen Spannungsquellen, d.h. eine ideale Spannungsquelle in Serie zu einer Impedanz, jeweils zu einer realen Stromquelle um.

3. **Bezugsknoten**: Wähle einen beliebigen Bezugsknoten K_0. Dieser hat das Potenzial $\underline{\hat{\varphi}}_0 = 0$.

4. **Hüllfläche**: Führe nach dem Verfahren der Spannungsquellenknoten jeweils eine Hüllfläche um die beiden Netzwerkknoten ein, die **direkt** über eine ideale Spannungsquelle $\underline{\hat{u}}_{q\mu}$ verbunden sind – siehe Abbildung 3.40. Diese Hüllfläche wird auch Superknoten genannt.

5. **Knotenspannungen**: Weise jedem Knoten ausser dem Bezugsknoten eine eigene, unbekannte Knotenspannung $\underline{\hat{u}}_{K\nu} = \underline{\hat{\varphi}}_{\nu} - \underline{\hat{\varphi}}_{0}$ zu. Bei den beiden Knoten, die jeweils von einer Hüllfläche umgeben sind, wird dem Knoten μ am Endpunkt des Bezugspfeils der Spannung $\underline{\hat{u}}_{q\mu}$ die Knotenspannung $\underline{\hat{u}}_{K\mu}$ und dem Knoten $\mu+1$ am Startpunkt des Bezugspfeils der Spannung $\underline{\hat{u}}_{q\mu}$ die abhängige Knotenspannung $\underline{\hat{u}}_{K\mu+1} = \underline{\hat{u}}_{K\mu} + \underline{\hat{u}}_{q\mu}$ zugewiesen (siehe Abbildung 3.40).

6. **Knotengleichung**: Stelle für alle Knoten mit einer unabhängigen Knotenspannung $\underline{\hat{u}}_{K\nu}$ die Knotengleichung auf. Der jeweilige Zweigstrom ergibt sich aus den Knotenspannungen $\underline{\hat{u}}_{K\nu}$, den Quellenspannungen $\underline{\hat{u}}_{q\mu}$ und der Strom-/Spannungsbeziehung des jeweiligen Bauelementes. Für die Knoten, die direkt mit einer Spannungsquelle verbunden sind, wird dabei die Knotengleichung für die Hüllfläche über die beiden Knoten, die zur Spannungsquelle gehören, aufgestellt.

7. **Gleichungsumformung**: Umformen/Vereinfachen des Gleichungssystems:
   - Steuergleichungen der gesteuerten Quellen einsetzen
   - Alle bekannten Quellengrössen auf die "rechte" Seite der Gleichungen bringen
   - Sortieren der Gleichungen nach den Knotenspannungen

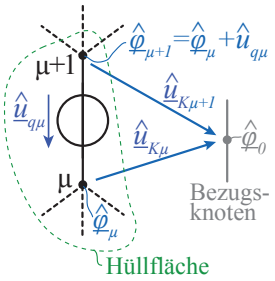


Figure 3.40: Ausschnitt aus einem Netzwerk, der die beiden Knoten μ und $\mu+1$ zeigt, die über eine Spannungsquelle miteinander verbunden sind. Der Bezugspfeil der Spannungsquelle startet dabei im Knoten $\mu+1$ und endet im Knoten μ. Die Spannung des Knotens μ gegenüber dem Bezugsknoten ist $\underline{\hat{u}}_{K\mu}$ und die Spannung des Knotens $\mu+1$ ist $\underline{\hat{u}}_{K\mu+1} = \underline{\hat{u}}_{K\mu} + \underline{\hat{u}}_{q\mu}$.

3.4.4 Matrixdarstellung

Wie beim Maschenstromverfahren werden die oben erläuterten Zusammenhänge unter Verwendung der Matrixschreibweise im Folgenden zusammengefasst. Im ersten Schritt wird ein Bezugsknoten gewählt und die $(K-1)$ unabhängigen Knotenspannungen gewählt. Weiterhin werden Spannungsquellen durch Stromquellen ersetzt.

Im zweiten Schritt werden die Zweigspannungen und die Knotenspannungen über die Inzidenzmatrix verknüpft

$$\underline{\hat{\boldsymbol{u}}} = \boldsymbol{B} \cdot \underline{\hat{\boldsymbol{u}}}_{\boldsymbol{k}} \quad \text{mit: } \boldsymbol{B} = \text{Inzidenzmatrix mit der Dimension: } Z \times (K-1) \tag{3.115}$$

Danach werden die $K-1$ Knotengleichungen für alle unabhängigen Knoten aufgestellt. Dies resultiert in $K-1$ Gleichungen.

$$\boldsymbol{B}^T \cdot \underline{\hat{\boldsymbol{i}}} = \boldsymbol{0} \tag{3.116}$$

Für die einzelnen Zweige wird die Verknüpfung der Zweigströme mit den jeweiligen Zweigspannungen auf Basis der Gleichung (3.56) als Matrix aufgestellt. Dabei ist $\underline{\boldsymbol{Y}}$ die Diagonalmatrix der Zweigadmittanzen.

$$\underline{\hat{\boldsymbol{i}}} = \underline{\boldsymbol{Y}} \cdot \underline{\hat{\boldsymbol{u}}} - \underline{\hat{\boldsymbol{i}}}_{\boldsymbol{q}} \tag{3.117}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (3.115) in Gleichung (3.117) und der daraus resultierenden Gleichung wiederum in Gleichung (3.116) erhält man das Gleichungssystem der Knotenspannungen mit $(K-1)$ Gleichungen in Matrixform.

$$\boldsymbol{B}^T \underline{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{B} \cdot \underline{\hat{\boldsymbol{u}}}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{B}^T \cdot \underline{\hat{\boldsymbol{i}}}_{\boldsymbol{q}} \tag{3.118}$$

$\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{K}}$ wird dabei als Knotenadmittanzmatrix bezeichnet

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{B}^T \underline{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{B} \tag{3.119}$$

Das Gleichungssystem kann wiederum direkt aus einfach zu ermittelnden Teilmatrizen aufgestellt werden, was für die automatisierte Schaltungsanalyse von Vorteil ist. Beim manuellen Aufstellen der Gleichungen ist die unter "Knotenpotenzialverfahren – Kochrezept" im Abschnitt 3.4.3 beschriebene Herangehensweise besser geeignet.

3.4.5 Erläuterung zu Potenzialen

Beim Knotenpotenzialverfahren werden die Ströme durch die Bauelemente mit Hilfe von Knotenspannungen, d.h. der Spannung eines Knotens gegenüber einem Bezugsknoten ausgedrückt, die sich direkt aus der Potenzialverteilung im Netzwerk ergeben. Für einen Ausschnitt aus einem Beispielnetzwerk mit einem Widerstand R_1 und einem frei gewählten Bezugsknoten wie dies in Abbildung 3.41 dargestellt ist, ergibt sich dabei der Strom $\underline{\hat{i}}_1$ durch den Widerstand R_1 mit

$$\underline{\hat{i}}_1 = \frac{\underline{\hat{u}}_{R1}}{R_1} \tag{3.120}$$

Die Spannung $\underline{\hat{u}}_{R1}$, die über dem Widerstand abfällt, kann mittels der Potenziale an den beiden Knoten K_1 und K_2, an denen der Widerstand R_1 angeschlossen ist, ausgedrückt werden. Im betrachteten Fall ergibt sich

$$\underline{\hat{u}}_{R1} = \underline{\hat{\varphi}}_1 - \underline{\hat{\varphi}}_2 \tag{3.121}$$

Weiterhin kann die Spannung der Knoten K_1 und K_2 gegenüber dem Bezugspunkt/dem Bezugspotenzial wie folgt mit den Potenzialen ausgedrückt werden (es gilt hier $\underline{\hat{\varphi}}_0 = 0$)

$$\underline{\hat{u}}_{K1} = \underline{\hat{\varphi}}_1 - \underline{\hat{\varphi}}_0 = \underline{\hat{\varphi}}_1 \tag{3.122}$$

$$\underline{\hat{u}}_{K2} = \underline{\hat{\varphi}}_2 - \underline{\hat{\varphi}}_0 = \underline{\hat{\varphi}}_2 \tag{3.123}$$

Damit folgt der Zusammenhang für den Strom

$$\underline{\hat{i}}_1 = \frac{\underline{\hat{u}}_{R1}}{R_1} = \frac{\underline{\hat{\varphi}}_1 - \underline{\hat{\varphi}}_2}{R_1} = \frac{\underline{\hat{u}}_{K1} - \underline{\hat{u}}_{K2}}{R_1} \tag{3.124}$$

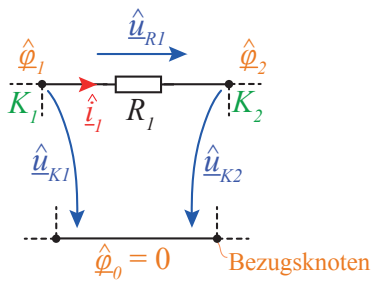


Figure 3.41: Ausschnitt aus einem Netzwerk. Dargestellt sind zwei Knoten K_1 und K_1, an die unter anderem der Widerstand R_1 angeschlossen ist. Der Knoten K_1 hat das Potenzial $\underline{\hat{\varphi}}_1$ und der Knoten K_2 das Potenzial $\underline{\hat{\varphi}}_2$. Dem Bezugsknoten/-potenzial wird das Potenzial $\underline{\hat{\varphi}}_0 = 0$ zugewiesen.

3.4.6 Maschenstrom- vs. Knotenpotenzialverfahren

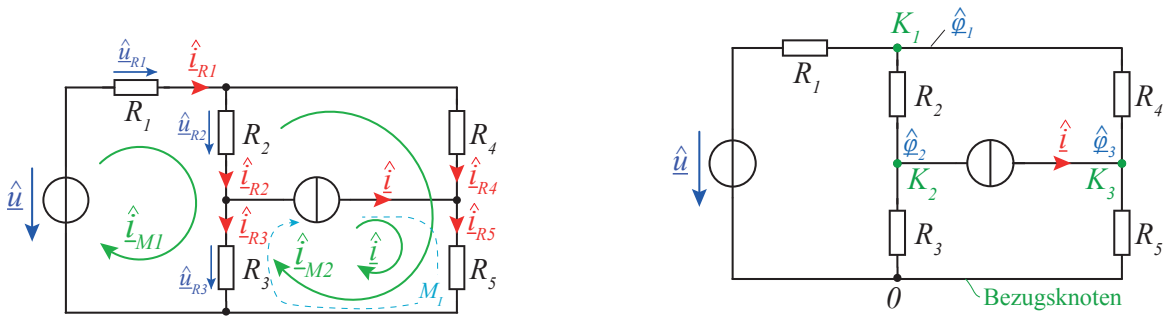
Bei konventioneller Herangehensweise auf Basis von Knoten- und Maschengleichungen muss für ein Netzwerk im Allgemeinen ein Gleichungssystem aus Z Gleichungen gelöst werden. Die Dimension des Gleichungssystems kann dabei mit den beiden beschriebenen Verfahren deutlich reduziert werden. Für die beiden Verfahren ergeben sich dabei die folgenden Dimensionen für das Gleichungssystem.

Maschenstromverfahren: Das Verfahren basiert auf den Maschengleichungen und beim Aufstellen der Gleichungen müssen Stromquellen gesondert behandelt werden. Insgesamt muss man für ein ebenes Netzwerk N_M unabhängige Gleichungen aufstellen. Die Anzahl der Gleichungen ergibt sich dabei aus: $N_M = Z - (K-1)$, wobei Z die Zahl der Zweige und K die Zahl der Knoten des ebenen Netzwerkes mit reduziertem Set an Elementarmaschen M^* sind, d.h. für Maschen mit idealen Stromquellen wird keine Maschengleichung benötigt.

Knotenpotenzialverfahren: Für dieses Verfahren werden die Knotengleichungen genutzt und beim Aufstellen der Gleichungen müssen Spannungsquellen gesondert behandelt werden. Es werden insgesamt $N_K = K - 1$ unabhängige Gleichungen benötigt, wobei K die Zahl der Knoten nach Ersetzen der idealen Spannungsquellen durch virtuelle Kurzschlüsse ist, d.h. für 2 Knoten die direkt über eine ideale Spannungsquelle verbunden sind, wird nur eine Gleichung benötigt. Dabei wird in K der Bezugsknoten mitgezählt.

Beim Knotenpotenzialverfahren benötigt man folglich bei stark vermaschten Netzen, d.h. Netze die zwischen den verschiedenen Knoten viele Zweige/Verbindungen haben, weniger Gleichungen als beim Maschenstromverfahren. Das Knotenpotenzialverfahren hat weiterhin Vorteile bei Netzen mit vielen Spannungsquellen, das Maschenstromverfahren hingegen bei Netzen mit vielen Stromquellen.

Für das Beispiel in Abbildung 3.42a bzw. 3.42b ergibt sich damit: $N_M = 3-2+1 = 2$ sowie $N_K = 4-1 = 3$.



(a) (b)

Figure 3.42: Beispielnetzwerk mit den dazugehörigen Maschenströmen in a) un den Knotenpotenzialen in b).

Chapter 4

Beliebige periodische Vorgänge

4.1 Überlagerung von Gleich- und Wechselgrössen

4.1.1 Einleitung

Bisher wurden bei der Schaltungsanalyse nur rein sinusförmige periodische Zeitverläufe (mit einer gemeinsamen Frequenz für alle Quellen) bzw. Gleichgrössen betrachtet. Dabei wurden die Netzwerke mit der komplexen Wechselstromrechnung und den kirchhoffschen Gesetzen berechnet.

Im Folgenden sollen nun periodische Grössen betrachtet werden, die nicht sinusförmig sind (siehe Abbildung 4.1c). Periodische Grössen sind dabei dadurch gekennzeichnet, dass sich die Art der Änderung jeweils nach einer Periodendauer T wiederholt. Solche Grössen treten z.B. bei Gleichrichterschaltungen oder auch bei nichtlinearen Netzen mit sinusförmiger Anregung auf.

Die Berechnung der Netzwerke erfolgt dabei in einem ersten Schritt mittels der Harmonischen Analyse – auch als Fourierreihenentwicklung bekannt. Dieses Verfahren wird dann später zur Fourier-Transformation erweitert.

Im ersten Schritt wird gezeigt, dass durch Überlagerung von Sinusgrössen, deren Frequenzen in einem definierten Verhältnis zueinander stehen (bzw. Vielfache voneinander sind), beliebige periodische Signalformen erzeugt bzw. beschrieben werden können. Im zweiten Schritt wird auch der umgekehrte Weg betrachtet, bei welchem beliebige periodische Signale in eine Summe/Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegt werden.

Die Gesamtwirkung der einzelnen Sinus- und Kosinusfunktionen folgt dabei aus der Überlagerung von Teillösungen, die jeweils mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung ermittelt werden. Die Überlagerung findet dabei im Zeitbereich statt, da ja für die komplexe Wechselstromrechnung die Voraussetzung

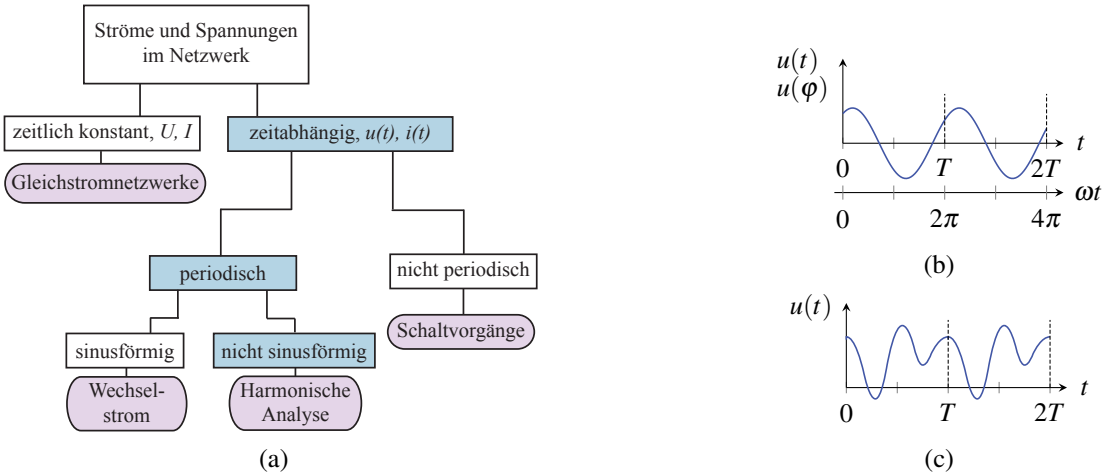


Figure 4.1: a) Übersicht und Unterteilung möglicher Strom- und Spannungsformen in elektrischen Netzwerken. b) Sinusförmiger Spannungsverlauf. c) Periodischer, nicht-sinusförmiger Spannungsverlauf.

ist, dass alle Netzwerksgrössen dieselbe Frequenz besitzen.

4.1.2 Überlagerung von einer Gleich- & einer Wechselspannung

Zum Einstieg in die harmonische Analyse wird zuerst das *RL*-Netzwerk in Abbildung 4.2a betrachtet, das durch die Gleichspannungsquelle $u_{G,DC}$ und die sinusförmige Wechselspannungsquelle $u_{G,AC}$ angeregt wird. Ziel ist es, den Strom $i(t)$ durch den Widerstand R zu berechnen. Dazu muss die Wirkung der beiden Quellen auf das Netzwerk überlagert werden.

Zuerst wird die Wirkung der Gleichspannungsquelle ermittelt. Dafür wird die Wechselspannungsquelle unwirksam gemacht, d.h. durch einen Kurzschluss ersetzt (Hinweis: Spannungsquellen werden durch einen Kurzschluss und Stromquellen durch einen Leerlauf ersetzt). Damit resultiert das Netzwerk in Abbildung 4.2b. Da die Induktivität für eine Anregung durch eine Gleichspannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzt werden kann, ergibt sich für das *RL*-Netzwerk der Gleichstrom I_{DC}

$$i_{DC} = I_{DC} = \frac{U}{R} \tag{4.1}$$

Um die Wirkung der Wechselspannungsquelle zu ermitteln, wird die Gleichspannungsquelle unwirksam gemacht, d.h. durch einen Kurzschluss ersetzt. Damit resultiert das Netzwerk in Abbildung 4.2c mit der sinusförmigen Spannungsquelle $u_{G,AC}(t)$. Für dieses ergibt sich mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung und dem Spannungszeiger $\underline{\hat{u}}_{G,AC} = \hat{u}e^{\mathrm{j}\varphi_u}$ der Stromzeiger $\underline{\hat{i}}_{AC}$

$$\underline{\hat{i}}_{AC} = \frac{\underline{\hat{u}}_{G,AC}}{R + \mathrm{j}\omega L} \tag{4.2}$$

Damit folgt mit $|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ für den Zeitverlauf $i_{AC}(t)$ des Stromes

$$i_{AC}(t) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_u - \arctan\frac{\omega L}{R}\right) \tag{4.3}$$

Der resultierende Gesamtstrom $i(t)$ für das Netzwerk in Abbildung 4.2a mit beiden Quellen erfolgt durch die Überlagerung, d.h. durch Addition der beiden Teilwirkungen/-ströme i_{DC} und i_{AC} im Zeitbereich

$$i(t) = i_{DC}(t) + i_{AC}(t) = \frac{U}{R} + \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_u - \arctan\frac{\omega L}{R}\right) \tag{4.4}$$

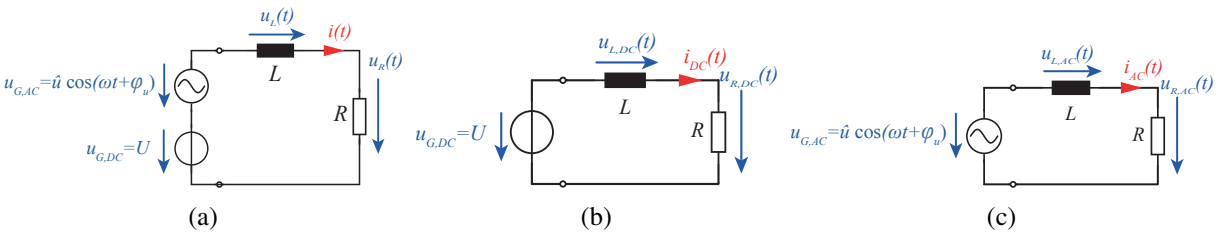


Figure 4.2: a) *RL*-Netzwerk, das durch eine Gleich- und eine Wechselspannungsquelle angeregt wird. b) Für die Berechnung der Wirkung der Gleichspannungsquelle, wurde die Wechselspannungsquelle unwirksam gemacht, d.h. durch einen Kurzschluss ersetzt. In c) wurde die Gleichspannungsquelle unwirksam gemacht, um die Wirkung der Wechselspannungsquelle zu ermitteln.

Hinweis: *L* und *C* in Gleichspannungsnetzwerken

Allgemeiner Hinweis: In Netzwerken, die nur durch Gleichspannungs- und/oder Gleichstromquellen angeregt werden, liegt an allen Bauelementen eine Gleichspannung an bzw. fliesst durch alle Bauelemente ein Gleichstrom. Damit folgt für:

▷ **Induktivitäten**: Für einen Gleichstrom ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.5}$$

und damit folgt für Induktivitäten

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.6}$$

d.h. für den Fall der Gleichspannungs- bzw. Gleichstromanregung verhalten sich Induktivitäten wie Kurzschlüsse ($u = 0$), so dass diese einfach durch eine direkte Verbindung ersetzt werden können.

▷ **Kapazitäten**: Für eine Gleichspannung folgt

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.7}$$

und damit ergibt sich für Kapazitäten

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.8}$$

d.h. für den Fall der Gleichspannungs- bzw. Gleichstromanregung verhalten sich Kapazitäten wie Leerläufe ($i = 0$), so dass diese einfach aus dem Netzwerk entfernt werden können.

4.1.3 Überlagerung zweier Wechselspannungen

Als nächstes wird das Netzwerk in Abbildung 4.3a mit zwei Wechselspannungsquellen mit beliebigen bzw. unterschiedlichen Frequenzen f_1 und f_2 betrachtet. Wiederum soll der resultierende Zeitverlauf des Stromes $i(t)$ berechnet werden. Dabei kann man prinzipiell analog vorgehen, wie dies oben für Überlagerung der Wirkung einer Gleich- und einer Wechselspannungsquelle beschrieben wurde.

Zuerst wird die Quelle $u_2(t)$ unwirksam gemacht, wobei die Schaltung in Abbildung 4.3b resultiert. Für dieses Netzwerk erhält man mit $\underline{\hat{u}}_1 = \hat{u}_1 e^{\mathrm{j}\varphi_{u_1}}$ den Zeiger $\underline{\hat{i}}_{u_1}$ für den Teilstrom

$$\underline{\hat{i}}_{u_1} = \frac{1}{R + \mathrm{j}\omega_1 L}\underline{\hat{u}}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{\hat{u}}_1 \tag{4.9}$$

und damit den zeitlichen Verlauf $\left(\arg\left(\frac{1}{\underline{Z}_1}\right) = 0^\circ - \arctan\frac{\omega_1 L}{R}\right)$

$$i_{u_1}(t) = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{R^2 + \omega_1^2 L^2}}\cos\left(\omega_1 t + \varphi_{u_1} - \arctan\frac{\omega_1 L}{R}\right) \tag{4.10}$$

Analog erhält man für das Netzwerk in Abbildung 4.3c, in dem die Quelle $u_1(t)$ unwirksam gemacht wurde mit $\underline{\hat{u}}_2 = \hat{u}_2 e^{\mathrm{j}\varphi_{u_2}}$ den Teilstrom

$$\underline{\hat{i}}_{u_2} = \frac{1}{R + \mathrm{j}\omega_2 L}\underline{\hat{u}}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2}\underline{\hat{u}}_2 \tag{4.11}$$

Daraus folgt der zeitliche Verlauf

$$i_{u_2}(t) = \frac{\hat{u}_2}{\sqrt{R^2 + \omega_2^2 L^2}}\cos\left(\omega_2 t + \varphi_{u_2} - \arctan\frac{\omega_2 L}{R}\right) \tag{4.12}$$

Der resultierende Gesamtstrom folgt wiederum mit Hilfe der **Überlagerung** der beiden Stromanteile **im Zeitbereich** aus $i(t) = i_{u_1}(t) + i_{u_2}(t)$.

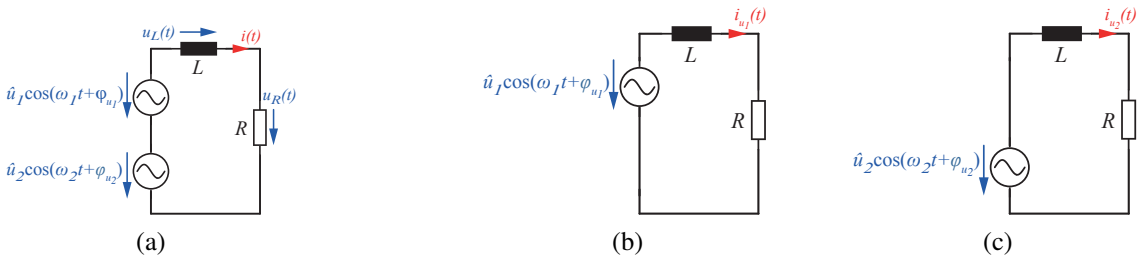


Figure 4.3: a) *RL*-Netzwerk, das durch 2 sinusförmige Spannungsquellen mit beliebiger Frequenz angeregt wird. b) Resultierendes Netzwerk, wenn die Quelle $u_2(t)$ unwirksam gemacht wird. In c) wurde die Quelle $u_1(t)$ unwirksam gemacht.

Allgemeine Vorgehensweise: Anstatt die Wirkungen der einzelnen sinusförmigen Quellen getrennt zu berechnen, ermittelt man im Fall von in Serie geschalteten Quellen mit beliebigen Frequenzen zuerst die allgemeine Lösung, indem man die in Serie geschalteten Quellen durch eine einzige sinusförmige Wechselspannungsquelle $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)$ mit der allgemeinen Frequenz f ($\omega = 2\pi f$) und einer allgemeinen Phasenlage φ_u ersetzt. Für die Beispielschaltung in Abbildung 4.3a ergibt sich damit das Netzwerk in Abbildung 4.4. Für den Stromzeiger ergibt sich in diesem Fall mit $\underline{\hat{u}} = \hat{u}e^{\mathrm{j}\varphi_u}$

$$\underline{\hat{i}} = \frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L}\underline{\hat{u}} = \frac{1}{\underline{Z}}\underline{\hat{u}} \tag{4.13}$$

und damit für den Zeitverlauf des Stromes

$$i(t) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega t + \varphi_u - \arctan\frac{\omega L}{R}\right) \tag{4.14}$$

Im zweiten Schritt wird der Zeitverlauf des Gesamtstromes $i(t)$ mit beiden Quellen mit Hilfe der Überlagerung der beiden Stromanteile im Zeitbereich ermittelt

$$\begin{aligned} i(t) &= i_{u_1}(t) + i_{u_2}(t) \\ &= \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{R^2+\omega_1^2L^2}}\cos\left(\omega_1 t + \varphi_{u_1} - \arctan\frac{\omega_1 L}{R}\right) + \frac{\hat{u}_2}{\sqrt{R^2+\omega_2^2L^2}}\cos\left(\omega_2 t + \varphi_{u_2} - \arctan\frac{\omega_2 L}{R}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{2}\frac{\hat{u}_n}{\sqrt{R^2+(\omega_n L)^2}}\cos\left(\omega_n t + \varphi_{u_n} - \arctan\frac{\omega_n L}{R}\right) = \sum_{n=1}^{2} i_{u_n}(t) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Um die zwei Teilströme zu ermitteln, werden die jeweiligen Amplituden $\hat{u}_n$ und Phasenwinkel φ_n der anregenden Spannungsquellen einfach in die allgemeine Lösung (4.14) eingesetzt. Anstatt einer Anregung durch 2 separate in Serie geschalteten sinusförmigen Quellen mit $u_1(t) = \hat{u}_1\cos(\omega_1 t + \varphi_{u_1})$ und $u_2(t) = \hat{u}_2\cos(\omega_2 t + \varphi_{u_2})$ kann das Netzwerk auch durch eine einzelne Quelle mit $u(t) = \hat{u}_1\cos(\omega_1 t + \varphi_{u_1}) + \hat{u}_2\cos(\omega_2 t + \varphi_{u_2})$ angeregt werden. Die Vorgehensweise ist dabei identisch.

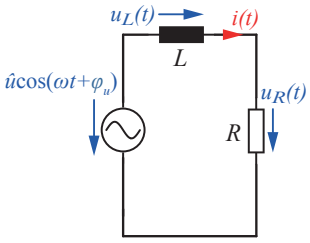


Figure 4.4: Ausgehend von Abbildung 4.3a folgt das abgebildete *RL*-Netzwerk mit beliebiger sinusförmiger Anregung.

Hinweis zur Überlagerung der Wechselgrössen

Hinweis: Eine Überlagerung bzw. Addition der beiden Zeiger $\underline{\hat{i}}_1$ und $\underline{\hat{i}}_2$ im Frequenzbereich bzw. in der komplexen Ebene führt nicht zur richtigen Lösung für den Gesamtstrom, da die beiden Zeiger ja für die beiden unterschiedliche Frequenzen ω_1 und ω_2 abgeleitet wurden. Folglich drehen sich die zu den beiden Zeigern $\underline{\hat{i}}_1$ und $\underline{\hat{i}}_2$ gehörenden rotierenden Zeiger

$$\underline{\hat{i}}_1' = \underline{\hat{i}}_1 e^{j\omega_1 t} = \hat{i}_1 e^{j\varphi_{i_1}} e^{j\omega_1 t} \tag{4.16}$$

$$\underline{\hat{i}}_2' = \underline{\hat{i}}_2 e^{j\omega_2 t} = \hat{i}_2 e^{j\varphi_{i_2}} e^{j\omega_2 t} \tag{4.17}$$

mit unterschiedlichen Rotationsgeschwindigkeiten.

Würde man mit den rotierenden Zeigern $\underline{\hat{i}}_1'$ und $\underline{\hat{i}}_2'$ den rotierenden Summenstromzeiger $\underline{\hat{i}}' = \underline{\hat{i}}_1' + \underline{\hat{i}}_2'$ bilden, so wäre dessen Länge und Phasenlage von der Zeit abhängig, da sich die relative Lage der beiden Zeiger $\underline{\hat{i}}_1'$ und $\underline{\hat{i}}_2'$ zueinander mit der Zeit verändern würde.

Bei der komplexen Wechselstromrechnung/Zeigerrechnung war die Grundvorraussetzung, dass sich alle Grössen mit der gleichen Frequenz ändern. In einem solchen Fall ist die relative Lage der verschiedenen Zeiger zueinander nicht von der Zeit abhängig. Damit kann man für die Berechnung der verschiedenen Zeiger einen beliebigen Zeitpunkt (z.B. $t = 0$) wählen, da das Ergebnis sich nicht mit der Zeit verändert. Dies ist die Grundvorraussetzung, um den "'Drehanteil"' $e^{j\omega t}$ wegzulassen.

4.1.4 Überlagerung sinusförmiger Verläufe (Schwebung, Grund- & Oberschwingung)

Im Folgenden werden nun drei charakteristische Fälle für die Überlagerung zweier sinusförmiger Grössen anhand von $u(t) = U_0 + \hat{u}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{u}_2 \cos(\omega_2 t)$ betrachtet.

1. Fall $\omega_1 \ll \omega_2$: Der Fall, dass die Kreisfrequenz ω_1 wesentlich kleiner ist als die Kreisfrequenz ω_2, ist

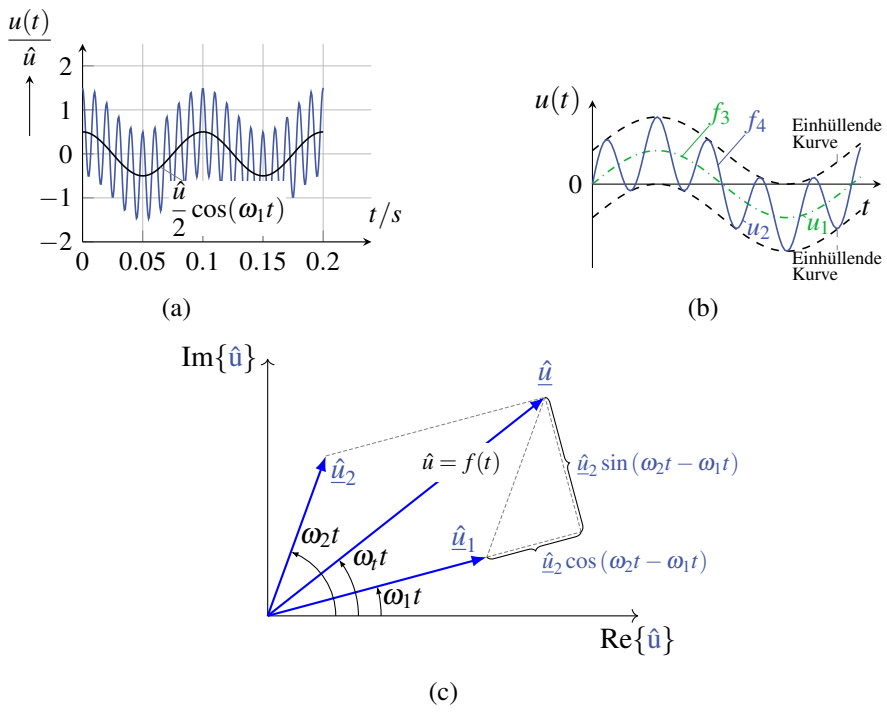


Figure 4.5: a) Beispiel für eine Überlagerung im Fall von $f_1 << f_2$. b) 2. Beispiel für den Fall $f_1 << f_2$. c) Prinzipielle Darstellung der Überlagerung mit Hilfe von rotierenden Zeiger. Die Zeiger rotieren dabei mit unterschiedlichen Kreisfrequenzen.

in Abbildung 4.5a für die folgenden Parameter

$$\hat{u}_1 = 0.5\hat{u} \qquad f_1 = 10\,\text{Hz} \tag{4.18}$$
$$\hat{u}_2 = \hat{u} \qquad f_2 = 100\,\text{Hz} \tag{4.19}$$
$$U_0 = 0 \tag{4.20}$$

dargestellt. Das Summensignal besteht aus einer höherfrequenten Schwingung, die im Rhythmus und der Amplitude der Schwingung mit der kleineren Frequenz in Richtung der Ordinate ausgelenkt wird. Dies ist auch im Abbildung 4.5b gut erkennbar. In Abbildung 4.5b ist ein zweites Beispiel dargestellt. Dort erkennt man, dass man sich für das betrachtete Frequenzverhältnis $f_1 \ll f_2$ näherungsweise vorstellen kann, dass die Spannung u_2 um den sich nur langsam ändernden (für u_2 annähernd konstanten) Wert von u_1 pendelt.

In Abbildung 4.5c ist die Darstellung zweier sinusförmiger Spannungen unterschiedlicher Frequenz sowie der Summenspannung $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ mittels rotierender Zeiger gegeben. Die Zeiger rotieren dabei mit unterschiedlichen Frequenzen.

2. Fall (Schwebung) $\omega_1 \approx \omega_2$: In Abbildung 4.6 ist die Überlagerung für $f_1 = 90\,\text{Hz}$ und $f_2 = 100\,\text{Hz}$ einmal für den Fall gleicher Amplituden $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$ und einmal für den Fall $3\hat{u}_1 = \hat{u}_2$ dargestellt.

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{u}_2 \cos(\omega_2 t) \\ &= \hat{u}_1 [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] + (\hat{u}_2 - \hat{u}_1)\cos(\omega_2 t) \\ &= 2\hat{u}_1 \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right] + (\hat{u}_2 - \hat{u}_1)\cos(\omega_2 t) \end{aligned} \tag{4.21}$$

Im Sonderfall $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$ besteht die Spannung $u(t)$ aus einer Schwingung der mittleren Frequenz $(\omega_1+\omega_2)/2$, deren Amplitude durch eine sinusförmige Schwingung mit der halben Differenzfrequenz $(\omega_1-\omega_2)/2$ beeinflusst/moduliert wird. Dies ist auch in Abbildung 4.6a dargestellt.

Solche Überlagerungen mit $f_1 \approx f_2$ und beliebigen Amplituden werden allgemein als Schwebungen bezeichnet. Die Schwebung hat für $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$ die Schwebungsperiode $1/|f_1 - f_2|$. Sogenannte unreine Schwebungen mit $\hat{u}_1 \neq \hat{u}_2$ und beliebigem Verhältnis von ω_1 und ω_2 haben zum Teil keine feste Schwebungsperiode.

Die Einhüllende der hochfrequenten Schwingung schwankt maximal zwischen $\hat{u}_2 + \hat{u}_1$ und $|\hat{u}_2 - \hat{u}_1|$, wie man auch anschaulich mit der Überlagerung der Zeiger in der komplexen Ebene in Abbildung 4.5c bzw. in Abbildung 4.6b erkennen kann. Für $\hat{u}_2 + \hat{u}_1$ zeigen dabei die Zeiger in die gleiche Richtung, für $|\hat{u}_2 - \hat{u}_1|$ in entgegengesetzte Richtungen.

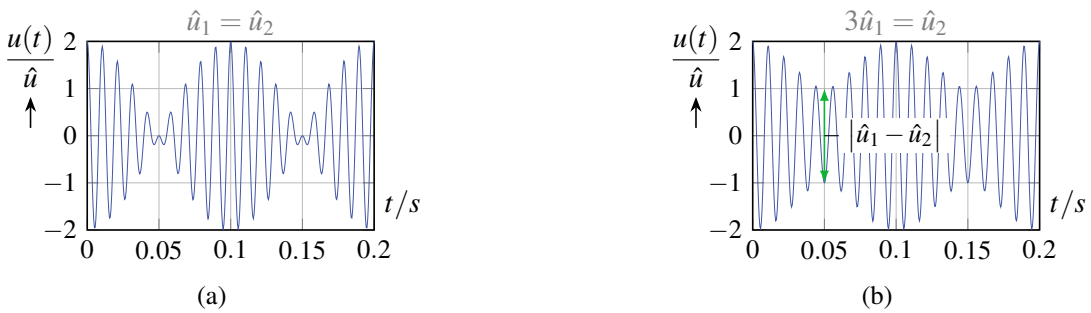


Figure 4.6: a) Überlagerung für $f_1 \approx f_2$ bei gleicher Amplitude. b) Überlagerung für $f_1 \approx f_2$ im Fall, dass die Amplituden nicht gleich sind, d.h. für $\hat{u}_1 \neq \hat{u}_2$.

3. Fall (Grund- und Oberschwingung) $\omega_2 = n\omega_1$ (mit $n = 2, 3, \ldots$): Die Kreisfrequenz ω_2 ist ein ganzzahliges Vielfaches der Kreisfrequenz ω_1. Dabei sind folgende Bezeichnungen für die beiden Schwingungen gängig

$$\omega_1 \quad \text{Grundschwingung oder 1. Harmonische} \tag{4.22}$$
$$\omega_2 = n\omega_1 \quad n-1\text{-te Oberschwingung oder } n\text{-te Harmonische} \tag{4.23}$$

Als Beispiel wird die folgende Spannung $u(t)$ bestehend aus einem Gleichanteil, einer Grundschwingung und einer 2. Oberschwingung bzw. 3. Harmonischen $f_3 = 3f_1$ betrachtet.

$$u(t) = \frac{1}{2}U_0 - U_0\frac{4}{\pi^2}\left[\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega_1 t)\right] \tag{4.24}$$

Dabei können die folgenden Punkte festgestellt werden:

- ▷ Die Periodendauer der Grundschwingung ist durch $T_1 = 1/f_1$ gegeben. Die 3. Harmonische besitzt die Frequenz $f_3 = 3f_1$ und hat daher die Periodendauer $T_3 = T_1/3$.
- ▷ Das Summensignal aus der Grundschwingung und der 2. Oberschwingung hat die gleiche Periodendauer wie die Grundschwingung. Durch Überlagerung der Gleichspannung wird der Verlauf des Signals nur in der vertikalen Achse verschoben. Die Periodendauer ändert sich dabei nicht.
- ▷ Wie man in Abbildung 4.7 erkennt, gelingt es offensichtlich durch Überlagerung von Schwingungen mit geeignet gewählten Amplituden und Frequenzen eine näherungsweise dreiecksförmige periodische Funktion zu bilden. Dies ist die Grundlage der Synthese von beliebigen periodischen Funktionen mittels der Überlagerung von sinusförmigen Verläufen.

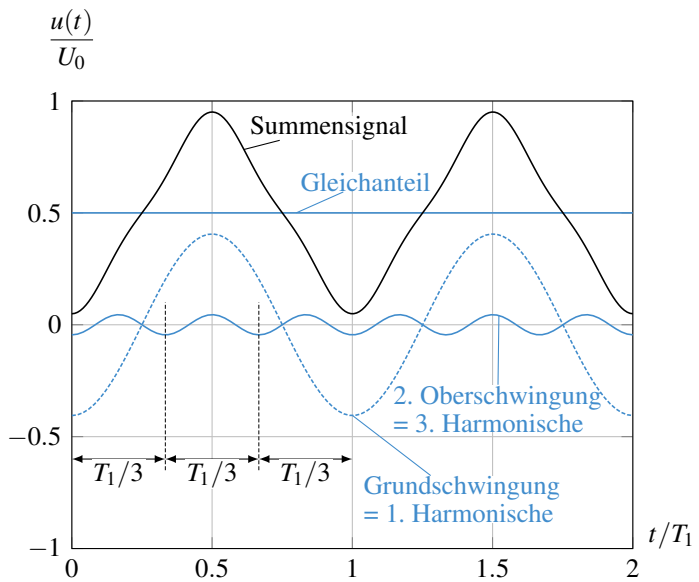


Figure 4.7: Überlagerung zweier sinusförmiger Spannungen und einer Gleichspannung. Die überlagerte Grösse hat einen näherungsweise dreiecksförmigen Verlauf.

4.2 Fourierreihen

Im Folgenden werden beliebige periodische Signale betrachtet, die mit Hilfe einer Überlagerung einer Gleichgrösse und von sinusförmigen Grössen erzeugt werden können. Diese Überlagerung bzw. Summe von sinusförmigen Grössen ist auch als Fourierreihe bekannt, die nun näher betrachtet werden.

4.2.1 Normalform

Man kann zeigen, dass eine 2π-periodische Funktion $f(x)$, welche die Dirichlet'schen Bedingung erfüllt, d.h.

- ▷ die Funktion $f(x)$ ist endlich und

▷ das Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen die Funktion $f(x)$ stetig und monoton ist,

durch eine Summe von trigonometrischen Funktionen (Reihenentwicklung)

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \hat{a}_1 \cos(x) + \hat{a}_2 \cos(2x) + \hat{a}_3 \cos(3x) + \ldots \\ &\quad + \hat{b}_1 \sin(x) + \hat{b}_2 \sin(2x) + \hat{b}_3 \sin(3x) + \ldots \end{aligned} \tag{4.25}$$

dargestellt werden kann.

Die bei den Berechnungen von Netzwerken auftretenden Funktionen erfüllen in der technischen Praxis immer die Dirichlet'schen Bedingungen. Damit kann z.B. für eine periodische Spannung mit der Periodendauer $T = 2\pi/\omega$ die Normalform der Fourierentwicklung wie folgt angegeben werden

$$\begin{aligned} u(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{a}_n \cos(n\omega t) + \hat{b}_n \sin(n\omega t)] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{a}_n \cos\left(n2\pi \frac{t}{T}\right) + \hat{b}_n \sin\left(n2\pi \frac{t}{T}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.26}$$

Liegt die Funktion nur in einem abgeschlossenen Intervall der Länge T vor, ohne periodisch zu sein, kann man die Funktion ausserhalb periodisch fortsetzen und ebenfalls die Entwicklung in eine Fourierreihe zum Beschreiben der Funktion verwenden. Die Funktionswerte ausserhalb des Intervalls stimmen dann natürlich nicht mit der ursprünglichen, nicht periodischen Funktion überein.

Die Frequenz der Grundschwingung $f = 1/T = \omega/2\pi$ wird durch die Länge des Zeitintervalls T definiert, Glieder mit der Ordnungszahl n (n-te Harmonische) weisen die Periodendauer T/n und somit die Frequenz nf auf.

4.2.2 Spektralform

Die vorangegangenen Abschnitt gezeigte Normalform der Fourierreihe setzt sich sowohl aus Sinus- als auch aus Kosinusfunktionen zusammen. Die Sinus-/Kosinusfunktionen können dabei auch zusammengefast werden, so dass entweder nur Sinus- oder nur Kosinusfunktionen in der Reihe enthalten sind. Diese Darstellung wird als Spektralform der Fourierreihe bezeichnet

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n \cos(n\omega t - \psi_n) \tag{4.27}$$

Die beiden Darstellungsformen können ineinander umgerechnet werden. Für die Spektralform auf Basis der Sinusfunktionen folgt aus dem Zusammenhang

$$\hat{c}_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = \underbrace{\hat{c}_n \cos(\varphi_n)}_{\hat{b}_n} \sin(n\omega t) + \underbrace{\hat{c}_n \sin(\varphi_n)}_{\hat{a}_n} \cos(n\omega t) \tag{4.28}$$

und der geforderten Übereinstimmung beider Darstellungsformen unmittelbar die Bestimmungsgleichungen (siehe auch Abbildung 4.8)

$$\begin{aligned} \hat{c}_n \sin(\varphi_n) &= \hat{a}_n \\ \hat{c}_n \cos(\varphi_n) &= \hat{b}_n \end{aligned} \qquad \frac{\hat{a}_n}{\hat{b}_n} = \frac{\hat{c}_n \sin(\varphi_n)}{\hat{c}_n \cos(\varphi_n)} \quad \rightarrow \quad \tan(\varphi_n) = \frac{\hat{a}_n}{\hat{b}_n} \tag{4.29}$$

$$\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2 = \hat{c}_n^2 \sin^2(\varphi_n) + \hat{c}_n^2 \cos^2(\varphi_n) = \hat{c}_n^2 \quad \rightarrow \quad \hat{c}_n = \sqrt{\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2} \tag{4.30}$$

Die Spektralform mit den phasenverschobenen Kosinusfunktionen kann wie folgt aufgeteilt werden

$$\hat{c}_n \cos(n\omega t - \psi_n) = \hat{c}_n \cos(\psi_n) \cos(n\omega t) + \hat{c}_n \sin(\psi_n) \sin(n\omega t) \tag{4.31}$$

Daraus resultiert der folgende Zusammenhang für den Phasenwinkel ψ. Die Amplitude berechnet sich genauso wie bei den Sinusfunktionen.

$$\begin{aligned}\hat{c}_n\cos(\psi_n) &= \hat{a}_n \\ \hat{c}_n\sin(\psi_n) &= \hat{b}_n\end{aligned} \qquad \frac{\hat{a}_n}{\hat{b}_n} = \frac{\hat{c}_n\cos(\psi_n)}{\hat{c}_n\sin(\psi_n)} \quad \rightarrow \quad \boxed{\tan(\psi_n) = \tfrac{\hat{b}_n}{\hat{a}_n}} \tag{4.32}$$

Bei der Berechnung der Winkel φ_n und Ψ_n ist die Periodizität der Tangens-Funktion zu beachten.

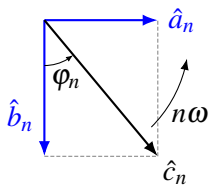


Figure 4.8: Darstellung des Zusammenhangs zwischen den Koeffizienten $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$ und $\hat{c}_n$ und dem Winkel φ_n. Die Kreisfrequenz des dazugehörenden Zeigerdiagramms ist dabei $n\omega$.

Ergänzung: Periodizität der Tangens-Funktion

Für die komplexe Zahl $\underline{Z}$ in der komplexen Ebene in Abbildung 4.9 gilt

$$X = Z\cos\varphi \tag{4.33}$$
$$Y = Z\sin\varphi \tag{4.34}$$

mit $Z = \sqrt{X^2+Y^2} \leq 0$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
Bei der Berechnung des Winkels

$$\varphi = \arctan\frac{Y}{X} \tag{4.35}$$

muss die Periodizität der Tangens-Funktion mit π beachtet werden. Für einen Winkel, der zwischen 0 und 2π liegt, treten folgende Fallunterscheidungen auf

$$X < 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = \pi + \arctan\frac{Y}{X} \tag{4.36}$$

$$X = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = \begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{für} \quad Y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \phantom{\text{für}} \quad Y < 0\end{cases} \tag{4.37}$$

$$X > 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = \begin{cases}\arctan\frac{Y}{X} & \text{für} \quad Y > 0 \\ 2\pi + \arctan\frac{Y}{X} & \phantom{\text{für}} \quad Y < 0\end{cases} \tag{4.38}$$

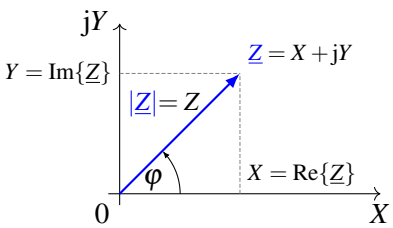


Figure 4.9: Darstellung der komplexen Zahl $\underline{Z}$ in der komplexen Ebene.

4.2.3 Orthogonalitätsrelation

Nachdem nun die Darstellung eines periodischen Verlaufs mittels einer Fourierreihe erläutert wurde. Wird im nächsten Schritt die Berechnung der Koeffizienten $a_0, \hat{a}_n$ und $\hat{b}_n$ für die Fourierreihe näher untersucht. Die Berechnung der Fourierkoeffizienten stützt sich dabei auf die folgende Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^T g_1(t)g_2(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad g_1 \neq g_2 \\ > 0 & \phantom{\text{für}} \quad g_1 = g_2 \end{cases} \tag{4.39}$$

1. Das Integral des Produkts zweier Funktionen $g_1(t)$ und $g_2(t)$ über die Periodendauer T ist gleich 0, wenn es sich um unterschiedliche Funktionen *oder* gleiche Funktionen mit unterschiedlichen Ordnungszahlen handelt. Dabei kann $g_1(t)$ bzw. $g_2(t)$ je eine Konstante, eine Sinus- oder eine Kosinusfunktion sein.

2. Das Integral des Produkts zweier gleicher Funktionen mit gleicher Ordnungszahl (d.h. das Quadrat der Funktion) ergibt immer einen positiven Wert

$$\int_0^T K^2\mathrm{d}t = K^2T \quad \text{und} \quad \int_0^T \sin^2(n\omega t)\mathrm{d}t = \int_0^T \cos^2(n\omega t)\mathrm{d}t = \tfrac{T}{2} \tag{4.40}$$

In Abbildung 4.10a sind als Beispiel die Kosinusfunktionen mit den Ordnungszahlen $n = 1$ und $n = 2$ und in Abbildung 4.10b das Produkt aus beiden dargestellt. Das Produkt der Funktionen führt zu gleich grossen Flächen oberhalb und unterhalb der Zeitachse (horizontalen Achse). Damit folgt, dass das Integral über die Periode verschwindet.

Auf Basis dieser Überlegungen werden im Folgenden die Koeffizienten $a_0, \hat{a}_n$ und $\hat{b}_n$ berechnet.

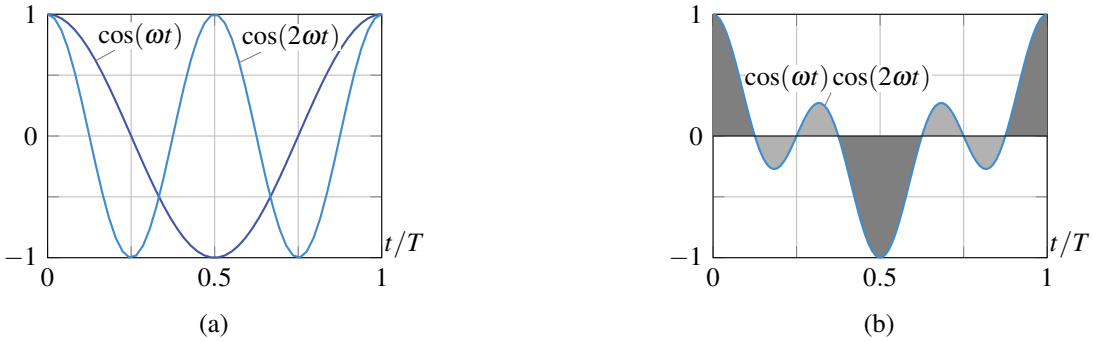


Figure 4.10: a) Darstellung zweier Kosinusfunktionen mit den Ordnungszahlen $n = 1$ und $n = 2$. In b) ist das Produkt aus den beiden Kosinusfunktionen dargestellt. Dort ist ersichtlich, dass das Integral des Produkts der beiden Funktionen über eine Periode verschwindet, da die Flächen ober- und unterhalb der x-Achse gleich gross sind.

4.2.4 Berechnung der Fourierkoeffizienten

Das allgemeine Vorgehen zur Berechnung der Koeffizienten $a_0, \hat{a}_n$ und $\hat{b}_n$ ist dabei wie folgt

1. Wähle eine einzelne Funktion $g(t)$ aus der Reihendarstellung & multipliziere damit beide Seiten der gesamten Reihendarstellung.

2. Integriere den resultierenden Ausdruck über die komplette Periode T.

   ⇒ Auf der linken Gleichungsseite resultiert das Integral über das Produkt der gewählten Funktion $g(t)$ und der zu entwickelnden Funktion $u(t)$.

   ⇒ Auf der rechten Gleichungsseite Seite resultiert aufgrund der Orthogonalitätsrelation lediglich das Integral über $g^2(t)$.

Das beschriebene Vorgehen wird nun zum Berechnen des Mittelwertes a_0 angewendet. Hierzu erfolgt die Multiplikation der Reihendarstellung mit der Konstanten $g(t) = 1$ und im zweiten Schritt die Integration über die Periodendauer T

$$\int_0^T u(t)\mathrm{d}t = \int_0^T a_0 \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left[\hat{a}_n \cos(n\omega t) + \hat{b}_n \sin(n\omega t)\right] \mathrm{d}t \tag{4.41}$$

$$= a_0 T + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{a}_n \int_0^T \cos(n\omega t)\mathrm{d}t + \hat{b}_n \int_0^T \sin(n\omega t)\mathrm{d}t\right]}_{=0} \tag{4.42}$$

Daraus resultiert die allgemeine Gleichung für a_0

$$a_0 = \tfrac{1}{T} \int_0^T u(t)\mathrm{d}t \tag{4.43}$$

Zur Bestimmung des Koeffizienten $\hat{a}_m$ erfolgt die Multiplikation mit $g(t) = \cos(m\omega t)$ und die Integration über die Periodendauer T.

$$\int_0^T u(t)\cos(m\omega t)\mathrm{d}t = \tag{4.44}$$

$$\int_0^T a_0 \cos(m\omega t)\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{a}_n \int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\mathrm{d}t + \hat{b}_n \int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)\mathrm{d}t\right] \tag{4.45}$$

Daraus resultiert der Zusammenhang für den Koeffizienten $\hat{a}_m$

$$\int_0^T u(t)\cos(m\omega t)\mathrm{d}t = \hat{a}_m \int_0^T \cos^2(m\omega t)\mathrm{d}t = \hat{a}_m \tfrac{T}{2} \tag{4.46}$$

Entsprechend bestimmen sich die Koeffizienten $a_0, \hat{a}_n$ und $\hat{b}_n$ aus

$$a_0 = \tfrac{1}{T} \int_0^T u(t)\mathrm{d}t \qquad \hat{a}_n = \tfrac{2}{T} \int_0^T u(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t \qquad \hat{b}_n = \tfrac{2}{T} \int_0^T u(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t \tag{4.47}$$

wobei der allgemeine Integrationsbereich gleich $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ ist. Für $T = 2\pi$ folgt

$$a_0 = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t)\mathrm{d}(\omega t) \qquad \hat{a}_n = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}(\omega t) \qquad \hat{b}_n = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}(\omega t) \tag{4.48}$$

Beispiel: Reihenentwicklung Dreiecksfunktion

Als Beispiel wird nun die Fourierreihe für folgende dreiecksförmige periodische Spannung berechnet.

$$u(t) = 2\hat{u} \cdot \begin{cases} t/T & \text{für} \quad 0 \leq t \leq T/2 \\ 1 - t/T & \phantom{\text{für}} \quad T/2 \leq t \leq T \end{cases} \tag{4.49}$$

Für den Gleichanteil a_0 folgt direkt mit der Fläche unter dem Dreieck

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \frac{\hat{u}T}{2} = \frac{1}{2}\hat{u} \tag{4.50}$$

Die Koeffizienten der Harmonischen erhält man durch abschnittsweise Integration der in den zwei Abschnitten $0 \ldots T/2$ und $T/2 \ldots T$ unterschiedlich definierten Funktion $u(t)$ ($\omega = 2\pi f = {}^{2\pi}/_{T}$). Daraus

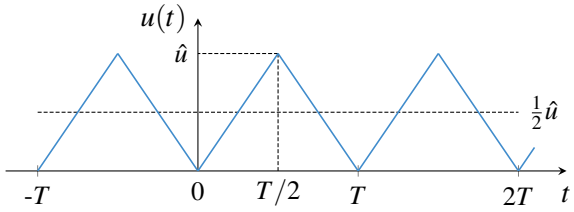


Figure 4.11: Dreiecksförmiger Spannungsverlauf

folgt (mit Hilfe einer partiellen Integration)

$$\hat{a}_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t \tag{4.51}$$

$$= \frac{4\hat{u}}{T^2}\int_0^{T/2} t\cos(n\omega t)\mathrm{d}t + \frac{4\hat{u}}{T}\underbrace{\int_{T/2}^{T}\cos(n\omega t)\mathrm{d}t}_{0} - \frac{4\hat{u}}{T^2}\int_{T/2}^{T} t\cos(n\omega t)\mathrm{d}t \tag{4.52}$$

$$= \frac{4\hat{u}}{T^2}\left[\frac{\cos(n\omega t)}{(n\omega)^2} + \frac{t\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]\Bigg|_0^{T/2} - \frac{4\hat{u}}{T^2}\left[\frac{\cos(n\omega t)}{(n\omega)^2} + \frac{t\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]\Bigg|_{T/2}^{T} \tag{4.53}$$

$$= \frac{4\hat{u}}{T^2(n\omega)^2}[2\cos(n\pi) - 2] = \frac{2\hat{u}}{(n\pi)^2}[\cos(n\pi) - 1] \tag{4.54}$$

Für die Koeffizienten $\hat{b}_n$ ergibt sich

$$\hat{b}_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t = \frac{4\hat{u}}{T^2}\int_0^{T/2} t\sin(n\omega t)\mathrm{d}t + \frac{4\hat{u}}{T}\int_{T/2}^{T}\sin(n\omega t)\mathrm{d}t - \frac{4\hat{u}}{T^2}\int_{T/2}^{T} t\sin(n\omega t)\mathrm{d}t \tag{4.55}$$

$$= \frac{4\hat{u}}{T^2}\left[-\frac{T\cos(n\pi)}{2n\omega}\right] + \frac{4\hat{u}}{T}\left[\frac{\cos(n\pi) - 1}{n\omega}\right] - \frac{4\hat{u}}{T^2}\left[-\frac{T\cos(n2\pi)}{n\omega} + \frac{T\cos(n\pi)}{2n\omega}\right] \tag{4.56}$$

$$= \frac{4\hat{u}}{n\omega T}\left[-\frac{\cos(n\pi)}{2} + \cos(n\pi) - 1 + \cos(n2\pi) - \frac{\cos(n\pi)}{2}\right] = 0 \tag{4.57}$$

Der Ausdruck $\cos(n\pi) - 1$ in der Gleichung für den Koeffizienten $\hat{a}_n$ verschwindet für gerade n und ist für ungerade n gleich -2. Damit ergibt sich für die Fourierreihe der Dreiecksfunktion

$$u(t) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{4\hat{u}}{\pi^2}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\omega t) + \ldots\right]$$

$$= \frac{\hat{u}}{2} - \frac{4\hat{u}}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(n\omega t) \tag{4.58}$$

Die Amplituden der Harmonischen klingen aufgrund des Faktors $(1/n^2)$ relativ schnell ab, weshalb im einleitenden Beispiel im Abschnitt 4.1.4 bereits eine gute Näherung der Dreiecksfunktion mit nur zwei Harmonischen erreicht wird.

Generell hängt die Abnahme der Amplituden von der zu entwickelnden Funktion ab. In der Praxis ist aufgrund der im Allgemeinen raschen Abnahme der Amplitude meistens eine relativ geringe Anzahl an Summanden ausreichend für eine gute Näherung der Funktion.

4.2.5 Komplexe Form

Neben der Normal- und der Spektralform können Fourierreihen noch mit komplexen Koeffizienten und mit der Exponentialfunktion dargestellt werden. Dazu werden mittels der eulerschen Formel die

trigonometrischen Funktionen umgeschrieben in

$$\begin{aligned} e^{jx} &= \cos x + j\sin x \\ e^{-jx} &= \cos x - j\sin x \\ \Rightarrow \quad \cos(n\omega t) &= \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}\right) \quad \text{und} \quad \sin(n\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}\right) \end{aligned} \tag{4.59}$$

Setzt man diese Zusammenhänge in die Fourierreihe in Normalform (4.26) ein, so erhält man die Fourierreihe in komplexer Form.

$$\begin{aligned} u(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{a}_n \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}\right) - \hat{b}_n \frac{j}{2}\left(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}\right)\right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\hat{a}_n - j\hat{b}_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{\hat{a}_n + j\hat{b}_n}{2} e^{-jn\omega t}\right] \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\text{bzw.} \qquad u(t) = k_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\underline{\hat{k}}_n e^{jn\omega t} + \underline{\hat{k}}_{-n} e^{-jn\omega t}\right] \tag{4.61}$$

$$\text{mit} \qquad k_0 = a_0, \quad \underline{\hat{k}}_n = \frac{\hat{a}_n - j\hat{b}_n}{2}, \quad \underline{\hat{k}}_{-n} = \frac{\hat{a}_n + j\hat{b}_n}{2} = \underline{\hat{k}}_n^* \tag{4.62}$$

Durch eine Summation von $-\infty$ bis ∞ anstatt von 1 bis ∞ ergibt sich mit $k_0 = \underline{\hat{k}}_0$ die folgende kompakte Schreibweise für die komplexe Fourierreihe

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{\hat{k}}_n e^{jn\omega t} \tag{4.63}$$

Die komplexen Koeffizienten $\underline{\hat{k}}_n$ werden wiederum mit dem Orthogonalitätsprinzip bestimmt. Diese ergeben sich aus

$$\underline{\hat{k}}_{\pm n} = \frac{\hat{a}_n \mp j\hat{b}_n}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t \mp j\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t \tag{4.64}$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, e^{\mp jn\omega t}\mathrm{d}t \tag{4.65}$$

bzw. mit der vereinfachten Darstellung aus

$$\underline{\hat{k}}_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, e^{-jn\omega t}\mathrm{d}t \tag{4.66}$$

Hierbei durchläuft n den kompletten Wertebereich der ganzen Zahlen: $n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots$

Bei der komplexen Form muss somit zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten nur ein Integral ausgewertet werden – allerdings ein Integral über eine komplexe Funktion. Die reellen Koeffizienten für die Normalform können dann auf einfache Weise wie folgt ermittelt werden

$$a_0 = k_0 \;, \quad \hat{a}_n = \underline{\hat{k}}_n + \underline{\hat{k}}_{-n} = 2\Re\left\{\underline{\hat{k}}_n\right\} \quad \text{und} \quad \hat{b}_n = j(\underline{\hat{k}}_n - \underline{\hat{k}}_{-n}) = -2\Im\left\{\underline{\hat{k}}_n\right\} \tag{4.67}$$

Zwischen der komplexen Form und der Spektralform der Fourierreihe gibt es noch die folgenden Zusammenhänge

$$a_0 = k_0 \;, \quad \underline{\hat{k}}_n = \tfrac{\hat{c}_n}{2} e^{-j\Psi_n} \quad \text{und} \quad \underline{\hat{k}}_{-n} = \tfrac{\hat{c}_n}{2} e^{j\Psi_n} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\hat{k}}_n = -j\tfrac{\hat{c}_n}{2} e^{j\varphi_n} \quad \text{und} \quad \underline{\hat{k}}_{-n} = j\tfrac{\hat{c}_n}{2} e^{-j\varphi_n} \tag{4.68}$$

Hier zeigt sich auch, dass bei reellwertigen Funktionen $u(t)$ immer gilt: $\underline{\hat{k}}_n = \underline{\hat{k}}_{-n}^*$

Beispiel Reihenentwicklung Rechteckfunktion

Als zweites Beispiel wird nun die Fourierreihe für den rechteckförmigen periodischen Spannungsverlauf in Abbildung 4.12 berechnet.

$$u(t) = \begin{cases} \hat{u} & \text{für} \quad 0 \leq t \leq T/2 \\ -\hat{u} & \phantom{\text{für}} \quad T/2 \leq t \leq T \end{cases} \tag{4.69}$$

Die komplexen Koeffizienten $\underline{\hat{k}}_n$ ergeben sich aus

$$\begin{aligned} \underline{\hat{k}}_n &= \frac{\hat{u}}{T}\int_0^{T/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t - \frac{\hat{u}}{T}\int_{T/2}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\hat{u}}{-\mathrm{j}n\omega T}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega T/2} - e^{\mathrm{j}0} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega T} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega T/2}\right] \\ &= \frac{\mathrm{j}\hat{u}}{n2\pi}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi} - 1 - 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi}\right] \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi}\big|_{n=0,2,4\ldots} &= 1 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi}\big|_{n=1,3,5\ldots} &= -1 \end{aligned} \end{aligned} \tag{4.70}$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer verschwindet für gerade n und liefert -4 für ungerade n. Damit resultieren die komplexen Koeffizienten, die rein imaginär sind.

$$\underline{\hat{k}}_n = -\frac{\mathrm{j}2\hat{u}}{n\pi} \qquad \text{mit} \qquad n = \cdots -3, -1, 1, 3, \ldots \tag{4.71}$$

Die dazugehörigen reellen Koeffizienten der Fourierreihe in Normalform sind gleich

$$a_0 = 0, \quad \hat{a}_n = 2\Re\{\underline{\hat{k}}_n\} = 0 \quad \text{und} \quad \hat{b}_n = -2\Im\{\underline{\hat{k}}_n\} = \frac{4\hat{u}}{n\pi} \tag{4.72}$$

Damit ist die Reihenentwicklung in Normalform gleich

$$u(t) = \tfrac{4\hat{u}}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \tfrac{1}{3}\sin(3\omega t) + \tfrac{1}{5}\sin(5\omega t) + \ldots\right] \tag{4.73}$$

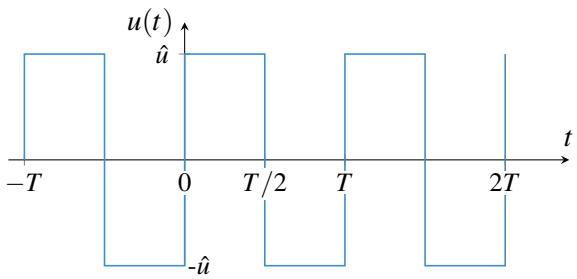


Figure 4.12: Beispiel für einen rechteckförmigen Spannungsverlauf.

4.2.6 Vereinfachte Berechnung Fourierkoeffizienten

In den vorangegangenen Beispielen der Reihenentwicklung einer Dreiecks- und Rechtecksfunktion fallen folgende Besonderheiten auf:

- ▷ Unter bestimmten Bedingungen sind für die Reihenentwicklung nicht immer alle Fourierkoeffizienten notwendig, da einige Koeffizienten verschwinden.
- ▷ Theoretisch sind für die genaue Reihenentwicklung unendlich viele Summanden nötig. Damit der Fehler der Reihenentwicklung unter eine bestimmte Schranke fällt, müssen umso weniger Glieder berücksichtigt werden, je schneller die Amplituden der Harmonischen abklingen.

Aus diesen Beobachtungen werden im Folgenden Vereinfachungen für die Bestimmung der Fourierkoeffizienten abgeleitet. Zuerst wird die Berechnung von a_0 betrachtet. Die Bestimmung des Gleichanteils a_0 ist dabei identisch zur Berechnung des Mittelwerts $\overline{u}(t)$ der gegebenen Funktion, d.h. das Integral in der Gleichung für den Koeffizienten entspricht der Fläche, die zwischen der Funktion und der Achse t eingeschlossen ist – siehe Abbildung 4.13.

Sind also bei einer gegebenen Funktion die Flächen oberhalb und unterhalb der horizontalen Zeitachse t gleich, so verschwindet der Gleichanteil, d.h. $a_0 = 0$. Zum Beispiel ist für die Funktion in Abbildung 4.12

$$a_0 = 0 \tag{4.74}$$

und für die Funktion in Abbildung 4.11 ergibt sich a_0 direkt aus der Dreiecksfläche

$$a_0 = \frac{1}{2}\hat{u} \tag{4.75}$$

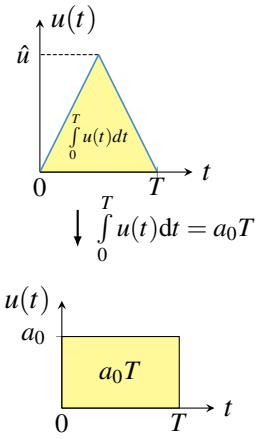


Figure 4.13: Darstellung des Integrals für den Koeffzienten a_0, das die Fläche unter der Funktion angibt.

4.2.7 Symmetrie

Als nächstes wird die Berechnung der Koeffizienten a_n und b_n betrachtet, die sich aufgrund von verschiedenen Symmetriebedingungen stark vereinfachen lässt.

Gerade & ungerade Funktionen

Betrachtet man die zu entwickelnde Funktion ohne den Gleichanteil a_0, so wird diese nur noch durch die Sinus- und Kosinusfunktionen in der Reihe beschrieben. Welche Koeffizienten tatsächlich benötigt werden, hängt dann von der Symmetrie der zu entwickelnden Funktion ab.

Figure 4.14: a) Kosinusfuntion (gerade Funktion). b) Sinusfunktion (ungerade Funktion).

Die Kosinusfunktion in Abbildung 4.14a ist symmetrisch bezüglich der vertikalen Achse und ist somit eine gerade Funktion, d.h. $u(t) = u(-t)$.

$$\cos(n\omega t) = \cos(-n\omega t) \qquad \text{(Symmetrie erster Art)} \tag{4.76}$$

Die Summe von Kosinusfunktionen einschliesslich Gleichanteil ist wiederum symmetrisch bezüglich der vertikalen Achse bzw. eine gerade Funktion.

Die Sinusfunktion in Abbildung 4.14b ist punktsymmetrisch zum Ursprung und ist somit eine ungerade Funktion, d.h. $u(t) = -u(-t)$.

$$\sin(n\omega t) = -\sin(-n\omega t) \qquad \text{(Symmetrie zweiter Art)} \tag{4.77}$$

Weiterhin ist die Summe von Sinusfunktionen ebenfalls punktsymmetrisch zum Ursprung bzw. eine ungerade Funktion.

Auf Basis der obigen Überlegungen zur Symmetrie kann auf das Vorhandensein der Koeffizienten $\hat{a}_n$ und $\hat{b}_n$ in Abhängigkeit der Symmetrie der zu entwickelnden Funktion geschlossen werden:

1) Mit einer Summe gerader/ungerader Funktionen lassen sich nur gerade/ungerade Funktionen darstellen.

2) Entwicklung einer geraden Funktion in eine Fourierreihe $\Rightarrow$ Alle Koeffizienten $\hat{b}_n$ verschwinden.

3) Entwicklung einer ungeraden Funktion in eine Fourierreihe $\Rightarrow$ Die Koeffizienten a_0 und $\hat{a}_n$ verschwinden.

Weiterhin lässt sich der Integrationsbereich von $0 \ldots T$ auf $0 \ldots T/2$ halbieren, da das Produkt aus zwei geraden oder aus zwei ungeraden Funktionen jeweils eine gerade Funktion ergibt. Wird der Integrationsbereich halbiert, so muss bei der Berechnung des Koeffizienten der Wert des Integrals verdoppelt werden.

Halbwellensymmetrie (3. Art) und Symmetrie der 4. Art

Neben der Achsen- und der Punktsymmetrie gibt es noch die Halbwellensymmetrie, d.h. eine Symmetrie der dritten Art:

Falls eine Funktion die Bedingung $u(t) = -u(t + T/2)$ erfüllt, so spricht man von Halbwellensymmetrie.

- ▷ Eine Funktion mit Halbwellensymmetrie kann nur durch trigonometrische Funktionen in einer Reihe dargestellt werden, die die gleiche Eigenschaft aufweisen. Damit gilt für die Funktionen in der Fourierreihe

$$\cos(n\omega t) = -\cos\left[n\omega\left(t + \frac{T}{2}\right)\right] \qquad \text{und} \qquad \sin(n\omega t) = -\sin\left[n\omega\left(t + \frac{T}{2}\right)\right] \tag{4.78}$$

- ▷ Es lässt sich zeigen, dass diese Bedingung nur für ungerade n erfüllt wird. Somit verschwinden die Koeffizienten $\hat{a}_n$ und $\hat{b}_n$ für $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$
- ▷ Der Integrationsbereich kann wie bei den geraden/ungeraden Funktionen auf $0 \ldots T/2$ halbiert werden, wobei wiederum der Wert des Integrals verdoppelt werden muss.

Eine Symmetrie der vierten Art liegt vor, wenn:

bei einer geraden oder ungeraden Funktion gleichzeitig eine Halbwellensymmetrie auftritt.

- ▷ In diesen Fällen verschwinden die entsprechenden Koeffizienten infolge der Eigenschaft "gerade" oder "ungerade" und zusätzlich alle Koeffizienten mit gerader Ordnungszahl.
- ▷ Für Funktionen mit einer Symmetrie der vierten Art kann der Integrationsbereich auf $0 \ldots T/4$ reduziert werden, wobei bei der Berechnung des Koeffizienten der Wert des Integrals mit dem Faktor 4 multipliziert werden muss.

Symmetrieeigenschaften Beispiele

Im folgenden werden einige Beispiele zu den verschiedenen Symmetriearten gezeigt.

▷ **Gerade Funktion** (Abbildung 4.15a)

$$u(t) = u(-t) \tag{4.79}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} u(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^{T/2} u(t)\mathrm{d}t \tag{4.80}$$

$$\hat{a}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t, \qquad \hat{b}_n = 0 \tag{4.81}$$

▷ **Ungerade Funktion** (Abbildung 4.15b)

$$u(t) = -u(-t) \qquad a_0 = 0 \qquad \hat{a}_n = 0 \tag{4.82}$$

$$\hat{b}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \tag{4.83}$$

▷ **Halbwellensymmetrie** (Abbildung 4.15c)

$$u(t) = -u(t+T/2) \qquad a_0 = 0 \qquad \hat{a}_{2n} = 0 \qquad \hat{b}_{2n} = 0 \tag{4.84}$$

$$\hat{a}_{2n-1} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos[(2n-1)\omega t]\,\mathrm{d}t \tag{4.85}$$

$$\hat{b}_{2n-1} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin[(2n-1)\omega t]\,\mathrm{d}t \tag{4.86}$$

▷ **Gerade Funktion mit Halbwellensymmetrie** (Abbildung 4.16a)

$$u(t) = u(-t) = -u(t+T/2) \tag{4.87}$$

$$\hat{b}_n = 0 \qquad a_0 = 0 \qquad \hat{a}_{2n} = 0 \tag{4.88}$$

$$\hat{a}_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} u(t)\cos[(2n-1)\omega t]\,\mathrm{d}t \tag{4.89}$$

▷ **Ungerade Funktion mit Halbwellensymmetrie** (Abbildung 4.16b)

$$u(t) = -u(-t) = -u(t+T/2) \tag{4.90}$$

$$a_0 = 0 \qquad \hat{a}_n = 0 \qquad \hat{b}_{2n} = 0 \tag{4.91}$$

$$\hat{b}_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} u(t)\sin[(2n-1)\omega t]\,\mathrm{d}t \tag{4.92}$$

Weitere Beispiele für die Symmetriearten sind in Abbildung 4.17 gegeben.

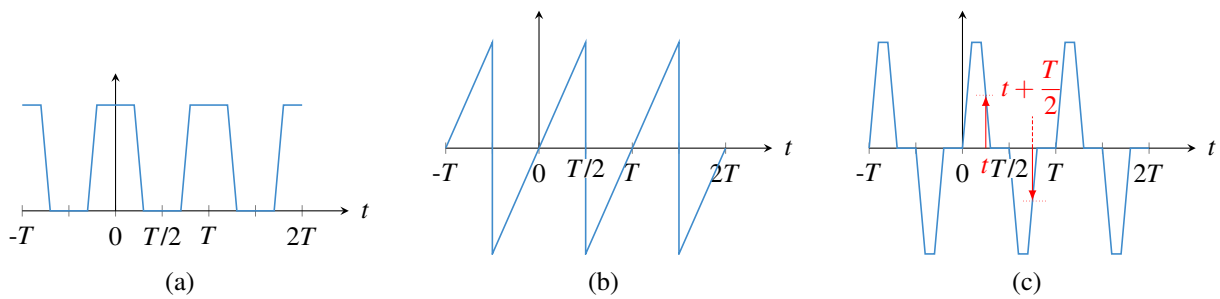


Figure 4.15: a Beispiel für eine gerade Funktion. b) Beispiel für eine ungerade Funktion. c) Beispiel für eine Funktion mit Halbwellensymmetrie.

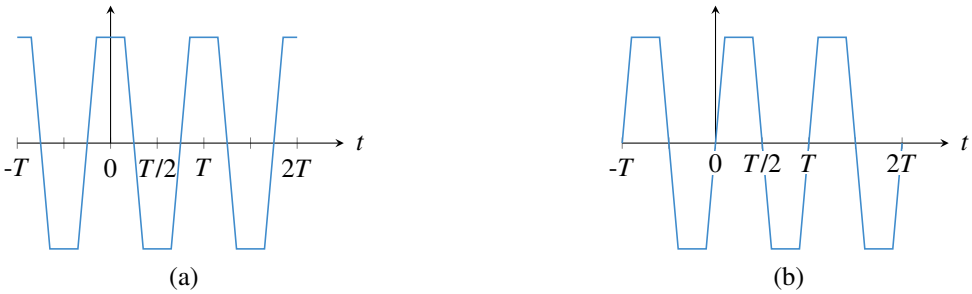


Figure 4.16: a) Beispiel für eine gerade Funktion mit Halbwellensymmetrie. b) Beispiel für eine ungerade Funktion mit Halbwellensymmetrie.

Vereinfachung durch Achsenverschiebung

Die Symmetrieeigenschaften einer Funktion sind oft infolge eines Gleichanteils manchmal nicht direkt erkennbar, so wie dies z.B. der Fall ist für die Sägezahnkurve in Abbildung 4.18a. Nach Abzug des Gleichanteils – siehe Abbildung 4.18b – erkennt man, dass die Funktion ohne Gleichanteil ungerade ist und dass damit die Koeffizienten $\hat{a}_n$ verschwinden. Aus diesem Grund kann es sinnvoll sein, die Funktion vor dem Berechnen der Fourierkoeffizienten eventuell entlang der vertikalen Achse zu verschieben, d.h. einen etwaigen Gleichanteil abzuziehen und dann zu beurteilen, ob es sich um eine gerade oder ungerade Funktion handelt.

Ebenso kann in vielen Fällen durch eine Verschiebung der Funktion entlang der horizontalen Zeitachse eine gerade oder eine ungerade Funktion abgeleitet werden, für die die Berechnung der Koeffizienten vereinfacht ist. Dazu folgen in Abschnitt 4.2.8 noch weiter Informationen.

So kann z.B. die Funktion in Abbildung 4.18c in eine gerade oder in eine ungerade Funktion umgewandelt werden, je nachdem wie der Nullpunkt $t = 0$ gewählt wird. Für die zeitverschobene Funktion ist die Berechnung der Koeffizienten deutlich vereinfacht.

a) $\hat{a}_n \neq 0, \quad \hat{b}_n \neq 0$ ← Ursprüngliche Funktion

b) $\hat{a}_n \neq 0, \quad \hat{b}_n = 0$ ← Gerade Funktion

c) $\hat{a}_n = 0, \quad \hat{b}_n \neq 0$ ← Ungerade Funktion

Durch das Verschieben der horizontalen Achse ändert sich die Amplitude der Harmonischen nicht, sondern nur deren Phasenlage.

Zerlegung in geraden und ungeraden Anteil

Im Allgemeinen kann eine periodische Funktion $u(t)$ jedoch nicht immer durch Achsenverschiebung in eine rein gerade oder eine rein ungerade Funktion umgewandelt werden. In diesem Fall kann es eventuell sinnvoll sein, die Funktion $u(t)$ in einen geraden $u_g(t)$ und einen ungeraden $u_u(t)$ Anteil

$$u(t) = u_g(t) + u_u(t) \tag{4.93}$$

zu zerlegen, wenn die Berechnung der Fourierkoeffizienten für $u_g(t)$ und $u_u(t)$ sehr einfach ist, oder z.B. sogar tabellarisch erfasst ist. Die beiden Anteile der Funktion ergeben sich aus

$$u_g(t) = \frac{1}{2}[u(t) + u(-t)] \tag{4.94}$$

$$u_u(t) = \frac{1}{2}[u(t) - u(-t)] \tag{4.95}$$

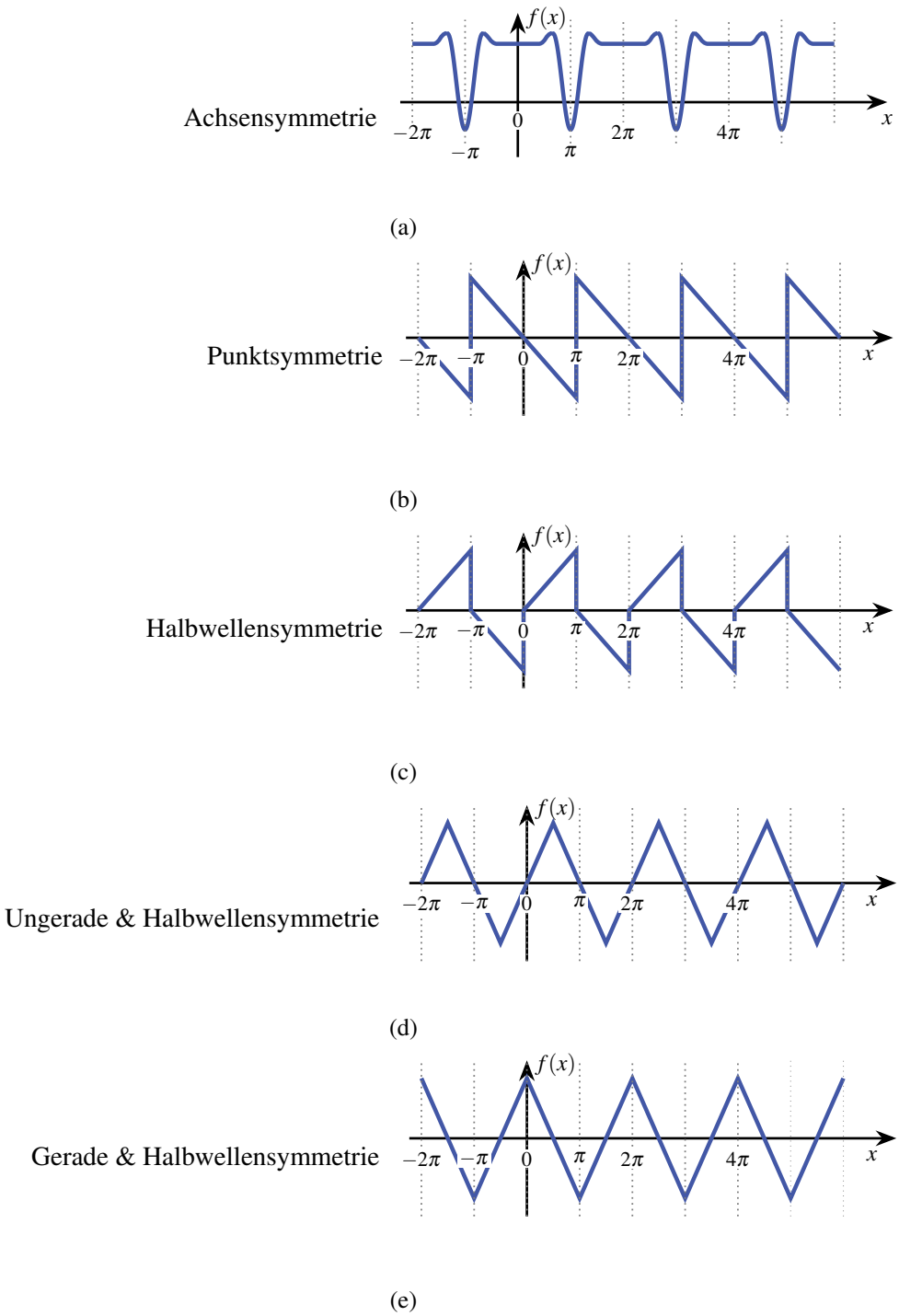


Figure 4.17: Beispiele für die verschiedenen Symmetriearten. In a) ist eine achsensymmetrische und in b) eine punktsymmetrische Funktion gegeben. In c) ist eine Funktion mit Halbwellensymmetrie und in d) sind eine ungerade bzw. in e) eine ungerade Funktion mit Halbwellensymmetrie dargestellt.

Dabei gilt

$$u(-t) = u_g(t) - u_u(t) \tag{4.96}$$

Als Beispiel wird nun die in Abbildung 4.19a dargestellte Funktion $u(t)$ in die beiden Anteile $u_g(t)$ und $u_u(t)$ zerlegt.

$$u(t) = 2\hat{u} \cdot \begin{cases} t/T & \text{für} \quad 0 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad T/2 \leq t \leq T \end{cases} \tag{4.97}$$

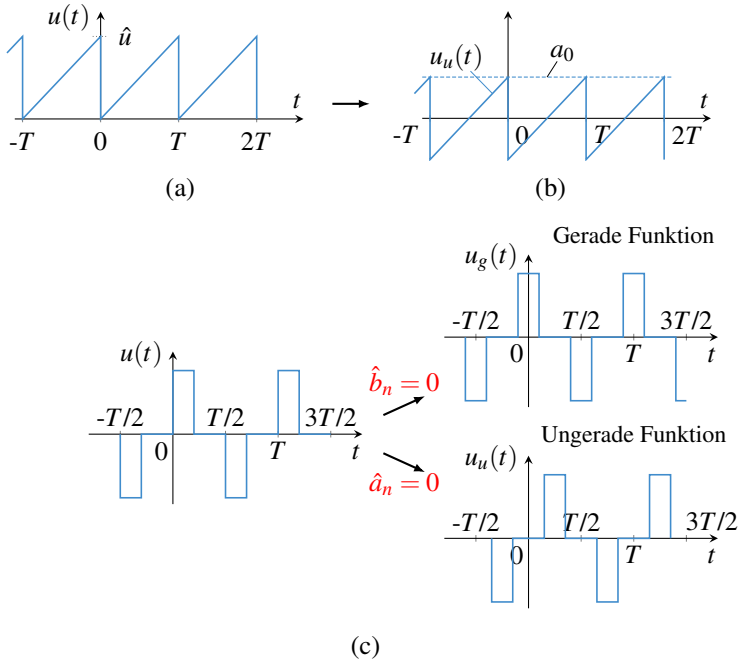


Figure 4.18: a) Beispiel für eine Funktion, die durch Verschieben entlang der vertikalen Achse bzw. durch Abziehen des Gleichanteils in die Funktion mit Symmetrie in b) umgewandelt werden kann. c) Aufspalten einer Funktion in eine gerade und eine ungerade Funktion.

Dazu sind im ersten Schritt die Funktionen $u(t)/2$ und $u(-t)/2$ zu bestimmen. Die Funktion $u(t)/2$ geht aus $u(t)$ einfach durch Halbierung der Amplitude hervor – siehe Abbildung 4.19b.

Die Funktion $u(-t)/2$ erhält man aus $u(t)/2$, indem t durch $-t$ ersetzt wird, d.h. die Funktion $u(t)/2$

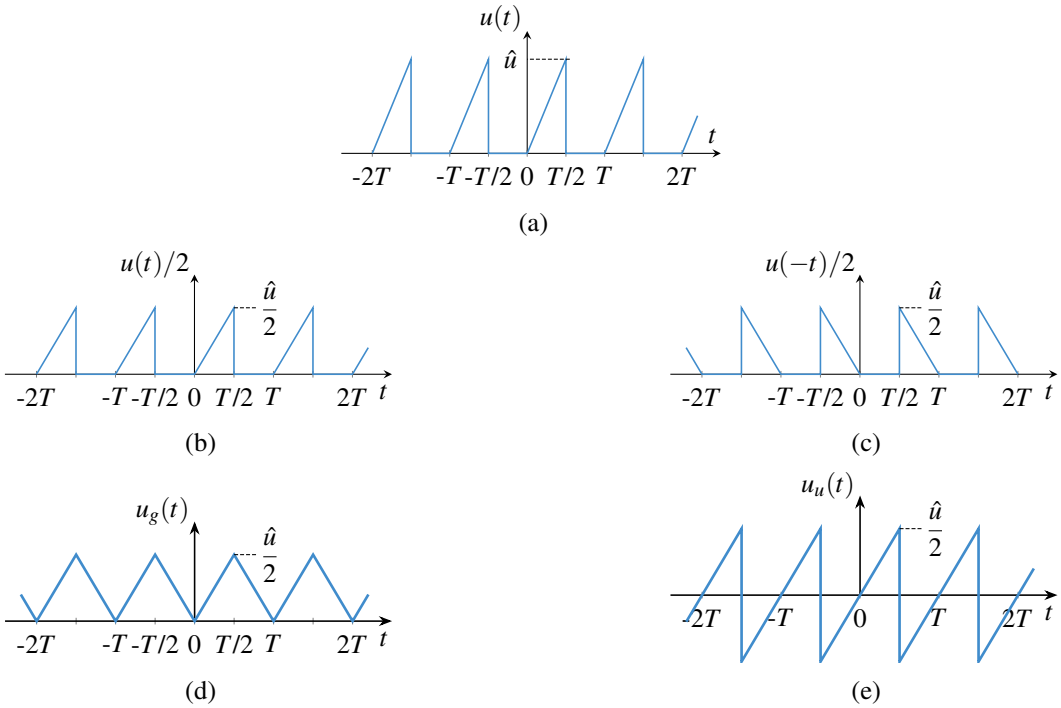


Figure 4.19: a) Beispiel für die Aufteilung einer Funktion in einen gerade und einen ungeraden Anteil. b) Darstellung der Funktion $u(t)/2$. c) Darstellung der Funktion $u(-t)/2$. In d) ist der gerade und in e) der ungerade Anteil der Funktion von a) gegeben.

wird an der vertikalen Achse gespiegelt. Dies ist in Abbildung 4.19c dargestellt.

Die resultierende Funktion $u_g(t) = 1/2[u(t) + u(-t)]$ in Abbildung 4.19d führt auf die bereits bekannte Dreiecksfunktion, deren Fourierkoeffizienten bereits im Abschnitt 4.2.4 ermittelt wurden.

Für $u_u(t) = 1/2[u(t) - u(-t)]$ resultiert die Sägezahn-Funktion in Abbildung 4.19e. Für diese folgen die Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} \hat{b}_n &= \frac{4\hat{u}}{T^2}\int_0^{T/2} t\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4\hat{u}}{T^2}\left[\frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^2} - \frac{t\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]\Bigg|_0^{T/2} = \frac{\hat{u}}{n\pi}(-1)^{n+1} \end{aligned} \tag{4.98}$$

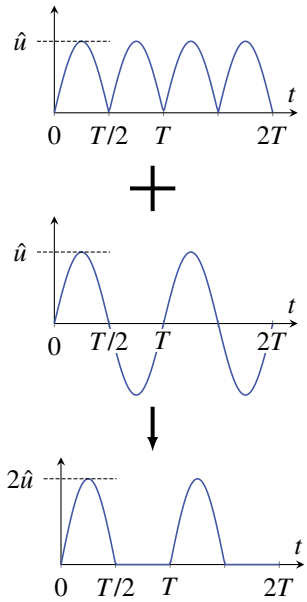
Die Überlagerung, d.h. die Addition der Fourierkoeffizienten der beiden Anteile und die Berücksichtigung des Faktors $1/2$, führt zur Fourierreihe der Funktion $u(t)$

$$\begin{aligned} u(t) = \frac{\hat{u}}{4} - \frac{2\hat{u}}{\pi^2}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\omega t) + \ldots\right] \\ + \frac{\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\sin(\omega t)}{1} - \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} - \frac{\sin(4\omega t)}{4} + - \ldots\right] \end{aligned} \tag{4.99}$$

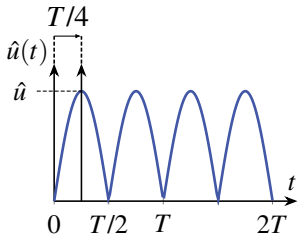
4.2.8 Herleitung weiterer Fourierreihen

Für viele in der Elektrotechnik relevante Funktionen können die Fourierkoeffizienten direkt aus Tabellen entnommen werden und müssen nicht extra berechnet werden. Weiterhin können die gesuchten Kurvenformen zum Teil in bereits tabellarisch erfasste Funktionen zerlegt werden bzw. lassen sich aus diesen zusammensetzen. Ein Beispiel dafür ist in Abbildung 4.20a gegeben, wo die Funktion unten sich aus den beiden darüberliegenden Funktionen zusammensetzen lässt.

In manchen Fällen muss die betrachtete Funktion zuerst zeitlich verschoben werden, bevor diese als Überlagerung von bekannten Funktionen darstellbar ist. Bei der Verschiebung der Funktion $u(t)$ um die



(a)



(b)

Figure 4.20: a) Beispiel für die Zerlegung einer Funktion in zwei Funktionen, deren Fourierkoeffizienten häufig in Tabellen erfasst ist. b) Gleichgerichtete Sinusfunktion, die durch Verschieben entlang der x-Achse in eine gleichgerichtete Sinusfunktion umgewandelt werden kann. Für die gleichgerichtete Sinusfunktion sind die Fourierkoeffizienten bekannt.

Zeitspanne t_0 muss t durch $(t-t_0)$ ersetzt werden. Für die verschobene Zeitfunktion resultieren dann die folgenden Fourierkoeffizienten $\hat{a}_{n,Ver}$ und $\hat{b}_{n,Ver}$

$$\begin{aligned} u(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{a}_n \cos(n\omega(t-t_0)) + \hat{b}_n \sin(n\omega(t-t_0))\right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \underbrace{\left[\hat{a}_n \cos(n\omega t_0) - \hat{b}_n \sin(n\omega t_0)\right]}_{\hat{a}_{n,Ver}} \cos(n\omega t) + \underbrace{\left[\hat{a}_n \sin(n\omega t_0) + \hat{b}_n \cos(n\omega t_0)\right]}_{\hat{b}_{n,Ver}} \sin(n\omega t) \Big\} \end{aligned} \tag{4.100}$$

Als Beispiel wird die gleichgerichtete Kosinusfunktion in Abbildung 4.20b betrachtet, die aus einer gleichgerichteten Sinusfunktion durch $u_{|Cos|}(t) = u_{|Sin|}(t-t_0)$ mit $t_0 = T/4$ hervorgeht.

Für die gleichgerichtete Sinusfunktion gilt: $a_0 = \frac{2\hat{u}}{\pi}$, $\hat{a}_n = \frac{-4\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n-1)(n+1)}$ und $\hat{b}_n = 0$ (mit $n = 2,4,6,\ldots$), da $u_{|Sin|}(t)$ gerade ist. Der Mittelwert ändert sich durch die Verschiebung nicht, d.h. $\hat{a}_{0,|Cos|} = a_0$. Weiterhin ist auch $u_{|Cos|}(t)$ gerade, d.h. $\hat{b}_{n,|Cos|} = \hat{b}_n = 0$.

Die Koeffizienten $\hat{a}_{n,|Cos|}$ ergeben sich aus $\hat{a}_{n,|Cos|} = \hat{a}_n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 0 = (-1)^{n/2}\,\hat{a}_n$ (mit $n = 2,4,6,\ldots$).

Linienspektren

Wie oben abgeleitet wurde, kann eine periodische Funktion sowohl im Zeitbereich als Zeitverlauf $u(t)$ oder gleichwertig durch Amplitude und Phasen von Harmonischen, d.h. im Frequenzbereich, dargestellt werden.

Im Frequenzbereich werden die Amplitude $\hat{c}_n$ und die Phasen φ_n oder ψ_n über der Frequenzachse aufgetragen. Da nur Werte bei ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz vorliegen, ergibt sich ein Linienspektrum, das sich aus einem Amplituden- und einem Phasenspektrum zusammensetzt.

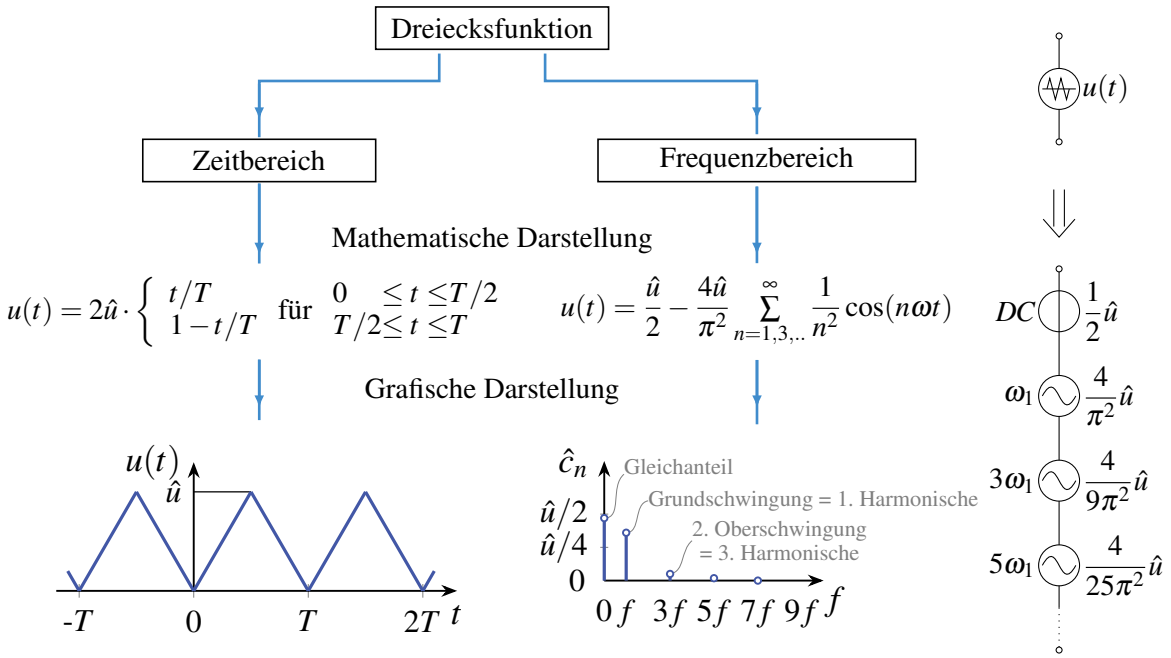


Figure 4.21: Beispiel für die Darstellung einer Dreiecksfunktion im Zeitbereich und im Frequenzbereich.

4.2.9 Zusammenfassung Fourierreihen

Fourierreihen können in der Normalform, der Spektralform und in der komplexen Form dargestellt werden.

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{a}_n \cos(n\omega t) + \hat{b}_n \sin(n\omega t)] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{\hat{k}}_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} \tag{4.101}$$

Die Koeffizienten $a_0, \hat{a}_n, \hat{b}_n$ und $\hat{c}_n$ ergeben sich aus

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathrm{d}t \qquad \hat{a}_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t \tag{4.102}$$

$$\hat{b}_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t \quad \text{bzw.} \quad \underline{\hat{k}}_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t \tag{4.103}$$

Der Zusammenhang zwischen Koeffizienten ist

$$\tan(\varphi_n) = \tfrac{\hat{a}_n}{\hat{b}_n} \qquad \hat{c}_n = \sqrt{\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2} \tag{4.104}$$

$$\text{und komplex:} \quad f_0 = a_0 \qquad \underline{\hat{k}}_n = \frac{\hat{a}_n - \mathrm{j}\hat{b}_n}{2} \qquad \underline{\hat{k}}_{-n} = \frac{\hat{a}_n + \mathrm{j}\hat{b}_n}{2} = \underline{\hat{k}}_n^* \tag{4.105}$$

d.h. die reellen Koeffizienten für die Normal- und die Spektralform können in die komplexen Koeffizienten für die komplexe Form direkt umgewandelt werden.

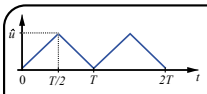
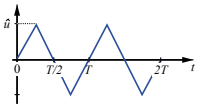
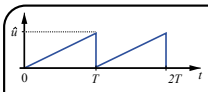
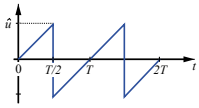
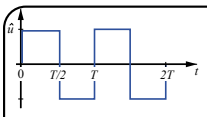
$$a_0 = c_0 \qquad \hat{a}_n = \underline{\hat{k}}_n + \underline{\hat{k}}_{-n} = 2\Re\left\{\underline{\hat{k}}_n\right\} \qquad \hat{b}_n = \mathrm{j}(\underline{\hat{k}}_n - \underline{\hat{k}}_{-n}) = -2\Im\left\{\underline{\hat{k}}_n\right\} \quad \text{und} \quad \underline{\hat{k}}_n = \tfrac{\hat{c}_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Psi_n} \tag{4.106}$$

Es gibt die folgenden Arten der Symmetrie:

1. Art:	Gerade Funktion	$\Rightarrow\ \hat{b}_n = 0$
2. Art:	Ungerade Funktion	$\Rightarrow\ a_0 = \hat{a}_n = 0$
3. Art:	Halbwellensymmetrie $u(t) = -u(t + T/2)$	$\hat{a}_n = \hat{b}_n = 0$ für $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$
4. Art:	Gerade Funktion + Halbwellensymmetrie	$\hat{b}_n = \hat{a}_n = 0$ für $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$
	Ungerade Funktion + Halbwellensymmetrie	$a_0 = \hat{a}_n = \hat{b}_n = 0$ für $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$

Für eine zeitliche Verschiebung in der Normalform $t \to t - t_0$ folgen die Koeffizienten:
$\hat{a}_{n,Ver} = \hat{a}_n \cos(n\omega t_0) - \hat{b}_n \sin(n\omega t_0)$ & $\hat{b}_{n,Ver} = \hat{a}_n \sin(n\omega t_0) + \hat{b}_n \cos(n\omega t_0)$

Die Aufspaltung einer Funktion $u(t)$ in einen geraden/ungeraden Anteil resultiert in
$\rightarrow \quad u(t) = u_g(t) + u_u(t)$ mit $u_g(t) = \frac{1}{2}[u(t) + u(-t)]$ / $u_u(t) = \frac{1}{2}[u(t) - u(-t)]$

Zeitfunktion	U_{eff}	Fourier-Koeffizienten
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$a_0 = \frac{1}{2}\hat{u}, \hat{a}_n = \frac{-4\hat{u}}{\pi^2}\frac{1}{n^2}$ $n = 1, 3, 5, ...$ $u(t) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{4\hat{u}}{\pi^2}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\omega t) + ...\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\hat{b}_n = \frac{8\hat{u}}{\pi^2}\frac{1}{n^2}(-1)^{\frac{n+3}{2}}$ $n = 1, 3, 5, ...$ $u(t) = \frac{8\hat{u}}{\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega t) - + ...\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$a_0 = \frac{1}{2}\hat{u}, \hat{b}_n = \frac{-\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}$ $n = 1, 2, 3, ...$ $u(t) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{\hat{u}}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + ...\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\hat{b}_n = \frac{2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}$ $n = 1, 2, 3, ...$ $u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) - + ...\right]$
	$\hat{u}$	$\hat{b}_n = \frac{4\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}$ $n = 1, 3, 5, ...$ $u(t) = \frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + ...\right]$

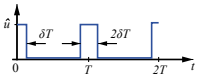
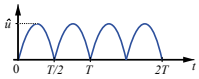
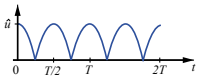
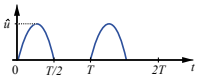
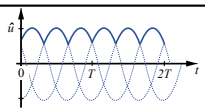
Zeitfunktion	U_{eff}	Fourier-Koeffizienten
	$\hat{u}\sqrt{2\delta}$	$a_0 = 2\delta\hat{u}$ $\hat{a}_n = \frac{2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}\sin(n2\pi\delta)$ $n = 1, 2, 3, ...$ $u(t) = 2\delta\hat{u} + \frac{2\hat{u}}{\pi}\left[\sin(2\pi\delta)\cos(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi\delta)\cos(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(6\pi\delta)\cos(3\omega t) + ...\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$a_0 = \frac{2\hat{u}}{\pi}, \hat{a}_n = \frac{-4\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n+1)(n-1)}$ $n = 2, 4, 6, ...$ $u(t) = \hat{u}\lvert\sin(\omega t)\rvert$ $u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} + ...\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$a_0 = \frac{2\hat{u}}{\pi}, \hat{a}_n = \frac{4\hat{u}}{\pi}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{(n+1)(n-1)}$ $n = 2, 4, 6, ...$ $u(t) = \hat{u}\lvert\cos(\omega t)\rvert$ $u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi} + \frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} - \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} - + ...\right]$
	$\frac{\hat{u}}{2}$	$a_0 = \frac{\hat{u}}{\pi}, \hat{a}_n = \frac{-2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n+1)(n-1)}$ $\hat{b}_1 = \frac{\hat{u}}{2}$ $n = 2, 4, 6, ...$ $u(t) = \hat{u}\sin(\omega t) \quad \text{für} \quad 0 \le t \le T/2$ $u(t) = \frac{\hat{u}}{\pi} + \frac{\hat{u}}{2}\sin(\omega t) - \frac{2\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} + ...\right]$
	$\hat{u}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}}$	$a_0 = \frac{3\sqrt{3}\hat{u}}{2\pi}$ $\hat{a}_n = \frac{-3\sqrt{3}\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n+1)(n-1)}$ $n = 3, 6, 9, ...$ $u(t) = \frac{3\sqrt{3}\hat{u}}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(3\omega t)}{2\cdot 4} - \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} - \frac{\cos(9\omega t)}{8\cdot 10} - ...\right]$

Figure 4.22: Beispiele für Fourierreihen von typischen Signalen.

4.3 Harmonische Analyse

Im Folgenden wird die Anwendung der Fourierreihen in der Schaltungsanalyse bei periodischen, nicht sinusförmigen Anregungen erläutert. Das dabei beschriebene Verfahren wird allgemein als harmonische Analyse bezeichnet.

4.3.1 Fourierreihen in der Schaltungsanalyse

In Abbildung 4.23 ist die allgemeine Vorgehensweise bei der Analyse linearer Netzwerke mit zeitlich periodischen Strom- und Spannungsquellen dargestellt.

1. Periodische Signalformen der Quellen jeweils in eine Fourierreihe umwandeln.

2. Gleichanteil $a_0 \neq 0$: Berechnen der Strom- bzw. Spannungsverteilung für die Anregung mit einer Gleichspannungs-/Gleichstromquelle, wobei Induktivitäten jeweils durch einen Kurzschluss und Kapazitäten jeweils durch einen Leerlauf ersetzt werden.

3. Quellen im Netzwerk jeweils durch einfache Wechselstrom- bzw. Wechselspannungsquelle mit der einheitlichen Frequenz ω ersetzen und mittels komplexer Wechselstromrechnung die allgemeine Lösung berechnen.

4. Lösungsanteile für die jeweilige Harmonische mit der allgemeinen Lösung aus Schritt 3) berechnen und in den Zeitbereich transformieren.

5. Die Gesamtlösung folgt durch Überlagerung der Teillösungen für die einzelnen Harmonischen im Zeitbereich.

Diese Vorgehensweise wird im Folgenden noch näher anhand von Beispielen erläutert.

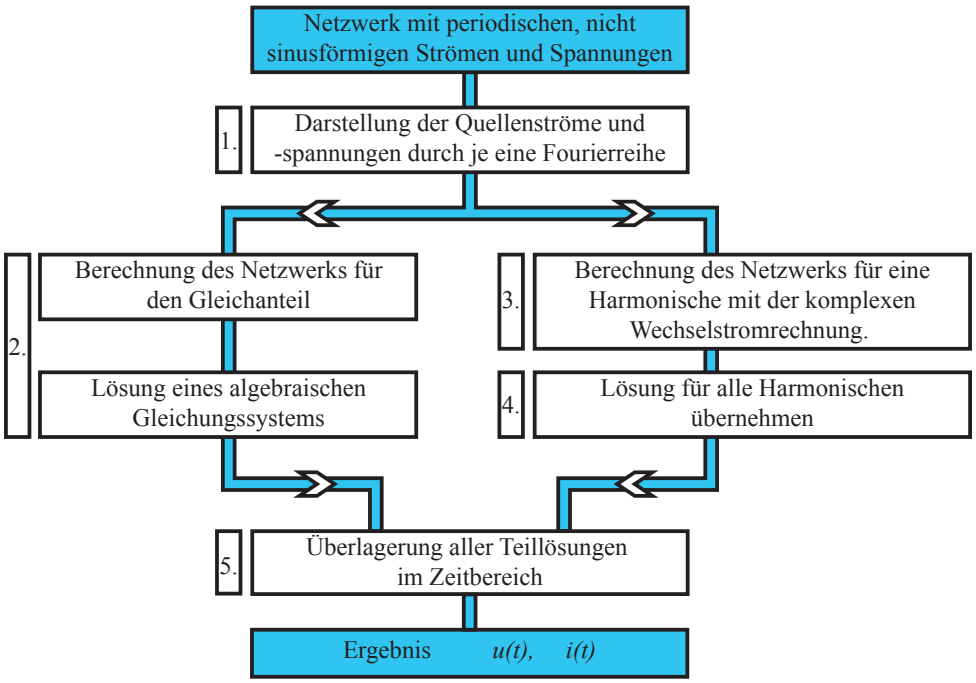


Figure 4.23: Veranschaulichung des Vorgehens bei der Harmonischen Analyse, d.h. bei der Berechnung von Netzwerken, die durch Quellen mit verschiedenen Frequenzen angeregt werden.

Beispiel: Schaltungsanalyse mit Fourierreihen

Basierend auf den Überlegungen zu der Überlagerung von zwei sinusförmigen Wechselspannungen mit beliebiger Frequenz im Abschnitt 4.1.3 wird nun das allgemeine Verfahren für die Berechnung von Netzwerken erläutert, die durch allgemeine periodische Signale angeregt werden. Diese periodischen Signale können durch Fourierreihen dargestellt werden. Im Gegensatz zu den sinusförmigen Signalen von Abschnitt 4.1.3 sind die Frequenzen der sinusförmigen Grössen in den Fourierreihen Vielfache einer Grundfrequenz, wodurch die Darstellung der Lösung vereinfacht werden kann.

In Abbildung 4.24a ist ein *RL*-Netzwerk angeregt durch eine Gleichspannungsquelle und zwei sinusförmigen Spannungen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz ω_1 sind. Die Lösung für den gesuchten Strom ergibt sich unmittelbar aus der Gleichung (4.1) für den Gleichstrom und aus der allgemeinen Lösung (4.14) für eine Anregung mit Wechselspannung.

$$i(t) = I_0 + i_{u_1}(t) + i_{u_3}(t) = \frac{U_{DC}}{R} + \sum_{n=1,3} \frac{\hat{u}_n}{\sqrt{R^2 + (n\omega_1 L)^2}} \cos\left(n\omega_1 t - \varphi_n - \arctan\frac{n\omega_1 L}{R}\right) \tag{4.107}$$

Im Gegensatz zu der Lösung (4.15) für allgemeine Wechselspannungen, wo die Frequenz der jeweiligen Schwingung beliebig war, kann im betrachteten Fall die Frequenz direkt über die Ordnungszahl n der Harmonischen angegeben werden, d.h.: $\omega_n = n\omega_1$ (mit $n \in \mathbb{N}$).

Neben der Frequenz geht die Amplitude $\hat{u}_n$ und die Phase φ_n der jeweiligen Harmonischen in die Lösung ein.

Ersetzt man die drei einzelnen Quellen in Abbildung 4.24a durch die Spannungsquelle in Abbildung 4.24b mit

$$u_{G,\Sigma}(t) = U_{DC} + \hat{u}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{u}_3 \cos(3\omega_1 t + \varphi_3) \tag{4.108}$$

so stellt diese Quelle eine einfache Fourierreihe mit zwei Harmonischen und Gleichanteil dar. Die Lösung für den Strom ist dabei identisch zur Gleichung für das Netzwerk in Abbildung 4.24a.

Die obige Berechnung des Stromes veranschaulicht die Vorgehensweise bei der Analyse von Netzwerken, die von Quellen angeregt werden, die über Fourierreihen beschrieben werden. Im nächsten Abschnitt folgt dazu noch ein Beispiel mit einer komplexeren Fourierreihe als Anregung.

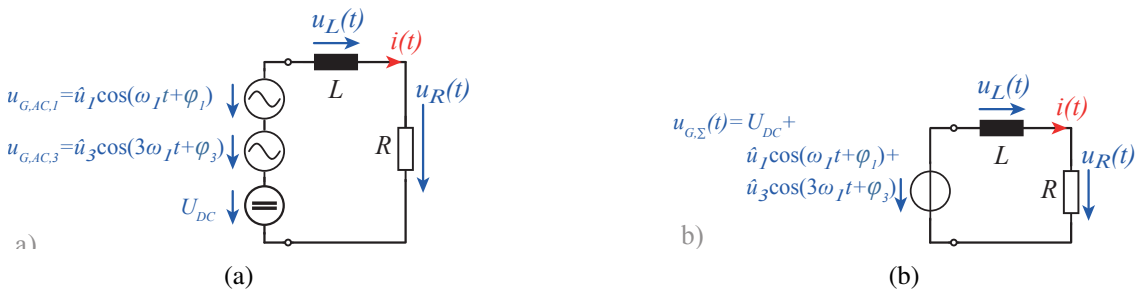


Figure 4.24: a) *RL*-Beispielnetzwerk angeregt durch drei Quellen mit unterschiedlichen Frequenzen, wobei die Frequenzen ganzzahlige Vielfache sind. b) *RL*-Netzwerk, bei welchem die drei einzelnen Quellen durch eine Quelle ersetzt wurde. Der zeitliche Verlauf dieser einzelnen Quelle wird durch eine (kurze) Fourierreihe beschrieben.

4.3.2 *RL*-Schaltung mit gleichgerichteter Spannung

Als zweites Beispiel wird nun für die *RL*-Schaltung in Abbildung 4.25a, die von der gleichgerichteten Quellenspannung $u_G(t) = \hat{u}_G|\sin(\omega_1 t)|$ in Abbildung 4.25b angeregt wird, der Strom $i(t)$ ermittelt.

▷ Schritt 1: Zuerst wird die Fourierreihe für die Quellenspannung $u_G(t)$ z.B. über die Tabelle in Abbildung 4.22 bzw. im Anhang ermittelt

$$\begin{aligned} u_G(t) &= \frac{2\hat{u}_G}{\pi} - \frac{4\hat{u}_G}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega_1 t)}{1\cdot 3} + \frac{\cos(4\omega_1 t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega_1 t)}{5\cdot 7} + \ldots\right] \\ &= \frac{2\hat{u}_G}{\pi} - \frac{4\hat{u}_G}{\pi}\sum_{n=2,4,..}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\cos(n\omega_1 t) \end{aligned} \tag{4.109}$$

Aus der Reihenentwicklung ist ersichtlich, dass die Quellenspannung sowohl einen Gleichanteil als auch unendlich viele Harmonische enthält. Man kann sich daher die Spannungsquelle $u_G(t)$ auch als Reihenschaltung von unendlich vielen Einzelquellen vorstellen (siehe Linienspektrum). Damit resultiert auch für den gesuchten Strom $i(t)$ eine unendliche Summe an Harmonischen.

▷ Schritt 2: Zum Berechnen des Gleichanteils des resultierenden Stromes, wird angenommen, dass die Quelle u_G durch eine reine Gleichspannungsquelle u_Q mit dem Wert U_{DC} ersetzt wird. Für die Gleichspannung stellt die Induktivität einen Kurzschluss dar und der Strom $i(t)$ ergibt sich

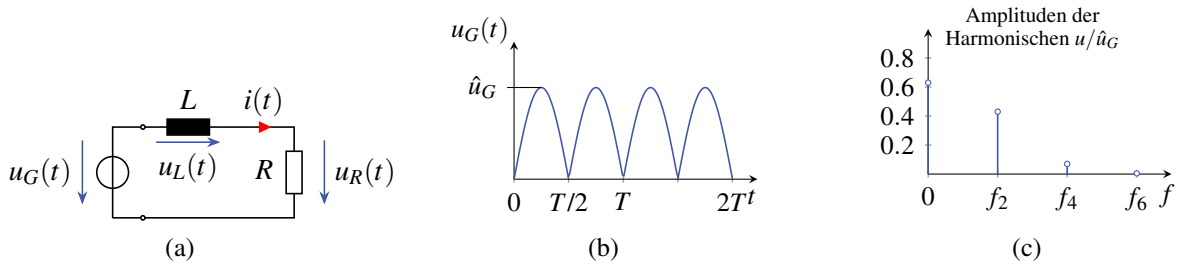


Figure 4.25: a) *RL*-Netzwerk, das durch die gleichgerichtete Spannung in b) angeregt wird. In c) sind der Gleichanteil und die ersten Harmonischen der gleichgerichteten Spannung in b) dargestellt.

unmittelbar aus

$$i(t) = I = \frac{U_{DC}}{R} \tag{4.110}$$

▷ Schritt 3: Für die Berechnung der Wirkungen durch die einzelnen Harmonischen wird angenommen, dass die Quelle u_G durch eine allgemeine, reine sinusförmige Spannungsquelle u_Q mit der beliebigen Frequenz f und Phase φ ersetzt wird (siehe Abbildung 4.26a)

$$u_Q(t) = \hat{u}_Q \cos(\omega t + \varphi_u) \tag{4.111}$$

Damit folgt der Zeiger für die angenommene Quellenspannung: $\underline{\hat{u}}_Q = \hat{u}_Q \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}$

Mit dem Spannungszeiger ergibt sich mit der komplexen Wechselstromrechnung allgemein für den Stromzeiger (Abbildung 4.26b) – (siehe auch Abschnitt 4.1.3)

$$\underline{\hat{i}} = \frac{\underline{\hat{u}}_Q}{R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{\hat{u}_Q}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\underbrace{\left(\varphi_u - \arctan \frac{\omega L}{R}\right)}_{\varphi_{ui}}} \tag{4.112}$$

Aus dem Stromzeiger $\underline{\hat{i}}$ folgt der allgemeine zeitliche Verlauf des Stromes

$$i(t) = \frac{\hat{u}_Q}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_u - \arctan \frac{\omega L}{R}\right) \tag{4.113}$$

▷ Schritt 4: Mit der allgemeinen Lösung folgt für die einzelnen Ströme hervorgerufen durch die jeweilige Harmonische der Spannung $u_{G,n}(t) = \hat{u}_{G,n} \cos(n\omega_1 t)$

$$i_n(t) = \frac{\hat{u}_{G,n}}{\sqrt{R^2 + (n\omega_1 L)^2}} \cos\left(n\omega_1 t + \varphi_n - \arctan \frac{n\omega_1 L}{R}\right) \tag{4.114}$$

Ersetzt man die Amplitude bzw. die Phase der Gleich- und der Kosinusspannungsquelle durch den jeweiligen Koeffizienten der Fourierreihe der gleichgerichteten Sinusspannung und überlagert die Teillösungen, so folgt

$$i(t) = \frac{2\hat{u}_G}{R\pi} - \frac{4\hat{u}_G}{\pi} \sum_{n=2,4,..}^{\infty} \frac{\cos\left(n\omega_1 t - \arctan \frac{n\omega_1 L}{R}\right)}{(n^2-1)\sqrt{R^2 + (n\omega_1 L)^2}} \tag{4.115}$$

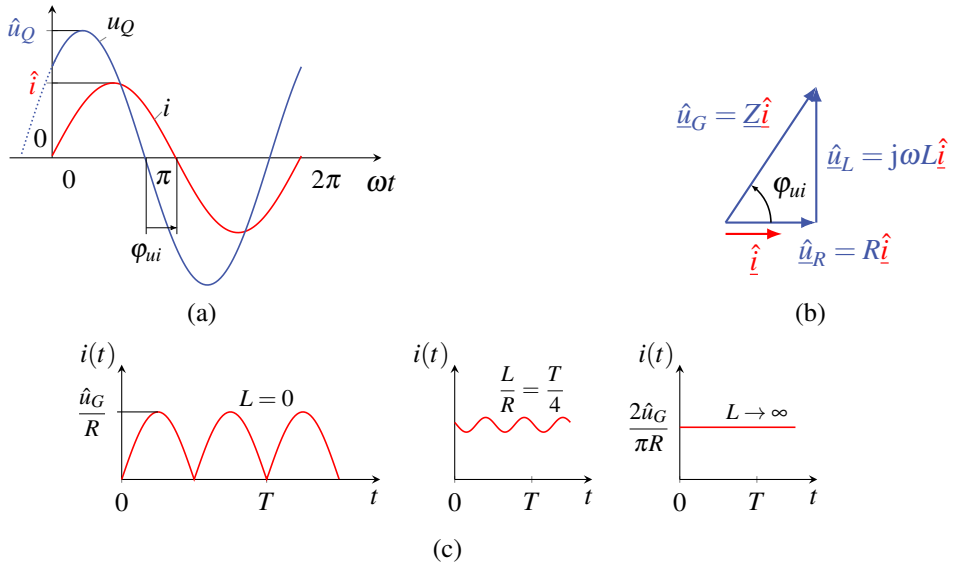


Figure 4.26: a) Allgemeine sinusförmige Spannung mit einem dazu passenden Strom. b) Zeigerdiagramm für das *RL*-Netzwerk angeregt durch die allgemeine Spannung. c) Zeitlicher Verlauf des Stromes $i(t)$ für verschiedene Werte der Induktivität.

Der Strom enthält dabei grundsätzlich die gleichen Harmonischen wie die anregende Spannung $u_G(t)$, da alle Bauelemente linear sind und das Netzwerk keine neuen Harmonischen z.B. durch Verzerrungen hervorruft.

In Abbildung 4.26c ist der Verlauf von $i(t)$ für unterschiedliche Induktivitätswerte aufgetragen. Für den Wert $L = 0$ ist der Verlauf des Stromes gleich der Quellenspannung und für $L \to \infty$ ergibt sich ein konstanter Strom (d.h. ein Gleichstrom).

Hinweis: In Abbildung 4.27 sind als Ergänzung noch drei verschiedene Gleichrichterschaltungen und die dazugehörigen gleichgerichteten Spannungen u_d und die Fourierreihen gegeben. Oben ist ein sogenannter Einweggleichrichter (M1U) gegeben, der quasi nur eine Halbwelle der Wechselspannung gleichrichtet. In der Mitte ist ein sogenannter Brückengleichrichter (B2U) dargestellt. Dieser ist der Standardgleichrichter für Einphasenwechselstrom ist der Brückengleichrichter. Die Schaltung besteht aus vier Dioden, die die links anliegende Wechselspannung in eine pulsierende Gleichspannung umwandeln. Da es sich dabei um eine Zweiweggleichrichtung handelt, erscheint die negative Halbschwingung der Wechselspannung im Gleichstromkreis an der Last R als positive Spannung. Die Welligkeit hat dabei die doppelte Frequenz der Eingangsspannung. Unten ist ein Brückengleichrichter (Ungesteuerte Drehstrombrücke – B6U) für dreiphasige Spannungssysteme bzw. für Drehstrom gegeben. Wie man der Fourierreihe für die Spannung $u_d(t)$ entnehmen kann, hat die Welligkeit dabei die sechsfache Frequenz der sinusförmigen Eingangsspannung.

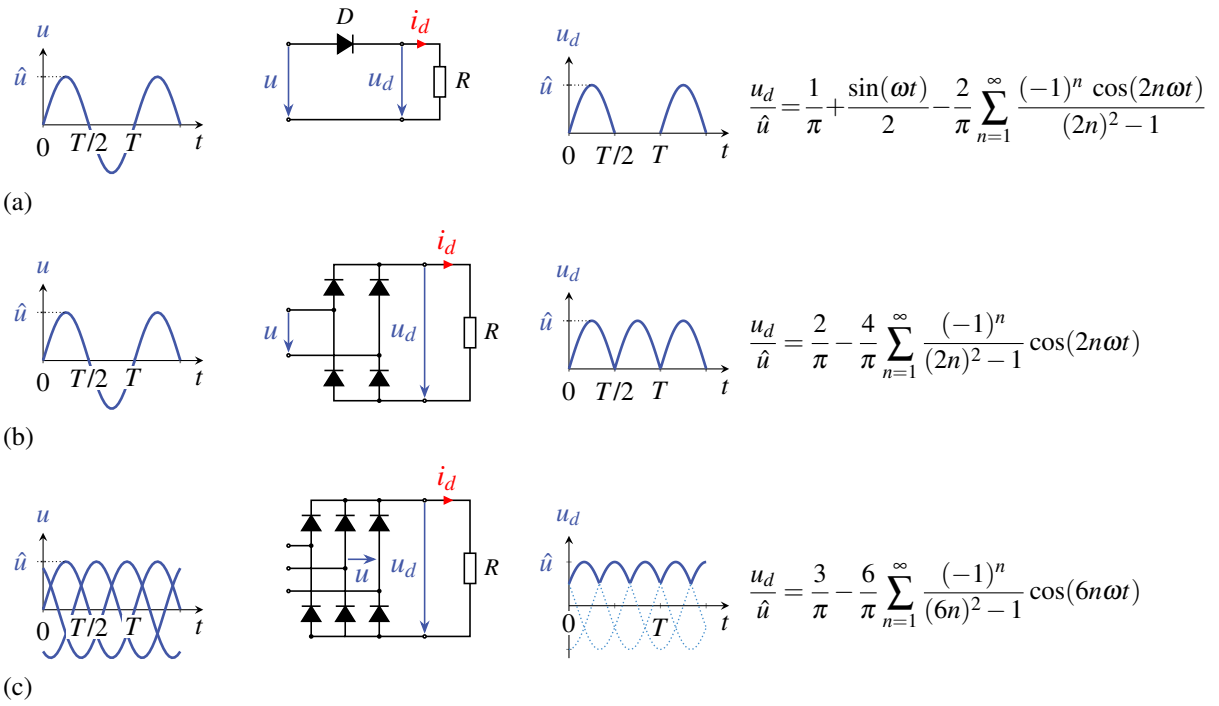


Figure 4.27: Schaltbilder verschiedener Gleichrichterschaltungen mit dem dazugehörigen Verlauf der gleichgerichteten Spannung und deren Darstellung als Fourierreihe. In a) ist ein Einweggleichrichter (M1U), in b) ist ein Brückengleichrichter (B2U) und in c) ist ein Brückengleichrichter für dreiphasige Spannungssysteme gegeben.

4.3.3 Effektivwert periodischer Verläufe

Der Effektivwert einer beliebigen periodisch zeitabhängigen Grösse ergibt sich allgemein z.B. für die Spannung $u(t)$ mit der Periode T aus dem folgenden Zusammenhang (Effektivwert eines Stromes kann man analog berechnen):

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left\{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{a}_n\cos(n\omega t) + \hat{b}_n\sin(n\omega t)\right]\right\}^2 \mathrm{d}t} \tag{4.116}$$

Aufgrund der Orthogonalitätsrelation liefern nur die quadratischen Glieder einen Beitrag zum Effektivwert (zur Erinnerung: $\hat{c}_n^2 = (\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2)$).

$$U = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2)} = \sqrt{a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\hat{c}_n}{\sqrt{2}}\right)^2} \tag{4.117}$$

Der Effektivwert einer periodischen Funktion kann also entweder über das Integral über die Zeitfunktion oder aus der Summe des Quadrats des Mittelwerts und den Quadraten der Effektivwerte aller Harmonischen berechnet werden. Die Phasenwinkel der einzelnen Harmonischen haben auf den Effektivwert keinen Einfluss.

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{\hat{u}_1^2}{2} + \frac{\hat{u}_2^2}{2} + \ldots} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots} \tag{4.118}$$

Dabei ist U_0 der Mittelwert der Spannung und U_k ($k = 1 \ldots \infty$) ist der Effektivwert der jeweiligen Harmonischen ($\hat{u}_k = \hat{c}_k$).
Das Linienspektrum der Koeffizienten $\frac{1}{2}\hat{c}_n^2 = \frac{1}{2}(\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2)$ charakterisiert die Leistungsverteilung auf die unterschiedlichen Frequenzen und wird als Leistungsspektrum bezeichnet.

Beispiel: Die Fourier-Analyse eines periodischen Stromes ergibt

- ▷ den Gleichanteil I_0 = 5.0A
- ▷ den Effektivwert der Grundschwingung I_1 = 3.2A
- ▷ den Effektivwert der dritten Harmonischen I_3 = 1.0A

Die Effektivwerte der übrigen Oberschwingungen seien vernachlässigbar klein.
Wie gross ist der Effektivwert des periodischen Stromes I?
Lösung: Der Effektivwert ergibt sich aus

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2} = \\ &= \sqrt{5.0^2 + 3.2^2 + 1.0^2}A = \\ &= 6.0A \end{aligned}$$

Übersicht: Orthogonalitätsrelationen

Im Folgenden sind die Orthogonalitätsrelationen von Sinus- und Kosinusfunktionen kurz zusammengefasst.

$$\int_t^{t+T} K\cos(n\omega_1 t)\cos(m\omega_1 t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \neq m \\ K\frac{T}{2} & \phantom{\text{für}} \quad n = m \neq 0 \end{cases} \tag{4.119}$$

$$\int_t^{t+T} K\cos(n\omega_1 t)\sin(m\omega_1 t) = 0 \tag{4.120}$$

$$\int_t^{t+T} K\sin(n\omega_1 t)\sin(m\omega_1 t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \neq m \\ K\frac{T}{2} & \phantom{\text{für}} \quad n = m \neq 0 \end{cases} \tag{4.121}$$

Damit folgt, dass die Produkte von Sinus- oder Kosinusfunktionen mit $n \neq m$ keine Mittelwerte besitzen, d.h. ihre Integrale verschwinden. Nur die Produkte gleicher Ordnungszahl $n = m \neq 0$ bilden eine Ausnahme

$$\int_t^{t+T} K\cos^2(m\omega_1 t)\mathrm{d}t = \int_t^{t+T} K\frac{1+\cos(2m\omega_1 t)}{2}\mathrm{d}t = K\frac{T}{2} \tag{4.122}$$

$$\int_t^{t+T} K\sin^2(m\omega_1 t)\mathrm{d}t = \int_t^{t+T} K\frac{1-\cos(2m\omega_1 t)}{2}\mathrm{d}t = K\frac{T}{2} \tag{4.123}$$

Für die Berechnung des Effektivwerts bedeutet dies, dass nur für $m = n$ die Terme im Integral nicht verschwinden und für eine Harmonische folgt

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{u}_n^2 \sin^2(n\omega_1 t + \varphi_n)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\hat{u}_n^2 \tag{4.124}$$

Beispiel Effektivwert für Dreiecksfunktion

Nun wird beispielhaft der Effektivwert der dreiecksförmigen Spannung

$$u(t) = 2\hat{u}\cdot\begin{cases} t/T & \text{für} \quad 0 \le t \le T/2 \\ 1 - t/T & \phantom{\text{für}} \quad T/2 \le t \le T \end{cases} \tag{4.125}$$

in Abbildung 4.28 zum einen über das Integral der Zeitfunktion und zum anderen über die Fourierkoeffizienten berechnet. Effektivwerte von typischen Signalen finden Sie auch im Anhang B.5.

Aus der Zeitfunktion $u(t)$ in Abbildung 4.28 folgt unmittelbar

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} u^2(t)\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{8\hat{u}^2}{T^3}\int_0^{T/2} t^2\mathrm{d}t} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}} \tag{4.126}$$

Für die Berechnung des Effektivwerts mittels der Fourierkoeffizienten ergibt sich

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2)} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\left(\frac{-4\hat{u}}{\pi^2}\frac{1}{n^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{4} + \frac{8\hat{u}^2}{\pi^4}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^4}} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{4} + \frac{8\hat{u}^2}{\pi^4}\underbrace{\left[1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \ldots\right]}_{\frac{\pi^4}{96}}} \end{aligned} \tag{4.127}$$

$$\Rightarrow \quad U = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{4} + \frac{\hat{u}^2}{12}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}} \tag{4.128}$$

Die Beiträge der einzelnen Harmonischen zur Gesamtleistung $P = U^2/R = \hat{u}^2/3R$ sind: $a_0 \to \hat{u}^2/4$, $\hat{c}_1 \to 0.328\,\hat{u}^2/4$ und $\hat{c}_3 \to 0.004\,\hat{u}^2/4$. Daraus folgt, dass fast die gesamte Leistung durch den Gleichanteil und die 1. Harmonische übertragen wird. Alle höheren Harmonischen können praktisch vernachlässigt werden. Hinweis: Die Überlagerung der einzelnen Wirkleistungsanteile ist im betrachteten Fall möglich, da die Wirkleistungsanteile von Harmonischen betrachtet wird, deren Frequenzen Vielfache voneinander sind – siehe nächster Abschnitt. Im Allgemeinen können Leistungsanteile aufgrund der Multiplikation/quadratischen Zusammenhänge nicht überlagert werden.

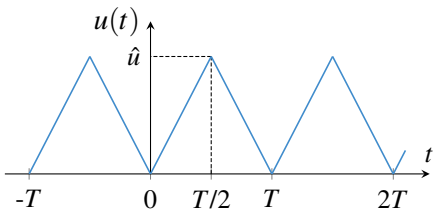


Figure 4.28: Dreiecksförmiger Spannungsverlauf.

4.3.4 Leistung eines allgemeinen Zweipols

Zur Berechnung der Leistung in einem allgemeinen Zweipol an dem eine allgemeine periodische Spannung anliegt (Abbildung 4.29), wird zuerst angenommen, dass die Spannung und der Strom durch den

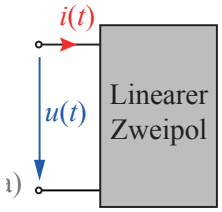


Figure 4.29: Darstellung eines allgemeinen Zweipols mit den Klemmengrössen $u(t)$ und $i(t)$.

Zweipol als Fourierreihe in Normalform vorliegt. Dabei werden die Koeffizienten für die geraden Anteile (cos) mit dem Index g versehen und die Koeffizienten für die ungeraden Anteile (sin) mit dem Index u.

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{u}_{gn}\cos(n\omega t) + \hat{u}_{un}\sin(n\omega t)] = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{2}U_{gn}\cos(n\omega t) + \sqrt{2}U_{un}\sin(n\omega t)\right] \quad (4.129)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\hat{i}_{gm}\cos(m\omega t) + \hat{i}_{um}\sin(m\omega t)\right] = I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sqrt{2}I_{gm}\cos(m\omega t) + \sqrt{2}I_{um}\sin(m\omega t)\right] \quad (4.130)$$

Die Wirkleistung P im Zweipol ergibt sich unmittelbar aus dem Integral der Momentanleistung $p(t)$ (= Produkt der Spannung und des Stromes für den Zweipol) über eine Periode

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)\mathrm{d}t \quad (4.131)$$

In der Gleichung für die Momentanleistung verschwinden wiederum aufgrund der Orthogonalitätsrelation alle Mischglieder ($n \neq m$), so dass nur die folgende Terme übrig bleiben

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left\{U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{u}_{gn}\hat{i}_{gn}\cos^2(n\omega t) + \hat{u}_{un}\hat{i}_{un}\sin^2(n\omega t)\right]\right\}\mathrm{d}t \quad (4.132)$$

Damit folgt für die Wirkleistung

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} [\hat{u}_{gn}\hat{i}_{gn} + \hat{u}_{un}\hat{i}_{un}] = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [U_{gn}I_{gn} + U_{un}I_{un}] \quad (4.133)$$

Folglich setzt sich die Wirkleistung aus der Summe des Produktes der Gleichanteile und der Produkte der Effektivwerte von Strom und Spannung für die Sinusfunktionen gleicher Frequenzen und für die Kosinusfunktionen gleicher Frequenzen zusammen, d.h. die Leistungsanteile werden addiert (überlagert).

Hinweis: Im ersten Teil der Vorlesung (NUS I) wurde bei der Erläuterung des Überlagerungsprinzips festgestellt, dass aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Strom und Leistung bzw. zwischen Spannung und Leistung die Gesamtleistung z.B. an einem Widerstand nicht durch Summation der Teilleistungen infolge von Teilströmen bzw. Teilspannungen berechnet werden darf. In dem oben betrachteten Spezialfall der Wirkleistung dürfen die Teilleistungen addiert werden, da diese von sinusförmigen Teilströmen/-spannungen hervorgerufen werden, deren Frequenzen jeweils ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz bzw. Gleichanteile sind. Aufgrund der Orthogonalitätsrelation und der Integration über eine Periode der Grundfrequenz fallen Mischterme beim Berechnen der Wirkleistung heraus, so dass man hier die Teilleistungen addieren darf.

Geht man alternativ davon aus, dass die Spannung und der Strom als Fourierreihen mit phasenverschobenen Sinusfunktionen vorliegen

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n \sin(n\omega t + \varphi_{u_n}) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}U_n \sin(n\omega t + \varphi_{u_n}) \quad (4.134)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{i}_m \sin(m\omega t + \varphi_{i_m}) = I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{2}I_m \sin(m\omega t + \varphi_{i_m}) \quad (4.135)$$

so ergibt sich für die Wirkleistung (Mischglieder ($n \neq m$) = 0):

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T U_0 I_0 \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{u}_n \hat{i}_n \frac{1}{T}\int_0^T \sin(n\omega t + \varphi_{u_n})\sin(n\omega t + \varphi_{i_n})\mathrm{d}t\right]$$

$$= U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\hat{u}_n \hat{i}_n}{2T}\left(\int_0^T \cos(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n})\mathrm{d}t - \underbrace{\int_0^T \cos(2n\omega t + \varphi_{u_n} + \varphi_{i_n})\mathrm{d}t}_{0}\right)\right] \tag{4.136}$$

Dies resultiert in

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{u}_n \hat{i}_n \cos(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}) = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}) \tag{4.137}$$

Damit ergibt sich die Wirkleistung an dem linearen Zweipol aus dem Produkt der Gleichanteile und der Summe der Wirkleistungen bei den einzelnen Harmonischen. Die Produkte aus Strom und Spannung unterschiedlicher Frequenz tragen folglich nicht zur Wirkleistung bei.

4.3.5 Scheinleistung, Blindleistung, Leistungsfaktor

Das Produkt aus Spannungs- und Stromeffektivwert wird – wie bei sinusförmigen Grössen – als Scheinleistung bezeichnet. Mit den oben abgeleiteten Gleichungen für den Effektivwert folgt

$$S = UI = \sqrt{\left[U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2\right]\left[I_0^2 + \sum_{m=1}^{\infty} I_m^2\right]} \tag{4.138}$$

In dem Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung treten Mischterme unterschiedlicher Harmonischer ($n \neq m$) auf, d.h. die Scheinleistung kann nicht durch Addition der Scheinleistungen bei den einzelnen Harmonischen berechnet werden.

Mit der Scheinleistung ergibt sich die Blindleistung Q definitionsgemäss aus

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} \tag{4.139}$$

Die Blindleistung ist dabei für nicht sinusförmige Grössen vorzeichenlos.

Auch die Blindleistung Q besteht wegen der Mischterme nicht mehr alleine aus der Summe $\tilde{Q}$ der Beiträge

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{u}_n \hat{i}_n \sin(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}) \tag{4.140}$$

bei den einzelnen Harmonischen, die als Verschiebeblindleistung bezeichnet wird, sondern es tritt ein weiterer als Verzerrungsblindleistung D bezeichneter Anteil auf. Die Scheinleistung ergibt sich damit aus

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + \tilde{Q}^2 + D^2} \tag{4.141}$$

Der Leistungsfaktor ist wieder als Verhältnis von Wirk- und Scheinleistung definiert

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n})}{\sqrt{\left[U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2\right]\left[I_0^2 + \sum_{m=1}^{\infty} I_m^2\right]}} \tag{4.142}$$

Für den Sonderfall eines rein sinusförmigen Verlaufes (d.h. einer einzelnen sinusförmigen Grösse mit der Frequenz kf_1) folgt wieder

$$\lambda = \frac{U_k I_k \cos(\varphi_{u_k} - \varphi_{i_k})}{\sqrt{U_k^2 I_k^2}} = \cos(\varphi_{u_k} - \varphi_{i_k}) \tag{4.143}$$

Beispiel: Scheinleistung & Blindleistung

Im Folgenden wird ein Beispiel für die Berechnung der Leistung in dem Netzwerk in Abbildung 4.30 gezeigt. Die Spannung $u(t)$ hat die Grundfrequenz $f = 100\,\text{Hz}$, den Gleichanteil $U_0 = 12\,\text{V}$ und die Harmonischen (Amplitude/Phase)

	1	2	3	4	5
$\hat{u}_n$ [V]	6.52	5.1	3.2	2	1.17
$\varphi_{u,n}$	-32°	28°	20°	0°	-31°

Damit ergeben sich die Effektivwerte der Harmonischen: $U_1 = 4.6\,\text{V}$, $U_2 = 3.6\,\text{V}$, $U_3 = 2.3\,\text{V}$, $U_4 = 1.4\,\text{V}$, $U_5 = 0.8\,\text{V}$ und der Effektivwert der Gesamtspannung mit (4.118): $U = 13.64\,\text{V}$.

Der Strom $i(t)$ hat den Gleichanteil: $I_0 = U_0/R = 176\,\text{mA}$ ($L \rightarrow$ Kurzschluss und $C \rightarrow$ Leerlauf) und die Amplituden der Teilschwingungen ergeben sich mit dem Leitwert: $\underline{Y} = \mathrm{j}\omega C + 1/(R+\mathrm{j}\omega L)$

	1	2	3	4	5
$\hat{i}_n$ [mA]	95	72	42	25	13
$\varphi_{i,n}$	-39°	15°	1°	-24°	-60°

Damit ergibt sich der Effektivwert des Stromes $i(t)$ zu 199mA. Mit dem Effektivwert der Spannung und des Stromes folgt

$$S = UI = 2.7\,\text{VA} \tag{4.144}$$

für die Scheinleistung, die von dem gesamten Netzwerk aufgenommen wird. Die aufgenommene Wirkleistung ergibt sich aus

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5} \hat{u}_n \hat{i}_n \cos(\varphi_u - \varphi_i) = 2.61\,\text{W} \tag{4.145}$$

Die Blindleistung bzw. die Verzerrungsblindleistung sind somit gleich

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 0.7\,\text{VAr} \tag{4.146}$$

$$\tilde{Q} = 0.5\sum_{n=1}^{5} \hat{u}_n \hat{i}_n \sin(\varphi_{u,n} - \varphi_{i,n}) = 0.22\,\text{VAr} \tag{4.147}$$

$$D = 0.66\,\text{VAr} \tag{4.148}$$

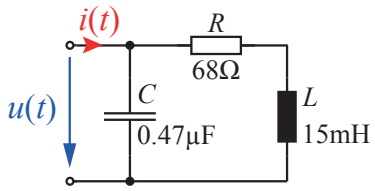


Figure 4.30: Beispielnetzwerk für die Berechnung der Schein- und der Blindleistung.

4.3.6 Weitere Kenngrössen periodischer Funktionen

Neben den Leistungsgrössen gibt es noch weitere Kenngrössen für periodische Funktionen. Diese dienen zum Beispiel dazu, die Abweichung der periodischen Funktion von einer reinen Sinusform, d.h. die Verzerrung, zu beschreiben. Die verschiedenen Kenngrössen werden im Folgenden beispielhaft für eine Spannung berechnet. Diese können analog auch für Ströme ermittelt werden.

Der Effektivwert des Wechselanteils $U_\sim$ ist gleich dem Effektivwert, jedoch ohne den Gleichanteil.

$$U_\sim = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2} = \sqrt{U^2 - U_0^2} \tag{4.149}$$

Der Grundschwingungsgehalt g $(0 \leq g \leq 1)$ beschreibt das Verhältnis aus dem Effektivwert der Grundschwingung zum Effektivwert des Wechselanteils. Für eine reine Sinusform folgt $g = 1$.

$$g = \frac{U_1}{U_\sim} \tag{4.150}$$

Der Klirrfaktor k $(0 \leq k \leq 1)$ ist ein Mass für den Oberschwingungsgehalt einer Kurvenform und beschreibt die globale Abweichung der Kurve von einer reinen Sinusform. Dabei unterscheidet man den Gesamtklirrfaktor und den Klirrfaktor n-ter Ordnung k_n, der sich aus dem Verhältnis des Effektivwerts der n-ten Oberschwingung zum Effektivwert des Wechselanteils ergibt: $k_n = \frac{U_n}{U_\sim}$. Neben dem Klirrfaktor wird häufig noch die Total Harmonic Distortion (THD) verwendet, die aus $THD = (\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2})/U_1 = k/\sqrt{1-k^2}$ folgt.

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}}{U_\sim} = \frac{\sqrt{U_\sim^2 - U_1^2}}{U_\sim} = \sqrt{1-g^2} = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} k_n^2} \tag{4.151}$$

Der Scheitelfaktor ξ beschreibt das Verhältnis des Spitzenwerts zum Effektivwert des Wechselanteils. Für sinusförmige Verläufe gilt dabei $\xi = \sqrt{2}$.

$$\xi = \frac{\hat{u}}{U_\sim} \tag{4.152}$$

Der Formfaktor F beschreibt das Verhältnis vom Effektivwert des Wechselanteils zum Gleichrichtwert. Bei einer reinen sinusförmigen Schwingung gilt $F = \pi/\sqrt{8} \approx 1.114$. Für "spitze" Kurvenverläufe steigt der Wert schnell an.

$$F = \frac{U_\sim}{|\overline{u}|} \tag{4.153}$$

Die Welligkeit w beschreibt das Verhältnis vom Effektivwert des Wechselanteils zum Betrag des Gleichanteils $w = \frac{U_\sim}{|U_0|}$ und kennzeichnet z.B. bei Gleichrichterschaltungen den Wechselanteil, der der Ausgangsgleichspannung überlagert ist.

4.3.7 Beispiel: Welligkeit bei RL-Reihenschaltung

Im Folgenden wird als Beispiel die Welligkeit der Spannung $u_R(t)$ für das schon oben betrachtete RL-Netzwerk in Abbildung 4.31a in Abhängigkeit der Induktivität L berechnet. Die Spannung $u_R(t)$ ergibt sich direkt aus dem in Gleichung (4.115) berechneten Strom $i(t)$.

$$\begin{aligned} u_R(t) &= Ri(t) \\ &= \frac{2\hat{u}}{\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi} \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)\sqrt{1+(n\omega L/R)^2}} \cos(n\omega t - \varphi_n) \end{aligned} \tag{4.154}$$

Mit der Spannung am Widerstand folgt die Welligkeit als Funktion von L/RT aus $(\omega = 2\pi/T)$

$$\begin{aligned} w = \frac{U_\sim}{U_0} &= \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2}}{U_0} = \frac{\pi}{2\hat{u}} \sqrt{\frac{8\hat{u}^2}{\pi^2} \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)^2 \left[1 + \left(\frac{n\omega L}{R}\right)^2\right]}} \\ &= \sqrt{\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{2}{(n^2-1)^2 \left[1 + \left(\frac{n2\pi L}{RT}\right)^2\right]}} \end{aligned} \tag{4.155}$$

Für $L = 0$ folgt die Spannung u_R der Funktion $u(t) = \hat{u}|\sin(\omega t)|$, d.h. die Welligkeit ist gleich $w = 0.483$ für $\hat{u}|sin(\omega t)|$ – siehe Abbildungen 4.31b und 4.31d. Mit zunehmendem L sinkt die Welligkeit aufgrund der stärkeren Dämpfung der Harmonischen durch den RL-Tiefpass – siehe Abbildungen 4.31c und 4.31d.

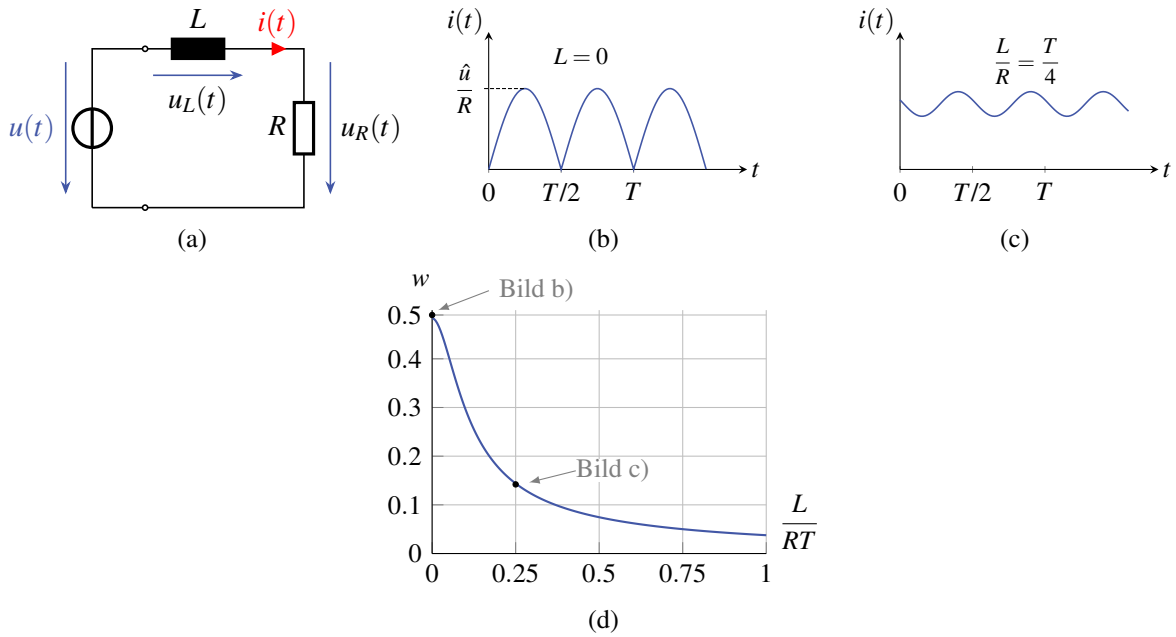


Figure 4.31: a) *RL*-Beispielschaltung. b) Verlauf der Spannung über dem Widerstand für den Fall $L = 0$ und in c) für den Fall $L = T/4$. In d) ist der Verlauf der Welligkeit in Abhängigkeit des Induktivitätswertes dargestellt.

Chapter 5

Schaltvorgänge in elektrischen Netzwerken

5.1 Transiente Vorgänge – Einleitung

Im Folgenden wird das Verhalten von Netzwerken bei nichtperiodischen Strom- und Spannungsverläufen untersucht. Eine typische Ursache für solche Verläufe sind Schaltvorgänge, wie z.B. der Einschaltvorgang des Schalters S zum Zeitpunkt $t = t_0$ in Netzwerk in Abbildung 5.1. Da die bisher untersuchten Verfahren nicht für derartige nichtperiodische Vorgänge genutzt werden können, erfolgt die Analyse der Netzwerke anhand der Differentialgleichungen für die Bauelemente im Zeitbereich. Dabei gelten die Strom-Spannungsbeziehungen der Bauelemente sowie die Kirchhoffschen Gesetze weiter.

Um die Berechnungen zu vereinfachen, werden alle Schalter S im Folgenden als ideal betrachtet, d.h. im eingeschalteten Zustand leiten die Schalter ideal, d.h. es gilt für den Widerstand des Schalters $R_S = 0$ bzw. für die Spannung über dem Schalter $u_S = 0$. Im ausgeschalteten Zustand stellen die Schalter einen idealen Leerlauf dar, d.h. es gilt $R_S \to \infty$ bzw. für den Strom durch den Schalter $i_S = 0$. Der Übergang zwischen den beiden Zuständen erfolgt sprungförmig, d.h. ist unendlich schnell. Dies ist eine gute Näherung für reale Schaltvorgänge von z.B. Transistoren. Eine Berücksichtigung eines nicht unendlich schnellen Schaltvorgangs ist relativ aufwendig und meist nicht notwendig.

Sind in den Netzwerken Energiespeicher (Kondensatoren/Induktivitäten) vorhanden, so führt dies zu folgenden Beschränkungen: Der Strom durch Induktivitäten und damit die im magnetischen Feld gespeicherte Energie $W_L(t) = {}^1\!/_2 L i_L^2(t)$ sowie die Spannung über Kapazitäten und damit die im elektrischen Feld gespeicherte Energie $W_C(t) = {}^1\!/_2 C u_C^2(t)$ können sich nicht sprungförmig ändern, da dies einen unendlich hohen Leistungsfluss benötigen würde. Daher tritt in Netzwerken mit diesen Bauelementen und sprungförmigen Anregungen typischerweise ein Ausgleichsvorgang zwischen dem Zustand vor dem Schaltvorgang und dem Endzustand nach dem Schaltvorgang auf.

Die Beschreibung des Netzwerkes mit Knoten- und Maschengleichungen führt auf ein Differentialgleichungssystem, dessen Lösung einen homogenen Anteil (= transienter Vorgang / Übergangsvorgang, der mit der Zeit verschwindet) und einen partikulären Anteil (= Endzustand nach dem Schaltvorgang / stationärer Endzustand, nachdem der homogene Anteil abgeklungen ist) enthält.

Bei der Berechnung von transienten Vorgängen sind drei Zustände zu unterscheiden:

- ▷ Zustand vor dem Schaltvorgang
- ▷ Ausgleichsvorgang

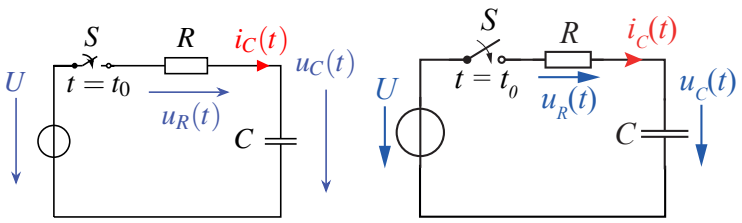


Figure 5.1: RC-Beispielnetzwerk das über den Schalter S zum Zeitpunkt $t = t_0$ mit der Gleichspannungsquelle verbunden wird.

▷ Stationärer Endzustand

5.2 Anregung durch DC-Quellen

Im Folgenden werden zuerst die Berechnung von Netzwerken betrachtet, die nur durch Gleichspannungs- bzw. Gleichstromquellen angeregt werden. Diese Betrachtungen wären später auf andere Arten von Quellen erweitert.

5.2.1 *RC*-Reihenschaltung an Gleichspannung

Als Beispiel für einen transienten Vorgang wird die oben dargestellte *RC*-Reihenschaltung in Abbildung 5.1 untersucht, die zum Zeitpunkt $t = t_0$ über den Schalter S mit der Gleichspannungsquelle U verbunden wird. Der Kondensator C sei dabei zum Zeitpunkt $t = t_0$ ungeladen, d.h. es gilt $u_C(t) = 0$ für $t \leq t_0$. Nach dem Schliessen des Schalters wird der Kondensator über den Widerstand R geladen und mit zunehmender Spannung über dem Kondensator $u_C(t)$ nimmt der Strom durch den Widerstand ab, da der Spannungsabfall $u_R(t) = U - u_C(t)$ über dem Widerstand abnimmt.

Aus der Maschengleichung für das Netzwerk und der Tatsache, dass aufgrund der Serienschaltung $i_R(t) = i_C(t)$ gilt, folgt

$$U = u_R(t) + u_C(t) = Ri_C(t) + u_C(t) \tag{5.1}$$

Mit der Strom-/Spannungsbeziehung für den Kondensator $i_C(t) = {\mathrm{d}q_C(t)}/{\mathrm{d}t} = C{\mathrm{d}u_C(t)}/{\mathrm{d}t}$ resultiert aus der Maschengleichung die folgende inhomogene Differentialgleichung (DGL) erster Ordnung. Die DGL ist inhomogen, da das Netzwerk durch die von $u_C(t)$ unabhängigen Quelle U angeregt wird, und die Bezeichnung erster Ordnung ergibt sich aus der Tatsache, dass neben $u_C(t)$ nur noch die erste Ableitung von $u_C(t)$ in der DGL vorkommt.

$$\boxed{U = RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t)} \tag{5.2}$$

Die Lösung der Differentialgleichung setzt sich allgemein wie folgt zusammen

$$\boxed{u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t)} \rightarrow RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t)\right] + \left[u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t)\right] = U \tag{5.3}$$

Dabei gilt für die beiden Anteile

$u_{Ch}(t)$ ... homogene Lösung → Beschreibung des Ausgleichsvorganges

$u_{Cp}(t)$ ... partikuläre Lösung → Beschreibung des stationären Endzustandes

Nach Abklingen des Ausgleichsvorganges bzw. der homogenen Lösung, d.h. für $t \rightarrow \infty$, sind im betrachteten Netzwerk mit reiner Gleichspannungsanregung alle Ströme und Spannungen konstant, d.h. es gilt dann $\mathrm{d}u_{Cp}/\mathrm{d}t = 0$. Damit fliesst durch den Kondensator kein Strom und dieser wirkt wie ein Leerlauf, so dass der Strom durch die *RC*-Reihenschaltung verschwindet.

Mit der Zerlegung der Lösung in den homogenen und den partikulären Anteil, kann die Differentialgleichung wie folgt aufgeteilt werden, wobei eine Summation der beiden Anteile wieder in der ursprünglichen Differentialgleichung resultiert.

$$\text{Homogene DGL:} \quad RC\frac{\mathrm{d}u_{Ch}(t)}{\mathrm{d}t} + u_{Ch}(t) = 0 \tag{5.4}$$

$$\text{Inhomogene DGL:} \quad RC\frac{\mathrm{d}u_{Cp}(t)}{\mathrm{d}t} + u_{Cp}(t) = U \xrightarrow[\text{folgt}]{\text{Mit } \frac{\mathrm{d}u_{Cp}(t)}{\mathrm{d}t}=0} \boxed{u_{Cp}(t) = U} \tag{5.5}$$

Aus der Aufteilung der Differentialgleichung ergeben sich somit zwei Differentialgleichungen – eine homogene Differentialgleichung für die homogene Lösung und eine inhomogene Differentialgleichung für den partikulären Anteil.

Aus der Bedingung, dass sich die Kondensatorspannung im Endzustand nicht mehr ändert, folgt auch direkt die partikuläre Lösung, d.h. der Endwert für die Kondensatorspannung. Die Lösung für die homogene

Differentialgleichung ergibt sich mit dem sogenannten Exponentialansatz und den beiden unbekannten Faktoren k und p.

$$u_{Ch}(t) = k\mathrm{e}^{pt} \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{Ch}(t) = kp\mathrm{e}^{pt} = p\,u_{Ch}(t) \tag{5.6}$$

Setzt man dies in die homogene Differentialgleichung ein, so folgt der homogene Anteil der Lösung.

$$RC\frac{\mathrm{d}u_{Ch}(t)}{\mathrm{d}t} + u_{Ch}(t) = 0 \tag{5.7}$$

$$RCpk\mathrm{e}^{pt} + k\mathrm{e}^{pt} = 0 \rightarrow (RCp+1)k\mathrm{e}^{pt} = 0 \rightarrow p = -\frac{1}{RC} \tag{5.8}$$

Das Produkt RC hat dabei die Dimension [s] und wird als Zeitkonstante $\tau = RC$ des betrachteten Netzwerkes bezeichnet.

Fasst man die beiden Lösungsanteile zusammen, so ergibt sich die Gesamtlösung für die ursprüngliche Differentialgleichung.

$$u_C(t) = u_{Cp}(t) + k\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = U + k\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{5.9}$$

Die Gleichung (5.9) beschreibt den stationären Endzustand für $t \rightarrow \infty$ sowie den transienten Ausgleichsvorgang richtig. Um den Zustand unmittelbar nach dem Schaltvorgang richtig zu erfassen, muss noch k aus den Anfangsbedingungen beim Einschaltzeitpunkt $t = t_0$, ermittelt werden.

Für die Kondensatorspannung zum Zeitpunkt $t = t_0$ wurde $u_C(t_0) = 0$ angenommen. Aus dieser Bedingung folgt

$$u_C(t=t_0) = 0 \stackrel{!}{=} U + k\mathrm{e}^{-\frac{t_0}{\tau}} \rightarrow k = -U\mathrm{e}^{\frac{t_0}{\tau}} \tag{5.10}$$

Damit folgt für die Kondensatorspannung ingesamt

$$u_C(t) = U\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{RC}}\right) = U\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right) \tag{5.11}$$

und der Strom durch den Kondensator in Abbildung 5.1 ergibt sich aus

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t) = \frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{RC}} \rightarrow i_C(t) = \frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \tag{5.12}$$

Der Kondensatorstrom springt zum Einschaltzeitpunkt $t = t_0$ auf den Wert $i_C(t_0) = U/R$ und nimmt mit steigender Kondensatorspannung bis zum Wert 0 ab. Die Spannung über der Kapazität ist zum Einschaltzeitpunkt jedoch stetig, denn es kann in unendlich kurzer Zeit keine endlich Ladungs- bzw. Energiemenge zugeführt werden.

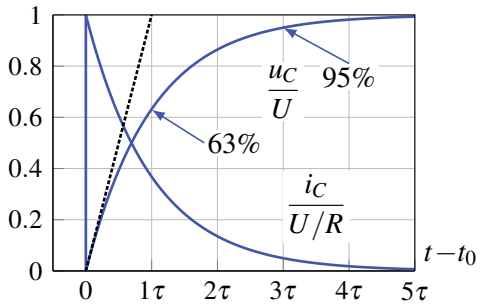


Figure 5.2: Zeitlicher Verlauf der Kondensatorspannung und des Kondensatorstromes für die RC-Schaltung in Abbildung 5.1.

Nach Ablauf der Zeit $(t - t_0) = \tau$ nimmt die Kondensatorspannung wegen $1 - \mathrm{e}^{-1} = 0.632$ bereits ca. 63% des Endwertes an. Nach drei Zeitkonstanten $1 - \mathrm{e}^{-3} \approx 0.95$ sind bereits ca. 95% des Endwertes erreicht.

Die Anfangssteigung der Kondensatorspannung nach dem Einschaltvorgang ergibt sich aus der Zeitkonstante τ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(t)\bigg|_{t=t_0} = \frac{U}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{RC}}\bigg|_{t=t_0} = \frac{U}{RC} = \frac{U}{\tau} \tag{5.13}$$

Dies gilt verallgemeinert auch für die sogenannte Ausgleichsspannung (hier die Spannung über dem Widerstand R)

$$U - u_C(t) = \tau \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = u_R(t) \tag{5.14}$$

d.h. der Anstieg der Kondensatorspannung ist zu jedem Zeitpunkt genau so gross, dass die Spannung $u_C(t)$ bei konstant gehaltener Steigung (d.h. man folgt der Tangente) nach der Zeitspanne τ ihren Endwert erreicht. Dies ist auch in Abbildung 5.3 ersichtlich, in dem alle Tangenten ausgehend von dem jeweiligen Startpunkt nach Ablauf der Zeitspanne τ den Wert U schneiden bzw. erreichen.

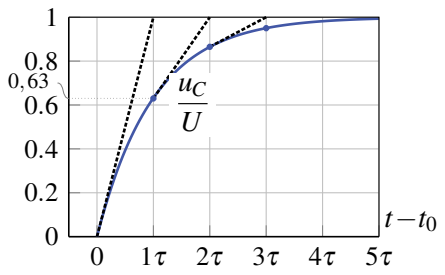


Figure 5.3: Zeitlicher Verlauf der Kondensatorspannung und den dazugehörigen Tangenten für die Zeitpunkte $t = 0$, $t = \tau$, $t = 2\tau$ und $t = 3\tau$ für die RC-Schaltung in Abbildung 5.1.

5.2.2 Reihenschaltung von Kondensator & Stromquelle

Eine besonderer Fall liegt vor, wenn ein Kondensator in Reihe zu einer Stromquelle geschaltet wird. Solche Netzwerke werden z.B. häufig bei der Berechnung von leistungselektronischen Konvertern zur vereinfachten Modellierung des Systems während gewisser Zeitabschnitte genutzt.

Mit der Stromquelle in Reihe zum Kondensator ist der Strom durch den Kondensator fest vorgegeben und die Spannung über dem Kondensator steigt linear an. Dabei gilt theoretisch $u_C(t) \to \infty$. In der Praxis treten solche Netzwerke nur für eine begrenzte Zeit auf, d.h. die Spannungsänderung ist typischerweise endlich.

In dem betrachteten Netzwerk in Abbildung 5.4a wird die Stromquelle I zum Zeitpunkt $t = t_0$ mit dem Kondensator C verbunden. Wegen des eingeprägten Stromes hat ein möglicher Serienwiderstand prinzipiell keinen Einfluss auf den Spannungsverlauf.

Die Kondensatorspannung für Zeiten $t_1 > t_0$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}u_C(t) = \frac{1}{C} i_C(t)\mathrm{d}t \\ \rightarrow \quad &\int_{u_C(t_0)}^{u_C(t_1)} \mathrm{d}u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t_1} i_C(t)\mathrm{d}t \\ \rightarrow \quad &u_C(t_1) = u_C(t_0) + \frac{1}{C} I(t_1 - t_0) \end{aligned} \tag{5.15}$$

Wird der Schalter S zum Zeitpunkt t_2 wieder in die ursprüngliche Stellung geschaltet, so folgt beispielhaft der Spannungsverlauf in Abbildung 5.4b mit $t_1 = t_2$. Für $t_2 \to \infty$ steigt $u_C(t)$ unendlich an und ein reales Bauteil wird aufgrund der hohen Spannung zerstört werden.

Figure 5.4: a) Serienschaltung aus einem Kondensator und einer Stromquelle. b) Zeitlicher Verlauf der Kondensatorspannung für den Fall, dass der Schalter zum Zeitpunkt t_0 den Stromkreis über den Kondensator schliesst und zum Zeitpunkt t_2 wieder öffnet.

5.2.3 *RL*-Reihenschaltung an Gleichspannung

Als zweites Beispiel wird die *RL*-Reihenschaltung in Abbildung 5.5 betrachtet, bei der zum Zeitpunkt $t = t_0$ der Schalter S geschlossen und die *RL*-Reihenschaltung mit der Gleichspannung U verbunden wird. Die Maschengleichung für das Netzwerk lautet ($i_R(t) = i_L(t)$)

$$U = u_R(t) + u_L(t) = Ri_L(t) + L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \tag{5.16}$$

Damit ergibt sich wieder eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung für den Spulenstrom.

Die Lösung der Differentialgleichung kann wiederum aus einem homogenen $i_{Lh}(t)$ und einem partikulären Anteil $i_{Lp}(t)$ zusammengesetzt werden.

$$i_L(t) = i_{Lh}(t) + i_{Lp}(t) \quad \rightarrow \quad L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[i_{Lh}(t) + i_{Lp}(t)\right] + R\left[i_{Lh}(t) + i_{Lp}(t)\right] = U \tag{5.17}$$

Die partikuläre Lösung beschreibt wieder den stationären Endzustand, bei welchem im betrachteten Fall der Anregung mit einer Gleichspannungsquelle alle Ströme und Spannungen im Netzwerk zeitunabhängig sind. Folglich gilt $\mathrm{d}i_{Lp}(t)/\mathrm{d}t = 0$, d.h. die Spule wirkt wie ein Kurzschluss.

Mit der Aufteilung der Lösung ergibt sich folgende Zerlegung der Differentialgleichung

$$\text{Homogene DGL:} \quad L\frac{\mathrm{d}i_{Lh}(t)}{\mathrm{d}t} + Ri_{Lh}(t) = 0 \tag{5.18}$$

$$\text{Inhomogene DGL:} \quad L\frac{\mathrm{d}i_{Lp}(t)}{\mathrm{d}t} + Ri_{Lp}(t) = U \xrightarrow[\text{folgt}]{\text{Mit } \frac{\mathrm{d}i_{Lp}(t)}{\mathrm{d}t}=0} i_{Lp}(t) = \frac{U}{R} \tag{5.19}$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung erfolgt wiederum mit dem Exponentialansatz mit den zunächst unbekannten Konstanten k und p.

$$i_{Lh}(t) = k\mathrm{e}^{pt} \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_{Lh}(t) = kp\mathrm{e}^{pt} = pi_{Lh}(t) \tag{5.20}$$

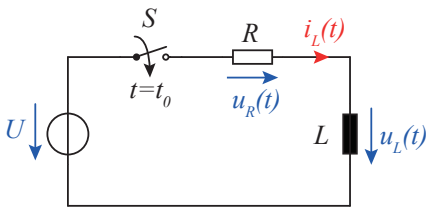


Figure 5.5: *RL*-Beispielnetzwerk das über den Schalter S zum Zeitpunkt $t = t_0$ mit der Gleichspannungsquelle verbunden wird.

Durch Einsetzen des Exponentialansatzes und dessen Ableitung in die homogene Differentialgleichung folgt für p

$$Lpke^{pt} + Rke^{pt} = 0 \rightarrow (Lp+R)ke^{pt} = 0 \rightarrow p = -\frac{R}{L} \tag{5.21}$$

Das Verhältnis L/R hat die Dimension [s] und wird daher wieder als Zeitkonstante bezeichnet.

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{5.22}$$

Durch Zusammenfassen der beiden Lösungsanteile erhält man die allgemeine Lösung

$$i_L(t) = i_{Lp}(t) + ke^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R} + ke^{-\frac{t}{\tau}} \tag{5.23}$$

Die unbekannte Konstante k wird aus der Anfangsbedingung bei $t = t_0$ ermittelt. Im betrachteten Fall wird angenommen, dass der Spulenstrom vor dem Einschalten gleich 0 ist. Damit folgt

$$i_L(t = t_0) = 0 \stackrel{!}{=} \frac{U}{R} + ke^{-\frac{t_0}{\tau}} \rightarrow k = -\frac{U}{R}e^{\frac{t_0}{\tau}} \tag{5.24}$$

Mit der Konstanten ergibt sich für den Spulenstrom (siehe Abbildung 5.6)

$$i_L(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right) \tag{5.25}$$

Die dazugehörige Spulenspannung folgt aus (Abbildung 5.6)

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t) = Ue^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \tag{5.26}$$

Zum Zeitpunkt $t = t_0$ springt die Spannung $u_L(t)$ auf den Wert U, der Strom $i_L(t)$ in der Spule ändert sich (analog zur Spannung $u_C(t)$ in oben betrachteten der RC-Reihenschaltung) jedoch immer stetig, da in unendlich kurzer Zeit keine endliche Energiemenge zugeführt werden kann.

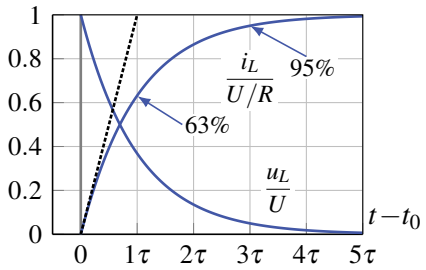


Figure 5.6: Zeitlicher Verlauf des Stromes durch die Spule und der Spannung über der Spule für die RL-Schaltung in Abbildung 5.5.

5.2.4 Parallelschaltung einer Spule & und einer Spannungsquelle

Analog zu dem Sonderfall einer Stromquelle in Serie zu einem Kondensator im Abschnitt 5.2.2 wird nun die Schaltung in Abbildung 5.7a betrachtet, bei welcher eine Spannungsquelle parallel zu einer Induktivität liegt. Solche einfachen Anordnungen werden z.B. häufig zur Modellierung des Betriebsverhaltens von leistungselektronischen Konvertern in betrachteten kurzen Zeitabschnitten genutzt.

Ist der Schalter S in Schaltstellung 2, so ist die Gleichspannungsquelle U parallel zur Induktivität L und der Strom durch die Induktivität steigt linear an. Theoretisch gilt dabei $i_L(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$, was zur Zerstörung einer realen Induktivität führen würde.

In dem Netzwerk in Abbildung 5.7a wird die Spannung U zum Zeitpunkt $t = t_0$ mit der Spule L verbunden. Damit folgt für Zeiten $t = t_1 > t_0$ der Strom

$$\mathrm{d}i_L(t) = \frac{1}{L} u_L(t)\mathrm{d}t \tag{5.27}$$

$$\rightarrow \quad \int_{i_L(t_0)}^{i_L(t_1)} \mathrm{d}i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t_1} u_L(t)\mathrm{d}t \tag{5.28}$$

$$\rightarrow \quad i_L(t_1) = i_L(t_0) + \frac{U}{L}(t_1 - t_0) \tag{5.29}$$

Wird der Schalter S zum Zeitpunkt t_2 wieder in die ursprüngliche Schalterstellung 1 geschaltet, so folgt beispielhaft der Stromverlauf in Abbildung 5.7b.

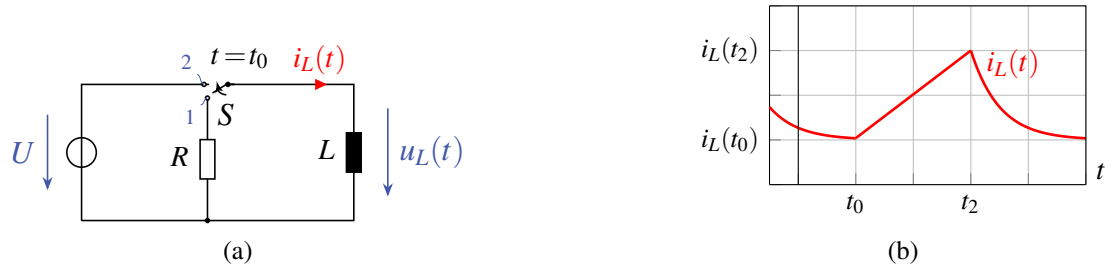


Figure 5.7: a) Parallelschaltung einer Spule und einer Spannungsquelle. b) Zeitlicher Verlauf des Spulenstromes für den Fall, dass der Schalter zum Zeitpunkt t_0 den Stromkreis über die Spule und der Spannungsquelle schliesst und zum Zeitpunkt t_2 wieder öffnet (Schalterstellung 1).

5.3 Anregung durch allgemeine periodische Quellen

Im Folgenden wird nun die Berechnung von Netzwerken betrachtet, die nur durch allgemeine periodische Quellen angeregt werden.

5.3.1 Schaltvorgang bei Wechselspannungsanregung

Die bisherigen Überlegungen werden nun in einem ersten Schritt dadurch erweitert, dass die Gleichspannungsquelle durch eine Wechselspannungsquelle ersetzt wird. Für die RL-Reihenschaltung folgt damit das Netzwerk in Abbildung 5.8a.

Der prinzipielle Lösungsweg für die Berechnung des Stromes $i_L(t)$ ist dabei grundsätzlich gleich wie bei den oben betrachteten Netzwerken mit Gleichspannungsanregung. Die Gesamtlösung setzt sich wieder aus einem homogenen Anteil $i_h(t)$ (Ausgleichsvorgang) und einem partikulären Anteil $i_p(t)$

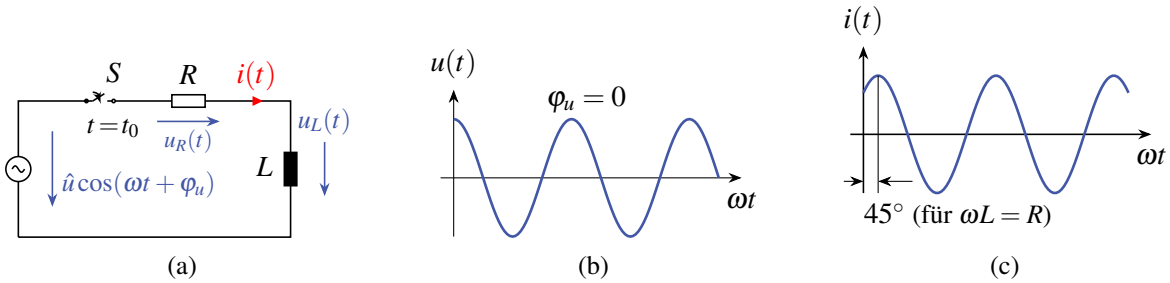


Figure 5.8: a) RL-Netzwerk mit Schalter, das durch eine allgemeine sinusförmige Spannungsquelle angeregt wird. b) Zeitlicher Verlauf der Quellenspannung für den Fall $\varphi_u = 0$ und in b) des dazugehörigen stationären Stromes für den eingeschwungenen Zustand.

(eingeschwungener Zustand) zusammen. Damit folgt aus der inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung (5.17) für das *RL*-Netzwerk

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[i_h(t)+i_p(t)]+R[i_h(t)+i_p(t)]=\hat{u}\cos(\omega t+\varphi_u) \tag{5.30}$$

Im eingeschwungenen Zustand d.h. für $t\to\infty$ ist der Ausgleichsvorgang abgeklungen und der homogene Anteil des Stromes verschwunden. Damit folgt aus obiger Gleichung

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_p(t)+Ri_p(t)=\hat{u}\cos(\omega t+\varphi_u) \tag{5.31}$$

Aus der Subtraktion der Gleichungen (5.30) und (5.31) für damit den homogenen Anteil

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_h(t)+Ri_h(t)=0 \tag{5.32}$$

Mit der komplexen Wechselstromrechnung kann der eingeschwungene bzw. der stationäre Zustand und damit die partikuläre Lösung direkt angegeben werden.

$$i_p(t)=\hat{i}\cos(\omega t+\varphi_i)\quad\text{mit}\quad \hat{i}=\frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\quad\text{und}\quad \varphi_i=\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R} \tag{5.33}$$

Dieser ist in Abbildung 5.8c dargestellt.

Die homogene Differentialgleichung (5.32) ist unabhängig von der Quellenspannung, so dass der gleiche Ansatz bzw. die allgemeine Lösung wie bei der Erregung mit einer Gleichspannung – siehe Gleichungen (5.20) und (5.21) – übernommen werden kann: $i_h(t)=k\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$.

Die Konstante k ergibt sich wiederum aus der Anfangsbedingung bei $t=t_0$

$$i(t_0)=i_h(t_0)+i_p(t_0)=k\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t_0}+\hat{i}\cos(\omega t_0+\varphi_i)\overset{!}{=}0 \tag{5.34}$$

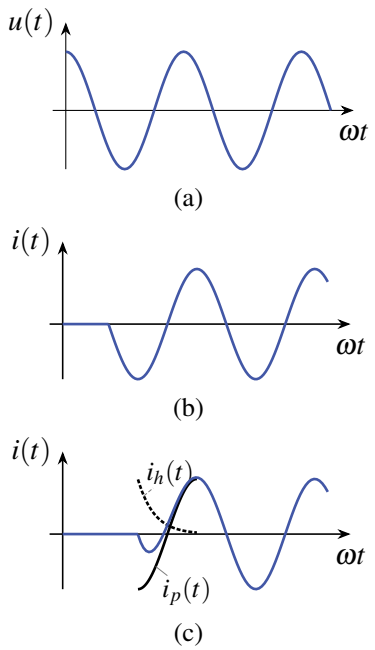


Figure 5.9: a) Zeitlicher Verlauf der Quellenspannung für das Netzwerk in Abbildung 5.8a. In b) und c) sind die zeitlichen Verläufe des Spulenstromes für unterschiedliche Schaltzeitpunkte gegeben.

Wegen der zeitabhängigen Eingangsspannungen hängt dabei die Anfangsbedingung und damit die Form des homogenen Lösungsanteils bzw. des Ausgleichsvorgang vom jeweiligen Schaltzeitpunkt $t = t_0$ ab.

Damit folgt das Gesamtergebnis für den Strom

$$i(t) = -\hat{i}\cos(\omega t_0 + \varphi_i)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} + \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i) \tag{5.35}$$

Der homogene Anteil, d.h. der erste Summand der Gleichung (5.35), verschwindet mit der Zeitkonstante $\tau = L/R$ und es bleibt die partikuläre Lösung übrig, die den stationären Zustand beschreibt.

Die oben erwähnte Abhängigkeit des Ausgleichsvorgangs vom Schaltzeitpunkt t_0 ist in den Abbildungen 5.9b und 5.9c zu erkennen, wo der Verlauf des Spulenstromes für 2 unterschiedliche Schaltzeitpunkte dargestellt ist. Für die Schaltzeitpunkte ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$t = t_0 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - \varphi_i\right) \tag{5.36}$$

verschwindet der homogene Anteil in Gleichung (5.35) und der Spulenstrom unmittelbar vor dem Schaltvorgang $i(t_{0-}) = 0$ ist gleich der partikulären Lösung für $t = t_0$. Folglich tritt dann kein Einschwingvorgang auf. Ein solcher Fall ist z.B. in Abbildung 5.9b dargestellt.

Für eine allgemeine Lage des Schaltzeitpunktes ist $i_p(t)$ ungleich Null zum Zeitpunkt $t = t_0$. Aufgrund der Stetigkeit des Stromes durch die Induktivität führt dies zwangsweise zu einem Ausgleichsvorgang und es gilt $i_h(t_0) = -i_p(t_0)$.

Die grösste Amplitude der homogenen Lösung tritt auf, wenn zum Zeitpunkt des Maximums der partikulären Lösung geschaltet wird, d.h für folgende Schaltzeitpunkte

$$t_0 = \frac{1}{\omega}(n\pi - \varphi_i) \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{5.37}$$

Dieser Fall ist in Abbildung 5.9c dargestellt.

Zum Zeitpunkt des Schaltvorgangs $t = t_0$ wird der Strom $i_p(t)$ durch $i_h(t)$ kompensiert, aber in der folgenden Halbschwingung überlagern sich beide Anteile, so dass eine Stromüberhöhung auftreten kann. Dies ist in Abbildung 5.10b zu erkennen, in welchem die Ströme für eine 10 Mal so grosse Zeitkonstante wie in Abbildung 5.10a dargestellt sind, so dass der homogene Anteil deutlich langsamer abklingt.

Wie man Gleichung (5.35) entnehmen kann, kann der Gesamtstrom im schlimmsten Fall die zweifache Amplitude der partikulären Lösung annehmen, wenn zu den Schaltzeitpunkten (5.37) geschaltet wird und die Zeitkonstante τ relativ gross ist.

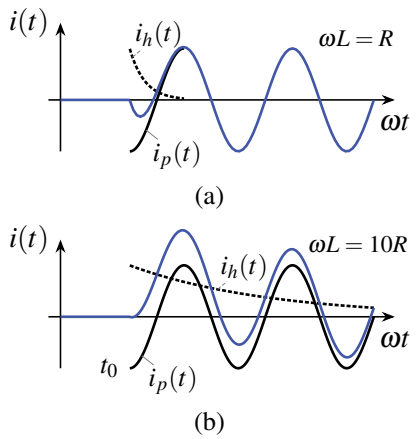


Figure 5.10: Zeitliche Verläufe des Spulenstromes für unterschiedliche Zeitkonstanten des *RL* Netzwerkes in Abbildung 5.8a, wobei es im Fall b) zu einer Stromüberhöhung kommt aufgrund der relativ grossen Zeitkonstante und des gewählten Schaltzeitpunktes.

5.3.2 Schaltvorgang allgemeine periodische Quellen

Die bisherigen Untersuchungen sollen nun auf beliebige periodische Quellen, die durch eine Fourierreihe beschrieben werden können, erweitert werden. Die Grundlage für die Berechnung der Lösung ist wiederum die Überlagerung von Teillösungen in linearen Netzwerken analog zur Harmonischen Analyse. Das genau Vorgehen dabei soll an dem Beispielnetzwerk in Abbildung 5.11a erläutert werden, das durch $u(t) = |\sin(\omega_1 t)|$ angeregt wird. Der Schalter wird zum Zeitpunkt $t = t_0$ geschlossen.

Die Lösung für den stationären Endzustand wurde bereits im Abschnitt 4.3.2 mittels der Harmonischen Analyse ermittelt (mit $\varphi_{i_n} = -\arctan \frac{n\omega_1 L}{R}$). Der Strom im stationären Zustand ist

$$i_p(t) = \frac{2\hat{u}}{R\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi} \sum_{n=2,4,..}^{\infty} \frac{\cos(n\omega_1 t + \varphi_{i_n})}{(n^2-1)\sqrt{R^2 + (n\omega_1 L)^2}} \tag{5.38}$$

Der Ansatz bzw. die allgemeine Lösung für die homogene Lösung ist wiederum $i_h(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$, wobei die Konstante k wieder aus den Anfangsbedingungen folgt. Da der Spulenstrom zum Schaltzeitpunkt gleich Null ist, folgt: $i(t_0) = 0 = i_h(t_0) + i_p(t_0)$. Damit folgt für die Konstante k

$$k\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t_0} = -\frac{2\hat{u}}{R\pi} + \frac{4\hat{u}}{\pi} \sum_{n=2,4,..}^{\infty} \frac{\cos(n\omega_1 t_0 + \varphi_{i_n})}{(n^2-1)\sqrt{R^2 + (n\omega_1 L)^2}} \tag{5.39}$$

Durch Überlagerung folgt die Gesamtlösung (Abbildung 5.11c mit: $L/R = T/4$ und $t_0 = T/6$)

$$\begin{aligned} i(t) = &\frac{2\hat{u}}{R\pi}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right) \\ &- \frac{4\hat{u}}{\pi} \sum_{n=2,4,..}^{\infty} \frac{\cos(n\omega_1 t + \varphi_{i_n}) - \cos(n\omega_1 t_0 + \varphi_{i_n})\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}}{(n^2-1)\sqrt{R^2 + (n\omega_1 L)^2}} \end{aligned} \tag{5.40}$$

die auch in Abbildung 5.11c dargestellt ist.

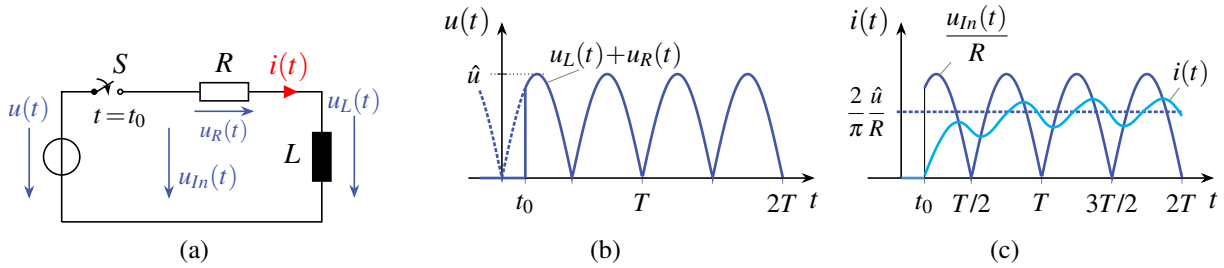


Figure 5.11: a) *RL*-Schaltung angeregt durch eine gleichgerichtete Sinusspannung. b) Zeitlicher Verlauf der anregenden Spannung, wobei der Schalter zum Zeitpunkt t_0 geschlossen wird. c) Verlauf der Spannung über der *RL*-Schaltung und der dazugehörige Stromverlauf.

5.3.3 Konsequenz aus den Stetigkeitsforderungen

Betrachtet man z.B. die *RL*-Reihenschaltung in Abbildung 5.12a bei geschlossenem Schalter im eingeschwungenem Zustand und öffnet den Schalter wieder, so wird der Spulenstrom i_L abrupt unterbrochen im Fall, dass der Strom zum Zeitpunkt t_0 des Öffnens ungleich 0 ist, d.h. $i_L(t_0) \neq 0$. Dabei tritt an der Induktivität aufgrund von $u_L(t) = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ theoretisch eine unendlich hohe Spannung auf.

In der Praxis erhöht sich die Spannung u_L so weit, dass trotz des höheren Widerstandes des öffnenden Schalters der Strom stetig bleibt (d.h. es tritt eine Überspannung auf). Bei mechanischen Schaltern zündet dadurch typischerweise zwischen den Kontakten ein Lichtbogen. Abhilfe schafft hier ein sogenannter "Freilaufpfad", d.h. ein alternativer Pfad für den Strom nach dem Öffnen des Schalters, so wie dies in Abbildung 5.12a anhand der rot gestrichelten Diode dargestellt ist. Die Diode leitet dabei für einen Strom $i_D > 0$ und blockiert einen Stromfluss in die andere Richtung. Weiterhin ist in Abbildung 5.12a noch

die durch den angenommenen Schaltvorgang induzierte Spannung $u_L(t) = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ als rot strichlierter Pfeil links von der Induktivität L bzw. unter dem Schalter S dargestellt.

Ein ähnliches Problem ergibt sich im Fall, dass eine Induktivität und eine Stromquelle abrupt in Reihe geschaltet werden (Abbildung 5.12b) und zum Zeitpunkt des "in Reihe schaltens" die Ströme $I_q \& i_L$ in den beiden Bauelementen nicht identisch sind. Um hier eine unendlich grosse Überspannung zu vermeiden, kann der Begrenzungswiderstand $R_{B,L}$ parallel zur Stromquelle/Induktivität eingeführt werden.

Ein duales Problem ist gegeben, wenn ein geladener Kondensator kurzgeschlossen oder ein Kondensator an eine Spannungsquelle geschaltet (Abbildung 5.12c) wird und die Spannung des Kondensators zum Schaltzeitpunkt nicht gleich der Quellenspannung ist. In beiden Fällen tritt ein theoretisch unendlich grosser Überstrom auf. Dieser Überstrom kann durch den in Abbildung 5.12c rot strichlierten Begrenzungswiderstand $R_{B,C}$ reduziert werden.

5.4 Einfache Analyse von Netzwerken mit nur einem L oder C

5.4.1 Vereinfachte Analyse mit einem Kondensator

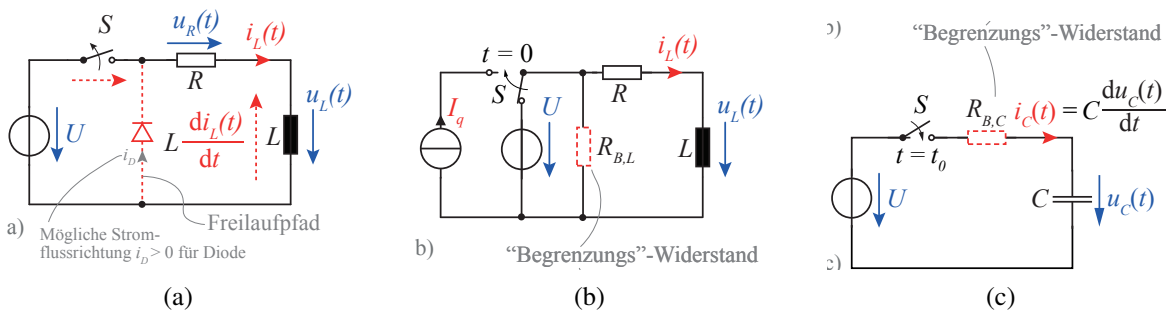
Bei Netzwerken mit nur einem Energiespeicher, d.h. einer Induktivität oder einer Kapazität, können die Strom- und Spannungsverläufe auch ohne Lösen der Differentialgleichung ermittelt werden. Neben dem einen Energiespeicher kann das Netzwerk dabei beliebig viele Schalter, Spannungs- und Stromquellen enthalten. Im Fall von mehreren Schaltern oder im Fall, dass ein Schalter mehrmals betätigt wird, ist die folgende Rechnung für jeden Schaltvorgang separat durchzuführen. Dabei ist die ermittelte Lösung jeweils vom betrachteten Schaltvorgang bis zum nächsten Schaltvorgang (oder $t \to \infty$ falls kein weiterer Schaltvorgang stattfindet) gültig. Die im jeweiligen Schaltaugenblick gegebene Kondensatorspannung legt dabei den Anfangswert für den jeweils darauffolgenden Zeitabschnitt fest.

Als erstes wird ein einzelner Kondensator mit einem beliebigen Widerstandsnetzwerk betrachtet, so wie dies in Abbildung **??** dargestellt ist. Der Schalter soll zum Zeitpunkt $t = t_0$ geschlossen werden. Die periodische Quellenspannung $u(t)$ soll durch eine Fourierreihe (inklusive einer reinen Gleichspannung oder einer reinen sinusförmigen Quelle) darstellbar sein.

Schritt 1: Berechnen der partikulären Lösung (= stationärer Endzustand) für $u_C(t)$.

- ▷ Im Fall, dass $u(t)$ eine Gleichspannung ist, wird die Kapazität durch eine Unterbrechung bzw. einen Leerlauf ersetzt und die Leerlaufspannung U_{LL} wird berechnet. Diese ist gleich der partikulären Lösung $u_{Cp}(t) = U_{LL}$.

- ▷ Im Fall, dass $u(t)$ eine Wechselspannung bzw. eine Überlagerung von mehreren Gleich- und Wechselspannungen (d.h. eine Fourierreihe) ist, wird die partikuläre Lösung mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung bzw. der Harmonischen Analyse ermittelt. Dabei wird die Lösung für alle



(a) (b) (c)

Figure 5.12: a) Unterbrechung des Strompfades in der RL-Serienschaltung durch Öffnen des Schalters. Als alternativer Strompfad ist der Pfad über die rot eingezeichnet Freilaufdiode gegeben. b) Durch das abrupte in "Reihe-Schalten" einer Induktivität und einer Stromquelle kann es ebenfalls zu Überspannungen kommen, falls die Ströme I_q und i_L zum Schaltzeitpunkt nicht gleich sind. c) Beim abrupten Verbinden eines Kondensators mit einer Spannungsquelle kann es zu einem Überstrom kommen, falls U und u_C zum Schaltzeitpunkt nicht identisch sind. Dieser Überstrom kann mittels $R_{B,C}$ limitiert werden.

Quellen berechnet und anschliessend werden die Lösungen linear überlagert (so wie dies schon bei den Fourierreihen besprochen wurde).

Schritt 2: Berechnen der homogenen Lösung, die unabhängig von den jeweiligen anregenden Quellen ist. Die homogene Lösung beschreibt dabei das transiente Verhalten/Übergangsverhalten des Netzwerkes nach dem Schaltvorgang. Für die Berechnung der homogenen Lösung werden alle Spannungsquellen durch einen Kurzschluss ersetzt. Im Fall, dass ein Netzwerk mit Stromquellen betrachtet wird, sind die Stromquellen durch eine Unterbrechung/Leerlauf zu ersetzen. Das resultierende Widerstandsnetzwerk ohne Quellen wird zu einem Ersatzwiderstand R_g zusammengefasst (dies ist der Widerstand, der aus Sicht des Kondensators im Netzwerk wirksam ist bzw. effektiv parallel zum Kondensator wirkt). Damit resultiert das Netzwerk in Abbildung 5.13b. Für dieses Netzwerk ist die homogene Lösung gleich der bereits berechneten Lösung (5.6) und (5.8) für eine RC - Reihenschaltung.

Die allgemeine Lösung für $u_C(t)$ erhält man durch Überlagerung der partikulärem und der homogenen Lösung, wobei sich die Zeitkonstante τ nun aus dem Produkt des Ersatzwiderstands R_g und C ergibt.

$$u_C(t) = u_{Cp}(t) + k\mathrm{e}^{-\frac{t}{R_g C}} \tag{5.41}$$

Schritt 3: Berechnen der Konstante k der homogenen Lösung aus der Anfangsbedingung des Netzwerkes $u_C(t_0) = u_{C0}$.

$$u_C(t_0) = u_{C0} \stackrel{!}{=} u_{Cp}(t_0) + k\mathrm{e}^{-\frac{t_0}{R_g C}} \qquad \rightarrow \qquad k = [u_{C0} - u_{Cp}(t_0)]\,\mathrm{e}^{+\frac{t_0}{R_g C}} \tag{5.42}$$

Durch Einsetzen von k resultiert die Gesamtlösung für $u_C(t)$. Dabei umfasst $u_{Cp}(t)$ die Beiträge aller Quellen und der homogene Lösungsteil gleicht die Differenz zwischen $u_{Cp}(t_0)$ und $u_C(t_0)$ aus und klingt mit der Zeitkonstanten $\tau = R_g C$ ab.

$$u_C(t) = u_{Cp}(t) - [u_{Cp}(t_0) - u_{C0}]\,\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{R_g C}} \tag{5.43}$$

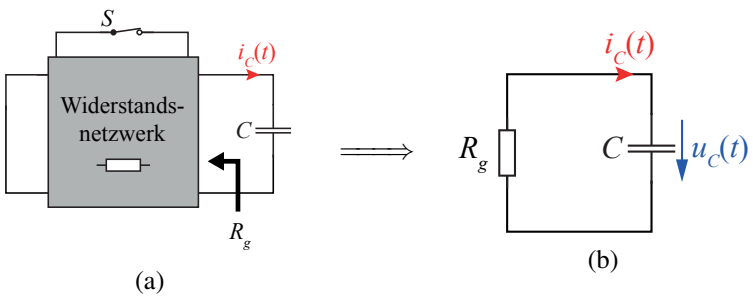


Figure 5.13: a) Vereinfachtes Netzwerk für die Schaltung in Abbildung **??** zum Ermitteln des Ersatzwiderstandes R_g. b) Resultierendes Ersatznetzwerk für die Berechnung der homogenen Lösung.

5.4.2 Vereinfachte Analyse mit einer Spule

Als zweites wird wird ein Schaltvorgang in einem Widerstandsnetzwerk mit einer einzelnen Induktivität betrachtet, für das der Strom $i_L(t)$ ermittelt werden soll – siehe Abbildung 5.14.

Schritt 1: Um die partikuläre Lösung im Fall einer Anregung durch Gleichstrom- und -spannungsquellen zu berechnen, muss die Spule durch einen Kurzschluss ersetzt werden. Falls die Anregung durch zeitlich periodische Quellen erfolgt, so ergibt sich die partikuläre Lösung wiederum mit der komplexen Wechselstromrechnung bzw. der Harmonischen Analyse.

Schritt 2: Für die homogene Lösung wird das Netzwerk mit geschlossenem Schalter und mit kurzgeschlossener Spannungsquelle bzw. durch einen Leerlauf ersetzte Stromquelle betrachtet – siehe Abbildung 5.15a. Wiederum wird der Ersatzwiderstand R_g berechnet, so dass das Netzwerk in Abbildung 5.15b folgt, für welches die homogene Lösung bereits in den Gleichungen (5.20) und (5.21) berechnet wurde.

Schritt 3: Die Lösung für $i_L(t)$ folgt wiederum durch Überlagerung der homogenen und der partikulären Lösung. Die Konstante k ergibt sich aus der Anfangsbedingung.

$$i_L(t) = i_{Lp}(t) + k\mathrm{e}^{-\frac{R_g}{L}t} = i_{Lp}(t) + k\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{5.44}$$

$$i_L(t_0) = i_{L0} \stackrel{!}{=} i_{Lp}(t_0) + k\mathrm{e}^{-\frac{t_0}{\tau}} \quad \rightarrow \quad k = [i_{L0} - i_{Lp}(t_0)]\,\mathrm{e}^{\frac{t_0}{\tau}} \tag{5.45}$$

Durch Einsetzen von k resultiert die Gesamtlösung für $i_L(t)$. Der homogene Lösungsteil klingt mit der Zeitkonstanten $\tau = L/R_g$ ab.

$$i_L(t) = i_{Lp}(t) - [i_{Lp}(t_0) - i_{L0}]\,\mathrm{e}^{-\frac{R_g}{L}(t-t_0)} \tag{5.46}$$

Beispiel

Zum Verdeutlichen der Anwendung des abgeleiteten Verfahrens wird beispielhaft für das Netzwerk in Abbildung 5.16a die Spannung $u_R(t)$ berechnet. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird der Schalter S geschlossen und das Netzwerk befindet sich zum Schaltzeitpunkt $t = t_0$ bzw. kurz davor im stationären Zustand, woraus sich die Anfangsbedingung ergibt. Die Berechnungsschritte sind:

- ▷ Schritt 1: Zu Beginn wird die partikuläre Lösung für $i_L(t)$ anhand des Netzwerkes in Abbildung 5.16b für $t \rightarrow \infty$ ermittelt. Mit dem Spulenstrom wird später dann die gesuchte Spannung $u_R(t)$ ermittelt. In dem Netzwerk in Abbildung 5.16b ist die Spule durch einen Kurzschluss ersetzt, da die anregende Quelle eine Gleichstromquelle ist. Der Strom $i_L(t)$ ergibt sich dabei aus dem Stromteiler mit den beiden gleichen Widerständen zu $i_{Lp} = \frac{I}{2}$.
- ▷ Schritt 2: Der Anfangswert des Spulenstromes $i_L(t_0) = i_{L0}$ ergibt sich aus dem stationären Zustand vor dem Schaltvorgang. Zur Berechnung von $i_L(t_0)$ wird bei geöffnetem Schalter die Spule durch einen Kurzschluss ersetzt. Daraus resultiert $i_{L0} = I$.
- ▷ Schritt 3: Bei geschlossenem Schalter wird der Ersatzwiderstand R_g bestimmt – siehe Abbildung 5.16c. Hier ist die Stromquelle durch einen Leerlauf ersetzt worden. Damit folgt

$$R_g = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2}{3}R \tag{5.47}$$

- ▷ Schritt 4: Die bisherigen Ergebnisse werden in die Gleichung (5.46) für $i_L(t)$ eingesetzt.

$$i_L(t) = \frac{I}{2} - \left(\frac{I}{2} - I\right)\mathrm{e}^{-\frac{2R}{3L}(t-t_0)} = \frac{I}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{2R}{3L}(t-t_0)}\right) \tag{5.48}$$

Mit dem berechneten Spulenstrom $i_L(t)$ kann die Spulenspannung aus den Strom-/Spannungsbeziehungen ermittelt werden. Diese ergibt sich aus

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t) = -\frac{1}{3}RI\mathrm{e}^{-\frac{2R}{3L}(t-t_0)} \tag{5.49}$$

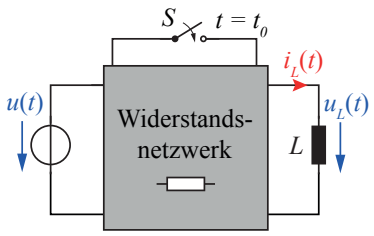


Figure 5.14: a) Beliebiges lineares Widerstandsnetzwerk mit einer periodischen Quelle, einem Schalter und einer Induktivität.

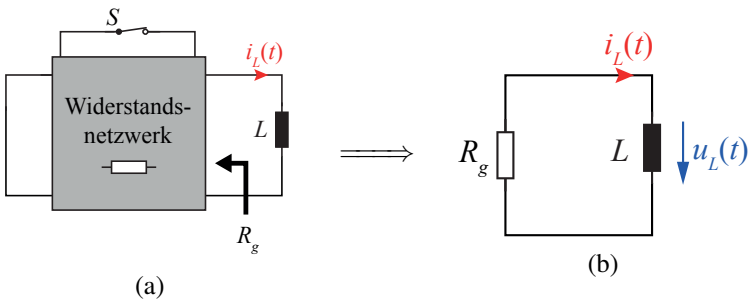


Figure 5.15: a) Vereinfachtes Netzwerk für die Schaltung in Abbildung 5.14 zum Ermitteln des Ersatzwiderstandes R_g. b) Resultierendes Ersatznetzwerk für die Berechnung der homogenen Lösung.

Unter Berücksichtigung der Knotengleichung für den Knoten $KN1$ im Netzwerk in Abbildung 5.17a folgt dann unmittelbar die gesuchte Spannung

$$\begin{aligned} u_R(t) &= Ri_R(t) = R\left[i_L(t) + \frac{1}{R}u_L(t)\right] \\ &= R\frac{I}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{2R}{3L}(t-t_0)}\right) - \frac{1}{3}RI\mathrm{e}^{-\frac{2R}{3L}(t-t_0)} = \frac{1}{2}RI\left[1+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2R}{3L}(t-t_0)}\right] \end{aligned} \tag{5.50}$$

Die Spannung $u_R(t)$ fällt im Schaltzeitpunkt sprungförmig vom Wert RI auf den Wert $2/3RI$ und klingt dann entsprechend der Exponentialfunktion auf den Endwert $1/2RI$ ab – siehe Abbildung 5.17b. Der Strom $i_L(t)$ durch die Spule ist dabei stetig, die Spannung u_L(t) über der Spule nicht.

5.4.3 Spannungswandlerschaltung

Zur Vertiefung der bisherigen Erkenntnisse wird das praktische Schaltungsbeispiel zur Umwandlung einer Gleichspannung U_1 in eine höhere Gleichspannung U_2 in Abbildung 5.18a betrachtet. Die Schaltung wird auch als Hochsetzsteller (engl. Boost Converter) bezeichnet. Analog dazu gibt es auch sogenannte Tiefsetzsteller (engl. Buck Converter) die eine hohe Gleichspannung U_1 in eine tiefere Gleichspannung U_2 umwandeln.

Für die Analyse der Schaltung werden folgende Vereinfachungen angenommen, die in der Praxis normalerweise relativ gut erfüllt sind:

- ▷ Die Ausgangskapazität C hat einen hohen Wert, so dass die Spannung am Kondensator näherungsweise als konstant angenommen werden kann, d.h. es gilt $u_C(t) \approx U_2$. Damit liegt ein Netzwerk mit nur einem Energiespeicher vor, da die Kapazität im Rahmen der Analyse gedanklich durch eine Gleichspannungsquelle ersetzt werden kann.

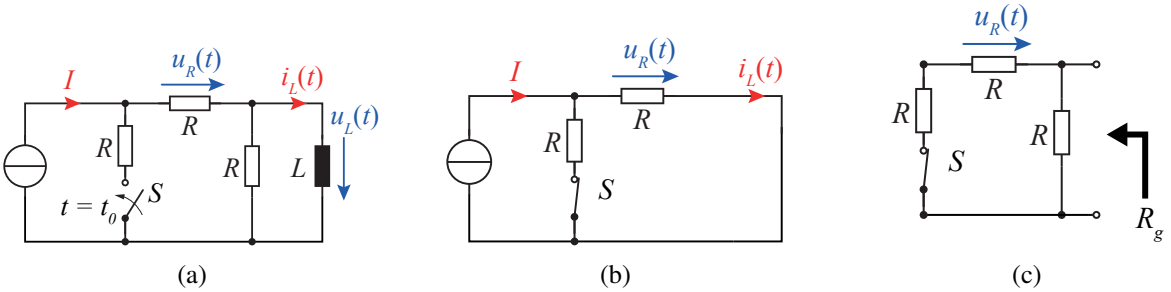


Figure 5.16: a) Beispielnetzwerk für die Anwendung der vereinfachten Analyse im Fall einer Spule. b) Ersatznetzwerk für die Bestimmung des Anfangswerts. c) Ersatznetzwerk für die Bestimmung des Ersatzwiderstands R_g.

Figure 5.17: a) Ersatznetzwerk mit dem Knoten $KN1$ für die Berechnung der gesuchten Spannung $u_R(t)$. b) Zeitlicher Verlauf der Spannung $u_R(t)$ für den Fall, dass $t_0 = 0$ gilt.

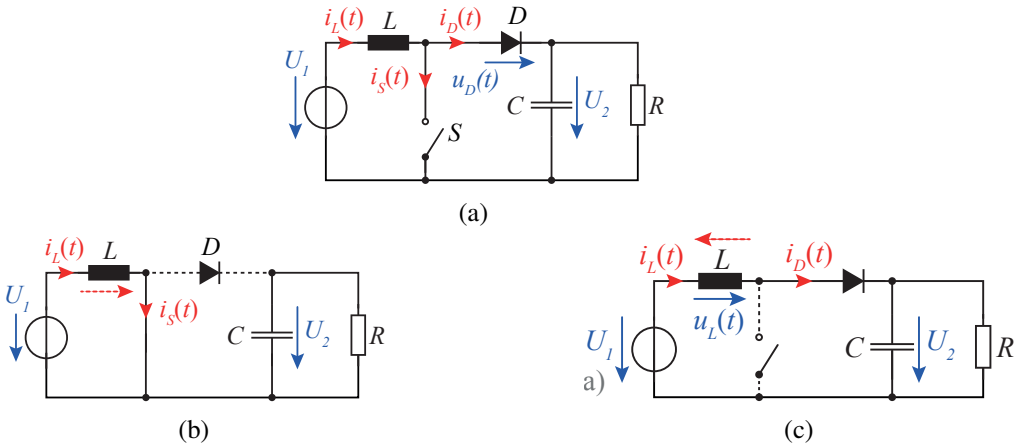


Figure 5.18: a) Schaltbild eines Hochsetzstellers. In b) ist die vereinfachte Schaltung des Hochsetzstellers für den Fall, dass der Schalter S geschlossen ist und die Diode leitet, und in c) für den Fall, dass der Schalter offen ist und die Diode leitet, dargestellt.

▷ Der in der Praxis durch eine Leistungstransistor realisierte Schalter S sowie die Diode D werden beide als verlustlos/ideal angenommen. Das heisst, dass der Transistor und die Diode im leitenden Zustand durch einen idealen Kurzschluss mit $R = 0$ und im sperrenden Zustand durch einen Leerlauf mit $R \to \infty$ ersetzt werden kann. Die Diode leitet dabei den Strom nur in eine Richtung ($i_D(t) > 0$ falls $u_D(t) > 0$ gegeben ist), die sogenannte Durchlassrichtung. Der Schaltvorgang des Schalters zwischen dem leitenden/geschlossenem und dem sperrenden/offenen Zustand erfolgt unendlich schnell.

Bei geschlossenem Schalter S liegt an der Diode D die Ausgangsspannung U_2 in der sogenannten Rückwärtsrichtung ($u_D(t) < 0$) an, d.h. es gilt $u_D(t) = -U_2$ – siehe Abbildung 5.18c. Folglich sperrt die Diode und kann durch einen Leerlauf ersetzt werden. Damit zerfällt das Netzwerk prinzipiell in zwei unabhängige Maschen und die Gleichspannung U_1 liegt direkt an der Spule an, so dass der Strom $i_L(t)$ durch die Spule linear ansteigt. Mit dem ansteigenden Strom nimmt auch die in der Spule gespeicherte Energie zu. Der Verbraucher R wird dabei aus dem Kondensator C versorgt. Der Spulenstrom ergibt sich in dem betrachten Fall mit $u_L(t) = U_1$ aus

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{U_1}{L}t \qquad \text{für} \qquad 0 \le t < \delta T \tag{5.51}$$

Dabei wird angenommen, dass der Schalter für den Zeitraum $0 \le t \le \delta T$ geschlossen ist. Der Faktor δ wird dabei als Tastverhältnis bezeichnet.

Im Ausschaltzeitpunkt des Schalters ist der Spulenstrom gleich dem Maximalwert

$$i_L(\delta T) = i_L(0) + \frac{U_1}{L}\delta T \tag{5.52}$$

Wird der Schalter geöffnet, wirkt die Induktivität wie eine Stromquelle, da der Strom durch die Induktivität (bzw. die Energie in der Induktivität, die proportional zum Strom ist) stetig sein muss. Da der Schalter

S offen ist, ist der einzige Pfad für den Spulenstrom der Zweig über die Diode D zum Ausgangskondensator bzw. zum Verbraucher. Da der Spulestrom vor dem Abschalten des Schalters positiv ist, gilt unmittelbar nach dem Abschaltvorgang von S für den Strom durch die Diode $i_D(t) > 0$, d.h. die Diode ist in Vorwärtsrichtung gepolt. Da die leitende Diode einen idealen Kurzschluss darstellt, ist bei geöffnetem Schalter (und $i_L = i_D > 0$) die Spannung über der Induktivität konstant gleich $u_L = U_1 - U_2$. Damit folgt unmittelbar

$$i_L(t) = i_L(\delta T) + \frac{U_1 - U_2}{L}(t - \delta T) \qquad \text{für} \qquad \delta T \leq t < T \tag{5.53}$$

Da $U_2 > U_1$ angenommen wird, ist die Spannung über der Induktivität negativ und der Spulenstrom nimmt ab – siehe Abbildung 5.19a. Im stationären Betrieb erreicht der Spulenstrom dabei zum Ende der Periode zum Zeitpunkt $t = T$ wieder den Anfangswert $i_L(0) = i_L(T)$, so dass der Strom periodisch ist. Die Ausgangsspannung U_2 muss dabei grösser als die Eingangsspannung U_1 sein, da sonst der Strom nicht abnimmt, wenn der Schalter ausgeschaltet wird, und kein stationärer Betrieb möglich ist. Die Ausgangsspannung U_2 kann dabei prinzipiell aufgrund der Diode D nicht kleiner sein als die Eingangsspannung U_1. Das heisst wenn die Quelle U_1 zu Beginn des Betriebs eingeschaltet wird, so wird über die Diode D gleichzeitig auch die Ausgangsspannung auf den Wert U_1 erhöht. Sobald der periodische Schaltvorgang des Schalters S startet, wird der Ausgangskondensator aufgeladen bis der stationäre Betrieb erreicht ist, In diesem ist die Stromzunahme im Intervall während dessen der Schalter S geschlossen ist gleich der Stromabnahme während des Intervalls während dessen der Schalter S offen ist.

Bei der bisher beschriebenen Betriebsart ist der Strom $i_L(t)$ während des Schaltintervalls immer grösser als Null. Diese Betriebsart wird kontinuierlicher Betrieb genannt. Daneben gibt es noch den diskontinuierlichen Betrieb in Abbildung 5.19b. Bei diesem nimmt der Spulenstrom ebenfalls ab dem Schaltzeitpunkt δT ab, erreicht aber zu einem Zeitpunkt $t < T$ bereits Null. Aufgrund der negativen Spannung über der Induktivität während des Intervalls $\delta T \leq t < T$ müsste der Spulenstrom nach dem Erreichen des Wertes null negativ werden. Dies wird jedoch durch die Diode verhindert, die sperrt bzw. nur Strom in Vorwärtsrichtung leiten kann. Damit bleibt der Spulenstrom im Intervall $\varepsilon T \leq t < T$ gleich null und das neue Schaltintervall startet wieder mit $i_L(T) = 0$. Der diskontinuierlicher Betrieb tritt v.a. bei kleineren zu übertragenden Leistungen bzw. bei relativ kleinen Strömen auf.

Im kontinuierlichen, stationären Betrieb muss die Zunahme des Spulenstromes für einen geschlossenen Schalter gleich der Stromabnahme während des offenen Schalters sein, d.h. es muss gelten

$$\frac{U_1}{L}\,\delta T = \left|\frac{(U_1 - U_2)}{L}(1-\delta)T\right| \tag{5.54}$$

Daraus folgt direkt die Gleichung für die Ausgangsspannung in Abhängigkeit des Tastverhältnisses

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{(1-\delta)} \tag{5.55}$$

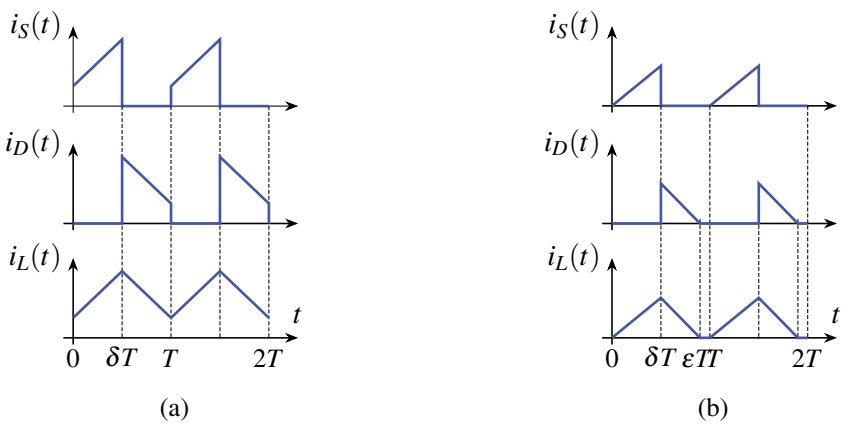


Figure 5.19: In a) sind die Stromverläufe für den kontinuierlichen und in b) für den diskontinuierlichen Betrieb dargestellt.

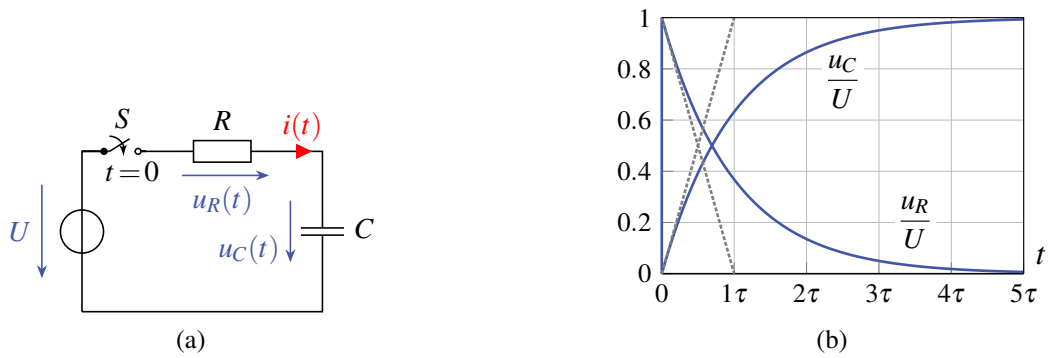


Figure 5.20: a) Schaltbild eines *RC*-Netzwerkes, das über den Schalter S zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Gleichspannung U verbunden wird. b) Zeitlicher Verlauf der Spannung über den Kondensator und dem Widerstand.

5.4.4 Wirkungsgrad des Ladevorgangs im *RC*-Netzwerk

Im Folgenden wird noch der Wirkungsgrad η des transienten Ladevorgangs eines Kondensators über einen Widerstand untersucht – siehe Netzwerk in Abbildung 5.20a. Das Netzwerk entspricht dem *RC*-Netzwerk, für welches bereits im Abschnitt 5.2.1 die Verläufe des Stromes und der Spannung berechnet wurde. Der Strom durch den Kondensator und den Widerstand ergibt sich aus Gleichung (5.12), wobei hier vereinfachend angenommen wird, dass $t_0 = 0$ gilt. Mit dem Strom folgt unmittelbar für die von der Spannungsquelle gelieferte zeitabhängige Leistung

$$p(t) = Ui(t) = \frac{U^2}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{5.56}$$

Die Leistung $p(t)$ teilt sich dabei in die Leistung am Kondensator $p_C(t)$, d.h. die Leistung zum Laden des Kondensators bzw. zum Speichern der Energie im Kondensator, und die (Verlust-) Leistung am Widerstand $p_R(t)$ auf. Mit der Kondensatorspannung (Abbildung 5.20b) aus Gleichung (5.11) folgt für $p_C(t)$

$$p_C(t) = u_C(t)i(t) = U\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)\frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U^2}{R}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} - \mathrm{e}^{-2\frac{t}{RC}}\right) \tag{5.57}$$

Die Leistung am Widerstand $p_R(t)$, die zur Wärmeentwicklung im Widerstand führt, ist gleich

$$p_R(t) = [U - u_C(t)]\,i(t) = p(t) - p_C(t) = \frac{U^2}{R}\mathrm{e}^{-2\frac{t}{RC}} \tag{5.58}$$

Unmittelbar nach dem Schaltvorgang ist aufgrund der Stetigkeit der Kondensatorspannung $u_C(t=0) = 0$ (siehe Abbildung 5.20b) und die gesamte von der Quelle gelieferte Leistung wird am Widerstand in Wärme umgewandelt, womit der Wirkungsgrad unmittelbar nach dem Schaltvorgang gleich Null ist.

Mit zunehmender Kondensatorspannung wird der Wirkungsgrad des Ladevorgangs besser. Der zeitliche Verlauf des Wirkungsgrades ergibt sich aus

$$\eta(t) = \frac{p_C(t)}{p(t)}\cdot 100\% = \frac{u_C(t)}{U}\cdot 100\% = \left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)\cdot 100\% \tag{5.59}$$

Da durch die Quelle und den Kondensator aufgrund der Reihenschaltung derselbe Strom fliesst, ist der Wirkungsgrad für das Laden den Kondensators gleich dem Spannungsverhältnis u_C/U und steigt somit proportional mit der zunehmenden Kondensatorspannung an – siehe Abbildung 5.21b. Der Verlauf der einzelnen Leistungsanteile ist in Abbildung 5.21a gegeben.

Am Ende des Ladevorgangs des Kondensators auf die Spannung U ist die im Kondensator gespeicherte Energie gleich

$$W_e = \int_0^\infty p_C(t)\mathrm{d}t = \frac{U^2}{R}\int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} - \mathrm{e}^{-2\frac{t}{RC}}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}CU^2 \tag{5.60}$$

Die während des Ladevorgangs insgesamt von der Quelle gelieferte Energie folgt aus

$$W = \int_0^\infty p(t)\mathrm{d}t = \frac{U^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\mathrm{d}t =$$
$$= U\int_0^\infty i(t)\mathrm{d}t = UQ = CU^2 \tag{5.61}$$

Aus den beiden Energien ergibt sich der Gesamtwirkungsgrad des Ladevorgangs von 0 auf U zu

$$\eta_{ges} = {}^{W_e}/_{W} \cdot 100\% = 50\% \tag{5.62}$$

Dieser Wert für den Wirkungsgrad ist unabhängig vom Widerstand R, da z.B. bei kleinerem Widerstandswert der Ladevorgang schneller abläuft, aber auch der Strom und damit die Verluste im Widerstand grösser sind.

Wird der Kondensator nicht bis auf den vollen Wert der Quellenspannung geladen, so wird der Wirkungsgrad des Ladevorgangs noch deutlich schlechter als der oben berechnete Wert von $\eta = 50\%$.

Für einen Endwert der Kondensatorspannung bei $u_C(t_1) = kU$ mit $(0 \leq k \leq 1)$ muss der Schalter im Zeitpunkt $t = t_1$ geöffnet werden. Der Schaltzeitpunkt ergibt sich aus dem Verlauf der Kondensatorspannung

$$kU = U\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{RC}}\right) \quad \rightarrow \quad 1 - k = \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{RC}} \quad \rightarrow \quad t_1 = -RC\ln(1-k) \tag{5.63}$$

Zum Zeitpunkt $t = t_1$ ist die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie gleich $W_e = \frac{1}{2}C(kU)^2$. Auf

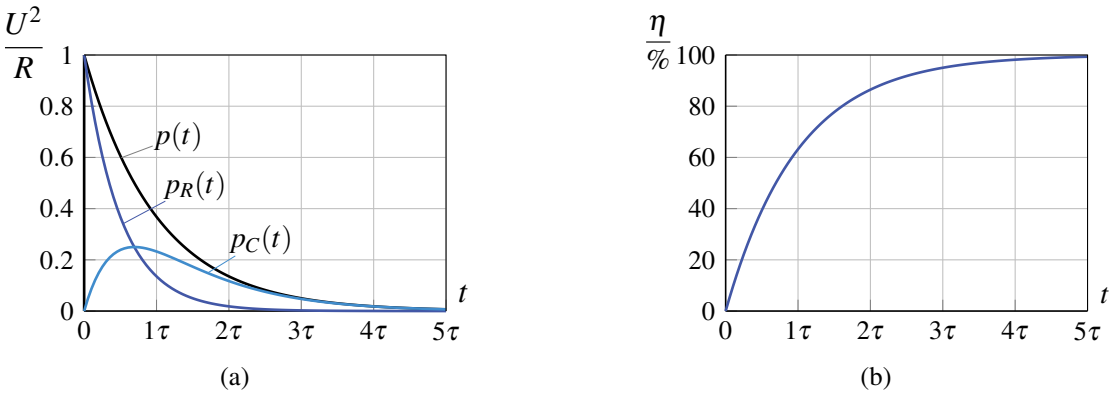


Figure 5.21: a) Zeitlicher Verlauf der Leistungen für den Kondensator, den Widerstand und der Quelle. b) Zeitlicher Verlauf des Wirkungsgrads für den Ladevorgang des Kondensators.

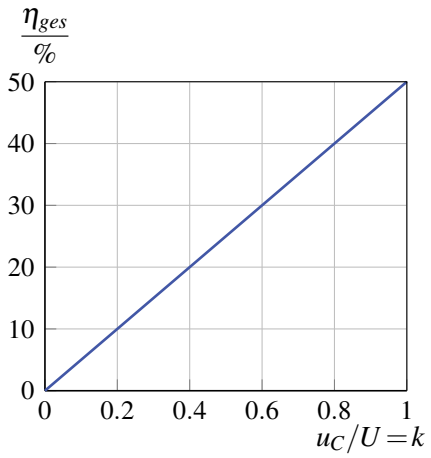


Figure 5.22: Mittlerer Wirkungsgrad für den gesamten Ladevorgang von $u_c(t) \rightarrow 0 \ldots kU$

der anderen Seite ist die bis zum Zeitpunkt $t = t_1$ von der Quelle gelieferte Energie

$$W = \frac{U^2}{R}\int_0^{t_1} \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\mathrm{d}t = CU^2\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t_1}{RC}}\right) = kCU^2 \tag{5.64}$$

Aus den beiden Energien folgt wiederum der mittlere Wirkungsgrad für den Ladevorgang von 0 auf kU.

$$\eta_{ges} = \frac{W_e}{W}\cdot 100\% = k\cdot 50\% \tag{5.65}$$

Dieser ist in Abbildung 5.22 in Abhängigkeit von k dargestellt und ist wiederum unabhängig vom Widerstandswert.

Generell ist ein hoher Wirkungsgrad bei der Energieübertragung zwischen zwei Kondensatoren oder einer Quelle und einem Kondensator nur erreichbar, wenn die Spannungsdifferenz zwischen den beiden gering ist, d.h. ein aufzuladender bzw. nachzuladender Kondensator sollte vor dem Ladevorgang bereits eine Spannung aufweisen, die prozentual nur geringfügig unterhalb der Quellenspannung liegt. Dies wird auch noch einmal im nachfolgenden Beispiel verdeutlicht.

Beispiel: Wirkungsgrad der Energieübertragung zwischen 2 Kondensatoren

Als Beispiel wird nun der Wirkungsgrad für die Energieübertragung zwischen den zwei Kondensatoren im Netzwerk in Abbildung 5.23 untersucht. Dabei ist der linke Kondensator mit der Kapazität C auf die Spannung $u_C(0) = U$ aufgeladen und zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S geschlossen. Der rechte Kondensator mit der Kapazität $9C$ ist zum Zeitpunkt $t = 0$ ungeladen, d.h. $u_{9C}(0) = 0$. Im Gegensatz zu den bisher berechneten RC-Netzwerken ist jetzt die "Quellenspannung", die den Kondensator auflädt, nicht mehr konstant.

Die Berechnung der Strom-/Spannungsverläufe erfolgt mit der Maschengleichung für das Netzwerk

$$u_C(t) = u_R(t) + u_{9C}(t) \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_R(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_{9C}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{5.66}$$

Mit den Strom-Spannungsbeziehungen für die Bauelemente resultiert die homogene Differentialgleichung für den Strom

$$\frac{-1}{C}i(t) = R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) + \frac{1}{9C}i(t) \qquad \rightarrow \qquad \frac{9RC}{10}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) + i(t) = 0 \tag{5.67}$$

Der Lösungsansatz für die Differentialgleichung basiert wiederum auf einer Exponentialfunktion mit der unbekannten Konstante k

$$i(t) = k\mathrm{e}^{\frac{-10t}{9RC}} \tag{5.68}$$

Die Konstante k ergibt sich aus den Anfangsbedingungen.

$$u_C(0) = u_R(0) + u_{9C}(0) \qquad U = Ri(0) + 0 = Rk \tag{5.69}$$

$$\text{mit } i(0) = \frac{U}{R} \qquad \rightarrow \qquad i(t) = \frac{U}{R}\mathrm{e}^{\frac{-10t}{9RC}} \tag{5.70}$$

Aus dem berechneten Stromverlauf ergibt sich mit $u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)\mathrm{d}t$ der Zeitverlauf der beiden Kondensatorspannungen

$$u_C(t) = U - \frac{9U}{10}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-10t}{9RC}}\right) \tag{5.71}$$

$$u_{9C}(t) = \frac{U}{10}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-10t}{9RC}}\right) \tag{5.72}$$

Nach Ende des Ausgleichsvorganges weisen beide Kondensatoren die gleiche Spannung $u_C = u_{9C} = 0.1U$ auf.

Die im Kondensator C gespeicherte Energie vor der Umladung ist $W_e(t<0)=\frac{1}{2}CU^2$. Nach dem Umladevorgang ist die in beiden Kondensatoren gespeicherte elektrische Energie gleich

$$\begin{aligned} W_e(t\to\infty) &= W_{eC}(t\to\infty)+W_{e9C}(t\to\infty) \\ &= \frac{1}{2}C\left(\frac{U}{10}\right)^2+\frac{1}{2}9C\left(\frac{U}{10}\right)^2=\frac{1}{2}C\frac{U^2}{10} \end{aligned} \tag{5.73}$$

Folglich werden im betrachteten Fall 90% der Energie während des Umladevorgangs im ohmschen Widerstand in Wärme umgewandelt bzw. der Wirkungsgrad des Umladevorgangs beträgt nur 10%.

5.4.5 Wirkungsgrad bei Schaltvorgang mit Stromquelle & *RC*-Netzwerk

Als weiteres Beispiel wird der Wirkungsgrad für den Aufladevorgang eines Kondensators durch eine Stromquelle über den Widerstand R ermittelt – siehe Abbildung 5.24a. Der Schalter S, der die Stromquelle für $t<0$ kurzschliesst, wird dabei zum Zeitpunkt $t=0$ geöffnet, so dass der Strom I durch das RC-Netzwerk fliesst.

Mit dem konstanten Strom der Quelle ergibt sich direkt eine linear zunehmende Kondensatorspannung

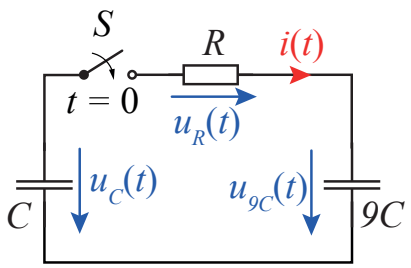


Figure 5.23: Schaltbild für die Energieübertragung zwischen zwei Kondensatoren.

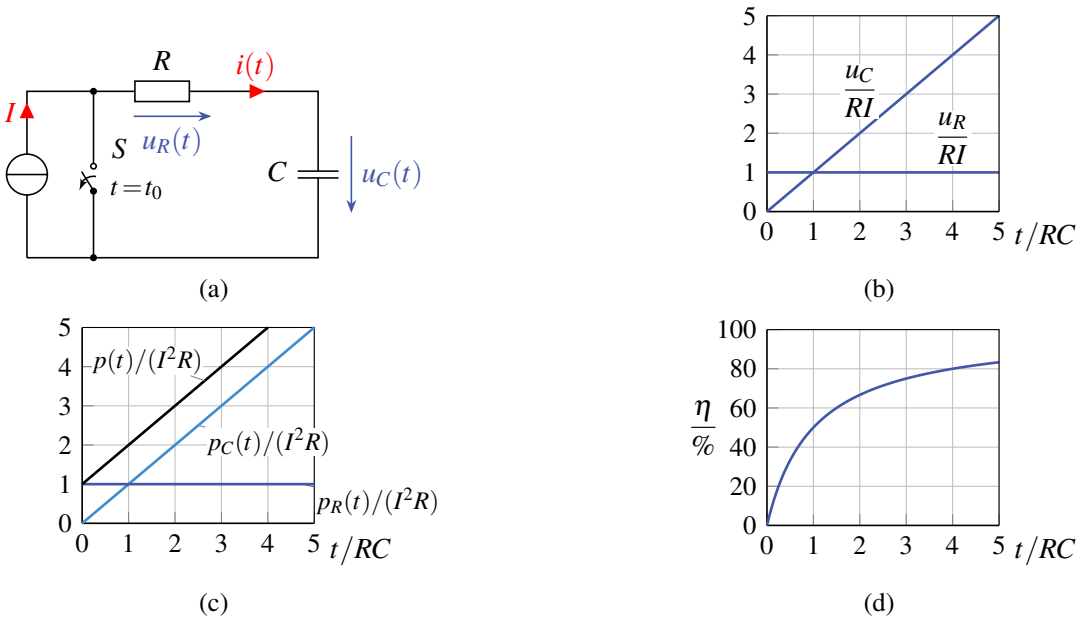


Figure 5.24: a) Schaltbild für den Aufladevorgang eines Kondensators durch eine Stromquelle. b) Zeitlicher Verlauf der Kondensatorspannung und der Spannung über dem Widerstand. c) Zeitlicher Verlauf der Leistung für den Kondensator, für den Widerstand und für die Quelle. d) Zeitlicher Verlauf des Wirkungsgrads für den Ladevorgang.

(Abbildung 5.24b)

$$u_C(t) = \frac{I}{C}t \tag{5.74}$$

und mit der konstanten Spannung am Widerstand $u_R = RI$ folgt direkt die von der Stromquelle gelieferte Leistung (Abbildung 5.24c)

$$p(t) = [u_R(t) + u_C(t)]\,I = \left(R + \frac{t}{C}\right) I^2 \tag{5.75}$$

Der zeitabhängige Wirkungsgrad für den Ladevorgang folgt aus dem Verhältnis der momentan an den Kondensator abgegebenen Leistung zur momentan von der Quelle gelieferten Leistung (Abbildung 5.24d)

$$\eta(t) = \frac{u_C(t)I}{[u_R(t) + u_C(t)]\,I} \cdot 100\% = \frac{t}{RC + t} \cdot 100\% \tag{5.76}$$

Für den Fall $R = 0$ wird der Wirkungsgrad $\eta(t) = 100\%$. Dies ist auch die Ursache dafür, dass der Wirkungsgrad der Spannungswandlerschaltung im Abschnitt 5.4.3 typisch über 90% liegt, da die Energie in der Induktivität zwischengespeichert wird und der Ladevorgang des Ausgangskondensators über die Induktivität ähnlich zu dem hier betrachteten Ladevorgang eines Kondensators über eine Stromquelle ist.

5.4.6 Ergänzung: *RC*-Netzwerk in Defibrillator

In Abbildung 5.26b ist ein Defibrillator dargestellt, dessen Funktion während des Entladens im einfachsten Fall durch einen *RC*-Entladevorgang grob beschrieben werden kann. Moderne Geräte setzen dabei häufig spezielle Entladekurven ein, die es Erlauben die abgegebene Spannung/Energiemenge zu minimieren

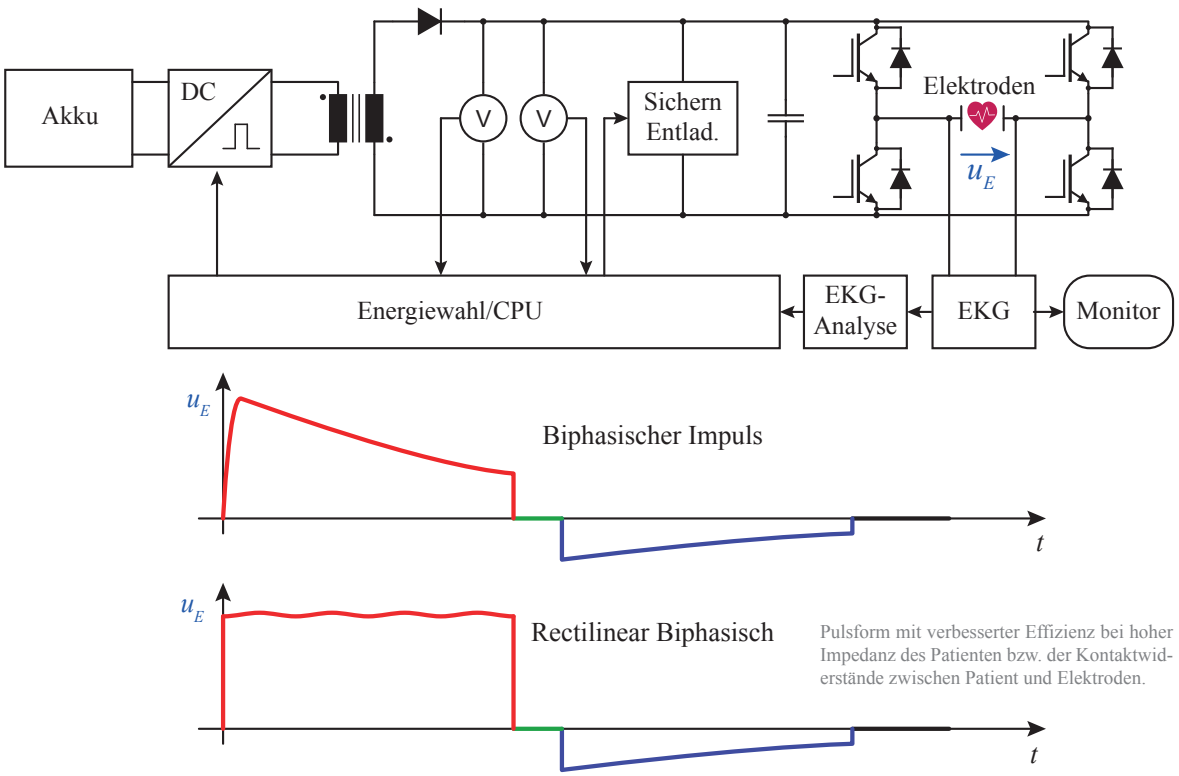
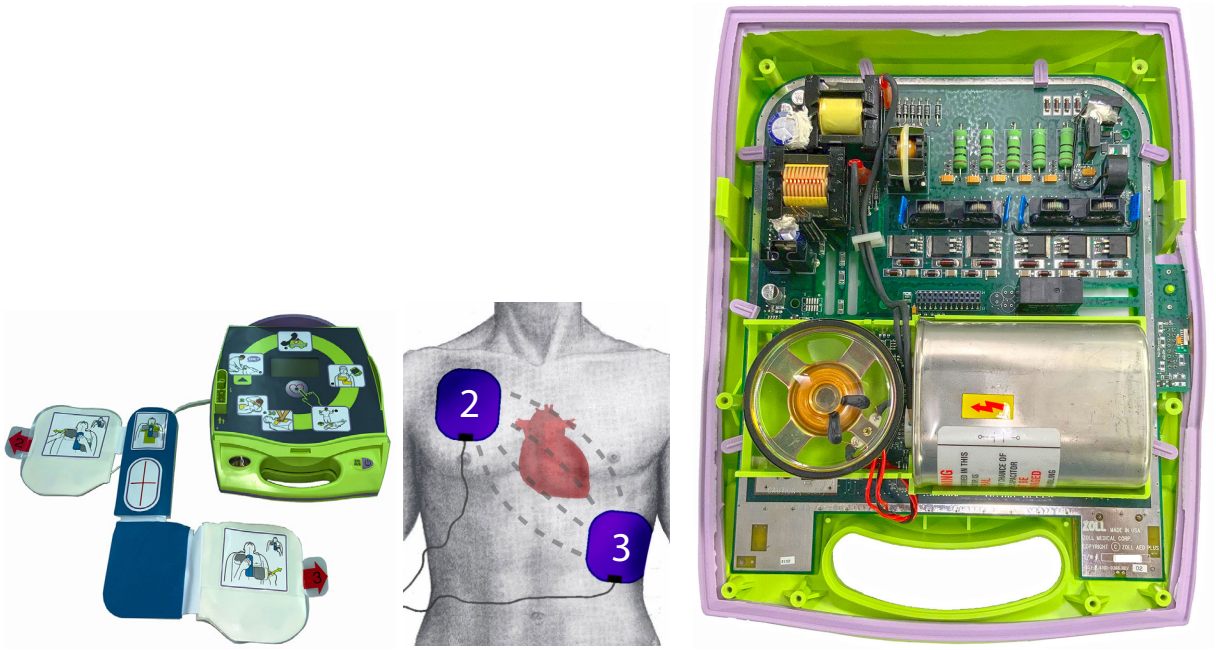


Figure 5.25: Typisches vereinfachtes Blockschaltbild eines Defibrillators und mögliche Entladungskurven für eine optimale Übertragung der Energie an den Herzmuskel unter verschiedenen Randbedingungen. Weitere Infos finden Sie z.B. in der Dissertation "Impedanzunabhängige Defibrillation mit physiologischer Impulsform", von M. Schönegg, 2008, Universität Karlsruhe.



(a) (b)

Figure 5.26: Der Defibrillator wurde freundlicherweise von der Firma Procamed AG zur Verfügung gestellt.

und gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit eines erfolgreichen "Elektroschocks" zu maximieren, um eine mögliche Schädigung des Herzens/Gewebes zu vermeiden.

In Abbildung 5.25 ist oben der prinzipielle Aufbau eines Defibrillators dargestellt. Dieser wird über einen Akkumulator versorgt, wobei die Spannung des Akkumulators durch einen Hochsetzsteller typischerweise auf Werte im Bereich von einigen 1000V angehoben wird. Die für den Elektroschock benötigte Energie im Bereich von einigen 100J wird in einem Kondensator zwischengespeichert und die Kondensatorspannung wird im betrachteten Beispiel über vier Transistoren an die Elektroden angelegt. Aufgrund der Anordnung/Verschaltung der vier Transistoren können dabei bipolare Pulse, d.h. Pulse mit positiver und negativer Spannungsrichtung erzeugt werden. Die Pulsdauer beträgt dabei typischerweise eine 10ms und der maximale Strom durch den Körper kann für diese kurze Zeit Werte im Bereich von einigen 10A erreichen.

5.5 Netzwerke mit mehreren Speichern

Die bisher für einen Energiespeicher verwendete Methode zur Lösung der Differentialgleichung wird nun auf mehrere Energiespeicher erweitert. Das Vorgehen kann dabei in vier Schritte unterteilt werden, die zuerst allgemein vorgestellt und dann anhand eines Beispiels vertieft werden.

1. Schritt: Aufstellen der Differentialgleichungen

- ▷ Das Netzwerk wird mit Knoten- und Maschengleichungen beschrieben. Es resultiert ein System algebraischer Gleichungen und Differentialgleichungen. Dabei liefern die n unabhängigen Energiespeicher n Differentialgleichungen 1. Ordnung. Dabei sind z.B. in Serie oder parallel geschaltete Komponenten gleichen Typs nicht unabhängig, da diese zu einer Ersatzkomponente zusammengefasst werden können.

  Durch Zusammenfassen der aufgestellten Gleichungen resultiert eine inhomogene Differentialgleichung n-ter Ordnung für eine unbekannte Variable $y(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = f(t) \tag{5.77}$$

$y(t)$ steht dabei für eine der Zustandsgrössen des Netzwerks, d.h. für eine Spannung an einem Kondensator oder einen Strom durch eine Spule. In den konstanten Koeffizienten a_0 bis a_{n-1} ist die Information über den Aufbau des Netzwerkes, d.h. über die Komponenten und deren Verknüpfung enthalten.

- ▷ Die Differentialgleichung n-ter Ordnung wird nach folgenden Kriterien kategorisiert:
  - Lineare Differentialgleichung, da $y(t)$ nur in der 1. Potenz auftritt.
  - Gewöhnlich, da alle Grössen nur von einer Variable – hier von der Zeit t – abhängen.
  - Inhomogen, da eine von $y(t)$ unabhängige Störfunktion $f(t)$ vorliegt, welche durch die bekannten bzw. gegebenen Quellenströme und Quellenspannungen und deren Ableitungen definiert wird. Aufgrund der bisher behandelten Analysemethoden für Netzwerke, darf $f(t)$ dabei sowohl einen Gleichanteil als auch beliebige Kombinationen von sinusförmige Funktionen (z.B. Fourierreihen) enthalten.
- ▷ Die Lösung der Differentialgleichung setzt sich wie bisher aus einem homogenen und einem partikulären Anteil zusammen, d.h. es gilt $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$. Die partikuläre Lösung beschreibt dabei wiederum das stationäre Verhalten nach dem Ausgleichsvorgang. Diese muss die folgende Differentialgleichung erfüllen

$$\frac{\mathrm{d}^n y_p(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y_p(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}y_p(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y_p(t) = f(t) \tag{5.78}$$

- ▷ Die homogene Lösung beschreibt wieder den Übergang vom stationären Zustand vor dem Schaltvorgang zum stationären Endzustand nach dem Schaltvorgang.

$$\frac{\mathrm{d}^n y_h(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y_h(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}y_h(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y_h(t) = 0 \tag{5.79}$$

2. Schritt: Ermitteln der partikulären Lösung

- ▷ Zum Berechnen der partikulären Lösung wird das Netzwerk so behandelt, als habe sich der Schaltvorgang schon vor unendlich langer Zeit ereignet, womit sich das Netzwerk im stationären Zustand befindet. Die Methode zur Berechnung von $y_p(t)$ hängt dabei dann von der Art der Störfunktion (Anregung) $f(t)$ ab.
  - Ist $f(t)$ eine Konstante, so wird das Netzwerk wie ein Gleichspannungsnetzwerk behandelt und Induktivitäten sind durch einen Kurzschluss und Kondensatoren durch einen Leerlauf zu ersetzen.
  - Besteht $f(t)$ aus sinusförmigen Anregungen bei einer einzigen Frequenz, dann kann die Lösung mit der komplexen Wechselstromrechnung ermittelt werden.
  - Setzt sich $f(t)$ aus allgemeinen periodischen Schwingungen zusammen, so kann die Lösung mittels der Harmonischen Analyse auf Basis von Fourierreihen berechnet werden.

3. Schritt: Bestimmung der homogenen Lösung

- ▷ Die allgemeine homogene Lösung muss die Differentialgleichung (5.79) erfüllen und kann daher unabhängig von den Quellenströmen und –spannungen, d.h. von der Störfunktion $f(t)$, ermittelt werden. Der Lösungsansatz für die homogene Lösung basiert wiederum auf dem Exponentialansatz, in welchem die Konstanten k und p unbekannt sind und noch berechnet werden müssen.

$$y_h(t) = k\mathrm{e}^{pt} \tag{5.80}$$

Mit dem Lösungsansatz ergeben sich die folgenden Ableitungen für die Differentialgleichung.

$$\frac{\mathrm{d}y_h(t)}{\mathrm{d}t} = pk\mathrm{e}^{pt}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 y_h(t)}{\mathrm{d}t^2} = p^2 k\mathrm{e}^{pt}, \quad \ldots \quad \frac{\mathrm{d}^n y_h(t)}{\mathrm{d}t^n} = p^n k\mathrm{e}^{pt} \tag{5.81}$$

▷ Setzt man den Ansatz und die Ableitungen in die homogene Differentialgleichung (5.79) ein, so folgt die Beziehung

$$\left(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0\right) k\mathrm{e}^{pt} = 0 \tag{5.82}$$

▷ Unter der Annahme, dass die Funktion $k\mathrm{e}^{pt}$ nicht verschwindet, ergibt sich folgende charakteristische Gleichung für das Netzwerk.

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 = 0 \tag{5.83}$$

Die charakteristische Gleichung besitzt genau n als Eigenwerte bezeichnete Lösungen $p_1, p_2 \ldots p_n$. Da die Koeffizienten a_0 bis a_{n-1} ($a_n = 1$) reell sind, müssen die Eigenwerte ebenfalls reell oder paarweise konjugiert komplex sein. Zusätzlich können Eigenwerte identisch sein, d.h. mehrfach auftreten. Aus diesem Grund müssen für den Lösungsansatz mehrere Fälle unterschieden werden.

▷ Für die n-Eigenwerte können die folgenden Fälle unterschieden werden:

1. Alle Eigenwerte sind reell und verschieden. In diesem Fall ergeben sich die folgenden n linear unabhängigen Lösungsanteile.

$$y_h(t) = k_1\mathrm{e}^{p_1 t} + k_2\mathrm{e}^{p_2 t} + \cdots + k_n\mathrm{e}^{p_n t} \tag{5.84}$$

2. Bei einer m-fachen Wurzel bzw. Nullstelle p_x ergibt sich über das Reduktionsverfahren von d'Alembert der Lösungsanteil $(k_1 + \ldots + k_m t^{m-1})\mathrm{e}^{p_x t}$. Für die restlichen einfachen Nullstellen/Eigenwerte ergeben sich wiederum die Lösungsanteile $k_y\mathrm{e}^{p_y t}$. Für einen dreifachen Eigenwert $p_1 = p_2 = p_3$ ergeben sich somit beispielsweise folgende unabhängige Lösungsanteile

$$y_h(t) = \left(k_1 + k_2 t + k_3 t^2\right)\mathrm{e}^{p_1 t} + k_4\mathrm{e}^{p_4 t} + \cdots + k_n\mathrm{e}^{p_n t} \tag{5.85}$$

3. Sind zwei Eigenwerte konjugiert komplex, d.h. z.B. $p_1 = \alpha + \mathrm{j}\beta$ und $p_2 = \alpha - \mathrm{j}\beta = p_1^*$, so ergibt sich der folgende Lösungsanteil $k_1\mathrm{e}^{p_1 t} + k_2\mathrm{e}^{p_1^* t} = k_1\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\beta)t} + k_2\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{j}\beta)t}$. Die Gesamtlösung für zwei konjugiert komplexe Eigenwerte lautet damit z.B. wie folgt

$$\begin{aligned} y_h(t) &= k_1\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\beta)t} + k_2\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{j}\beta)t} + k_3\mathrm{e}^{p_3 t} + \cdots + k_n\mathrm{e}^{p_n t} \\ &= k_{1r}\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t + k_{2r}\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t + k_3\mathrm{e}^{p_3 t} + \cdots + k_n\mathrm{e}^{p_n t} \end{aligned} \tag{5.86}$$

Die Lösung kann dabei entweder in der komplexen oder mittels der eulerschen Formel (d.h. $e^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x$) in der reellen Schreibweise angegeben werden. Dabei gilt $k_{1r} = k_1 + k_2$ und $k_{2r} = k_1 - k_2$.

▷ Treten mehrere mehrfache Eigenwerte bzw. konjugiert komplexe Eigenwerte auf, so kommen die jeweiligen Lösungsanteile entsprechend mehrmals in der Gesamtlösung vor. Dazu folgt noch ein Beispiel.

▷ Bei passiven Netzwerken klingen die Ausgleichsvorgänge mit der Zeit ab, d.h. die reellen Eigenwerte und die Realteile der konjugiert komplexen Eigenwerte sind negativ. Im Fall von einem konjugiert komplexen Eigenwert, dessen Realteil gleich 0 ist, tritt eine ungedämpfte Schwingung auf (z.B. verlustloser LC-Schwingkreis).

Beispiel für die Bestimmung der homogenen Lösung

▷ Als Beispiel wird nun die Lösung der folgenden homogenen Differentialgleichung berechnet.

$$\frac{\mathrm{d}^5 y(t)}{\mathrm{d}t^5} + 7\frac{\mathrm{d}^4 y(t)}{\mathrm{d}t^4} + 26\frac{\mathrm{d}^3 y(t)}{\mathrm{d}t^3} + 62\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 85\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 75y(t) = 0 \tag{5.87}$$

▷ Aus der homogenen Differentialgleichung folgt unmittelbar die charakteristische Gleichung

$$p^5 + 7p^4 + 26p^3 + 62p^2 + 85p + 75 = 0 \tag{5.88}$$

▷ Die Eigenwerte der betrachteten charakteristischen Gleichung umfassen dabei doppelte konjugiert komplexe Werte.

$$p_1 = -3, \quad p_2 = p_3 = -1 + \mathrm{j}2, \quad p_4 = p_5 = -1 - \mathrm{j}2 \tag{5.89}$$

▷ Mit diesen Eigenwerten ergibt sich die allgemeine homogene Lösung

$$y_h(t) = k_1 \mathrm{e}^{-3t} + (k_2 + k_3 t)\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + (k_4 + k_5 t)\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \tag{5.90}$$

4. Schritt: Bestimmung der unbekannten Konstanten k_i

▷ Die Überlagerung $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ für die allgemeine Lösung enthält noch n unbekannte Integrationskonstanten k_i der homogenen Lösung. Diese müssen durch die Stetigkeitsbedingung der n Speicherelemente (Anfangsbedingungen) bestimmt werden. Ideale Transformatoren sind dabei keine Energiespeicher.

▷ Für eine Umschaltung zum Zeitpunkt $t = t_0$ sind die Netzwerkgrössen $i_L(t_0 - 0)$ und $u_C(t_0 - 0)$ unmittelbar vor dem Schaltvorgang bekannt/gegeben. Die partikuläre Lösung weist unmittelbar nach dem Schaltvorgang die Werte $i_{Lp}(t_0 + 0)$ und $u_{Cp}(t_0 + 0)$ auf. Daraus resultieren folgende Differenzen

$$\Delta u_C = u_{Cp}(t_0 + 0) - u_C(t_0 - 0) \qquad \text{Kondensatorspannungen} \tag{5.91}$$

$$\Delta i_L = i_{Lp}(t_0 + 0) - i_L(t_0 - 0) \qquad \text{Induktivitätsströme} \tag{5.92}$$

Diese Differenzen zum Umschaltzeitpunkt sind verantwortlich für den transienten Ausgleichsvorgang und bestimmen die homogene Lösung. Der weitere Verlauf der partikulären Lösung hat keinen Einfluss auf die homogene Lösung.

5.5.1 Beispiel: Serienschwingkreis an DC-Spannung

Die oben beschriebenen 4 Schritte zum Berechnen des Schaltvorgangs in einem Netzwerk mit mehreren Energiespeichern werden nun beispielhaft auf das Netzwerk in Abbildung 5.27 angewendet. In dem Netzwerk wird ein Serienschwingkreis zum Zeitpunkt $t = 0$ an die Gleichspannung U geschaltet.

1. Schritt: Aufstellen der Differentialgleichungen

▷ Aufstellen der Maschengleichung $\quad U = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$

▷ An den Komponenten gelten die Strom-/Spannungsbeziehungen:

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}, \quad u_R(t) = Ri(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \quad \text{und} \quad u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{5.93}$$

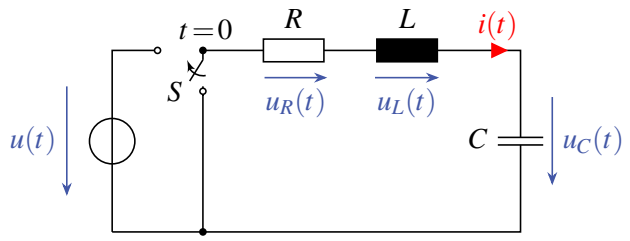


Figure 5.27: *LCR*-Beispielnetzwerk angeregt durch eine geschaltete Gleichspannungsquelle.

▷ Damit resultiert die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C(t) = \frac{U}{LC} \tag{5.94}$$

▷ Zusammen mit den Anfangsbedingungen $u_C(t=0) = u_{C0}$ und $i(t=0) = i_{L0}$ beschreibt die Differentialgleichung das Problem eindeutig.

2. Schritt: Bestimmung der partikulären Lösung

▷ Die partikuläre Lösung für die Anregung durch die Gleichspannungsquelle U kann unmittelbar angegeben werden, da für die Gleichspannungsanregung die Spule durch einen Kurzschluss und der Kondensator durch einen Leerlauf/eine Unterbrechung ersetzt werden kann.

$$u_{Cp}(t) = U \qquad i_p(t) = 0 \tag{5.95}$$

Dieselbe Lösung folgt auch aus der Differentialgleichung für die partikuläre Lösung, wobei aufgrund der Anregung durch die Gleichspannungsquelle die Ableitungen der Kondensatorspannung in der Differentialgleichung verschwinden. Damit folgt auf Basis der Gleichung (5.94)

$$y_p(t) = \frac{1}{a_0}f(t) \quad \rightarrow \quad u_{Cp}(t) = U \tag{5.96}$$

3. Schritt: Bestimmung der homogenen Lösung

▷ Mit dem Lösungsansatz für die homogene Lösung $u_{Ch}(t) = k\mathrm{e}^{pt}$

folgt aus der homogenen Differentialgleichung die charakteristische Gleichung $p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$

Diese hat die folgenden Eigenwerte

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \qquad \text{und} \qquad p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \tag{5.97}$$

Mit der Abklingkonstante $\delta = R/2L$ und der Resonanzfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ können die Eigenwerte wie folgt dargestellt werden.

$$p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \qquad p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \tag{5.98}$$

▷ Für die Eigenwerte gibt es im betrachteten Beispiel drei mögliche Fälle: Die Wurzeln können reell, Null oder imaginär sein. Diese werden im Folgenden untersucht.

- 1. Fall: *Die Wurzel ist reell*
  Die Bedingung dafür ist

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0 \rightarrow \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q_s < 0{,}5 \tag{5.99}$$

wobei Q_s die Güte des Schwingkreises ist.
Damit ergibt sich die homogene Lösung

$$u_{Ch}(t) = k_1\mathrm{e}^{p_1 t} + k_2\mathrm{e}^{p_2 t} \tag{5.100}$$

Die Gesamtlösung besteht damit aus zwei mit unterschiedlichen Zeitkonstanten abklingenden Exponentialfunktionen und es tritt keine Schwingung auf. Dies ist der sogenannte aperiodische Fall. Mit der partikulären Lösung folgt für die Kondensatorspannung

$$u_C(t) = U + k_1\mathrm{e}^{p_1 t} + k_2\mathrm{e}^{p_2 t} \tag{5.101}$$

- 2. Fall: *Die Wurzel verschwindet*
  Dieser Fall wird als aperiodischer Grenzfall bezeichnet und es gilt $p_1 = p_2 = -\delta$. Damit folgt für die homogene Lösung

$$u_{Ch}(t) = (k_1 + k_2 t)\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{5.102}$$

  Mit der partikulären Lösung ergibt sich damit die folgende Gesamtlösung

$$u_C(t) = U + (k_1 + k_2 t)\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{5.103}$$

  Folglich strebt die Kondensatorspannung maximal schnell gegen ihren Endwert ohne zu schwingen.
- 3. Fall: *Die Wurzel ist imaginär*
  In diesem Fall sind die Eigenwerte konjugiert komplex

$$p_1 = -\delta + \mathrm{j}\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta + \mathrm{j}\omega_d \tag{5.104}$$

$$p_2 = -\delta - \mathrm{j}\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta - \mathrm{j}\omega_d \tag{5.105}$$

  Damit lautet die homogene Lösung

$$u_{Ch}(t) = [k_1 \cos(\omega_d t) + k_2 \sin(\omega_d t)]\,\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{5.106}$$

  Für die Gesamtlösung resultiert somit

$$u_C(t) = U + [k_1 \cos(\omega_d t) + k_2 \sin(\omega_d t)]\,\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{5.107}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{5.108}$$

  Dabei tritt eine Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_d auf, deren Amplitude entsprechend einer Exponentialfunktion abklingt. Im Grenzfall $R = 0$, d.h. $\delta = 0$, ist die Schwingung ungedämpft, d.h. diese hat eine konstante Amplitude.

4. Schritt: Bestimmung der unbekannten Konstanten k_i

- Die Konstanten k_1 und k_2 werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt, wobei diese auf die verwendete Netzwerksvariable – hier $u_C(t)$ – angewendet werden müssen. Damit ergibt sich im betrachteten Fall eine Bedingung für $u_C(t)$ und eine Bedingung für die 1. Ableitung $\mathrm{d}u_C(t)/\mathrm{d}t$, die sich aus der Bedingung für den Strom i durch die Spule L ableitet.

$$u_C(t=0) = u_{C0} \qquad i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{i_{L0}}{C} \tag{5.109}$$

  In diese beiden Bedingungen müssen die 3 Lösungen für $u_C(t)$ in den Gleichungen (5.101), (5.103) und (5.107) bzw. deren Ableitungen eingesetzt werden, um die Konstanten k_1 und k_2 für die 3 Fälle der Eigenwerte zu berechnen.

- Die Konstanten k_1 & k_2 und die Gesamtlösungen ergeben sich für die Fälle 1-3 mit den folgenden Abkürzungen Δu_C und Δi_L

$$\Delta u_C = \underbrace{u_{Cp}(0)}_{U} - u_{C0} = U - u_{C0} \qquad \Delta i_L = \underbrace{i_{Lp}(0)}_{0} - i_{L0} = -i_{L0} \tag{5.110}$$

  aus den folgenden Gleichungen:

1) **Aperiodischer Fall:** $Q_s < 0.5$

$$k_1 = \frac{p_2 \Delta u_C - \Delta i_L/C}{p_1 - p_2} \qquad u_C(t) = u_{Cp}(t) + k_1 \mathrm{e}^{p_1 t} + k_2 \mathrm{e}^{p_2 t} \tag{5.111}$$

$$k_2 = \frac{-p_1 \Delta u_C + \Delta i_L/C}{p_1 - p_2} \qquad i(t) = i_p(t) + C\left(k_1 p_1 \mathrm{e}^{p_1 t} + k_2 p_2 \mathrm{e}^{p_2 t}\right) \tag{5.112}$$

2) **Aperiodischer Grenzfall:** $Q_s = 0.5$

$$k_1 = -\Delta u_C \qquad u_C(t) = u_{Cp}(t) + (k_1 + k_2 t)\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{5.113}$$

$$k_2 = -\delta \Delta u_C - \Delta i_L/C \qquad i(t) = i_p(t) + C\left[k_2 - \delta(k_1 + k_2 t)\right]\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{5.114}$$

3) **Periodischer Fall:** $Q_s > 0.5$

$$k_1 = -\Delta u_C \qquad u_C(t) = u_{Cp}(t) + \left[k_1 \cos(\omega_d t) + k_2 \sin(\omega_d t)\right]\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{5.115}$$

$$k_2 = -\frac{\delta}{\omega_d}\Delta u_C - \frac{\Delta i_L}{\omega_d C} \tag{5.116}$$

$$i(t) = i_p(t) + C\left[(\omega_d k_2 - \delta k_1)\cos(\omega_d t) - (\omega_d k_1 + \delta k_2)\sin(\omega_d t)\right]\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{5.117}$$

Für das soeben berechnete Beispielnetzwerk in Abbildung 5.27 werden nun die Bauteilwerte und die Anfangsbedingungen

$$L = 1\,\mathrm{mH} \qquad i_{L0} = 0 \tag{5.118}$$

$$C = 1\,\mu\mathrm{F} \qquad u_{C0} = 0 \tag{5.119}$$

angenommen und die resultierenden Strom- und Spannungsverläufe mit den bisher ermittelten Ergebnissen abgeleitet.

Abhängig vom Widerstandswert R tritt entweder aperiodisches oder periodisches Verhalten auf – siehe Abbildungen 5.28a und 5.28b. Je grösser die Güte Q_s des Schwingkreises ist, desto mehr neigt die Schaltung zum Schwingen.

Die Hüllkurve der Schwingung klingt mit der Zeitkonstante $\tau = 1/\delta = 2L/R$ ab. Für $R \to 0$ gilt für die Zeitkonstante der Exponentialfunktion $\tau \to \infty$. Daraus folgt, dass die Kondensatorspannung in diesem Fall mit der maximalen Amplitude um die partikuläre Lösung schwingt, wobei die Kondensatorspannung maximal doppelt so gross werden kann wie die Eingangsspannung.

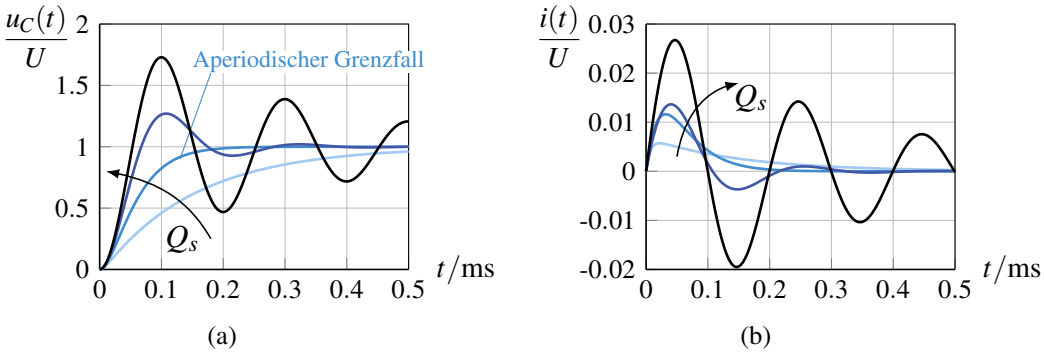


Figure 5.28: Zeitlicher Verlauf der Kondensatorspannung in a) und des Stromes in b) für verschiedene Werte der Güte für die Schaltung in Abbildung 5.27.

5.5.2 Beispiel: Serienschwingkreis an AC-Spannung

Für den bisher betrachteten Serienschwingkreis mit Gleichspannungsanregung in Abbildung 5.27 wird nun angenommen, dass die Quellenspannung gleich der periodischen Spannung ist, die in Form der

folgenden Fourierreihe gegeben ist

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n \cos(n\omega t - \psi_n) \tag{5.120}$$

Dabei unterscheidet sich die Lösung für den Schaltvorgang im Fall der betrachteten Anregung mit der periodischen Quellenspannung von dem Fall mit einer reinen Gleichspannungsanregung nur bezüglich der allgemeinen partikulären Lösung. Der transiente Übergang, d.h. die allgemeine homogene Lösung ist identisch.

Für den Gleichspannungsanteil von $u(t)$ folgt direkt der Gleichanteil der partikulären Lösung: $u_{Cp,DC} = U_0$

Die Wechselspannungsanteile ergeben sich mit der komplexen Wechselstromrechnung aus dem Zeiger $\underline{\hat{u}}_n$ der jeweiligen Harmonischen der Quellenspannung mit der Kreisfrequenz $n\omega$. Mit $\underline{\hat{u}}_n$ folgt der jeweils entsprechende Anteil der Kondensatorspannung $\underline{\hat{u}}_{Cp,n}$ aus dem Spannungsteiler, d.h. dem Verhältnis der Impedanzen.

$$\underline{\hat{u}}_n = \hat{u}_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_n} \quad \rightarrow \quad \underline{\hat{u}}_{Cp,n} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}n\omega C}}{R + \mathrm{j}n\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}n\omega C}} \underline{\hat{u}}_n = \frac{1}{1 - (n\omega)^2 LC + \mathrm{j}n\omega CR} \hat{u}_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_n} \tag{5.121}$$

Damit resultiert für den zeitabhängigen Verlauf $u_{Cp,n}(t)$ der Harmonischen der Kondensatorspannung bzw. des Anteiles der partikulären Lösung

$$\begin{aligned} u_{Cp,n}(t) &= \Re\left\{ \frac{1}{1 - (n\omega)^2 LC + \mathrm{j}n\omega CR} \hat{u}_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\omega t - \psi_n)} \right\} \\ &= \frac{\hat{u}_n}{\sqrt{\left[1 - (n\omega)^2 LC\right]^2 + (n\omega CR)^2}} \cos(n\omega t - \psi_n - \varphi_n) \end{aligned} \tag{5.122}$$

mit

$$\varphi_n = \arctan \frac{n\omega CR}{1 - (n\omega)^2 LC} + \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \quad \text{falls} \quad 1 - (n\omega)^2 LC \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \tag{5.123}$$

Die vollständige partikuläre Lösung für die Kondensatorspannung und den Strom lautet mit Gleichung (5.122) und dem Gleichanteil

$$u_{Cp}(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_n}{\sqrt{\left[1 - (n\omega)^2 LC\right]^2 + (n\omega CR)^2}} \cos(n\omega t - \psi_n - \varphi_n) \tag{5.124}$$

$$i_p(t) = C \frac{\mathrm{d}u_{Cp}(t)}{\mathrm{d}t} = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_n n\omega}{\sqrt{\left[1 - (n\omega)^2 LC\right]^2 + (n\omega CR)^2}} \sin(n\omega t - \psi_n - \varphi_n) \tag{5.125}$$

Da die homogene Lösung nicht von der Anregung abhängt, sind die homogenen Lösungsanteile noch gültig, die in der Tabelle im Abschnitt 5.5.1 gegeben sind. Für die Bestimmung der Konstanten k_1 und k_2 der homogenen Lösung sind dabei wieder die Differenzen zwischen den Anfangswerten und der partikulären Lösung nach dem Schaltzeitpunkt, d.h. im betrachteten Fall bei $t = 0+$, einzusetzen. Im betrachteten Fall sind die Differenzen gleich

$$\Delta u_C = u_{Cp}(0) - u_{C0} = \left[U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_n \cos(\psi_n + \varphi_n)}{\sqrt{\left[1 - (n\omega)^2 LC\right]^2 + (n\omega CR)^2}} \right] - u_{C0} \tag{5.126}$$

$$\Delta i_L = i_{Lp}(0) - i_{L0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_n n\omega C \sin(\psi_n + \varphi_n)}{\sqrt{\left[1 - (n\omega)^2 LC\right]^2 + (n\omega CR)^2}} \right] - i_{L0} \tag{5.127}$$

Nimmt man nun für die Komponenten im betrachteten Serienschwingkreis in Abbildung 5.27 folgende Bauteilwerte bzw. Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} L &= 1\,\mathrm{mH} & i_{L0} &= 0 \\ C &= 1\,\mu\mathrm{F} & u_{C0} &= 0 \\ Q_s &\gg 0.5 \end{aligned}$$

und für die periodische Quellenspannung die Funktion $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t)$ an, so folgen die zeitlichen Verläufe aus den bisher berechneten Ergebnissen, da die Quellenspannung ein Spezialfall der betrachteten Fourierreihe ist. Für die Kondensatorspannung folgt damit

$$\begin{aligned} u_C(t) = &\frac{\hat{u}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}}\cos(\omega t - \varphi) \\ &- \left[\Delta u_C \cos(\omega_d t) + \left(\frac{\Delta i_L}{\omega_d C} + \frac{\delta}{\omega_d}\Delta u_C\right)\sin(\omega_d t)\right] \mathrm{e}^{-\delta t} \end{aligned} \tag{5.128}$$

mit

$$\Delta u_C = \frac{\hat{u}\cos(\varphi)}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \quad \text{und} \quad \Delta i_L = \frac{\hat{u}\omega C\sin(\varphi)}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \tag{5.129}$$

Neben der Kreisfrequenz ω der Quelle tritt auch die Eigenfrequenz ω_d des gedämpften Schwingkreises in der Lösung auf. Abhängig vom Verhältnis zwischen der Anregungsfrequenz ω und der Eigenfrequenz ω_d des gedämpften Serienschwingkreises treten dabei stark unterschiedliche Schwingungsbilder auf.

Für den Fall $\omega = 0.1\omega_d$ sind in Abbildung 5.29a der homogene und der partikuläre Anteil getrennt und in Abbildung 5.29b die Gesamtlösung für einen Güte von $Q_s = 10$ dargestellt.

Für den Fall $\omega = 0.9\omega_d$ resultiert aufgrund des geringeren Frequenzabstandes zwischen ω und ω_d eine Schwebung, die in Abbildung 5.29c mit getrennten Lösungsanteilen und in Abbildung 5.29d als Summe für $Q_s = 30$ dargestellt ist. Aufgrund der höheren Güte steigt die Amplitude der partikulären Lösung und damit auch die Differenz Δu aus (5.126) an. Dies resultiert auch in einer grösseren Amplitude der homogenen Lösung. Gleichzeitig reduziert sich die Abklingkonstante $\delta = R/2L$ aufgrund der höheren Güte, womit die homogene Lösung langsamer abklingt.

5.5.3 Maschenstromverfahren für transiente Vorgänge

Um die Differentialgleichungen eines ebenen Netzwerkes aufzustellen, wird im Folgenden das im Abschnitt 3.3.6 beschriebene Maschenstromverfahren so erweitert, dass mit diesem gezielt die Differentialgleichungen zum Berechnen des Einschwingvorgangs ermittelt werden können. Neben den Maschenströmen werden dabei die Spannungen an sämtlichen Kapazitäten als zusätzliche unbekannte Variablen eingeführt und die Strom-/Spannungsbeziehungen für die jeweiligen Bauelemente in Abbildung 5.30 genutzt.

Die einzelnen Schritte des erweiterten Verfahrens sind (Schritt 5 ist modifiziert im Vergleich zum ursprünglichen Verfahren):

1. Vereinfachung des Netzwerks.

2. Ersetze alle Stromquellen durch einen Leerlauf. Dabei werden jeweils die beiden Elementarmaschen, die eine Stromquelle enthielten, zu einer neuen Elementarmasche zusammengefasst. Insgesamt folgt damit ein neues, reduziertes Set an Elementarmaschen M^*.

3. Weise jeder der Elementarmaschen im reduzierten Set M^* einen Maschenstrom mit Umlaufsinn zu.

4. Füge die Stromquellen wieder ein. Ergänze für jede Stromquelle einen zusätzlichen bekannten Maschenstrom, der jeweils nur über eine Stromquelle fliesst und der in Richtung des Stromes der Stromquelle weist. Die bekannten Maschenströme sind dann gleich dem Strom durch die jeweilige Stromquelle.

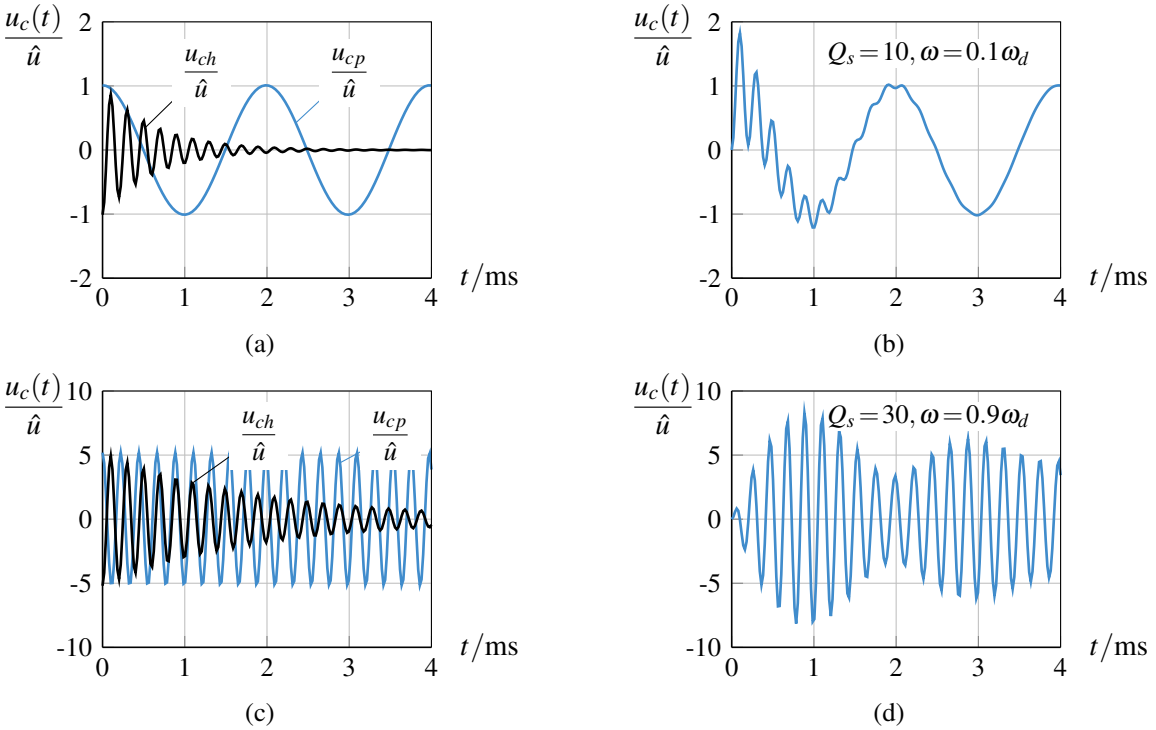


Figure 5.29: In a) getrennte Darstellung des homogenen und des partikulären Anteils und in b) die Gesamtlösung für $\omega = 0.1\omega_d$ und $Q_s = 10$. In c) getrennte Darstellung des homogenen und des partikulären Anteils und in d) die Gesamtlösung für $\omega = 0.9\omega_d$ und $Q_s = 30$.

5. Stelle für jede Elementarmasche im Set M^* die Maschengleichung mit der Strom-Spannungsbeziehung für R und L (Abbildung 5.30a) bzw. den unbekannten Kapazitätsspannungen u_C auf.
6. Stelle für jede Kapazität die Strom-Spannungsbeziehung (Abbildung 5.30b) für die Kapazitätsspannung mit Hilfe der Maschenströme als zusätzliche Gleichung für die zusätzlichen unbekannten Kapazitätsspannungen auf.
7. Umformen/Zusammenfassen des Gleichungssystems in Matrixform.

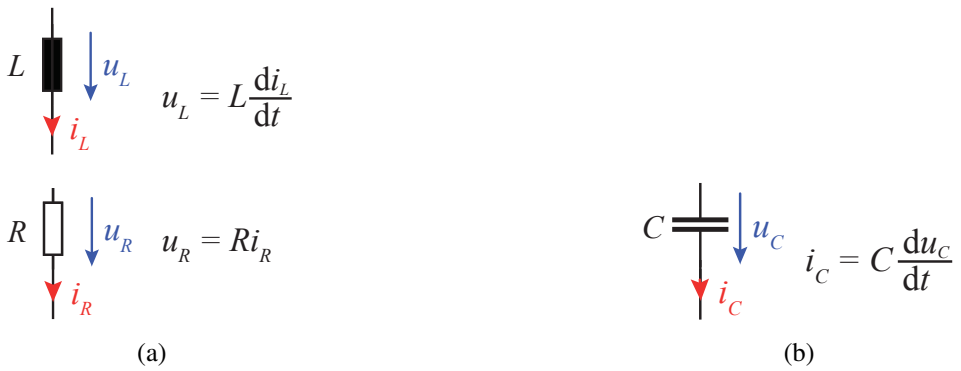


Figure 5.30: a) Strom-/Spannungsbeziehung für einen Widerstand und eine Induktivität mit den unbekannten (Maschen-)Strömen. b) Strom-/Spannungsbeziehung für einen Kondensator mit der unbekannten Kapazitätsspannung u_c.

Beispiel: Transientes Maschenstromverfahren

Das erweiterte Maschenstromverfahren wird nun auf das Netzwerk in Abbildung 5.31a angewendet, wobei die Werte für R_1 - R_3, L_1, C_1 und für den Strom I_0 sowie die Anfangswerte für i_L & u_C gegeben

sind.

2.) Ersetze Stromquelle I_0 durch einen Leerlauf $\rightarrow$ Damit ergeben sich 3 Elementarmaschen im Set M^*.

3.) Zuweisen von 3 unbekannten Maschenströmen: i_1 - i_3 in Abbildung 5.31b.

4.) Wieder einfügen der Stromquelle I_0 und der "neu" entstehenden Masche den bekannten Maschenstrom I_0 zuweisen.

5a.) Aufstellen von 3 Maschengleichungen für das Set M^*

$$R_1(i_1 - i_3) + L_1 \frac{\mathrm{d}(i_1 - i_2)}{\mathrm{d}t} - u_q = 0 \qquad \text{(M1)}$$

$$\Rightarrow R_1(i_1 - i_3) + L_1 \frac{\mathrm{d}(i_1 - i_2)}{\mathrm{d}t} - R_4(I_0 - i_2) = 0 \tag{5.130}$$

$$R_2(i_2 - I_0) + L_1 \frac{\mathrm{d}(i_2 - i_1)}{\mathrm{d}t} + R_3(i_2 - i_3) = 0 \qquad \text{(M2)} \tag{5.131}$$

$$R_1(i_3 - i_1) + u_C + R_3(i_3 - i_2) = 0 \qquad \text{(M3)} \tag{5.132}$$

5b.) Aufstellen der Strom-Spannungsbeziehung für C_1, wobei der Strom durch den Kondensator durch die Maschenströme ausgedrückt wird (hier: $i_C = i_3$)

$$C_1 \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} - i_3 = 0 \tag{5.133}$$

6.) Das Gleichungssystem aus den 4 Gleichungen und den 4 Unbekannten: i_1, i_2, i_3 und u_C kann kompakt in der Matrixform dargestellt werden.

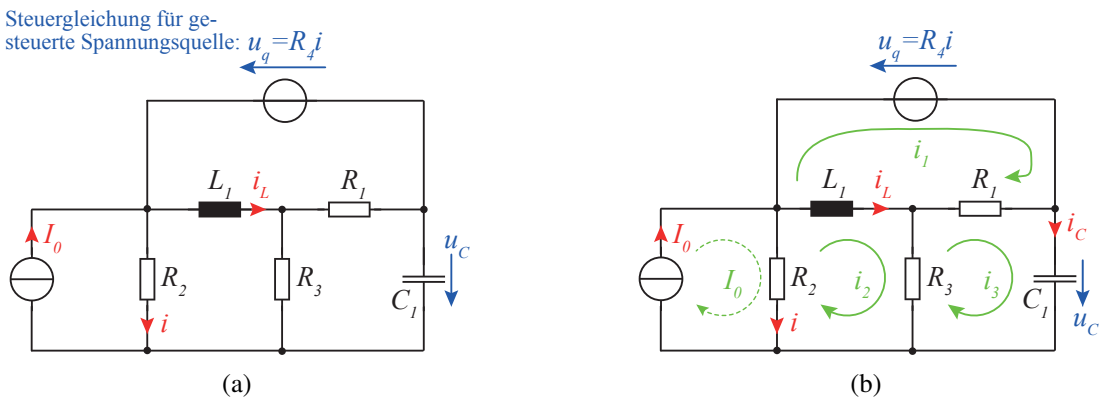


Figure 5.31: a) Ebenes Beispielnetzwerk mit gesteuerter Spannungsquelle für das transiente Maschenstromverfahren. b) Gewählte unbekannte Maschenströme und unbekannte Kondensatorspannung für das Netzwerk in a).

Die Anfangswerte der drei unbekannten Maschenströme, die für die Lösung des Differentialgleichungssystems benötigt werden, erhält man dadurch, dass man für den Zeitpunkt $t = t_0$ die Kapazität durch eine Spannungsquelle U_{C0} und die Induktivität durch eine Stromquelle I_{L0} ersetzt, wie dies in Abbildung 5.32 dargestellt ist.

Die unbekannten Anfangswerte für die Maschenströme können z.B. mit den folgenden drei Gleichungen oder auch mit dem bekannten Maschenstrom- oder dem Knotenpotenzialverfahren für das Netzwerk in Abbildung 5.32 ermittelt werden.

1. Zusammenhang zwischen dem Zweigstrom I_{L0} und den Maschenströmen

$$I_{L0} = -i_1(t_0) + i_2(t_0) \tag{5.134}$$

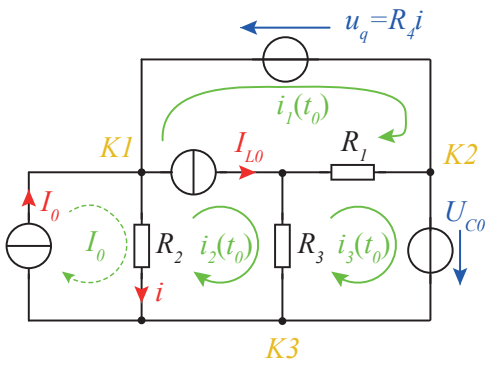


Figure 5.32: Netzwerk für die Berechnung der Anfangswerte für die Beispielschaltung in Abbildung 5.31a.

2. Maschengleichung für Masche 3

$$0 = R_1\big(i_3(t_0) - i_1(t_0)\big) + U_{C0} + R_3\big(i_3(t_0) - i_2(t_0)\big) \tag{5.135}$$

3. Maschengleichung für Masche: $K1 \to K2 \to K3 \to K1$ über u_q & U_{C0}

$$0 = -R_4\big(I_0 - i_2(t_0)\big) + U_{C0} + R_2\big(i_2(t_0) - I_0\big) \tag{5.136}$$

Damit folgen die Anfangswerte für die Maschenströme

$$i_1(t_0) = -I_{L0} + I_0 - \frac{U_{C0}}{R_2 + R_4} \tag{5.137}$$

$$i_2(t_0) = I_0 - \frac{U_{C0}}{R_2 + R_4} \tag{5.138}$$

$$i_3(t_0) = \frac{1}{R_1 + R_3}\left(-U_{C0} + R_1\left(-I_{L0} + I_0 - \frac{U_{C0}}{R_2 + R_4}\right) + R_3\left(I_0 - \frac{U_{C0}}{R_2 + R_4}\right)\right) \tag{5.139}$$

Auf analoge Weise kann auch das Knotenpotenzialverfahren erweitert werden, wobei in diesem Fall die Ströme in den Induktivitäten zusätzliche unbekannte Variablen sind. Weitere Informationen hierzu sind z.B. in "Grundlagen der Elektrotechnik 2"' von R. Unbehauen aus dem Springer-Verlag zu finden. Dort wird auch beschrieben, wie das ermittelte Gleichungssystem in Matrixform in die Zustandsbeschreibung des Netzwerkes umgewandelt werden kann, die auf den Variablen für die Energieinhalte (u_C und i_L) beruht.

Einschwingvorgänge von grösseren Netzwerken werden häufig mit Hilfe der später noch erläuterten Laplace-Transformation ermittelt, da im Bildbereich der Laplace-Transformation ein algebraisches Gleichungssystem anstatt eines Differentialgleichungssystem gelöst werden muss, was meist deutlich einfacher ist.

Chapter 6

Laplace-Transformation

6.1 Fourier-Integral

Nichtsinusförmige periodische Quellenströme und –spannungen in Netzwerken wurden bisher durch Fourierreihen dargestellt und die Wirkung der Grössen auf das Netzwerk durch die Harmonische Analyse, d.h. einer Überlagerung der Teilwirkungen im Zeitbereich, berechnet. Im Folgenden wird die Beschreibung von periodischen Netzwerksgrössen durch Fourierreihen auf einmalige, d.h. nicht periodische Vorgänge, erweitert.

Ansatzpunkt ist dabei die periodische Fortsetzung einer einmaligen (kurzzeitigen) Quellengrösse der Dauer τ mit einer Periodendauer $T_0 > \tau$. Dies ist in Abbildung 6.1 beispielhaft für einen beliebigen Spannungspuls dargestellt. Mit der periodischen Fortsetzung des Pulses kann das Netzwerk wieder mit Hilfe der Harmonischen Analyse berechnet werden.

Um sicherzustellen, dass der Ausgleichsvorgang durch Anregung des Netzwerkes mit einem Pulse nicht von vorausgehenden Spannungspulsen gestört bzw. beeinflusst wird, muss der Abstand $T_0 - \tau$ zwischen 2 Pulsen im Idealfall unendlich gross werden. Damit geht die gewählte Periodenlänge gegen unendlich, d.h. es gilt $T_0 \to \infty$. Im Folgenden wird nun untersucht, wie sich dieser Grenzübergang der Periodenlänge auf die Entwicklung des Spannungspulses in eine Fourierreihe auswirkt.

Ausgangspunkt für die Untersuchungen ist dabei die allgemeine Reihendarstellung einer periodischen

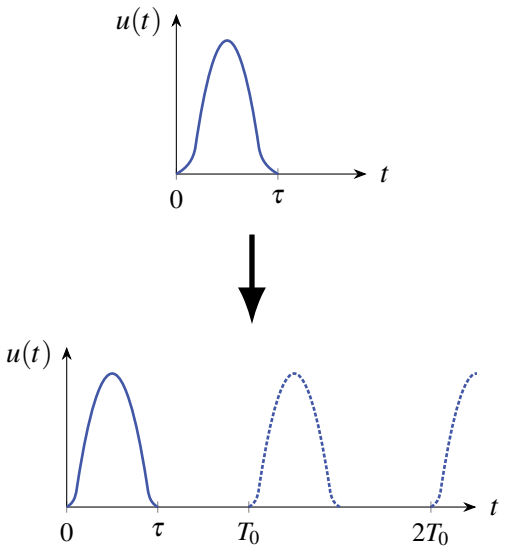


Figure 6.1: Periodische Fortsetzung einer nichtperiodischen einmaligen Quellengrösse mit der Dauer τ.

Zeitfunktion $u(t)$ mit der Periodendauer T_0 auf Basis einer komplexen Fourierreihe (siehe Abschnitt 4.2.5)

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \underline{\hat{k}}_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} \qquad \text{mit} \qquad \underline{\hat{k}}_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \tag{6.1}$$

Beispielhaft resultieren für die Rechteckschwingung in Abbildung 6.2a die folgenden komplexen Fourierkoeffizienten. In Abbildung 6.2b sind die Werte der Koeffizienten (bzw. der Realteile der komplexen Koeffizienten) dargestellt.

$$\begin{aligned}
\underline{\hat{k}}_n &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \hat{u}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\hat{u}}{T_0}\frac{1}{\mathrm{j}n\omega_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} = -\frac{\hat{u}}{T_0}\frac{1}{\mathrm{j}n\omega_0}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0\frac{\tau}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0\frac{\tau}{2}}\right) \\
&= \frac{\hat{u}}{T_0}\frac{1}{n\omega_0}2\sin\left(n\omega_0\frac{\tau}{2}\right) = \hat{u}\frac{\tau}{T_0}\frac{\sin\left(n\omega_0\frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_0\frac{\tau}{2}}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Dabei wird der Abstand entlang der Frequenzachse zwischen den Harmonischen bzw. den Spektrallinien in Abbildung 6.2b durch die Periodendauer T_0 bestimmt ($\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$). Die Dauer bzw. Breite τ der Spannungspulse definiert die Nulldurchgänge f' der Spektralfunktion ($\sim \sin x/x$), d.h. der Hüllkurve der einzelnen Spektrallinien in Abbildung 6.2b.

$$\left(n'\omega_0\frac{\tau}{2}\right) = \omega'\frac{\tau}{2} = \pi f'\tau \overset{!}{=} \nu\pi \qquad \nu = 1,2,\ldots \qquad \rightarrow \qquad f' = \frac{\nu}{\tau} \tag{6.3}$$

Mit wachsender Periodendauer T_0 streben die Abstände $\Delta f = f_0 = \frac{1}{T_0}$ zwischen den Spektrallinien/ Harmonischen zu immer kleineren Werten. Für $T_0 \rightarrow \infty$ geht das Linienspektrum dabei in ein kontinuierliches Spektrum über, so wie dies in Abbildung 6.3 dargestellt ist. Der Betrag der komplexen Fourierkoeffizienten strebt dabei für $T \rightarrow \infty$ gegen 0, aber das Integral

$$T_0 \cdot \underline{\hat{k}}_n \quad = \quad \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n2\pi f_0 t}\mathrm{d}t \tag{6.4}$$

weist für eine definierte Frequenz $n\Delta f = nf_0 = f$ einen konstanten, von T_0 unabhängigen Wert auf. Mit dem Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ folgt aus obigen Integral die sogenannte spektrale Dichte $\underline{U}(f)$ bzw. die

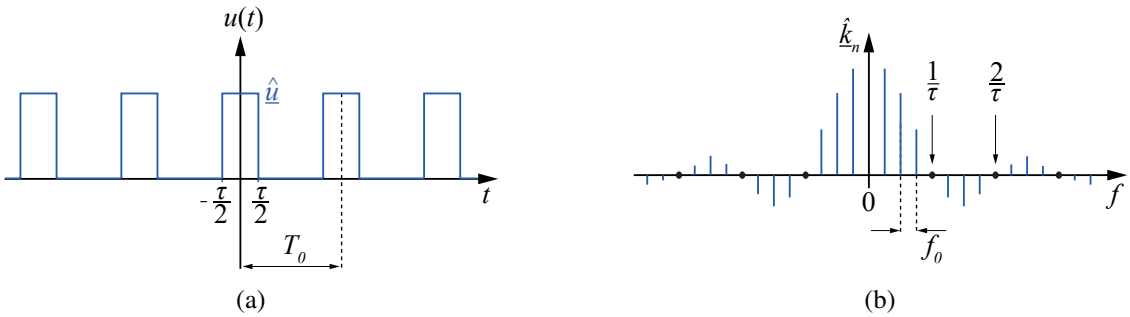


Figure 6.2: a) Rechteckförmiger Spannungspulse der Dauer τ, der periodisch mit der Periodenlänge T_0 wiederholt wird. b) Darstellung der komplexen Fourierkoeffizienten für den Pulse in a), wobei die Koeffizienten in Gleichung (6.2) rein reell sind.

Amplitudendichte in Abbildung 6.3c

$$\begin{aligned}\lim_{T_0\to\infty}(\hat{\underline{k}}_n T_0) &= \lim_{\Delta f\to 0}\left(\frac{\hat{\underline{k}}_n}{\Delta f}\right)\\ &= \lim_{T_0\to\infty}\left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n2\pi f_0 t}\mathrm{d}t\right)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}t = \underline{U}(f)\end{aligned} \tag{6.5}$$

Damit ist der Originalfunktion $u(t)$ die folgende Spektralfunktion im Frequenzbereich zugeordnet ($\omega = 2\pi f$)

$$\underline{U}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{6.6}$$

Der Übergang vom Zeitbereich in den Frequenzbereich, d.h. von der Zeit- bzw. der Originalfunktion $u(t)$ zur Bildfunktion bzw. zur Spektralfunktion $\underline{U}(\omega)$ wird als **Fourier-Transformation** bezeichnet.

Die inverse Fourier-Transformation, d.h. die Rücktransformation vom Bildbereich in den Zeitbereich, ergibt sich aus der Darstellung der Zeitfunktion als eine komplexe Fourierreihe mit dem Grenzübergang $\lim_{\Delta f\to 0}\left(\frac{\hat{\underline{k}}_n}{\Delta f}\right) = \underline{U}(f)$ und mit $n\Delta f \to f$ bzw. $\Delta f \to \mathrm{d}f$.

$$\begin{aligned}u(t) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\hat{\underline{k}}_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n2\pi f_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{\hat{\underline{k}}_n}{\Delta f}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n2\pi f_0 t}\Delta f\\ \Rightarrow\quad &\lim_{\Delta f\to 0}\left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{\hat{\underline{k}}_n}{\Delta f}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n2\pi f_0 t}\Delta f\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\underline{U}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}f\end{aligned} \tag{6.7}$$

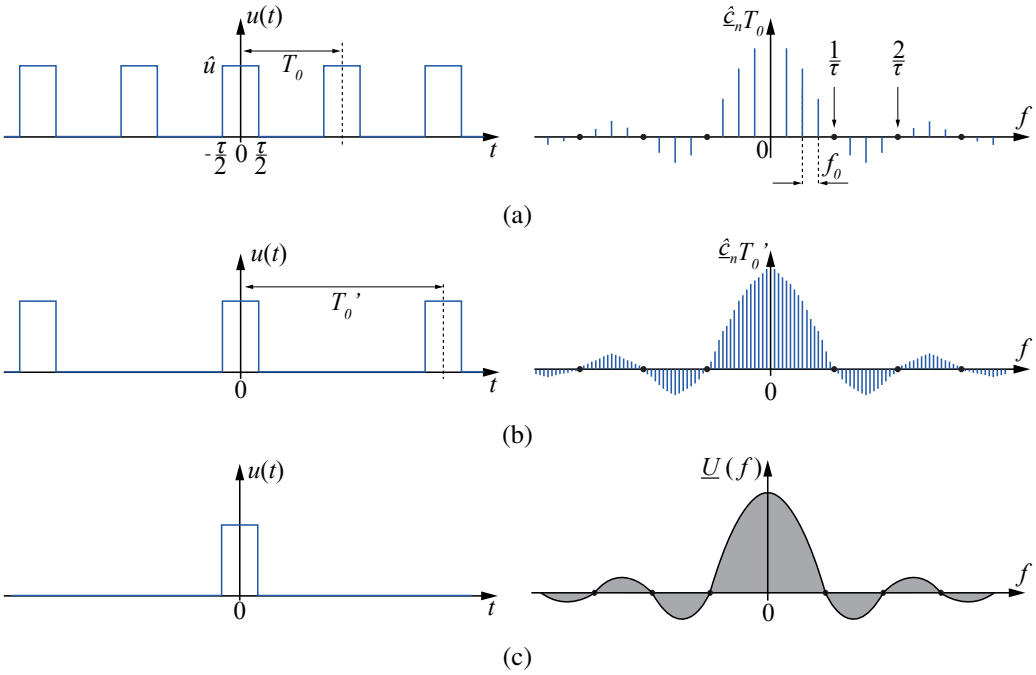


Figure 6.3: a) Rechteckförmiger Spannungspulse der Dauer τ, der periodisch mit der Periodenlänge T_0 wiederholt wird und die dazugehörigen Harmonischen multipliziert mit T_0. In b) und in c) ist der Grenzübergang für $T_0 \to \infty$ dargestellt. Dabei gehen das Linienspektrum in das kontinuierliche Spektrum bzw. die Spektralfunktion über.

Damit folgt die Zuordnung

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}(f) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t} \mathrm{d}f \tag{6.8}$$

oder in Abhängigkeit von ω mit $\omega = 2\pi f \;\rightarrow\; \mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}\omega \tag{6.9}$$

Besitzt das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(\tau)| \, \mathrm{d}\tau$ einen endlichen Wert, dann konvergiert das Fourier-Integral und eine Bildfunktion existiert. Im Fall von Sprungstellen (Unstetigkeitsstellen) der Zeitfunktion $u(t)$ ergeben sich die beiden Grenzwerte $u(t_S + 0)$ und $u(t_S - 0)$ an der Sprungstelle t_S als Grenzwerte. Damit folgt für die inverse Transformation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}\omega = \begin{cases} u(t) & \text{bei Stetigkeitsstellen} \\ \frac{1}{2}\left[u(t_S + 0) + u(t_S - 0)\right] & \text{bei Sprungstellen für } t = t_S \end{cases} \tag{6.10}$$

6.1.1 Fourier-Transformation

Zum Vergleich sind im Folgenden die Gleichungen für die Fourier-Transformation und die inverse Fourier-Transformation sowie die Gleichungen für die komplexe Fourierreihe für die Zeitfunktion $f(t)$ und deren Spektralfunktion $\underline{S}(\omega)$ gegenüberstellt.

$$\begin{aligned} \underline{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t & \hat{\underline{k}}_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t} \mathrm{d}t \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}\omega & f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{\underline{k}}_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} \end{aligned} \tag{6.11}$$

Der Faktor $1/2\pi$ vor dem Integral der inversen Fourier-Transformation kann dabei prinzipiell beliebig zwischen der Gleichung für die Fourier-Transformation und der inversen Fourier-Transformation aufgeteilt werden.

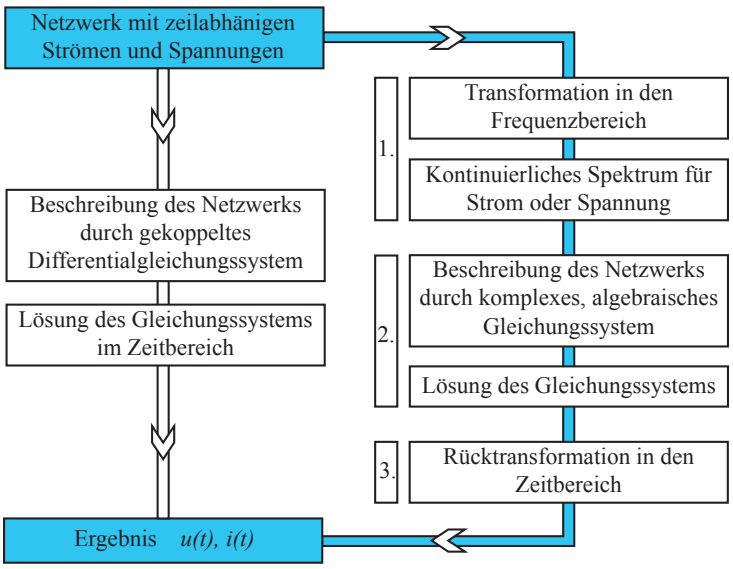


Figure 6.4: Vergleich der Vorgehensweise beim Berechnen eines Netzwerkes im Zeitbereich (links) und mit Hilfe der Fourier-Transformation (rechts).

Der Ausdruck $|\underline{S}(\omega)|$ ist eine Amplitudendichte bzw. Spektraldichte, d.h. diese gibt prinzipiell an, wie gross die Amplitude bei der jeweiligen Frequenz ist – ähnlich wie dies die Koeffizienten der Fourierreihe tun.

Mit dem Ausdruck $1/2\pi\, \underline{S}(\omega)\mathrm{d}\omega$ wird die differentielle (komplexe) Anregung (z.B. eine Spannung oder ein Strom) bei der jeweiligen Frequenz beschrieben (analog zu einem komplexen Zeiger), deren Wirkung mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung bestimmt werden kann. Die Gesamtwirkung im Zeitbereich ergibt sich durch Integration über alle Frequenzen (d.h. prinzipiell einer Überlagerung im Zeitbereich) – wie dies in der Gleichung für die Rücktransformation beschrieben ist.

In Abbildung 6.4 ist die Vorgehensweise beim Berechnen von Netzwerken mit Hilfe der Fourier- Transformation (Schritte 1-3) im Vergleich zum meistens erheblich aufwendigeren Vorgehen im Zeitbereich dargestellt. Die Rücktransformation kann häufig mit Tabellen durchgeführt werden.

Beispiel

Als Beispiel für die Anwendung der Fourier-Transformation bei der Netzwerksberechnung wird nun die Schaltung in Abbildung 6.5a mit der pulsförmigen Spannungsquelle mit dem folgenden zeitlichen Verlauf (Abbildung 6.5b) betrachtet

$$u(t) = \begin{cases} \hat{u} & 0 \leq t \leq \delta T \\ 0 & \delta T < t \end{cases} \tag{6.12}$$

Ziel ist es den zeitlichen Verlauf der Ausgangsspannung $u_C(t)$ mit Hilfe der Fourier-Transformation zu bestimmen.

In einem ersten Schritt wird die anregende Spannung mittels der Fourier-Transformation in den Frequenzbereich transformiert. Mit Gleichung (6.6) folgt für die Amplituden-/Spektraldichte

$$\begin{aligned} \underline{U}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \hat{u}\int_0^{\delta T} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\hat{u}}{-\mathrm{j}\omega}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\delta T} - 1\right) = \frac{\hat{u}}{\mathrm{j}\omega}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega\delta T}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\delta T}{2}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\delta T}{2}} \\ &= \frac{2\hat{u}}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\delta T}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\delta T}{2}} = \hat{u}\delta T\frac{\sin\left(\frac{\omega\delta T}{2}\right)}{\frac{\omega\delta T}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\delta T}{2}} \end{aligned} \tag{6.13}$$

Dabei wurde der Zusammenhang $\sin x = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}\right)$ genutzt.

In Abbildung 6.5c ist der Betrag des kontinuierliche Spektrums $|\underline{U}(\omega)|$ von $u(t)$ dargestellt. Die asymmetrische Lage des Spannungspulses gegenüber der Achse $t = 0$ bzw. die zeitliche Verschiebung des Spannungspulses resultiert lediglich in einer Phasendrehung um $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\delta T}{2}}$ im Spektrum. Auf die Amplitude hat dies keine Auswirkung.

Im Folgenden wird nun die gesuchte Kondensatorspannung $u_C(t)$ mit Hilfe der Fourier-Transformation berechnet, so wie dies in Abbildung 6.4 beschrieben ist.

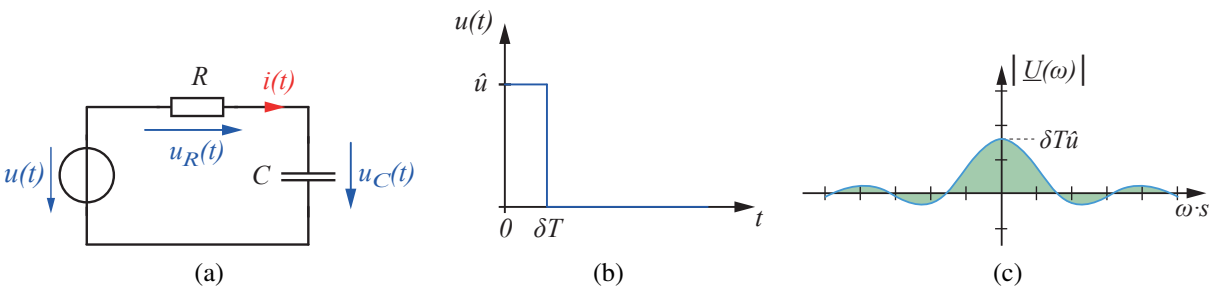


Figure 6.5: a) *RC*-Schaltung angeregt durch den Spannungspulse in b). Die Spektraldichte des Pulses ist in c) dargestellt.

1.) Netzwerkgleichung: Mit der gezeigten Transformation der Quellengrösse in den Frequenzbereich ist die Amplitudendichte der anregenden Spannung gleich

$$\underline{U}(\omega) = \frac{2\hat{u}}{\omega}\left(\sin\frac{\omega\delta T}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\delta T}{2}} \tag{6.14}$$

und der erste Schritt zur Berechnung von $u_C(t)$ ist damit bereits abgeschlossen.

2.) Netzwerkgleichungen: Durch Lösen der Maschengleichung für die Schaltung in Abbildung 6.5a ergibt sich mit der komplexen Wechselstromrechnung unmittelbar

$$\underline{U}_C(\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\underline{I}(\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\frac{1}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}\underline{U}(\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}\underline{U}(\omega) \tag{6.15}$$

für den frequenzabhängigen Zeiger der Kondensatorspannung $\underline{U}_C$.

3.) Rücktransformation: Mit der Gleichung (6.9) für die inverse Fourier-Transformation und der Amplitudendichte für die Anregung ergibt sich

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{U}_C(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}\underline{U}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}\frac{2\hat{u}}{\omega}\left(\sin\frac{\omega\delta T}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\left(t-\frac{\delta T}{2}\right)}\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{6.16}$$

woraus nach Lösen des Integrals folgender Zeitverlauf für $u_C(t)$ resultiert

$$u_C(t) = \hat{u}\cdot\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} & \text{für} \quad 0 \le t \le \delta T \\ \mathrm{e}^{-\frac{t-\delta T}{RC}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} & \text{für} \quad \delta T < t \end{cases} \tag{6.17}$$

Der zeitliche Verlauf ist in Abbildung 6.6 dargestellt.

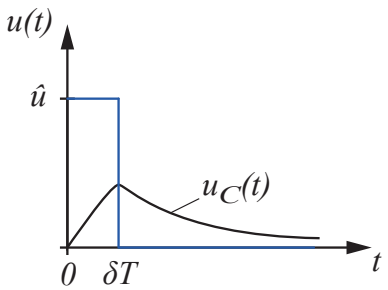


Figure 6.6: Resultierender zeitlicher Verlauf der Kondensatorspannung für das RC-Netzwerk in Abbildung 6.5a mit pulsförmiger Anregung.

6.1.2 Laplace-Transformation

Die Anwendbarkeit der Fourier-Transformation hängt wegen $|\underline{U}(\omega)| = |\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t| \le \int_{-\infty}^{\infty}|u(t)|\mathrm{d}t$ direkt von der Existenz des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty}|u(t)|\mathrm{d}t$ bzw. der Integrale der Transformationsgleichung ab. Diese Integrale konvergieren z.T. bereits für relativ einfache Anregungen wie z.B. der Spannung $u(t)$ in Abbildung 6.7 nicht mehr. Zum Vermeiden der Konvergenzprobleme werden daher die folgenden Modifikationen eingeführt:

1. Die Zeitfunktion $f(t)$ wird mit $\mathrm{e}^{-\sigma t}$ (mit $\sigma > 0$) multipliziert ($\rightarrow$ Abklingende Exponentialfunktion für $\sigma > 0$)

2. Die Zeitfunktion wird für $t < 0$ gleich null gesetzt, d.h. es wird angenommen, dass $f(t) = 0$ für $t < 0$.

Die zweite Massnahme entspricht der realen Situation, dass jeder technische Vorgang zu einem bestimmten Zeitpunkt (hier $t = 0$) startet und vorher keine Anregung vorhanden ist bzw. die vorausgehende Anregung wird über Anfangszustände bei $t = 0$ berücksichtigt. Weiterhin ist die zweite Massnahme erforderlich, da $\mathrm{e}^{-\sigma t}$ mit $\sigma > 0$ für $t \to -\infty$ gegen unendlich strebt.

Durch die zwei Modifikationen wird die bisherige Zeitfunktion wie folgt abgeändert

$$f(t) \Rightarrow \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t} & \text{für} \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{6.18}$$

Für die modifizierte Zeitfunktion erhält man ausgehend von Gleichung (6.6) die modifizierte Spektralfunktion

$$\underline{S}_\sigma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t \tag{6.19}$$

und die geänderte Rücktransformation

$$f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_\sigma(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \quad \text{für} \quad t \geq 0. \tag{6.20}$$

Die von ω unabhängige Funktion $\mathrm{e}^{-\sigma t}$ auf der linken Seite der Gleichung kann auch unter das Integral gezogen bzw. auf die rechte Seite gebracht werden, so dass folgende Gleichung resultiert ($t > 0$)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_\sigma(\omega)\mathrm{e}^{\sigma t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_\sigma(\omega)\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}\omega \tag{6.21}$$

Der Ausdruck $\sigma + \mathrm{j}\omega$ wird dabei als komplexe Frequenz s bezeichnet. Mit

$$s = \sigma + \mathrm{j}\omega, \quad \mathrm{d}\omega = \frac{1}{\mathrm{j}}\mathrm{d}s \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \omega_0 = +\infty \\ \omega_0 = -\infty \end{matrix} \quad \to \quad \begin{matrix} s = \sigma + \mathrm{j}\infty \\ s = \sigma - \mathrm{j}\infty \end{matrix} \tag{6.22}$$

folgt die **Laplace-Transformation**

$$\underline{S}(s) = \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{6.23}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} \underline{S}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \tag{6.24}$$

Der Übergang von $f(t)$ zur (komplexen) Spektralfunktion $\underline{S}(s)$ wird dabei als Laplace-Transformation (analog zur Fourier-Transformation) bezeichnet und häufig mit folgendem Symbol abgekürzt: $\underline{S}(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}$. Für die Rücktransformation ist die Schreibweise $f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{\underline{S}(s)\}$ üblich. Dabei wird $f(t)$ als Originalfunktion und $\underline{S}(s)$ als Bildfunktion bezeichnet.

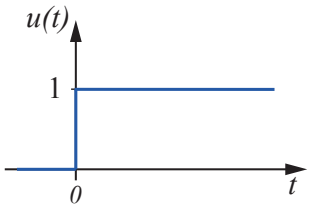


Figure 6.7: Beispiel einer sprungförmigen Anregung $u(t)$, für die keine Fourier-Transformierte existiert, da das Integral nicht konvergiert.

Der Wertebereich von σ, in dem die Konvergenz des Integrals gegeben ist, wird als Konvergenzbereich bezeichnet.

Die Laplace-Transformation ist eine Weiterentwicklung der Fourier-Transformation, die beide für den Fall $s = \mathrm{j}\omega$ ($\sigma = 0$) ineinander übergehen (falls $f(t) = 0$ für $t < 0$ gilt). Wie im Weiteren noch erläutert wird, ändert sich die Vorgehensweise bei der Berechnung von Netzwerken mit Hilfe der Laplace-Transformation anstatt der Fourier-Transformation prinzipiell nicht, ausser dass bei der Laplace-Transformation noch die Anfangsbedingungen berücksichtigt werden (müssen).

Beispiel Laplace-Transformation

Im Folgenden wird die Laplace-Transformierte der Spannung

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ U & \text{für} \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{6.25}$$

berechnet. Mit den Gleichungen für die Laplace-Transformation folgt unmittelbar

$$\mathbf{L}\{U\} = U \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \frac{-U}{s} \mathrm{e}^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{U}{s} = \underline{U}(s) \tag{6.26}$$

für die Spannung im Bildbereich. Die Spannung im Bildbereich ist in Abbildung 6.8 dargestellt. Der Konvergenzbereich ist dabei $\sigma > 0$.

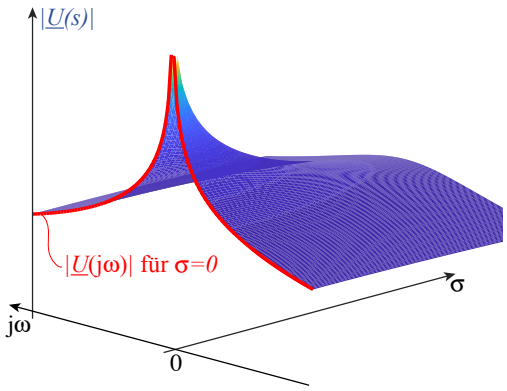


Figure 6.8: Darstellung des Betrags der Laplace-Transformierten $\underline{U}(s)$

Netzwerksberechnung

Bei der Berechnung von Netzwerken mit Hilfe der Laplace-Transformation geht man normalerweise wie folgt vor:

1.) Transformation: Alle Quellengrössen werden (meist mit Korrespondenztabellen) in den Bildbereich (Frequenzbereich) transformiert.

2.) Netzwerksgleichungen: Aufstellen des Gleichungssystems auf Basis der Kirchhoffschen Gesetze.

$$\sum_{\text{Maschen}} \underline{U}(s) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\text{Knoten}} \underline{I}(s) = 0 \tag{6.27}$$

Die Netzwerksgleichungen werden wie bisher (z.B. mit dem Maschenstromverfahren) aufgestellt. Dabei müssen die Anfangswerte der Kondensatorspannungen und der Ströme durch Induktivitäten berücksichtigt werden (mehr dazu im Beispiel im Abschnitt 6.1.5), da die Laplace-Transformation nur den Zeitbereich $t \geq 0$ berücksichtigt und die Vorgeschichte des Netzwerks über die Anfangswerte in die Berechnung einfliessen muss. Die Anfangswerte werden dabei durch Gleichspannungs- bzw. Gleichstromquellen (siehe Abbildung 6.9) beschrieben, die zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet werden. Hinweis: Die Laplace-Transformierte der Sprungfunktion bzw. der "Einschaltfunktion" zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $1/s$.

Im Gegensatz zur Laplace-Transformation wird bei der komplexen Wechselstromrechnung/ Fourier-Transformation ein quasi-stationärer (eingeschwungener) Zustand betrachtet. Im Sonderfall eines energielosen Anfangszustandes sind die Anfangswerte bei der Laplace-Transformation gleich null und die Berechnung läuft wie bei der komplexen Wechselstromrechnung ab. Allerdings sind die Transformationsvorschriften zwischen Zeit- und Frequenzbereich unterschiedlich.

3.) Rücktransformation: Die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt typischerweise entweder über Korrespondenztabellen, den Faltungssatz oder eine Partialbruchzerlegung.

Alternativ zum obigen Verfahren kann auch die Differentialgleichung des Netzwerkes auf Basis der Kirchhoffschen Gesetzte im Zeitbereich aufgestellt und die Differentialgleichung mit Hilfe des Differentiationssatzes im noch folgenden Abschnitt 6.1.3 in den Bildbereich transformiert werden.

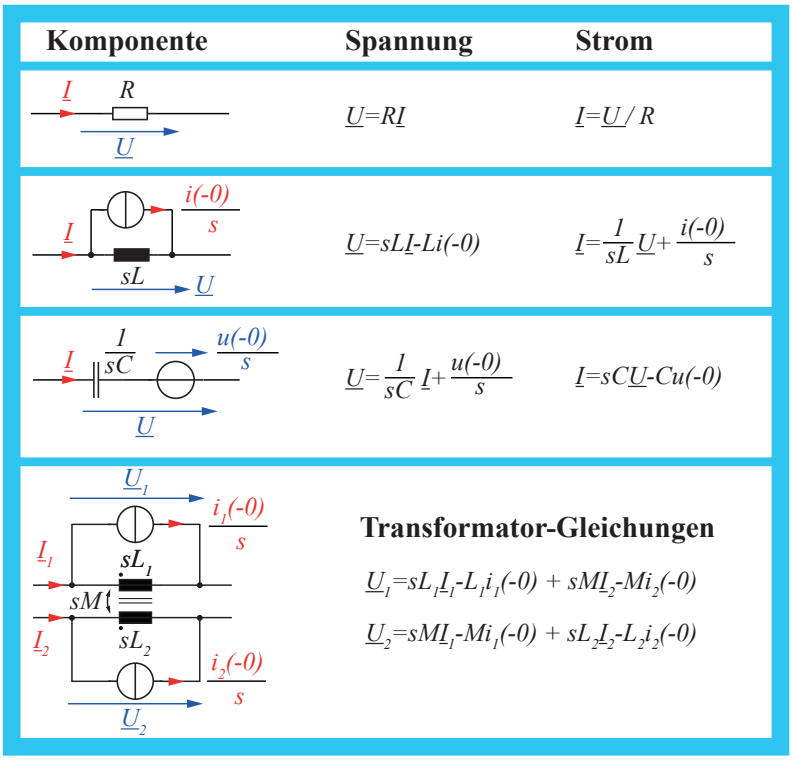


Figure 6.9: Strom-/Spannungsbeziehungen der verschiedenen Komponenten im Laplace-Bereich inklusive der jeweiligen Anfangsbedingungen, die mit Hilfe von Gleichspannungs- bzw. Gleichstromquellen beschrieben werden.

Laplace-Transformierte spezieller Funktionen

Im Folgenden werden die drei oben genannten Berechnungsschritte noch näher betrachtet. Zu Beginn wird die Transformation in den Frequenzbereich anhand von einigen typischen, in der Elektrotechnik häufig vorkommenden Funktionen untersucht. In der Praxis erfolgen die notwendigen Transformationen im Allgemeinen nicht durch Auswerten der Integrale, sondern über sogenannte Korrespondenztabellen und Hilfssätze, die im Anschluss daran vorgestellt werden.

▷ Transformation der **Einheitsprungfunktion** $E(t)$ in Abbildung 6.7

$$E(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \quad\quad\; t < 0 \end{cases} \tag{6.28}$$

in den Frequenzbereich

$$\mathbf{L}\{E(t)\} = \int_0^\infty E(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{-s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{-s}(0-1) = \frac{1}{s} \tag{6.29}$$

Der Konvergenzbereich ist $\sigma > 0$. Bei der Rücktransformation liefert das Integral bei $t = 0$ den arithmetischen Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwertes.

▷ Transformation der **Exponentialfunktion**

$$u(t) = \begin{cases} U\mathrm{e}^{at} & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad t < 0 \end{cases} \tag{6.30}$$

in den Frequenzbereich

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\{U\mathrm{e}^{at}\} &= U\int_0^\infty \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = U\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{-U}{s-a}\mathrm{e}^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty = \frac{U}{s-a} \end{aligned} \tag{6.31}$$

Der Konvergenzbereich ist $\sigma - a > 0$.

▷ Transformation einer **Sinusfunktion**

$$u(t) = \begin{cases} \hat{u}\sin(\omega_0 t) & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad t < 0 \end{cases} \tag{6.32}$$

mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} &= \cos(\omega t) + \mathrm{j}\sin(\omega t) \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} &= \cos(\omega t) - \mathrm{j}\sin(\omega t) \\ \Rightarrow \sin(\omega t) &= \frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}) \end{aligned}$$

in den Frequenzbereich

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\{\hat{u}\sin(\omega_0 t)\} &= \hat{u}\int_0^\infty \sin(\omega_0 t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \frac{\hat{u}}{2\mathrm{j}}\int_0^\infty (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t})\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\hat{u}}{2\mathrm{j}}\int_0^\infty (\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}\omega_0)t} - \mathrm{e}^{-(s+\mathrm{j}\omega_0)t})\mathrm{d}t = \frac{\hat{u}}{2\mathrm{j}}\left[\frac{-\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}\omega_0)t}}{s-\mathrm{j}\omega_0} + \frac{\mathrm{e}^{-(s+\mathrm{j}\omega_0)t}}{s+\mathrm{j}\omega_0}\right]\Bigg|_0^\infty \\ &= \frac{\hat{u}}{2\mathrm{j}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega_0} - \frac{1}{s+\mathrm{j}\omega_0}\right) = \frac{\hat{u}}{2\mathrm{j}}\frac{2\mathrm{j}\omega_0}{s^2+\omega_0^2} = \hat{u}\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \end{aligned} \tag{6.33}$$

▷ Transformation der **Kosinusfunktion**

$$u(t) = \begin{cases} \hat{u}\cos(\omega_0 t) & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad t < 0 \end{cases} \tag{6.34}$$

mit Hilfe von

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}) \tag{6.35}$$

in den Frequenzbereich

$$\mathbf{L}\{\hat{u}\cos(\omega_0 t)\} = \frac{\hat{u}}{2}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega_0} + \frac{1}{s+\mathrm{j}\omega_0}\right) = \frac{\hat{u}}{2}\frac{2s}{s^2+\omega_0^2} = \hat{u}\frac{s}{s^2+\omega_0^2} \tag{6.36}$$

▷ Transformation der **Potenzfunktion**

$$u(t) = \begin{cases} Ut^n & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \quad\quad\quad t < 0 \end{cases} \tag{6.37}$$

in den Frequenzbereich, wobei n eine natürliche Zahl ist. Das Transformations-Integral kann mit Hilfe der partiellen Integration berechnet werden

$$\begin{aligned} (pq)' &= pq' + p'q \\ pq' &= (pq)' - p'q \\ \int pq'dx &= pq - \int p'qdx \end{aligned}$$

Dies resultiert in

$$\mathbf{L}\{u(t)\} = \mathbf{L}\{Ut^n\} = U\int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{6.38}$$

$$= U\left[-t^n\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]\Bigg|_0^\infty + U\frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = 0 + \frac{n}{s}\mathbf{L}\{Ut^{n-1}\} \tag{6.39}$$

und führt auf folgende Rekursionsformel

$$\mathbf{L}\{Ut^n\} = \frac{n}{s}\mathbf{L}\{Ut^{n-1}\} = \frac{n(n-1)}{s^2}\mathbf{L}\{Ut^{n-2}\} = \ldots = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{s^n}\mathbf{L}\{Ut^0\} \tag{6.40}$$

Daraus resultiert das Endergebnis für die Laplace-Transformierte

$$\mathbf{L}\{Ut^n\} = \frac{n!}{s^n}\mathbf{L}\{U\} = U\frac{n!}{s^{n+1}} \tag{6.41}$$

6.1.3 Hilfssätze

Die Laplace-Transformation wird häufig durch Hilfssätze wesentlich erleichtert, welche nachfolgend abgeleitet und an Beispielen demonstriert werden.

▷ **Lineare Überlagerung**

Zu Beginn wird die folgende lineare Überlagerung von Funktionen betrachtet.

$$u(t) = a_1u_1(t) + a_2u_2(t) + \ldots + a_nu_n(t) \tag{6.42}$$

Für die lineare Überlagerung von Originalfunktionen ergibt sich für die Laplace-Transformierte aus

$$\mathbf{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty [a_1u_1(t) + a_2u_2(t) + \ldots + a_nu_n(t)]\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= a_1\int_0^\infty u_1(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + a_2\int_0^\infty u_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + \ldots a_n\int_0^\infty u_n(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{6.43}$$

Folglich kann die Bildfunktion der Überlagerung im Zeitbereich durch eine Überlagerung der Bildfunktionen der einzelnen Summanden berechnet werden, d.h. es gilt

$$\mathbf{L}\{a_1u_1(t) + a_2u_2(t) + \ldots + a_nu_n(t)\} =$$

$$a_1\mathbf{L}\{u_1(t)\} + a_2\mathbf{L}\{u_2(t)\} + \ldots + a_n\mathbf{L}\{u_n(t)\} \tag{6.44}$$

▷ **Verschiebungssatz**

Als nächstes wird die Auswirkung einer zeitlichen Verschiebung untersucht – siehe Abbildung 6.10.

Bei Verschiebung der Zeitfunktion nach rechts geht $u(t)$ in die neue Funktion $u(\xi)$ mit $\xi = (t - t_0)$ über ($\xi > 0$).

$$u(\xi) = \begin{cases} u(t-t_0) & \text{für} \quad t \geq t_0, \xi \geq 0 \\ 0 & \quad\quad\quad t < t_0, \xi < 0 \end{cases} \tag{6.45}$$

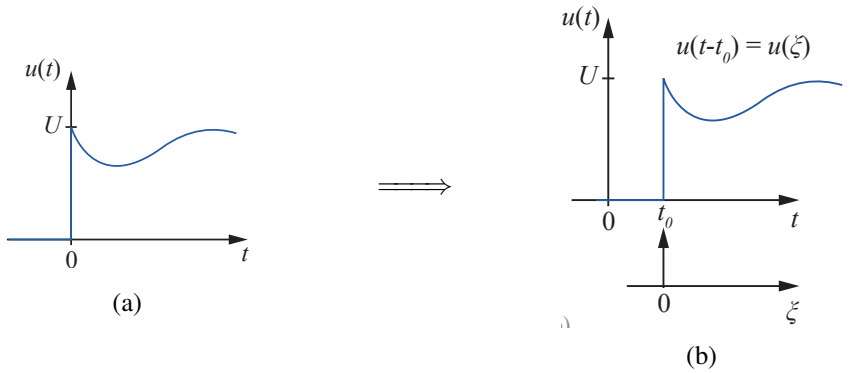


Figure 6.10: a) Originaler Spannungsverlauf im Zeitbereicht. b) Zeitlich verschobener Spannungsverlauf mit einer Verschiebung um t_0 und die dazugehörige verschobene Zeitachse ξ.

Mit den folgenden Substitutionen

$$\xi = t - t_0,\ \mathrm{d}\xi = \mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \xi_{oG} &= t_{oG} - t_0 = \infty - t_0 = \infty \\ \xi_{uG} &= t_{uG} - t_0 = t_0 - t_0 = 0 \end{aligned} \tag{6.46}$$

resultiert das Transformations-Integral

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\{u(t-t_0)\} &= \int_{t_0}^{\infty} u(t-t_0)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} u(\xi)\mathrm{e}^{-s(\xi+t_0)}\mathrm{d}\xi \\ &= \mathrm{e}^{-st_0}\int_0^{\infty} u(\xi)\mathrm{e}^{-s\xi}\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-st_0}\mathbf{L}\{u(\xi)\} \end{aligned} \tag{6.47}$$

Der Zeitverlauf von $u(\xi)$ ist für $\xi > 0$ und der verschobenen Zeitachse in Abbildung 6.11b identisch zu $u(t)$ für $t > t_0$, daher gilt für $t_0 \geq 0$, $u(t-t_0) = 0$ und $t < t_0$

$$\mathbf{L}\{u(t-t_0)\} = \mathrm{e}^{-st_0}\mathbf{L}\{u(t)\} \tag{6.48}$$

Dies ist der **Verschiebungssatz**, wobei durch die Verschiebung bei der Laplace-Transformation sowohl die Phase als auch die Amplitude der Bildfunktion verändert wird.

Beispiel

Als Beispiel für die Überlagerung und den Verschiebungssatz wird der Rechteckimpuls in Abbildung 6.11a transformiert, der sich durch eine Überlagerung von 2 zeitlich verschobenen Sprungfunktionen darstellen lässt – siehe Abbildung 6.11b.

Die Laplace-Transformierte des Rechteckimpulses folgt mit der linearen Überlagerung und dem Verschiebungssatz

$$\mathbf{L}\{u(t)\} = \mathbf{L}\{u_1(t)\} + \mathbf{L}\{u_2(t)\} = \frac{U}{s} - \mathrm{e}^{-s\delta T}\frac{U}{s} = \frac{U}{s}\left(1 - \mathrm{e}^{-s\delta T}\right) \tag{6.49}$$

▷ **Dämpfungssatz**

Gegeben sei eine Zeitfunktion $u(t)$ mit bekannter Bildfunktion $\mathbf{L}\{u(t)\}$. Gesucht ist die Auswirkung auf die Bildfunktion, wenn die Originalfunktion $u(t)$ mit e^{-at} multipliziert wird. Die Multiplikation mit e^{-at} bewirkt für reelle $a > 0$ ein Abklingen der Originalfunktion mit zunehmender Zeit. Aus dem Transformations-Integral folgt

$$\mathbf{L}\left\{u(t)\mathrm{e}^{-at}\right\} = \int_0^\infty u(t)\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty u(t)\mathrm{e}^{-(s+a)t}\mathrm{d}t = \underline{U}(s+a) \tag{6.50}$$

Damit folgt allgemein der Dämpfungssatz

$$\boxed{\mathbf{L}\left\{u(t)\mathrm{e}^{-at}\right\} = \underline{U}(s+a)} \tag{6.51}$$

d.h. die Bildfunktion der mit e^{-at} multiplizierten Zeitfunktion ergibt sich aus der Bildfunktion für die ursprüngliche Zeitfunktion indem der Parameter s durch $s+a$ ersetzt wird. Somit bewirkt eine Dämpfung der Originalfunktion mit e^{-at} also eine Verschiebung der Bildfunktion. Umgekehrt besagt der Verschiebungssatz, dass eine Verschiebung der Originalfunktion um t_0 eine Dämpfung der Bildfunktion mit e^{-st_0} bewirkt.

Beispiel

Als Beispiel für den Dämpfungssatz wird die abklingende Kosinusschwingung in Abbildung 6.12 betrachtet.

$$u(t) = \begin{cases} U\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega_0 t) & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad t < 0 \end{cases} \tag{6.52}$$

Für diese ist die Laplace-Transformierte gleich

$$\mathbf{L}\left\{U\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega_0 t)\right\} = U\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2} \tag{6.53}$$

▷ **Ähnlichkeitssatz**

Wird die Zeitvariable t mit einem reellen Faktor $a > 0$ multipliziert, so wird die ursprüngliche Funktion zeitlich gestaucht oder gedehnt. Mit der Substitution $at = \xi$ und $\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\mathrm{d}\xi$ folgt für die Bildfunktion der veränderten Zeitfunktion

$$\mathbf{L}\{u(at)\} = \int_0^\infty u(at)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^\infty u(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}\xi}\mathrm{d}\xi \tag{6.54}$$

Damit ergibt sich der allgemeine Ähnlichkeitssatz

$$\boxed{\mathbf{L}\{u(at)\} = \frac{1}{a}\underline{U}\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{a}\mathbf{L}\left\{u\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = \underline{U}(as)} \tag{6.55}$$

Figure 6.11: a) Beispiel für die Anwendung des Verschiebungssatzes. Der Pulse in a) kann durch die Überlagerung der beiden Pulse in b) dargestellt werden, wobei $u_2(t)$ aus einer zeitlichen Verschiebung und Invertierung von $u_1(t)$ hervorgeht.

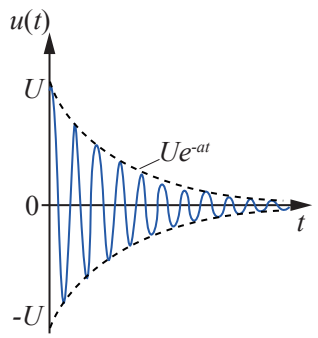


Figure 6.12: a) Beispiel für die Anwendung des Dämpfungssatzes.

Das heisst die Bildfunktion für die um den Faktor a gedehnten/gestauchten Zeitfunktion $u(t)$ ergibt sich aus der Bildfunktion für die ursprüngliche Zeitfunktion durch Division durch den Faktor a und Ersatz von s durch s/a.

Beispiel

Als Beispiel für den Ähnlichkeitssatz wird Laplace-Transformiert der Kosinusschwingung mit n-facher Frequenz in Abbildung 6.13a betrachtet.

$$u(t) = \begin{cases} U\cos(n\omega_0 t) & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad t < 0 \end{cases} \tag{6.56}$$

Für diese ist die Laplace-Transformierte gleich

$$\mathbf{L}\{U\cos(n\omega_0 t)\} = \frac{U}{n}\frac{s/n}{(s/n)^2+\omega_0^2} = U\frac{s}{s^2+n^2\omega_0^2} \tag{6.57}$$

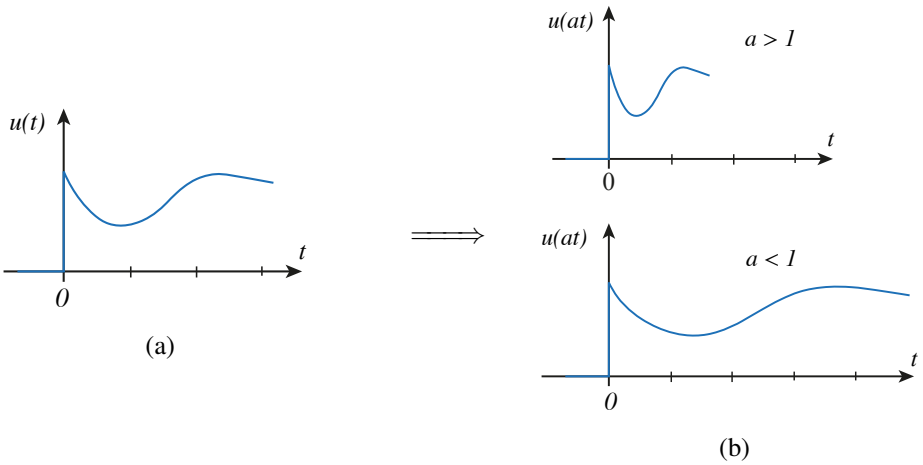


Figure 6.13: a) Ursprünglicher Spannungsverlauf geht in b) in den gestauchten (oben) und in den gedehnten (unten) Spannungsverlauf über. Die Bildfunktion wird mit Hilfe des Ähnlichkeitssatzes ermittelt.

▷ **Periodizität** von Signalen

Bei einer periodischen Spannung entspricht der Spannungsverlauf der n-ten Periode der um $(n-1)T$ verschobenen Signalform der ersten Periode – siehe Abbildung 6.14a. Damit ergibt sich eine Beschreibung des periodischen Signals durch eine Überlagerung von zeitverschobenen Einzelimpulsen der ersten Periode. Mit dieser Darstellungsform des Signals resultiert mit dem Ver-

schiebungssatz die folgende unendliche Reihe für die Laplace-Transformierte.

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\{u(t)\} &= \int_0^\infty u(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \left[1+\mathrm{e}^{-sT}+\mathrm{e}^{-s2T}+\mathrm{e}^{-3sT}+\ldots\right]\int_0^T u(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{6.58}$$

Fasst man die unendlichen Reihe zusammen, so erhält man

$$\boxed{\mathbf{L}\{u(t)\} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T u(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t} \tag{6.59}$$

Folglich genügt also die Berechnung der Laplace-Transformierten des Zeitsignals der ersten Periode, um die Transformierte für das Gesamtsignal zu ermitteln.

Beispiel

Als Beispiel wird die Laplace-Transformierte der Funktion in Abbildung 6.14b berechnet.

$$\mathbf{L}\{u(t)\} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\frac{U}{s}\left(1-\mathrm{e}^{-s\delta T}\right) = \frac{U}{s}\frac{1-\mathrm{e}^{-s\delta T}}{1-\mathrm{e}^{-sT}} \tag{6.60}$$

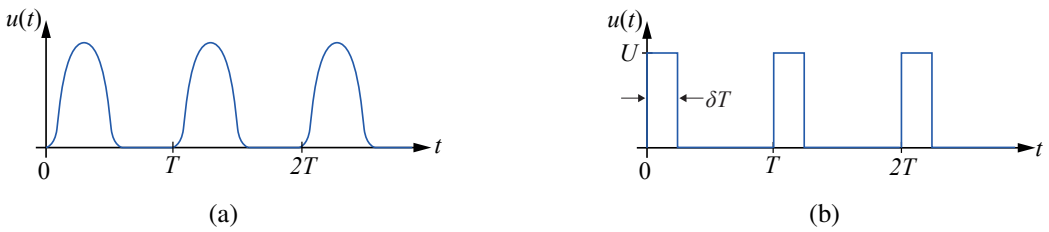


Figure 6.14: a) Beispiel für ein periodisches Signal mit der Periode T. b) Beispiel für die Anwendung des Konzepts der "Periodizität" zur Berechnung der Laplace-Transformierten.

▷ **Faltungssatz**

Vor allem für die inverse Laplace-Transformation ist der Faltungssatz hilfreich. Dieser kann angewendet werden, wenn sich die Bildfunktion als ein Produkt von zwei Bildfunktionen

$$\underline{U}(s) = \underline{U}_1(s)\cdot\underline{U}_2(s) = \mathbf{L}\{u_1(t)\}\cdot\mathbf{L}\{u_2(t)\} \tag{6.61}$$

darstellen lässt. In diesem Fall ergibt sich die Originalfunktion $u(t)$ nicht aus dem Produkt der beiden einzelnen Originalfunktionen, sondern diese wird mit dem Faltungsintegral

$$u(t) = \mathbf{L}^{-1}\{\underline{U}_1(s)\cdot\underline{U}_2(s)\} = \int_0^t u_1(\tau)u_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t u_1(t-\tau)u_2(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6.62}$$

ermittelt, welches z.B. mittels der partiellen Integration berechnet werden kann.

Zur besonderen Kennzeichnung des Faltungsintegrals wird häufig das Symbol $*$ verwendet, d.h. die obige Gleichung wird wie folgt dargestellt.

$$u(t) = u_1(t) * u_2(t) = \int_0^t u_1(\tau)u_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t u_1(t-\tau)u_2(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6.63}$$

Beispiel

Als Beispiel für die Anwendung des Faltungssatzes wird der Tiefpass 2. Ordnung in Abbildung 6.15, der durch den Zeitverlauf

$$u_1(t) = \begin{cases} 0\,\mathrm{V} & t < 0\,\mathrm{s} \\ U \cdot t & t \geq 0\,\mathrm{s} \end{cases} \tag{6.64}$$

angeregt wird. Gesucht ist die Spannung $u_2(t)$.

Die Laplace-Transformierte Übertragungsfunktion des Tiefpasses ist

$$\underline{G}(s) = \left(\frac{1}{1+sRC}\right) \tag{6.65}$$

und die Laplace-Transformierte der Eingangsspannung ist

$$\underline{U}_1(s) = \frac{U}{s^2} \tag{6.66}$$

Somit ist die Ausgangsspannung gleich $\underline{U}_2(s) = \underline{G}(s)\underline{U}_1(s)$, d.h. diese ist als Produkt von zwei Funktionen im Bildbereich gegeben. Der zeitliche Verlauf ergibt sich mit dem Faltungssatz aus

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \mathbf{L}^{-1}\{\underline{U}_1(s)\cdot\underline{G}(s)\} = \int_0^t u_1(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t g(\tau)u_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= U\left(\int_0^t \frac{1}{RC}e^{-\tau/RC}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ &= U\left(-e^{-\tau/RC}t\Big|_0^t + e^{-\tau/RC}\tau\Big|_0^t - \int_0^t e^{-\tau/RC}\mathrm{d}\tau\right) \\ &= U\left(-e^{-\tau/RC}t\Big|_0^t + e^{-\tau/RC}\tau\Big|_0^t + RCe^{-\tau/RC}\Big|_0^t\right) \\ &= U\left(-e^{-t/RC}t + t + e^{-t/RC}t + RCe^{-t/RC} - RC\right) \\ &= U\left(t + RCe^{-t/RC} - RC\right) \end{aligned} \tag{6.67}$$

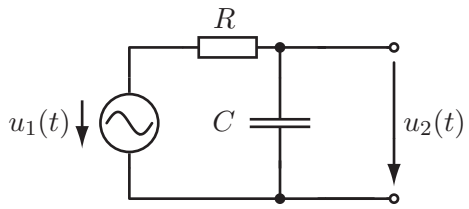


Figure 6.15: Schaltbild eines Tiefpasses 2. Ordnung als Beispiel für die Anwendung des Faltungssatzes.

▷ **Differentiationssatz**

Die Laplace-Transformierte einer nach der Zeit abgeleiteten Funktion ergibt sich mit der partiellen Integration, d.h. $\int_a^b p'(x)\,q(x)\,\mathrm{d}x = p(x)\,q(x)|_a^b - \int_a^b p(x)\,q'(x)\,\mathrm{d}x$, aus

$$\mathbf{L}\left\{u'(t)\right\} = \mathbf{L}\left\{\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \left[u(t)\mathrm{e}^{-st}\right]\Big|_0^\infty - (-)\,s\underbrace{\int_0^\infty u(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t}_{\underline{U}(s)} \tag{6.68}$$

Unter der Voraussetzung, dass $\lim\limits_{t\to\infty}[u(t)\mathrm{e}^{-st}] = 0$ gilt und der rechtsseitige Grenzwert $u(t\to 0) = u(+0)$ existiert, folgt aus obiger Gleichung der allgemeine Differentiationssatz. Dabei geht die

Ableitung im Zeitbereich in eine Multiplikation mit der komplexen Frequenz s im Frequenzbereich über, was ein wesentlicher Vorteil der Laplace-Transformation bei der Netzwerkanalyse darstellt.

$$\mathbf{L}\left\{u'(t)\right\} = s\mathbf{L}\left\{u(t)\right\} - u(+0) = s\underline{U}(s) - u(+0) \tag{6.69}$$

Der Wert $u(+0)$ erfasst die Anfangsbedingungen, z.B. eines Spulenstromes oder einer Kondensatorspannung (siehe Abschnitt 6.1.2).

Für die zweite Ableitung folgt analog

$$\mathbf{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2}\right\} = \mathbf{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\} = s\mathbf{L}\left\{\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right\} - \left.\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=+0} \tag{6.70}$$

$$\mathbf{L}\left\{u''(t)\right\} = s\left[s\underline{U}(s) - u(+0)\right] - u'(+0) = s^2\underline{U}(s) - su(+0) - u'(+0) \tag{6.71}$$

Unter der Voraussetzung, dass $\lim\limits_{t\to\infty}\left[u(t)\mathrm{e}^{-st}\right] = \lim\limits_{t\to\infty}\left[u'(t)\mathrm{e}^{-st}\right] = \ldots = \lim\limits_{t\to\infty}\left[u^{(n-1)}(t)\mathrm{e}^{-st}\right] = 0$ gilt und die rechtsseitigen Grenzwerte $u(+0), u'(+0), \ldots u(+0)^{(n-1)}$ existieren, kann der Differentiationssatz für die n-te Ableitung wie folgt verallgemeinert werden

$$\mathbf{L}\left\{u^{(n)}(t)\right\} = s^n\underline{U}(s) - s^{n-1}u(+0) - s^{n-2}u'(+0) - \ldots - su^{(n-2)}(+0) - u^{(n-1)}(+0) \tag{6.72}$$

▷ **Integrationssatz**

Abschliessend wird noch die Laplace-Transformierte für das Integral einer Zeitfunktion abgeleitet. Diese folgt wiederum auf Basis der partiellen Integration $\int_a^b p'(x)\,q(x)\,\mathrm{d}x = p(x)\,q(x)|_a^b - \int_a^b p(x)\,q'(x)\,\mathrm{d}x$ $\Rightarrow \int_a^b p(x)\,q'(x)\mathrm{d}x = p(x)\,q(x)|_a^b - \int_a^b p'(x)\,q(x)\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} &= \int_0^\infty \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau\right]}_{p}\underbrace{\mathrm{e}^{-st}}_{q'}\mathrm{d}t \\ &= \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau}_{p}\underbrace{\frac{-1}{s}\mathrm{e}^{-st}}_{q}\right]\Bigg|_0^\infty - \left(\frac{-1}{s}\right)\int_0^\infty u(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.73}$$

Unter der Voraussetzung, dass $\lim\limits_{t\to\infty}\left[\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau\cdot\mathrm{e}^{-st}\right] = 0$ gilt und der Grenzwertes $\lim\limits_{t\to 0}\left[\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$ existiert, folgt mit den Definitionsgleichungen der Laplace-Transformation der allgemeine Integrationssatz

$$\mathbf{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} u(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{s}\mathbf{L}\left\{u(t)\right\} \tag{6.74}$$

Verschwindet das über den Zeitbereich $-\infty < t \leq 0$ gebildete Integral der Zeitfunktion ($u(t) = 0$ für $t < 0$), so gilt vereinfachend

$$\mathbf{L}\left\{\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathbf{L}\left\{u(t)\right\} \tag{6.75}$$

Folglich bedeutet eine Integration im Zeitbereich eine Division durch s im Bildbereich. Für eine n-fache Integration ergibt sich analog eine Division durch s^n im Bildbereich.

6.1.4 Strom-/Spannungsbeziehung im Bildbereich

Bevor nun Netzwerke mittels der Laplace-Transformation analysiert werden, werden im Folgenden noch die Strom-/Spannungsbeziehungen für Kondensatoren und Induktivitäten mit dem Differentiations- bzw. dem Integrationssatz vom Zeit- in den Bildbereich transformiert, um die Beschreibung der Anfangsbedingungen im Bildbereich abzuleiten und die Zusammenhänge zu verdeutlichen.

Für die Kondensatorspannung ergibt sich allgemein im Zeitbereich der Zusammenhang

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{-0} i(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{C}\int_{-0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau = \underbrace{u_C(-0)\cdot E(t)}_{\text{Anfangswert bei } t=-0} + \underbrace{\frac{1}{C}\int_{-0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau}_{\text{ungeladener Kondensator}} \tag{6.76}$$

Dabei wird das Geschehen vor dem Zeitpunkt $t = 0$ im Anfangswert $u_C(-0)$ der Kondensatorspannung zusammengefasst, die aufgrund der Stetigkeit der Kondensatorspannung gleich dem Wert unmittelbar nach dem Schaltvorgang $u_C(+0)$ ist. Für die Zeit $t \geq 0$ folgt die bekannte Strom-Spannungsbeziehung des Kondensators. Der letzte Term mit dem Integral in der Gleichung beschreibt das Verhalten des ungeladenen Kondensators und die Spannungsquelle für den Anfangswert wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aufgrund der Sprungfunktion "eingeschaltet" und beschreibt damit für $t \geq 0$ den Wert von u_C zum Einschaltzeitpunkt. Aus der Gleichung resultiert das Ersatzschaltbild (ESB) in Abbildung 6.16b. Dieses ESB stimmt mit der physikalischen Realität überein, da die Anfangsspannung bei $t = -0$ messbar ist.

Wird der Kondensator zum Zeitpunkt $t = -0$ an die Spannung $u_C(t)E(t)$ geschaltet, so fliesst der Strom

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u_C(t)\cdot E(t)\right) = C\left(\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(-0)\underbrace{\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}}_{\delta(t)}\right) \tag{6.77}$$

durch den Kondensator.

Dabei resultiert die Ableitung der Einheitsprungfunktion $E(t)$ in einem (unendlich kurzen) Dirac-Impuls der Stärke $Q_0 = Cu_C(-0)$ im Schaltzeitpunkt. Der Strompuls lädt dabei den Kondensator in unendlich kurzer Zeit auf den Anfangswert auf, weshalb das Modell physikalisch nicht korrekt (umsetzbar) ist, aber als Rechenmodell für die Analyse eines Einschwingvorganges genutzt werden kann. Zu dem Puls wird der schon bekannte Strom addiert, der durch die zeitveränderliche Spannung resultiert. Aus der Stromgleichung resultiert das ESB in Abbildung 6.16c.

Transformiert man die abgeleiteten Gleichungen (6.76) und (6.77) für die Strom-/Spannungsbeziehung

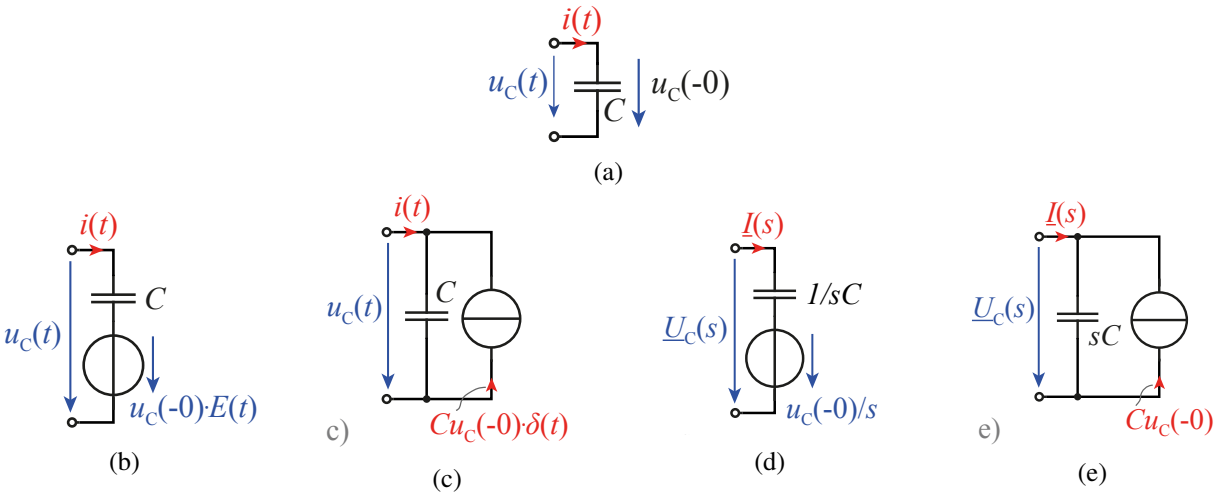


Figure 6.16: a) Allgemeiner Kondensator mit dem Anfangswert $u_C(-0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$. b) Ersatzschaltbild des Kondensators in a) für den Zeitbereich $t \leq 0$ resultierend aus Gleichung (6.76). c) Ersatzschaltbild des Kondensators für $t \leq 0$ basierend auf der Gleichung (6.77). d) Ersatzschaltbild in b) Transformiert in den Bildbereich. e) Ersatzschaltbild in c) Transformiert in den Bildbereich.

des Kondensators in den Bildbereich, so ergeben sich die Zusammenhänge

$$u_C(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{U}_C(s) = \frac{u_C(-0)}{s} + \frac{\underline{I}(s)}{sC} \tag{6.78}$$

$$i_C(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{I}_C(s) = sC\underline{U}_C(s) - Cu_C(-0)\cdot 1 \tag{6.79}$$

Die in den Bildbereich transformierten Netzwerke sind in Abbildung 6.16d bzw. 6.16e dargestellt. Für den Fall eines zum Zeitpunkt $t = 0$ ungeladenen Kondensators können diese zu einem "gewöhnlichen" Kondensator vereinfacht werden, d.h. die Quellen entfallen.

Für den Induktivitätsstrom ergibt sich allgemein der Zusammenhang

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{-0} u(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{L}\int_{-0}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau = \underbrace{i_L(-0)\cdot E(t)}_{\text{Anfangswert bei } t=-0} + \underbrace{\frac{1}{L}\int_{-0}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau}_{\text{stromlose Induktivität}} \tag{6.80}$$

im Zeitbereich.

Dabei wird das Geschehen vor dem Zeitpunkt $t = 0$ im Anfangswert $i_L(-0)$ des Induktivitätsstromes zusammengefasst und für die Zeit $t \geq 0$ folgt die bekannte Strom-Spannungsbeziehung der Induktivität. Der letzte Term mit dem Integral in der Gleichung beschreibt das Verhalten der stromlosen Induktivität und die Stromquelle für den Anfangswert wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aufgrund der Sprungfunktion "eingeschaltet" und beschreibt damit für $t \geq 0$ den Wert von i_L zum Einschaltzeitpunkt. Aus der Gleichung resultiert das ESB in Abbildung 6.17b. Dieses stimmt mit der physikalischen Realität überein, da der Anfangsstrom bei $t = -0$ messbar ist.

Wird zum Zeitpunkt $t = -0$ der Strom $i_L(t)E(t)$ durch die Induktivität eingeschaltet, so folgt

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(i_L(t)\cdot E(t)\right) = L\left(\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(-0)\underbrace{\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}}_{\delta(t)}\right) \tag{6.81}$$

für die Spannung über der Induktivität.

Dabei resultiert die Ableitung der Einheitsprungfunktion $E(t)$ in einem (unendlich kurzen) Dirac-Impuls der Stärke $Li_L(-0)$ im Schaltzeitpunkt. Der Spannungspuls erhöht dabei den Strom durch die Induktivität in unendlich kurzer Zeit auf den Anfangswert, weshalb das Modell physikalisch nicht korrekt (umsetzbar) ist, aber als Rechenmodell für die Analyse eines Einschwingvorganges genutzt werden kann. Zu dem Puls wird die schon bekannte Spannung addiert, die durch den zeitveränderlichen Strom resultiert. Aus der Spannungsgleichung resultiert das ESB in Abbildung 6.17c.

Transformiert man die abgeleiteten Gleichungen (6.80) und (6.81) für die Strom-/Spannungsbeziehung der Induktivität in den Bildbereich, so ergibt sich

$$i_L(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{I}_L(s) = \frac{i_L(-0)}{s} + \frac{\underline{U}_L(s)}{sL} \tag{6.82}$$

$$u_L(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{U}_L(s) = sL\cdot\underline{I}_L(s) - L\cdot i_L(-0) \tag{6.83}$$

Die in den Bildbereich transformierten Netzwerke sind in den Abbildungen 6.17d bzw. 6.17e dargestellt. Für den Fall einer zum Zeitpunkt $t = 0$ stromlosen Induktivität können diese zu einer "gewöhnlichen" Induktivität vereinfacht werden, d.h. die Quellen für die Anfangszustände entfallen.

Zusammenfassung

Die oben abgeleiteten Zusammenhänge für die Strom-/Spannungsbeziehungen im Zeitbereich ($t \geq 0$) und im Bildbereich der Laplace-Transformation inklusive der Anfangsbedingungen werden im Folgenden

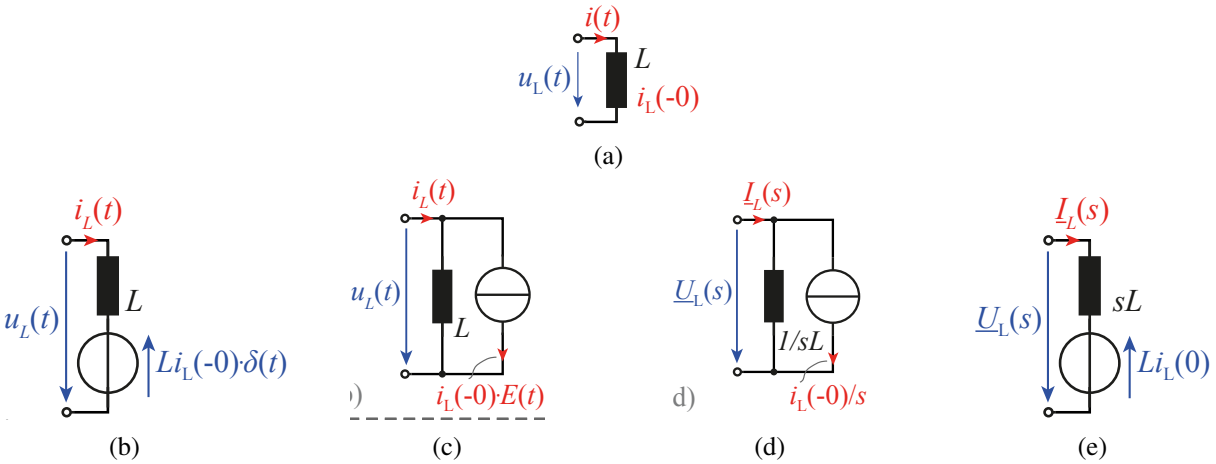


Figure 6.17: a) Allgemeine Induktivität mit dem Anfangswert $i_L(-0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$. b) Ersatzschaltbild der Induktivität in a) für den Zeitbereich $t \leq 0$ resultierend aus Gleichung (6.80). c) Ersatzschaltbild der Induktivität für $t \leq 0$ basierend auf der Gleichung (6.81). d) Ersatzschaltbild in b) Transformiert in den Bildbereich. e) Ersatzschaltbild in c) Transformiert in den Bildbereich.

noch einmal zusammengefasst.

Widerstand

$$u_R(t) = Ri_R(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{U}_R(s) = R\underline{I}_R(s) \tag{6.84}$$

Kondensator

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{I}_C(s) = sC \cdot \underline{U}_C(s) - C \cdot u_C(-0) \tag{6.85}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau + u_C(-0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{U}_C(s) = \frac{\underline{I}_C(s)}{sC} + \frac{u_C(-0)}{s} \tag{6.86}$$

Induktivität

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{U}_L(s) = sL \cdot \underline{I}_L(s) - L \cdot i_L(-0) \tag{6.87}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-0}^{t} u_L(\tau)\mathrm{d}\tau + i_L(-0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{I}_L(s) = \frac{\underline{U}_L(s)}{sL} + \frac{i_L(-0)}{s} \tag{6.88}$$

Allgemeine Impedanz bzw. Admittanz im Bildbereich

$$\underline{Z}(s) = \frac{\underline{U}(s)}{\underline{I}(s)} \quad \underline{Y}(s) = \frac{\underline{I}(s)}{\underline{U}(s)} \tag{6.89}$$

6.1.5 Netzwerksanalyse mit Laplace-Transformation

Als Beispiel für die Berechnung eines Netzwerks mit Hilfe der Laplace-Transformation wird das *RC*-Netzwerk in Abbildung 6.18a betrachtet. Dieses wird zum Zeitpunkt $t = 0$ erstmalig an die Gleichspannung U angeschlossen (bzw. die Spannung wird eingeschaltet) und hat daher die Anfangsbedingung $u_C(0) = 0$. Gesucht ist dabei die Spannung $u_C(t)$.

Im ersten Schritt werden die anregenden Grössen in den Frequenzbereich transformiert. Für die Gleichspannungsquelle, die zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet wird, folgt $u(t) = UE(t) \rightarrow \underline{U}(s) = \frac{U}{s}$, womit das Netzwerk für den Bildbereich in Abbildung 6.18b resultiert. Dort ist auch die Strom-/Spannungsbeziehung für die Kapazität inklusive der Anfangsbedingung eingetragen. Für die Maschengleichung folgt mit der Strom-/Spannungsbeziehung des Kondensators $\underline{I}_C(s) = sC\underline{U}_C(s) - Cu_C(+0)$ (siehe Abschnitt 6.1.2)

$$\underline{U}(s) = \frac{U}{s} = R\underline{I}(s) + \underline{U}_C(s) = R[sC\underline{U}_C(s) - Cu_C(+0)] + \underline{U}_C(s) \tag{6.90}$$

Mit der Anfangsbedingung $u_C(+0) = u_{C0}$ gilt dann für die Kondensatorspannung im Bildbereich

$$\underline{U}_C(s) = \frac{U}{s(1+sRC)} + \frac{u_{C0}RC}{(1+sRC)} \tag{6.91}$$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt im betrachteten Fall mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung und entsprechenden Korrespondenztabellen. Damit resultiert für die Zeitfunktion (für $t \geq 0$)

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{U}{s(1+sRC)} + \frac{u_{C0}RC}{(1+sRC)}\right\} \\ &= \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{U}{s} - \frac{U}{s+\frac{1}{RC}} + \frac{u_{C0}}{s+\frac{1}{RC}}\right\} = U(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}) + u_{C0}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned} \tag{6.92}$$

Für die Rücktransformation existieren zahlreiche Verfahren, welche die direkte Berechnung der inversen Laplace-Transformierten vermeiden und sich meist auf Korrespondenztabellen stützen. Im Abschnitt 6.1.6 ist die häufig genutzte Partialbruchzerlegung kurz erläutert.

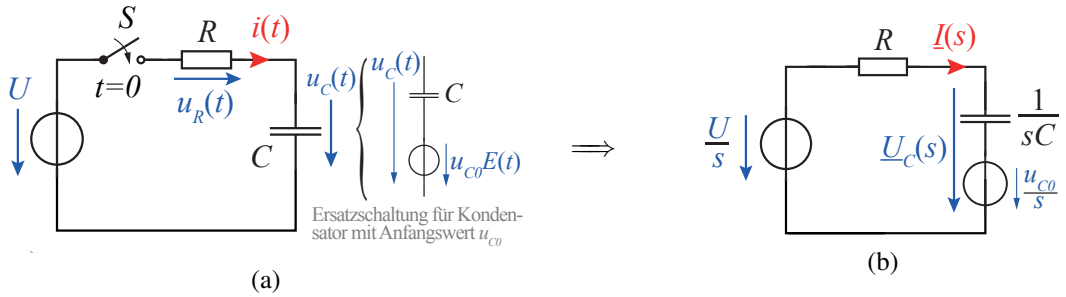


Figure 6.18: a) *RC*-Beispielschaltung für die Anwendung der Laplace-Transformationen. b) Schaltbild der in den Bildbereich transformierte Schaltung aus Bild a).

Als Alternative zu Berechnung der Kondensatorspannung für das *RC*-Netzwerk in Abbildung 6.18a wird hier noch die Variante gezeigt, bei welcher das Differentialgleichungssystem im Zeitbereich aufgestellt und anschliessend in den Bildbereich transformiert wird. Dabei wird als erstes die Maschengleichung bzw. die Differentialgleichung mit Hilfe der Maschengleichung aufgestellt (für $t \geq 0$)

$$u(t) = U = RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) \tag{6.93}$$

Anschliessend wird die Differentialgleichung auf Basis des Differentiationssatzes in Abschnitt 6.1.3 in den Bildbereich transformiert

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\{u(t)\} = \frac{U}{s} &= RC\,\mathbf{L}\left\{\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right\} + \mathbf{L}\{u_C(t)\} \\ &= RC\,[s\underline{U}_C(s) - u_C(+0)] + \underline{U}_C(s) \end{aligned} \tag{6.94}$$

Dabei wird die Gleichspannung, die zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Netzwerk verbunden (bzw. eingeschaltet) wird, durch eine Sprungfunktion beschrieben.
Mit der Anfangsbedingung $u_C(+0) = u_{C0}$ gilt dann für die Kondensatorspannung im Bildbereich

$$\underline{U}_C(s) = \frac{U}{s(1+sRC)} + \frac{u_{C0}RC}{(1+sRC)} \tag{6.95}$$

Die Rücktransformation der Kondensatorspannung liefert wiederum den Zeitverlauf (für $t \geq 0$)

$$u_C(t) = U(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}) + u_{C0}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = U + (u_{C0} - U)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{6.96}$$

Rampenförmige Anregung

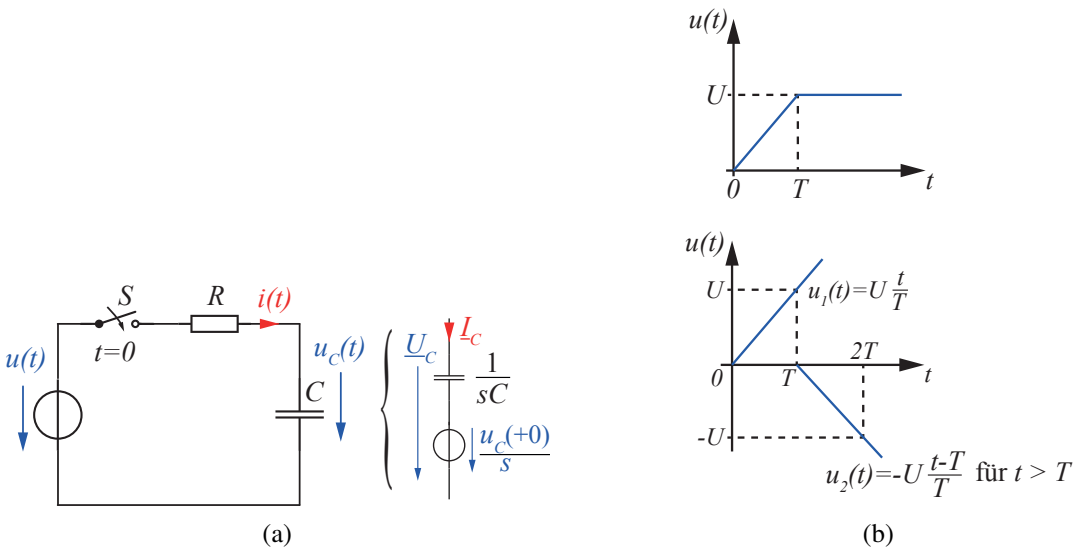


Figure 6.19: a) *RC*-Netzwerk mit der rampenförmigen Spannungsanregung b). Die rampenförmige Anregung kann als Überlagerung von 2 zeitlich versetzten, linear zunehmenden Verläufen dargestellt werden.

Als nächstes soll das *RC*-Netzwerk nicht durch eine Gleichspannungsquelle, sondern durch den Spannungsverlauf in Abbildung 6.19b angeregt werden. Dazu wird in einem ersten Schritt wiederum die Netzwerksgleichung aufgestellt, wobei der Anfangswert der Kondensatorspannung $u_C(+0)$ durch eine Gleichspannungsquelle in Serie zur Kapazität (siehe Abbildung 6.19a) im Abschnitt 6.1.2) berücksichtigt wird. Für die Maschengleichung folgt mit der Strom-/Spannungsbeziehung des Kondensators $\underline{I}_C(s) = sC\underline{U}_C(s) - Cu_C(+0)$

$$\underline{U}(s) = R\underline{I}(s) + \underline{U}_C(s) = R[sC\underline{U}_C(s) - Cu_C(+0)] + \underline{U}_C(s) \tag{6.97}$$

Auflösen nach der gesuchten Grösse $\underline{U}_C(s)$ liefert

$$\underline{U}_C(s) = \frac{\underline{U}(s) + RCu_C(+0)}{1 + sRC} \tag{6.98}$$

Dies ist derselbe Zusammenhang wie in Gleichung (6.95) (bzw. siehe auch (6.91)), nur wurde er dieses Mal nicht über die Differentialgleichung abgeleitet.

Die Laplace-Transformierte $\underline{U}(s)$ der Eingangsspannung $u(t)$ folgt aus der Überlagerung $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ der zwei zeitlich versetzten, linear ansteigenden Spannungsverläufen in Abbildung 6.19b unten. Mit der Überlagerung folgt aus der Korrespondenztabelle in Abbildung 6.23 und dem Verschiebungssatz

$$\begin{aligned}\underline{U}(s) &= \mathbf{L}\{u_1(t)\} + \mathbf{L}\{u_2(t)\} \\ &= \mathbf{L}\{u_1(t)\} - \mathbf{L}\{u_1(t-T)\} \\ &= \frac{U}{T}\frac{1}{s^2}(1 - e^{-sT})\end{aligned} \tag{6.99}$$

für die Laplace-Transformierte der Eingangsspannung.

Mit dem Anfangswert $u_C(+0) = u_{C0}$ folgt durch Einsetzen von Gleichung (6.99) in Gleichung (6.98)

$$\underline{U}_C(s) = \frac{U}{T}\frac{1}{(1+sRC)s^2}\left(1 - e^{-sT}\right) + \frac{RC\,u_{C0}}{1+sRC} \tag{6.100}$$

für die Kondensatorspannung im Laplace- bzw. im Bildbereich.

Die Rücktransformation der einzelnen Terme von $\underline{U}_C(s)$ liefert wiederum mit Hilfe des Verschiebungssatzes die Lösung (für $t \geq 0$)

$$\frac{u_C(t)}{U} = \frac{u_{C0}}{U}e^{-\frac{t}{RC}} + \begin{cases} \frac{t}{T} - \frac{RC}{T}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) & \text{für } 0 \leq t < T \\ 1 - \frac{RC}{T}\left(e^{-\frac{t-T}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}}\right) & \text{für } T \leq t \end{cases} \tag{6.101}$$

für die Kondensatorspannung im Zeitbereich.

In Abbildung 6.20 ist beispielhaft der Verlauf der Kondensatorspannung für verschiedene Zeitkonstanten $\tau = RC$ und dem Anfangswert $u_{C0} = U/2$ dargestellt. Dabei erkennt man, dass mit grösser werdender Zeitkonstante τ der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung dem Verlauf der Eingangsspannung nur relativ langsam folgt. Dies heisst, dass hochfrequente, rasche Änderungen der Eingangsspannung unterdrückt/gedämpft werden, so wie man dies von einem RC-Tiefpass prinzipiell erwartet.

Hinweis: Formal folgt aus der Rücktransformation der gesuchten Kondensatorspannung $u_C(t)$ vom Laplace- in den Zeit-Bereich, dass $u_C(t) = 0$ für $t < 0$ ist. Dies würde z.B. im oben betrachteten Netzwerk einen Sprung von $u_C(t)$ bei $t = 0$ von 0 auf u_{C0} zur Folge haben, was physikalisch nicht möglich ist. Bei der Laplace-Transformation wird dieser Sprung durch die geschaltete Gleichspannungsquelle u_{C0} hervorgerufen, so dass die eigentliche Spannung über dem Kondensator $u'_C(t)$ in Abbildung **??** nicht springt, da ja die Vorgeschichte in der geschalteten Gleichspannungsquelle zusammengefasst ist. In der Praxis umgeht man dieses Problem, indem man die berechnete Lösung für $u_C(t)$ nur für Zeiten $t \geq 0$ nutzt. Der Wert von $u_C(t)$ für $t < 0$ ist ja meist sowieso nicht bekannt, sondern nur der "aufintegrierte" Wert zum Zeitpunkt $t = 0$.

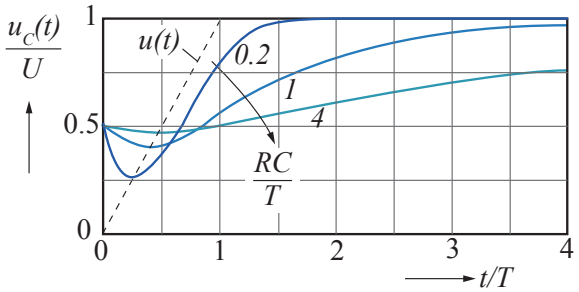


Figure 6.20: Resultierende Verläufe der Kondensatorspannung für unterschiedliche Werte der Zeitkonstante $\tau = RC$ des RC-Netzwerkes.

Beispiel Knotenpotenzialverfahren

Als Beispiel für die Netzwerksberechnung mittels Laplace-Transformation und Knotenpotenzialverfahren werden die Gleichungen für die Schaltung in Abbildung 6.21a aufgestellt. Dabei wird angenommen, dass die beiden Gleichspannungsquellen U_{q1} und U_{q2} zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet werden. In Abbildung 6.21b ist das Netzwerk mit den Quellen für die Anfangswerte u_{C10}, u_{C20} und i_{L0} dargestellt. Zudem wurden die Spannungsquellen U_{q1} und U_{q2} mit Serienwiderstand für die Analyse mit dem Knotenpotenzialverfahren in entsprechende Stromquellen umgewandelt.

Für die beiden Knoten $K1$ und $K2$ mit den Knotenspannungen $\underline{U}_1(s)$ und $\underline{U}_2(s)$ ergeben sich aus dem

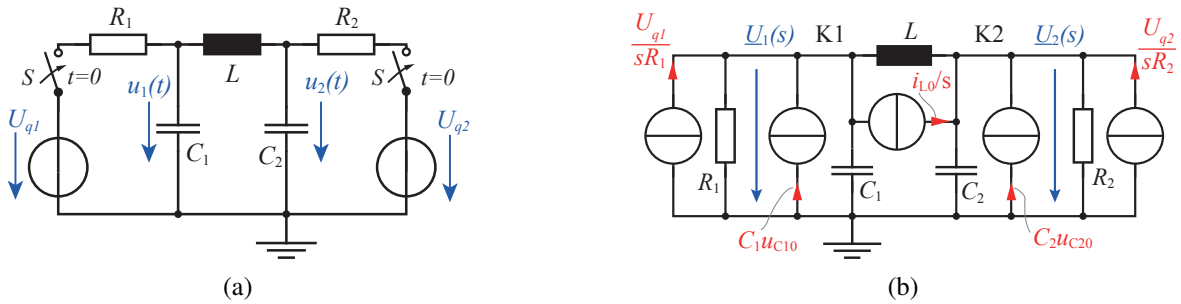


Figure 6.21: a) Beispielnetzwerk für die Anwendung der Laplace-Transformation in Kombination mit dem Knotenpotenzialverfahren. b) In den Bildbereich transformiertes Netzwerk, wobei die beiden Spannungsquellen mit Serienwiderstand in entsprechende Stromquellen umgewandelt wurden.

Netzwerk in Abbildung 6.21b die Knotengleichungen

$$\begin{aligned}\text{Knoten K1:}\quad 0 &= \left(\frac{1}{R_1}+sC_1+\frac{1}{sL}\right)\underline{U}_1(s)-\frac{1}{sL}\underline{U}_2(s)\\ &\quad -\frac{U_{q1}}{sR_1}-C_1u_{C10}+\frac{i_{L0}}{s} \qquad (6.102)\\ \text{Knoten K2:}\quad 0 &= \left(\frac{1}{R_2}+sC_2+\frac{1}{sL}\right)\underline{U}_2(s)-\frac{1}{sL}\underline{U}_1(s)\\ &\quad -\frac{U_{q2}}{sR_2}-C_2u_{C20}-\frac{i_{L0}}{s} \qquad (6.103)\end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen können nach $\underline{U}_1(s)$ und $\underline{U}_2(s)$ aufgelöst werden, womit die gesuchten Grössen im Bildbereich vorliegen. Um die Rechnungen zu vereinfachen, wird im Folgenden angenommen, dass alle Widerstände gleich R und alle Kapazitäten gleich C sind.

Durch Auflösen von (6.102) nach $\underline{U}_1(s)$ und Einsetzen des Ergebnisses in (6.103) kann zum Beispiel die Gleichung für die Spannung $\underline{U}_2(s)$ ermittelt werden

$$\begin{aligned}\underline{U}_2(s) &= \frac{s^3C^2LR^2u_{C20}+s^2(CLR^2i_{L0}+CLRu_{C20})+s(CR^2(u_{C10}+u_{C20})+LRi_{L0}+LU_{q2})+R(U_{q1}+U_{q2})}{s(C^2LR^2s^3+2CLRs^2+2CR^2s+Ls+2R)}\\ &= \frac{RU_{q1}+(CLRs^2+Ls+R)U_{q2}+(CLR^2s^2+LRs)i_{L0}+CR^2u_{C10}+(C^2LR^2s^3+CLRs^2+CR^2s)u_{C20}}{s(C^2LR^2s^3+2CLRs^2+2CR^2s+Ls+2R)}\end{aligned} \qquad (6.104)$$

Um die Spannung in den Zeitbereich zu transformieren, wird zuerst eine Partialbruchzerlegung der echt gebrochen rationalen Funktion durchgeführt und dann die einzelnen Terme mittels Korrespondenztabelle transformiert.

Neben der offensichtlichen Nullstelle des Nenners $s_1 = 0$, ist auch $s_2 = -1/RC$ eine Nullstelle, die hier als gegeben angenommen wird. Mit diesen beiden Nullstellen kann der Nenner in der Form $2\cdot s\cdot(RCs+1)\cdot(RLCs^2+Ls+2R)$ geschrieben werden. Damit ergeben sich die zwei weiteren, konjugiert komplexen Nullstellen $s_{3,4} = (L\pm \mathrm{j}\sqrt{8R^2LC-L^2})/(2RLC)$. Mit den Nullstellen folgt die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}\underline{U}_2(s) = 0.5\Bigg(&\left(\frac{1}{s}-\frac{RC}{RCs+1}-\frac{L}{RLCs^2+Ls+2R}\right)U_{q1}+\left(\frac{1}{s}-\frac{RC}{RCs+1}+\frac{L}{RLCs^2+Ls+2R}\right)U_{q2}\\ &+\left(\frac{RC}{RCs+1}-\frac{RLC}{RLCs^2+Ls+2R}\right)u_{C10}+\left(\frac{RC}{RCs+1}+\frac{RLC}{RLCs^2+Ls+2R}t\right)u_{C20}\\ &+\frac{RL}{RLCs^2+Ls+2R}\cdot i_{L0}\Bigg)\end{aligned} \qquad (6.105)$$

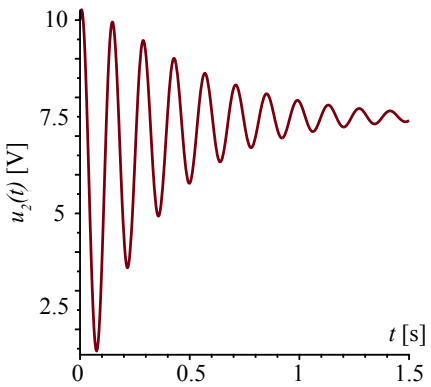


Figure 6.22: Zeitlicher Verlauf der Knotenspannung $u_2(t)$ als Wirkung aller Quellen.

Wie der Partialbruchzerlegung zu entnehmen ist, ergibt sich die Spannung $\underline{U}_2(s)$ als Summe, d.h. lineare Überlagerung, der Wirkungen der einzelnen Quellen inklusive der Quellen für die Anfangsbedingungen. Um die Rücktransformation in den Zeitbereich übersichtlicher zu gestalten, werden die Wirkungen der Quellen nacheinander betrachtet, d.h. es werden alle Quellen bis auf eine unwirksam gemacht und nur für diese Quelle erfolgt die Transformation mittels Korrespondenztabelle.

Zum Beispiel ergibt sich für die Rücktransformation der Wirkung der Quelle $\underline{U}_{q1}(s)$ auf die Knotenspannung $\underline{U}_2(s)$

$$\underline{U}_2^{U_{q1}}(s) = 0.5 \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{RC}{RCs+1} - \frac{L}{RLCs^2+Ls+2R} \right) \cdot U_{q1} \tag{6.106}$$

$$\begin{aligned} u_2^{U_{q1}}(t) &= 0.5 \cdot \left(1 - e^{-t/RC} - \frac{L}{s_4 - s_3} \left(e^{-s_3 t} - e^{-s_4 t} \right) \right) \cdot E(t) \cdot U_{q1} \\ &= 0.5 \cdot \left(1 - e^{-t/RC} + \frac{2RL^2C}{\sqrt{8CLR^2 - L^2}} \sin\left(\frac{8R^2LC - L^2}{2RLC} \right) \cdot e^{-L/2RLC \cdot t} \right) \cdot E(t) \cdot U_{q1} \end{aligned} \tag{6.107}$$

Die Wirkungen der anderen Quellen auf die Knotenspannung $u_2(t)$ können analog berechnet werden. Setzt man in die daraus resultierende Gesamtlösung die folgenden Bauteilwerte: L = 100mH, C = 10mF, R = 20Ω, U_{q1} = 10V, U_{q2} = 5V, u_{C10} = 0V, u_{C20} = 10V und i_{L0} = 1A ein, so ergibt sich insgesamt die folgende Funktion im Zeitbereich

$$u_2(t) = \left(7.5\text{V} - 7.5\text{V}e^{-5t} - 1.960\text{V} \cdot \sin(44.651t) \cdot e^{-2.5t} \right) \tag{6.108}$$

Der allgemeine analytische Ausdruck wird hier nicht dargestellt, da dieser relativ umfangreich ist.

Der Spannungsverlauf für $u_2(t)$ ist in Abbildung 6.22 dargestellt.

6.1.6 Partialbruchzerlegung

Für die Rücktransformation der gesuchten Grösse in den Zeitbereich gibt es verschiedene Möglichkeiten. Neben der Anwendung von Korrespondenztabellen wie z.B. in Abbildung 6.23 spielt häufig die Transformation über eine Partialbruchzerlegung, die im Folgenden erläutert wird, eine wichtige Rolle.

Bei grösseren Netzwerken resultiert häufig eine gebrochen rationale Funktion mit dem Zählerpolynom $\underline{G}(s)$ und dem Nennerpolynom $\underline{N}(s)$ als Lösung für die gesuchte Grösse. Als Beispiel wird hier die Spannung $\underline{U}(s)$ betrachtet, wobei s_k mit $k = 1 \ldots n$ die Nullstellen des Nennerpolynoms bezeichnen.

$$\underline{U}(s) = \frac{\underline{G}(s)}{\underline{N}(s)} = \frac{\underline{G}(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_{n-1})(s-s_n)} \tag{6.109}$$

Hinweis: Vor der Darstellung des Nennerpolynoms $\underline{N}(s)$ als Produkt der Terme $s - s_\nu$ ist es wichtig, dass der Koeffizient bei s^n im Nennerpolynom $\underline{N}(s)$ gleich 1 ist. Dies ergibt sich ja auch unmittelbar aus der rechten Seite von (6.109), wenn alle Klammerausdrücke im Nenner miteinander multipliziert werden, woraus ein Polynom in der Form $1 \cdot s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots$ resultiert.

Bei der folgenden Berechnung wird angenommen, dass der Grad m des Zählerpolynoms kleiner als der Grad n des Nennerpolynoms ist. Ist dies nicht der Fall, so wird das Zählerpolynom durch das Nennerpolynom dividiert und ein Polynom vom Grad $m - n$ abgespaltet. Damit resultiert eine echt gebrochen rationale Funktion mit $m < n$, die nun in den Zeitbereich transformiert werden soll.

Die auftretenden Nullstellen des Nenners bzw. Polstellen der gebrochen rationalen Funktion kann man typischerweise in 3 Kategorien unterteilen:

1. Einfache Nullstelle: Für die einfache Nullstelle s_ν ergibt sich in der Partialbruchzerlegung pro einfacher Nullstelle der Summand $\frac{A_\nu}{(s-s_\nu)}$.

Die Rücktransformation des Terms ergibt mit der Funktion $E(t)$ für den Einheitssprung folgende Zeitfunktion

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{A_\nu}{(s-s_\nu)}\right\} = A_\nu \mathrm{e}^{s_\nu t} E(t) \tag{6.110}$$

2. m-fache Nullstelle: Für eine m-fache Nullstelle s_ν im Nennerpolynom ergibt sich in der Partialbruchzerlegung die Summanden

$$\frac{A_1}{(s-s_\nu)} + \frac{A_2}{(s-s_\nu)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(s-s_\nu)^m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{(s-s_\nu)^k} \tag{6.111}$$

Die Rücktransformation der Funktion $\frac{1}{(s-s_\nu)^i}$ ergibt die Zeitfunktion

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-s_\nu)^i}\right\} = \frac{1}{(i-1)!} t^{i-1} \mathrm{e}^{s_\nu t} E(t) \tag{6.112}$$

Damit folgt für die Zeitfunktion der mehrfachen Nullstelle ein Polynom mit dem Grad $m-1$, das mit einer Exponentialfunktion multipliziert wird.

$$\mathrm{e}^{s_\nu t}\left(A_1 + A_2 t + \ldots + \frac{A_m}{(m-1)!} t^{m-1}\right) E(t) \tag{6.113}$$

3. Konjugiert komplexe Nullstelle: Für den Fall $a^2 > b^2$ ergeben sich für $s^2 + 2bs + a^2$ die zwei konjugiert komplexen Nullstellen: $s_\nu = -b + \mathrm{j}\sqrt{a^2 - b^2} = -\alpha + \mathrm{j}\omega_d$ und $s_\nu^* = -\alpha - \mathrm{j}\omega_d$ $(= s_{\nu+1})$. Diese Nullstellen resultieren in den Summanden der Partialbruchzerlegung

$$\frac{A_1 s + A_2}{(s-s_\nu)(s-s_\nu^*)} = \frac{A_1(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2} + \frac{A_2 - A_1\alpha}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2} \tag{6.114}$$

Die Rücktransformation ergibt in diesem Fall

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{A_1 s + A_2}{(s-s_\nu)(s-s_\nu^*)}\right\} = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(a_1 \cos\omega_d t + a_2 \sin\omega_d t\right) E(t) \tag{6.115}$$

mit $a_1 = A_1$ und $a_2 = \frac{A_2 - A_1\alpha}{\omega_d}$. Dies sind gedämpfte Sinus- und Kosinusschwingungen mit der Kreisfrequenz ω_d.

6.1.7 Korrespondenztabelle

In Abbildung 6.23 ist noch eine kurze Tabelle mit den Korrespondenzen zwischen Zeitsignalen und den entsprechenden Bildfunktionen gegeben.

6.1.8 Vergleich Fourier- und Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation ist eine Verallgemeinerung der Fourier-Transformation (FT) für kausale Signale, d.h. Signale, die für $t < 0$ verschwinden. Die Laplace-Transformation geht aus der Fourier-Transformation mit folgendem Zusammenhang hervor

$$\mathbf{L}\{\, f(t) \,\} = \mathbf{FT}\{\, f(t)\mathrm{e}^{\sigma t} E(t) \,\} \tag{6.116}$$

Für kausale Signale stimmen die beiden Transformationen für den Fall $\sigma = 0$, d.h. $s = \mathrm{j}\omega$, überein.

Originalfunktion $u(t)$, $u(t<0) = 0$	Bildfunktion $\underline{U}(s)$	Originalfunktion $u(t)$, $u(t<0) = 0$	Bildfunktion $\underline{U}(s)$
$E(t)$ (Sprungfunktion)	$\frac{1}{s}$	$\left(\frac{1}{2a^3}t^2 e^{-\frac{t}{a}}\right)\cdot E(t)$	$\frac{1}{(as+1)^3}$
$t\cdot E(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\left(1-(1+\frac{t}{a})e^{-\frac{t}{a}}\right)\cdot E(t)$	$\frac{1}{s(as+1)^2}$
$t^n\cdot E(t)$, $(n=1, 2,...)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\left(t-a+ae^{-\frac{t}{a}}\right)\cdot E(t)$	$\frac{1}{s^2(as+1)}$
$e^{-at}\cdot E(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\left(1+\frac{1}{b-a}(ae^{-\frac{t}{a}}-be^{-\frac{t}{b}})\right)\cdot E(t)$	$\frac{1}{s(as+1)(bs+1)}$
$te^{-at}\cdot E(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{1}{a-b}(ae^{-at}-be^{-bt})\cdot E(t)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$t^n e^{-at}\cdot E(t)$, $(n=1, 2,...)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\left(\frac{-a}{(a-b)^2}(e^{-at}-e^{-bt})-\frac{bt}{a-b}e^{-bt}\right)\cdot E(t)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)^2}$
$\frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}\cdot E(t)$	$\frac{1}{as+1}$	$\sin(at)\cdot E(t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\frac{1}{a^2}te^{-\frac{t}{a}}\cdot E(t)$	$\frac{1}{(as+1)^2}$	$\cos(at)\cdot E(t)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\left(1-e^{-\frac{t}{a}}\right)\cdot E(t)$	$\frac{1}{s(as+1)}$	$\sin(at+\varphi)\cdot E(t)$	$\frac{s\sin\varphi+a\cos\varphi}{s^2+a^2}$
$\frac{1}{a-b}(e^{-\frac{t}{a}}-e^{-\frac{t}{b}})\cdot E(t)$	$\frac{1}{(as+1)(bs+1)}$	$\cos(at+\varphi)\cdot E(t)$	$\frac{s\cos\varphi-a\sin\varphi}{s^2+a^2}$

Figure 6.23: Tabelle der Laplace-Transformierten für einige typische Signalformen

Die Fourier-Transformation eines Zeitsignals resultiert im dazugehörigen Spektrum des Signals, welches auch z.B. mit einem Spektrumsanalyser gemessen werden kann. Die Bildfunktion der Laplace-Transformation ist eine reine Rechengrösse, die messtechnisch nicht direkt ermittelt werden kann.

Mit der hier betrachteten Fourier-Transformation werden Vorgänge im Netzwerk für den Zeitbereich $t = -\infty \ldots \infty$ betrachtet, d.h. das Netzwerk ist seit unendlich langer Zeit im Betrieb. Anfangswerte für einen transienten Schaltvorgang können typischerweise nicht berücksichtigt werden, da das Transformations-Integral z.B. für die Einheitsprungfunktion nicht konvergiert.

Bei Anwendung der Fourier-Transformation auf ein Netzwerk erscheint die spektrale Eingangsgrösse $\underline{U}_1(\mathrm{j}\omega)$ bewertet mit dem Frequenzgang $\underline{G}(\mathrm{j}\omega)$ des Netzwerks als spektrale Ausgangsgrösse $\underline{U}_2(\mathrm{j}\omega) = \underline{G}(\mathrm{j}\omega)\underline{U}_1(\mathrm{j}\omega)$. Dabei ist der Frequenzgang $\underline{G}(\mathrm{j}\omega)$ die Fourier-Transformierte der Impulsantwort $g(t)$, d.h. das Ausgangssignal bei Anregung mit einem Dirac-Impulse $\delta(t)$, dessen Fourier-Transformierte gleich 1 ist.

Die Hauptanwendung der Laplace-Transformation ist die Berechnung von linearen Netzwerken mit transienten Vorgängen. Hier bietet die Laplace-Transformation den Vorteil, dass die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und Anfangswerten in eine (komplexe) algebraische Gleichung im Bildbereich transformiert wird, deren Lösung relativ einfach ist. Dabei werden die Anfangswerte durch die Gleichspannungs- bzw. Gleichstromquellen in Serie zu Kondensatoren bzw. parallel zu Induktivitäten automatisch berücksichtigt.

In Abbildung 6.24 sind noch die verschiedenen Analysemethoden von linearen Netzwerken gegenübergestellt.

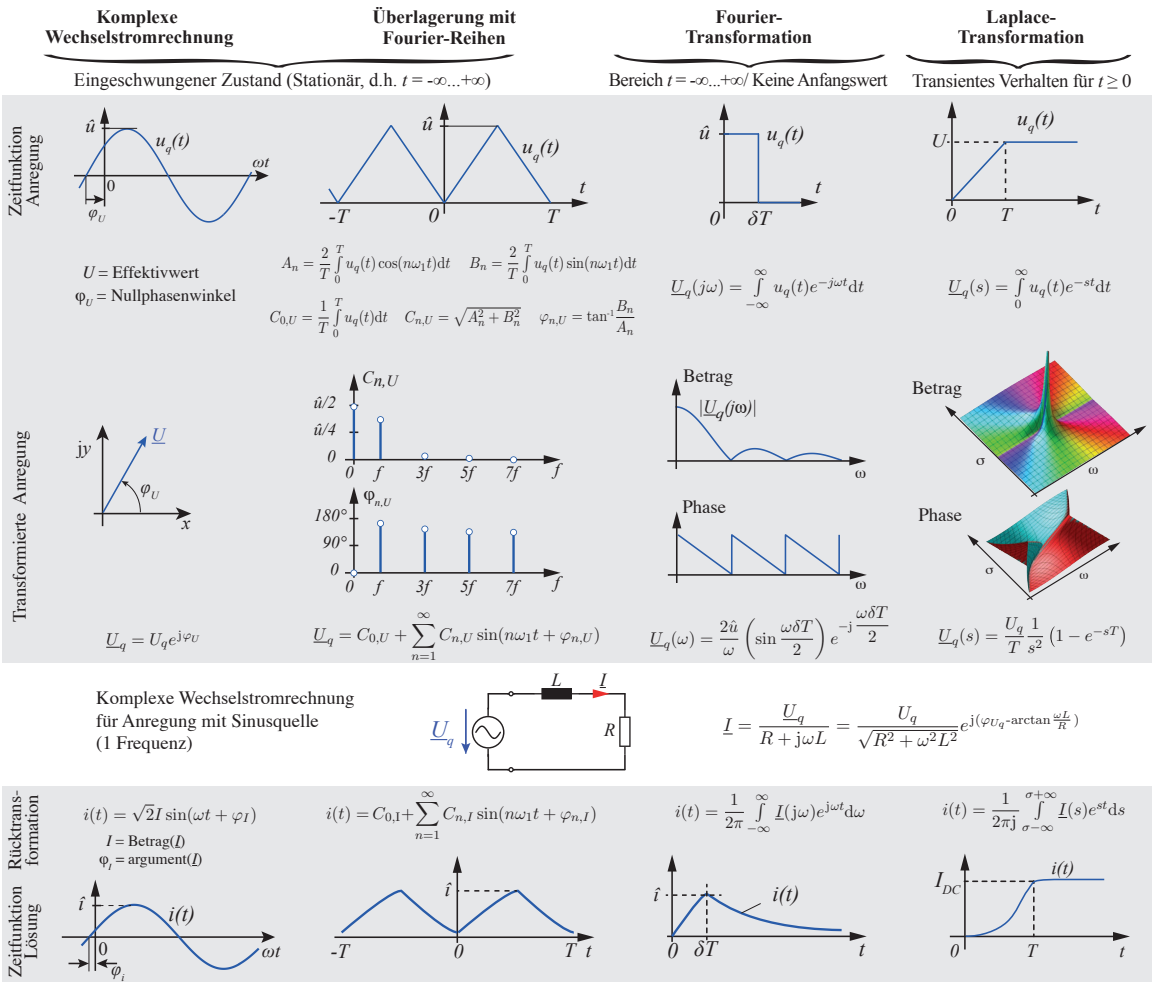


Figure 6.24: Überblick Analysemethoden für lineare Netzwerke.

Chapter 7

Übertragungsfunktion & Bode-Diagramm

7.1 Übertragungsfunktion

Auf der Basis der Fourier-/Laplace-Transformation wird nun das Übertragungsverhalten von allgemeinen Zweitoren untersucht. Dazu wird das Zweitor in Abbildung 7.1a mit dem Eingangstor 1 (Torspannung u_1 / Torstrom i_1) und dem Ausgangstor 2 (Torspannung u_2 / Torstrom i_2) betrachtet. Legt man an den Eingang eine sinusförmige Spannung $\underline{U}_1$ an, so folgt bei einem linearen Netzwerk eine sinusförmige Ausgangsspannung $\underline{U}_2$ mit der gleichen Frequenz.

Das Übertragungsverhalten des Zweitors kann mit der Übertragungsfunktion $\underline{H}(\omega) = \underline{U}_2(\omega)/\underline{U}_1(\omega)$ für stationäre sinusförmige Signale (vgl. z.B. Hochpass aus Abschnitt 1.5.1) bzw. in allgemeiner Form mit $\underline{H}(s) = \underline{U}_2(s)/\underline{U}_1(s)$ beschrieben werden.

Für die Schaltung in Abbildung 7.1b erhält man beispielhaft (Berechnung siehe nächster Abschnitt)

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_C || \underline{Z}_R}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C || \underline{Z}_R} = \frac{1}{1 + s\frac{L}{R} + s^2 LC} \tag{7.1}$$

Die Übertragungsfunktion kann dabei allgemein als rationale Funktion der komplexen Frequenz s beschrieben werden (Komplexe Nullstellen $\underline{q}_\nu$ und Pole $\underline{p}_\mu$)

$$\begin{aligned} \underline{H}(s) &= \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0} \\ &= K \frac{(s-\underline{q}_1)(s-\underline{q}_2)\cdot\ldots\cdot(s-\underline{q}_m)}{(s-\underline{p}_1)(s-\underline{p}_2)\cdot\ldots\cdot(s-\underline{p}_n)} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Dabei sind die Koeffizienten a_μ und b_ν rein reell und die Nullstellen sowie die Pole sind entweder reell oder konjugiert komplex.

Die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt am besten mittels einer Partialbruchzerlegung bzw. anhand von Korrespondenztabellen.

Figure 7.1: a) Allgemeiner Zweitor mit einem Eingangs- und einem Ausgangstor. b) LC-Tiefpass als Beispielschaltung für einen Zweitor.

7.1.1 Beispiel Übertragungsfunktion *LC*-Tiefpass

Im Folgenden wird die Berechnung der Übertragungsfunktion $\underline{H}(s) = \underline{U}_2(s)/\underline{U}_1(s)$ vom Beispiel aus dem vorangegangenen Abschnitt kurz beschrieben. Bei der Berechnung werden die Impedanzen der Bauelemente im Laplace-Bereich verwendet: $\underline{Z}_R = R$, $\underline{Z}_L = sL$ und $\underline{Z}_C = 1/sL$.
Für die Parallelschaltung des Kondensators und des Widerstands folgt unmittelbar

$$\underline{Z}_C || \underline{Z}_R = \frac{\frac{1}{sC}R}{\frac{1}{sC}+R} \tag{7.3}$$

Mit dem Zusammenhang $\underline{U}_2 = \underline{I}_1(Z_C||Z_R)$ folgt die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned}\underline{H}(s) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_C||\underline{Z}_R}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C||\underline{Z}_R} &= \frac{\frac{\frac{1}{sC}R}{\frac{1}{sC}+R}}{sL + \frac{\frac{1}{sC}R}{\frac{1}{sC}+R}} \\ &= \frac{\frac{1}{sC}R}{\frac{L}{C} + sLR + \frac{1}{sC}R} = \frac{R}{sL + s^2LCR + R} \\ &= \frac{1}{1 + s\frac{L}{R} + s^2LC}\end{aligned} \tag{7.4}$$

Für die Übertragungsfunktion im Fourier-Bereich muss s durch $j\omega$ ersetzt werden. Damit folgt

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\frac{L}{R} - \omega^2 LC} \tag{7.5}$$

und die Pole der Übertragungsfunktion sind

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}} \tag{7.6}$$

Für eine sprungförmige Anregung (Abbildung 7.2a) wie z.B.

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{U}_1(s) = \frac{1}{s} \tag{7.7}$$

folgt die Sprungantwort $\underline{G}(s)$ im Bildbereich

$$\underline{G}(s) = \underline{U}_2(s) = \underline{H}(s)\underline{U}_1(s) = \underline{H}(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s\left(1 + s\frac{L}{R} + s^2LC\right)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s\left(s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}\right)} \tag{7.8}$$

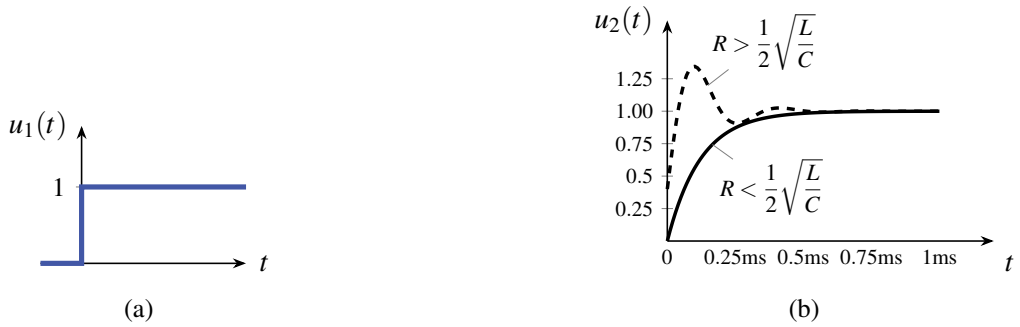


Figure 7.2: a) Sprungförmige Anregung mit einer Amplitude von 1. b) Sprungantwort des *LC*-Tiefpasses für verschiedene Werte der Dämpfung bzw. für verschiedene Widerstandswerte. Die Bauteilwerte sind dabei C = 1 mF und L = 1 mH. Die durchgezogene Linie stellt den Fall für 2 reelle und die strichlierte Linie den Fall von konjugiert komplexen Polen dar.

Im Fall, dass die Nullstellen des Polynoms $s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}$ im Nenner reell und verschieden voneinander sind, muss für die Partialbruchzerlegung der folgende Ansatz gewählt werden.

$$\underline{U}_2(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s\left(s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}\right)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s-p_1} + \frac{r_3}{s-p_2} \tag{7.9}$$

Mit der Rücktransformation folgt für diesen Fall die Sprungantwort im Zeitbereich

$$u_2(t) = E(t)\left(r_1 + r_2 e^{p_1 t} + r_3 e^{p_2 t}\right) \tag{7.10}$$

Verringert man die Dämpfung, indem z.B. der Widerstandswert R erhöht wird, gehen die Nullstellen des Polynoms $s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}$ in eine 2-fache Nullstelle über. In diesem Fall muss folgender Ansatz für die Partialbruchzerlegung gewählt werden.

$$\underline{U}_2(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s\left(s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}\right)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s(s-p_1)^2} = \frac{r_4}{s} + \frac{r_5}{s-p_1} + \frac{r_6}{(s-p_1)^2} \tag{7.11}$$

Nach der Rücktransformation folgt für diesen Fall die Sprungantwort

$$u_2(t) = E(t)\left(r_4 + r_5 e^{p_1 t} + r_6 t e^{p_1 t}\right) \tag{7.12}$$

Wird die Dämpfung weiter verringert, so hat das Polynom $s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}$ die 2 konjugiert komplexen Nullstellen $\underline{p}_1$ und $\underline{p}_1^*$, sobald der Term unter der Wurzel negativ wird, d.h. $(L - 4R^2C) < 0$. In diesem Fall muss folgender Ansatz für die Partialbruchzerlegung gewählt werden.

$$\underline{U}_2(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s\left(s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}\right)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s(s-\underline{p}_1)(s-\underline{p}_1^*)} = \frac{r_7}{s} + \underbrace{\frac{r_8 s + r_9}{(s-\underline{p}_1)(s-\underline{p}_1^*)}}_{\underline{U}_h(s)} \tag{7.13}$$

Den Term $\underline{U}_h(s)$ kann man, wie in Gleichung 6.114 erläutert, umformen und den ungeformten Ausdruck mit Hilfe der Korrespondenztabelle in den Zeitbereich zurücktransformieren, wie im Folgenden gezeigt wird. Die konjugiert komplexen Pole ergeben sich aus

$$\underline{p}_1 = -\underbrace{\frac{1}{2RC}}_{\alpha} + \mathrm{j}\underbrace{\frac{1}{2RC}\sqrt{\frac{4R^2C - L}{L}}}_{\omega_d} = -\alpha + \mathrm{j}\omega_d \tag{7.14}$$

$$\underline{p}_1^* = -\underbrace{\frac{1}{2RC}}_{\alpha} - \mathrm{j}\underbrace{\frac{1}{2RC}\sqrt{\frac{4R^2C - L}{L}}}_{\omega_d} = -\alpha - \mathrm{j}\omega_d \tag{7.15}$$

Mit den Abkürzungen α und ω_d kann $\underline{U}_h(s)$ in Gleichung 7.13 wie folgt geschrieben werden

$$\underline{U}_h(s) = \frac{r_8 s + r_9}{(s-\underline{p}_1)(s-\underline{p}_1^*)} = \frac{r_8(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2} + \frac{r_9 - r_8\alpha}{\omega_d}\frac{\omega_d}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2} \tag{7.16}$$

Setz man Gleichung 7.16 in Gleichung 7.13 ein, so erhält man

$$\underline{U}_2(s) = \frac{r_7}{s} + \frac{r_8 s + r_9}{(s-\underline{p}_1)(s-\underline{p}_1^*)} = \frac{r_7}{s} + \frac{r_8(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2} + \frac{r_9 - r_8\alpha}{\omega_d}\frac{\omega_d}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2} \tag{7.17}$$

Der in Gleichung 7.17 berechnete Ausdruck für $\underline{U}_2(s)$ kann nun mit Hilfe einer Korrespondenztabelle in den Zeitbereich zurücktransformiert werden.

$$u_2(t) = E(t)\left(r_7 + r_8 e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t) + \frac{r_9 - r_8\alpha}{\omega_d} e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)\right) \tag{7.18}$$

Hinweis: Alternativ kann man $\underline{U}_h(s)$ in die 2 folgenden Summanden/Brüche aufspalten

$$\underline{U}_h(s) = \underbrace{\frac{r_8 s}{(s-\underline{p}_1)(s-\underline{p}_1^*)}}_{\underline{U}_h^1(s)} + \underbrace{\frac{r_9}{(s-\underline{p}_1)(s-\underline{p}_1^*)}}_{\underline{U}_h^2(s)} \tag{7.19}$$

und für die beiden Brüche je eine Partialbruchzerlegung durchführen, d.h. man behandelt die beiden konjugiert komplexen Nullstellen wie zwei einfache Nullstellen und verwendet die Ansätze für (reelle) einfache Nullstellen. Die beiden Summanden $\underline{U}_h^1(s)$ und $\underline{U}_h^2(s)$ können wie folgt aufgespaltet/zerlegt werden.

$$\underline{U}_h^1(s) = \frac{r_8 s}{(s-\underline{p}_1)(s-\underline{p}_1^*)} = \frac{\alpha_1}{s-\underline{p}_1} + \frac{\alpha_2}{s-\underline{p}_1^*} \tag{7.20}$$

$$\underline{U}_h^2(s) = \frac{r_9}{(s-\underline{p}_1)(s-\underline{p}_1^*)} = \frac{\beta_1}{s-\underline{p}_1} + \frac{\beta_2}{s-\underline{p}_1^*} \tag{7.21}$$

Setzt man diese zerlegten Terme für $\underline{U}_h^1(s)$ und $\underline{U}_h^2(s)$ in Gleichung 7.13 eingesetzt, so ergibt sich

$$\underline{U}_2(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s\left(s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}\right)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s(s-\underline{p}_1)(s-\underline{p}_1^*)} = \frac{r_7}{s} + \frac{\alpha_1+\beta_1}{s-\underline{p}_1} + \frac{\alpha_2+\beta_2}{s-\underline{p}_1^*} \tag{7.22}$$

Damit erhält man im Zeitbereich schliesslich

$$g(t) = u_2(t) = E(t)\left(r_7 + (\alpha_1+\beta_1)e^{\underline{p}_1 t} + (\alpha_2+\beta_2)e^{\underline{p}_1^* t}\right) \tag{7.23}$$

für die Spannung $u_2(t)$ bzw. für die Sprungantwort g(t) im Zeitbereich. Dabei können die Exponentialfunktionen wiederum in eine Sinus- und eine Kosinusfunktion multipliziert mit einer Exponentialfunktion mit reellem Koeffizienten (Dämpfungsfunktion) zerlegt werden, womit prinzipiell dasselbe Ergebnis wie in Gleichung 7.18 folgt.

Im Allgemeinen ergibt sich die Systemantwort, indem die Laplace-Transformierte des Eingangssignals mit der Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$ multipliziert und dann in den Zeitbereich zurücktransformiert wird.

Wie bereits angemerkt, kann die Übertragungsfunktion allgemein als rationale Funktion von s geschrieben werden

$$\underline{H}(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0} \tag{7.24}$$

$$\text{mit } \underline{U}_2(s) = \underline{H}(s)\underline{U}_1(s) \tag{7.25}$$

Diese Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$ weist im Allgemeinen m Nullstellen und n Polstellen in der komplexen s-Ebene auf, wobei die Nullstellen bzw. Polstellen entweder reell oder konjugiert komplex sind. Die Lage der Polstellen bestimmt dabei die Dynamik und die Stabilität des Systems, wie dies vereinfachend/schematisch in Abbildung 7.3 dargestellt ist.

Ein Pol in der linken s-Halbebene entspricht einer abklingenden Schwingung und ist charakteristisch für Stabilität. Dies ist z.B. für die Sprungantwort der Schaltung von der vorangegangenen Seite für $R < \infty$ gegeben. Für $R \to \infty$ geht die Schaltung an die Stabilitätsgrenze (2 konjugiert komplexe Pole auf der vertikalen Achse), d.h. ist oszillatorisch neutral. Der Winkel α zwischen der reellen Achse und der Verbindungsgerade zwischen Ursprung und einem der konjugiert komplexen Pole ist ein einfaches Mass für die Dämpfung der Schwingung, die zu dem konjugiert komplexen Polpaar gehört. Je kleiner der Winkel α, desto höher ist die Dämpfung.

Ein Pol in der rechten s-Halbebene weist auf eine aufklingende Schwingung und damit auf ein instabiles Systemverhalten hin. Der Fall der Grenzstabilität tritt bei einem oder mehreren Pole(n) genau auf der imaginären Achse auf.

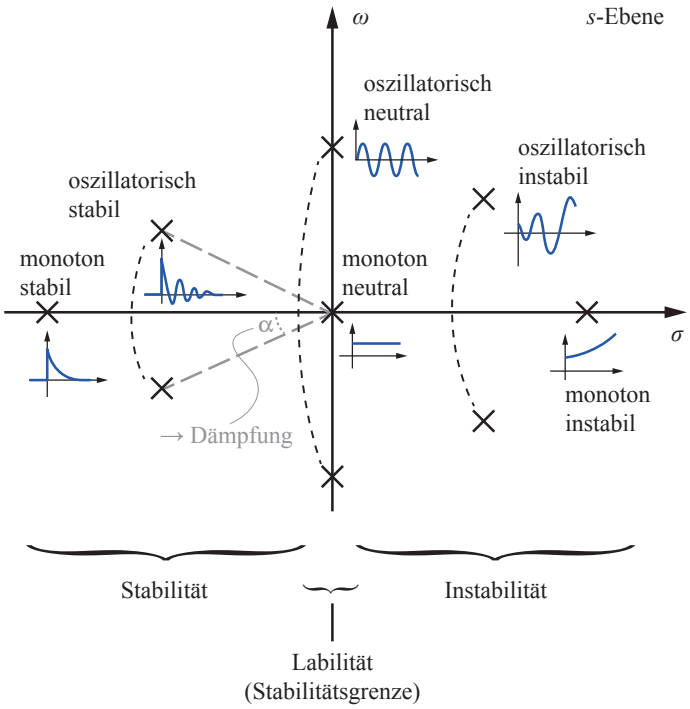


Figure 7.3: Schematische Darstellung/Kategorisierung der Stabilität eines Netzwerkes anhand der Lage der Pole der dazugehörigen Übertragungsfunktion/Sprungantwort im (komplexen) Bildbereich/der s-Ebene.

7.2 Bode-Diagramm

Im Folgenden wird die Darstellung des Übertragungsverhaltens von Vierpolen bzw. Zweitoren (siehe Abbildung 7.4a) mittels Bode-Diagrammen allgemein untersucht. Beispiele für Zweitore sind u.a. die bereits betrachteten frequenzabhängigen Spannungsteiler, d.h. z.B. *RC*/*RL*-Tief- und Hochpassfilter (siehe Abschnitt 1.5). Dort wurde das Übertragungsverhalten von der Ein- zur Ausgangsspannung $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ mit Hilfe von komplexen Übertragungsfunktionen betrachtet.

Die komplexwertige Übertragungsfunktion bzw. der komplexe Frequenzgang kann dabei allgemein durch

$$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{A}(\mathrm{j}\omega)}{\underline{E}(\mathrm{j}\omega)} = \Re\{\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\} + \mathrm{j}\Im\{\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\} = |\underline{F}(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg(\underline{F}(\mathrm{j}\omega))} \tag{7.26}$$

dargestellt werden. Dabei ist $\underline{A}(\mathrm{j}\omega)$ die betrachtete Ausgangsgrösse und $\underline{E}(\mathrm{j}\omega)$ die Eingangsgrösse. Bei dem oben betrachteten *RC*-Tiefpassfilter (siehe Abbildung 7.4b) ist z.B. $\underline{U}_2$ die Ausgangsgrösse und $\underline{U}_1$ die Eingangsgrösse. Dabei wurde angenommen, dass das Zweitor nicht belastet ist, d.h. dass für den Ausgangsstrom $\underline{I}_2 = 0$ gilt. Generell können aber auch z.B. Ströme Ein- oder Ausgangsgrössen darstellen und es können auch Übertragungsfunktionen für belastete Filter mit $\underline{I}_2 \neq 0$ aufgestellt werden.

Die Übertragungsfunktion kann als komplexwertige Funktion des reellen Parameters ω als Ortskurve oder in Form des Betrags-/Amplitudengangs $F(\omega) = |\underline{F}(\mathrm{j}\omega)| = |\underline{A}(\mathrm{j}\omega)|/|\underline{E}(\mathrm{j}\omega)|$ und des Phasengangs $\varphi(\omega) = \arg[\underline{F}(\mathrm{j}\omega)] = \arg[\underline{A}(\mathrm{j}\omega)] - \arg[\underline{E}(\mathrm{j}\omega)]$ dargestellt werden. Letztere Darstellung erfolgt dabei meist in Form eines Bode-Diagramms, bei dem der Betrags- und der Frequenzgang übereinander mit einer gleich skalierten Frequenzachse (x-Achse) dargestellt sind. Die Frequenzachsen sind dabei logarithmisch skaliert, um in allen Frequenzbereichen die gleiche relative Frequenzauflösung zu erreichen. Weiterhin wird der Frequenzgang (d.h. die y-Achse) logarithmisch skaliert und in der dB-Skala: $F(\omega)[dB] = 20\log_{10}(F(\omega))$ aufgetragen, wodurch der Amplitudengang häufig durch Geradenabschnitte angenähert werden kann. Die Schnittpunkte der Näherungsgeraden werden dabei als Eckfrequenzen bezeichnet.

Die Übertragungsfunktion ist stets eine gebrochen rationale Funktion der Variablen ω. Bei Filterschaltungen gibt der Grad des Nennerpolynoms die Ordnung n des Filters an und der Amplitudengang wird in einen (oder mehrere) Durchlass- und einen (oder mehrere) Sperrbereich(e) unterteilt. Im Sperrbereich werden die Amplituden abgeschwächt und der Amplitudengang fällt mit einer Steilheit von $n{\cdot}20$dB pro

Dekade (d.h. pro Änderung der Frequenz um den Faktor 10). Der Durchlass- und der Sperrbereich grenzen bei der Grenzfrequenz ω_g aneinander, bei welcher der Betrag des Frequenzgangs $|\underline{F}(\mathrm{j}\omega)|$ typischerweise um -3dB gegenüber dem Durchlassbereich abgefallen ist.

(a) (b)

Figure 7.4: a) Allgemeiner Zweipol bzw. Vierpol. b) *RC*-Tiefpass als Beispiel für ein Zweitor.

7.2.1 Beispiel: *RC*-Tiefpass 1. Ordnung

Als Beispiel für eine Übertragungsfunktion eines Filters 1. Ordnung wird hier noch einmal der *RC*-Tiefpass in Abbildung 7.4b betrachtet. Für den Tiefpass resultiert das Verhältnis der komplexen Amplituden bzw. die Übertragungsfunktion wiederum aus der Spannungsteilerregel.

$$\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC} = |\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{F_1}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\arctan(\omega RC)} \tag{7.27}$$

Damit ist der Amplitudengang und der Phasengang in Abbildung 7.5 mit der Konstanten $T_1 = RC$ gleich

$$|\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega)| = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi_{F_1} = -\arctan(\omega T_1) \tag{7.28}$$

Die Eck- bzw. Grenzfrequenz f_g ergibt sich für Übertragungsglieder 1. Ordnung allgemein aus dem Zusammenhang $\Re\{\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega_g)\} = \Im\{\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega_g)\}$, d.h. im betrachteten Fall aus $\omega_g T_1 = 1 \rightarrow \omega_g = \frac{1}{T_1}$ bzw. $f_g = {}^1/_{(2\pi T_1)}$. Dabei ist $-{}^1/_{T_1}$ der Pol der Übertragungsfunktion $\underline{F}_1(\underline{s})$ im Laplace-Bereich.
Im Bode-Diagramm kann der Amplituden-/Phasengang durch folgende Geraden angenähert werden.

$$|\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}} \approx \begin{cases} 1 & \rightarrow \quad 20\log_{10}(1) = 0 \\ \frac{1}{\omega T_1} & \rightarrow -20\log_{10}(\omega T_1) \end{cases} \text{für} \begin{array}{l} \omega \leq \omega_g \\ \omega \geq \omega_g \end{array} \tag{7.29}$$

$$\varphi_{F_1(\mathrm{j}\omega)} = -\arctan(\omega T_1) \approx \begin{cases} 0^\circ \\ -90^\circ \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} \omega \leq 0.1\omega_g \\ \omega \geq 10\omega_g \end{array} \tag{7.30}$$

Die Geraden sind in Abbildung 7.5 strichliert eingezeichnet. Die Phase ändert sich zwischen $0.1\omega_g$ und $10\omega_g$ näherungsweise mit 45°/Dekade.
Im Schnittpunkt ($\omega = {}^1/_{T_1}$) der Geraden für den Amplitudengang gilt

$$|\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega_g)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_g T_1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrel{\widehat{=}} -3dB \tag{7.31}$$

$$\varphi_{F_1(\mathrm{j}\omega_g)} = -45^\circ \tag{7.32}$$

7.2.2 Übertragungsfunktion kaskadierter 2-Tore

Häufig werden in elektronischen Schaltungen Vierpole hintereinandergeschaltet, wobei jeder Vierpol durch seine jeweilige Übertragungsfunktion $\underline{F}_\nu(\mathrm{j}\omega)$ (z.B. $= {}^{\underline{U}_\nu(t)}/_{\underline{U}_{\nu+1}(t)}$ in Abbildung 7.6) beschrieben werden kann.

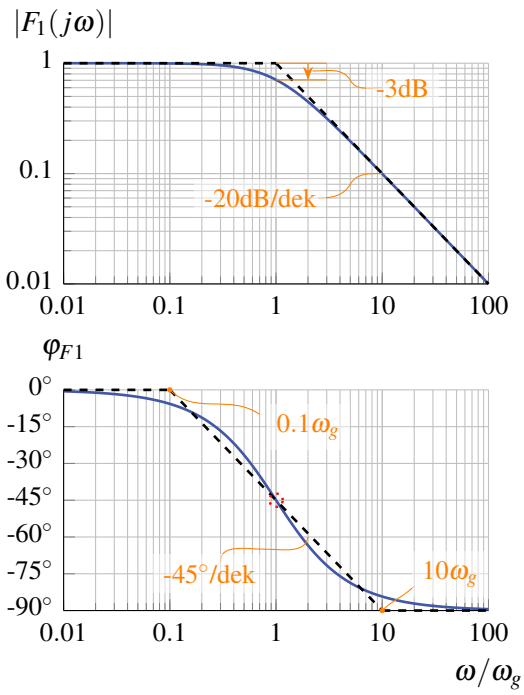


Figure 7.5: Bode-Diagramm mit Frequenzgang (oben) und Phasengang (unten) für den *RC*-Tiefpass in Abbildung 7.4b.

Hinweis: Wird bei der Berechnung der jeweiligen Übertragungsfunktion davon ausgegangen, dass der Vierpol unbelastet ist, d.h. dass der Ausgangsstrom des jeweiligen Vierpols gleich null ist (so wie z.B. bei den frequenzabhängigen Spannungsteilern), so muss sichergestellt werden, dass die Hintereinanderschaltung/Kaskadierung der Vierpole auch diese Bedingung erfüllt, d.h. rückwirkungsfrei ist. Im betrachteten Fall darf z.B. der 2. Vierpol den Ausgang des 1. Vierpols nicht belasten, d.h. es muss gelten $i_2(t) = 0$. Dies kann z.B. durch einen Spannungsfolger/Entkopplungsverstärker zwischen den hintereinandergeschalteten Vierpolen erreicht werden (siehe Abbildung 7.7). Die Eingangsimpedanz des Verstärkers ist dabei unendlich und die Ausgangsimpedanz ist gleich null.

Für die Hintereinanderschaltung der Vierpole ergibt sich die Gesamtübertragungsfunktion aus dem Produkt der einzelnen Übertragungsfunktionen. Für Abbildung 7.6 folgt damit beispielhaft (mit $\varphi_{F_v} = \arg[\underline{F}_v(\mathrm{j}\omega)]$)

$$\begin{aligned}\underline{F}_{ges}(\mathrm{j}\omega) &= |\underline{F}_{ges}(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{F_{ges}}} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1}\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} \\ &= \underline{F}_1(\mathrm{j}\omega)\,\underline{F}_2(\mathrm{j}\omega) = |\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega)|\,|\underline{F}_2(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_{F_1}+\varphi_{F_2})} \end{aligned} \tag{7.33}$$

Damit sind die Amplitude und die Phase der Gesamtübertragungsfunktion gleich

$$|\underline{F}_{ges}(\mathrm{j}\omega)| = |\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega)|\,|\underline{F}_2(\mathrm{j}\omega)| \tag{7.34}$$

$$\varphi_{F_{ges}} = \arg(\underline{F}_{ges}(\mathrm{j}\omega)) = \varphi_{F_1} + \varphi_{F_2} = \arg(\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega)) + \arg(\underline{F}_2(\mathrm{j}\omega)) \tag{7.35}$$

Folglich müssen für die Hintereinanderschaltung die Amplituden der Einzelübertragungsfunktionen multipliziert und die Phasenwinkel addiert werden. Für den Amplitudengang der Gesamtübertragungsfunktion in der logarithmischen dB-Skala (Bode-Diagramm) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} 20\log_{10}|\underline{F}_{ges}(\mathrm{j}\omega)| &= 20\log_{10}[|\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega)|\cdot|\underline{F}_2(\mathrm{j}\omega)|] \\ &= 20\log_{10}|\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega)| + 20\log_{10}|\underline{F}_2(\mathrm{j}\omega)| \end{aligned} \tag{7.36}$$

$$\Rightarrow F_{ges,dB} = F_{1,dB} + F_{2,dB} \tag{7.37}$$

Damit geht die Multiplikation in eine Addition der Beträge der Amplitudengänge in dB (= Amplitudenmass) über und die Amplituden- und Phasengänge der einzelnen Zweitore können im Bode-Diagramm

einfach addiert werden, was die Berechnung/das Zeichnen des Bode-Diagramms für die Gesamtübertragungsfunktion deutlich vereinfacht.

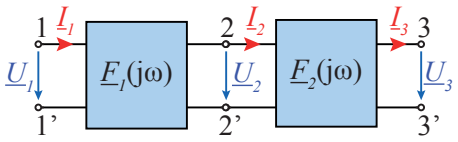


Figure 7.6: Zwei kaskadierte (hintereinandergeschaltete) 2-Tore

7.2.3 Beispiel: *RC*-Tiefpass 2. Ordnung

Als Beispiel für das Erstellen eines Bode-Diagramms für kaskadierte 2-Tore/Systeme wird der *RC*-Tiefpass 2. Ordnung in Abbildung 7.7 betrachtet. Um die Berechnung der Übertragungsfunktion zu vereinfachen, sind die beiden Zweitore durch einen Spannungsfolger ($\underline{U}_2' = \underline{U}_2 \rightarrow \underline{F}(j\omega) = 1$) entkoppelt, so dass diese rückwirkungsfrei sind und für den einzelnen *RC*-Tiefpass 1.Ordnung die bereits oben abgeleitete Übertragungsfunktion genutzt werden kann

$$\underline{F}_v(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega R_v C_v} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega R_v C_v)^2}} e^{-j\arctan(\omega R_v C_v)} \tag{7.38}$$

Die Grenzfrequenz des einzelnen *RC*-Tiefpasses 1. Ordnung ist wieder $f_{g,v} = \frac{1}{2\pi R_v C_v}$.

Für die rückwirkungsfreie Hintereinanderschaltung der beiden Tiefpässe folgt die Gesamtübertragungsfunktion des *RC*-Tiefpasses 2. Ordnung aus

$$\underline{F}_{ges}(j\omega) = \underline{F}_1(j\omega)\underline{F}_2(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega C_1 R_1}\frac{1}{1+j\omega C_2 R_2} = \frac{1}{1-\omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + j\omega(R_1 C_1 + R_2 C_2)} \tag{7.39}$$

Mit den Bauteilwerten R_1 = 10kΩ, C_1 = 22nF und R_2 = 1kΩ, C_2 = 10nF folgen die beiden Grenz- bzw. Eckfrequenzen: f_{g1} = 723Hz / ω_{g1} = 4543$^1/_s$ und f_{g2} = 15.9kHz / ω_{g2} = 99.9$^k/_s$.

Damit ergeben sich die Asymptoten für den Amplitudengang und den Phasengang der Einzelübertragungsfunktionen $\underline{F}_1(j\omega)$ und $\underline{F}_2(j\omega)$ in Abbildung 7.8. Die Asymptoten für die Gesamtübertragungsfunktion ergeben sich aus der stückweisen Addition der beiden Kurven für $\underline{F}_1(j\omega)$ und $\underline{F}_2(j\omega)$. Der reale Amplitudenverlauf kann näherungsweise mit Hilfe der resultierenden Asymptote für $|\underline{F}_{ges}(j\omega)|$ und dem Wissen, dass der Betrag von $|\underline{F}_v(j\omega)|$ bei den Knickfrequenzen jeweils ca. um -3dB unterhalb des Schnittpunkts der Asymptoten liegt (wenn keine Resonanz vorliegt), erstellt werden. Im betrachteten Beispiel ergibt sich für den Verlauf des Amplitudenganges für $\omega > \omega_{g2}$ eine Steilheit von -40dB/Dekade.

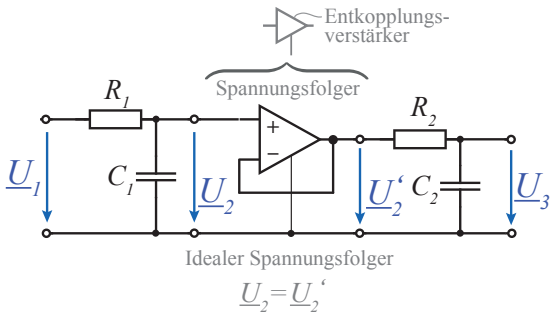


Figure 7.7: Schaltbild eines *RC*-Tiefpass 2. Ordnung mit Entkopplungsverstärker/Spannungsfolger zwischen den beiden kaskadierten 2-Toren.

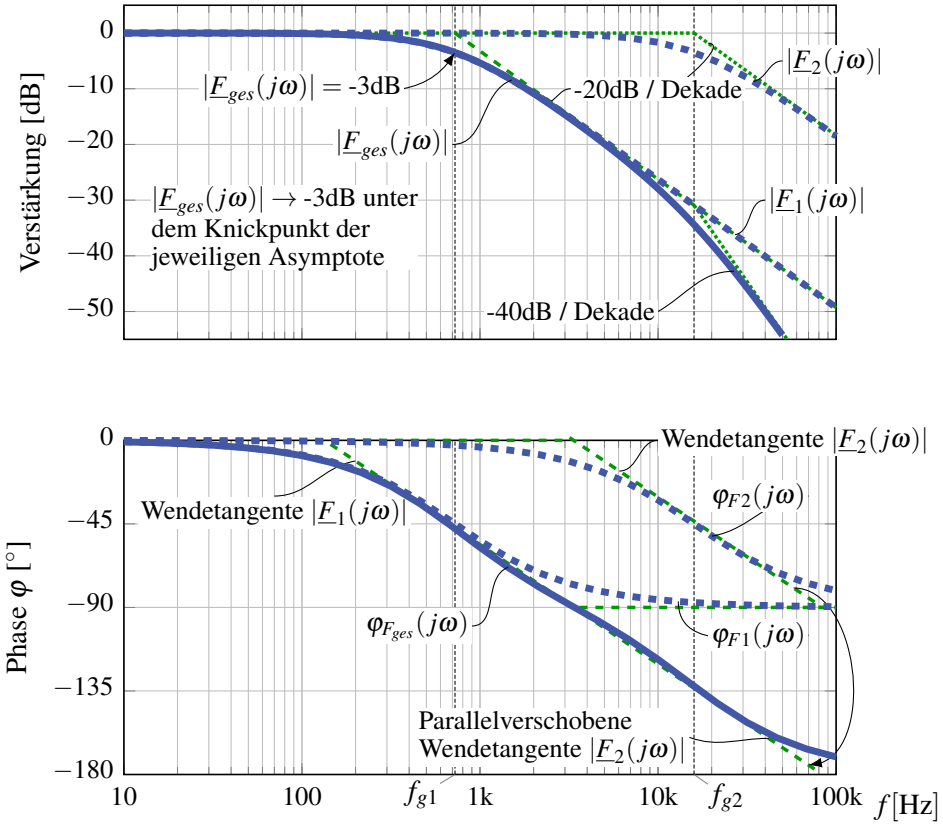


Figure 7.8: Bode-Diagram des *RC*-Tiefpass 2. Ordnung in Abbildung 7.7. Das Bode-Diagramm des Gesamtsystems ergibt sich aus der Addition der Bode-Diagramme für die kaskadierten Teilsysteme.

7.2.4 Beispiel: *LC*-Tiefpass 2. Ordnung

In Abbildung 7.9a ist ein *RLC*-Tiefpass 2. Ordnung dargestellt. Die dazugehörige Übertragungsfunktion folgt mit der komplexen Wechselstromrechnung unmittelbar aus der Spannungsteilerregel

$$\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC - \omega^2 LC} = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\arctan\left(\frac{\omega RC}{1-\omega^2 LC}\right)} \tag{7.40}$$

Damit ist der Amplitudengang und der Phasengang in Abbildung 7.9b gleich

$$|\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega)| = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{[1-(\omega T_1)^2]^2 + (2d\omega T_1)^2}} \tag{7.41}$$

$$\varphi_{F_1} = -\arctan\left(\frac{2d(\omega T_1)}{1-(\omega T_1)^2}\right) \tag{7.42}$$

wobei die Ausdrücke $T_1 = \sqrt{LC}$ und die Dämpfung $d = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$ zur Vereinfachung/Standardisierung der Gleichungen genutzt werden. Dabei muss für die Dämpfung d des Filters gelten, dass $d < 1$, da ansonsten die Übertragungsfunktion in die zwei Systeme 1. Ordnung

$$\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T_{1a}} \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T_{1b}} \tag{7.43}$$

mit den Eckfrequenzen $\omega_{1a,b} = {}^{d}/_{T_1} \pm {}^{1}/_{T_1}\sqrt{d^2-1} = {}^{1}/_{T_{1a,b}}$ faktorisiert/aufgeteilt werden kann und sich die Gesamtübertragungsfunktion so ergibt, wie dies im vorherigen für kaskadierte Systeme erläutert wurde.

Die Eck- bzw. Grenzfrequenz f_g ergibt sich für $d < 1$ aus $\omega_g = \frac{1}{T_1}$. Dabei ist $1/T_1$ die Resonanzfrequenz des ungedämpften ($R = 0$ bzw. $d = 0$) *RLC*-Schwingkreises bzw. gleich dem Betrag der konjugiert komplexen Polstelle $p_{1,2} = -d/T_1 \pm 1/T_1\sqrt{d^2-1}$ im Laplace-Bereich (für $d = 0$).Die Dämpfung charakterisiert dabei wie sehr der Tiefpass zum Überschwingen neigt – je kleiner die Dämpfung, desto grösser ist das Überschwingen (siehe dazu auch Abschnitt 1.6.1 "*RLC*-Serienschwingkreis").

Im Bode-Diagramm kann der Amplituden-/Phasengang durch folgende Geraden angenähert werden (strichliert in Abbildung 7.10)

$$|\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega)| \approx \begin{cases} 1 & \rightarrow \quad 20\log_{10}(1) = 0 \\ \frac{1}{(\omega T_1)^2} & \rightarrow -40\log_{10}(\omega T_1) \end{cases} \text{ für } \begin{matrix} \omega \leq \omega_g \\ \omega \geq \omega_g \end{matrix} \tag{7.44}$$

$$\varphi_{F_1(\mathrm{j}\omega)} = -\arctan\left(\frac{2d(\omega T_1)}{1-(\omega T_1)^2}\right) \approx \begin{cases} 0^\circ \\ -90^\circ \\ -180^\circ \end{cases} \text{ für } \begin{matrix} \omega \leq 0.1\omega_g \\ \omega = \omega_g \\ \omega \geq 10\omega_g \end{matrix} \tag{7.45}$$

Der Amplitudengang fällt dabei mit -40dB/Dekade oberhalb von ω_g. Der tatsächliche Wert des Amplitudenganges bei ω_g ist: $|\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega_g)| = -20\log_{10}(2d)$. Dieser ist für $d < 1/2$ höher als die Näherungsgeraden (siehe Abbildung 7.9b). Der Maximalwert der Amplitude tritt bei der Kreisfrequenz $\omega_r = \omega_g\sqrt{1-2d^2}$ auf und hat die Amplitude: $|\underline{F}_{1,max}(\mathrm{j}\omega_r)| = -20\log_{10}(2d\sqrt{1-d^2})$. Mit den gegebenen Werten bei ω_g/ω_r und den Asymptoten kann der reale Verlauf der Amplitude näherungsweise skizziert werden. Zu den angegebenen werten muss noch die Verstärkung $K_{dB} = 20\log_{10}(|\underline{F}_1(0)|)$ addiert werden, falls diese ungleich 0 ist.

Der Verlauf der Phase ändert sich für Werte von d nahe bei 1 zwischen $0.1\omega_g$ und $10\omega_g$ näherungsweise mit 90°/Dekade. Je kleiner d wird, desto steiler ist der Phasenübergang zwischen 0° und -180°, wobei der Verlauf der Phase punktsymmetrisch bezüglich ω_g ist. Im Extremfall $d = 0$ springt die Phase bei ω_g von 0° auf -180°. Bei ω_g ist die Phase gleich: $\varphi_{F_1}(\mathrm{j}\omega_g) = -90^\circ$

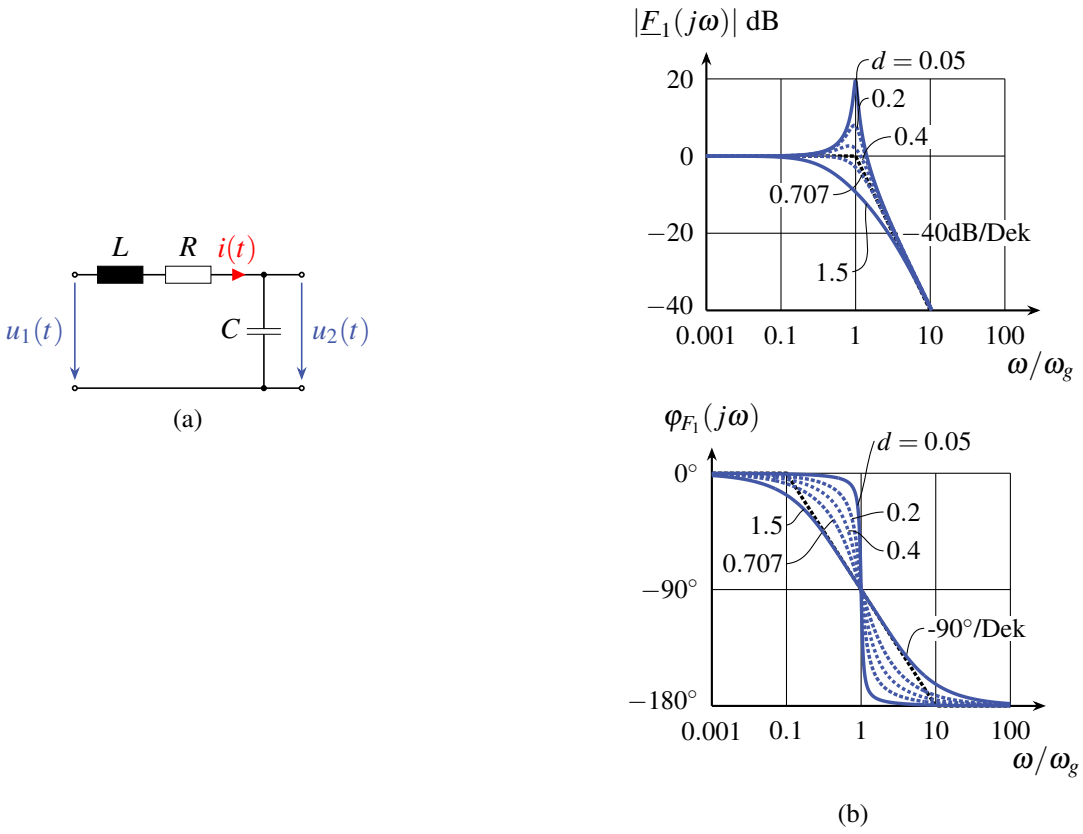


Figure 7.9: a) Schaltbild eines *LC*-Tiefpasses. b) Bode-Diagramm des *LC*-Tiefpasses für unterschiedliche Wert der Dämpfung.

In Abbildung 7.10 ist beispielhaft das Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion: $\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega) = {}^{10}/_{(1+0.3\mathrm{j}\omega+(\mathrm{j}\omega)^2)}$ gegeben.

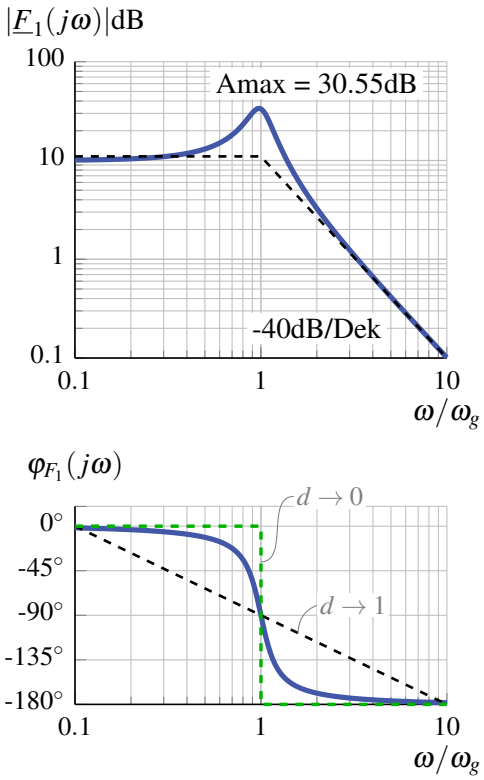
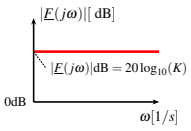
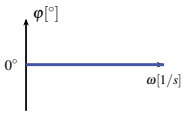
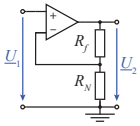
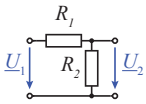
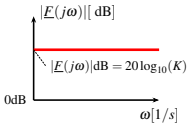
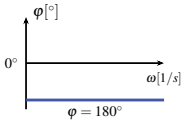
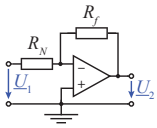
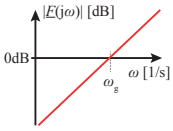
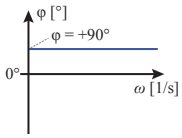
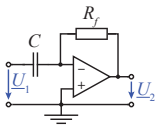
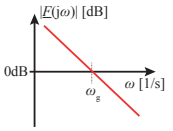
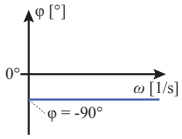
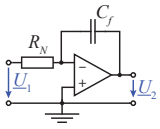
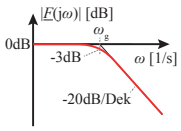
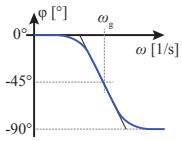
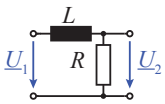
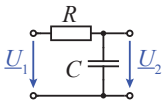
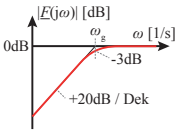
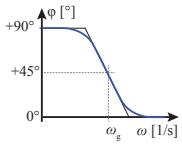
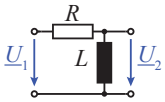
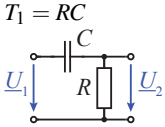
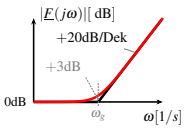
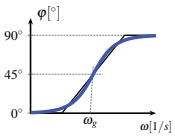
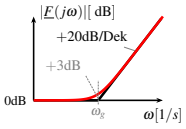
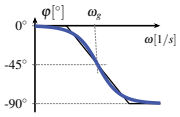
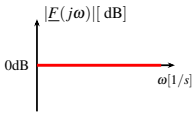
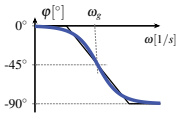
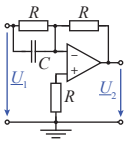


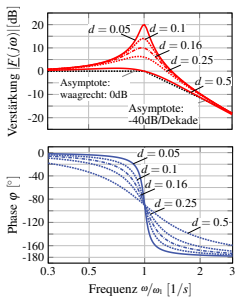
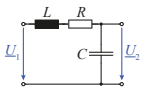
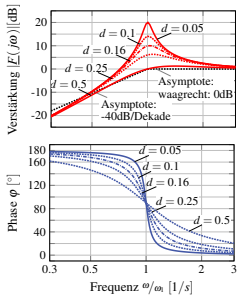
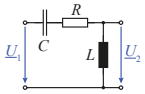
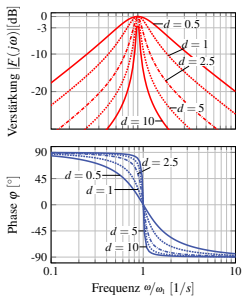
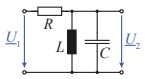
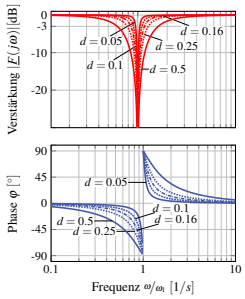
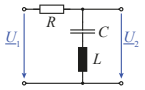
Figure 7.10: Bode-Diagramm des *LC*-Tiefpasses in Abbildung 7.9a für die Werte: $d = 0.15$, $\omega_g = 1$, $\omega_r = 0.977$, $K = 10 \to K_{dB} = 20$dB und $|\underline{F}_{1,max}(\mathrm{j}\omega_r)| = 20\text{dB} + 10.55\text{dB}$.

7.2.5 Glieder 0. & 1. Ordnung

Funktion	Über-tragungs-funktion	Asymptoten	Endwerte für $f \to 0$ $f \to \infty$	Amplitudenverlauf	Phasenverlauf	Schaltbild
Konstante	$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = K$	Waagerecht: $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = 20\log_{10}(K)$	$f \to 0$: $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = 20\log_{10}(K)$ $\varphi = 0°$ $f \to \infty$: $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = 20 \cdot \log_{10}(K)$ $\varphi = 0°$			Nicht-invertierender Verstärker  Spannungs-teiler 
Negative Konstante z.B. in-vertierender Verstärker	$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = -K$	Waagerecht: $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = 20\log_{10}(\lvert K\rvert)$	$f \to 0$: $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = 20 \cdot \log_{10}(K)$ $\varphi = -180°$ $f \to \infty$: $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = 20 \cdot \log_{10}(K)$ $\varphi = -180°$			
Differentiator	$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = j \cdot \omega \cdot T_1$	Mit +20 dB pro Dekade steigend	$f \to 0$: $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = -\infty$ $\varphi = +90°$ $f \to \infty$: $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = +\infty$ $\varphi = +90°$			
Integrator	$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot T_1}$	Mit -20 dB pro Dekade fallend	$f \to 0$: $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = +\infty$ $\varphi = -90°$ $f \to \infty$: $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = -\infty$ $\varphi = -90°$			
Tiefpass	$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot T_1}$	$f < f_g$ waagerecht: 0 dB $f > f_g$ fallend: -20 $\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{Dekade}}$	$f \to 0$: $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = 0\,\mathrm{dB}$ $\varphi = 0°$ $f \to \infty$: $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = -\infty$ $\varphi = -90°$			*RL*-Schaltung: $T_1 = \frac{L}{R}$  *RC*-Schaltung $T_1 = RC$ 
Hochpass	$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{j \cdot \omega \cdot T_1}{1 + j \cdot \omega \cdot T_1}$	$f < f_g$ steigend: +20 $\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{Dekade}}$ $f > f_g$ waagerecht	$f \to 0$: $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = -\infty$ $\varphi = +90°$ $f \to \infty$: $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = 0\,\mathrm{dB}$ $\varphi = 0°$			*RL*-Schaltung: $T_1 = \frac{L}{R}$  *RC*-Schaltung $T_1 = RC$ 

Funktion	Über-tragungs-funktion	Asymptoten	Endwerte für $f \to 0$ $f \to \infty$	Amplitudenverlauf	Phasenverlauf	Schaltbild
Z1 (Findet sich als Teil-struktur im Zähler)	$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = 1 + j \cdot \omega \cdot T_1$ (Addition von $j \cdot \omega \cdot T_1$)	$f < f_g$ waagerecht: 0 dB $f > f_g$ steigend: $+20\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{Dekade}}$	$f \to 0:$ $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = 0\,\mathrm{dB}$ $\varphi = 0°$ $f \to \infty:$ $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = +\infty$ $\varphi = +90°$			
Z2 (Findet sich als Teil-struktur im Zähler)	$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = 1 - j \cdot \omega \cdot T_1$ (Subtraktion von $j \cdot \omega \cdot T_1$)	$f < f_g$ waagerecht: 0dB $f > f_g$ steigend: $+20\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{Dekade}}$	$f \to 0:$ $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = 0\,\mathrm{dB}$ $\varphi = 0°$ $f \to \infty:$ $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = +\infty$ $\varphi = -90°$			
Allpass (Zusam-mensetzung von Tiefpass und Z2)	$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1 - j \cdot \omega \cdot T_1}{1 + j \cdot \omega \cdot T_1}$	Waagerecht: 0 dB	$f \to 0:$ $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = 0\,\mathrm{dB}$ $\varphi = 0°$ $f \to \infty:$ $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = 0\,\mathrm{dB}$ $\varphi = -180°$			

7.2.6 Glieder 2. Ordnung

	Übertragungsfunktion		Schaltbild
	$T_1 = \frac{1}{\omega_g} = \sqrt{LC} \quad d = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ Resonanz: $\omega_r = \omega_g\sqrt{1-2d^2}$		
Tiefpass	$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC+(\mathrm{j}\omega)^2 LC} = \frac{1}{1+\mathrm{j}2d\omega T_1+(\mathrm{j}\omega T_1)^2}$ $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = \frac{1}{\sqrt{[1-(\omega T_1)^2]^2+(2d\omega T_1)^2}}, \qquad \varphi_F(\omega) = -\arctan\frac{2d(\omega T_1)}{1-(\omega T_1)^2}$ $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega_r)\rvert = \frac{1}{2d\sqrt{1-d^2}}, \qquad \lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega_g)\rvert = \frac{1}{2d}$ Asymptote: $\omega \to 0 \quad \varphi_F(\omega) = 0 \quad \lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert_{dB} = 0$ Asymptote: $\omega \to \infty \quad \varphi_F(\omega) = -180° \quad \lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert_{dB} = -40\log(\omega T_1)$		
Hochpass	$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2 LC}{1+\mathrm{j}\omega RC+(\mathrm{j}\omega)^2 LC} = \frac{(\mathrm{j}\omega T_1)^2}{1+\mathrm{j}2d\omega T_1+(\mathrm{j}\omega T_1)^2}$ $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = \frac{(\omega T_1)^2}{\sqrt{[1-(\omega T_1)^2]^2+(2d\omega T_1)^2}}, \qquad \varphi_F(\omega) = \pi - \arctan\frac{2d(\omega T_1)}{1-(\omega T_1)^2}$ $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega_r)\rvert = \frac{1-2d^2}{2d\sqrt{1-d^2}}, \qquad \lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega_g)\rvert = \frac{1}{2d}$ Asymptote: $\omega \to 0 \quad \varphi_F(\omega) = 180° \quad \lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert_{dB} = +40\log(\omega T_1)$ Asymptote: $\omega \to \infty \quad \varphi_F(\omega) = 0 \quad \lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert_{dB} = 0$ $T_1 = \frac{1}{\omega_g} = \sqrt{LC} \quad d = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$		
Bandpass	$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1+\mathrm{j}R\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{1}{1+\mathrm{j}2d\left(\omega T_1-\frac{1}{\omega T_1}\right)}$ $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = \frac{1}{\sqrt{1+4d^2\left(\omega T_1-\frac{1}{\omega T_1}\right)^2}} \qquad \varphi_F(\omega) = -\arctan\left[2d\left(\omega T_1-\frac{1}{\omega T_1}\right)\right]$ $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega_g)\rvert = 1 \qquad \omega_{3dB} = \omega_g\frac{1}{4d}\left(1\pm\sqrt{(4d)^2+1}\right)$ Asymptote: $\omega \to 0 \quad \varphi_F(\omega) = +90° \quad \lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert_{dB} = 20\log\left(\frac{\omega T_1}{2d}\right)$ Asymptote: $\omega \to \infty \quad \varphi_F(\omega) = -90° \quad \lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert_{dB} = -20\log(2d\omega T_1)$		
Bandsperre	$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = 1 - \frac{R}{R+\mathrm{j}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)} = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{1}{2d}\left(\omega T_1-\frac{1}{\omega T_1}\right)}$ $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4d^2}{\left(\omega T_1-\frac{1}{\omega T_1}\right)^2}}} \qquad \varphi_F(\omega) = \arctan\left[\frac{2d}{\left(\omega T_1-\frac{1}{\omega T_1}\right)}\right]$ $\lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega_g)\rvert = 0 \qquad \omega_{3dB} = \omega_g\left(d\pm\sqrt{d^2+1}\right)$ Asymptote: $\omega \to 0 \quad \varphi_F(\omega) = +90° \quad \lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert_{dB} = 0$ Asymptote: $\omega \to \infty \quad \varphi_F(\omega) = -90 \quad \lvert\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\rvert_{dB} = 0$		

7.2.7 Erstellen Bode-Diagramm

Im Folgenden wird ein allgemeines Schema vorgestellt, mit welchem man den Amplituden- und den Phasengang von beliebigen Übertragungsfunktionen einfach näherungsweise konstruieren kann.

Amplitudengang

1. Um ein Bode-Diagramm zu erstellen, faktorisiert man als erstes die Gesamtübertragungsfunktion, die den eingeschwungenen Zustand beschreibt, wie folgt

$$\underline{F}_{ges}(\mathrm{j}\omega) = K_0\,(\mathrm{j}\omega)^r\,\underbrace{\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega)\cdot\underline{F}_2(\mathrm{j}\omega)\cdot\ldots\cdot\underline{F}_n(\mathrm{j}\omega)}_{\underline{F}^*_{ges}(\mathrm{j}\omega)} \tag{7.46}$$

   Der Term $(\mathrm{j}\omega)^r$ stellt für $r=1$ einen einfachen Differentiator und für $r=-1$ einen einfachen Integrator dar.

   Dabei können die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme $F_i(\mathrm{j}\omega)$ je eine der folgenden Standardformen annehmen

$F_i(\mathrm{j}\omega) = 1+\mathrm{j}\omega T_{n,i}$	Reelle Nullstelle mit Eckfrequenz $\omega_i = \frac{1}{T_{n,i}}$
$F_i(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T_{p,i}}$	Reelle Polstelle mit Eckfrequenz $\omega_i = \frac{1}{T_{p,i}}$
$F_i(\mathrm{j}\omega) =$ $1+2d_iT_{n,i}(\mathrm{j}\omega)+(\mathrm{j}\omega)^2T_{n,i}^2$	Konjugiert komplexes Nullstellenpaar mit der Eckfrequenz $\omega_i=\frac{1}{T_{n,i}}$. Bedingung: $d_i \leq 1$, sonst Polynom in 2 reelle Nullstellen zerlegen.
$F_i(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+2d_iT_{p,i}(\mathrm{j}\omega)+(\mathrm{j}\omega)^2T_{p,i}^2}$	Konjugiert komplexes Polstellenpaar mit der Eckfrequenz $\omega_i=\frac{1}{T_{p,i}}$. Bedingung: $d_i \leq 1$, sonst Polynom in 2 reelle Polstellen zerlegen.

   Hinweis: Allgemein können Pole/Nullstellen in der rechten Halbebene in den Übertragungsfunktionen mit $T_{p,i} < 0$ bzw. $T_{n,i} < 0$ berücksichtigen, wobei dann allgemein gilt $\omega_i = |1/T_i|$ – diese Fälle sind aber für die in NUS II betrachteten Schaltungen irrelevant.

2. Als zweites werden die Teilsysteme nach aufsteigenden Eckfrequenzen sortiert (es gilt generell $\omega_i > 0$). Da die Pole und Nullstellen den Verlauf des Bode-Diagramms unterhalb ihrer Eckfrequenzen in erster Näherung nicht beeinflussen, kann mit den sortierten Eckfrequenzen die Geradennäherung für das Bode-Diagramm von links nach rechts gezeichnet werden. Die folgenden Zeichenregeln geben dabei an, wie sich der Amplituden- und der Phasengang bei jeder Eckfrequenz ändert.

3. Im dritten Schritt wird der Startpunkt des Amplitudengangs festgelegt. Dabei ist die niedrigste Eckfrequenz ω_1 gleich der Startfrequenz und die Startamplitude ist $F_{\mathrm{dB}}(\omega_{min}) = 20\log_{10}(|K_0F^*_{ges}(0)|\cdot\omega^r_{min}) = 20\log_{10}(|K_0|\cdot\omega^r_{min})$. Hinweis: Es gilt: $F^*_{ges}(\omega_{min}) \approx F^*_{ges}(0) = 1$, da ω_1 die niedrigste Eckfrequenz ist und unterhalb der Eckfrequenz wird bei den Teilsystemen in Standardform angenommen, dass sich der Amplitudenwert nicht wesentlich ändert. Damit ist der Startpunkt zum Zeichnen des Amplitudengangs: $\omega_{min}, F_{\mathrm{dB}}(\omega_{min})$.

4. Vom Startpunkt aus wird eine Gerade nach links/zu kleiner werdenden Frequenzen bis zum Punkt $\omega \to 0$ ($\omega = 0$ gibt es in der logarithmischen Darstellung nicht) mit der Steigung $r\cdot 20^{\mathrm{dB}}/_{\mathrm{Dekade}}$ gezeichnet. Für $r=0$, d.h. der Term $(\mathrm{j}\omega)^r$ entfällt in der Gesamtübertragungsfunktion (7.46), verläuft die Gerade nach links waagerecht, und für negative r fällt diese nach links ab.

5. Anschliessend wird der Teil rechts von ω_{min} betrachtet. Dieser besteht aus Geradensegmenten, die von einer Eckfrequenz bis zur nächst höheren Eckfrequenz verlaufen. Bei jeder Eckfrequenz ω_i (inklusive ω_{min}) ändert dabei der Amplitudengang seine Steigung wie folgt

$F_i(\mathrm{j}\omega) = 1+\mathrm{j}\omega T_{n,i}$	Steigung erhöht sich um	+20dB/Dekade
$F_i(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T_{p,i}}$	Steigung verkleinert sich um	-20dB/Dekade
$F_i(\mathrm{j}\omega) =$ $1+2d_iT_{n,i}(\mathrm{j}\omega)+(\mathrm{j}\omega)^2T_{n,i}^2$	Steigung erhöht sich um	+40dB/Dekade

$F_i(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+2d_iT_{p,i}(\mathrm{j}\omega)+(\mathrm{j}\omega)^2T_{p,i}^2}$ Steigung verkleinert sich um -40dB/Dekade

Bei mehrfachen Pol-/Nullstellen, d.h. liegen einige ω_i bei der gleichen Frequenz, ist die Steigungsänderung entsprechend mehrfach zu nehmen.

6. Zur besseren Annäherung des realen Amplitudengangs werden die Ecken/Knicke bei den Eckfrequenzen noch um $\pm$ 3dB bzw. Vielfachen davon bei mehrfachen Pol-/Nullstellen abgerundet (+n·3dB bei konvexem / -n·3dB bei konkavem Verlauf des Amplitudengangs). Dies gilt nur für konjugiert komplexe Pole mit genügender Dämpfung $d_i > 1/2$.

   Im Fall von $d_i < 1/2$ gibt es eine Resonanzüberhöhung und bei der Knickfrequenz ω_i (= Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingkreises) ist der Wert der Amplitude der Übertragungsfunktion $|F_i(\mathrm{j}\omega_i)| = \frac{1}{2d_i}$. Die Resonanzüberhöhung liegt damit bei $\omega = \omega_i$ um $-20\log_{10}(2d_i)$dB oberhalb der Geradennäherung. Bei der Resonanzkreisfrequenz des gedämpften Schwingkreises: $\omega_r = \omega_i\sqrt{1-2d_i^2}$ ist der Amplitudenwert $|F_i(\mathrm{j}\omega_r)| = 1/(2d_i\sqrt{1-d_i^2})$, d.h. dieser liegt um $-20\log_{10}(2d_i\sqrt{1-d_i^2})$dB oberhalb der Geradennäherung, falls $d_i < 1/\sqrt{2}$. Damit sind 2 Punkte des exakten Verlaufs des Amplitudengangs bekannt, die zum Skizzieren des Bode-Diagramms genutzt werden können.

Alternativ zu dem oben beschriebenen Vorgehen kann auch für jede Teilübertragungsfunktion der Amplitudengang (und Phasengang) im Bode-Diagramm eingetragen werden und dann am Ende werden alle Amplitudengänge addiert, so dass die Gesamtübertragungsfunktion resultiert.

Phasengang

Der Phasengang wird in Grad über der logarithmischen Frequenzachse aufgetragen und analog zum Amplitudengang wird die Phase abschnittsweise zwischen den oben berechneten Eckfrequenzen bestimmt.

1. Zwischen $\omega \to 0$ und der Startfrequenz ω_{min} ist die Phase gleich

$$\varphi(0) = \begin{cases} r\cdot 90^\circ & \text{falls } K_0F_{ges}(0) > 0 \\ -180^\circ + r\cdot 90^\circ & \text{falls } K_0F_{ges}(0) < 0 \end{cases} \tag{7.47}$$

2. Ausgehend vom Wert der Phase $\varphi(0)$ bei der Startfrequenz ω_{min} ändert sich die Phase bei jeder Eckfrequenz ω_i, einschliesslich der kleinsten Eckfrequenz ω_{min} wie im Folgenden beschrieben

$F_i(\mathrm{j}\omega) = 1 + \mathrm{j}\omega T_{n,i}$	Phase erhöht sich um	+90°· sign($T_{n,i}$)
$F_i(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T_{p,i}}$	Phase verkleinert sich um	-90°· sign($T_{p,i}$)
$F_i(\mathrm{j}\omega) = 1 + 2d_iT_{n,i}(\mathrm{j}\omega) + (\mathrm{j}\omega)^2T_{n,i}^2$	Phase erhöht sich um	+180°· sign($d_iT_{n,i}$)
$F_i(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+2d_iT_{p,i}(\mathrm{j}\omega)+(\mathrm{j}\omega)^2T_{p,i}^2}$	Phase verkleinert sich um	-180°· sign($d_iT_{p,i}$) Im Fall eines ungedämpften Polpaares ($d_i = 0$) tritt eine Singularität auf und es kann beliebig sign(0) = 1 oder sign(0) = -1 gesetzt werden.

   Hinweis: Allgemein können Pole/Nullstellen in der rechten Halbebene in den Übertragungsfunktionen mit $T_{p,i} < 0$ bzw. $T_{n,i} < 0$ berücksichtigt werden.

3. Die Treppenapproximation des Phasengangs ist nur eine grobe Näherung und muss häufig durch die Berechnung von Stützstellen verfeinert werden. Für Glieder 1. Ordnung kann der Verlauf der Phase mit der Steigung $\pm 45^\circ$/Dekade zwischen $0.1\omega_i$ und $10\omega_i$ angenähert werden. Im Fall von konjugiert komplexen Polen ist die Phasenänderung im Bereich der jeweiligen Eckfrequenz um so steiler, je kleiner d_i ist – so wie dies im Abschnitt 7.2.4 für den LC-Tiefpass 2. Ordnung gezeigt wurde. Für $\omega \to \infty$ strebt die Phase φ_{ges} gegen $(m-n)\cdot 90^\circ$ (n Grad Nenner- & m Grad Zählerpolynom).

Der Phasengang einer einzelnen Übertragungsfunktion $F_i(\mathrm{j}\omega)$ ist jeweils punktsymmetrisch zur dazugehörigen Eckfrequenz ω_i.

Hinweis: Tritt ein sogenanntes Totzeitglied $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_t}$ mit $T_t \neq 0$ auf, so kann der Phasengang nur mit Hilfe von einzeln berechneten Stützstellen gezeichnet werden.

Beispiel

Als Beispiel wird das Bode-Diagramm zu folgendem Frequenzgang konstruiert.

$$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = 5 \cdot 10^3 \frac{(1+\mathrm{j}\omega)}{(10+\mathrm{j}\omega)(100+\mathrm{j}\omega)} \tag{7.48}$$

1. Im ersten Schritt werden der Frequenzgang bzw. die Teilglieder mit den Knickfrequenzen $\omega_{1,2,3} = 1, 10, 100 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ in die jeweilige Standardform gebracht.

2. Als nächstes werden die Teilglieder nach aufsteigenden Eckfrequenzen sortiert. Daraus resultiert zusammen mit Schritt 1.

$$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = 5\left(1+\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_1}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_2}\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_3}\right)} \tag{7.49}$$

3. Die Startfrequenz ist $\omega_1 = 1\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ und die Startamplitude ist $\underline{F}(0) = 5$ ($\approx$ 14dB). Dies resultiert in dem Startpunkt A in Abbildung 7.11 bei ($1\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, 14dB) zum Erstellen des Bode Diagramms.

4. Da im betrachteten Fall kein Term $(\mathrm{j}\omega)^r$ vorkommt bzw. $r = 0$, verläuft der erste Abschnitt der Asymptote vom Punkt A waagrecht zu kleiner werdenden Frequenzen.

5. Im nächsten Schritt wird der Asymptotenverlauf von Punkt A bis zur nächst höheren Eckfrequenz $\omega_2 = 10\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ gezeichnet. Dazu wird das Glied mit der zum Startpunkt A gehörenden Eckfrequenz ω_1 betrachtet. Mit der Aufstellung unter Punkt 5) des Abschnittes 7.2.7 wird klar, dass der Asymptotenverlauf um +20dB/Dekade rechts von A abknickt. Diese Asymptote wird bis zur Frequenz ω_2 gezeichnet, woraus der Punkt B resultiert. Aus dem Glied für die Eckfrequenz ω_2 folgt, dass die Asymptote um -20dB/Dekade rechts von B abknickt, so dass diese waagrecht verläuft. Bei der Eckfrequenz ω_3 knickt die Asymptote rechts von Punkt C wieder um -20dB/Dekade ab. Damit ergibt sich der in Abbildung 7.11 dargestellte Verlauf der Asymptote für den Frequenzgang.

6. Zur Besseren Annäherung des realen Amplitudengangs werden im letzten Schritt noch die Ecken/Knicke um jeweils 3dB abgerundet, da im betrachten Fall nur einfache Pol-/Nullstellen vorliegen.

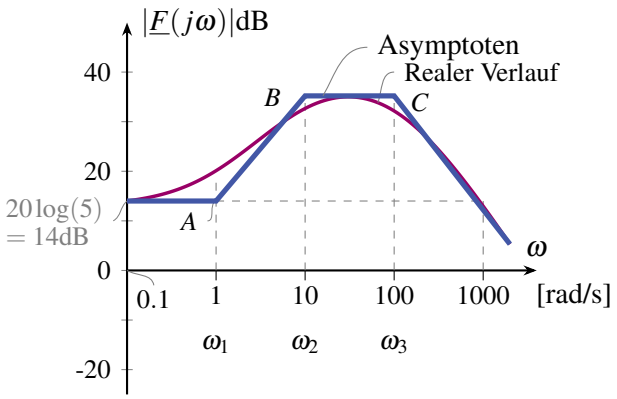


Figure 7.11: Amplitudengang für die Übertragungsfunktion in Gleichung (7.48).

Als nächstes werden die Asymptoten für den Phasenverlauf ermittelt.

$$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = 5 \underbrace{\left(1+\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_1}\right)}_{\text{1. Glied}/+90^\circ} \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_2}\right)}}_{\text{2. Glied}/-90^\circ} \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_3}\right)}}_{\text{3. Glied}/-90^\circ} \tag{7.50}$$

1. Links der Startfrequenz ω_1 ist die Phase im betrachteten Fall mit $r = 0$ gleich $\varphi(0) = 0^\circ$. Damit ist der Startpunkt A für die Phase gleich $(1\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}, 0^\circ)$.

2. Für den Verlauf der Phase rechts des Punktes A wird als erstes das Glied, das zur Startfrequenz ω_1 gehört, betrachtet. Mit der Übersicht in Abschnitt 7.2.7 folgt, dass der Wert für die Phase rechts von Punkt A um +90° erhöht wird. Bei der nächsten Eckfrequenz ω_2 bei Punkt B wird die Phase um -90° verkleinert, so dass die Asymptote für die Phase rechts von Punkt B bei 0° liegt. Bei der Eckfrequenz ω_3 springt die Asymptote für die Phase nochmals um -90° nach unten und liegt damit bei $\varphi = -90^\circ$ rechts von Punkt C. Der resultierende Verlauf ist mit "Asymptoten I" bezeichnet und in Abbildung 7.12 gegeben.

3. Die im 2. Schritt ermittelte Treppenapproximation liefert nur einen groben Verlauf der Phase. Dieser kann durch Berechnung von einigen Stützstellen weiter angenähert werden. Für die Glieder erster Ordnung mit der Eckfrequenz ω_i kann der Verlauf der Phase mit der Steigung $\pm 45^\circ$/Dekade zwischen $0.1\omega_i$ und $10\omega_i$ angenähert werden. Die Näherungsgerade verläuft dabei durch den Punkt $[\omega_i, (\varphi(\omega_i - 0) + 45^\circ)]$ bei einer Erhöhung der Phase um +90° bei der betrachteten Eckfrequenz oder durch den Punkt $[\omega_i, (\varphi(\omega_i - 0) - 45^\circ)]$ bei einer Verkleinerung der Phase um -90°. Die Geraden sind in Abbildung 7.12 als grün strichlierte Verläufe dargestellt. Durch Addition der grün strichlierten Verläufe erhält man den als "Asymptoten II" bezeichneten Verlauf, der als gelbe Linie in Abbildung 7.12 dargestellt ist. Dieser beschreibt den realen Verlauf des Phasengangs im betrachteten Beispiel relativ gut.

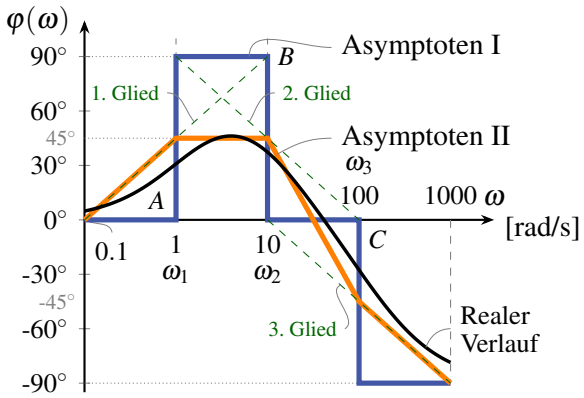


Figure 7.12: Phasengang für die Übertragungsfunktion in Gleichung (7.48).

Die Asymptote für den Amplitudenverlauf der Gesamtübertragungsfunktion kann alternativ auch durch Addition der Asymptoten für die Amplitudenverläufe der drei einzelnen Glieder $G1$-$G3$ ermittelt werden. Dies entspricht dem in Abschnitt 7.2.2 vorgestellten Vorgehen, dass bei Nutzung der logarithmischen dB-Skala die Amplituden der einzelnen Übertragungsfunktionen einfach addiert werden dürfen.

$$|\underline{F}(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20\log|\underline{F}(\mathrm{j}\omega)| =$$

$$\underbrace{20\log 5}_{G0} + \underbrace{20\log\left|1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_1}\right|}_{G1} - \underbrace{20\log\left|1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}\right|}_{G2} - \underbrace{20\log\left|1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_3}\right|}_{G3} \tag{7.51}$$

Zu den Asymptoten für die einzelnen Glieder muss noch der Betrag der Amplitude bei $\omega = 0$ addiert werden. Dieser ist in Abbildung 7.13a mit $G0$ bezeichnet.

Analog wird bei der Ermittlung des Asymptotenverlaufs des Phasengangs vorgegangen. Die Asymptoten der einzelnen Glieder sind in Abbildung 7.13b als grün strichlierte Linien dargestellt. Durch Addition der Einzel-Asymptoten ergibt sich der Asymptotenverlauf des Phasenganges für die Gesamtübertragungsfunktion.

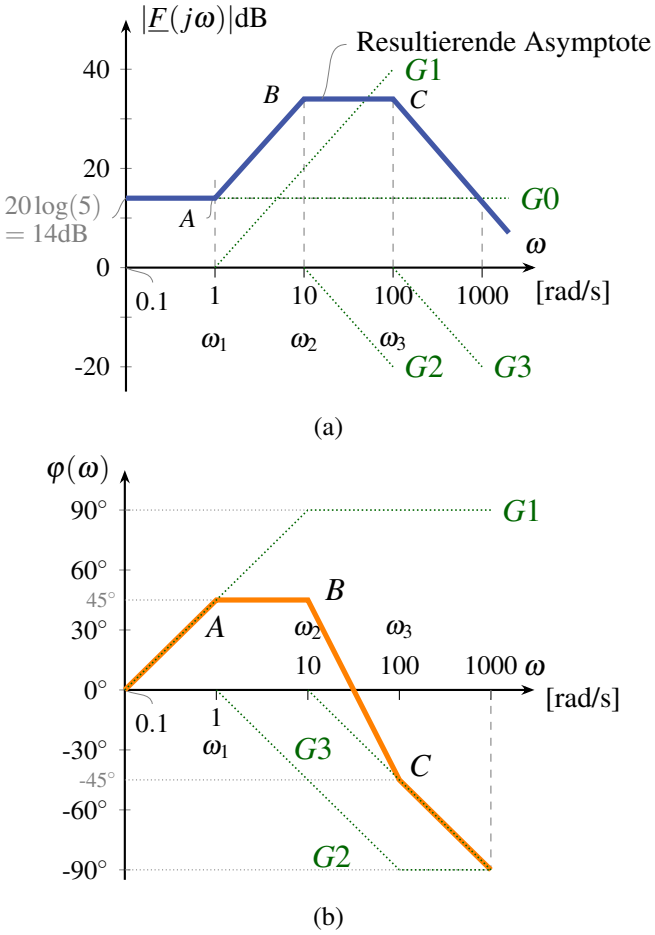


Figure 7.13: a) Asymptotischer Verlauf des Amplitudengangs und in b) des Phasengangs der Übertragungsfunktion in Gleichung (7.48).

Chapter 8

Verstärkerschaltungen

8.1 Grundlagen

Die Verstärkung von elektrischen Signalen ist eine grundlegende und häufig benötigte Funktion von elektronischen Schaltungen, die z.B. in der Messtechnik oder in der Signalverarbeitung benötigt wird. Im Folgenden werden zuerst einige grundsätzliche Eigenschaften von Verstärkern untersucht und im Anschluss daran verschiedene praktische Implementierungen auf Basis von Operationsverstärkern vorgestellt.

8.1.1 Verstärkertypen

Ein linearer Verstärker, wie z.B. in Abbildung 8.1b dargestellt, verstärkt beliebige Eingangssignale $u_I(t)$ (z.B. Abbildung 8.1a) um eine konstante (frequenzunabhängige) Verstärkung A_i. Das Ausgangssignal ergibt sich im Idealfall aus: $u_O(t) = A_u u_I(t)$ und ist bis auf die Amplitude identisch zum Eingangssignal. Man unterscheidet dabei Spannungsverstärker, die eine relativ hohe Verstärkung bei kleiner Ausgangsleistung haben, und sogenannte Leistungsverstärker, die eine hohe Ausgangsleistung zur Verfügung stellen, jedoch typisch nur eine relativ geringe Spannungsverstärkung aufweisen. Leistungsverstärker nehmen dabei wenig Leistung von der Signalquelle am Eingang des Verstärkers auf.

Je nach Typ der Verstärkung unterscheidet man

$$\text{Spannungsverstärkung} \quad A_u = \frac{u_O}{u_I} \tag{8.1}$$

$$\text{Stromverstärkung} \quad A_i = \frac{i_O}{i_I} \tag{8.2}$$

$$\text{Leistungsverstärkung} \quad A_p = \frac{P_L}{P_I} = \frac{u_O i_O}{u_I i_I} \quad \rightarrow \quad A_p = A_u A_i \tag{8.3}$$

In der technischen Praxis werden Verstärkungen vielfach in Dezibel (dB) angegeben. Die Werte in Dezibel ergeben sich aus

$$A_{u,\mathrm{dB}} = 20\log|A_u|\mathrm{dB} \tag{8.4}$$

$$A_{i,\mathrm{dB}} = 20\log|A_i|\mathrm{dB} \tag{8.5}$$

$$A_{p,\mathrm{dB}} = 10\log\left(\left|\frac{P_L}{P_I}\right|\right) = 10\log\left(\frac{\frac{1}{R_O}U_O^2}{\frac{1}{R_I}U_I^2}\right) \xrightarrow{R_O=R_I} 20\log\left(\left|\frac{U_O}{U_I}\right|\right) \triangleq A_{u,\mathrm{dB}} \tag{8.6}$$

$$= 10\log\left(\left|\frac{P_L}{P_I}\right|\right) = 10\log\left(\left|\frac{U_O I_O}{U_I I_I}\right|\right) = 10\log\left(\left|\frac{U_O}{U_I}\right|\right) + 10\log\left(\left|\frac{I_O}{I_I}\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(A_{u,\mathrm{dB}} + A_{i,\mathrm{dB}}\right) \tag{8.7}$$

Negative Werte von A_u bedeuten dabei eine Invertierung (Vorzeichenumkehr) des Eingangssignals bzw. eine Phasenverschiebung von 180° zwischen Ein- und Ausgang und negative Werte von $A_{u,dB}$ bedeuten

eine Dämpfung/Verringerung der Signalamplitude. Eine Invertierung ist bei Verstärkungswerten in Dezibel anhand der Phasenverschiebung erkennbar.

Bei der Berechnung der Leistungsverstärkung $A_{p,\mathrm{dB}}$ in Dezibel aus der Summe der Spannungsverstärkung $A_{u,\mathrm{dB}}$ und der Stromverstärkung $A_{iu,\mathrm{dB}}$ in Dezibel tritt der Faktor $1/2$ auf, da bei Leistungsverhältnissen der "Vorfaktor" 10 verwendet wird und bei Spannungs- und Stromverhältnissen der "Vorfaktor" 20.

Hinweis: Bei der Berechnung von Spannungs- bzw. Stromverstärkungen tritt dieser Faktor $1/2$ nicht auf, wie dies z.B. in Gleichung (7.37) bei den Bode-Diagrammen gemacht wurde.

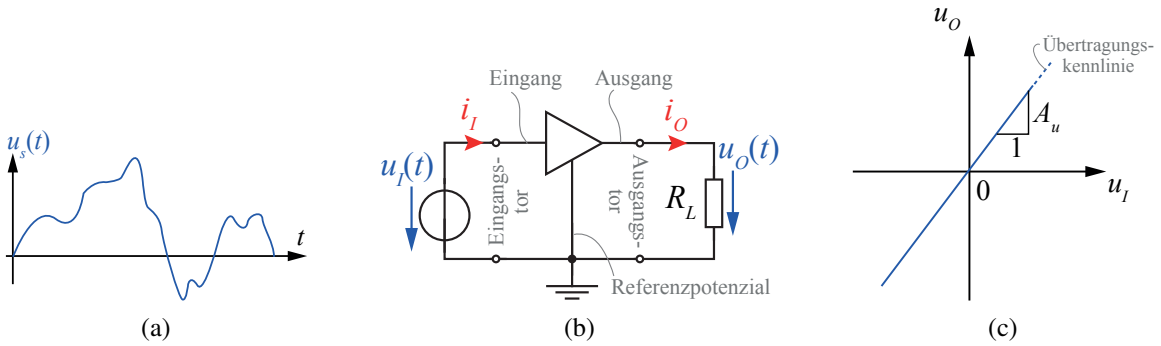


Figure 8.1: a) Beispiel für ein Spannungssignal, das verstärkt werden soll. b) Schalbild eines Verstärkers, der die Eingangsspannung $u_I(t)$ verstärkt. Das Bezugspotenzial für die Ein- und die Ausgangsspannung ist im betrachteten Fall über das "Referenzpotenzial"/Erde/GND gegeben. c) Übertragungskennlinie eines idealen, linearen Verstärkers mit der Spannungsverstärkung A_u.

8.1.2 Verstärker – Versorgungsspannung

Neben dem Ein- und dem Ausgang hat der Verstärker typischerweise noch die beiden in Abbildung 8.2a dargestellten Anschlüsse U^+ und U^- für die Versorgungsspannungen bzw. die Energieversorgung des Verstärkers. An U^+ wird dabei die im Bezug auf das Referenzpotenzial positive Klemme der Versorgungsspannung U_1 und an U^- die negative Klemme der Spannung U_2 angeschlossen.

Von den beiden Versorgungsquellen nimmt der Verstärker die Leistung

$$P_{dc} = U_1 I_1 + U_2 I_2 = U^+ I_1 - U^- I_2 \tag{8.8}$$

auf. Die von der Last aufgenommene Leistung ist $P_L\,(= U_{o,eff}^2/R_L)$ und die von der Signalquelle u_I an den Verstärker gelieferte Leistung ist $P_I\,(= u_I i_I)$. Weiterhin wird vom Verstärker die Leistung P_V in Wärme umgewandelt.

Damit ergibt sich für den Verstärker die folgende Leistungsbilanz

$$P_{dc} + P_I = P_L + P_V \tag{8.9}$$

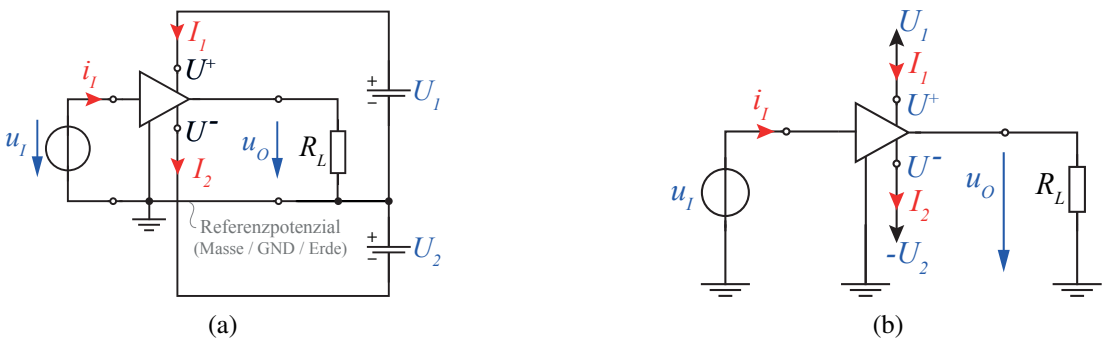


Figure 8.2: a) Schaltbild eines Verstärkers mit den beiden Versorgungsspannungen U_1 und U_2. b) Vereinfachtes Schaltbild des Verstärkers in a), bei welchem die Quellen für die beiden Versorgungsspannungen weggelassen wurden.

Normalerweise ist die von der Signalquelle bezogene Leistung P_I sehr klein und kann meist vernachlässigt werden. Mit dieser Vernachlässigung ergibt sich näherungsweise der Wirkungsgrad für den Verstärker aus

$$\eta = \frac{P_L}{P_{dc}} \times 100\% \tag{8.10}$$

Häufig wird das Schaltbild des Verstärkers vereinfacht und die Versorgungsspannungen werden nicht oder nur in einfacher Form wie in Abbildung 8.2b dargestellt. Weiterhin gibt es auch Verstärker, bei denen (meist) der Anschluss für die negative Versorgungsspannung mit dem Bezugspotenzial verbunden werden kann, so dass nur eine Quelle für die Versorgungsspannung bzw. für den Betrieb benötigt wird (sogenannte "single supply operation").

Beispiel

Beispielhaft wird nun für den Verstärker in Abbildung 8.3 die Spannungs-, Strom- und Leistungsverstärkung sowie der Wirkungsgrad berechnet. Die für die Schaltung gegebenen Grössen sind

$$\begin{aligned} u_I &= 1\,\mathrm{V}\sin(\omega t) & i_I &= 0.1\,\mathrm{mA}\sin(\omega t) \\ u_O &= 9V\sin(\omega t) & R_L &= 1\,\mathrm{k\Omega} \\ U^+ &= 10\,\mathrm{V} & I_1 &= 9.5\,\mathrm{mA} \\ U^- &= -10\,\mathrm{V} & I_2 &= 9.5\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

Mit den gegebenen Grössen folgt

$$\begin{aligned}
\text{Spannungsverstärkung} \quad & A_u = \frac{9\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{V}} = 9 \quad \rightarrow \quad A_u = 20\log 9 \simeq 19.1\,\mathrm{dB} \\
\text{Stromverstärkung} \quad & A_i = \frac{\hat{i}_O}{\hat{i}_I} = \frac{9\,\mathrm{mA}}{0.1\,\mathrm{mA}} = 90 \quad \rightarrow \quad A_i = 20\log 90 = 39.1\,\mathrm{dB} \\
\text{Eingangswiderstand} \quad & R_I = \frac{u_I}{i_I} = 10\,\mathrm{k\Omega} \quad (\neq R_L) \\
\text{Ausgangsleistung} \quad & P_L = U_{O_{rms}} I_{O_{rms}} = \frac{9\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}}\frac{9\,\mathrm{mA}}{\sqrt{2}} = 40.5\,\mathrm{mW} \\
\text{Eingangsleistung} \quad & P_I = U_{I_{rms}} I_{I_{rms}} = \frac{1\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}}\frac{0.1\,\mathrm{mA}}{\sqrt{2}} = 0.05\,\mathrm{mW} \\
\text{Leistungsverstärkung} \quad & A_p = \frac{P_L}{P_I} = \frac{40.5\,\mathrm{mW}}{0.05\,\mathrm{mW}} = 810 \quad \rightarrow \quad A_p = 10\log 810 = 29.1\,\mathrm{dB} \\
& \text{Es gilt:} \quad A_p = A_u \cdot A_i \quad \text{und} \quad A_{p,dB} = {}^1\!/_2\,(A_{u,dB} + A_{i,dB}) \\
\text{Aufgenommene Leistung} \quad & P_{dc} = 10\,\mathrm{V}\cdot 9.5\,\mathrm{mA} + 10\,\mathrm{V}\cdot 9.5\,\mathrm{mA} = 190\,\mathrm{mW} \\
\text{Verluste} \quad & P_V = P_{dc} + P_I - P_L = 190\,\mathrm{mW} + 0.05\,\mathrm{mW} - 40.5\,\mathrm{mW} = 149.6\,\mathrm{mW} \\
\text{Wirkungsgrad} \quad & \eta = \frac{P_L}{P_{dc}} \times 100\% = 21.3\% \qquad (8.11)
\end{aligned}$$

8.1.3 Sättigung des Verstärkers

Aufgrund von technischen Limits kann die Ausgangsspannung u_O eines Verstärkers normalerweise die Versorgungsspannung U^+ und U^- nicht überschreiten. Damit weist die Übertragungskennlinie (transfer characteristic) eine Sättigung (-grenze) auf. Die obere Sättigungsgrenze L_+ liegt dabei typischerweise bei realen Verstärkern ca. 1 V unter U^+ und die untere Sättigungsgrenze L_- ca. 1 V über U^- – siehe Abbildung 8.4. Sogenannte spezielle "rail-to-rail" Verstärker weisen deutlich kleinere Differenzen zwischen den Sättigungsgrenzen und den Versorgungsspannungen auf.

Um eine Verzerrung des Ausgangssignals zu vermeiden, muss der Bereich des Eingangssignals entsprechend auf

$$\frac{L_-}{A_u} \leq u_I \leq \frac{L_+}{A_u} \tag{8.12}$$

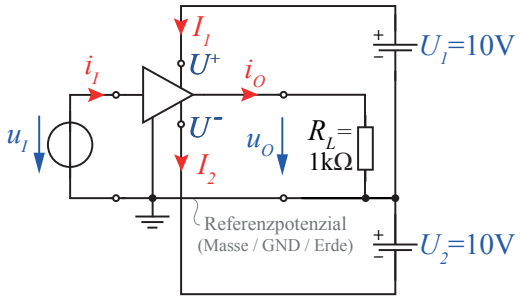


Figure 8.3: Beispielschaltung für einen Verstärker, der ein sinusförmiges Eingangssignal verstärkt.

beschränkt werden. Überschreitet das Eingangssignal diesen Bereich, werden die Spitzen des Ausgangssignals abgeschnitten (sogenanntes "clipping") – siehe ② in Abbildung 8.4. Ist das Eingangssignal innerhalb der Beschränkung, so ist die Übertragungskennlinie des idealen Verstärkers (mit Begrenzung der Ausgangsspannung) linear.

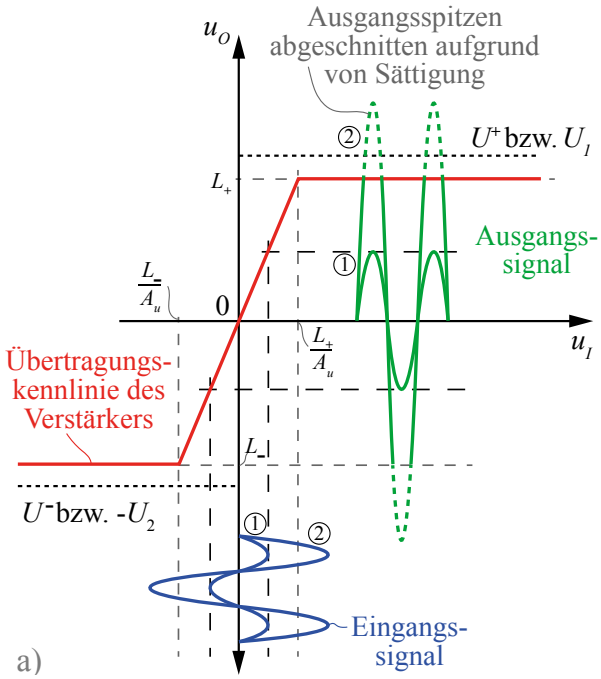


Figure 8.4: Übertragungskennlinie (in rot) eines Verstärkers mit Sättigung und 2 Beispielen von Eingangssignalen (in blau) mit unterschiedlichen Amplituden und den dazugehörigen Ausgangssignalen (in grün).

8.1.4 Biasing und Kleinsignalverstärkung

Bei realen Verstärkern treten schon innerhalb der (Sättigungs-)Grenzen (8.12) Nichtlinearitäten (Verzerrungen) auf, vor allem wenn die Ausgangsspannung des Verstärkers in der Nähe der Limits L_- und L_+ ist. In Abbildung 8.5b ist eine näherungsweise realistische Übertragungskennlinie für einen Verstärker dargestellt, der nur mit einer Versorgungsspannung betrieben wird – siehe Abbildung 8.5a (mit $U^- = 0$).

Um im Fall nur einer Versorgungsspannung einen (Ruhe-)Arbeitspunkt Q näherungsweise in der Mitte des linearen Teils der Übertragungskennlinie in Abbildung 8.5b zu erhalten, schaltet man zur Eingangsspannung die Gleichspannung U_I in Serie – siehe Abbildung 8.5a. Diese verschiebt die Ausgangsspannung für $u_{I,AC}(t) = 0$ (d.h. den Ruhepunkt) auf den Wert: U_O. Dieses Konzept der Arbeitspunktverschiebung wird auch "Biasing" genannt (mit U_I bzw. $U_O \rightarrow$ "DC bias"/Gleichspannungsoffset).

Die Ausgangsspannung ergibt sich allgemein aus

$$u_O(t) = U_O + u_{O,AC}(t) = U_O + A_u u_{I,AC}(t) \tag{8.13}$$

Dabei ist A_u die Steigung $\mathrm{d}u_O/\mathrm{d}u_I|_{\text{bei } Q}$ der Übertragungskennlinie im näherungsweise linearen Bereich.

Mit der Arbeitspunktverschiebung erreicht man bei ausreichend kleinen Signalamplituden eine in erster Näherung lineare Verstärkung der Signale. Dies ist die sogenannte Kleinsignal-Näherung ("small-signal approximation") mit der dazugehörigen Kleinsignalverstärkung A_u, die häufig für die Auslegung von Verstärkerschaltungen genutzt wird. Im Folgenden wird allgemein bei Kleinsignalgrössen, die die Abweichung von einem Arbeitspunkt (Offset/DC Bias) beschreiben und deren Amplituden so klein sind, dass die Kleinsignal-Näherung gilt, ein Kleinbuchstabe als tiefgestellter Index verwendet. So ist z.B. u_i die Kleinsignal-Eingangsspannung und für Abbildung 8.5a gilt: $u_i = u_{I,AC}$.

Im betrachteten Fall kann die Kleinsignalverstärkung A_u nur auf den Wechselanteil $u_{I,AC}(t)$ der Eingangsspannung angewendet werden, um den Wechselanteil der Ausgangsspannung $u_{O,AC}(t)$ zu ermitteln. Das Gleichspannungsoffset der Ausgangsspannung U_O ergibt sich nicht unmittelbar aus dem Gleichspannungsoffset der Eingangsspannung U_I und der Kleinsignalverstärkung. Dies ist auch unmittelbar der Kennlinie Abbildung 8.5b, wenn man den Wert von U_I und die viel kleinere Amplitude von $u_{I,AC}(t)$ bzw. auch die kleinere Amplitude von $u_{O,AC}(t)$ betrachtet.

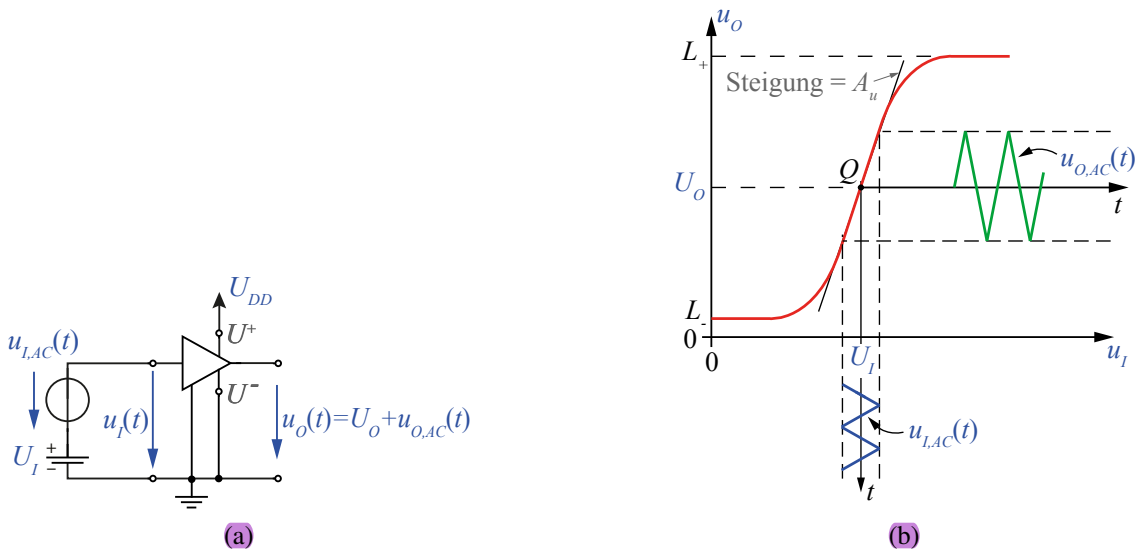


Figure 8.5: a) (Single-supply) Verstärkerschaltung mit Arbeitspunktverschiebung bzw. Gleichspannungsoffset, welches durch die Gleichspannungsquelle U_I eingestellt wird. b) Übertragungskennlinie der Verstärkerschaltung in a).

8.1.5 Ersatzschaltbilder von Verstärkern

Allgemein können Verstärker – wie im Folgenden noch gezeigt wird – je nach Charakteristik in verschiedene Klassen eingeteilt werden, die jeweils mit entsprechenden vereinfachten Ersatzschaltbildern (ESB) modelliert werden können. Dabei wird der Verstärker typischerweise als Zweitor mit einem Eingangs- und einem Ausgangstor (Abbildung 8.6a) beschrieben. Die Ersatzschaltbilder beschreiben dabei typischerweise das Kleinsignalverhalten des Verstärkers und die Parameter des Ersatzschaltbildes können durch Messung oder theoretische Analyse der jeweiligen Schaltung ermittelt werden.

Am häufigsten wird die Modellierung als Spannungsverstärker in Abbildung 8.6b mit dem Eingangswiderstand R_i, dem Ausgangswiderstand R_o und der Leerlaufverstärkung (open-circuit voltage gain) A_{uo} ($R_L \to \infty$) genutzt. Die tatsächliche Spannungsverstärkung A_u ergibt sich mit dem Lastwiderstand R_L bzw. dem Spannungsteiler aus R_o und R_L in Abbildung 8.6c aus

$$u_o = A_{uo} u_i \frac{R_L}{R_L + R_o} \quad \to \quad A_u = \frac{u_o}{u_i} = A_{uo} \frac{R_L}{R_L + R_o} \tag{8.14}$$

Um die Verstärkung möglichst unabhängig von R_L zu machen, sollte $R_o \ll R_L$ sein. Im Idealfall ist $R_o = 0$. Mit dem Spannungsteiler am Eingang in Abbildung 8.6c folgt:

$$u_i = u_s \frac{R_i}{R_i + R_s} \tag{8.15}$$

Damit ergibt sich die Gesamtverstärkung

$$\frac{u_o}{u_s} = A_{uo} \frac{R_i}{R_i + R_s} \frac{R_L}{R_L + R_o} \tag{8.16}$$

Um zu vermeiden, dass die Signalspannung u_s durch den Spannungsteiler nicht zu sehr abgeschwächt wird, sollte der Eingangswiderstand R_i möglichst hochohmig gegenüber dem Innenwiderstand R_s der Signalquelle sein.

Neben dem Modell des Spannungsverstärkers in Abbildung 8.7a gibt es drei weitere Ersatzbilder in den Abbildungen 8.7b - 8.7d. Diese Modelle sind alle rückwirkungsfrei (unilateral), d.h. die Ausgangsgrössen haben keinen Einfluss auf die Eingangsgrössen.

▷ Spannungsverstärker mit Leerlaufspannungsverstärkung

$$A_{uo} = \left.\frac{u_o}{u_i}\right|_{i_o=0} \qquad \text{Idealfall: } R_i = \infty \;\&\; R_o = 0 \tag{8.17}$$

▷ Stromverstärker mit Kurzschlussstromverstärkung

$$A_{is} = \left.\frac{i_o}{i_i}\right|_{u_o=0} \qquad \text{Idealfall: } R_i = 0 \;\&\; R_o = \infty \tag{8.18}$$

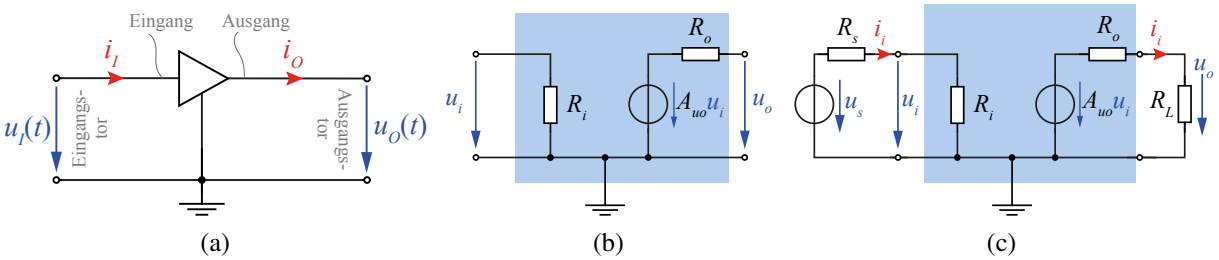


Figure 8.6: a) Schaltbild eines Verstärkers mit einem Eingangs- und einem Ausgangstor. b) Modellierung des Verstärkers in Bild a) als Spannungsverstärker. c) Beispielschaltung für den Betrieb des Verstärkers mit Lastwiderstand R_L und Signalquellenwiderstand R_s.

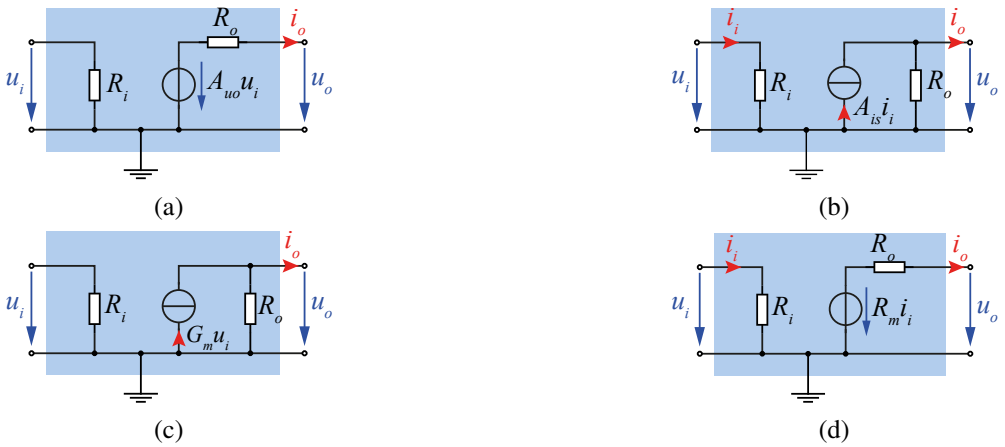


Figure 8.7: a) Spannungsverstärker. b) Stromverstärker. c) Transkonduktanzverstärker. d) Transimpedanzverstärker.

▷ Transkonduktanzverstärker mit Steilheit (Transconductance Amplifier Short-Circuit Transconductance)

$$G_m = \left.\frac{i_o}{u_i}\right|_{u_o=0} \qquad \text{Idealfall: } R_i = \infty \;\&\; R_o = \infty \tag{8.19}$$

▷ Transimpedanzverstärker mit Transimpedanz (Transresistance Amplifier mit Open-Circuit Transresistance)

$$R_m = \left.\frac{u_o}{i_i}\right|_{i_o=0} \qquad \text{Idealfall: } R_i = 0 \;\&\; R_o = 0 \tag{8.20}$$

Die Ersatzschaltbilder können dabei alle einfach ineinander umgewandelt werden. Es gilt z.B. für den Strom- und Spannungsverstärker

$$A_{uo}u_i = A_{is}\frac{u_i}{R_i}R_o \rightarrow \qquad A_{uo} = A_{is}\left(\frac{R_o}{R_i}\right) \tag{8.21}$$

Beispiel

Ausgehend von dem Beispiel für gesteuerte Quellen im Abschnitt 3.1.5, wird nun ein Verstärker auf Basis eines Bipolartransistors untersucht. Die Anschlüsse des Transistors sind dabei der Steuereingang: Basis (B), der Emitter (E) und der Kollektor (C).

Wird der Arbeitspunkt des Transistors mit Hilfe einer Gleichspannungsquelle eingestellt, so kann das Kleinsignalverhalten des Verstärkers durch den Transkonduktanzverstärker in Abbildung 8.8a modelliert werden. Da der Emitter sowohl für das Eingangs- als auch das Ausgangstor genutzt wird, wird die Verstärkerschaltung als Emitterschaltung bezeichnet.

Die Spannungsverstärkung ergibt sich direkt mit Hilfe der Spannungsteilerregel direkt aus dem ESB in Abbildung 8.8a.

$$u_{be} = u_s\frac{r_\pi}{r_\pi + R_s} \qquad \text{und} \qquad u_o = -g_m u_{be}\left(R_L \| r_o\right) \tag{8.22}$$

$$\rightarrow A_u = \frac{u_o}{u_s} = -\frac{r_\pi}{r_\pi + R_s}g_m\left(R_L \| r_o\right) \tag{8.23}$$

Da die Verstärkung negativ ist, handelt es sich um einen invertierenden Verstärker.

Alternativ kann der Transistor auch durch den Stromverstärker in Abbildung 8.8b modelliert werden. Die Stromverstärkung β des Stromverstärkers ergibt sich aus dem Modell in 8.8a mit

$$\beta i_b = g_m u_{be} \qquad \text{mit} \qquad i_b = \frac{u_{be}}{r_\pi} \qquad \text{folgt} \qquad \beta = g_m r_\pi \tag{8.24}$$

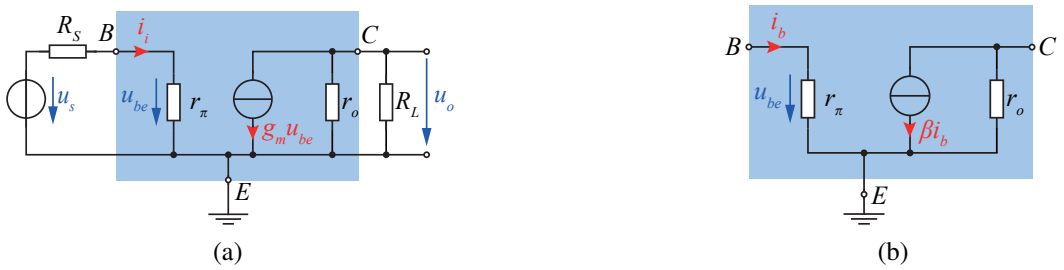


Figure 8.8: Ersatzschaltbild einer Verstärkerschaltung (Emitterschaltung) aus Basis der Spannungsverstärkung in a) und als Stromverstärkung in b).

8.1.6 Frequenzverhalten von Verstärkern

Reale Bauelemente und Verstärker haben aus physikalischen Gründen immer kleine, häufig unerwünschte innere (parasitäre) Kapazitäten und auch Induktivitäten. Diese führen dazu, dass die Verstärkung von der Frequenz abhängt. Dieses frequenzabhängige Verhalten, d.h. die Übertragungsfunktion $\underline{A}(\mathrm{j}\omega)$ des Verstärkers, kann z.B. mit der Schaltung in Abbildung 8.9a gemessen werden, bei welcher eine sinusförmige Spannung mit variabler Frequenz als Eingangssignal genutzt und für alle relevanten Frequenzen die dazugehörige Ausgangsspannung (Betrag & Phase) gemessen wird. Dabei ergibt das Amplitudenverhältnis der Ein- und Ausgangsspannung den Amplitudengang und die Phasenverschiebung zwischen den beiden Spannungen den Phasengang.

Amplitudengang $$|\underline{A}(\mathrm{j}\omega)| = \frac{u_o}{u_i} \tag{8.25}$$

Phasengang $$\angle\underline{A}(\mathrm{j}\omega) = \varphi \tag{8.26}$$

Neben der messtechnischen Bestimmung kann die Übertragungsfunktion auch aus dem Ersatzschaltbild ermittelt werden, wenn dies alle relevanten parasitären Effekte modelliert.

In Abbildung 8.9b ist ein typischer Verlauf des Amplitudenganges eines Verstärkers dargestellt. Dieser hat einen relativ weiten Bereich mit nahezu konstanter Verstärkung, der als Bandbreite bezeichnet wird. Die Grenzfrequenzen der Bandbreite ergeben sich meistens aus den Punkten, bei welcher die Verstärkung um -3dB (gegenüber dem Maximalwert) abgenommen hat.

Liegen Spektralanteile des Eingangssignals ausserhalb der Bandbreite, so verzerrt der Verstärker das Spektrum und die Form des Ausgangssignals weicht von der Form des Eingangssignals ab.

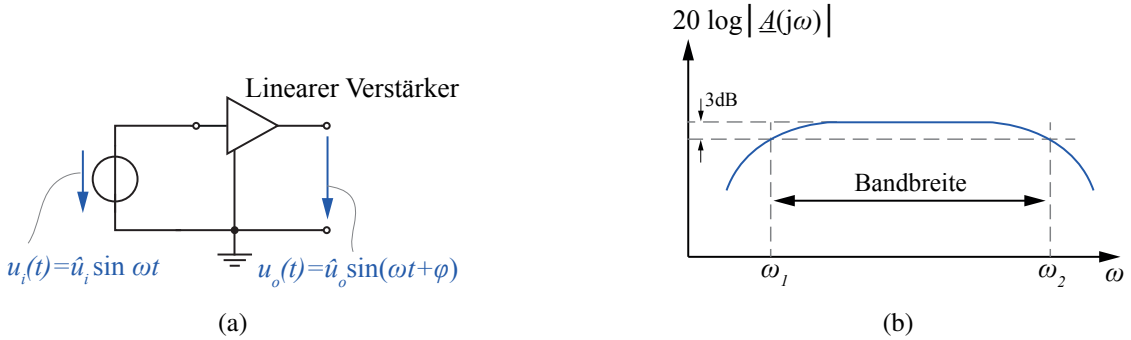


Figure 8.9: a) Messschaltung für die Bestimmung des Frequenzgangs des Verstärkers durch Variation der Frequenz ω des Eingangssignals. b) Typischer Frequenzgang eines Verstärkers mit unterer Grenzfrequenz ω_1 und oberer Grenzfrequenz ω_2.

8.1.7 Whd.: Übertragungsglieder 1. Ordnung

Das Frequenzverhalten von Verstärkerschaltungen kann vielfach durch Übertragungsglieder erster Ordnung (mit einer Zeitkonstante) angenähert werden (siehe Abschnitt 1.5.1). Im folgenden sind kurz die wichtigsten Eigenschaften dieser Übertragungsglieder zusammengefasst/wiederholt.

Übertragungsfunktion Tiefpass 1. Ordnung – Abbildung 8.10a

$$\underline{A}_{TP}(\mathrm{j}\omega) = \frac{K}{1+\mathrm{j}(\omega/\omega_0)} \tag{8.27}$$

Übertragungsfunktion Hochpass 1. Ordnung – Abbildung 8.10d

$$\underline{A}_{HP}(\mathrm{j}\omega) = K\frac{\mathrm{j}(\omega/\omega_0)}{1+\mathrm{j}(\omega/\omega_0)} \tag{8.28}$$

An der 3dB - Grenz-/Eckfrequenz ω_0 ist die Verstärkung für beide Übertragungsglieder gleich

$$|\underline{A}_{TP}|_{\omega=\omega_0} = |\underline{A}_{HP}|_{\omega=\omega_0} = \frac{K}{\sqrt{2}} \tag{8.29}$$

Im Fall, dass die Verstärkung in dB angegeben ist, folgt

$$\left|\underline{A}_{TP,\mathrm{dB}}\right|_{\omega=\omega_0} = \left|\underline{A}_{HP\mathrm{dB}}\right|_{\omega=\omega_0} = K_{\mathrm{dB}} - 3\,\mathrm{dB} \tag{8.30}$$

8.1.8 Frequenzantwort des Verstärkers

Als Beispiel wird im Folgenden die Frequenzabhängigkeit der Spannungsverstärkung, die Gleichspannungsverstärkung und die 3dB-Grenzfrequenz des Verstärkers in Abbildung 8.11a berechnet.

Die Spannungsverstärkung ergibt sich mit der komplexen Wechselstromrechnung aus den Spannungsteil-

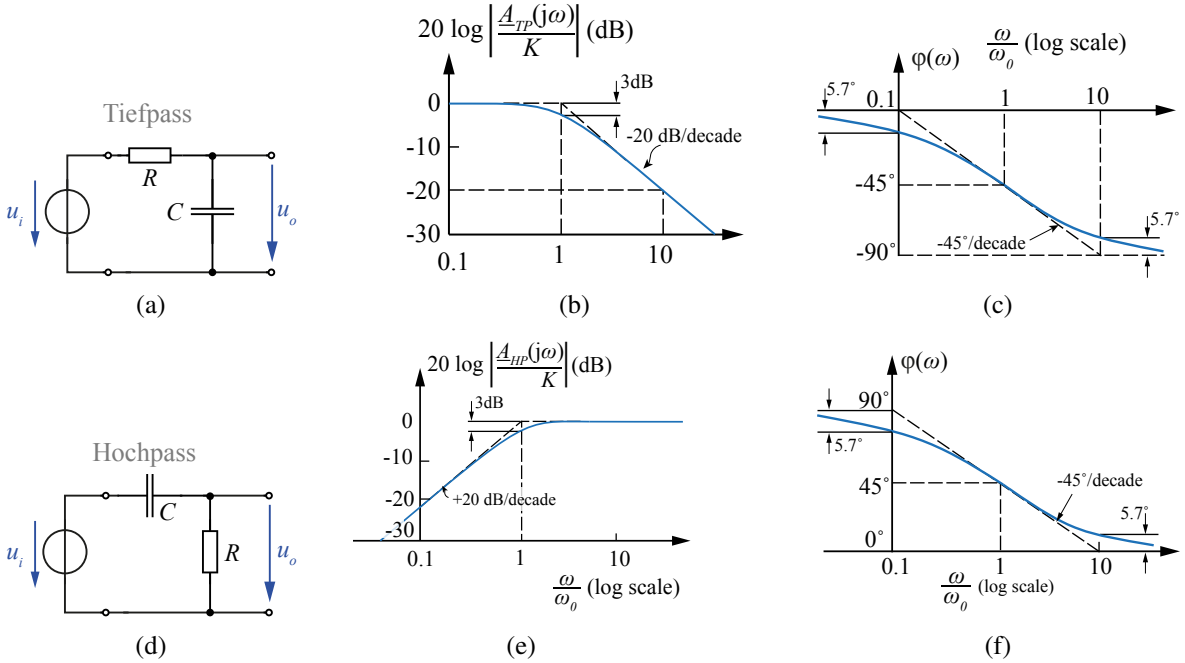


Figure 8.10: a) Schaltbild eines *RC*-Tiefpasses mit Amplitudengang in b) und Phasengang in c). In d) Schaltbild eines *RC*-Hochpasses mit Amplitudengang in e) und Phasengang in f).

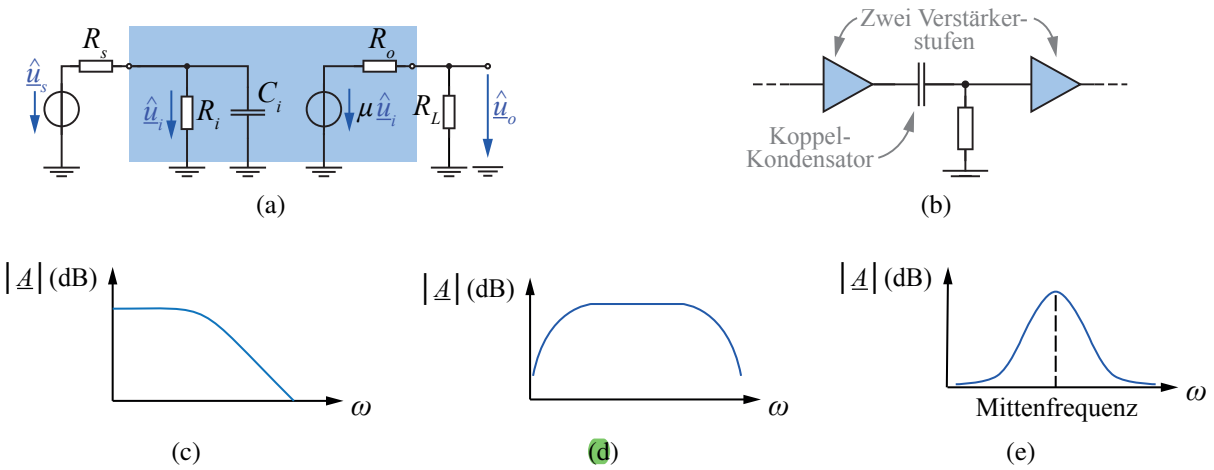


Figure 8.11: a) Beispielschaltung für eine Verstärkerschaltung. b) Kapazitiv gekoppelte Verstärker, die keine Gleichanteile bzw. niederfrequente Signale Verstärkern. c) Amplitudengang eines typischen Gleichspannungsverstärkers mit oberer Grenzfrequenz. d) Amplitudengang eines typischen Wechselspannungsverstärkers mit unterer und oberer Grenzfrequenz. e) Amplitudengang eines typischen Bandpassverstärkers, welcher nur Frequenzanteile in der Nähe der Mittenfrequenz verstärkt.

ern

$$\underline{\hat{u}}_i = \frac{\underline{Z}_i\,\underline{\hat{u}}_s}{\underline{Z}_i + R_s} = \frac{\underline{\hat{u}}_s}{1 + R_s\left[(1/R_i) + \mathrm{j}\omega C_i\right]} \Rightarrow \frac{\underline{\hat{u}}_i}{\underline{\hat{u}}_s} = \frac{1}{1 + (R_s/R_i) + \mathrm{j}\omega C_i R_s} \tag{8.31}$$

$$\text{Standardform: } \frac{\underline{\hat{u}}_i}{\underline{\hat{u}}_s} = \frac{1}{1 + (R_s/R_i)}\,\frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega C_i\left[(R_s R_i)/(R_s + R_i)\right]} \tag{8.32}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{\hat{u}}_o}{\underline{\hat{u}}_s} = \frac{\underline{\hat{u}}_o}{\underline{\hat{u}}_i}\,\frac{\underline{\hat{u}}_i}{\underline{\hat{u}}_s} = \mu\,\frac{1}{1 + (R_o/R_L)}\,\frac{\underline{\hat{u}}_i}{\underline{\hat{u}}_s} \tag{8.33}$$

Die Gleichspannungsverstärkung folgt aus den obigen Gleichungen für $\omega = 0$.

Die 3dB-Grenzfrequenz ergibt sich aus dem Vergleich obiger Standardform mit der Übertragungsfunktion in (8.27). Daraus folgt

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} \qquad \text{und} \qquad \tau = C_i\,\frac{R_s R_i}{R_s + R_i} \tag{8.34}$$

Prinzipiell können Verstärkerschaltungen unter anderem hinsichtlich des Frequenzverhaltens wie folgt klassifiziert werden:

- ▷ Gleichspannungsverstärker (direkt gekoppelte Verstärker) (Abbildung 8.11c)
- ▷ Wechselspannungsverstärker (kapazitiv gekoppelte Verstärker) (Abbildungen 8.11b & 8.11d)
- ▷ Bandpassverstärker (frequenzselektive Verstärker) (Abbildung 8.11e)

8.1.9 Operationsverstärker – Einleitung

Nachdem im vorangegangen Kapitel grundlegende Eigenschaften von Verstärkerschaltungen erläutert wurden, werden im Folgenden verschiedene praktische Verstärkerschaltungen auf Basis von Operationsverstärkern – abgekürzt: OPV – untersucht. Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten sind OPVs aktive Bauelemente, d.h. diese können ein elektrisches Signal verstärken. Mit den OPV können in Abhängigkeit der äusseren Beschaltung verschiedene Funktionen realisiert werden. Beispiele hierfür sind:

- Rechenoperationen, wie z.B.
  - Invertieren
  - Addieren
  - Subtrahieren
  - Integrieren
  - Differenzieren
  - ...
- Strom-/Spannungswandler
- Filter
- Verstärkung analoger Signale
- Komparatoren

Die äussere Beschaltung des Operationsverstärkers besteht dabei meistens aus passiven Bauelementen wie Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten und zum Teil aus Halbleitern wie z.B. Dioden.

Je nach Beschaltungsart unterscheidet man eine Gegenkopplung bzw. eine Mitkopplung, wobei Kopplung hier die Rückführung eines Teils des Ausgangssignals zum Eingang bedeutet. Die Kopplungsart hat einen entscheidenden Einfluss auf das Verhalten der Schaltung, wie später noch erläutert wird. Im Folgenden werden zuerst einige grundlegende Eigenschaften von idealen/realen OPVs erläutert. Im Anschluss daran werden Verstärkerschaltungen mit Gegenkopplung und danach Komparatorschaltungen mit Mitkopplung betrachtet.

8.1.10 Idealer Operationsverstärker

In Abbildung 8.13a ist das Symbol eines allgemeinen Operationsverstärkers (OPVs) dargestellt, wobei die Form des Schaltsymbols auf die Signalflussrichtung hinweist. Dieser hat

- 2 Eingänge: Einen invertierenden (-) und einen nicht-invertierenden (+) Eingang mit Spannung u_P am positiven (+) Eingang und Spannung u_N am negativen (-) Eingang. Das Bezugspotenzial ist Erde/Masse, wobei der OPV keinen separaten Eingang für das Bezugspotenzial hat. Typischerweise ergibt sich das Bezugspotenzial aus dem Verbindungspunkt der beiden Versorgungsspannungen – siehe Abbildung 8.13c
- 1 Ausgang mit der Ausgangsspannung u_a (Bezugspotential: Masse)
- 2 Betriebsspannungsanschlüsse U_{B+} (positive Spannung) und U_{B-} (negative Spannung oder Masse) – siehe Abbildung 8.13c. Über die Betriebsspannungsanschlüsse wird der OPV mit Energie versorgt.

Der OPV hat eine sogenannte Openloop-Verstärkung bzw. Differenzverstärkung v_g (oder auch Leerlaufverstärkung), mit der die Spannungsdifferenz u_{ed} = u_P - u_N zwischen den beiden Eingängen verstärkt wird und am Ausgang zur Verfügung steht, d.h. u_a = v_g u_{ed} (mit $v_g > 0$). Folglich gilt

$$u_a > 0 \quad \text{für} \quad u_P - u_N = u_{ed} > 0 \tag{8.35}$$
$$u_a < 0 \quad \text{für} \quad u_P - u_N = u_{ed} < 0 \tag{8.36}$$

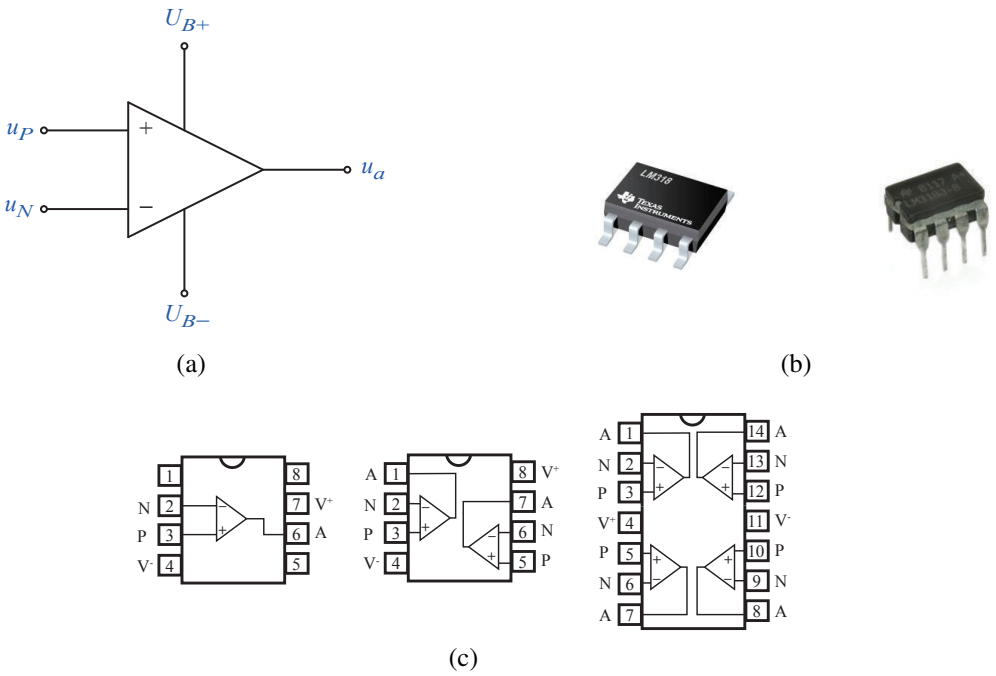


Figure 8.12: a) Symbol eines Operationsverstärkers (OPVs). b) Gehäuse von OPVs - links SMD, rechts DIL. c) Übliche Pinbelegung von OPVs in DIL (dual-in-line) bzw. SMD (surface-mount device) Gehäuse.

Da der OPV auch Gleichspannungen verstärkt handelt es sich um einen direkt gekoppelten (Gleichspannungs-) Verstärker.

Ist der OPV ideal (Abbildung 8.13b), so kann man zudem folgende Eigenschaften annehmen:

- ▷ Eingangswiderstand ist unendlich, d.h. $i_{e+} = i_{e-} = 0$
- ▷ Ausgangswiderstand ist null, d.h. u_a verhält sich wie eine ideale Spannungsquelle (u_a ist unabhängig von i_a)
- ▷ Für die Openloop-Verstärkung gilt $v_g \to \infty$
- ▷ Die Bandbreite des Verstärkers ist unendlich (d.h. v_g ist frequenzunabhängig)
- ▷ Die Gleichtaktverstärkung (dazu später noch mehr) verschwindet
- ▷ Der OPV hat keine parasitären Effekte wie Offset-Spannung, Drift, Temperaturabhängigkeit, etc.

Für den idealen OPV mit $v_g \to \infty$ folgt für u_a im Fall ohne Rückkopplung

$$\begin{array}{lll} u_a = U_{B-} & \text{für} & u_{ed} < 0 \\ u_a = 0 & \text{für} & u_{ed} =!0 \\ u_a = U_{B+} & \text{für} & u_{ed} > 0 \end{array} \tag{8.37}$$

8.1.11 Realer Operationsverstärker

Die Annahme eines idealen OPVs (wie im letzten Abschnitt beschrieben) ist häufig vollkommen ausreichend für Überschlagsrechnungen und für das Betrachten der grundsätzlichen Funktion der Schaltung. Im Folgenden werden einige nicht ideale Eigenschaften von realen OPVs erläutert, bevor die grundlegende Funktionsweise von Verstärkerschaltungen auf Basis von idealen OPVs betrachtet wird.

Reale OPVs bestehen meist aus Transistoren (siehe z.B. Abbildung 8.14a) und weichen normalerweise vom Verhalten idealer OPVs (etwas) ab. Das Verhalten der realen OPVs kann in einem ersten Schritt mit dem einfachen Modell in Abbildung 8.14b beschrieben werden. Dieses hat:

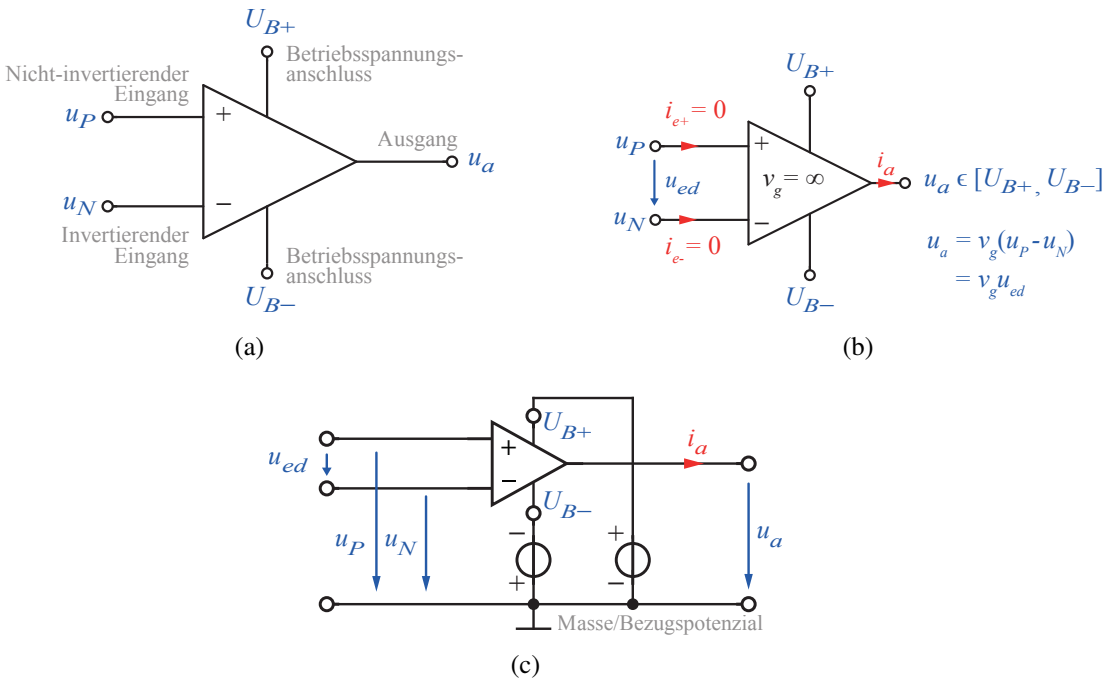


Figure 8.13: a) Anschlüsse eines Operationsverstärkers. b) Idealer Operationsverstärker. c) Versorgungsspannung des OPVs.

- ▷ Endlichen differentiellen Eingangswiderstand r_D
  Typisch $r_D > 10^9\Omega$, d.h. der Eingangsstrom $\neq 0$
- ▷ Nichtverschwindenden Ausgangswiderstand
  Typisch: $r_a = 10\Omega \ldots 1\text{k}\Omega$, d.h. u_a hängt von i_a ab
- ▷ Endliche Differenzverstärkung
  Typisch $v_g > 10000$, d.h. Verstärkung > 80dB

Weiterhin ist der Bereich der Ausgangsspannung u_a durch die Sättigung der Ausgangsstufe des OPVs auf Werte zwischen der positiven und negativen Betriebsspannungen eingeschränkt – siehe Abbildung 8.14d. Zwischen der negativen und der positiven Sättigung ist der annähernd lineare Arbeitsbereich (u_a proportional zu u_{ed}) des OPVs. Die Aussteuergrenze U_{AG} ist vom Betrag her in der Regel um etwa 1V bis 2V kleiner als die jeweilige Betriebsspannung U_B. Sogenannte "rail-to-rail" Operationsverstärker haben einen deutlich erweiterten Aussteuerbereich und die Aussteuergrenze liegt nahe an der jeweiligen Betriebsspannung – der Abstand beträgt typisch ca. 200-400mV.

Die Übertragungs-/Verstärkungskennlinie in Abbildung 8.14d weist typischerweise eine Nullpunktsverschiebung um die sogenannte Eingangsoffsetspannung U_{OS} auf. Dieses Verhalten kann mit dem Modell in Abbildung 8.14c beschrieben werden, bei welchem die Gleichspannungsquelle U_{OS} für das Offset zwischen dem invertierenden Eingang eines idealen, offset-freien OPVs und dem invertierenden Eingang des realen OPVs mit Offset eingefügt ist.

Mit dem Modell ist die Eingangsdifferenzspannung des idealen OPVs $u_{ed} = -U_{OS}$ für den Fall, dass die beiden Eingänge des realen OPVs miteinander verbunden werden, d.h. $u_{ed,K} = 0$. Daraus folgt, dass die Ausgangsspannung für $u_{ed,K} = 0$ gleich $u_a = v_g u_{ed} = v_g(u_{ed,K} - U_{OS})$ ist. Damit folgt die Definition der Offsetspannung: *Die Offsetspannung ist die Spannung, die man am Eingang des OPVs anlegen muss, damit die Ausgangsspannung Null wird.*

Die Eingangsoffsetspannung U_{OS} (Abbildung 8.14d) als Nullpunktsversatzspannung kann dabei positiv oder negativ sein. Manche OPVs haben die Möglichkeit eines Nullpunktabgleichs, der jedoch durch eine Temperaturänderung, eine Betriebsspannungsänderung oder auch eine Gleichtaktspannung u_{CM} (siehe nächster Abschnitt) an beiden Eingängen gestört werden kann.

Neben der Offsetspannung weisen reale OPVs auch einen sogenannten Eingangsoffsetstrom (Input Bias Current) auf, der sich aus den Gleichströmen I_{B1} und I_{B2} ergibt, die in die Eingänge des realen OPVs

hineinfliessen – siehe Abbildung 8.15, für die $i_{e-} = I_{B1}$ und $i_{e+} = I_{B2}$ gilt. Die Ströme werden z.B. durch die Basisströme der beiden Bipolartransistoren T_1 und T_2 in Abbildung 8.14a hervorgerufen. Der Wert der Ströme hängt dabei unter anderem von der verwendeten Technologie (Bipolar-, Feldeffekttransistoren...) ab, mit welcher der OPV realisiert wird. In den Datenblättern der OPVs ist typischerweise der mittlere Eingangsruhestrom I_B sowie der Eingangsoffsetstrom I_{OS} angegeben, wobei die Ströme je nach Technologie typischerweise im Bereich von Pikoampere bis einige hundert Nanoampere liegen.

$$I_B = \frac{I_{B1} + I_{B2}}{2} \quad \text{und} \quad I_{OS} = |I_{B1} - I_{B2}|$$

8.1.12 Realer OPV – Frequenzabhängigkeit der Differenzverstärkung

Wie bereits angemerkt, ist die Differenzverstärkung von realen OPVs nicht unendlich. Typischerweise weist diese häufig Werte von 100dB und mehr im Fall von Gleichspannungen bzw. im Fall von Wechselgrössen mit niedrigen Frequenzen auf. Mit steigender Arbeitsfrequenz nimmt die Differenzverstärkung jedoch ab, so wie dies in Abbildung 8.16 dargestellt ist. Das Frequenzverhalten von OPVs mit einer sogenannten internen Frequenzkompensation kann dabei häufig durch einen Tiefpass 1. Ordnung mit einer Abnahme der Verstärkung von -20dB/Dekade beschrieben/angenähert werden. Die interne Frequenzkompensation wird dabei häufig eingesetzt, um einen stabilen (d.h. nicht schwingen/oszillierenden) Betrieb des Verstärkers über einen weiten Arbeitsbereich zu erreichen. Damit folgt für die Differenzverstärkung in Abhängigkeit der Frequenz

$$\underline{v}_g(\omega) = \frac{v_{g0}}{1 + j\omega/\omega_b} \tag{8.38}$$

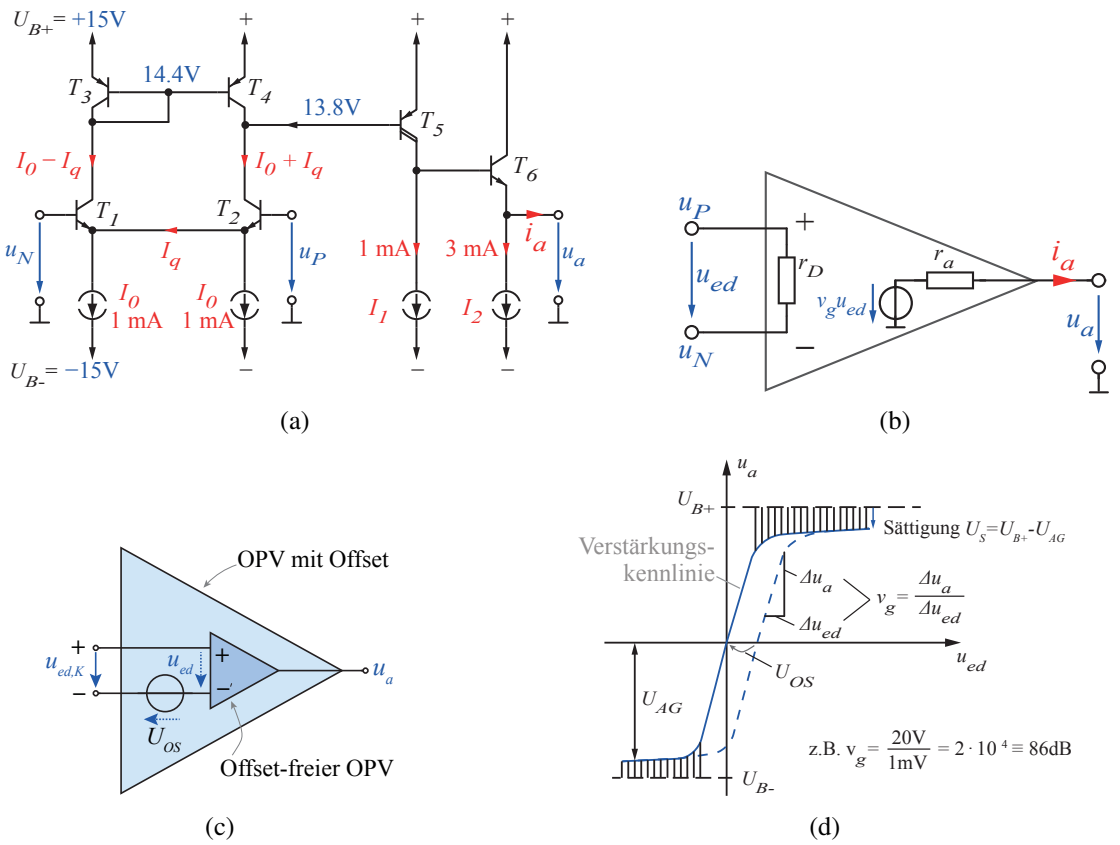


Figure 8.14: a) Vereinfachtes Beispiel für den internen Aufbau eines OPVs bestehend aus Stromquellen und Bipolartransistoren. b) Einfaches Ersatzschaltbild eines OPVs mit differentiellem Eingangswiderstand r_D und Ausgangswiderstand r_a. c) Einfaches Modell für einen realen OPV mit Offsetspannung auf Basis eines idealen OPVs und Quelle U_{OS}. d) Typische Ausgangsspannungskennlinie mit Sättigung der Ausgangsspannung nahe der Betriebsspannung.

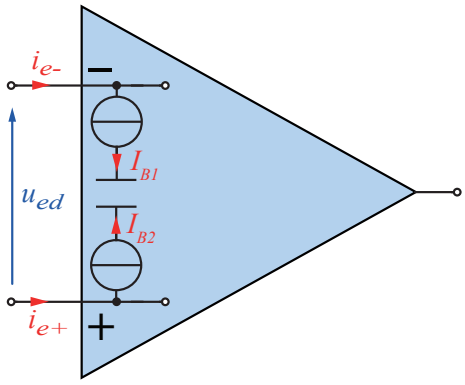


Figure 8.15: OPV mit den beiden Eingangsruheströmen I_{B1} und I_{B2}, die durch zwei Gleichstromquellen modelliert werden.

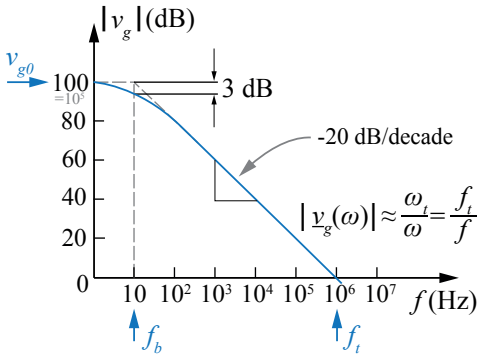


Figure 8.16: Beispiel für die Differenzverstärkung eines "General-Purpose" OPVs mit interner Frequenzkompesation.

Dabei bezeichnet v_{g0} die Gleichspannungsverstärkung und f_b die -3dB Eckfrequenz. Für relativ hohe Frequenzen $\omega \gg \omega_b$ ergibt sich die Näherung für die Differenzverstärkung

$$\underline{v}_g(\omega) \approx \frac{v_{g0}\omega_b}{\mathrm{j}\omega} \qquad |\underline{v}_g(\omega)| \approx \frac{v_{g0}\omega_b}{\omega} \tag{8.39}$$

Bei der Transitfrequenz ω_t wird die Differenzverstärkung $v_g(\omega_t) = 1$ (bzw. 0dB). Diese Transitfrequenz, die häufig in Datenblättern von OPVs angegeben ist, wird häufig auch als "Unity-Gain Bandwidth" bzw. als "Verstärkungs-Bandbreite-Produkt" (d.h. $v_{g0} \cdot \omega_b$) bezeichnet.

$$\omega_t = v_{g0}\omega_b \quad \text{mit (8.39) folgt} \quad \underline{v}_g(\omega) \approx \frac{\omega_t}{\mathrm{j}\omega} \tag{8.40}$$

8.1.13 Realer OPV – Slew Rate

Eine weitere wichtige Kenngrösse für reale OPV ist die sogenannte Slew Rate SR, die die maximal mögliche Anstiegs-/Änderungsgeschwindigkeit der Ausgangsspannung u_a bei grossen Signalamplituden beschreibt (siehe Abbildung 8.17a). Die Anstiegsgeschwindigkeit ist begrenzt durch die endliche Umladegeschwindigkeit interner parasitärer Kapazitäten aufgrund der relativ kleinen Ströme im OPV ($i = C\,{}^{\mathrm{d}u}/_{\mathrm{d}t}$) und beträgt je nach Bauelement typisch

$$SR = 0.5 \ldots 50V/\mu s \quad \text{(High Speed OPV} > 1000\text{V}/\mu s)$$

Beispielhaft soll die Schaltung in Abbildung 8.17b betrachtet werden. Bei dieser soll die Ausgangsspannung idealerweise der Eingangsspannung folgen, d.h. es handelt sich um einen sogenannten Spannungsfolger (Funktionsweise wird später erläutert). In dem Beispiel springt die Eingangsspannung u_e

zunächst von -1V auf +1V und schwingt danach sinusförmig mit steigender Frequenz (Abbildung 8.17a). Als Antwort auf den Sprung ergibt sich ein fast linearer Anstieg mit einem Überschwingen. Der sinusförmigen Eingangsspannung folgt die Ausgangsspannung u_a solange die Frequenz (bzw. das $\mathrm{d}u_a/\mathrm{d}t$) nicht zu hoch ist.

Die Slew Rate SR des OPVs bestimmt dabei, welche Sinusamplitude in Abhängigkeit von der Frequenz noch unverzerrt am Ausgang erzeugt bzw. wiedergegeben werden kann. Der Zusammenhang zwischen maximaler Amplitude $\hat{u}_{a,max}$ und maximaler (Grenz-)Frequenz f_{GB} ergibt sich aus

$$u_a(t) = \hat{u}_a \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u_a(t)}{\mathrm{d}t} = \hat{u}_a \omega \cos \omega t$$
$$\rightarrow \left| \frac{\mathrm{d}u_a(t)}{\mathrm{d}t} \right|_{max} = \hat{u}_{a,max}\omega = SR \rightarrow \hat{u}_{a,max} = \frac{SR}{\omega} = \frac{SR}{2\pi f_{GB}} \tag{8.41}$$

Die Eckfrequenz f_{GB} bezeichnet man als Gross-Signal- bzw. Leistungsbandbreite. Diese gibt an, bis zu welcher Frequenz eine näherungsweise unverzerrte sinusförmige Vollaussteuerung ($\hat{u}_{a,max} \approx U_B$) möglich ist. Die oben eingeführte Transitfrequenz f_t bzw. die Eckfrequenz f_b beziehen sich hingegen mehr auf das Kleinsignalverhalten des OPVs. Die Verläufe der maximalen Aussteuerbarkeit in Abhängigkeit der Frequenz sind in Abbildung 8.18 für zwei typische OPVs (hier LM 741 und LM 318) gegeben. In Tabelle 8.19 sind beispielhaft noch weitere Daten von weit verbreiteten Operationsverstärkern aufgelistet.

8.1.14 Realer OPV – Gleichtaktunterdrückung

Betrachten man einen idealen OPV, so ist die Ausgangsspannung prinzipiell nur von der Differenzspannung $u_{ed} = u_P - u_N$ zwischen den beiden Eingangsklemmen abhängig. Ändern sich hingegen beide Eingangsspannungen um die gleiche Spannung u_{CM} in die gleiche Richtung (also im "Gleichtakt"), so bleibt die Ausgangsspannung idealerweise unverändert (Abbildung 8.20a), da die Spannung u_{CM} bei der Differenzbildung herausfällt

$$u_a = v_g(u_P - u_N) = v_g\left[(u_{d,P} + u_{CM}) - (-u_{d,N} + u_{CM})\right] \tag{8.42}$$

Die Spannung u_{CM} wird dabei allgemein als Gleichtaktspannung (= Common Mode Voltage) bezeichnet. Für die Spannungen am Eingang des OPVs in Abbildung 8.20a gelten dabei folgende Zusammenhänge – siehe auch Abbildung 8.20b:

$$u_P = u_{CM} + u_{d,P} \tag{8.43}$$
$$u_N = u_{CM} - u_{d,N} \tag{8.44}$$
$$\text{Eingangsdifferenzspannung} \quad u_{ed} = u_P - u_N = u_{d,P} + u_{d,N} \tag{8.45}$$
$$\text{Gleichtakt-Eingangsspannung} \quad u_{CM} = \frac{1}{2}(u_P + u_N) \quad (\text{für } u_{d,P} = u_{d,N}) \tag{8.46}$$

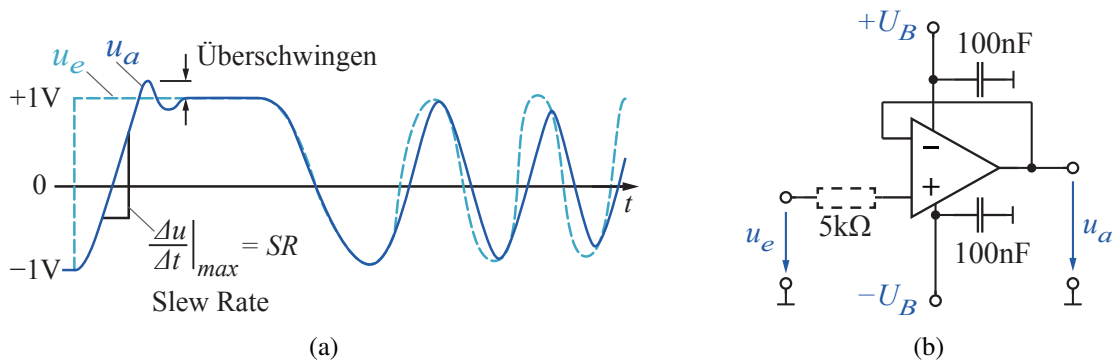


Figure 8.17: a) Beispiel für ein Ausgangssignal u_a eines Spannungsfolgers (siehe b) mit limitierter Slew Rate und Eingangsspannung u_e. b) Spannungsfolger mit limitierter Slew Rate

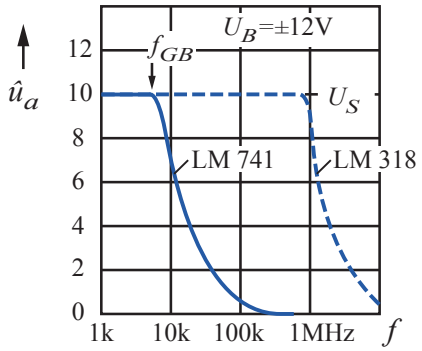


Figure 8.18: Beispiele für die Gross-Signalbandbreite von zwei typischen Operationsverstärkern.

Parameter	Symbol	Standardverstärker		Spezialverstärker		
		µA 741 (bipolar)	TLC 272 (Mos)	OP 177 (präzise)	D 797 (rauscharm)	LM 7171 (schnell)
Differenzverstärkung	A_D	10^5	$4 \cdot 10^4$	**10^7**	$2 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^4$
Gleichtaktunterdrückung	G	$3 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	**10^7**	10^7	$2 \cdot 10^5$
Offsetspannung	U_0	1 mV	1mV	**10 µV**	25 µV	1 mV
Offsetspannungsdrift	$\Delta U_0/\Delta \upsilon$	6 µV/K	2 µV/K	**0,1 µV/K**	0,2 µV/K	35 µV/K
Eingangsruhestrom	I_B	80 nA	**1 pA**	1 nA	250 nA	3 µA
Offsetstrom	I_0	20 nA	0,5 pA	0,3 nA	100 nA	0,1 µA
Offsetstromdrift	$\Delta I_0/\Delta \upsilon$	0,5 nA/K	-	3 nA/K	1 nA/K	1 µA/K
Differenzeingangswiderstand	r_D	1 MΩ	**1 TΩ**	50 MΩ	7,5 kΩ	3 MΩ
Gleichtakteingangswiderstand	r_{Gl}	1 GΩ	**1 TΩ**	200 GΩ	100 MΩ	40 MΩ
Gleichtaktaussteuerbarkeit	$U_{Gl\,max}$	±13 V	0...14 V	±13 V	±12 V	±13 V
Eingangsrauschspannungsdichte	$U_{rd}/\sqrt{\text{Hz}}$	13 nV	25 nV	10 nV	**1 nV**	14 nV
Eingangsrauschstromdichte	$I_{rd}/\sqrt{\text{Hz}}$	2 pA	**1 fA**	0,3 pA	2 pA	2 pA
Maximaler Ausgangsstrom	$I_{a\,max}$	±20 mA	±20 mA	±20 mA	±20 mA	**±100 mA**
Ausgangssteuerbarkeit	$U_{a\,max}$	±13 V	0...13 V	±14 V	±14 V	±13 V
Ausgangswiderstand	r_a	1 kΩ	200 Ω	60 Ω	300 Ω	15 Ω
3 dB-Bandbreite	f_{gA}	10 Hz	50 Hz	0,06 Hz	5 Hz	**10 kHz**
Verstärkungs-Bandbreite-Produkt	f_T	1 MHz	2 MHz	0,6 MHz	110 MHz	**200 MHz**
Slew rate	dU_a/dt	0,6 V/µs	5 V/µs	0,3 V/µs	20 V/µs	**3000 V/µs**
Leistungsbandbreite	f_p	10 kHz	100 kHz	5 kHz	300 kHz	**50 MHz**
Betriebsspannung	U_b	±15 V	0/+15 V	±15 V	±15 V	±15 V
Betriebsstrom	I_b	1,7 mA	1,4 mA	1,6 mA	8 mA	7 mA

Figure 8.19: Parameter von typischen Operationsverstärkern.

Bei realen Operationsverstärkern ändert sich jedoch die Ausgangsspannung ein wenig mit einer sich ändernden Gleichtaktspannung. Das Verhältnis aus der Verstärkung einer Gleichtaktspannung (= Gleichtaktverstärkung A_{CM}) zur Verstärkung einer differentiellen Spannung (Differenzspannung) $u_{ed} = u_P - u_N$ (= Differenzverstärkung v_g) wird als Gleichtaktunterdrückung (CMRR = Common Mode Rejection Ratio) bezeichnet (Abbildung 8.20c). Diese wird meist in dB (decibel) angegeben und ergibt sich aus

$$CMRR = \frac{v_g}{A_{CM}} \rightarrow \quad CMRR_{\text{in dB}} = 20\log_{10}\left(\frac{v_g}{A_{CM}}\right) \tag{8.47}$$

Typische Werte für die Gleichtaktverstärkung A_{CM} sind maximal in der Grössenordnung von 1, d.h. um mehrere Grössenordnungen kleiner als die Differenzverstärkung v_g. Damit ergeben sich typische *CMRR*-Werte von grösser als 80dB ($\widehat{=}$ 10'000) – zum Teil sogar bis zu 130dB.

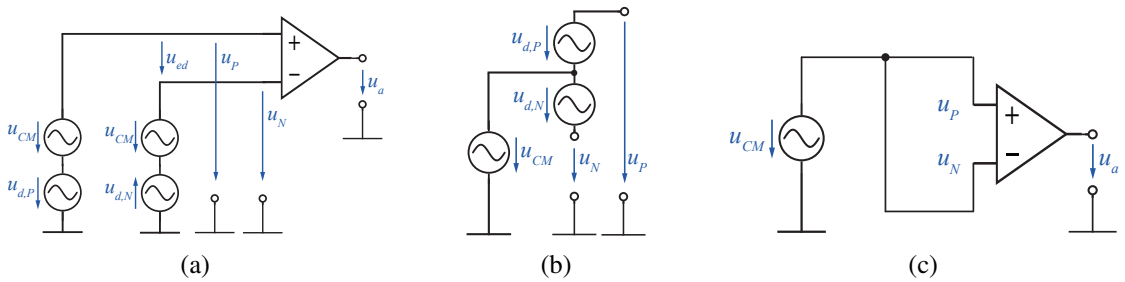


Figure 8.20: a) OPV mit Gleichtaktspannung u_{CM} an den beiden Eingängen. b) Zusammensetzung der Eingangsspannung. c)Messschaltung für die CMRR-Messung (Gleichtaktunterdrückung).

8.1.15 Rückkopplung des OPVs

Bisher wurde nur das prinzipielle Verhalten von OPVs ohne weitere äussere Beschaltung betrachtet. Um eine nutzbare Funktion mit einem OPV zu realisieren, wird eine externe Beschaltung benötigt, die den OPV zu einem vielseitig einsetzbaren Bauteil macht.

Für die externe Beschaltung gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

- ▷ Negative Rückkopplung, d.h. vom Ausgang u_a zum **invertierenden** Eingang – siehe Abbildung 8.21a
- ▷ Positive Rückkopplung, d.h. vom Ausgang u_a zum **nicht-invertierenden** Eingang – siehe Abbildung 8.21b

Die zwei Arten der Rückkopplung werden allgemein für verschiedene Anwendungsgebiete eingesetzt:

- ▷ Negative Rückkopplung: Verstärkerschaltungen
- ▷ Positive Rückkopplung: Komparatorschaltungen

Ein Operationsverstärker mit negativer Rückkopplung (d.h. Gegenkopplung) kann dabei als Regelkreis betrachtet werden, wie später noch erläutert wird.

Im Folgenden wird zuerst der Betrieb des OPVs in Verstärkerschaltungen untersucht, dann der Betrieb als Komparator. Verstärkerschaltungen werden dabei in zwei Gruppen unterteilt:

Nichtinvertierende Verstärker { Das Ausgangssignal hat das gleiche Vorzeichen wie das Eingangssignal, d.h.: u_e positiv $\rightarrow$ u_a positiv

Invertierende Verstärker { Das Ausgangssignal ändert Vorzeichen gegenüber dem Eingangssignal, d.h.: u_e positiv $\rightarrow$ u_a negativ

Bei einfacheren Schaltungen erkennt man den Typ der Verstärkerschaltung meist daran, ob das Eingangssignal am positiven (nicht-invertierenden) oder am negativen (invertierenden) Eingang des OPVs anliegt (wie später noch deutlich wird).

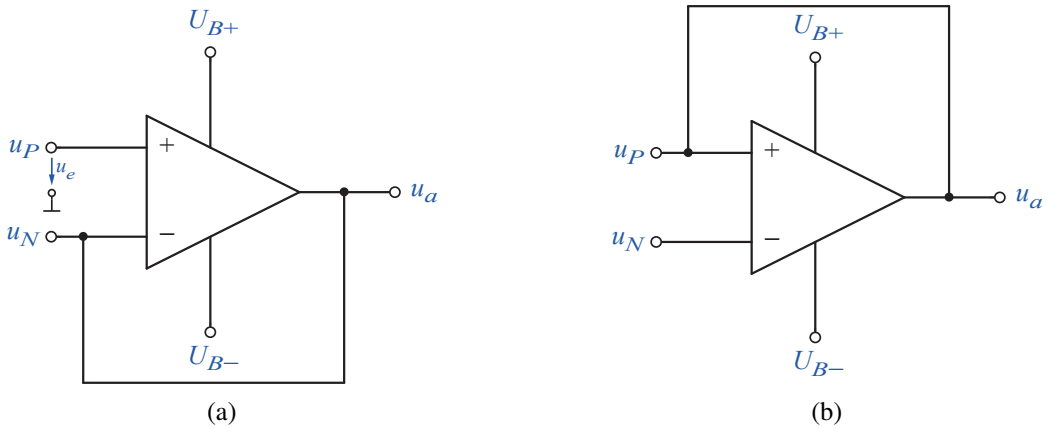


Figure 8.21: a) Negative Rückkopplung – Gegenkopplung – d.h. das Ausgangssignal wird (teilweise) zum invertierenden Eingang zurückgeführt. b) Positive Rückkopplung – Mitkopplung – d.h. das Ausgangssignal wird (teilweise) zum nicht-invertierenden Eingang zurückgeführt.

8.2 Verstärkerschaltungen

Um das Verhalten der Verstärkerschaltung abzuleiten, wird im nächsten Abschnitt der OPV mit äusserer Beschaltung zuerst als eine Art Regelkreis betrachtet. Damit lassen sich grundlegende Eigenschaften der Schaltung ableiten, die dann im Folgenden genutzt werden, um die Berechnung der Verstärkung deutlich zu vereinfachen.

8.2.1 Nicht-invertierender Verstärker als Regelkreis

Bei Verstärkerschaltungen wird im Allgemeinen ein Teil der Ausgangsspannung u_a über ein Gegenkopplungsnetzwerk (z.B. einen Spannungsteiler) an den invertierenden Eingang des OPV zurückgeführt – siehe z.B. Abbildung 8.22a. Mit der Differenzbildung $u_{ed} = u_P - u_N$ am Eingang kann der Operationsverstärker als ein Proportionalregler betrachtet werden, der u_a aufgrund der Rückkopplung so steuert, dass $u_N = \beta u_a$ möglichst genau u_e entspricht, d.h. die Regelabweichung (= Sollwert ($u_e = u_p$) - Istwert u_N) minimal wird. Der dazugehörige Regelkreis ist in Abbildung 8.22b dargestellt. Für diesen folgt

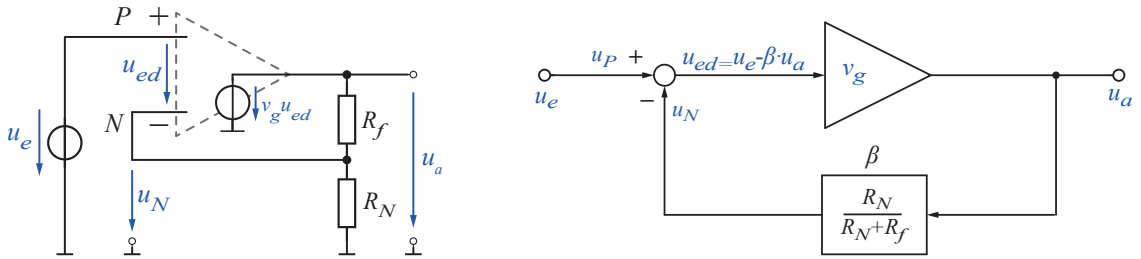
$$\begin{aligned}(u_e - u_N)v_g = (u_e - \beta u_a)v_g &= u_{ed}v_g = u_a \\ \Rightarrow u_e v_g &= u_a + \beta v_g u_a = u_a(1+\beta v_g) \\ \frac{u_a}{u_e} &= \frac{v_g}{1+\beta v_g} = \frac{1}{\frac{1}{v_g}+\beta}\end{aligned} \tag{8.48}$$

Für sehr hohe Werte für die Differenzverstärkung (open loop gain) $v_g = 10^3 \ldots 10^7$ des OPVs folgt somit näherungsweise für die Verstärkung $A = {}^{u_a}/_{u_e}$ der rückgekoppelten Schaltung (closed loop gain)

$$\lim_{v_g \to \infty} \frac{u_a}{u_e} = \frac{1}{\beta} = A \qquad \text{und} \qquad \lim_{v_g \to \infty} u_{ed} = 0 \tag{8.49}$$

Damit ist das Verhalten der Schaltung für $v_g \to \infty$ nur durch das Gegenkopplungsnetzwerk d.h. den Rückkopplungsfaktor β bestimmt. Die Verstärkungs-Eigenschaften des OPVs selbst gehen – solange v_g hinreichend gross ist – nicht in das Übertragungsverhalten ein. In Abbildung 8.22c sind noch die Werte der Spannungen für eine von 0 aus zunehmende Differenzverstärkung v_g gelistet. Dort erkennt man, dass die Eingangsdifferenzspannung u_{ed} mit steigender Verstärkung v_g immer kleiner wird. Dies ergibt sich auch anschaulich aus der Tatsache, dass für endliche Werte von u_a bei steigendem v_g die Spannung u_{ed} aufgrund des Zusammenhangs $u_a = v_g u_{ed}$ immer kleiner werden muss.

Anhand des regelungstechnischen Ersatzmodells soll nun noch die Stabilität für einen beliebigen Arbeitspunkt untersucht werden. Dazu wird zu Beginn angenommen, dass die Schaltung sich in einem Arbeitspunkt befindet, der die Gleichung (8.48) erfüllt. Ausgehend davon wird als nächstes angenommen,



u_e=5 V R_f=R_N=50 kΩ (β=0.5)

v_g= 0	u_a = 0V	u_N = 0V	u_{ed} = 5V
v_g= 1	u_a = 3.33V	u_N = 1.665V	u_{ed} = 3.33V
v_g= 10	u_a = 8.33V	u_N = 4.165V	u_{ed} = 0.833V
v_g= 100	u_a = 9.8V	u_N = 4.9V	u_{ed} = 0.098V
v_g= 1000	u_a = 9.98V	u_N = 4.99V	u_{ed} = 0.00998V
$v_g \to \infty$	u_a =10V	u_N = 5V	u_{ed} = 0 V

(c)

Figure 8.22: Regelungstechnische Betrachtung des nicht-invertierenden Verstärkers mit a) dem Prinzip-Schaltbild eines nicht-invertierenden Verstärkers und b) Regelkreis-Ersatzschaltbild (ESB) des nicht-invertierenden Verstärkers mit $\beta = R_N/(R_N+R_f)$. c) Spannungen für den nicht-invertierenden Verstärker mit zunehmender Verstärkung v_g.

dass die Spannung u_a z.B. aufgrund einer Störung von aussen beispielhaft leicht (z.B. um einige Millivolt) ansteigt $u_a \uparrow$. Mit der steigenden Spannung u_a steigt auch die rückgekoppelte Spannung βu_a etwas an. Der Anstieg der rückgekoppelten Spannung βu_a führt zu einer Verringerung des Eingangssignals $u_{ed} = u_e - \beta u_a$ und dies führt wiederum zu einer Verringerung des Ausgangssignals u_a. Damit wirkt der Regelkreis der Störung entgegen und der Arbeitspunkt ist stabil.

8.2.2 Nicht-invertierender Verstärker mit idealem OPV

Ausgehend von den regelungstechnischen Betrachtungen vom letzten Abschnitt, wird nun der nicht-invertierende Verstärker in Abbildung 8.23a untersucht. Für diesen sind im einfachsten Fall nur die zwei Widerstände R_f und R_N als äussere Beschaltung erforderlich. Die beiden Widerstände bilden einen Spannungsteiler, dessen eine Seite mit dem Bezugspotential Masse verbunden ist. Die geteilte Spannung $u_a \cdot {}^{R_N}/_{(R_N+R_f)}$ wird an den invertierenden Eingang zurückgeführt und definiert damit den Rückkoppelfaktor $\beta = {}^{R_N}/_{(R_N+R_f)}$. Der (feedback/Rückkoppel-) Widerstand R_f schliesst damit den Regelkreis vom Ausgang zum invertierenden Eingang des OPVs im Sinne einer Spannungsgegenkopplung. Dabei ist der Spannungsteiler aus R_f und R_N unbelastet, da der Strom in den invertierenden Eingang verschwindet, d.h. $i_{e-} = 0$.

Wie der Gleichung für die Verstärkung (8.48) zu entnehmen ist, antwortet die Schaltung auf eine positive Eingangsspannung u_e mit einer ebenfalls positiven Spannung u_a am Ausgang. Dies ist auch in der Übertragungskennlinie in Abbildung 8.23b) dargestellt. Die Ausgangsspannung ist dabei prinzipiell durch U_{B+} bzw. U_{B-} begrenzt, da die Ausgangsspannung u_a die Betriebsspannungen des OPVs nicht übersteigen kann (Abbildung 8.23b).

Durch die Spannungsgegenkopplung stellt sich beim nicht-invertierenden Verstärker mit idealen OPV ($v_g \to \infty$) die Ausgangsspannung u_a so ein, dass die Spannung u_N am invertierenden Eingang gleich der Spannung u_P am nicht-invertierenden Eingang ist. Das heisst der Spannungsabfall über R_N ist gleich der Spannung u_P und die Differenzspannung verschwindet: $u_{ed} = 0$. Das Verschwinden der Differenzspannung wird als virtueller Kurzschluss zwischen den beiden Eingängen bezeichnet, der solange vorliegt, wie die Ausgangsspannung u_a nicht durch die Betriebsspannung begrenzt wird.

Auf der Basis des virtuellen Kurzschlusses bzw. unter der Annahme, dass bei Verstärkerschaltungen mit

OPVs die Eingangsdifferenzspannung verschwindet ($u_{ed} = 0$), kann die (closed loop) Verstärkung der Schaltung relativ einfach mit der Maschengleichung für die Masche am Eingang des OPVs abgeleitet werden

$$-u_e + u_{ed} + u_N = 0 \quad \text{im Idealfall gilt: } u_{ed} = 0$$
$$\text{und mit } i_{e-} = 0 \text{ folgt: } u_N = u_a \frac{R_N}{R_N + R_f} \Rightarrow A = \frac{u_a}{u_e} = 1 + \frac{R_f}{R_N} \tag{8.50}$$

Die Gleichung für die Verstärkung gilt bei Operationsverstärkern mit begrenzter Ausgangsspannung nur, wenn die Bedingung $U_{B-} \leq u_a \leq U_{B+}$ erfüllt ist, d.h. wenn die Ausgangsspannung u_a nicht "in der Begrenzung ist".

Für den Spezialfall $R_f = 0$ folgt: $u_a/u_e = 1$, d.h. die Schaltung stellt dann einen „Einsverstärker" dar. Dieser wird normalerweise als Spannungsfolger bezeichnet. Der Widerstand R_N belastet in diesem Fall nur den Ausgang und kann entfallen, so wie dies in Abbildung 8.23c dargestellt ist.

8.2.3 Invertierender Verstärker als Regelkreis

Als zweites wird nun die Verstärkerschaltung in Abbildung 8.24a betrachtet. Bei dieser wird die Eingangsspannung nicht wie beim nicht-invertierenden Verstärker am P-Eingang, sondern am Fusspunkt des Gegenkopplungsspannungsteilers (R_f/R_N) angeschlossen. Der nicht-invertierende P-Eingang wird dabei mit dem Bezugspotenzial verbunden. Das resultierende regelungstechnische Ersatzschaltbild ist in Abbildung 8.24b gegeben. Dieses kann durch Berechnung der Eingangsdifferenzspannung $u_{ed} = u_P - u_N = -u_N$ mittels Überlagerung der beiden Spannungsquellen u_e und $u_a = v_g u_{ed}$ in Abbildung 8.24a abgeleitet werden.

$$\text{Nur } u_e \text{ wirksam } (u_a = 0) \rightarrow u_{N1} = \frac{R_f}{R_N + R_f} u_e \tag{8.51}$$

$$\text{Nur } u_a = v_g u_{ed} \text{ wirksam } (u_e = 0) \rightarrow u_{N2} = \frac{R_N}{R_N + R_f} u_a = \beta u_a \tag{8.52}$$

$$\text{Superposition: } u_N = u_{N1} + u_{N2} \rightarrow u_{ed} = u_P - u_N = 0 - u_{N1} - u_{N2} \tag{8.53}$$

Das Minuszeichen vor dem Teilerfaktor $-R_f/(R_N+R_f)$ für die Eingangsspannung u_e im regelungstechnischen ESB in Abbildung 8.24b folgt aus dem Zusammenhang: $u_{ed} = -u_N$. Beim Rückkoppelfaktor $\beta = R_N/(R_N+R_f)$ ist das Minuszeichen zum Summationspunkt bzw. zum "Soll-Istwert-Vergleich" verschoben.

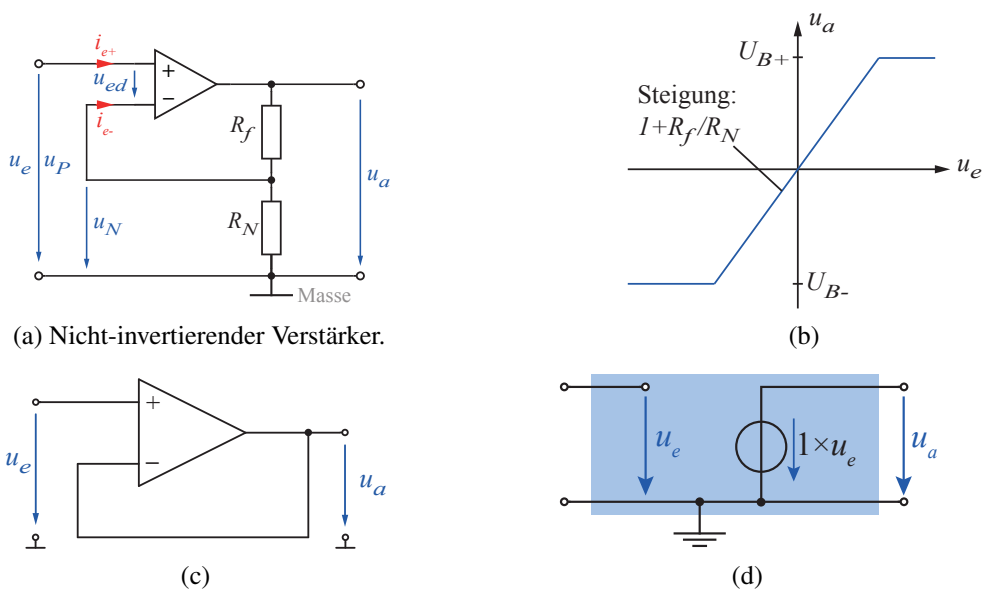


Figure 8.23: Nicht-invertierender Verstärker in a) mit der Spannungsübertragungskennlinie in b). In c) Spannungsfolger mit $u_a = u_e$ (Pufferverstärker) mit Ersatzschaltbild in d).

Mit der berechneten Eingangsdifferenzspannung u_{ed} folgt unmittelbar die Übertragungskennlinie

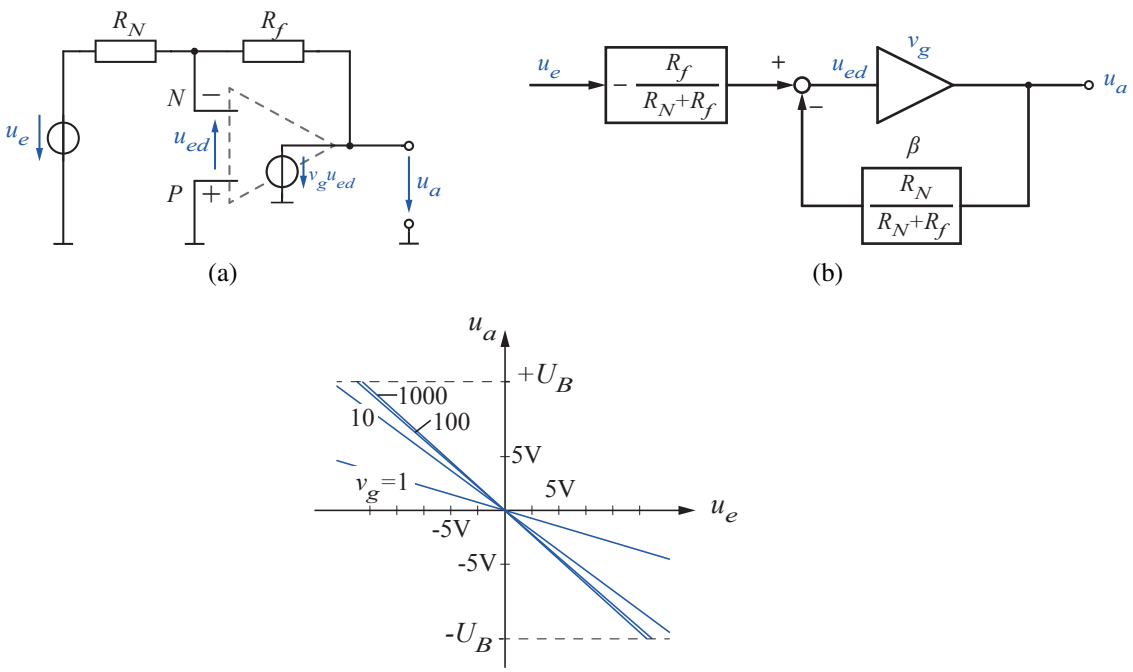
$$u_{ed} = \frac{u_a}{v_g} = -\frac{R_f}{R_N + R_f} u_e - \frac{R_N}{R_N + R_f} u_a$$
$$\Rightarrow \frac{u_a}{u_e} = \frac{-R_f}{R_N + R_f} \frac{1}{\frac{1}{v_g} + \frac{R_N}{R_N + R_f}} \tag{8.54}$$

In Abbildung 8.24d sind die resultierenden Spannungswerte für eine variable Differenzverstärkung v_g gegeben. Wie man der Übersicht entnehmen kann, verschwindet die Eingangsdifferenzspannung u_{ed} auch im betrachteten Fall für steigenden Werte von v_g und für $v_g \to \infty$ folgt wiederum der "virtuelle" Kurzschluss der beiden OPV-Eingänge.

Für sehr hohe Differenzverstärkungen v_g des OPVs folgt für die Verstärkung A der gegengekoppelten Schaltung (closed loop gain)

$$\lim_{v_g \to \infty} \frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_f}{R_N} = A \tag{8.55}$$

d.h. das Verhalten der Schaltung wird wiederum nur durch das Gegenkopplungsnetzwerk bestimmt und für eine positive Eingangsspannung folgt eine negative Ausgangsspannung, d.h. es handelt sich um einen invertierenden Verstärker. Um den Einfluss von v_g auf die Verstärkung A klein zu halten, sollte $v_g \gg \frac{R_N}{R_N + R_f}$ sein.



u_e = 5V, R_f=R_N=50 kΩ (β=0.5)

v_g= 0	u_a = 0V	u_N = 2.5V	u_{ed} = -2.5V
v_g= 1	u_a = -1.66V	u_N = 1.66V	u_{ed} = -1.66V
v_g= 10	u_a = -4.16V	u_N = 0.416V	u_{ed} = -0.416V
v_g= 100	u_a = -4.90V	u_N = 0.049V	u_{ed} = -0.049V
v_g= 1000	u_a = -4.99V	u_N = 0.00499V	u_{ed} = -0.00499V
$v_g \to \infty$	u_{ed} = 0V	Eingang N des OPV liegt virtuell an Bezugspotential	

(d)

Figure 8.24: a) Prinzip-Schaltbild eines invertierenden Verstärkers. b) Regelungstechnisches Ersatzschaltbild des invertierenden OPVs. c) Spannungswerte für verschiedene Verstärkungswerte v_g.

8.2.4 Invertierender Verstärker mit idealem OPV

Auf Basis der vorangegangenen regelungstechnischen Betrachtungen wird nun der invertierende Verstärker in Abbildung 8.25a betrachtet. Für diesen sind im einfachsten Fall nur die zwei Widerstände R_f und R_N als äussere Beschaltung erforderlich, die einen Spannungsteiler zwischen der Ausgangsspannung u_a und der Eingangsspannung u_e bilden. Aufgrund des virtuellen Kursschlusses am Eingang des OPVs ($u_{ed} = 0$) belastet dabei der Widerstand R_N die Quelle für die Eingangsspannung u_e. Aus dem verschwindenden Eingangsstrom des invertierenden Eingangs i_{e-} und dem virtuellen Kurzschluss folgt direkt $i_e = u_e/R_N$, d.h. der Eingangswiderstand des invertierenden Verstärkers ist R_N.

Wie im vorangegangenem Abschnitt abgeleitet, antwortet der invertierende Verstärker auf eine positive Spannung u_e mit einer negativen Spannung u_a. Dabei wird ein Teil der Ausgangsspannung zum invertierenden Eingang rückgeführt, so dass $u_{ed} = 0$ erfüllt ist. Die Kennlinie u_a/u_e ist idealerweise nullpunktsymmetrisch und linear innerhalb der Aussteuergrenzen, die durch die positive und negative Betriebsspannung U_{B+} und U_{B-} gegeben sind (Abbildung 8.25b).

Der Betrag der Ausgangsspannung $|u_a|$ wächst soweit an, bis der zufliessende Steuerstrom i_e praktisch vollständig über den Rückkopplungswiderstand R_f „abgesaugt“ wird, d.h. mit $i_{e-} \approx 0$ folgt $i_e = i_f$). Ein idealer Verstärker ($v_g \to \infty$) benötigt dazu nur eine verschwindend geringe Differenzspannung, d.h. $u_{ed} \approx 0$ (virtueller Kurzschluss).

Mit dem Konzept des virtuellen Kurzschlusses kann auch für den invertierenden Verstärker die Verstärkung unmittelbar aus der Schaltung abgeleitet werden. Vernachlässigt man den sehr kleinen OPV-Eingangsstrom i_{e-} und stellt die beiden Maschengleichungen

$$-u_e + i_e R_N - u_{ed} = 0 \quad \text{und} \quad i_f R_f + u_a + u_{ed} = 0 \tag{8.56}$$

auf, so folgt mit $u_{ed} = 0$ und mit $i_{e-} = 0$ (d.h. $i_e = i_f$) für die Verstärkung der gegengekoppelten Schaltung

$$A = \frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_f}{R_N} \tag{8.57}$$

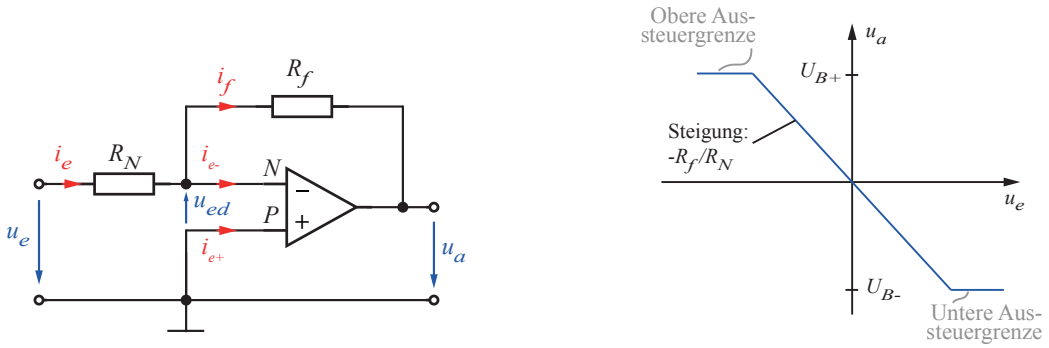
Auch dieser Zusammenhang gilt bei Operationsverstärkern mit begrenzter Ausgangsspannung wiederum nur, wenn die Bedingung $U_{B-} \leq u_a \leq U_{B+}$ erfüllt ist, d.h. wenn die Ausgangsspannung u_a nicht "'in der Begrenzung ist"'.

8.2.5 Beispiel für invertierenden & nicht-invertierenden Verstärker

Im Folgenden werden eine Schaltung für den invertierenden und eine für den nicht-invertierenden Verstärker als Beispiel berechnet. Dabei wird angenommen, dass $R_f = 20k\Omega$ und $R_N = 10k\Omega$ – siehe Abbildung 8.26.

Beispiel invertierender Verstärker: Der als Regler wirkende ideale OPV stellt für u_e =5V die Ausgangsspannung u_a soweit negativ ein, dass $u_{ed} = 0$ wird (virtueller KS). Somit folgt

$$i_{R_N} = \frac{u_e}{R_N} = 0.5\text{mA}$$



(a) (b)

Figure 8.25: Invertierender Verstärker in a) mit der Spannungsübertragungskennlinie in b).

Der Eingangsstrom des idealen OPVs ist $i_{e-} = 0$, d.h. $i_{R_f} = i_{R_N} = 0.5\text{mA}$. Der resultierende Spannungsabfall über R_f ist

$$u_{Rf} = i_{R_f} R_f = 0.5\text{mA} \cdot 20\text{k}\Omega = 10\text{V}$$

Mit der Maschenregel kann die Ausgangsspannung ermittelt werden

$$u_a = -u_{R_f} - u_{ed} = -10\text{V}$$

Die Übertragungsfunktion u_a/u_e für den idealen invertierenden Verstärker ist damit ($u_{ed} = 0,\ i_{R_f} = i_{R_N}$)

$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{-u_{R_f}}{u_e} = \frac{-i_{R_f} R_f}{i_{R_N} R_N} = -\frac{R_f}{R_N} = -2$$

Beispiel nicht-invertierender Verstärker: Der als Regler wirkende ideale OPV stellt u_a so ein, das nach Teilung $R_N/(R_N + R_f)$ der Eingang N dasselbe Potential wie der Eingang P hat, also $u_{ed} = 0$ (virtueller KS). Damit folgt

$$i_{R_N} = \frac{u_e}{R_N} = 0.5\text{mA} \text{ und mit } i_{e-} = 0 \text{ folgt } i_{R_f} = i_{R_N} = 0.5\text{mA}$$

Der Spannungsabfall über R_f ist damit: $u_{R_f} = i_{R_f} R_f = {}^{u_e}/_{R_N} R_f = 10\text{V}$ und mit der Maschenregel kann die Ausgangsspannung ermittelt werden

$$u_a = u_{R_f} - u_{ed} + u_e = +10\text{V} - 0\text{V} + 5\text{V} = +15\text{V}$$

Die Übertragungsfunktion des idealen nicht-invertierenden Verstärkers ist damit

$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{u_e(1 + {}^{R_f}/_{R_N})}{u_e} = \frac{R_N + R_f}{R_N} = 3$$

8.2.6 Vergleich: Invertierender & nicht-invertierender Verstärker

Im Folgenden werden die wichtigsten Eigenschaften des invertierenden und des nicht-invertierenden Verstärkers kurz gegenübergestellt. Die Aussagen treffen nur zu, solange u_a innerhalb der Aussteuerungsgrenzen ist ($U_{B-} \leq u_a \leq U_{B+}$).

Invertierender Verstärker:

- ▷ Der Eingangsstrom i_e wird durch den Strom i_k kompensiert, der über das Gegenkopplungsnetzwerk fliesst.

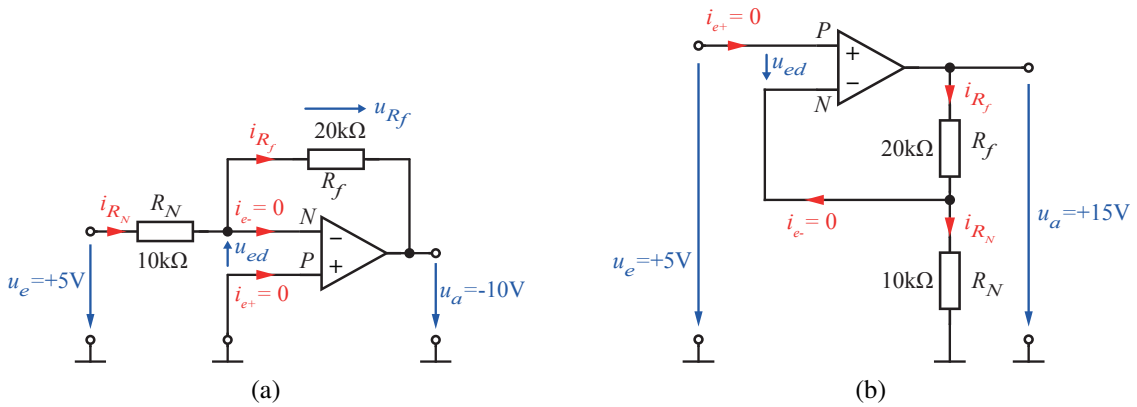
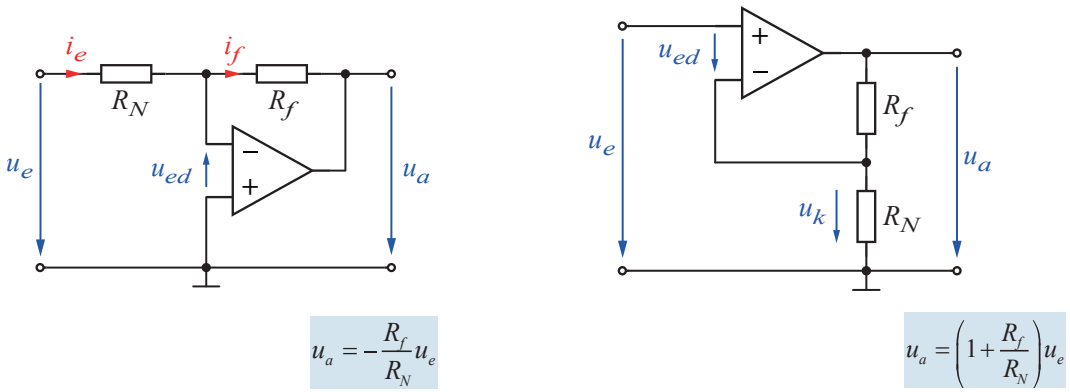


Figure 8.26: Beispielschaltungen für eine invertierende Verstärkerschaltung in a) und eine nicht-invertierende Verstärkerschaltung in b).

- ▷ Der Operationsverstärker wirkt zwischen Ausgang und invertierendem Eingang wie eine Art "Stromquelle". Die Ausgangsspannung stellt sich so ein, dass der Eingangsstrom i_e auch durch R_f fliesst, d.h. die Ströme durch die beiden Widerstände gleich sind: $i_k = i_e$.
- ▷ Der Eingang ist (relativ) niederohmig (Eingangswiderstand $R_{in} = R_N$).
- ▷ Die Ausgangspolarität ist umgekehrt zur Eingangspolarität.
- ▷ Die Gleichtaktaussteuerung ist gleich Null. Die Spannung am invertierenden Eingang bleibt konstant gleich Null (virtueller Kurzschluss), so wie die Spannung am nicht-invertierenden Eingang.
- ▷ Der Betrag der Verstärkung kann auch kleiner als 1 sein.

Nicht-invertierender Verstärker:

- ▷ Die Eingangsspannung u_e wird durch die über das Gegenkopplungsnetzwerk R_f/R_N rückgeführte Spannung u_k kompensiert.
- ▷ Der Operationsverstärker wirkt zwischen dem Ausgang und dem invertierenden Eingang wie eine Stromquelle. Die Ausgangsspannung stellt sich so ein, dass der Strom, der durch R_f fliesst, über R_N den Spannungsabfall $u_k = u_e$ erzeugt, so dass $u_{ed} = 0$.
- ▷ Der Eingang ist hochohmig (ideal $i_{e+} = 0$, d.h. $R_{in} = \infty$).
- ▷ Die Ausgangspolarität ist gleich der Eingangspolarität.
- ▷ Die Gleichtaktaussteuerung ist gleich der Eingangsspannung.
- ▷ Die Verstärkung kann nur grösser/gleich 1 sein.



(a) Invertierender Verstärker. (b) Nicht-invertierender Verstärker.

Figure 8.27: Gegenüberstellung der invertierenden und der nicht-invertierenden Verstärkerschaltung.

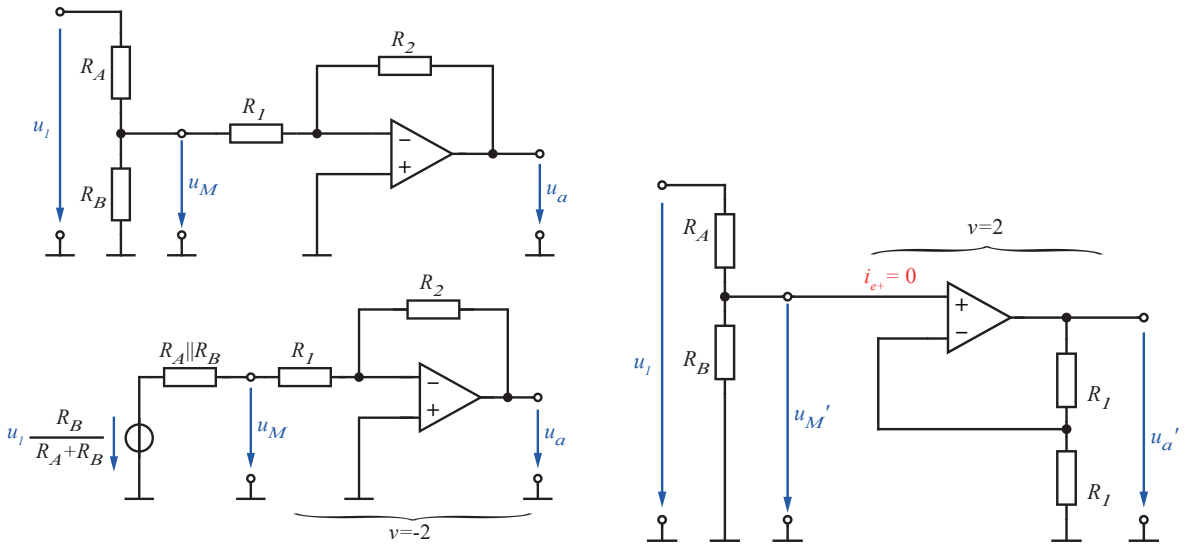
8.2.7 Belastung der Eingangsspannung

Beispiel: In einem Messgerät soll eine hohe Spannung u_1 mittels Spannungsteiler und nachgeschaltetem Verstärker (z.B. für eine Analog-Digital-Wandlung) gemessen/gepuffert werden. Es stellt sich die Frage, ob sich für diese Anwendung ein invertierender oder ein nicht-invertierender Verstärker besser eignet?

Gegeben sind die folgenden Werte: u_1=500V, R_B=3.3kΩ, R_A=330kΩ, R_1=10kΩ und R_2=20kΩ

Variante 1 – Invertierender Verstärker (Abbildung 8.28a):

Zum Berechnen der Ausgangsspannung wird die Quelle u_1 und der Teiler R_A/R_B auf Basis des Satzes der Ersatzspannungsquelle in die Spannungsquelle $U_1{}^{R_B}/(R_A+r_B)$ mit dem Innenwiderstand $R_A||R_B$ umgewandelt. Damit kann dann direkt die Gleichung (8.57) für einen Invertierenden Verstärker angewendet



(a) Spannungsteiler mit invertierendem Verstärker. (b) Spannungsteiler mit nicht-invertierendem Verstärker.

Figure 8.28: OPV-Schaltungen zum Messen der hohen Spannung u_1.

werden, wobei $R_N = R_1 + R_A||R_B$ gilt.

$$u_a = \frac{-R_2}{R_1 + \frac{R_A R_B}{R_A+R_B}} \frac{R_B\, u_1}{R_A + R_B} = \frac{-20\text{k}\Omega\, 500V}{10\text{k}\Omega + 3267.3\Omega} \frac{3.3\text{k}\Omega}{333.3\text{k}\Omega} = -7.46V$$

Der Spannungsteiler wird also durch den invertierenden Verstärker belastet. Die gemessene Spannung u_a ist damit nicht gleich dem um einen Faktor 2 verstärkten (R_2=2R_1) und invertierten Wert (-9.9V) der Ausgangsspannung $u_M = 4.45V$ des unbelasteten Teilers, sondern hängt auch vom Strom ab, der durch den Widerstand R_1 fliesst und den Spannungsteiler belastet.

Variante 2 – Nichtinvertierender Verstärker (Abbildung 8.28b):

Für die Spannung am nicht-invertierenden Eingang ergibt sich mit dem Spannungsteiler:

$$u'_M = \left(u_1 \frac{R_B}{R_A + R_B}\right) = 500\text{V} \frac{3.3\text{k}\Omega}{333.3\text{k}\Omega} = 4.45V$$

Aufgrund des verschwindenden Eingangsstromes $i_{e+} = 0$ des idealen OPV wird der Spannungsteiler nicht belastet. Für die Ausgangsspannung folgt daher:

$$u'_a = v \cdot u'_M = 2 \cdot (4.45V) = 9.9V$$

Folglich ist bei der Messungen einer Spannung mit einem hochohmigen Spannungsteiler der nicht-invertierenden Schaltung der Vorzug zu geben.

8.2.8 Invertierender Verstärker mit hohem Eingangswiderstand

Wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt wurde, belastet der relativ niedrige Eingangswiderstand des invertierenden Verstärkers die Signalquelle für die Eingangsspannung und kann zu einer unerwünschten Beeinflussung des Ausgangssignals bzw. der Verstärkung führen. Dies ist vor allem kritisch, wenn mit dem invertierenden Verstärker ein hoher Verstärkungsfaktor erreicht werden soll und ein hoher Eingangswiderstand erwünscht ist. In diesem Fall müsste der Widerstand R_N in Abbildung 8.27a hohe Werte annehmen, damit der Eingangswiderstand gross wird, und der Widerstand R_f müsste einen noch viel höheren Widerstandswert haben, damit die Verstärkung gross wird. Für eine Verstärkung von $A = -100$ und einen Eingangswiderstand von 1 MΩ müsste R_f gleich 100MΩ sein. Dies ist ein sehr hoher Wert, der nur schwer umsetzbar ist und der zu einer relativ hohen Störempfindlichkeit führen würde.

Um die hohen Widerstandswerte für R_f im Fall von hohen Verstärkungen/Eingangswiderstand zu vermeiden, kann das Rückkoppelnetzwerk des invertierenden Verstärkers so modifiziert werden, wie dies

in Abbildung 8.29 dargestellt ist. Dort findet die Rückkopplung zwischen dem OPV-Ausgang und dem invertierenden Eingang über das Netzwerk bestehend aus R_{f1}, R_{f2} und R_{f3} statt.

Geht man davon aus, dass ein stabiler Arbeitspunkt vorliegt und dass die Ausgangsspannung nicht in der Begrenzung ist, so gilt weiterhin has Konzept des virtuellen Kurschlusses, d.h. $u_{ed} = 0$. Damit ist der Eingangsstrom $i_e = \frac{u_e}{R_N}$. Da weiterhin gilt $i_{e-} = 0$, fliesst der Eingangsstrom i_e wie bisher weiter über R_{f1}, so dass wie bisher $i_e = i_f$ gilt. Damit ergibt sich die Spannung u_{f3} am Knoten $KN3$ aus dem Maschenumlauf:

$$u_{f3} = -u_{ed} - u_{f1} = 0 - R_{f1} i_f = -R_{f1} i_e = -R_{f1} \frac{u_e}{R_N} = -\frac{R_{f1}}{R_N} u_e \tag{8.58}$$

Mit der Spannung am Knoten $KN3$ können die Ströme i_{f3} und i_{f2} berechnet werden.

$$i_{f3} = \frac{u_{f3}}{R_{f3}} = -\frac{R_{f1}}{R_N R_{f3}} u_e \tag{8.59}$$

$$\text{Knotengleichung } KN3: \quad i_{f2} = i_f - i_{f3} = \frac{u_e}{R_N} + \frac{R_{f1}}{R_N R_{f3}} u_e \tag{8.60}$$

Die Ausgangsspannung ergibt sich aus einem Maschenumlauf über R_{f3}, R_{f2} und u_a.

$$u_a = u_{f3} - R_{f2} i_{f2} = -\frac{R_{f1}}{R_N} u_e - \left(\frac{u_e}{R_N} + \frac{R_{f1}}{R_N R_{f3}} u_e \right) R_{f2} \tag{8.61}$$

Damit folgt für die Spannungsverstärkung der rückgekoppelten Schaltung

$$\frac{u_a}{u_e} = -\left[\frac{R_{f1}}{R_N} + \frac{R_{f2}}{R_N} \left(1 + \frac{R_{f1}}{R_3} \right) \right] = -\frac{R_{f1}}{R_N} \left(1 + \frac{R_{f2}}{R_{f1}} + \frac{R_{f2}}{R_{f3}} \right) \tag{8.62}$$

Anschaulich stellen die 3 Widerstände R_{f1}, R_{f2} und R_{f3} aufgrund des virtuellen Kurzschlusses einen Spannungsteiler mit R_{f2} zu $R_{f3} || R_{f1}$ dar, der die Ausgangsspannung u_a teilt, so dass nicht der volle Wert der Ausgangsspannung zurückgekoppelt wird. Damit werden für hohe Verstärkungswerte weniger hohe/extreme Verhältnisse von R_{f1}/R_N benötigt.

Wird wie eingangs schon betrachtet eine Verstärkung von $A = -100$ gefordert, so folgt bei einem Eingangswiderstand von R_N = 1 MΩ für die anderen Widerstände z.B. $R_{f1} = R_{f2} = 1\ M\Omega$ und R_{f3} = 10.2 kΩ. Dabei wurde angenommen, dass keiner der Widerstände grösser als 1 MΩ sein soll/darf.

8.2.9 Einfluss der Verstärkerbandbreite

Bei den bisherigen Berechnungen wurde immer davon ausgegangen, dass die Differenzverstärkung v_g des OPVs sehr hoch ist und nicht von der Frequenz abhängt. Im Abschnitt 8.1.12 wurde jedoch gezeigt, dass sich die Differenzverstärkung von realen OPVs in erster Näherung wie ein Tiefpass erster Ordnung verhält. Im Folgenden soll nun kurz untersucht werden, wie sich die mit der Frequenz abnehmende

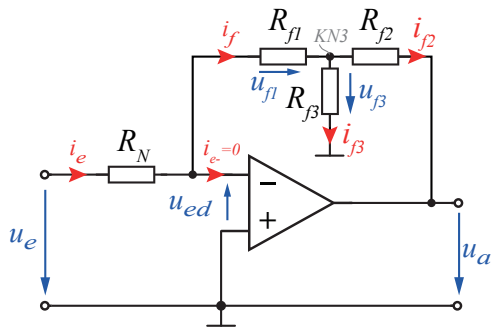


Figure 8.29: Invertierender Verstärker mit hoher Eingangsimpdanz/Verstärkung.

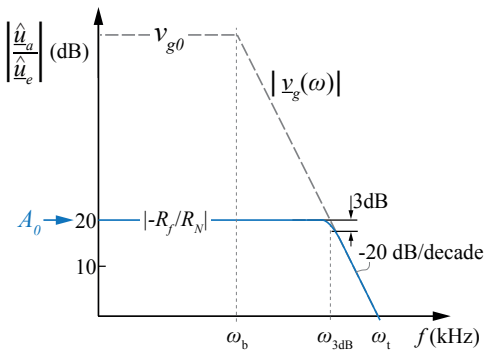


Figure 8.30: Frequenzgang des invertierenden Verstärkers mit $|\underline{A}(0)| = |-10|$=20dB aufgrund einer frequenzabhängigen Differenzverstärkung.

Differenzverstärkung auf das Verhalten der Verstärkerschaltungen auswirkt. Dazu wird beispielhaft der invertierende Verstärker in Abbildung 8.25a betrachtet.

Ausgehend von der allgemeinen Gleichung (8.54) für die Differenzverstärkung des invertierenden Verstärkers ergibt sich durch Umformung:

$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{-R_f}{R_N + R_f} \frac{1}{\frac{1}{v_g} + \frac{R_N}{R_N+R_f}} = -\frac{\frac{R_f}{R_N}}{\frac{1}{v_g}\left(1+\frac{R_f}{R_N}\right)+1} \tag{8.63}$$

Setzt man in diese Gleichung die Näherung (8.38) für die Frequenzabhängigkeit von v_g

$$\underline{v}_g(\omega) = \frac{v_{g0}}{1+\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_b}} = \frac{1}{\frac{1}{v_{g0}} + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_t}} \tag{8.64}$$

mit $\omega_t = v_{g0}\omega_b$ ein, so folgt

$$\underline{A}(\omega) = \frac{\hat{\underline{u}}_a}{\hat{\underline{u}}_e} = -\frac{\frac{R_f}{R_N}}{\frac{1}{v_{g0}}\left(1+\frac{R_f}{R_N}\right)+\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_t}\left(1+\frac{R_f}{R_N}\right)+1} \tag{8.65}$$

Mit der Näherung $v_{g0} \gg \left(1+\frac{R_f}{R_N}\right)$ kann die Gleichung für die frequenzabhängige Verstärkung der rückgekoppelten Schaltung wie folgt vereinfacht werden.

$$\underline{A}(\omega) \approx -\frac{\frac{R_f}{R_N}}{\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_t}\left(1+\frac{R_f}{R_N}\right)+1} = -\frac{\frac{R_f}{R_N}}{1+\frac{\mathrm{j}\omega}{\frac{\omega_t}{\left(1+\frac{R_f}{R_N}\right)}}} \quad \text{mit} \quad \omega_{3dB} = \frac{\omega_t}{\left(1+\frac{R_f}{R_N}\right)} \tag{8.66}$$

Dies entspricht dem Frequenzverhalten eines Tiefpasses erster Ordnung mit der Knickfrequenz ω_{3dB}. Basierend auf dem Frequenzgang der Differenzverstärkung in Abbildung 8.16 ergibt sich der Frequenzgang des invertierenden Verstärkers in Abbildung 8.30.

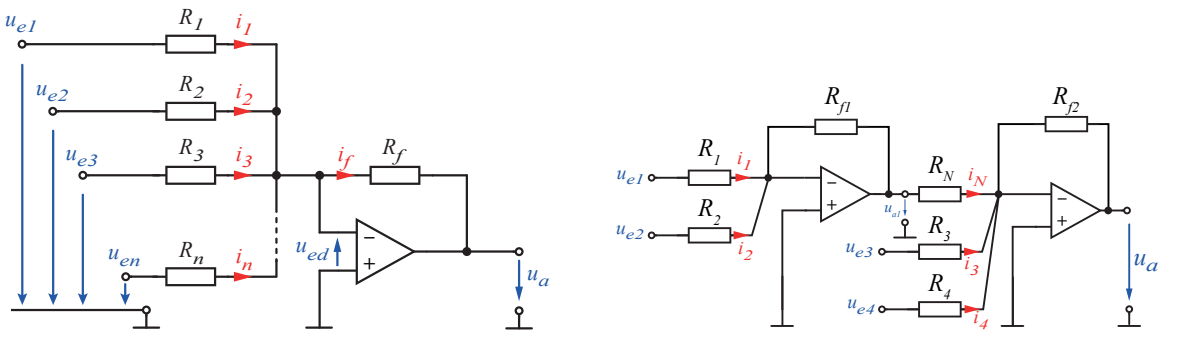
Für den nicht-invertierenden Verstärker in Abbildung 8.23a folgt aus Gleichung (8.48) mit $\beta = {}^{R_N}/_{(R_N+R_f)}$ die Verstärkung:

$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{1}{\frac{1}{v_g} + \frac{R_N}{R_N+R_f}} = \frac{1+\frac{R_f}{R_N}}{\frac{1}{v_g}\left(1+\frac{R_f}{R_N}\right)+1} \tag{8.67}$$

Setzt man hier wieder die Näherung für die Frequenzabhängigkeit der Differenzverstärkung ein, so folgt:

$$\underline{A}(\omega) = \frac{\hat{\underline{u}}_a}{\hat{\underline{u}}_e} \approx= \frac{1+\frac{R_f}{R_N}}{1+\frac{\mathrm{j}\omega}{\frac{\omega_t}{\left(1+\frac{R_f}{R_N}\right)}}} \quad \text{mit} \quad \omega_{3dB} = \frac{\omega_t}{\left(1+\frac{R_f}{R_N}\right)} \tag{8.68}$$

Damit ist die Knickfrequenz für den nicht-invertierenden Verstärker identisch zur Knickfrequenz des invertierenden Verstärkers.



(a) Summierverstärker (Addierer).

(b) Summierverstärker für Addition mit unterschiedlichem Vorzeichen.

Figure 8.31: OPV Schaltungen zum Addieren von mehreren Eingangsspannungen.

8.2.10 Summierverstärker

Ein wichtige Anwendung des invertierenden Verstärkers ist die Bildung von gewichteten Summen von Eingangssignalen mit Hilfe des Summierverstärkers in Abbildung 8.31a. Die Summierschaltung wird dabei aus der invertierenden Grundschaltung durch Hinzufügen der Widerstände ($R_2 \ldots R_n$) am invertierenden Eingang des OPVs gebildet. Unabhängig von der Anzahl der Eingangswiderstände ($R_1 \ldots R_n$) bleibt das Potenzial des invertierenden Einganges aufgrund des virtuellen Kurzschlusses 0V, da $u_{ed} = 0$. Weiterhin folgt aus i_{e-}=0, dass $i_1 + i_2 + \ldots + i_n = i_f$, d.h. die Eingangsströme addieren sich zum Strom i_f durch R_f (d.h. der invertierende Eingang ist der Summierpunkt):

$$
\begin{aligned}
i_1 + i_2 + \ldots + i_n &= \frac{u_{e1}}{R_1} + \frac{u_{e2}}{R_2} + \ldots + \frac{u_{en}}{R_n} = -\frac{u_a}{R_f} = i_f \\
\Rightarrow u_a &= -u_{e1}\frac{R_f}{R_1} - u_{e2}\frac{R_f}{R_2} - u_{e3}\frac{R_f}{R_3} - \ldots - u_{en}\frac{R_f}{R_n}
\end{aligned}
\tag{8.69}
$$

Damit kann über die Wahl des entsprechenden Widerstandswerts $R_1 \ldots R_n$ die Gewichtung der jeweiligen Eingangsspannung festgelegt werden. Dabei ist der Eingangswiderstand für die jeweilige Eingangsspannung gleich dem entsprechenden Widerstand $R_1 \ldots R_n$, d.h. die Eingangswiderstände hängen direkt vom Gewichtungsfaktor ab.

Sollen Spannungen mit unterschiedlichen Vorzeichen addiert werden, so können zwei Summierverstärker in Serie geschaltet werden, so wie dies in Abbildung 8.31b dargestellt ist. Für diese Schaltung ergibt sich die Ausgangsspannung aus

$$
\begin{aligned}
u_{a1} &= -u_{e1}\frac{R_{f1}}{R_1} - u_{e2}\frac{R_{f1}}{R_2} \\
u_a &= -\frac{R_{f2}}{R_N}u_{a1} - u_{e3}\frac{R_{f2}}{R_3} - u_{e4}\frac{R_{f2}}{R_4} \\
u_a &= u_{e1}\frac{R_{f2}}{R_N}\frac{R_{f1}}{R_1} + u_{e2}\frac{R_{f2}}{R_N}\frac{R_{f1}}{R_2} - u_{e3}\frac{R_{f2}}{R_3} - u_{e4}\frac{R_{f2}}{R_4}
\end{aligned}
\tag{8.70}
$$

8.2.11 Subtraktions/-Instrumentationsverstärker

Die Differenz zwischen zwei Signalen kann mit der Subtraktionsschaltung (Differenzverstärker) in Abbildung 8.32a ermittelt werden. Diese besteht aus einer Kombination aus einem invertierenden und einem nicht-invertierenden Verstärker – siehe Abbildung 8.32b. Diese Schaltung findet häufig Einsatz in der Messtechnik z.B. zur Messung der Diagonalspannung einer Wheatstone-Messbrücke oder von Spannungsabfällen, wenn keiner der Messpunkte mit Bezugspotential (Masse) verbunden sein darf.

Die Berechnung der Spannung u_a erfolgt mittels Superposition der Wirkung auf die beiden Eingangsspannungen u_{e1} und u_{e2}. Indem jeweils eine Spannungsquelle unwirksam gemacht wird, d.h. durch einen

Kurzschluss ersetzt, erhält man die beiden Schaltungen in Abbildung 8.32b. Aus diesen folgt:

$$u_{e1} \text{ unwirksam:} \quad u_{a,u_{e1}=0} = -\frac{R_4}{R_3} u_{e2} \tag{8.71}$$

$$u_{e2} \text{ unwirksam:} \quad u_{a,u_{e2}=0} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\left(1+\frac{R_4}{R_3}\right) u_{e1} \tag{8.72}$$

Damit ergibt sich für die Ausgangsspannung mittels Überlagerung:

$$u_a = u_{a,u_{e1}=0} + u_{a,u_{e2}=0} = -\frac{R_4}{R_3} u_{e2} + \frac{R_2}{R_1+R_2}\left(1+\frac{R_4}{R_3}\right) u_{e1} = -\frac{R_4}{R_3} u_{e2} + \frac{R_2\left(1+\frac{R_4}{R_3}\right)}{R_1\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)} u_{e1} \tag{8.73}$$

Mit der Wahl $\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$ folgt

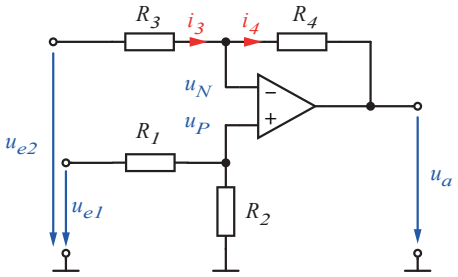
$$u_a = -\frac{R_4}{R_3} u_{e2} + \frac{R_2\left(1+\frac{R_4}{R_3}\right)}{R_1\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)} u_{e1} \xrightarrow{\frac{R_2}{R_1}=\frac{R_4}{R_3}} u_a = \frac{R_2}{R_1}(u_{e1} - u_{e2}) \tag{8.74}$$

d.h. in diesem Fall wird nur die Differenz der beiden Eingangsspannungen $u_{DM} = u_{e1} - u_{e2}$ mit dem Faktor R_2/R_1, d.h. mit der sogenannten Differenzverstärkung $A_{DM} = R_2/R_1$, verstärkt. Im betrachteten Fall dient der Spannungsteiler aus R_1 und R_2 nur dazu, die Verstärkung des nicht-invertierenden Verstärkers von $1 + R_4/R_3$ auf den Wert R_4/R_3 zu reduzieren.

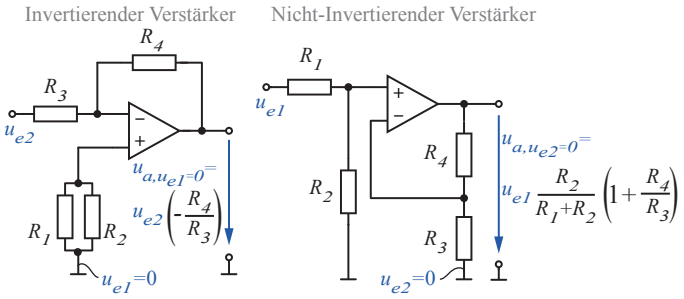
Im Idealfall verstärkt der Differenzverstärker nur die Differenz u_{DM} zwischen den beiden Eingangsspannungen (siehe Abbildung 8.32d) und eine Gleichtaktspannung u_{CM} (Common-mode) sollte die Ausgangsspannung nicht beeinflussen. Die Verstärkung für eine reine Gleichtaktspannung, die sogenannte Gleichtaktverstärkung A_{CM}, ergibt sich mit Abbildung 8.32c bzw. Gleichung (8.73) aus:

$$u_a = -\frac{R_4}{R_3} u_{CM} + \frac{R_2}{R_1+R_2}\left(1+\frac{R_4}{R_3}\right) u_{CM} = \frac{R_1}{R_1+R_2}\left(1-\frac{R_1}{R_2}\frac{R_4}{R_3}\right) u_{CM} \tag{8.75}$$

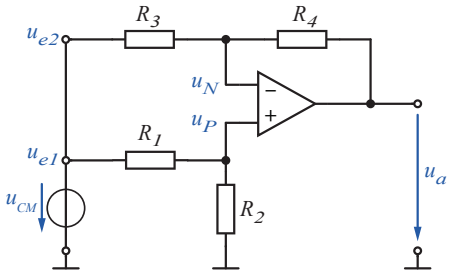
$$\Rightarrow A_{CM} = \frac{u_a}{u_{CM}} = \frac{R_1}{R_1+R_2}\left(1-\frac{R_1}{R_2}\frac{R_4}{R_3}\right) \tag{8.76}$$



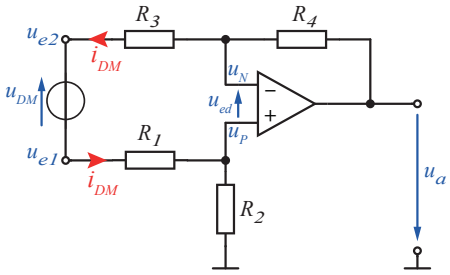
(a) Subtraktionsschaltung (Subtrahierer).



(b) Betrachtung der Subtraktionsschaltung aus a) mittels Superposition zum Berechnen der Ausgangsspannung.



(c) Differenzverstärker mit Gleichtaktspannung u_{CM}.



(d) Differenzverstärker mit Differenzspannung u_{DM}.

Figure 8.32: Differenzverstärker zum Subtrahieren von zwei Signalen.

Für die Wahl $\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$ ist die Gleichtaktverstärkung $A_{CM} = 0$. Allerdings führen Toleranzen bei den Widerständen dazu, dass in der Praxis die Gleichtaktverstärkung nicht vollkommen verschwindet.

Mit der Differenzverstärkung A_{DM} und der Gleichtaktverstärkung A_{DM} kann die Qualität der Schaltung über die Gleichtaktunterdrückung (Common-Mode Rejection Ratio / CMRR) beurteilt werden:

$$CMRR = 20\log_{10}\frac{|A_{DM}|}{|A_{CM}|} \tag{8.77}$$

Im Idealfall verschwindet die Gleichtaktverstärkung und damit wird die Gleichtaktunterdrückung unendlich gross. In der Realität verschwindet A_{CM} aufgrund der Widerstandstoleranzen nicht und die Gleichtaktunterdrückung ist endlich.

Betrachtet man den Differenzverstärker in Abbildung 8.32d so erkennt man, dass aufgrund des virtuellen Kurzschlusses ($u_{ed} = 0$) der Differenz-Eingangswiderstand gleich $R_{DM} = \frac{u_{DM}}{i_{DM}} = R_1 + R_3$ ist. Unter Annahme von $R_4 = R_2$ und $R_3 = R_1$ folgt: $R_{DM} = 2R_1$. Für hohe Werte der Differenzverstärkung resultiert damit meist ein relativ geringer Differenz-Eingangswiderstand, wenn R_4 und R_2 keine unpraktisch hohen Werte annehmen soll.

Um den Differenz-Eingangswiderstand zu erhöhen, kann man jeweils einen einfachen Spannungsfolger (siehe Abbildung 8.23c) vor die beiden Eingänge des Differenzverstärkers schalten. Die beiden vorgeschalteten OPVs kann man jedoch auch dazu nutzen, einen Teil der Signalverstärkung (Differenzverstärkung) zu übernehmen, so dass der eigentliche Subtraktionsverstärker weniger Verstärkung liefern muss. Dies resultiert in den sogenannten Instrumentationsverstärker in Abbildung 8.33a. Dieser ist zweistufig, wobei die erste Stufe – bestehend aus den 2 nicht-invertierenden Verstärkern mit OPV OP_1 und OP_2 – die Eingangssignale u_{e1} und u_{e2} um jeweils den Faktor $1 + \frac{R_2}{R_1}$ verstärkt. Die zweite Stufe bestehend aus OP_3 ist der schon bekannte Differenzverstärker. Damit ergibt sich eine Gesamtverstärkung des Differenzsignals von:

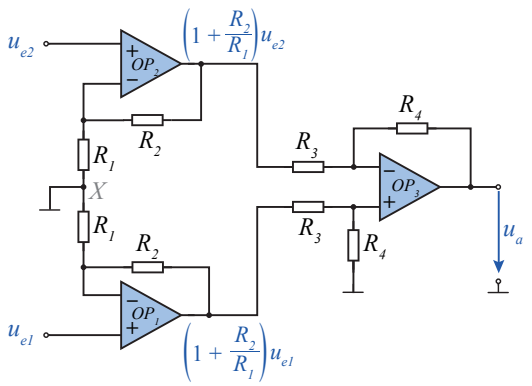
$$A_{DM} = \frac{R_4}{R_3}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \tag{8.78}$$

Der Nachteil der betrachteten Schaltung ist, dass die beiden nicht-invertierenden Verstärker sowohl die Differenz- als auch Gleichtakt-Eingangsspannung verstärken. Damit muss der Differenzverstärker die verstärkte Gleichtaktspannung unterdrücken. Weiterhin kann es dazu kommen, dass OP_1 und OP_2 aufgrund der Aussteuerung durch eine Gleichtaktspannung in die Sättigung gehen (d.h. die jeweilige Ausgangsspannung ist nahe an der Betriebsspannungsgrenze). Weiterhin müssen die beiden Signalpfade über die nicht-invertierenden Verstärker bestehend aus OP_1 und OP_2 absolut symmetrisch sein, damit diese keine unerwünschte Ausgangsspannung hervorrufen. Ein weiterer Nachteil ist, dass zum Anpassen der Verstärkung immer mindestens zwei Widerstände, z.B. R_1, simultan angepasst werden müssen. Dies ist aufgrund der Widerstandstoleranzen kritisch.

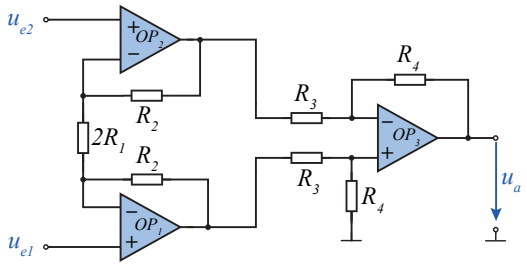
Um die genannten Nachteile zu vermeiden, trennt man die Verbindung zwischen dem Knoten X und dem Bezugspotenzial auf, womit die verbesserte und weit verbreitete Schaltung für einen Instrumentationsverstärker in Abbildung 8.33b resultiert. Aufgrund des virtuellen Kurzschlusses ($u_{ed1} = u_{ed2} = 0$) an den Eingängen der beiden OPVs OP_1 und OP_2 tritt bei dieser Schaltung die Differenzspannung $u_{DM} = u_{e1} - u_{e2}$ direkt über dem Widerstand $2R_1$ auf. Damit fliesst in diesem Widerstand der Strom $u_{DM}/2R_1$, der aufgrund von $i_{e1-} = i_{e2-} = 0$ auch durch die beiden Widerstände R_2 fliesst. Der Strom $i_{DM} = u_{DM}/2R_1$ resultiert in der Spannungsdifferenz $u_{a1} - u_{a2} = i_{DM}(R_2 + 2R_1 + R_2) = u_{DM}\left(1 + R_2/R_1\right)$. Dies ist die Differenzeingangsspannung für den Subtraktionsverstärker bestehend aus OP_3, dessen Ausgangsspannung gleich $u_a = R_4/R_3 u_{DM}\left(1 + R_2/R_1\right)$ ist. Damit ist die Differenzverstärkung wiederum gleich dem Zusammenhang in Gleichung (8.78). Dabei müssen für die Berechnung der Spannungsdifferenz $u_{a1} - u_{a2}$ nicht die beiden Widerstände mit der Bezeichnung R_2 übereinstimmen.

Legt man die Gleichtaktspannung u_{CM} an den Instrumentationsverstärker in Abbildung 8.33c an, so ist $u_{e1} = u_{e2}$ und der Strom durch $2R_1$ verschwindet. Damit sind die beiden Ausgänge der OPVs OP_1 und OP_2 gleich der Eingangsspannung u_{CM}, so dass die erste Stufe die Gleichtaktspannung nicht verstärkt. Dies verbessert die Gleichtaktunterdrückung des Subtraktionsverstärkers bestehend aus OP_3 erheblich, da Differenzspannung durch die erste Stufe bereits verstärkt wurde, während die Gleichtaktspannung gleich geblieben ist.

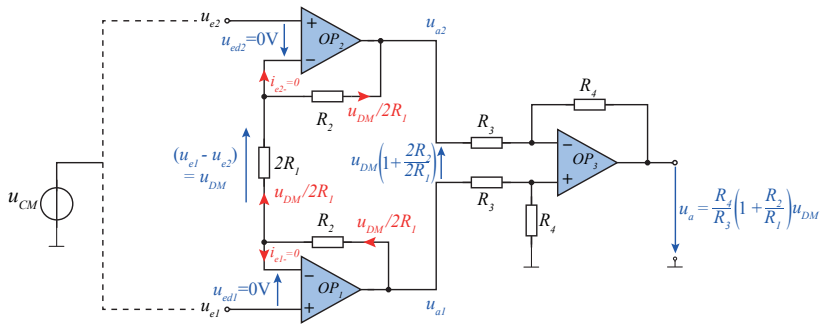
Ein weiterer Vorteil der betrachteten Schaltung für den Instrumentationsverstärker ist, dass die Verstärkung durch einen einzelnen Widerstand $2R_1$ angepasst werden kann.



(a) Instrumentationsverstärker mit geerdetem Knoten X.



(b) Verbesserter Instrumentationsverstärker.



(c) Funktionsweise des Instrumentationsverstärkers aus Abbildung 8.33b.

Figure 8.33: Instrumentationsverstärker zum Subtrahieren von zwei Signalen.

8.2.12 Spannungspuffer und Spannungsquellen

Im Folgendem werden Schaltungen für Spannungs-/Stromquellen auf Basis der oben erläuterten invertierenden / nicht-invertierenden Verstärkerschaltungen untersucht. Ausgangspunkt ist der bereits betrachtete Spannungsfolger in Abbildung 8.34a, der ein Spezialfall des nicht-invertierenden Verstärkers (Abschnitt 8.2.2) ist ($R_f = 0$ & $R_N = \infty$). Die Schaltung besitzt eine Spannungsverstärkung von A = 1 und weist eine sehr hohe Eingangsimpedanz und eine sehr geringe Ausgangsimpedanz auf. Diese Eigenschaften machen den Spannungsfolger zu einem nahezu idealen Puffer-Verstärker für hochohmige Quellen und niederohmige Lasten.

Mit einem solchen Spannungsfolger und einer Referenzspannungsquelle (Abbildung 8.34b links), kann eine näherungsweise ideale Spannungsquelle realisiert werden. Diese erzeugt eine stabile, lastunabhängige Spannung, d.h. sie besitzt den Innenwiderstand 0Ω. Die variable Referenzspannung am nichtinvertierenden Eingang des OPVs wird mit einer Zenerdiode Z_D und einem Potentiometer P (= einstellbarer Spannungsteiler) erzeugt. Für Ausgangsspannungen grösser der Durchbruchspannung U_Z benötigt man eine Spannungsverstärkung. In diesem Fall ist es sinnvoll, die Zenerdiode über den Widerstand R von der stabilisierten Ausgangsspannung her zu versorgen (Abbildung 8.34b – rechts).

Muss die Spannungsquelle einen grösseren Laststrom I_L liefern, als dem OPV direkt entnommen werden kann, so benutzt man einen OPV als Regler und setzt einen "'Längstransistor"' Tr (z.B. Abbildung 8.34c) als variablen Widerstand ein. Derartige "'Serienregler"' oder "'Längsregler"' sind in monolithisch integrierter Form z.B. als sogenannte Festspannungsregler (Abbildung 8.34c – links) verfügbar.

8.2.13 Strompuffer und Stromquellen

Als nächstes wird ein Strompuffer-Verstärker betrachtet. Dieser wandelt einen Strom (hier i_e) in eine Ausgangsspannung (hier u_a) um. Der Strompuffer-Verstärker in Abbildung 8.35a ist ein Spezialfall des invertierenden Verstärkers, bei dem R_N = 0 gilt (Abschnitt 8.2.4). Der "'P-"'Eingang liegt auf 0 Volt und der "'N-"'Eingang stellt wegen dem virtuellen Kurzschluss (u_{ed} = 0) einen virtuellen Nullpunkt (Masse) dar. Weiterhin gilt, dass $i_{e-} = 0$ und damit folgt $i_e = i_f$, d.h. der zufliessende Strom i_e wird vom

OPV-Ausgang über i_f kompensiert. Die Schaltung wird deshalb auch als Saugschaltung bezeichnet.

Da u_{ed}=0 gilt, ist der Spannungsabfall am Widerstand R_f unmittelbar proportional zur Ausgangsspannung u_a, d.h. diese ist dem zu messenden Strom i_e direkt proportional $u_a = -u_{R_f} = -R_f i_f = -R_f i_e$.

Nun wird die Schaltung für eine Konstantstromquelle betrachtet. Diese hat die Aufgabe, einen fest eingeprägten Strom für eine meist variable Last R_L zu erzeugen. Sofern die Last potentialfrei ist (d.h. nicht mit Masse verbunden ist), kann man diese z.B. in den Rückkopplungspfad eines nicht-invertierenden OPVs schalten (Abbildung 8.35b) (– siehe auch nicht-invertierender Verstärker).

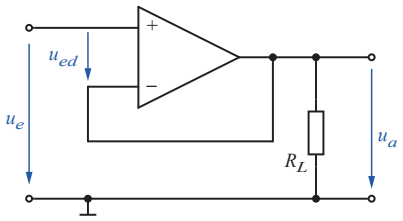
Bei einem idealen OPV mit u_{ed}=0 stellt sich der Laststrom i_L so ein, dass die Spannung über dem Widerstand R_N gleich der Steuerspannung u_e ist und unabhängig vom Lastwiderstand R_L wird. Bei Anschluss der Last über einen Brückengleichrichter (Abbildung 8.35b – rechts) fliesst der Strom unabhängig von der Polarität der Eingangsspannung stets in gleicher Richtung durch die Last. Die Schaltung kann so als hochohmiger Wechselspannungsmesser dienen.

Grössere Lastströme können z.B. mit der Schaltung in Abbildung 8.35c geregelt werden, bei welcher der OPV den Spannungsabfall u_{R_1} über R_1 so regelt, dass $u_{R_1} = u_e$ gilt, womit für den Laststrom folgt: $i_L = u_e/R_1$.

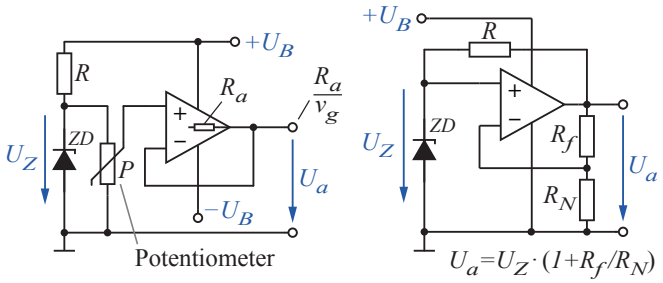
8.2.14 Integrierschaltung

Ausgehend vom invertierenden Verstärker in Abschnitt 8.2.4 wird nun der Rückkopplungswiderstand R_f durch den Kondensator C_f ersetzt. Damit ergibt sich die Grundschaltung eines Integrators in der Form des sogenannten Miller-Integrators in Abbildung 8.36a. Unter der Annahme eines idealen OPVs ($i_{e-} = 0$ und $u_{ed} = 0$) und der Gleichung für den Kondensator $i_C = C\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t$ folgt:

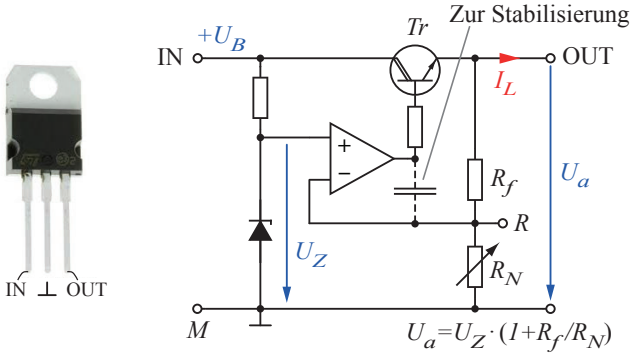
$$i_e = \frac{u_e}{R_N} = i_f \;\rightarrow\; u_a(t) = -u_c(t) = -u_{C0} - \frac{1}{C_f}\int_0^t i_f(t)\mathrm{d}t = -u_{C0} - \frac{1}{R_N C_f}\int_0^t u_e(t)\mathrm{d}t \tag{8.79}$$



(a) OPV-Schaltung eines Spannungsfolgers.



(b) 2 Grundschaltungen für Spannungsquellen, die mittels einer OPV-Schaltung realisiert werden.



(c) Linearer Spannungsregler für grosse Lastströme auf Basis eines OPVs und eines Leistungstransistors. Diese Schaltung ist in Form von integrierten Schaltungen (ICs – siehe links) kommerziell erhältlich.

Figure 8.34: OPV-Schaltungen für einen Spannungsfolger und für Konstantspannungsquellen.

Dabei wurde als Anfangsbedingungen für die Kondensatorspannung angenommen, dass $u_C(0) = u_{C0}$. Die Zeitkonstante des Integrators ist: $\tau = R_N C_f$. Wie man anhand des Minuszeichens in der Gleichung (8.79) erkennt, zeigt der Integrator eine Art "invertierendes" Verhalten.

Die Impulsantwort des Integrators in Abbildung 8.36c ist im betrachteten Fall einer positiven Eingangsspannung u_e durch eine linear abfallende Spannung charakterisiert, die beim Wert Null beginnt, wenn zu Beginn der Integration der Kondensator C_f ungeladen ist. In diesem Fall erreicht die Ausgangsspannung u_a nach Ablauf der Integrationszeit $T_i = C_f R_N$ gerade die Grösse der invertierten Eingangsspannung, d.h. den Wert $-u_e$, und fällt weiter ab, sofern die Eingangsspannung nicht auf Null zurückgeht oder die Polarität wechselt. Nimmt die Eingangsspannung u_e nach der Zeit T den Wert Null an, so behält die Ausgangsspannung den letzten Wert bei.

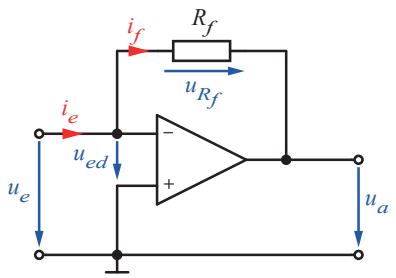
Für eine sinusförmige Eingangsspannung folgt mit der komplexen Wechselstromrechnung oder aus Gleichung (8.79) die Übertragungsfunktion ($\underline{\hat{u}}_a = -\underline{\hat{u}}_C = -I_f \underline{Z}_f = -{}^{I_f}/_{j\omega C_f}$, $\underline{Z}_N = R_N$ und $\underline{\hat{i}}_e = \underline{\hat{i}}_f = {}^{\underline{\hat{u}}_e}/_{\underline{Z}_N}$):

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{\hat{u}}_a}{\underline{\hat{u}}_e} = -\frac{\underline{Z}_f}{\underline{Z}_N} = -\frac{{}^{1}/_{j\omega C_f}}{R_N} = -\frac{1}{j\omega C_f R_N} \tag{8.80}$$

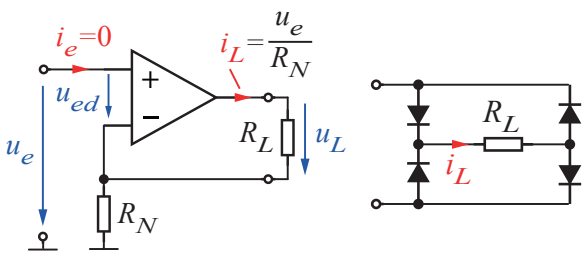
$$\text{mit} \quad |\underline{G}(j\omega)| = \frac{1}{\omega C_f R_N} \quad \text{und} \quad \arg \underline{G}(j\omega) = +90^\circ$$

Die mit der Frequenz ($f = \omega/2\pi$) fallende Übertragungsfunktion (Abbildung 8.36b) lässt sich gut mit dem Integrator realisieren, wenn $|\underline{G}(j\omega)|$ klein im Vergleich zur Differenzverstärkung v_g des OPVs ist (sonst kann der OPV nicht als ideal angenommen werden). Bei der Integratorfrequenz $\omega_{Int} = {}^{1}/_{C_f R_N} = 2\pi f_{Int}$ wird $|\underline{G}(j\omega)|$=1 (siehe Abbildung 8.36b). Weiterhin fällt $|\underline{G}(j\omega)|$ mit -20dB/Dekade mit steigender Frequenz ab. Das heisst, dieser verhält sich wie ein Tiefpass erster Ordnung mit der Eckfrequenz 0.

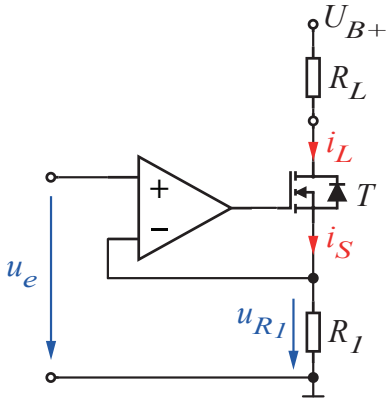
Die Verstärkung des Integrators geht mit $\omega \to 0$ gegen unendlich, d.h. der OPV arbeitet bei Gleichspannungen ohne Gegenkopplung, da der Kondensator bei Gleichspannung durch einen Leerlauf ersetzt wer-



(a) OPV-Schaltung eines Strompuffer-Verstärkers, die den Eingangsstrom i_e in eine Spannung u_a umwandelt.



(b) Stromquellen für potentialfreie Lasten R_L (links) und Brücken-Gleichrichterschaltung mit Last (rechts), die anstelle des Lastwiderstands R_L an die Schaltung links angeschlossen werden kann.



(c) Stromquelle für grosse Lastströme i_L basierend auf einem OPV und dem Leistungs-MOSFET T.

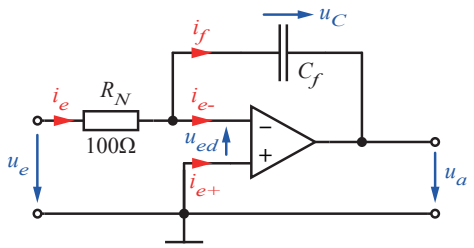
Figure 8.35: OPV-Schaltungen für Stromquellen und zur Umwandlung von Strömen in Spannungen.

den kann. Dies ist problematisch, da bereits kleinste DC-Anteile (z.B. Offset) dazu führen, dass die Ausgangsspannung gegen unendlich bzw. im praktischen Fall in die Begrenzung gehen.

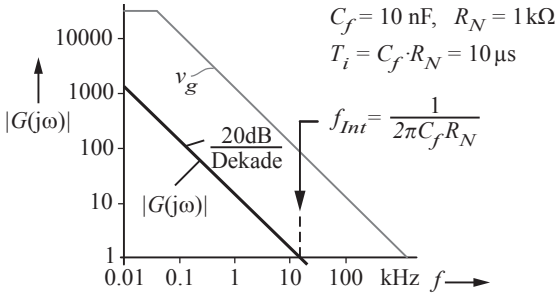
Der Einfluss einer Offsetspannung am Eingang wird in Abbildung 8.36d (oben) verdeutlicht. Dort wird angenommen, dass die Eingangsspannung des Integrators gleich $u_e = 0$ ist und die Offset-Spannung U_{OS} wird beispielhaft als Quelle am nicht-invertierenden Eingang modelliert. Aufgrund der Offsetspannung wird im betrachteten Fall aufgrund des virtuellen Kurzschlusses ($u_{ed} = 0$) auch das Potenzial des invertierenden Einganges auf U_{OS} angehoben, so dass der Eingangsstrom gleich $i_e = -U_{OS}/R_N$ ist. Damit ergibt sich für die Ausgangsspannung:

$$u_a = U_{OS} + \frac{1}{C_f}\int_0^t \frac{U_{OS}}{R_N}\mathrm{d}t = U_{OS} + \frac{U_{OS}}{C_f R_N}t \tag{8.81}$$

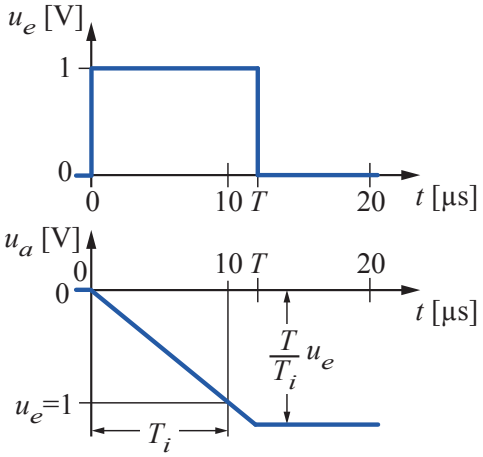
Ein ähnliches Problem entsteht, wenn die Eingangsströme des OPVs nicht verschwinden, sondern gleich den Eingangsruheströmen (bias currents) I_{B1} und I_{B2} sind – siehe Abbildung 8.36d unten. Der Strom



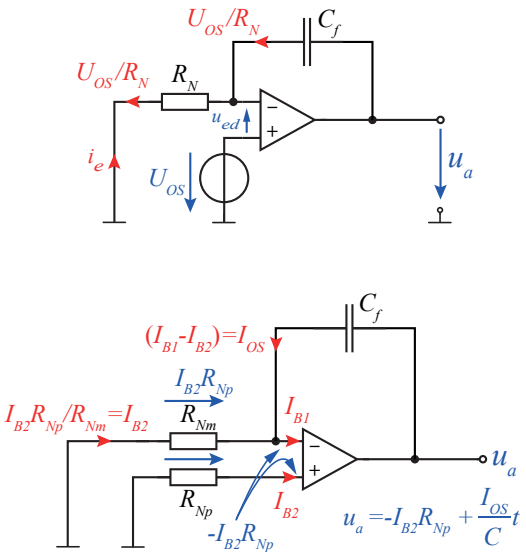
(a) Grundschaltung eines invertierenden Integrators.



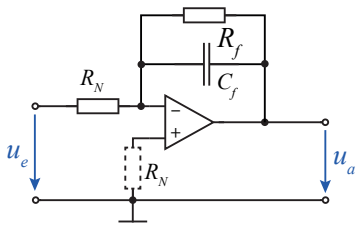
(b) Frequenzgang des Integrators.



(c) Impulsantwort u_a des Integrators auf eine sprungförmige Anregung u_e.



(d) Integrator mit Offsetspannung (oben) bzw. Bias-/Offsetströmen (unten).



(e) Erweiterung des (Miller-)Integrators um R_f, um die Gleichspannungsverstärkung zu limitieren

Figure 8.36: Integratorschaltung basierend auf einem OPV.

I_{B2} ruft aufgrund des Spannungsabfalls über den Widerstand R_{Np} die Spannung $u_P = -I_{B2}R_{Np}$ am nicht-invertierenden Eingang des OPVs hervor. Aufgrund des virtuellen Kurzschlusses ist damit auch das Potenzial am invertierenden Eingang gleich $u_N = -I_{B2}R_{Np}$. Damit ist der Eingangsstrom für den Fall $R_{Np} = R_{Nm}$ gleich $i_e = I_{B2}R_{Np}/R_{Nm} = I_{B2}$ und der Strom, der über den Kondensator C_f fliesst, ergibt sich aus der Differenz $I_{B1} - I_{B2} = I_{OS}$ – dem sogenannten Offsetstrom. Damit folgt für die Ausgangsspannung

$$u_a = -I_{B2}R_{Np} + \frac{1}{C_f}\int_0^t I_{OS}\mathrm{d}t = -I_{B2}R_{Np} + \frac{I_{OS}}{C_f}t \tag{8.82}$$

Um das Problem mit der Offsetspannung/-strom bzw. mit den Gleichgrössen beim Integrator zu reduzieren, wird der Integrator um den Widerstand R_f parallel zu C_f erweitert – siehe Abbildung 8.36e. Dieser Widerstand bietet einen Pfad für die Gleichströme U_{OS}/R bzw. I_{OS} und reduziert die Gleichspannungsverstärkung, so dass die Ausgangsspannung auf $u_a = U_{OS}\,(1 + {}^{R_f}/_{R_N})$ (wie beim nicht-invertierenden Verstärker) bzw. $u_a = -I_{B2}R_N + I_{OS}R_f$ begrenzt ist. Allerdings beeinflusst R_f auch den Frequenzgang des Integrators indem die Eckfrequenz von $\omega_{g,ideal} = 0$ zu $\omega_{g,R_f} = {}^1/_{R_fC_f}$ verschoben wird. Der Frequenzgang für die Schaltung in Abbildung 8.36e lautet:

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{\hat{u}}_a}{\underline{\hat{u}}_e} = -\frac{\underline{Z}_f}{\underline{Z}_N} = -\frac{R_f}{R_N(1 + j\omega C_f R_f)} \tag{8.83}$$

Damit wird deutlich, dass die Wahl von R_f ein Kompromiss zwischen Vermeidung des Problems aufgrund von Gleichspannungen und dem idealen Verhalten eines Integrators ist.

8.2.15 Mittelwertbildung

Die erweiterte Schaltung des Integrators in Abbildung 8.36e kann auch dazu genutzt werden, den Mittelwert eines Signals zu bilden. Dies wird im Folgenden anhand der Schaltung in Abbildung 8.37a erläutert.

Zum Erklären der Funktionsweise wird beispielhaft der Mittelwert $\overline{u}_e$ der unipolaren Eingangsspannungsimpulse u_e in Abbildung 8.37b ermittelt. Innerhalb der Pulsdauer $0 < t \leq t_p$ folgt mit $i_C = i_e - i_R$ (Annahme: u_{ed}=0, i_{e-}=0) für die Ladung in C:

$$Q_E = \int_0^{t_p} i_C\mathrm{d}t = \int_0^{t_p} i_e\mathrm{d}t - \int_0^{t_p} i_R\mathrm{d}t = \frac{1}{R_1}\int_0^{t_p} u_e\mathrm{d}t + \frac{1}{R_2}\int_0^{t_p} u_a\mathrm{d}t \tag{8.84}$$

In der Pause zwischen zwei Impulsen $t_p < t \leq T$ wird C über R_2 entladen und es folgt mit $u_e = 0$ ($i_e = 0$), $i_C = -i_R$ und $i_R = {}^{u_{R2}}/_{R_2} = -{}^{u_a}/_{R_2}$ ($u_{ed} = 0$):

$$Q_A = -\int_{t_p}^{T} i_C\mathrm{d}t = \int_{t_p}^{T} i_R\mathrm{d}t = -\frac{1}{R_2}\int_{t_p}^{T} u_a\mathrm{d}t \tag{8.85}$$

Im Gleichgewichtszustand muss $Q_E = Q_A$ sein und damit folgt:

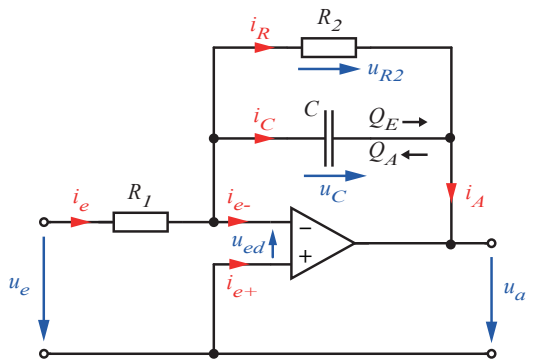
$$\begin{aligned}\frac{1}{R_1}\int_0^{t_p} u_e\mathrm{d}t &= -\frac{1}{R_2}\int_0^{t_p} u_a\mathrm{d}t - \frac{1}{R_2}\int_{t_p}^{T} u_a\mathrm{d}t = -\frac{1}{R_2}\overline{u}_a T \\ \Rightarrow \overline{u}_a &= -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{T}\int_0^{t_p} u_e\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{8.86}$$

In Abbildung 8.37b ist der Einschwingvorgang der Mittelwertschaltung für eine pulsförmige Eingangsspannung mit mit $u_C(t=0) = 0$ dargestellt.

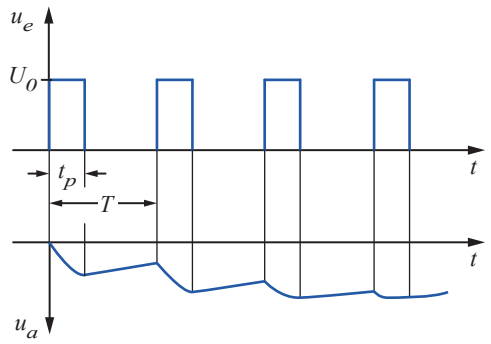
8.2.16 Frequenzabhängige Rückkopplung

Nun wird die allgemeine Übertragungsfunktion des invertierenden Verstärkers mit beliebigen Impedanzen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ und idealem OPV (u_{ed}=0 & i_{e-}=0) betrachtet. Die Herleitung ist analog zu Abschnitt 8.2.4 nur erfolgt diese für die allgemeinen Impedanzen auf Basis der komplexen Wechselstromrechnung.

$$\underline{\hat{i}}_1 = \frac{\underline{\hat{u}}_e}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_{Z2}}{\underline{Z}_2} = -\frac{\underline{\hat{u}}_a}{\underline{Z}_2} \;\rightarrow\; \frac{\underline{\hat{u}}_a}{\underline{\hat{u}}_e} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = \underline{G}(s) \tag{8.87}$$

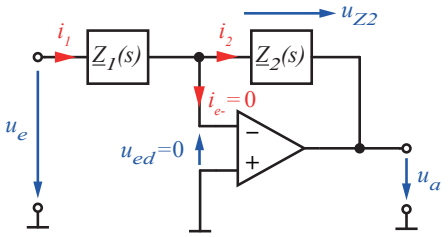


(a) Schaltung zum Ermitteln des Mittelwertes der Eingangsspannung u_e.

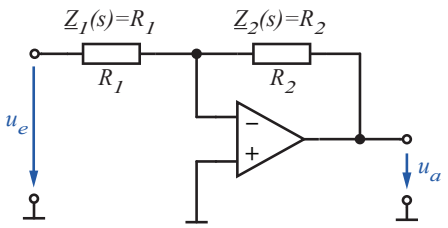


(b) Zeitlicher Verlauf der Ausgangsspannung u_a bei pulsförmiger Eingangsspannung u_e.

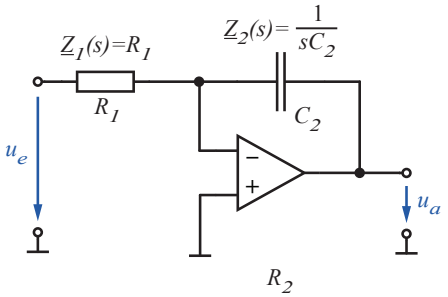
Figure 8.37: Schaltung zum Berechnen des Mittelwerts der Spannung u_e.



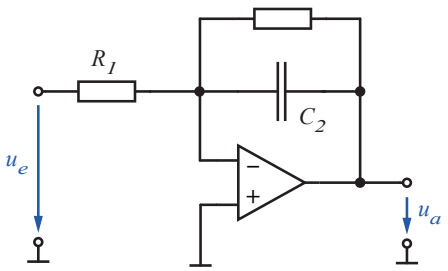
(a) Allgemeiner invertierender Verstärker mit Impedanzen.



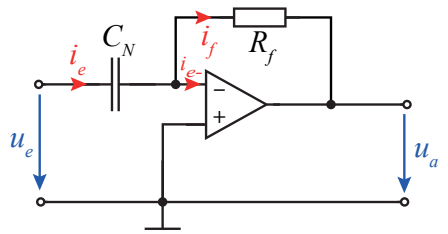
(b) Inverter.



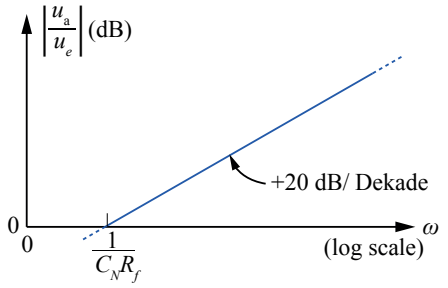
(c) Integrator.



(d) Tiefpassfilter.



(e) Differenzierer.



(f) Frequenzgang des Differenzierers.

Figure 8.38: OPV-Schaltungen mit frequenzabhängiger Rückkopplung zum Realisieren von typischen Übertragungsfunktionen.

Eine vorgegebene frequenzabhängige Übertragungsfunktion kann also durch entsprechende Wahl von $\underline{Z}_1(s)$ und $\underline{Z}_2(s)$ realisiert werden. Im Folgenden sind einige Beispiele für typische Funktionen aufgelistet.

Inverter (Abschnitt 8.2.4):

$$\underline{G}(s) = -k \rightarrow \underline{Z}_1 = R_1 \text{ und } \underline{Z}_2 = R_2, \text{ d.h. } k = {}^{R_2}/_{R_1}$$
$$\Rightarrow \frac{\underline{\hat{u}}_a}{\underline{\hat{u}}_e} = -\frac{R_2}{R_1} = \frac{u_a}{u_e} \tag{8.88}$$

Integrator (Abschnitt 8.2.14):

$$\underline{G}(s) = -\frac{1}{sT} \rightarrow \underline{Z}_1 = R_1 \text{ und } \underline{Z}_2 = \frac{1}{sC_2}$$
$$\Rightarrow \frac{\underline{\hat{u}}_a}{\underline{\hat{u}}_e} = -\frac{{}^{1}/_{sC_2}}{R_1} = -\frac{1}{sR_1C_2} \tag{8.89}$$

Tiefpassfilter:

$$\underline{G}(s) = -\frac{k}{1+sT_T} \rightarrow \underline{Z}_1 = R_1 \text{ und } \underline{Z}_2 = R_2||C_2 = \frac{R_2}{1+sR_2C_2}$$
$$\Rightarrow \frac{\underline{\hat{u}}_a}{\underline{\hat{u}}_e} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+sR_2C_2} \quad \text{mit} \quad k = \frac{R_2}{R_1} \text{ und } T_T = R_2C_2 \tag{8.90}$$

Differenzierer:

Der Differenzierer entsteht aus dem Integrator durch Vertauschen von C und R. Die Übertragungsfunktion – siehe Abbildung 8.38f – des Differenzierers lautet:

$$\underline{G}(s) = -sT_D \rightarrow \underline{Z}_1 = \frac{1}{sC_N} \text{ und } \underline{Z}_2 = R_f$$
$$\Rightarrow \frac{\underline{\hat{u}}_a}{\underline{\hat{u}}_e} = -\frac{R_f}{\frac{1}{sC_N}} = -sR_fC_N \quad \text{mit} \quad T_D = R_fC_N \tag{8.91}$$

Der Schnittpunkt der Übertragungsfunktion mit der 0dB-Linie ($|G(s)| = 1 = 0dB$) liegt bei $\omega_{Diff} = {}^{1}/_{C_NR_f}$. Da der Differenzierer hochfrequente Signale und somit das Rauschen stark anhebt, wird die Schaltung wenn möglich vermieden, oder die Bandbreite wird mit einem Widerstand in Serie zu C_f begrenzt.

8.2.17 PI-Regler

Mit Hilfe der allgemeinen Übertragungsfunktion für den invertierenden Verstärker im Abschnitt 8.2.16 wird nun mit der OPV-Schaltung in Abbildung 8.39a ein PI-Regler realisiert. Die Übertragungsfunktion eines PI-Reglers ist

$$\underline{G}(s) = -k_R\frac{1+sT_R}{s} \tag{8.92}$$

Der dazugehörige Frequenzgang ist in Abbildung 8.39b gegeben. Mit der Wahl von $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ als

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \frac{1}{sC_2} \text{ und } \underline{Z}_1 = R_1 \tag{8.93}$$

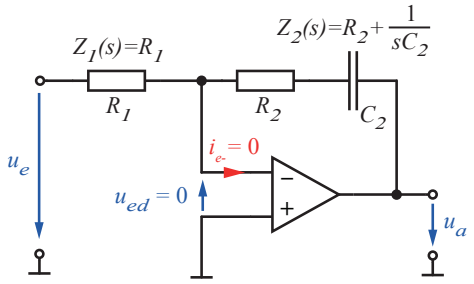
folgt

$$\underline{G}(s) = -\frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{R_1} = -\frac{1+sR_2C_2}{sR_1C_2} \tag{8.94}$$
$$\text{mit } k_R = \frac{1}{R_1C_2} \text{ und } T_R = R_2C_2$$

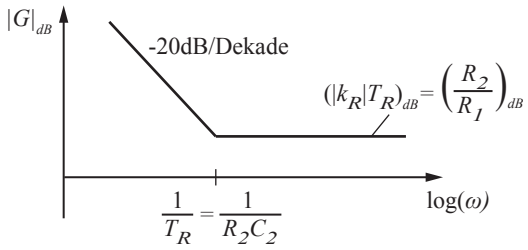
Bei vorgegebenen Werten für die Verstärkung k_R und die Zeitkonstante T_R kann ein Bauelement – z.B. die Kapazität C_2 – frei gewählt werden.

Es sollen z.B. die folgenden Parameter realisiert werden: $T_R = 0.53\text{s}$ und $k_R = 5.75\text{s}^{-1}$. Damit ergeben sich für die frei gewählte Kapazität $C_2 = 25\mu\text{F}$ und die Widerstandswerte $R_1 = 6.95\text{k}\Omega$ sowie $R_2 = 21.2\text{k}\Omega$.

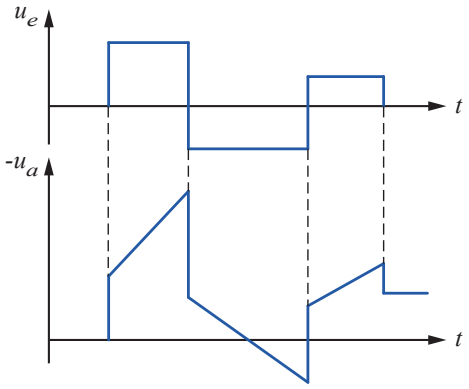
In Abbildung 8.39c ist beispielhaft der zeitliche Verlauf der Ausgangsspannung des PI-Reglers auf eine sprungförmige Änderung am Eingang gegeben, wo man deutlich den P- (Sprung in u_a) und den I-Anteil (rampenförmiger Anstieg von u_a) des Reglers erkennt.



(a) OPV-Schaltung eines PI-Reglers.



(b) Frequenzgang des PI-Reglers.



(c) Zeitlicher Verlauf der Ausgangsspannung u_a des PI-Reglers bei sprungförmiger Anregung u_e.

Figure 8.39: OPV-Schaltung eines PI-Reglers.

8.2.18 Sample & Hold / Abtast-Halte-Glied

Um analoge Signale in digitale Signale umzuwandeln, müssen diese abgetastet werden. Bei der Abtastung wird dem analogen Signal in regelmässigen zeitlichen Abständen, die sich aus dem Kehrwert der Abtastfrequenz ergeben, der gerade aktuelle Wert des Analogsignals entnommen. Die Abtastung (d.h. die zeitliche Diskretisierung) einer zeitlich veränderlichen Grösse $u_e(t)$ erfolgt dabei mit einem sogenannten Abtast-Halte- (Sample & Hold / S-&-H) Glied, welches zu definierten Zeitpunkten die Augenblickswerte aus dem analogen Signal $u_e(t)$ entnimmt (Sample) und zwischengespeichert (Hold). Da die analog-digital (A/D) Wandlung (d.h. die Diskretisierung der Amplitude) nicht unendlich schnell abläuft, muss der abgetastete Wert für eine gewisse Dauer konstant gehalten werden, damit keine Fehler bei der Umwandlung entstehen. Da solche Abtast-Halte-Glieder auf analogen Operationsverstärkern basieren, wird deren prinzipieller Aufbau im Folgenden kurz als weiteres Anwendungsbeispiel für Operationsverstärker erläutert.

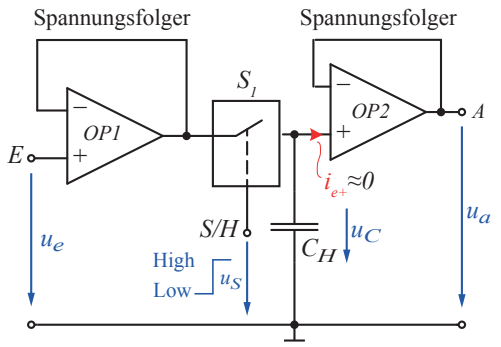
In Abbildung 8.40a ist ein einfaches S-&-H Glied aus 2 Spannungsfolgern, einem Schalter S_1 und einem Kondensator C_H gegeben. Über den Spannungsfolger $OP1$ wird bei geschlossenem S_1 der Kondensator C_H auf die Spannung u_e aufgeladen bzw. die Kondensatorspannung u_c folgt u_e. Dabei wird die maximale Änderungsgeschwindigkeit der Kondensatorspannung v.a. durch den Ausgangswiderstand des nicht idealen $OP1$ und den Wert C_H bestimmt.

Nach dem Öffnen des Schalters bleibt der Kondensator auf der aktuellen Spannung u_c geladen, da C_H durch den nicht-invertierenden Eingang des 2. Spannungsfolgers (OP2) idealerweise nicht belastet wird ($i_{e+} \approx 0$). Der 2. Spannungsfolger stellt die Kondensatorspannung niederohmig (ideal: $R_a \approx 0$) z.B. für einen nachfolgenden A/D-Wandler zur Verfügung.

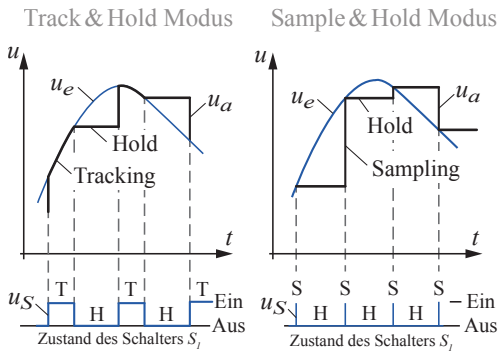
Bei S-&-H Gliedern unterscheidet man zwei verschiedene Betriebsarten (Abbildung 8.40b). Beim Track & Hold-Modus wird über eine relativ lange Track-Zeit T die Kondensator- u_C bzw. Ausgangsspannung u_a der Eingangsspannung u_e nachgeführt, bevor auf den Haltemodus H umgeschaltet wird.

Beim Sample & Hold-Modus dagegen steht nur eine kurze Sample-Zeit S zur Verfügung, während dieser der Schalter S_1 geschlossen ist.

Bei dem einfachen Abtast-Halte-Glied in Abbildung 8.40a, die auf zwei Spannungsfolgern basiert, addieren sich bei gleichem Vorzeichen die Offsetspannungen der beiden Spannungsfolger, so dass insgesamt

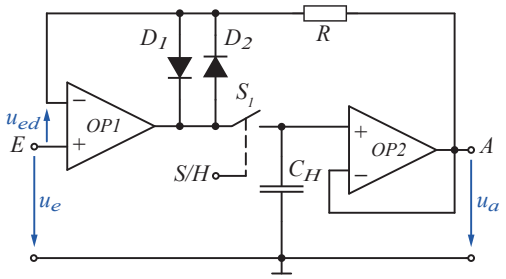


(a) Beispiel-Schaltung eines Abtast-Halte-Glieds basierend auf 2 Operationsverstärkern.

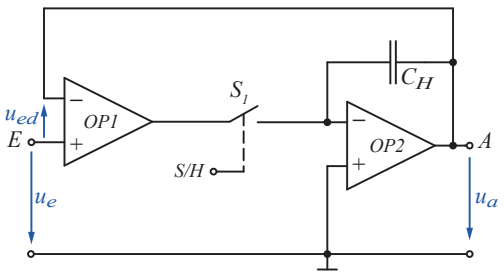


(b) 2 mögliche Betriebsarten des Abtast-Halte-Glieds aus Bild a) mit unterschiedlichen Schliesszeiten des Schalters S.

Figure 8.40: Beispiel-Schaltung für ein Sample&Hold-Glied und 2 mögliche Betriebsarten.



(a) Abtast-Halte-Glied mit einer "'Über- alles-Gegenkopplung"' und geerdetem Halte-Kondensator C_H.



(b) Abtast-Halte-Glied mit einer "'Über- alles-Gegenkopplung"' und einem Integrator.

Figure 8.41: Erweiterungen des Sample&Hold-Glieds aus Bild 8.40a), um das nicht ideale Verhalten der Operationsverstärker zu kompensieren.

ein grösserer Offsetfehler entstehen kann. Integrierte Sample & Hold Verstärker bieten daher häufig eine Abgleichmöglichkeit des Offsets.

Um den Offsetfehler von vornherein klein zu halten, wendet man häufig das Prinzip der "'Über-alles-Gegenkopplung"' an – siehe z.B. Abbildung 8.41a oder 8.41b. Dabei wird das Ausgangssignal des zweiten Operationsverstärkers $OP2$ auf den invertierenden Eingang des ersten Operationsverstärkers $OP1$ zurückgekoppelt. Damit genügt es, wenn nur der erste Verstärker $OP1$ ein geringes Offset aufweist. Im Idealfall wird dann bei geschlossenem Schalter S_1 die Eingangsdifferenzspannung $u_{ed} = 0$, d.h. die Ausgangsspannung ist gleich der Eingangsspannung: $u_a = u_e$ und der Offsetfehler von $OP2$ wird durch die Rückkopplung ausgeglichen.

Die Dioden D_1 und D_2 in Abbildung 8.41a verhindern dabei, dass der Operationsverstärker $OP1$ während der Halte-Phase bei geöffnetem Schalter S_1 in die Sättigung geht, wenn der Rückkoppelpfad aufgrund des geöffneten S_1 nicht geschlossen ist. Die Dioden stellen dann (ähnlich wie beim Spannungsfolger) eine Art direkte Gegenkopplung her. Im stationären Betrieb mit geschlossenen Schalter S_1 sind D_1 und D_2 gesperrt, d.h. unwirksam.

Alternativ kann die Schaltung in Abbildung 8.41b mit einem Integrator verwendet werden. Dabei wird für $OP1$ ein Operationsverstärker mit hohem Ausgangswiderstand verwendet – ein sogenannter Transkonduktanzverstärker (Operational Transconductance Amplifier OTA). Dieser verhält sich prinzipiell wie eine Stromquelle. Vorteilhaft bei dieser Schaltung ist, dass der Schalter S_1 an einem Schaltkontakt durch den virtuellen Kurzschluss des $OP2$ quasi ein festes Bezugspotential hat.

8.3 Komparatorschaltungen

8.3.1 Komparator

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Verstärkerschaltungen wird im Folgenden der Betrieb eines Operationsverstärkers ohne Gegenkopplung bzw. mit Mitkopplung untersucht. Ohne Gegenkopplung erhält man einen sogenannten Komparator (Abbildung 8.42a und 8.42c), dessen Ausgangsspannung ist gleich:

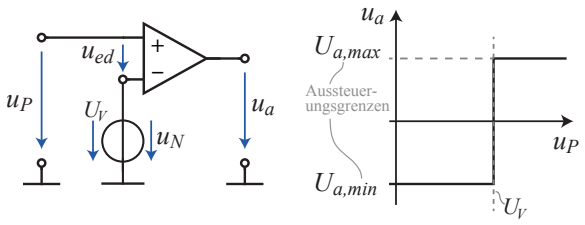
$$u_a = \begin{cases} U_{a,max} = U_{B+} & \text{für } u_P > u_N = U_V \\ U_{a,min} = U_{B-} & \text{für } u_P < u_N = U_V \end{cases} \tag{8.95}$$

Wegen der hohen Verstärkung des idealen OPVs ($v_g \to \infty$) spricht die Schaltung auf sehr kleine Spannungsdifferenzen $u_{ed} = u_P - u_N$ an und die Ausgangsspannung hängt nur noch vom Vorzeichen von u_{ed} ab. Der Komparator eignet sich z.B. zum präzisen Vergleich von zwei Spannungen. Die Übertragungskennlinie ist in Abbildung 8.42a und und 8.42c, jeweils rechts gegeben. Der Umschaltpunkt für u_a ergibt sich aus dem Vorzeichenwechsel von u_{ed} und liegt an dem Punkt $u_P = u_N = U_V$, d.h. am Umschaltpunkt gilt $u_{ed} = 0$.

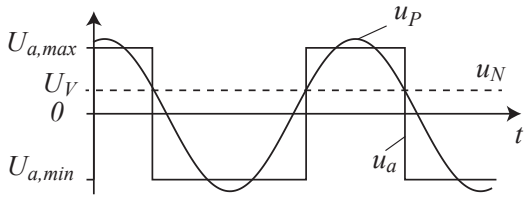
Wird am P-Eingang des OPVs eine feste Vergleichsspannung U_V angelegt (siehe Abbildung 8.42c), so geht u_a in die negative Sättigung, sobald u_N am N-Eingang die Spannung U_V übersteigt, da in diesem Fall $u_{ed} < 0$ folgt. Für einen dreiecksförmigen Verlauf von u_N ergibt sich eine gegenphasige (invertierte) Rechteckschwingung (Abbildung 8.42d). Eine gleichphasige Schwingung/Ausgangsspannung u_a erhält man durch Vertauschen der Spannungen an den beiden OPV-Eingängen – siehe Abbildung 8.42a. Hier gilt $u_N = U_V$ und die in diesem Fall sinusförmige Eingangsspannung liegt am nicht-invertierenden Eingang des OPVs an. Damit ist die Spannung u_P in Phase zur Spannung u_a.

Beim Nulldurchgang der Differenzspannung $u_{ed} = u_P - u_N$ springt die Ausgangsspannung u_a bei realen OPVs nicht direkt von der einen Aussteuerungsgrenze zur anderen, da die Slew Rate SR (Anstiegsgeschwindigkeit) von u_a begrenzt ist. Zum Beispiel dauert mit einer Slew Rate SR von 1V/μs der Anstieg von u_a = -12V auf u_a = 12V mindestens 24μs. Dies ist mit den grau strichlierten Linien beispielhaft für u_a in Abbildung 8.42d angedeutet.

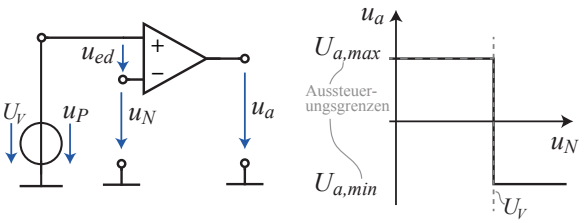
Wesentlich kürzere Verzögerungszeiten (bis in den Bereich von wenigen Nanosekunden und darunter)



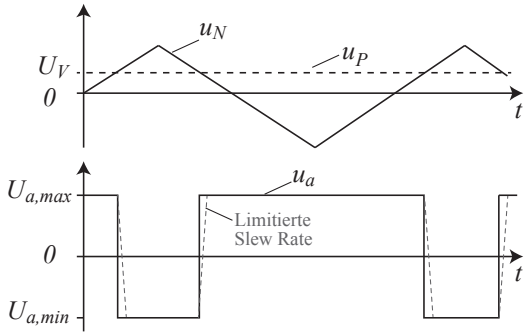
(a) OPV als Komparator mit Übertragungskennlinie für festes $u_N = U_V$.



(b) Verlauf der Ausgangsspannung u_a eines Komparators mit sinusförmiger Eingangsspannung u_P und konstanter Spannung $u_N = U_V$ – siehe Bild a.



(c) OPV als Komparator mit Übertragungskennlinie für festes $u_P = U_V$.



(d) Verlauf der Ausgangsspannung u_a für eine dreiecksförmige Eingangsspannung u_N und konstanter Spannung $u_P = U_V$ – siehe Bild c.

Figure 8.42: Betrieb eines OPVs als Komparator (ohne Gegenkopplung).

erhält man mit sogenannten Komparatorverstärkern, die speziell für den Betrieb ohne Gegenkopplung konzipiert/ausgelegt sind.

8.3.2 Komparator mit Hysterese

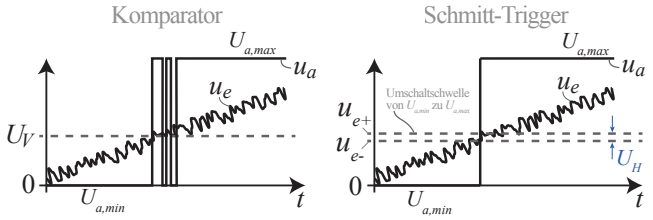
Bei einem verrauschten Signal u_e (siehe Abbildung 8.43a, links) würde der bisher betrachtete Komparator in Abbildung 8.42a mehrfach im Bereich der Umschaltschwelle U_V bzw. des Triggerpegels hin und herschalten. Um dies zu vermeiden, wird der Komparator zu einem sogenannten Schmitt-Trigger erweitert. Bei diesem fällt der Umschaltpegel u_{e+} für steigende Eingangsspannungen nicht mit dem Umschaltpegel u_{e-} für fallende Umschaltspannungen zusammen, sondern sind um eine Schalthysterese ΔU_H verschieden (Abbildung 8.43a, rechts).

In Abbildung 8.43b ist beispielhaft die Hysteresekennlinie des Schmitt-Triggers aus Abbildung 8.43c dargestellt. Hysterese bedeutet hier, dass das "'Umschalten"' von $U_{a,min}$ zu $U_{a,max}$ bei steigendem Eingangssignal u_e bei einem höheren Wert u_{e+} erfolgt als das "'Zurückschalten"' von $U_{a,max}$ zu $U_{a,min}$ bei sinkendem Eingangssignal u_e bei dem niedrigeren Wert u_{e-}.

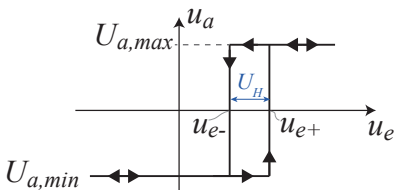
Die Ausgangsspannung des Komparators nimmt dabei generell zwei definierte Werte an: $U_{a,min}$ und $U_{a,max}$. Diese sind gegeben durch die Betriebsspannungen des Komparators und sind den Bereichen des Eingangssignals unterhalb und oberhalb der beiden einstellbaren Schwellwerte u_{e-} und u_{e+} zugeordnet – siehe Abbildung 8.43b. Die genaue Funktionsweise des Schmitt-Triggers wird später noch erläutert.

In Abbildung 8.43d ist der Verlauf der Ausgangsspannung eines Schmitt-Triggers bei einer sinusförmigen Eingangsspannung dargestellt.

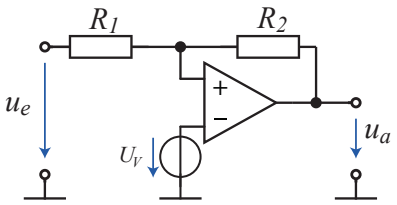
Der Schmitt-Trigger wird auch als Schwellwertschalter mit Hysterese oder als Diskriminator bezeichnet. Dieser findet z.B. Anwendung bei der Überwachung von Betriebsbereichen (z.B. Betriebstemperatur / Übertemperatur des Kühlwassers in einem Automotor) oder bei der einfachen Digitalisierung eines Analogsignals.



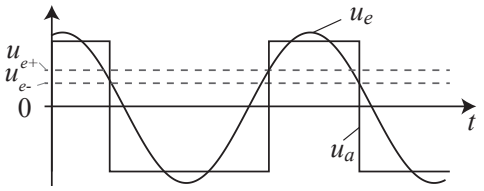
(a) Ausgangsspannung eines Komparators (links) und einer Schmitt-Trigger-Schaltung (rechts) bei verrauschtem Eingangssignal u_e.



(b) Allgemeine Hysteresekennlinie eines Schmitt-Triggers. Für die Schaltung in Abbildung a) ist hier beispielhaft $U_{a,min} = 0V$ angenommen.



(c) Schaltung für einen mitgekoppelten OPV als Schmitt-Trigger (Diskriminator).



(d) Ausgangsspannung eines Schmitt-Triggers mit sinusförmiger Eingangsspannung.

Figure 8.43: Schmitt-Trigger Schaltung.

8.3.3 Invertierender Diskriminator

Auf Basis der Überlegungen von vorangegangenem Abschnitt wird nun die Funktion eines idealen invertierenden Diskriminators untersucht (Abbildung 8.44a). Das Eingangssignal u_e liegt am invertierenden Eingang und die Rückkopplung erfolgt über R_f und R_N zum nicht-invertierenden Eingang, d.h. es handelt sich um eine Mitkopplung.

Bei den Umschaltschwellen u_{e+} und u_{e-} (Abbildung 8.44b) ändert die Eingangsdifferenzspannung u_{ed} das Vorzeichen und damit wechselt auch die Ausgangsspannung u_a das Vorzeichen. Für die beiden Umschaltschwellen gilt:

$$u_e = u_{e+} \text{ und } u_{ed} = 0 \text{ für den Fall, dass } u_e \text{ ansteigt}$$
$$u_e = u_{e-} \text{ und } u_{ed} = 0 \text{ für denn Fall, dass } u_e \text{ absinkt}$$

Nimmt man nun eine stark negative Eingangsspannung (z.B. $u_e < U_{B-}$) an, so ist $u_{ed} = u_P - u_N = u_P - u_e$ sicher positiv ($u_{ed} > 0$), da $u_a \in [U_{B-}, U_{B+}]$ und $u_P = u_a \cdot {}^{R_N}/_{(R_N+R_f)}$. Damit gilt:

$$u_a = U_{B+} \tag{8.96}$$

Folglich ist der Wert der Spannung u_P am nicht-invertierenden Eingang des OPVs in diesem Fall: $u_P = \frac{R_N}{R_N+R_f} U_{B+}$. Da bei der Umschaltschwelle $u_e = u_{e+}$ gilt, dass $u_{ed} = 0 = u_P - u_N$ folgt $u_P = u_N (= u_{e+})$. Damit ist die Schwelle gleich

$$u_{e+} = \frac{R_N}{R_N + R_f} U_{B+} \tag{8.97}$$

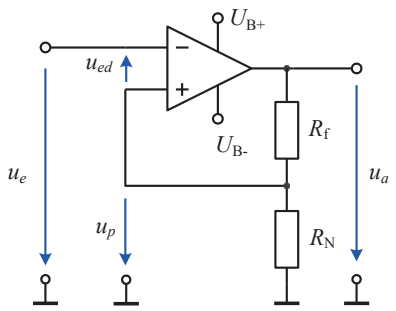
Für ansteigendes u_e tritt ein Vorzeichenwechsel von u_{ed} auf, sobald u_e die Schwelle u_{e+} übersteigt, d.h. $u_e > u_{e+}$ (d.h. $u_P < u_N$). Damit kippt u_a von U_{B+} auf U_{B-} und der nicht-invertierende Eingang bzw. u_P wird auf die Umschaltschwelle u_{e-} gezogen. In diesem Fall folgt:

$$u_a = U_{B-} \text{ und für die Schwelle ergibt sich } u_{e-} = \frac{R_N}{R_N + R_f} U_{B-} \; (u_{ed} = 0 \rightarrow u_P = u_e)$$

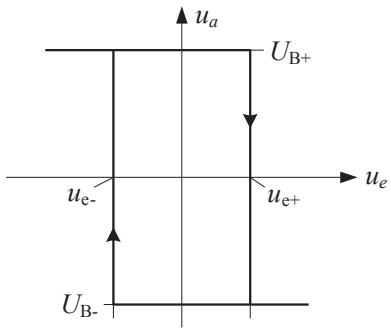
Die Schwelle u_{e-} definiert damit den Umschaltpunkt für eine fallende Spannung u_e. An der Umschaltschwelle gilt wiederum $u_{ed} = 0 \rightarrow u_P = u_e$ und die Ausgangsspannung u_a wechselt von U_{B-} auf U_{B+}.

Die Hysteresebreite beträgt damit:

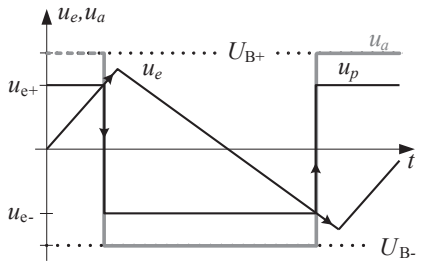
$$U_H = u_{e+} - u_{e-} = \frac{R_N}{R_N + R_f} (U_{B+} - U_{B-}) \tag{8.98}$$



(a) Invertierender Diskriminator.

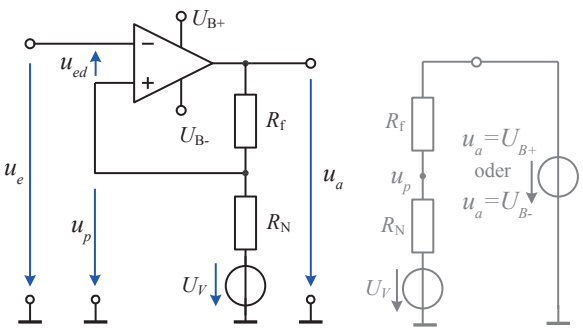


(b) Hystereseschleife des invertierenden Diskriminators.

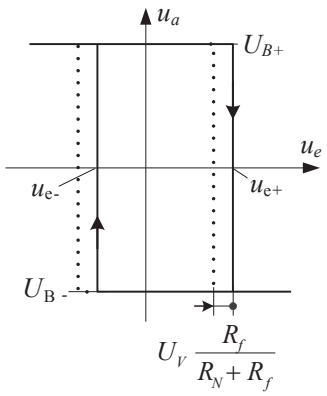


(c) Spannungs-Zeit-Diagramm des invertierenden Diskriminators für eine dreiecksförmige Eingangsspannung u_e.

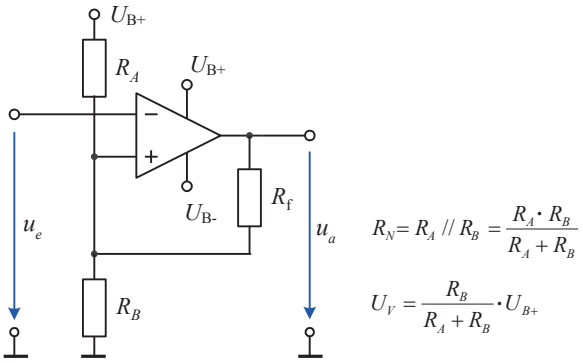
Figure 8.44: Invertierender Diskriminator.



(a) Invertierender Diskriminator mit asymmetrischer Hysterese. Im Bild rechts ist die Superposition der Spannung U_V und der Ausgangsspannung u_a schematisch dargestellt.



(b) Beispiel für eine asymmetrische Hystereseschleife.



(c) Praktische Realisierung der asymmetrischen Hysterese mittels dem Spannungsteiler aus R_A und R_B.

Figure 8.45: Invertierender Diskriminator mit asymmetrischer Hysterese-Kennlinie.

Im Gegensatz zum invertierenden Verstärker (Abschnitt 8.2.4) gilt das Konzept des virtuellen Kurzschlusses nicht mehr, da im Normalfall $u_{ed} \neq 0$ gegeben ist (u_{ed} ist nur bei den beiden Umschaltschwellen gleich 0).

Asymmetrische Hystereseschleife

Die Umschaltschwellen u_{e+} und u_{e-} des invertierenden Diskriminators aus Abbildung 8.44a können durch Einfügen einer Spannungsquelle U_V am Fusspunkt des Rückkopplungsnetzwerkes verschoben werden (Abbildung 8.45a).

Die Schwellen u_{e+} und u_{e-} werden dabei durch die beiden Spannungen u_a und U_V festgelegt. Der neue Wert der Schwelle u_{e+} kann z.B. mittels Superposition der Wirkung von u_a und U_V berechnet werden:

1) Nur U_V wirkt, d.h. die Quelle $u_a = U_{B+}$ (Abbildung 8.45a – rechts) wird kurzgeschlossen und es gilt: $u_a = 0$. Damit folgt ($u_{ed} = 0$, d.h. $u_e = u_P$ wenn $u_e = u_{e+}$):

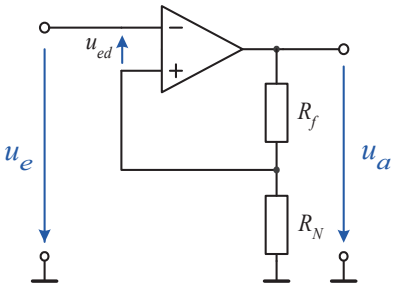
$$u_{e+,1} = \frac{R_f}{R_f + R_N} U_V \tag{8.99}$$

2) Die Wirkung von $u_a = U_{B+}$ für unwirksame Quelle u_V, d.h. $U_V = 0$, folgt direkt aus (siehe (8.97)):

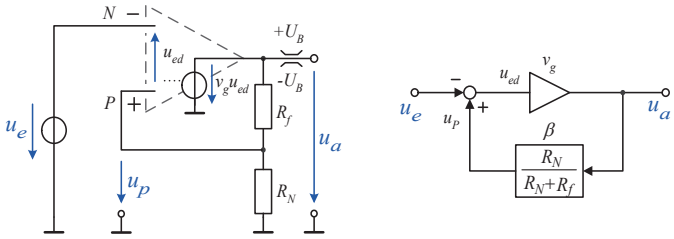
$$u_{e+,2} = \frac{R_N}{R_N + R_f} U_{B+} \tag{8.100}$$

Damit folgt die Umschaltschwelle u_{e+} aus der Superposition:

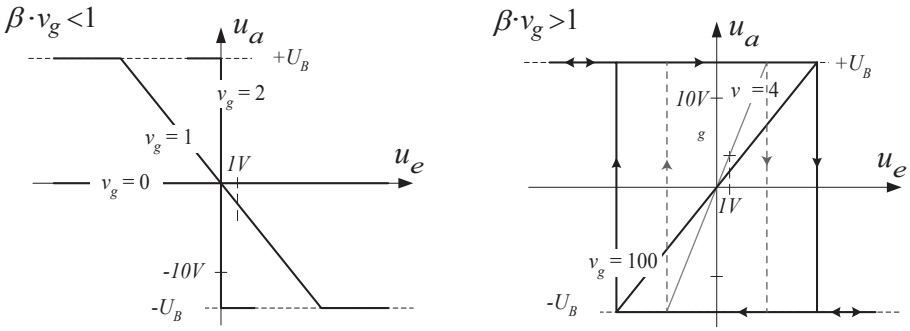
$$u_{e+} = u_{e+,1} + u_{e+,2} = \frac{R_f}{R_f + R_N} U_V + \frac{R_N}{R_N + R_f} U_{B+} \tag{8.101}$$



(a) Invertierender Diskriminator.



(b) Regelungstechnisches Ersatzschaltbild des invertierenden Diskriminators.



(c) Übertragungskennlinie für $\beta v_g < 1$ und $\beta v_g (\beta = 0.5)$.

	$u_e = 1$V	$U_B = 12$ V	$R_f = R_N = 50$ kΩ (β=0.5)	
$v_g = 0$	$u_a = 0V$	$u_P = 0V$	$u_{ed} = -1V$	Arbeitspunkte stabil
$v_g = 1$	$u_a = -2V$	$u_P = -1V$	$u_{ed} = -2V$	
$v_g = 2$	$u_a = -U_B$	$u_P = -6V$	$u_{ed} = -7V$	$(v_g \cdot \beta = 1)$
$v_g = 4$	$u_a = 4V$	$u_P = 2V$	$u_{ed} = 1V$	Arbeitspunkte instabil!
$v_g = 100$	$(u_a \approx 2.04V)$	$(u_P \approx 1.02V)$	$(u_{ed} \approx 0.02V)$	

(d) Beispiel für die Spannungen des invertierenden Diskriminators mit steigender Verstärkung v_g. Sobald die Schleifenverstärkung $v_g\beta$ grösser als 1 wird, wird die Schaltung instabil und die Ausgangsspannung nimmt entweder den Wert $u_a = U_{B+}$ oder $u_a = U_{B-}$ an.

Figure 8.46: Regelungstechnische Betrachtung eines invertierenden Diskriminators.

Analog lässt sich u_{e-} ermitteln, wobei für die Wirkung von U_V, d.h. $u_a = 0$ gilt: $u_{e-,1} = u_{e+,1}$. Folglich werden die beiden Umschaltschwellen um den gleichen Wert verschoben und die Hystereseschleife (Abbildung 8.45b) ist punktsymmetrisch zur Wirkung von U_V, d.h. zu: $u_{e-,1} = u_{e+,1}$

In Abbildung 8.45c ist eine praktische Umsetzung von U_V mittels Spannungsteiler R_A & R_B dargestellt. Der Innenwiderstand des Spannungsteilers (Thévenin-Theorem) definiert dabei den Widerstand $R_N = R_A || R_B$.

8.3.4 Regelungstechnisches Modell invertierender Diskriminator

Das Verhalten des invertierenden Diskriminators in Abbildung 8.46a wird nun mit einem regelungstechnischen Modell untersucht. Mit dem Ersatzschaltbild (ESB) in Abbildung 8.46b links und der Differenzbildung am Eingang des Diskriminators folgt das regelungstechnische ESB in Abbildung 8.46b rechts.

Mit dem ESB kann die Übertragungskennlinie abgeleitet werden:

$$u_{ed} = -u_e + \beta u_a = \frac{u_a}{v_g} \quad \Rightarrow \quad -u_e = \frac{u_a}{v_g} - \beta u_a \tag{8.102}$$

Damit folgt die Kennlinie:

$$\frac{u_a}{u_e} = -\frac{1}{\frac{1}{v_g} - \beta} = -\frac{v_g}{1 - v_g\beta} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{R_N}{R_f + R_N} \tag{8.103}$$

Für unendlich grosse Verstärkungen v_g folgt:

$$\lim_{v_g \to \infty} \frac{u_a}{u_e} = \frac{1}{\beta} \tag{8.104}$$

In Abbildung 8.46c sind die Kennlinien für Schleifenverstärkungen $\beta v_g < 1$ und $\beta v_g > 1$ für $\beta = 0.5$ gegeben. Für $\beta v_g < 1$ hat u_a/u_e ein negatives Vorzeichen, d.h. für ein negatives u_e folgt ein positives u_a, und die Übertragungskennlinie ist linear bzw. die Arbeitspunkte auf der Kennlinie sind stabil für $v_g < 2$ (bei $\beta = 0.5$).

Mit $\beta v_g > 1$ wird das Vorzeichen von der Übertragungskennlinie u_a/u_e positiv und die Arbeitspunkte auf der Kennlinie werden instabil, da bei der kleinsten Störung u_a an eine der Betriebsspannungsgrenzen geht, d.h. u_a ist entweder $u_a = U_{B+}$ oder $u_a = U_{B-}$, so dass die Übertragungskennlinie in eine Hystereseschleife übergeht.

8.3.5 Nicht-invertierender Diskriminator

Analog zu den Verstärkerschaltungen gibt es auch bei den Komparatorschaltungen einen nicht-invertierenden Diskriminator (Abbildung 8.47a). Bei diesem liegt das Eingangssignal am Fusspunkt des Spannungsteilers aus R_f und R_N an und ein Teil der Ausgangsspannung wird auf den nicht-invertierenden Eingang rückgekoppelt (d.h. es handelt sich wiederum um eine Mitkopplung).

Nimmt man eine stark positive Eingangsspannung u_e (z.B. u_e=U_{B+}) an, so ist die Differenzspannung u_{ed} normalerweise positiv, da $U_{B-} \leq u_a \leq U_{B+}$ gilt. Mit $u_{ed} > 0$ folgt unmittelbar:

$$u_a = U_{B+} \text{ und } u_{ed} \text{ ist gross } (u_{ed} \gg 0)$$

Sinkt die Eingangsspannung u_e ab, so wird u_{ed} kleiner. Zum Zeitpunkt wo $u_{ed} = 0$ wird, erreicht u_e die Umschaltschwelle u_{e-} (siehe Abbildung 8.47b bzw. 8.47c) d.h. es folgt $u_P = 0$ ($u_{ed} = 0$ & $u_N = 0$). Über den Widerstand R_f fliesst dann vom Ausgang in Richtung des nicht-invertierenden Eingangs ein Strom $i_{R_f} = {}^{U_{R_f}}/_{R_f} = {}^{U_{B+}}/_{R_f}$. Da der Eingangsstrom des OPVs $i_{e+} = 0$ ist, folgt $i_{R_N} = i_{R_f}$. Damit ergibt sich der Spannungsabfall über R_N:

$$u_{R_N} = i_{R_f} R_N = \frac{R_N}{R_f} U_{B+} \tag{8.105}$$

Somit folgt für die Umschaltschwelle u_{e-} von U_{B+} auf U_{B-}:

$$u_{e-} = -u_{R_N} = -\frac{R_N}{R_f} U_{B+} \text{ mit } u_{ed} = 0 \tag{8.106}$$

Die Umschaltschwelle u_{e+} von U_{B-} auf U_{B+} kann analog berechnet werden. Es ergibt sich:

$$u_{e+} = -\frac{R_N}{R_f} U_{B-} \tag{8.107}$$

Die Hysteresebreite ist somit

$$U_H = u_{e+} - u_{e-} = \frac{R_N}{R_f}(U_{B+} - U_{B-}) \tag{8.108}$$

Asymmetrische Hysteresekennlinie

Wie beim invertierenden Diskriminator können auch die Schwellen u_{e+} und u_{e-} des nicht-invertierenden Diskriminators verschoben werden. Dies geschieht mit Hilfe der Spannung U_V am invertierenden Eingang (Abbildung 8.48a).

Die Verschiebung kann mittels Superposition von u_a und u_e am Teiler aus R_N & R_f berechnet werden. Berechnung der Schwelle u_{e+}, d.h. $u_a = U_{B-}$:

1) $u_a = 0$: Die Spannung $u_{P,1}$ am nicht-invertierenden Eingang ist ($u_e = u_{e+}$):

$$u_{P,1} = \frac{R_f}{R_f + R_N} u_{e+} \tag{8.109}$$

2) $u_e = 0$, d.h. Quelle u_e ist unwirksam: Mit $u_a = U_{B-}$ (für u_{e+}) folgt:

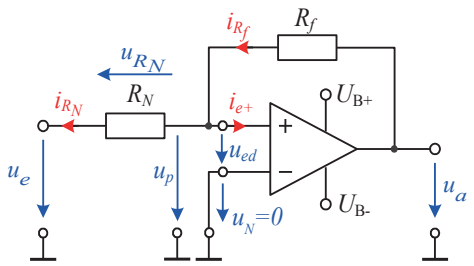
$$u_{P,2} = \frac{R_N}{R_f + R_N} U_{B-} \tag{8.110}$$

Die Schwelle u_{e+} für den Übergang von U_{B-} auf U_{B+} bei steigendem u_e ist definiert über $u_{ed} = 0$, d.h. es gilt $u_P = U_V$, womit folgt:

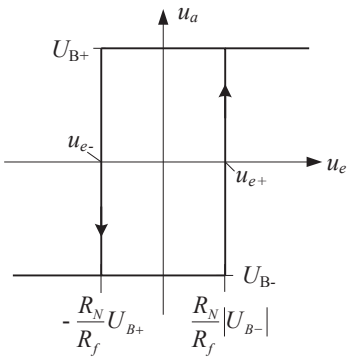
$$u_P = u_{P,1} + u_{P,2} = \frac{R_f}{R_f + R_N} u_{e+} + \frac{R_N}{R_f + R_N} U_{B-} = U_V \tag{8.111}$$

Damit ergibt sich:

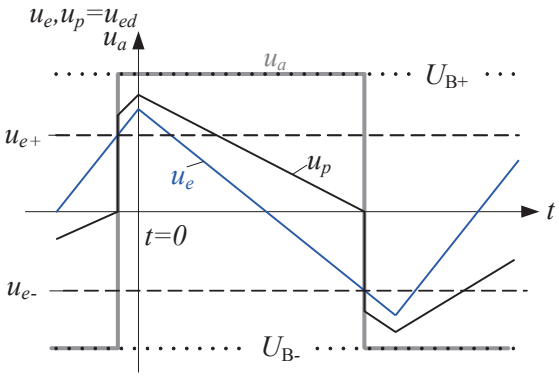
$$u_{e+} = \frac{R_f + R_N}{R_f} U_V - \frac{R_N}{R_f} U_{B-} \tag{8.112}$$



(a) Nicht-invertierender Diskriminator.



(b) Beispiel für die Hystereseschleife eines nicht-invertierenden Diskriminators.



(c) Zeitlicher Verlauf der Spannungen eines nicht-invertierenden Diskriminators mit dreiecksförmiger Eingangsspannung u_e.

Figure 8.47: Nicht-invertierender Diskriminator.

Analog folgt die Umschaltschwelle:

$$u_{e-} = \frac{R_f + R_N}{R_f} U_V - \frac{R_N}{R_f} U_{B+} \tag{8.113}$$

Folglich ist u_{e+} und damit auch u_{e-} bzw. die ganze Hysteresekennlinie um den Wert $(R_f+R_N)/R_f U_V$ gegenüber der Kennlinie des einfachen nicht-invertierenden Diskriminators verschoben (Abbildung 8.48b).

Die praktische Umsetzung der Spannung U_V mit dem Teiler aus R_A & R_B ist in Abbildung 8.48c dargestellt. Der Teiler wird wegen $i_{e-} = 0$ nicht belastet, d.h. der Innenwiderstand des Teilers hat keinen Einfluss auf die Hysteresekennlinie.

Nicht-invertierender Diskriminator – Alternativer Berechnungsweg

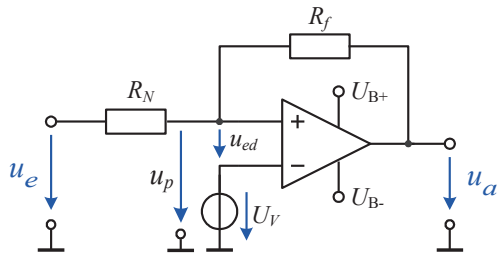
Anstatt die Verschiebung der Hysteresekennlinie mittels Superposition zu berechnen, kann dies alternativ auch mittels der Ströme durch die Widerstände erfolgen (vgl. Gleichung 8.106). Für Abbildung 8.49 gilt: i_{e+}=0 und u_N=U_V.

Die Umschaltschwelle u_{e+} ergibt sich für eine steigende Eingangsspannung u_e aus der Bedingung, dass bei der Schwelle gilt $u_{ed} = 0$. Damit folgt: $u_{ed} = 0 \Rightarrow u_P = u_N = U_V$, womit sich unmittelbar die Spannung über dem Widerstand R_f ergibt ($u_a = U_{B-}$ für die Schwelle u_{e+}):

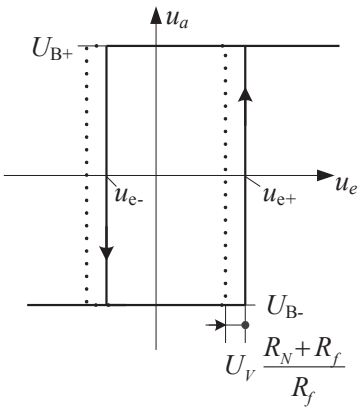
$$u_{R_f} = u_a - u_P = U_{B-} - U_V \tag{8.114}$$

Mit der Spannung folgt unmittelbar der Strom durch Widerstand R_f:

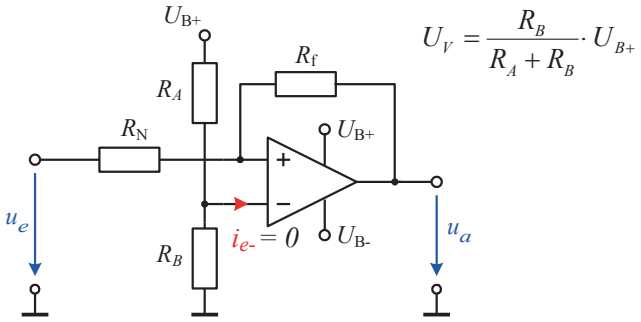
$$i_{R_f} = \frac{U_{B-} - U_V}{R_f} \tag{8.115}$$



(a) Nicht-invertierender Diskriminator mit asymmetrischer Hysterese.



(b) Asymmetrische Hystereseschleife.



(c) Praktische Realisierung einer asymmetrischen Hysterese mittels des Spannungsteilers aus R_A und R_B.

Figure 8.48: Nicht-invertierender Diskriminator mit asymmetrischer Kennlinie.

Aus $i_{e+} = 0$ folgt direkt $i_{R_N} = i_{R_f}$ (Knotengleichung), womit u_{R_N} gegeben ist:

$$u_{R_N} = i_{R_N} R_N = i_{R_f} R_N = \frac{U_{B-} - U_V}{R_f} R_N \tag{8.116}$$

Die Schwelle u_{e+} ergibt sich damit aus der Maschengleichung $-u_e - u_{R_N} + u_{ed} + U_V = 0$ für die Eingangsmasche (u_e, R_N, u_{ed}, U_V) für $u_{ed} = 0$, d.h. $u_e = -u_{R_N} + U_V$:

$$u_{e+} = -u_{R_N} + U_V = -\frac{U_{B-} - U_V}{R_f} R_N + U_V = \frac{R_f + R_N}{R_f} U_V - \frac{R_N}{R_f} U_{B-} \tag{8.117}$$

8.3.6 Fenster-Diskriminator

Mit den erläuterten Komparatoren kann z.B. ein Fenster-Diskriminator nach Abbildung 8.50a realisiert werden. Mit diesem kann festgestellt werden, ob die variable Mess-Spannung u_M am Eingang innerhalb oder ausserhalb des aus den zwei Vergleichswerten U_u und U_o gebildeten "'Fensters"' (Spannungsbereichs) liegt. Der Fenster-Diskriminator liefert jedoch keine Aussage über den genauen Wert der Eingangsspannung.

Die Ausgangsspannung u_1 des Komparators K_1 ist gleich U_{B+} bzw. logisch high (H) für den Fall, dass $u_M < U_u$, wobei U_u der untere Vergleichswert des Fensters ist. Für $u_M > U_u$ ist $u_2 = U_{B-}$ bzw. logisch low (L).

Die Ausgangsspannung u_2 des Komparators K_2 ist gleich U_{B+} bzw. logisch high für den Fall, dass $u_M > U_o$, wobei U_o der obere Vergleichswert ist. Für $u_M < U_o$ ist $u_1 = U_{B-}$ bzw. logisch low.

Führt man die Spannungen u_1 und u_2 auf die "'ODER-Schaltung"' bestehend aus den beiden Dioden und dem Widerstand, so ist der Ausgang der "'ODER-Schaltung"' high, falls u_M ausserhalb des durch U_u und U_o definierten Fensters liegt, da in diesem Bereich entweder K_1 oder K_2 high ist – siehe Abbildung 8.50b, wo angenommen ist, dass $U_{B-} = 0V$. Im Bereich $U_u < u_M < U_o$ ist der Ausgang der Oder-Schaltung 0V bzw. logisch low.

Mit einem nachgeschalteten Inverter – hier als invertierender Diskriminator ausgeführt – wird der Ausgangswert der "'ODER-Schaltung"' umgekehrt/invertiert, d.h. aus einem high wird ein low und umgekehrt.

Hinweis: Um die Empfindlichkeit gegenüber Rauschen zu reduzieren, könnten die Komparatoren K_1 und K_2 auch mit Hysterese ausgeführt werden.

8.3.7 Astabiler Multivibrator – Rechteckgenerator

Mit einem Diskriminator können auch selbstschwingende Schaltungen aufgebaut werden, so wie z.B. diejenige in Abbildung 8.51a. Dort sind zwei Darstellungsvarianten eines astabilen Multivibrators gegeben. Dieser besteht aus einem invertierenden Diskriminator dessen Eingangsspannung durch die über einen RC-Tiefpass rückgekoppelte Ausgangsspannung gebildet wird. Der RC-Tiefpass "'verzögert"' anschaulich gesprochen die rückgekoppelte Spannung.

Zum Ermitteln der Funktionsweise wird zuerst angenommen, dass die Kondensatorspannung $u_C < u_{e+}$ und die Ausgangsspannung $u_a = U_{B+}$ ist. In diesem Fall wird der Kondensator C aufgeladen. Erreicht $u_C = u_{e+}$, so wechselt u_{ed} das Vorzeichen und die Ausgangsspannung u_a kippt auf U_{B-}.

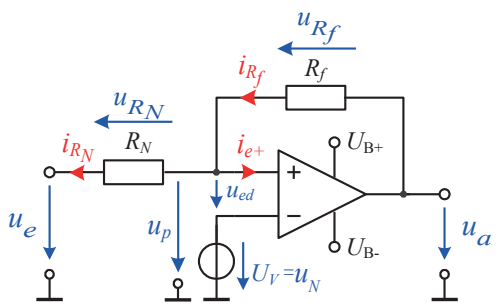
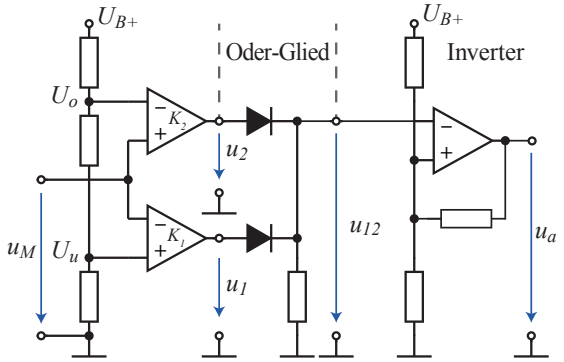
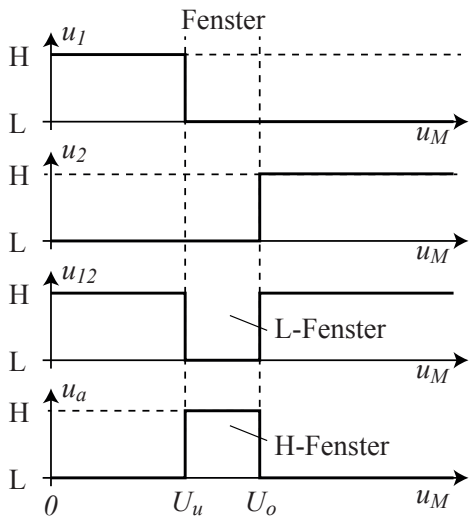


Figure 8.49: Nicht-invertierender Diskriminator mit asymmetrischer Hysterese.



(a) Schaltbild eines Fenster-Diskriminators.



(b) Verlauf der Spannungen für die Schaltung in Bild a).

Figure 8.50: Fenster-Diskriminator.

Mit $u_a = U_{B-}$ entlädt sich C bis $u_C = u_{e-}$, so dass die Ausgangsspannung wieder von U_{B-} auf U_{B+} kippt und der Kondensator wieder aufgeladen wird.

Der Verlauf von u_C für $t = 0 \ldots {}^1\!/_2 T_2$ (siehe Abbildung 8.51b) ergibt sich mit

$$u_C(t) = u_C(\infty) - [u_C(\infty) - u_C(0)]\, e^{-\frac{t}{RC}} \tag{8.118}$$

aus der Vorlesung ET I (siehe Seite "'Transiente Vorgänge in RC-Netzwerken"') und mit dem Zusammenhang $U_H = u_{e+} - u_{e-}$ aus folgender Gleichung:

$$u_C(t) = U_{B+} - \left[U_{B+} - \left(\frac{-U_H}{2}\right)\right] e^{-\frac{t}{RC}} \tag{8.119}$$

Mit dem Zusammenhang $u_c(t = {}^{T_2}\!/_2) = +{}^{U_H}\!/_2$ (Abbildung 8.51b) und $|U_{B+}| = |U_{B-}| = U_B$ folgt aus obiger Gleichung die Periodenlänge T_2 der Schwingung:

$$e^{-\frac{T_2}{2RC}} = \frac{U_B - {}^{U_H}\!/_2}{U_B + {}^{U_H}\!/_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2RC \ln\left(\frac{U_B + {}^{U_H}\!/_2}{U_B - {}^{U_H}\!/_2}\right) \tag{8.120}$$

8.3.8 Rechteckgenerator mit einstellbarem Tastverhältnis

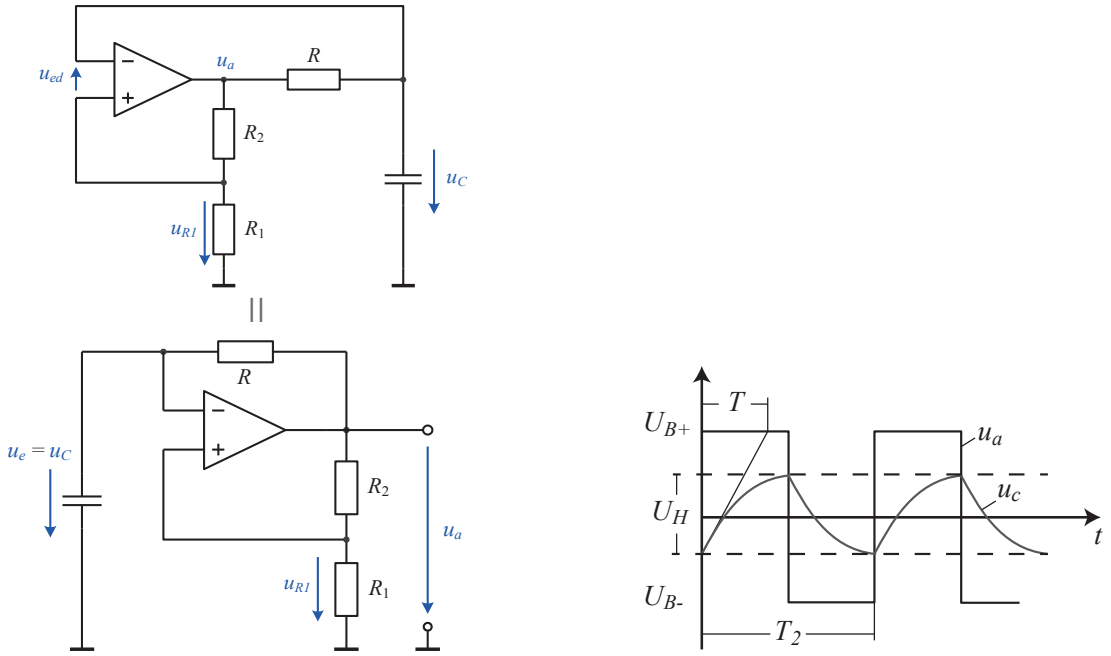
Modifiziert man den astabilen Multivibrator von vorangegangenem Abschnitt durch Anheben des Fusspunktes des Spannungsteilers aus R_1 und R_2 um die Spannung U_V, wie dies in Abbildung 8.52a dargestellt ist (d.h. man verschiebt die Hysteresekennlinie mit der Spannungsquelle U_V), so erhält man einen Rechteckgenerator mit einstellbarem Tastverhältnis. Einstellbares Tastverhältnis heisst, dass das Verhältnis der Zeitdauer T_0 (siehe Abbildung 8.52b), während der $u_a = U_{B+}$ ist, zu der Zeitdauer T_1, während der $u_a = U_{B-}$ ist, eingestellt werden kann. Bei dem astabilen Multivibrator aus Abbildung 8.51a waren die beiden Zeitdauern gleich.

Formal ergibt sich das Tastverhältnis aus dem Puls-Pausenverhältnis bzw. Puls-Periodenverhältnis T_0/T_2 der Rechteckspannung am Ausgang – siehe Abbildung 8.52b.

Eine Möglichkeit für eine praktische Realisierung der Anhebung durch die Quelle U_V ist im Abschnitt 8.3.3 / "'Invertierender Diskriminator"' beschrieben.

Auf Basis der Gleichung

$$u_C(t) = u_C(\infty) - [u_C(\infty) - u_C(0)]\, e^{-\frac{t}{RC}} \tag{8.121}$$



(a) Zwei Darstellungsvarianten des gleichen astabilen Multivibrators.

(b) Zeitlicher Verlauf der Spannungen u_a und u_e.

Figure 8.51: Astabiler Multivibrator zum Erzeugen einer rechteckförmigen Spannung.

folgt durch das Verschieben der Umschaltschwellen u_{e+} (siehe (8.101)) und u_{e-} die Gleichungen für die zwei Abschnitte der Kondensatorspannung (siehe Abbildung 8.52b):

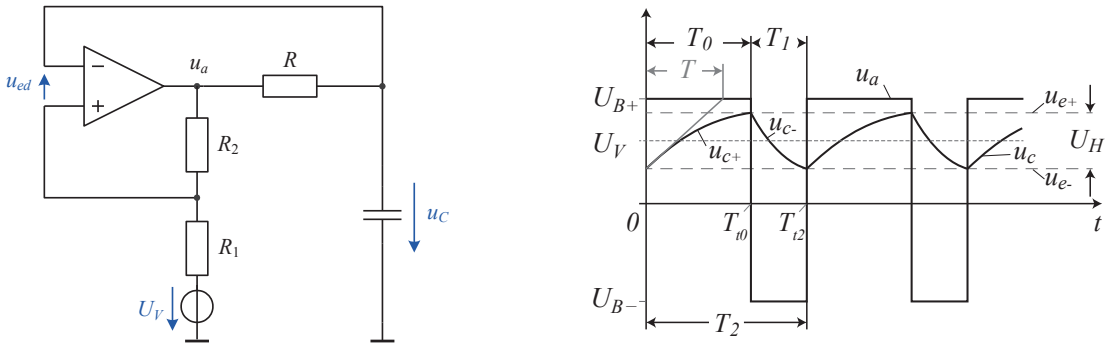
$$u_{C+}(t) = U_{B+} - [U_{B+} - u_{e-}]\, e^{-\frac{t}{RC}} \tag{8.122}$$

$$u_{C-}(t) = U_{B-} - [U_{B-} - u_{e+}]\, e^{-\frac{t}{RC}} \tag{8.123}$$

Aufgrund der unterschiedlichen Werte der Anfangs- $u_C(0)$ und der Endwerte $u_C(\infty)$ für den RC-Lade- und den RC-Entladevorgang weist die Kondensatorspannung in den Abschnitten $0 \leq t < T_{t0}$ und $T_{t0} \leq t < T_{t2}$ unterschiedliche Steilheiten auf. Dies resultiert in einem entsprechenden Puls-Pausenverhältnis bzw. Tastverhältnis der Ausgangsspannung u_a. Der zeitliche Verlauf und das Tastverhältnis ergibt sich aus den Gleichungen (8.122) und (8.123) mit den beiden Bedingungen:

$$u_{C+}(t = T_{t0}) = u_{e+} \tag{8.124}$$

$$u_{C-}(t = T_{t2}) = u_{e-} \tag{8.125}$$



(a) Astabiler Multivibrator mit einstellbarem Tastverhältnis.

(b) Zeitlicher Verlauf der Spannungen u_a und u_e für den astabilen Multivibrator in Abbildung 8.52a.

Figure 8.52: Rechteckgenerator mit einstellbarem Tastverhältnis (Puls-Pausen-Verhältnis).

8.3.9 Beispiel für invertierenden und nicht-invertierendem Diskriminator

Im Folgenden werden beispielhaft die Übertragungskennlinien eines invertierenden (Abschnitt 8.3.3) und eines nicht-invertierenden Diskriminators (8.3.5) berechnet. Es gelten die Bauteilwerte (Abbildung 8.53a & 8.53b):

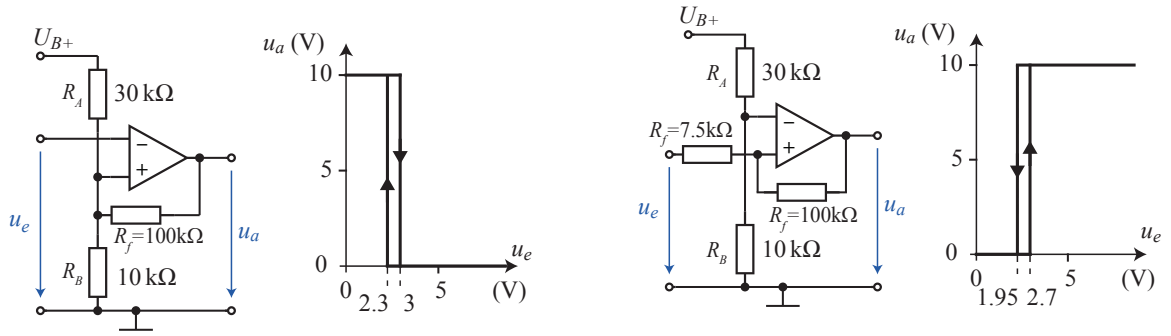
$$U_{B-} = 0V, U_{B+} = 10V$$
$$R_f = 100\text{k}\Omega,\ \ U_V = U_{B+}\frac{10\text{k}\Omega}{40\text{k}\Omega} = 2.5V$$
$$R_N = R_A||R_B = 30\text{k}\Omega||10\text{k}\Omega = 7,5\text{k}\Omega$$

Beispiel invertierender Diskriminator (Abbildung 8.53a):

$$u_{e+} = \frac{7,5\text{k}\Omega}{100\text{k}\Omega + 7.5\text{k}\Omega}10V + \frac{100\text{k}\Omega}{100\text{k}\Omega + 7.5\text{k}\Omega}2.5V = 3V$$
$$u_{e-} = 0V + \frac{100\text{k}\Omega}{100\text{k}\Omega + 7.5\text{k}\Omega}2.5V = 2.3V$$

Beispiel nicht-invertierender Diskriminator (Abbildung 8.53b):

$$u_{e+} = 0V + \frac{100\text{k}\Omega + 7,5\text{k}\Omega}{100\text{k}\Omega}2.5V = 2.7V$$
$$u_{e-} = -\frac{7,5\text{k}\Omega}{100\text{k}\Omega}10V + \frac{100\text{k}\Omega + 7.5\text{k}\Omega}{100\text{k}\Omega}2.5V = 1.95V$$



(a) Beispiel zum invertierenden Diskriminator ($U_{B+} = 10V$ und $U_{B-} = 0V$).

(b) Beispiel zum nicht-invertierenden Diskriminator ($U_{B+} = 10V$ und $U_{B-} = 0V$).

Figure 8.53: Beispielschaltungen für einen invertierenden und einen nicht-invertierendem Diskriminator.

8.3.10 Vergleich: Negative und positive Rückkopplung

Im Folgenden werden noch einmal zusammenfassend die wichtigsten Aspekte der negativen und der positiven Rückkopplung gegenübergestellt.

Durch eine negative Rückkopplung wird die Gesamtverstärkung $v_{r,neg}$ der negativ rückgekoppelten Schaltung gegenüber der Differenzverstärkung v_g verringert, d.h. es gilt: $v_{r,neg} < v_g$. Dabei wird dem Eingang (bzw. der Eingangsdifferenzspannung u_{ed}) ein Teil des Ausgangssignals so zugeführt, dass bildlich gesprochen Änderungen des Eingangssignals kompensiert werden.

Analog kann durch eine positive Rückkopplung die Gesamtverstärkung $v_{r,pos}$ der positiv rückgekoppelten Schaltung vergrössert werden, d.h. es gilt: $v_{r,pos} > v_g$. Dabei wird dem Eingang (bzw. der Eingangsdifferenzspannung u_{ed}) ein Teil des Ausgangssignals so zugeführt, dass Änderungen des Eingangssignals "'unterstützt"' werden und die Eingangsdifferenzspannung u_{ed} vergrössert wird.

Somit hat die negativen Rückkopplung eine stabilisierende Wirkung auf den Arbeitspunkt. Im Gegensatz dazu hat die positive Rückkopplung eine destabilisierende Wirkung und es gibt im Normalfall bei einer positiven Rückkopplung nur die beiden stabilen Ausgangsspannungen $u_a = U_{B+}$ bzw. $u_a = U_{B-}$, die durch die Betriebsspannung des Operationsverstärkers/Komparators gegeben sind.

8.3.11 Beispiel: Nicht-invertierender Verstärker

Im Folgenden wird noch je ein Beispiel zu den 4 Grundschaltungen gezeigt. Zu Beginn wird der nicht-invertierende Verstärker mit dem Schaltbild in Abbildung 8.55a und den folgenden Bauteilwerten untersucht:

$$U_B = 12V = U_{B+} = -U_{B-}$$
$$R_N = 30\text{k}\Omega, \quad R_f = 60\text{k}\Omega$$
$$u_e = 3V$$

Mit den Bauteilwerten und dem virtuellen Kurzschluss der Eingänge, d.h. $u_P = u_N$ bzw. u_{ed}=0, folgt $u_{R_N} = u_e$ und damit:

$$i_{R_N} = \frac{u_e}{R_N} = \frac{3V}{30\text{k}\Omega} = 0.1\text{mA}$$

mit $i_{e-} = 0$ ergibt sich:

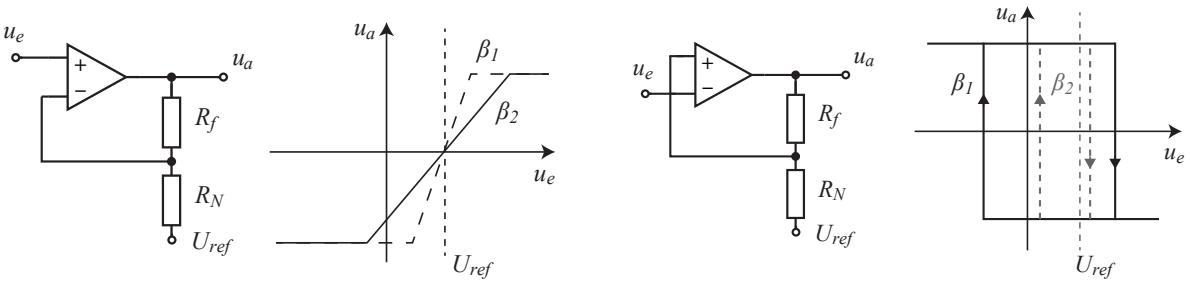
$$i_{R_f} = i_{R_N} = i_R = 0.1\text{mA}$$

Mit den Strömen folgt die Ausgangsspannung:

$$u_a = i_R(R_N + R_f) = 0.1\text{mA}\ 90\text{k}\Omega = 9V$$

Die Verstärkung ist:

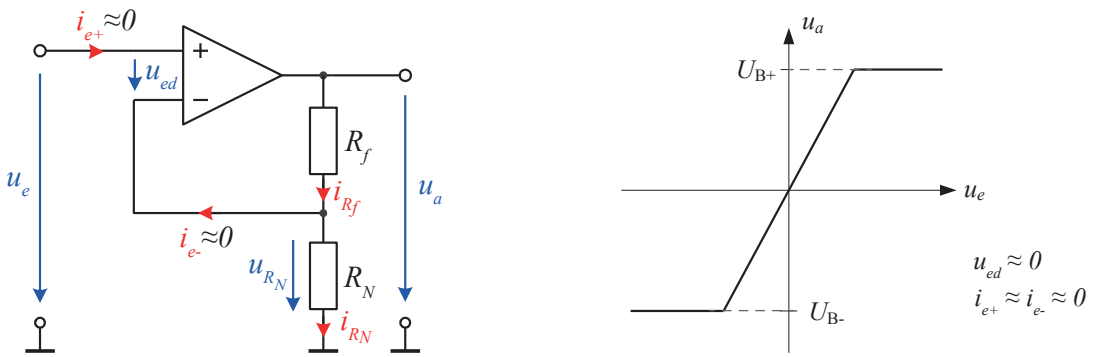
$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{R_N + R_f}{R_N} = 1 + \frac{R_f}{R_N} = 1 + \frac{60\text{k}\Omega}{30\text{k}\Omega} = 3$$



(a) Nicht-invertierender Verstärker mit Übertragungskennlinie.

(b) Invertierender Diskriminator mit Übertragungskennlinie.

Figure 8.54: Gegenüberstellung eines nicht-invertierenden Verstärkers und eines invertierenden Diskriminators mit den jeweiligen Kennlinien.



(a) Nicht-invertierenden Verstärker.

(b) Übertragungskennlinie.

Figure 8.55: Beispielschaltung für einen nicht-invertierender Verstärker.

8.3.12 Beispiel: Invertierender Verstärker

Als zweites wird der invertierende Verstärker mit dem Schaltbild in Abbildung 8.56a und den folgenden Bauteilwerten untersucht:

$$\begin{aligned} U_B &= 12V = U_{B+} = -U_{B-} \\ R_N &= 30\text{k}\Omega, \quad R_f = 60\text{k}\Omega \\ u_e &= 3V \end{aligned}$$

Mit den Bauteilwerten und dem virtuellen Kurzschluss der Eingänge, d.h. $u_P = u_N$ bzw. u_{ed}=0, folgt $u_{R_N} = u_e$ und damit:

$$i_{R_N} = \frac{u_e}{R_N} = \frac{3V}{30\text{k}\Omega} = 0.1\text{mA}$$

mit $i_{e-} = 0$ ergibt sich:

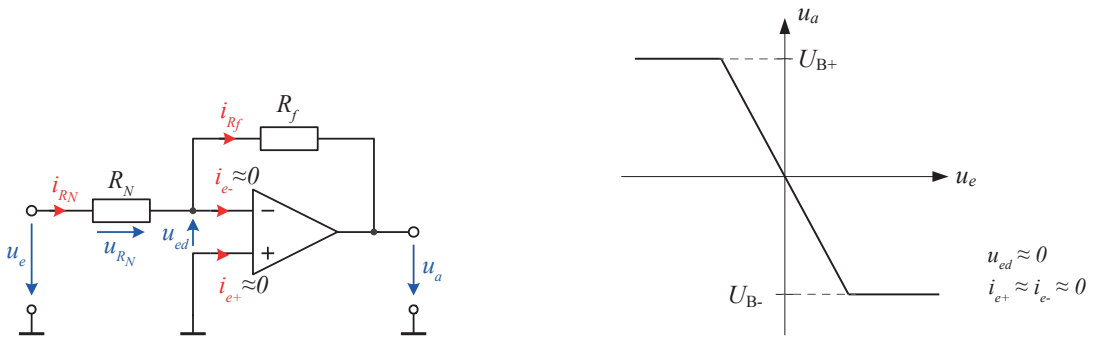
$$i_{R_f} = i_{R_N} = 0.1\text{mA}$$

Mit den Strömen folgt direkt die Ausgangsspannung:

$$u_a = -i_{R_f} R_f = -0.1\text{mA}\ 60\text{k}\Omega = -6V$$

Die Verstärkung ist:

$$\frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_f}{R_N} = -\frac{60\text{k}\Omega}{30\text{k}\Omega} = -2$$



(a) Invertierenden Verstärker.

(b) Übertragungskennlinie.

Figure 8.56: Beispielschaltung für einen invertierender Verstärker.

8.3.13 Beispiel: Invertierender Diskriminator

Nach den Verstärkerschaltungen wird nun der invertierende Diskriminator mit dem Schaltbild in Abbildung 8.57a und folgenden Bauteilwerten untersucht:

$$\begin{aligned} U_B &= 12V = U_{B+} = -U_{B-} \\ R_N &= 10\text{k}\Omega, \quad R_f = 100\text{k}\Omega \\ U_V &= 5V \end{aligned}$$

Zum Berechnen der Schwelle u_{e+} wird angenommen, dass $u_{a+} = U_{B+}$ = 12V. Damit ergeben sich die Ströme im Spannungsteiler (i_{e+} = 0):

$$i_{R_{N+}} = i_{R_{f+}} = \frac{u_{a+} - U_V}{R_N + R_f} = \frac{12V - 5V}{110\text{k}\Omega} = 64\mu\text{A}$$

Mit den Strömen ergibt sich:

$$u_{R_{N+}} = i_{R_{f+}} R_N = 64\mu\text{A } 10\text{k}\Omega = 0.636V$$

Damit folgt die Umschaltschwelle:

$$u_{e+} = U_V + u_{R_{N+}} = 5.636V$$

Zum Berechnen der Schwelle u_{e-} wird angenommen, dass u_{a-} = U_{B-} = -12V. Damit folgen die Ströme (i_{e+} = 0):

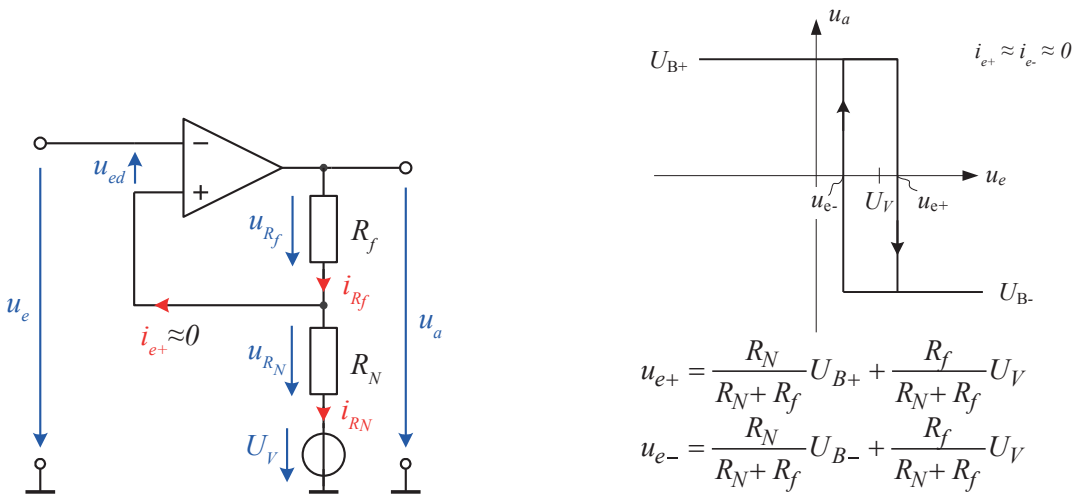
$$i_{R_{N-}} = i_{R_{f-}} = \frac{u_{a-} - U_V}{R_N + R_f} = \frac{-12V - 5V}{110\text{k}\Omega} = -155\mu A$$

Mit den Strömen ergibt sich:

$$u_{R_{N-}} = i_{R_{N-}} R_N = -155\mu\text{A } 10\text{k}\Omega = -1.545V$$

Damit folgt die Umschaltschwelle:

$$u_{e-} = U_V + u_{R_{N-}} = 3.454V$$



(a) Invertierenden Diskriminator.

(b) Übertragungskennlinie mit Umschaltschwellen.

Figure 8.57: Beispielschaltung für einen invertierender Diskriminator.

8.3.14 Beispiel: Nicht-invertierender Diskriminator

Zum Schluss wird der nicht-invertierende Diskriminator mit dem Schaltbild in Abbildung 8.58a und den folgenden Bauteilwerten untersucht:

$$\begin{aligned} U_B &= 12V = U_{B+} = -U_{B-} \\ R_N &= 10\text{k}\Omega, \quad R_f = 100\text{k}\Omega \\ U_V &= 5V \end{aligned}$$

Zum Berechnen der Schwelle u_{e+} wird angenommen, dass u_{a+} = U_{B-} = -12V (u_e wird von sehr negativen Spannungen aus erhöht). Direkt vor dem Umschalten ist u_{ed} = 0. Damit ergeben sich die Ströme (i_{e+} = 0):

$$i_{R_{N+}} = i_{R_{f+}} = \frac{U_V - u_{a+}}{R_f} = \frac{5V - (-12V)}{100\text{k}\Omega} = 170\mu\text{A}$$

Mit den Strömen ergibt sich die Umschaltschwelle für steigende Eingangsspannungen $u_e(t)$:

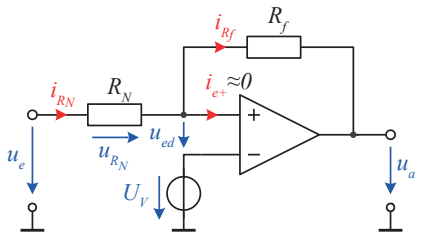
$$u_{e+} = u_{R_{N+}} + U_V = i_{R_{N+}} R_N + U_V = 170\mu\text{A } 10\text{k}\Omega + 5V = 6.7V$$

Zum Berechnen der Schwelle u_{e-} wird angenommen, dass $u_{a-} = U_{B+} = 12\text{V}$ (u_e wird von sehr positiven Spannungen aus reduziert). Direkt vor dem Umschalten ist $u_{ed} = 0$. Damit ergeben sich die Ströme durch die Widerstände ($i_{e+} = 0$):

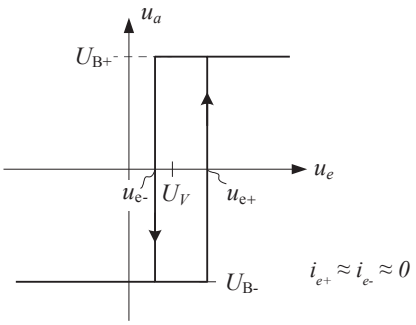
$$i_{R_{N-}} = i_{R_{f-}} = \frac{U_V - u_{a-}}{R_f} = \frac{5V - 12V}{100\text{k}\Omega} = -70\mu A$$

Mit den Werten für die Ströme ergibt sich die Umschaltschwelle für fallende Eingangsspannungen $u_e(t)$:

$$u_{e-} = i_{R_{N-}} R_N + U_V = -70\mu\text{A}\ 10\text{k}\Omega + 5V = 4.3V$$



(a) Nicht-invertierenden Diskriminator.



$$u_{e+} = \frac{R_N}{R_f}|U_{B-}| + \frac{R_N + R_f}{R_f} U_V$$

$$u_{e-} = -\frac{R_N}{R_f} U_{B+} + \frac{R_N + R_f}{R_f} U_V$$

(b) Übertragungskennlinie mit Umschaltschwellen.

Figure 8.58: Beispielschaltung für einen nicht-invertierender Diskriminator.

8.3.15 Zusammenfassung OPV und Komparatoren

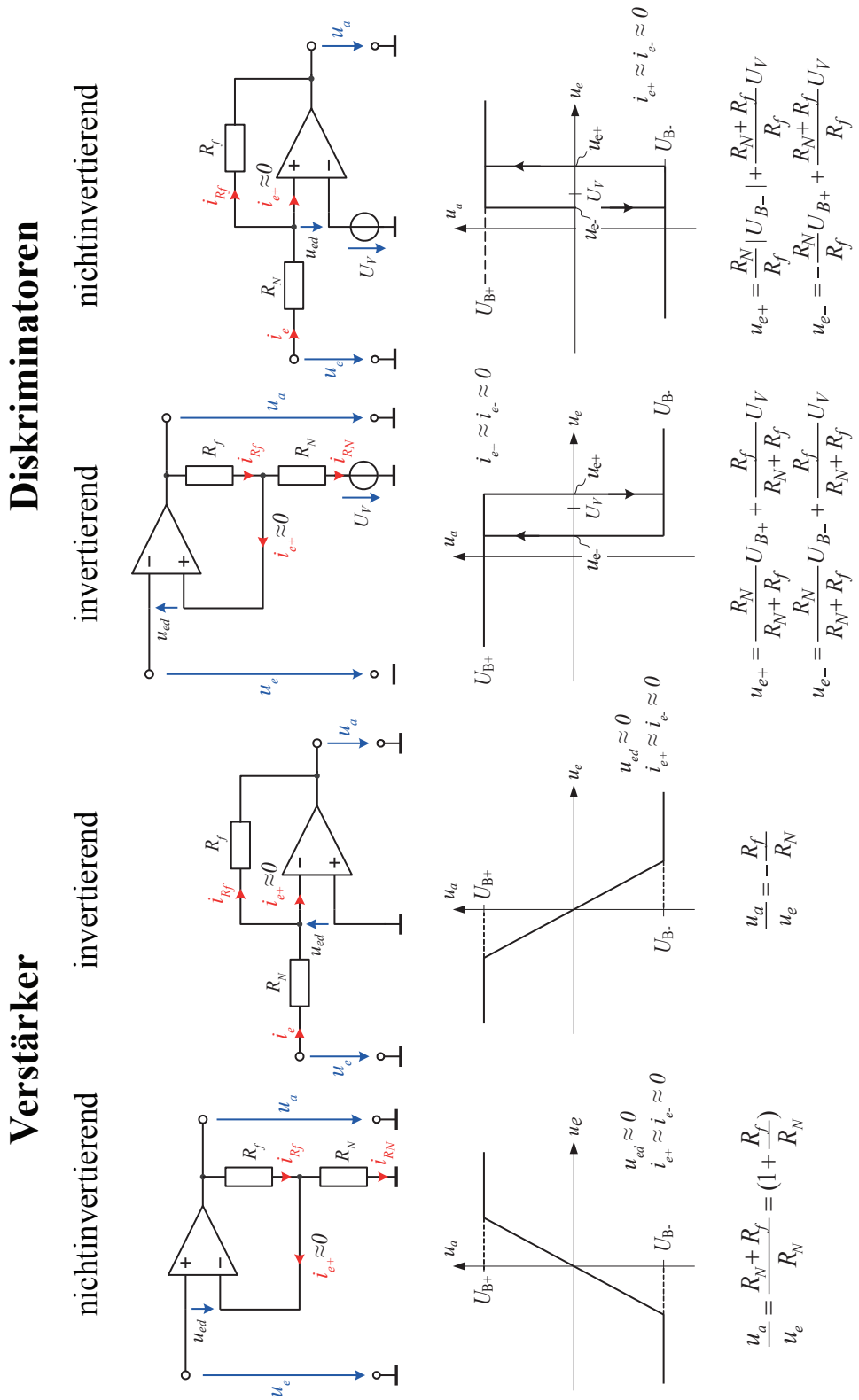


Figure 8.59: Gegenüberstellung der Grundschaltungen für Verstärker und für Diskriminatoren.

Appendix A

Lernziele

A.1 Lernziele – Periodische Signalformen

Sie können *Wissen*

- ▷ die Strom-Spannungsbeziehungen der Bauteile (R, L, C, Transformator) im Zeit- und im Frequenzbereich **angeben**.
- ▷ einen komplexen Zeiger in der Form Realteil + j·Imaginärteil und in der Exponentialform **angeben**.

Sie sind fähig, *Verständnis*

- ▷ die Begriffe Gleich-/Wechsel-/Mischgrösse, Momentan-/Augenblickswert, Scheitel-/Spitzenwert, Spitze-Spitze-Wert, Periodendauer, Frequenz, Kreisfrequenz, Mittelwert, Amplitude, Phase, Phasenverschiebung, Nullphasenwinkel **zu erläutern** und etwaige Einheiten **anzugeben**.
- ▷ allgemeine Strom- und Spannungsformen in zeitlich konstante, periodisch sinusförmige, periodisch nicht sinusförmige und nicht periodische/transiente **einzuteilen**.
- ▷ den komplexen Zeiger für eine beliebige sinus-/kosinusförmige Grösse mit beliebiger Phasenverschiebung auf Basis von Kosinusfunktionen und auf Basis von Sinusfunktionen **zu ermitteln**.
- ▷ das Grundkonzept der komplexen Wechselstromrechnung und den Unterschied von rotierenden und feststehenden (komplexen) Zeigern **zu erläutern**.
- ▷ die Begriffe Impedanz/Admittanz, Wirk-/Blindwiderstand (Resistanz/Reaktanz), Wirk-/Blindleitwert (Konduktanz/Suszeptanz) und die dazugehörigen Einheiten **zu erläutern**.
- ▷ das Grundkonzept eines digitalen Oszilloskopes **zu erläutern**.

Sie sind fähig, *Anwendung*

- ▷ den Gleichrichtwert und den Effektivwert eines gegebenen Verlaufs **zu berechnen**.
- ▷ mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung und der kirchhoffschen Gesetze die Zeiger in einem Netzwerk **zu berechnen** und das dazugehörige Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme sowie das Widerstandsdiagramm **zu zeichnen/zu konstruieren**.
- ▷ für einen gegebenen komplexen Zeiger den dazugehörigen zeitlichen Verlauf und umgekehrt **zu berechnen**, d.h. eine Transformation in den Bildbereich und eine Rücktransformation in den Zeitbereich **durchzuführen**.
- ▷ eine gegebene Impedanz in die dazugehörige Admittanz und umgekehrt **umzuwandeln** und den Betrag und die Phase der Impedanz/Admittanz **zu berechnen**.
- ▷ eine Reihenschaltung von passiven Bauelementen in die dazu äquivalente Parallelschaltung und umgekehrt **umzuwandeln**.

A.2 Lernziele – Frequenzabhängige Spannungsteiler

Sie können *Wissen*

- ▷ **beschreiben**, was ein Vierpol bzw. ein Zweitor ist.
- ▷ die Grenzfrequenzen von *RC*- und *RL*-Tiefpässen und -Hochpässen **angeben**.
- ▷ den Wert des Amplitudenverhältnisses bei der Grenzfrequenz **angeben**.
- ▷ das Verhältnis von Wirkwiderstand zu Blindwiderstand bei der Grenzfrequenz für *RC*- und *RL*-Tiefpässen und Hochpässen erster Ordnung **angeben**.

Sie sind fähig, *Verständnis*

- ▷ die Begriffe Durchlass- und Sperrbereich sowie Grenzfrequenz **zu erläutern**.
- ▷ das grundsätzliche Verhalten im Bezug auf Durchlass-/Sperrbereich eines Tief-, eines Hoch- und eines Bandpasses sowie einer Bandsperre **zu beschreiben**.
- ▷ **zu erläutern**, was ein Amplituden-, ein Phasengang sowie ein Frequenzgang darstellt.
- ▷ **zu erläutern**, warum das Übertragungsverhalten eines (frequenzabhängigen) Teilers von der Belastung des Teilers abhängt.

Sie sind fähig, *Anwendung*

- ▷ das (frequenzabhängige) Verhältnis der Spannungsamplituden und die Phasenverschiebung zwischen den Ein- und den Ausgangsgrössen des Zweitors **zu berechnen** und den Verlauf in Abhängigkeit von der Frequenz **darzustellen**. Die Verhältnisse können Sie dabei auch mit einer normierten Frequenz **angeben**.
- ▷ Spannungs- und Stromverhältnisse in dB **umzuwandeln**.
- ▷ einen frequenzabhängigen Spannungsteiler durch Hinzufügen von weiteren Bauelementen in einen frequenzkompensierten Spannungsteiler **umzuwandeln** und die für ein frequenzunabhängiges Teilerverhältnis notwendigen Bauteilwerte **zu berechnen** und das dazugehörige Teilerverhältnis **anzugeben**.

A.3 Lernziele – Resonanzschaltungen

Sie können *Wissen*

- ▷ die Bedingung für die Gesamtimpedanz bei der Resonanzfrequenz und die Gleichung für die Resonanzfrequenz eines (ungedämpften) Serien- und Parallelschwingkreises **angeben**.
- ▷ das prinzipielle Verhalten der Impedanz/Admittanz bzw. des Betrages und der Phase der Impedanz/Admittanz eines Serien- und eines Parallelschwingkreises unterhalb, oberhalb und bei der Resonanzfrequenz **beschreiben**.
- ▷ die Zusammenhänge für die Güte und die Dämpfung eines Serien- und Parallelschwingkreises inklusive Einheit **angeben**.
- ▷ die normierte Darstellung mit der Verstimmung bzw. der normierten Verstimmung eines Serien- und eines Parallelschwingkreises inklusive Einheiten und der Resonanz sowie der Grenzfrequenzen/Bandbreite **angeben**.

Sie sind fähig, *Verständnis*

- ▷ ein prinzipielles Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme bzw. der Impedanzen für einen Serien- und für einen Parallelschwingkreis für die drei Frequenzbereiche: Unterhalb, oberhalb und bei der Resonanzfrequenz (ohne konkrete Bauteilwerte/Frequenzen) **darzustellen**.
- ▷ **zu erläutern**, was ein induktives, ein kapazitives und ein ohmsches Verhalten eines Schwingkreises/einer Impedanz/Admittanz kennzeichnet.
- ▷ den Einfluss der Güte/Dämpfung auf die Spannungsüberhöhung beim Serienschwingkreis und auf die Stromüberhöhung beim Parallelschwingkreis **zu erläutern** und den Wert der Überhöhung mit dem Wert der Güte **abzuschätzen**.
- ▷

Sie sind fähig, *Anwendung*

- ▷ den Verlauf der Impedanz/Admittanz für einen Serien- und einen Parallelschwingkreis in Abhängigkeit der Frequenz **zu berechnen** und die Betrag als auch die Phase der Impedanzen/Admittanzen in Abhängigkeit der Frequenz **darzustellen**.
- ▷ die Spannungen und Ströme an bzw. durch die Bauteile eines Serien-/Parallelschwingkreis **zu berechnen** und die Maximalwerte der Spannungen/Ströme **zu ermitteln**. Die Spannungen und Ströme können Sie in einem Zeigerdiagramm **darstellen**.

A.4 Lernziele – Ortskurven

Sie können *Wissen*

- ▷ den prinzipiellen Verlauf von Ortskurven mit konstanten Realteil oder mit konstantem Imaginärteil **angeben**.
- ▷ die möglichen Quadranten, in welchen Ortskurven für Impedanzen/Admittanzen liegen könnten, **angeben**.
- ▷ die grundsätzliche Verwendung von Nyquist-Diagrammen und das dazugehörige Stabilitätskriterium **nennen**.

Sie sind fähig, *Verständnis*

- ▷ **zu erläutern**, was eine Ortskurve darstellt.
- ▷ anhand des Verlaufs einer Ortskurve die Resonanzfrequenzen des Netzwerkes **zu identifizieren**.

Sie sind fähig, *Anwendung*

- ▷ eine Impedanz-Ortskurve durch Inversion in eine Admittanz-Ortskurve und umgekehrt **umzuwandeln**. Dabei können Sie die allgemeinen Regeln für eine Inversion von Ortskurven **anwenden**.
- ▷ Ortskurven für kompliziertere Netzwerke durch eine punktweise Überlagerung von Ortskurven für einfache Teilnetzwerken **zu ermitteln**.

A.5 Lernziele – Leistung im Wechselstromkreis

Sie können *Wissen*

- ▷ die Einheiten der Wirk-, Blind- und Scheinleistung **nennen**.
- ▷ das Vorzeichen für induktive und kapazitive Blindleistung **angeben**.

Sie sind fähig, folgende Begriffe zu **erklären** *Verständnis*

- ▷ Augenblicksleistung und mittlere Leistung
- ▷ Wirkleistung, Blindleistung und Scheinleistung
- ▷ Blindstrom, Wirkstrom
- ▷ Leistungsfaktor
- ▷ Komplexe Leistung

Sie sind fähig, *Anwendung*

- ▷ **zu erklären**, wann ein Zweipol Leistung aufnimmt und wann dieser Leistung abgibt.
- ▷ in Wechselspannungsnetzwerken mit beliebigen Impedanzen die Wirk-, Blind- und Scheinleistung sowie die gespeicherte Energie für die jeweiligen Bauteilen im Zeitbereich (d.h. über eine Multiplikation der Zeitgrössen) **zu berechnen**.
- ▷ die Augenblicksleistung für beliebige Impedanzen in einen Anteil mit der schwankenden Wirkenergie und einen Anteil mit der pendelnden Blindenergie **zu zerlegen**.
- ▷ in Wechselspannungsnetzwerken mit beliebigen Impedanzen die Wirk-, Blind- und Scheinleistung für die jeweiligen Bauteilen mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung (Multiplikation der Zeigergrössen) **zu berechnen**.
- ▷ den Strom durch eine beliebige Impedanz in einen Wirk- und einen Blindstromanteil **zu zerlegen**.
- ▷ ein Leistungsdreieck mit der Wirk-, der Blind- und der Scheinleistung **zu zeichnen**.
- ▷ in Wechselspannungsnetzwerken mit beliebigen Impedanzen den Leistungsfaktor **zu berechnen**.
- ▷ in einem Netzwerk mit einer Wechselspannungsquelle und mit beliebigen Innen- und Lastimpedanzen die Bauteile **so zu berechnen**, dass sich der Fall der Leistungsanpassung einstellt. Weiterhin können Sie die dabei auftretende maximale Leistung im Wirkwiderstand **berechnen**.
- ▷ für einen gegebenen Verbraucher ein Netzwerk für eine Blindleistungs-/Blindstromkompensation **zu ermitteln** und die für die Kompensation notwendigen Bauteilwerte **zu berechnen**.

A.6 Lernziele – Drehstromsysteme

Sie können *Wissen*

- ▷ eine Sternschaltung mit 3- oder mit 4- Leitern und eine Dreieckschaltung von Bauteilen **zeichnen/angeben**.
- ▷ in einer gegebenen dreiphasigen Schaltung die Aussenleiter und den Sternpunkt-/Neutralleiter **angeben**.
- ▷ in einer gegebenen dreiphasigen Schaltung die Strang-/Stern-/Leiter-Erde-Spannung und die Aussenleiter/Leiter-Leiter-Spannung sowie auch den Strangstrom und den Aussenleiterstrom **einzeichnen** bzw. Zählpfeile **angeben**.
- ▷ ein dreiphasiges symmetrisches oder unsymmetrisches Spannungs-/Stromsystem **angeben**.
- ▷ für ein dreiphasiges Spannungssystem die jeweiligen Phasenverschiebungen zwischen den Grössen **angeben**.
- ▷ für ein dreiphasiges Stromsystem die jeweiligen Phasenverschiebungen zwischen den Grössen **angeben**.
- ▷ die Verhältnisse der Stern- zu den Aussenleitergrössen in einem symmetrischen dreiphasigen System **angeben**.
- ▷ das Verhältnis der Leistung einer Sternschaltung zu der Leistung einer Dreieckschaltung **angeben**.
- ▷ in einer gegebenen elektrischen Maschine den Rotor/Läufer, den Stator/Ständer und den Luftspalt **angeben**.

Sie sind fähig, folgende Inhalte zu **erklären/definieren** *Verständnis*

- ▷ Symmetrisches, dreiphasiges Spannungs-/Stromsystem
- ▷ Symmetrische und unsymmetrische Verbraucher
- ▷ Grundidee des Stern-Dreieck-Anlaufs einer Asynchronmaschine
- ▷ Prinzip der Erzeugung eines dreiphasigen Spannungssystems
- ▷ Prinzip der Erzeugung eines Drehfeldes in einem dreiphasigen Motor/Generator
- ▷ Zusammenhang zwischen Netzfrequenz und Drehzahl des dazugehörigen 3-phasigen Generators
- ▷ Prinzipieller Aufbau/Vorteile des dreiphasigen Energieverteilungsnetzes

Sie sind fähig, *Anwendung*

- ▷ die Aussenleiter- und die Stranggrössen als auch den Strom im Neutralleiter (falls vorhanden) in einem dreiphasigen System **zu berechnen** und das dazugehörige Zeigerdiagramm **zeichnen**.
- ▷ die Sternpunktverschiebung in einer 3-Leiter Sternschaltung **zu berechnen**.
- ▷ die Wirk- und die Blindleistung in einem dreiphasigen System sowohl für eine Sternschaltung mit 3 oder mit 4 Leitern als auch für eine Dreieckschaltung für symmetrische sowie für unsymmetrische Verbraucher **zu berechnen**.
- ▷ für einen gegebenen Verbraucher ein Netzwerk für eine Blindleistungs-/Blindstromkompensation **zu ermitteln** und die für die Kompensation notwendigen Bauteilwerte **zu berechnen**.

A.7 Lernziele – Quelle & Last

Sie können *Wissen*

- ▷ die Eigenschaften von idealen (Konstant-)Spannungs- und (Konstant-)Stromquellen **angeben**.
- ▷ eine reale Spannungs- und eine reale Stromquelle inklusive der dazugehörigen Kennlinie **darstellen** bzw. als Gleichung **angeben**.
- ▷ die vier Arten von gesteuerten Quellen und die dazugehörigen Proportionalitätsfaktoren inklusive Einheit **benennen**.
- ▷ Beispiele für die Anwendung von gesteuerten Quellen **nennen**.
- ▷ die Bedingungen **nennen**, unter welchen der Überlagerungssatz zum Berechnen von Netzwerken verwendet werden darf.
- ▷ die Bedingungen **nennen**, unter welchen eine Dreieckschaltung unbedingt äquivalent zu einer Sternschaltung ist.

Sie sind fähig, folgende Inhalte/Begriffe zu **erklären/definieren** *Verständnis*

- ▷ Rückwirkungsfreie, ideale gesteuerte Quelle
- ▷ Überlagerungssatzes/Superpositionsprinzip
- ▷ Ähnlichkeitssatz
- ▷ Bedingt und unbedingt äquivalente Netzwerke

Sie sind fähig, *Anwendung*

- ▷ eine reale Spannungsquelle in eine äquivalente reale Stromquelle und umgekehrt **umzuwandeln** und die Innenimpedanz, die Leerlaufspannung und den Kurzschlussstrom der realen Quellen **zu berechnen**.
- ▷ eine Ersatzspannungsquelle und eine Ersatzstromquelle **zu berechnen**, die das Klemmenverhalten eines gegebenen beliebigen aktiven oder passiven Zweipols nachbildet.
- ▷ mit Hilfe des Überlagerungssatzes die Teilwirkungen und die Gesamtwirkung der Quellen auf die gesuchten Grössen in einem Netzwerk **zu berechnen**. Das Netzwerk kann dabei auch gesteuerte Quellen umfassen.
- ▷ mit Hilfe des Ähnlichkeitssatzes die gesuchten Grössen in einem Netzwerk **zu berechnen**.
- ▷ in einem Netzwerk eine Spannungs- und Stromquellen **aufzuteilen** und **zu verschieben** bzw. **zu verbinden**.
- ▷ eine äquivalente Quellensubstitution **durchzuführen**.
- ▷ **zu ermitteln**, ob zwei Netzwerke nicht äquivalent, bedingt äquivalent oder unbedingt äquivalent zueinander sind.
- ▷ eine beliebige Sternschaltung in eine äquivalente Polygonschaltung und eine beliebige Dreieckschaltung in eine Sternschaltung **umzuwandeln**.

A.8 Lernziele – Maschenstrom- und Knotenpotenzialverfahren

Sie können *Wissen*

- ▷ in einem gegebenen Netzwerk die Zweigströme und Zweigspannungen, sowie die Strom-/Spannungsbeziehungen für den jeweiligen Zweig **angeben**.
- ▷ für ein gegebenes Netzwerk die Graphendarstellung sowie einen vollständigen Baum mit den Baumzweigen und die Verbindungszweige **angeben**.
- ▷ **beschreiben**, was Maschenströme sind.
- ▷ in einem gegebenen Netzwerk alle Elementarmaschen **einzeichnen/angeben**.
- ▷ das Ersatzmodell und die dazugehörigen Gleichungen eines Transformators auf Basis von zwei Spulen/Impedanzen und zwei stromgesteuerten Spannungsquellen und auf Basis von zwei Admittanzen und zwei spannungsgesteuerten Stromquellen **angeben**.
- ▷ den Zusammenhang zwischen Potenzialen und Spannungen **angeben**.

Sie sind fähig, *Verständnis*

- ▷ **zu bestimmen**, ob ein Netzwerk kreuzungsfrei ist oder nicht.
- ▷ **zu erklären**, warum Maschenströme die Knotengleichungen "automatisch" erfüllen.
- ▷ das Verfahren der Stromquellenwandlung und der Stromquellenmaschen **zu erklären**.
- ▷ **zu erklären**, welche Grössen die Inzidenzmatrix und die Maschenimpedanzmatrix für das Maschenstromverfahren miteinander verknüpfen.
- ▷ **zu erklären**, warum Knotenpotentiale im Rahmen des Knotenpotenzialverfahrens die Maschengleichungen "automatisch" erfüllen.
- ▷ das Verfahren der Spannungsquellenwandlung und der Spannungsquellenknoten **zu erklären**.
- ▷ **zu erklären**, welche Grössen die Inzidenzmatrix und die Admittanzmatrix für das Knotenpotenzialverfahren miteinander verknüpfen.
- ▷ die Anzahl an notwendigen Gleichungen für das Maschenstromverfahren und für das Knotenpotenzialverfahren **zu bestimmen**.

Sie sind fähig, *Anwendung*

- ▷ für ein gegebenes Netzwerk ein vollständiges Set an linear unabhängigen Maschenströmen mittels der Methode des vollständigen Baumes und mittels der Methode der Elementarmaschen **zu ermitteln**.
- ▷ ein gegebenes Netzwerk, das Stromquellen, gesteuerte Quellen und/oder Transformatoren enthalten kann, mit Hilfe des "Kochrezeptes" für das Maschenstromverfahren **zu berechnen**.
- ▷ ein gegebenes Netzwerk, das Spannungsquellen, gesteuerte Quellen und/oder Transformatoren enthalten kann, mit Hilfe des "Kochrezeptes" für das Knotenpotenzialverfahren **zu berechnen**.

A.9 Lernziele – Beliebige periodische Vorgänge

Sie können *Wissen*

- ▷ **angeben**, wie Induktivitäten und Kapazitäten in Gleichspannungs-/Gleichstrom-Netzwerken behandelt werden.
- ▷ die drei charakteristischen Fälle für die Überlagerung zweier sinusförmiger Grössen **beschreiben**.
- ▷ **angeben**, welche Koeffizienten der Fourierreihe bei einer geraden und bei einer ungeraden Funktion sowie bei Funktionen mit einer Symmetrie der dritten und der vierten Art entfallen.

Sie sind fähig, *Verständnis*

- ▷ **zu erklären**, warum die Überlagerung der Wirkungen von Quellen mit unterschiedlichen Frequenzen im Zeitbereich durchgeführt werden muss.
- ▷ die Grundidee der Orthogonalitätsrelation **zu erklären**.
- ▷ die folgenden Begriffe **zu erläutern**: Schwebung, Schwebungsperiode, unreine Schwebung und Einhüllende sowie Grundschwingung, Oberschwingung und Harmonische.
- ▷ die Begriffe Linien-, Amplituden- und Phasenspektrum **zu erläutern**.
- ▷ **zu erklären**, was ein Leistungsspektrum ist.

Sie sind fähig, *Anwendung*

- ▷ für eine gegebene periodische Grösse die Koeffizienten einer Fourierreihe in Normalform, in Spektralform und in der komplexen Form **zu berechnen**.
- ▷ die verschiedenen Formen der Fourierreihe ineinander **umzuwandeln**.
- ▷ bei der Berechnung der Koeffizienten für eine Fourierreihe die Symmetrie der ersten, zweiten, dritten und vierten Art der periodischen Grösse **auszunutzen**, um die Berechnung zu vereinfachen. Dies umfasst auch eine Vereinfachung durch Achsenverschiebung sowie die Zerlegung der periodischen Grösse in einen geraden und einen ungeraden Anteil.
- ▷ mit Hilfe des Verfahrens der ”Harmonischen Analyse” die Grössen in linearen Netzwerken mit periodischen Quellen, die durch Fourierreihen dargestellt werden können, **zu berechnen**.
- ▷ den Effektivwert von beliebigen periodischen Verläufen, die durch Fourierreihen dargestellt werden können, **zu berechnen**.
- ▷ die Wirkleistung, die Verzerrungsblindleistung, die Verschiebeblindleistung und die Scheinleistung sowie den daraus resultierenden Leistungsfaktor für einen allgemeinen linearen Zweipol angeregt durch eine periodische Grösse **zu berechnen**.
- ▷ den Effektivwert des Wechselanteils, den Grundschwingungsgehalt, den Klirrfaktor, die total harmonic distortion (THD), den Scheitelfaktor, den Formfaktor und die Welligkeit eines periodischen Signals **zu berechnen**.

A.10 Lernziele – Schaltvorgänge in elektrischen Netzwerken

Sie können *Wissen*

- ▷ die Ordnung einer Differentialgleichung **angeben** und **benennen**, ob diese homogen oder inhomogen ist.
- ▷ die Zeitkonstante für *RC*- und *RL*-Netzwerke erster Ordnung inklusive Einheit **angeben**.
- ▷ die zwei Betriebsarten eines Hochsetzstellers **angeben**.
- ▷ den Wirkungsgrad des vollständigen Ladevorgangs eines Kondensators über einen Widerstand **angeben**.

Sie sind fähig, *Verständnis*

- ▷ **zu erklären**, was ein transienter Vorgang ist und in welche drei Zuständen dieser unterteilt werden kann.
- ▷ **zu erklären**, wann bzw. warum es zu transienten Vorgängen kommt.
- ▷ **zu erklären**, was der homogene und was der inhomogene Anteil der Lösung beschreibt.
- ▷ die Stetigkeitsbedingungen in allgemeinen Netzwerken mit Kondensatoren und Induktivitäten **zu erklären**.
- ▷ **zu erläutern**, was die Funktion eines Freilaufpfades in Netzwerken mit Induktivitäten ist und warum es diesen braucht.
- ▷ **zu erläutern**, was die charakteristische Gleichung eines Netzwerkes ist und was die Kennzeichen des aperiodisches Falles bzw. des aperiodischen Grenzfalles sind.

Sie sind fähig, *Anwendung*

- ▷ die (lineare, gewöhnliche und inhomogene) Differentialgleichung für *RC*- und *RL*-Netzwerke erster Ordnung und für lineare Netzwerke mit mehreren Speichern, angeregt durch Gleich-, Wechsel- oder allgemeine periodische Spannungs- oder Stromquellen, **aufzustellen**. Dabei können Sie auch Verfahren wie z.B. das Maschenstrom-/Knotenpotenzialverfahren zum Aufstellen der Differentialgleichung **anwenden**.
- ▷ die partikuläre Lösung bzw. den inhomogenen Lösungsanteil einer Differentialgleichung für *RC*- und *RL*-Netzwerke erster Ordnung und für lineare Netzwerke mit mehreren Speichern, angeregt durch Gleich-, Wechsel- oder allgemeine periodische Spannungs- oder Stromquellen, **zu ermitteln**.
- ▷ den homogenen Lösungsanteil einer Differentialgleichung für *RC*- und *RL*-Netzwerke erster Ordnung und für lineare Netzwerke mit mehreren Speichern, angeregt durch Gleich-, Wechsel- oder allgemeine periodische Spannungs- oder Stromquellen, mit Hilfe der charakteristischen Gleichung **zu ermitteln**.
- ▷ die unbekannten Konstanten des homogenen Lösungsanteils für Netzwerke mit einem Energiespeicher und mit mehreren Energiespeichern mit den Anfangs- bzw. den Stetigkeitsbedingungen **zu berechnen**.
- ▷ das transiente Verhalten von Netzwerken mit nur einem Energiespeicher mittels der "vereinfachten" Analyse **zu berechnen**.
- ▷ den Wirkungsgrad eines transienten Vorgangs **zu berechnen**.

A.11 Lernziele – Laplace-Transformation

Sie können *Wissen*

- ▷ **angeben**, in welchen Fällen die Fourier-Transformation nicht anwendbar ist.
- ▷ **beschreiben**, wie die Laplace-Transformation aus der Fourier-Transformation hervorgeht.
- ▷ Strom-/Spannungsbeziehungen der verschiedenen Komponenten (Kondensator, Spule...) im Laplace-Bereich inklusive der jeweiligen Anfangsbedingungen **angeben**.

Sie sind fähig, *Verständnis*

- ▷ **zu erklären**, was die spektrale Dichte bzw. die Amplitudendichte und die differentielle (komplexe) Anregung beschreiben.
- ▷ **zu erklären**, was eine komplexe Frequenz ist.
- ▷ die Unterschiede und die Gemeinsamkeiten der Fourier- und der Laplace-Transformation **zu erläutern**.

Sie sind fähig, *Anwendung*

- ▷ für eine gegebene Zeitfunktion die Bildfunktion mit Hilfe der Fourier-Transformation und für eine gegebene Bildfunktion die Originalfunktion/die Zeitfunktion mit Hilfe der inversen Fourier-Transformation **zu berechnen**.
- ▷ die gesuchten Grössen in einem Netzwerk mit Hilfe der Fourier-Transformation **zu berechnen** – dabei kann die Lösung im Frequenzbereich oder im Zeitbereich gesucht sein.
- ▷ für eine gegebene Zeitfunktion die Bildfunktion mit Hilfe der Laplace-Transformation und für eine gegebene Bildfunktion die Originalfunktion/die Zeitfunktion mit Hilfe der inversen Laplace-Transformation **zu berechnen**. Dabei können Sie bei den Berechnungen Korrespondenztabellen sowie Hilfssätze wie z.B. "Lineare Überlagerung", "Verschiebungssatz", "Dämpfungssatz", "Ähnlichkeitssatz", "Faltungssatz", "Differentiationssatz", "Integrationssatz" sowie die Periodizität von Signalen **ausnutzen**. Die inverse Transformation können Sie z.B. mit Hilfe der Partialbruchzerlegung **durchführen**.
- ▷ die gesuchten Grössen in einem Netzwerk unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen mit Hilfe der Laplace-Transformation **zu berechnen** – dabei kann die Lösung im Frequenzbereich oder im Zeitbereich gesucht sein. Bei den Berechnungen sind Sie in der Lage, das Maschenstrom- und das Knotenpotenzialverfahren **auszunutzen**.

A.12 Lernziele – Übertragungsfunktion & Bode-Diagramm

Sie können *Wissen*

- ▷ die allgemeine Form von Übertragungsfunktionen als rationale Funktion der komplexen Frequenz und mit den (komplexen) Nullstellen und Polen **angeben**.
- ▷ **angeben**, wie für eine gegebene Übertragungsfunktion prinzipiell der Amplitudengang in der dB-Skala für das Bode-Diagramm berechnet wird.
- ▷ **angeben**, wie der Grad des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion die Filterordnung und die Steilheit des Amplitudengangs zwischen dem Durchlass- und dem Sperrbereich bestimmt.
- ▷ die Geradennäherungen für den Amplituden- und den Phasengang für Systeme 1. und 2. Ordnung im Bode-Diagramm **angeben**.
- ▷ für eine gegebene rationale Übertragungsfunktion die maximale Phasendrehung für $\omega \to \infty$ anhand des Grades des Zähler- und des Nennerpolynoms **angeben**.

Sie sind fähig, *Verständnis*

- ▷ anhand der Lage der Pole der Übertragungsfunktion die Stabilität/Dynamik von Netzwerken **zu erklären**.
- ▷ **zu erklären**, warum sich bei kaskadierten Systemen die Gesamtübertragungsfunktion als Summe der einzelnen Übertragungsfunktionen in der dB-Skala ergibt und wie sich der Gesamtphasengang aus den einzelnen Phasengängen ergibt.

Sie sind fähig, *Anwendung*

- ▷ für ein gegebenes Netzwerk die Übertragungsfunktion **zu berechnen** und den asymptotischen Verlauf des Bode-Diagramms bestehend aus dem Amplituden- und dem Phasengang **zu zeichnen**. Dabei können Sie das Bode-Diagramm des Gesamtnetzwerkes mit Hilfe der Bode-Diagramme der einzelnen kaskadierten (Teil-)Systeme **ermitteln** oder das im Skript erläuterte Schema/Verfahren zum Erstellen eines Bode-Diagramms **anwenden**.
- ▷ etwaige Abweichungen des realen Verlaufs des Amplituden- und des Phasengangs vom asymptotischen Verlauf (v.a. im Bereich der Eckfrequenzen) **abzuschätzen**.

A.13 Lernziele – Verstärkerschaltungen

Sie können *Wissen*

- ▷ die Eigenschaften von Spannungs- und Leistungsverstärker **angeben**.
- ▷ die Eigenschaften eines ”rail-to-rail” Verstärkers **nennen**.
- ▷ die Eigenschaften eines idealen Operationsverstärkers (OPV) **nennen**.
- ▷ die Vorteile eines Instrumentationsverstärkers gegenüber eines einfachen Subtrahieres **nennen**.
- ▷ die Unterschiede zwischen einem invertierenden und einem nicht-invertierenden Verstärker hinsichtlich der Eingangsimpedanz **nennen**.

Sie sind fähig, *Verständnis*

- ▷ **zu erklären**, was eine negative Verstärkung in linearer und logarithmischer (Dezibel) Skala bedeutet und woran man eine Invertierung zwischen Ein- und Ausgangssignal erkennt.
- ▷ **zu erklären**, wozu der Verstärker Anschlüsse für eine Versorgungsspannung benötigt und was eine ”single supply operation” ist.
- ▷ **zu erklären**, woran man eine Sättigung des Verstärkers in der Übertragungskennlinie oder im Ausgangssignal erkennt und wie man diese vermeiden kann.
- ▷ **zu erklären**, was eine Arbeitspunktverschiebung ist, wozu diese eingesetzt wird und was die Kleinsignalverstärkung beschreibt.
- ▷ Verstärkerschaltungen hinsichtlich des Frequenzverhaltens **zu kategorisieren** und die Unterschiede der Verschiedenen Kategorien **zu erläutern**.
- ▷ die 5 Anschlüsse eines OPVs **nennen** und deren Funktion **erläutern**.
- ▷ **zu erläutern**, was die Differenzverstärkung eines OPVs bedeutet.
- ▷ die verschiedenen Arten der Rückkopplung einer OPV-Schaltung und die prinzipielle Auswirkung auf die Funktion **zu erläutern**.
- ▷ die Eigenschaften: Differentieller Eingangswiderstand, Ausgangswiderstand, endliche Differenzverstärkung, Frequenzabhängigkeit der Differenzverstärkung, Slew rate, Leistungsbandbreite, Gleichtaktunterdrückung (CMRR), Offsetspannung, Offset- und Biasstrom von realen OPVs und deren prinzipielle Auswirkung auf die Funktion des OPVs **zu erläutern**.

Sie sind fähig, *Anwendung*

- ▷ die Ein- und Ausgangsleistung sowie den Wirkungsgrad eines Verstärkers **zu berechnen**.
- ▷ für einen gegebenen Verstärker ein Ersatzschaltbild als Spannungs-, Strom-, Transkonduktanz- und Transimpedanzverstärker **zu berechnen** und die Ersatzschaltbilder ineinander **umzurechnen**.
- ▷ die (frequenzabhängige) Verstärkung einer OPV-Schaltung mit Gegenkopplung und idealem OPV auf Basis des Konzeptes ”virtuellen Kurzschlusses” für beliebige Impedanzen als Beschaltung des OPVs **zu berechnen**. Dies umfasst insbesondere OPV Schaltungen mit folgenden Funktionen: Invertierender/nicht-invertierender Verstärker, (Tiefpass-/Hochpass-) Filter, Mittelwertbildung, Integrator/Differentiator, PID-Regler, Instrumentationsverstärker.

Appendix B

Tabellensammlung

B.1 Einheiten, Konstanten

Name	Symbol	Wert
Permittivität Vakuum	ε_0	$8.854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$
Permeabilität Vakuum	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$
Elementarladung	e	$1.602 \cdot 10^{-19} As$
Lichtgeschwindigkeit	c	$2.998 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}$
Ruhemasse Elektron	m_e	$9.1094 \cdot 10^{-31} kg$
Ruhemasse Proton	m_p	$1.6726 \cdot 10^{-27} kg$

Einheit	Einheits-zeichen	In Basis SI-Einheiten
Ampere	A	
Zeit	s	
Länge	m	
Hertz	Hz	$\frac{1}{\mathrm{s}}$
Volt	V	$\frac{\mathrm{m^2\,kg}}{\mathrm{s^3\,A}}$
Ohm (=$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$)	Ω	$\frac{\mathrm{m^2\,kg}}{\mathrm{s^3\,A^2}}$
Siemens (= $\frac{1}{\Omega}$)	S	$\frac{\mathrm{s^3\,A^2}}{\mathrm{m^2\,kg}}$
Coulomb	C	A s
Farad (=$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}$)	F	$\frac{\mathrm{s^4\,A^2}}{\mathrm{m^2\,kg}}$
Tesla (=$\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m^2}}$)	T	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s^2\,A}}$
Weber (=V s)	Wb	$\frac{\mathrm{m^2\,kg}}{\mathrm{s^2\,A}}$
Henry (=$\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}}$)	H	$\frac{\mathrm{m^2\,kg}}{\mathrm{s^2\,A^2}}$
Joule	J	$\frac{\mathrm{m^2\,kg}}{\mathrm{s^2}}$
Watt (=$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$)	W	$\frac{\mathrm{m^2\,kg}}{\mathrm{s^3}}$
Volt Ampere	VA	$\frac{\mathrm{m^2\,kg}}{\mathrm{s^3}}$
Volt Ampere reactive	VAr	$\frac{\mathrm{m^2\,kg}}{\mathrm{s^3}}$

Prefix	Symbol	Wert
Giga	G	10^9
Mega	M	10^6
Kilo	k	10^3
Milli	m	10^{-3}
Micro	µ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Pico	p	10^{-12}

B.2 Komplexe Zahlen

Eulersche Formel:

$e^{j\Phi} = \cos(\Phi) + j\sin(\Phi)$

Multiplikation:

$\underline{z}_1\underline{z}_2 = (a+jb)(c+jd) = ac - bd + j(ad - bc)$

Division:

$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c+jd)}{(c+jd)^2} = j\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

Betrag:

$|\underline{z}| = |a+jb| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\underline{z}\underline{z}^*}$

Konjugation:

$\underline{z}^* = (a+jb)^* = a - jb$

Polarkoordinaten:

$r = |\underline{z}| = \sqrt{\underline{z}\underline{z}^*}$

$\Phi = arg(\underline{z}) = \arctan(\frac{b}{a})$

Kartesische Koordinaten:

$a = r\cos(\Phi)$

$b = r\sin(\Phi)$

B.3 Additionstheoreme

$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\cos(x)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$

$\sin(x)^2 = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$

$\tan(-x) = -\tan(x)$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$

B.4 Ableitungen und Integrale

B.4.1 Wichtige Ableitungen

Funct.	Ableitung	Funct.	Ableitung
$const$	0	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
e^{kx}	$k \cdot x^{kx}$	c^x	$\log(c) \cdot c^x$
a^{kx}	$k\log(a) \cdot a^{kx}$	a^x	$\log(a) \cdot a^x$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\log(a) \cdot x}$	$\log(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$

Funct.	Ableitung	Funct.	Ableitung
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\coth(x)$	$-\frac{1}{\sinh^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcoth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$

B.4.2 Wichtige Integrale

Potenzen

$$\begin{aligned}
\int x^n \,\mathrm{d}x &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad ,n \neq -1 \\
\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x &= \log|x| + C \\
\int \sqrt{x} \,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x &= 2\sqrt{x} + C
\end{aligned}$$

Integrale über eine Periode f"ur $\omega = 2\pi/T$

$$\int_0^T dt = T$$

$$\int_0^T \sin(n\omega t)dt = \int_0^T \cos(n\omega t)dt = 0$$

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T/2 & n = m \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T/2 & n = m \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = 0$$

Exponentialfunktion und Logarithmus

$$\begin{aligned}
\int e^x \,\mathrm{d}x &= e^x + C \\
\int \log(x) \,\mathrm{d}x &= x\log(x) - x + C \\
\int \frac{1}{x \cdot \log(x)} \,\mathrm{d}x &= \log(\log(x)) + C
\end{aligned}$$

Allgemeine Funktionen

$$\begin{aligned}
\int f(ax+b) \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}F(ax+b) + C \\
\int \frac{u'(x)}{u(x)} \,\mathrm{d}x &= \log(|u(x)|) + C \\
\int u'(x) \cdot u(x) \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}(u(x))^2 + C \\
\int u'(x) \cdot (u(x))^n \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1} + C \\
\int u'(x) \cdot \log(u(x)) \,\mathrm{d}x &= u(x) \cdot \log(u(x)) - u(x) + C
\end{aligned}$$

Hyperbolische Funktionen

$$\begin{aligned}
\int \sinh(x)\,\mathrm{d}x &= \cosh(x)+C \\
\int \cosh(x)\,\mathrm{d}x &= \sinh(x)+C \\
\int \frac{1}{\cosh(x)^2}\,\mathrm{d}x &= \tanh(x)+C \\
\int \tanh(x)\,\mathrm{d}x &= \log(\cosh(x))+C \\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \operatorname{arsinh}(x)+C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x &= \operatorname{arcosh}(x)+C \\
\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \operatorname{artanh}(x)+C \\
\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right)+C \\
\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C \\
\int \operatorname{arsinh}(x)\,\mathrm{d}x &= x\cdot\operatorname{arsinh}(x)-\sqrt{x^2+1}+C \\
\int \operatorname{arcosh}(x)\,\mathrm{d}x &= x\cdot\operatorname{arcosh}(x)-\sqrt{x^2-1}+C \\
\int \operatorname{artanh}(x)\,\mathrm{d}x &= x\cdot\operatorname{artanh}(x)+\frac{1}{2}\log(1-x^2)+C \\
\int \operatorname{arcoth}(x)\,\mathrm{d}x &= x\cdot\operatorname{arcoth}(x)+\frac{1}{2}\log(1-x^2)+C \\
\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{a^2}{2}\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C
\end{aligned}$$

Trigonometrische Funktionen

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax-bx)}{2(a-b)} - \frac{\sin(ax+bx)}{2(a+b)} + C \qquad \text{für } a^2 \neq b^2 + C$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax-bx)}{2(a-b)} + \frac{\sin(ax+bx)}{2(a+b)} + C \qquad \text{für } a^2 \neq b^2 + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x+1) + C$$

$$\int \sin(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + C$$

$$\int \cos(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + C$$

$$\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(x)^2 + C$$

$$\int \sin^2(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2kx)}{4k} + C$$

$$\int \cos^2(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2kx)}{4k} + C$$

$$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\log(|\cos(x)|) + C$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x - \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan(x)\right) + C$$

$$\int -\frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \cot(x) + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin(\frac{x}{a}) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x = \tan(x) + C$$

$$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\log|\cos(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos(x) + C$$

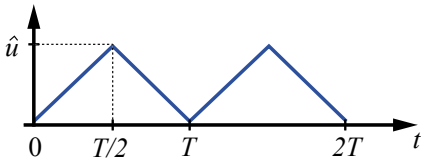
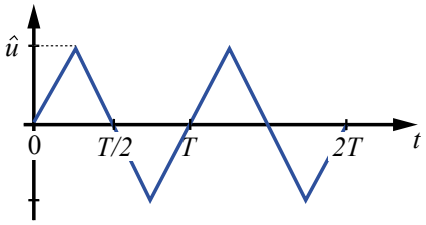
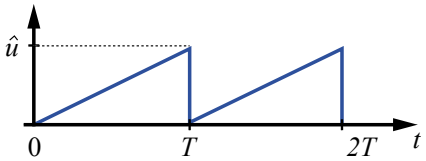
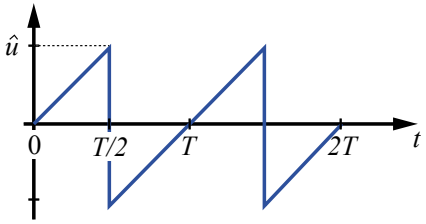
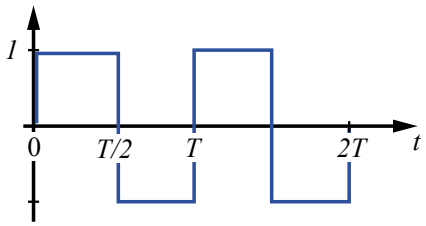
$$\int \sin(ax)^2\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\sin(2ax) + C$$

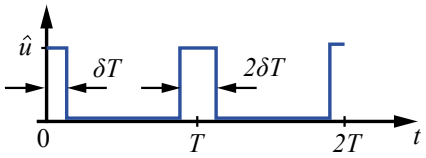
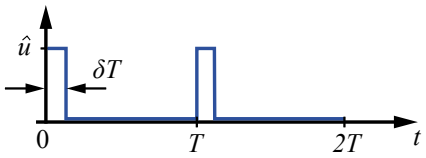
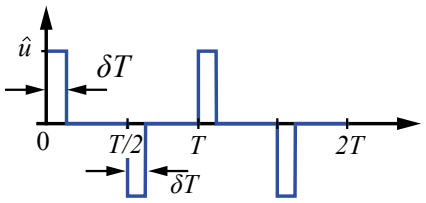
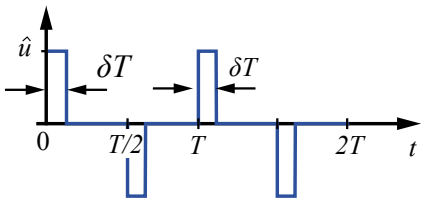
$$\int \cos(ax)^2\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\sin(2ax) + C$$

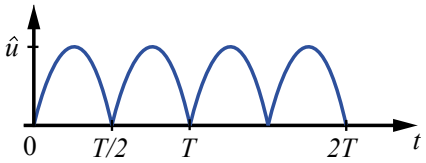
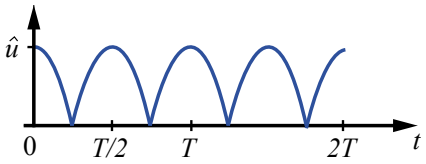
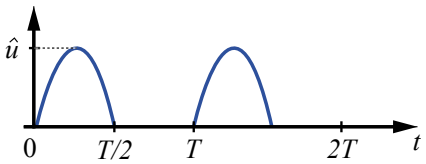
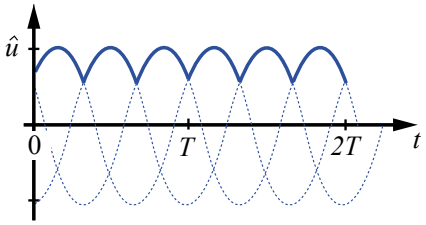
Standardsubstitutionen

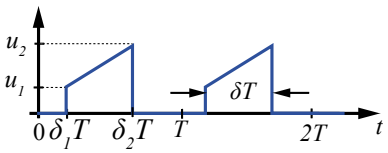
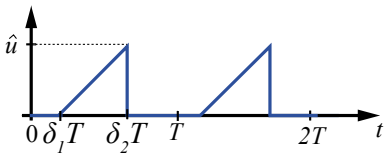
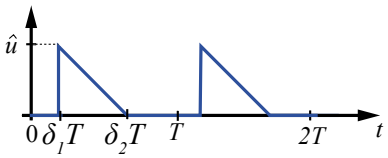
Integral	Substitution	Differential	Bedingung
$\int g(x, \sqrt{ax+b})\mathrm{dx}$	$x = \frac{t^2-b}{a}$ $\sqrt{ax+b} = t$	$\mathrm{dx} = \frac{2t\mathrm{dt}}{a}$	$t \geq 0$
$\int g(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{dx}$	$x = \alpha t + \beta$	$\mathrm{dx} = \alpha\ \mathrm{dt}$	$ax^2+bx+c = \gamma^2 \cdot (\pm 1 \pm t^2)$
$\int g(x, \sqrt{1-x^2})\mathrm{dx}$	$x = \sin(t)$ $\sqrt{1-x^2} = \cos(t)$	$\mathrm{dx} = \cos(t)\mathrm{dt}$	$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
$\int g(x, \sqrt{1+x^2})\mathrm{dx}$	$x = \sinh(t)$ $\sqrt{1+x^2} = \cosh(t)$	$\mathrm{dx} = \cosh(t)\mathrm{dt}$	keine
$\int g(x, \sqrt{x^2-1})\mathrm{dx}$	$x = \cosh(t)$ $\sqrt{x^2-1} = \sinh(t)$	$\mathrm{dx} = \cos(t)\mathrm{dt}$	$t \geq 0$
$\int g(e^x, \sinh(x), cosh(x))\mathrm{dx}$	$e^x = t$ $\sinh(x) = \frac{t^2-1}{2t}$ $\cosh(x) = \frac{t^2+1}{2t}$	$\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{t}$	$t > 0$
$\int g(\sin(x), \cos(x))$	$\tan(\frac{x}{2}) = t$ $\sin(x)n = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\mathrm{dx} = \frac{2\ \mathrm{dt}}{1+t^2}$	$-\pi < x < \pi$

B.5 Fourier Transformation

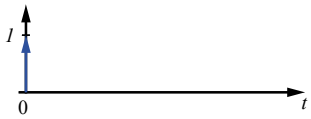
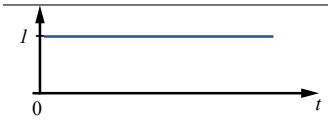
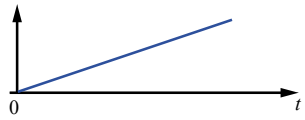
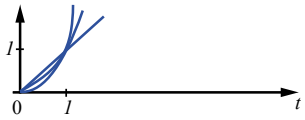
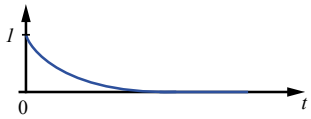
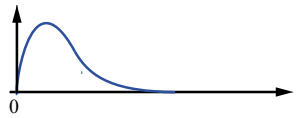
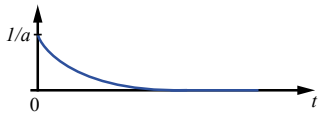
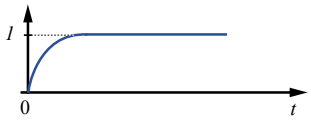
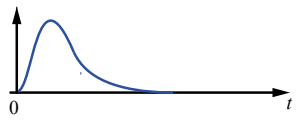
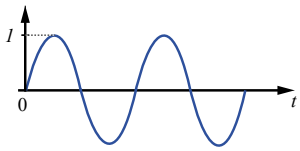
Zeitfunktion $u(t)$	U_{eff}	Fourier-Koeffizienten
 $\frac{\hat{u}}{2} - \frac{4\hat{u}}{\pi^2}[\cos(3\omega t) + \frac{1}{3^2}\cos(5\omega t) + \frac{1}{5^2}\cos(\omega t) + \ldots]$	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$a_0 = \frac{1}{2}\hat{u}$, $\hat{a}_n = \frac{-4\hat{u}}{\pi^2 n^2}$ $n = 1,3,5,\ldots$
 $\frac{8\hat{u}}{\pi^2}[\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega t) \pm \ldots]$	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\hat{b}_n = \frac{8\hat{u}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2}(-1)^{\frac{n+3}{2}}$ $n = 1,3,5,\ldots$
 $\frac{\hat{u}}{2} - \frac{\hat{u}}{\pi}[\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \ldots]$	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$a_0 = \frac{1}{2}\hat{u}$, $\hat{b}_n = \frac{-\hat{u}}{\pi n}$ $n = 1,2,3,\ldots$
 $\frac{2\hat{u}}{\pi}[\sin(\omega t) - \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) \pm \ldots]$	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\hat{b}_n = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{1}{n}(-1)^{n+1}$ $n = 1,2,3,\ldots$
 $\frac{4\hat{u}}{\pi}[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \ldots]$	$\hat{u}$	$\hat{b}_n = \frac{4\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$ $n = 1,3,5,\ldots$

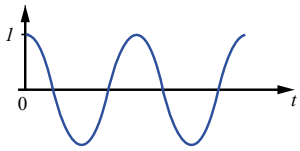
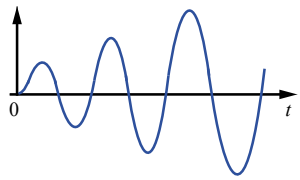
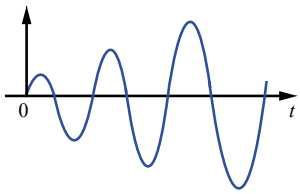
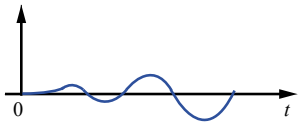
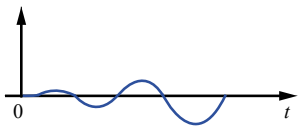
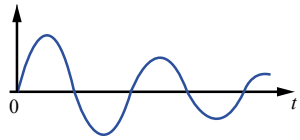
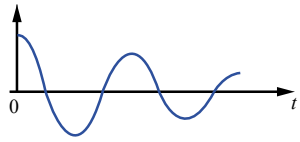
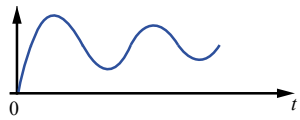
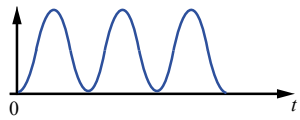
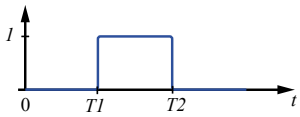
Zeitfunktion $u(t)$	U_{eff}	Fourier-Koeffizienten
 $2\delta\hat{u}+\frac{2\hat{u}}{\pi}[\sin(2\pi\delta)\cos(\omega t)+\frac{1}{2}\sin(4\pi\delta)\cos(2\omega t)$ $+\frac{1}{3}\sin(6\pi\delta)\cos(3\omega t)+\ldots]$	$\hat{u}\sqrt{2\delta}$	$a_0=2\delta\hat{u}$, $\hat{a}_n=\frac{2\hat{u}}{\pi n}\sin(n2\pi\delta)$ $n=1,2,3,\ldots$
 $\delta\hat{u}+\frac{\hat{u}}{\pi}[\sin(2\pi\delta)\cos(\omega t)+\frac{1}{2}\sin(4\pi\delta)\cos(2\omega t)$ $+\frac{1}{3}\sin(6\pi\delta)\cos(3\omega t)+\ldots]+$ $\frac{\hat{u}}{\pi}[[1-\cos(2\pi\delta)]\sin(\omega t)+$ $\frac{1}{2}[1-\cos(4\pi\delta)]\sin(2\omega t)+\ldots]$	$\hat{u}\sqrt{\delta}$	$a_0=\delta\hat{u}$ $\hat{a}_n=\frac{\hat{u}}{\pi n}\sin(n2\pi\delta)$ $\hat{b}_n=\frac{\hat{u}}{\pi n}[1-\cos(2n\pi\delta)]$ $n=1,2,3,\ldots$
 $\frac{2\hat{u}}{\pi}[\sin(2\pi\delta)\cos(\omega t)+\frac{1}{3}\sin(6\pi\delta)\cos(3\omega t)+\ldots]+$ $\frac{2\hat{u}}{\pi}[[1-\cos(2\pi\delta)]\sin(\omega t)+$ $\frac{1}{3}[1-\cos(6\pi\delta)]\sin(3\omega t)+\ldots]$	$\hat{u}\sqrt{2\delta}$	$\hat{a}_n=\frac{2\hat{u}}{\pi n}\sin(n2\pi\delta)$, $\hat{b}_n=\frac{2\hat{u}}{\pi n}[1-\cos(2n\pi\delta)]$ $n=1,3,5,\ldots$
 $\frac{2\hat{u}}{\pi}[[1-\cos(2\pi\delta)]\sin(\omega t)+$ $\frac{1}{2}[1-\cos(4\pi\delta)]\sin(2\omega t)+\ldots]$	$\hat{u}\sqrt{2\delta}$	$\hat{b}_n=\frac{2\hat{u}}{\pi n}[1-\cos(2n\pi\delta)]$ $n=1,2,3,\ldots$

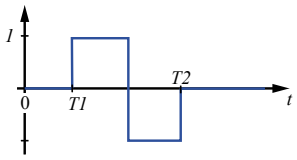
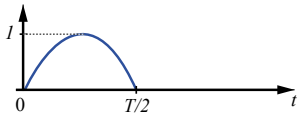
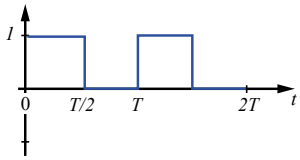
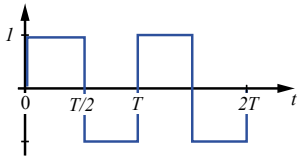
Zeitfunktion $u(t)$	U_{eff}	Fourier-Koeffizienten
 $u(t) = \hat{u}\lvert\sin(\omega t)\rvert$ $= \frac{2\hat{u}}{\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi}[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} + \ldots]$	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$a_0 = \frac{2\hat{u}}{\pi}$ $\hat{a}_n = \frac{-4\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n-1)(n+1)}$ $n = 2,4,6,\ldots$
 $u(t) = \hat{u}\lvert\cos(\omega t)\rvert$ $= \frac{2\hat{u}}{\pi} + \frac{4\hat{u}}{\pi}[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} - \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} \pm \ldots]$	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$a_0 = \frac{2\hat{u}}{\pi}$ $\hat{a}_n = \frac{4\hat{u}}{\pi}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{(n-1)(n+1)}$ $n = 2,4,6,\ldots$
 $u(t) = \hat{u}\sin(\omega t)$ für $0 \leq t \leq T/2$ $= \frac{\hat{u}}{\pi} + \frac{\hat{u}}{2}\sin(\omega t) - \frac{2\hat{u}}{\pi}[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} + \ldots]$	$\frac{\hat{u}}{2}$	$a_0 = \frac{\hat{u}}{\pi}$ $\quad \hat{b}_1 = \frac{\hat{u}}{2}$ $\hat{a}_n = \frac{-2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n-1)(n+1)}$ $n = 2,4,6,\ldots$
 $u(t) = \frac{\hat{u}3\sqrt{3}}{\pi}[\frac{1}{2} - \frac{\cos(3\omega t)}{2\cdot 4} - \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} - \frac{\cos(9\omega t)}{8\cdot 10} - \ldots]$	$\hat{u}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}}$	$a_0 = \frac{\hat{u}3\sqrt{3}}{2\pi}$ $\hat{a}_n = \frac{-\hat{u}3\sqrt{3}}{\pi}\frac{1}{(n-1)(n+1)}$ $n = 3,6,9,\ldots$

Zeitfunktion $u(t)$	U_{eff}	Fourier-Koeffizienten
	$\sqrt{\frac{\delta}{3}(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)}$ mit $\delta = \delta_2 - \delta_1$	$a_0 = \frac{u_1+u_2}{2}\delta \qquad n = 1,2,3,\ldots$ $\hat{a}_n = \frac{1}{\pi n}[u_2\sin(n2\pi\delta_2) - u_1\sin(n2\pi\delta_1)] +$ $\frac{u_2-u_1}{2(n\pi)^2\delta}[\cos(n2\pi\delta_2) - \cos(n2\pi\delta_1)]$ $\hat{b}_n = \frac{-1}{\pi n}[u_2\cos(n2\pi\delta_2) - u_1\cos(n2\pi\delta_1)] +$ $\frac{u_2-u_1}{2(n\pi)^2\delta}[\sin(n2\pi\delta_2) - \sin(n2\pi\delta_1)]$
	$\hat{u}\sqrt{\frac{\delta}{3}}$ mit $\delta = \delta_2 - \delta_1$	$a_0 = \frac{\hat{u}}{2}\delta \qquad n = 1,2,3,\ldots$ $\hat{a}_n = \frac{\hat{u}}{\pi n}\sin(n2\pi\delta_2) +$ $\frac{-\hat{u}}{2(n\pi)^2\delta}[\cos(n2\pi\delta_2) - \cos(n2\pi\delta_1)]$ $\hat{b}_n = \frac{\hat{u}}{\pi n}\cos(n2\pi\delta_2) +$ $\frac{\hat{u}}{2(n\pi)^2\delta}[\sin(n2\pi\delta_2) - \sin(n2\pi\delta_1)]$
	$\hat{u}\sqrt{\frac{\delta}{3}}$ mit $\delta = \delta_2 - \delta_1$	$a_0 = \frac{\hat{u}}{2}\delta \qquad n = 1,2,3,\ldots$ $\hat{a}_n = \frac{-\hat{u}}{\pi n}\sin(n2\pi\delta_1) -$ $\frac{\hat{u}}{2(n\pi)^2\delta}[\cos(n2\pi\delta_2) - \cos(n2\pi\delta_1)]$ $\hat{b}_n = \frac{\hat{u}}{\pi n}\cos(n2\pi\delta_1) -$ $\frac{\hat{u}}{2(n\pi)^2\delta}[\sin(n2\pi\delta_2) - \sin(n2\pi\delta_1)]$

B.6 Laplace Transformation

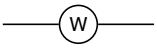
Erregung	$x(t)$	$X(s)$
	$\delta(t)$	1
	$E(t)$	$\frac{1}{s}$
	t	$\frac{1}{s^2}$
	$t^n \quad ,(n=1,2,\ldots)$	$\frac{n!}{s^{(n+1)}}$
	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
hängt von n ab	$t^n e^{-at} \quad ,(n=1,2,\ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{(n+1)}}$
	$\frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{as+1}$
	$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
	$\frac{1}{(b-a)}(e^{-at}-e^{-bt})$	$\frac{q}{(s+a)(s+b)}$
	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}$

	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)}$
	$t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
	$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
	$t^2\sin(\omega t)$	$2\omega\frac{3s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^3}$
	$t^2\cos(\omega t)$	$2\frac{s^3-3\omega^2 s}{(s^2+\omega^2)^3}$
	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
	$1-e^{-at}(\cos(\omega t)+\frac{a}{\omega}\sin(\omega t))$	$\frac{a^2+\omega^2}{s((s+a)^2+\omega^2)}$
	$\frac{1}{\omega^2}(1-\cos(\omega t))$	$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$
	$\begin{cases} 1 & T_1 < t < T_2 \\ 0 & sonst \end{cases}$	$\frac{1}{s}(e^{-sT_1}-e^{-sT_2})$

	$\begin{cases} 1 & T_1 < t < \frac{T_1+T_2}{2} \\ -1 & \frac{T_1+T_2}{2} < t < T_2 \\ 0 & sonst \end{cases}$	$\frac{1}{s}(e^{-sT_1/2} - e^{-sT_2/2})^2$
	$\begin{cases} \sin(\omega t) & 0 < t < T/2 \\ 0 & sonst \end{cases}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}(1+e^{-sT/2})$
	$\begin{cases} 1 & nT < t < nT/2 \\ 0 & sonst \end{cases}$ $n = 0, 1, 2 \ldots \infty$	$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+e^{-sT/2}}$
	$\begin{cases} 1 & nT < t < nT/2 \\ -1 & nT/2 < t < nT \end{cases}$ $n = 0, 1, 2 \ldots \infty$	$\frac{1}{s} \cdot \frac{1-e^{-sT/2}}{1+e^{-sT/2}}$

B.7 Schaltzeichen

	Leitung, allgemein		Anschluss
	Kreuzung ohne Verbindung		feste leitende Verbindung
	Einschalter, Schliesser		Aussschalter, Öffner
	Wechsler, Umschalter		Operationsverstärker
	Ground		LED
	Widerstand, allgemein		veränderbarer Widerstand / Potentiometer
R	Wirkwiderstand	X	Blindwiderstand
Z	komplexer Widerstand (Impedanz)		Induktivität
+ −	Akkumulator, Batterie		Kapazität
	Diode		Lampe, allgemein
	Varistor		BJT
	Transformator mit gleichem Wicklungssinn		Transformator mit entgegengesetztem Wicklungssinn

	N-MOSFET		P-MOSFET
	Ideale Stromquelle		ideale Spannungsquelle
	Spannungsmesser, Voltmeter		Strommesser, Amperemeter
	Gleichspannungsgenerator		Gleichstrommotor
	Leistungsmesser, Wattmeter		

B.8 Verzeichnis der verwendeten Symbole

Griechische Buchstaben

Φ	Vs	magnetischer Fluss
Λ_m	Vs/A	magnetischer Leitwert
Θ	A	Durchflutung
Ψ	As	ver... magnetischer Fluss
ε	As/Vm	Dielektrizitätskonstante, (Permittivität), $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$
ε_0	As/Vm	Dielektrizitätskonstante im Vakuum, (el. Feldkonstante), $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$As/Vm
ε_r	As/Vm	Dielektrizitätszahl, =1 im Vakuum
φ_e	V	elektrostatisches Potential
η		Wirkungsgrad
κ	A/Vm	spezifische Leitfähigkeit, $\kappa = 1/\rho_R$
μ	Vs/Am	(absolute) Permeabilität, $\mu = \mu_r \mu_0$
μ_0	Vs/Am	Permeabilität im Vakuum , $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$Vs/Am
μ_r	Vs/Am	Permeabilitätszahl, = 1 im Vakuum
τ	s	Zeitkonstante
ω	1/s	Kreisfrequenz, $\omega = 2\pi f$

Vektoren

$\vec{A}$	m^2	gerichtete Fläche $\vec{A} = \vec{n}A, \vec{n}$ steht senkrecht auf A
$d\vec{A}$	m^2	vektorielles Flächenelement $d\vec{A} = \vec{n}dA$
$\vec{B}$	Vs/m^2	magnetische Flussdichte, (Induktion)
$\vec{D}$	As/m^2	elektrische Flussdichte, el. Erregung
$\vec{E}$	V/m	elektrische Feldstärke
$\vec{F}$	VAs/m=N	Kraft
$\vec{H}$	A/m	magnetische Feldstärke
$\vec{J}$	A/m^2 Vs/m	1) (räumlich verteilte) Stromdichte 2) magnetische Polarisation
$\vec{0}$		Vektor der Länge Null
$\vec{e}$		Einheitsvektor, Vektor mit Betrag $\lvert\vec{e}\rvert = 1$
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$		Einheitsvektoren in kartesischen Koordinaten
$\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$		Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten
$\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$		Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten

Lateinische Buchstaben

A	m^2	Fläche
A_L	nH	A_L-Wert
B	$\frac{1}{\Omega}$ $\frac{1}{\mathrm{s}}$ $\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$	1) Blindleitwert 2) Bandbreite 3) Betrag der magnetischen Flussdichte
B_C	$\frac{1}{\Omega}$	kapazitiver Blindleitwert
B_L	$\frac{1}{\Omega}$	induktiver Blindleitwert
B_r	$\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$	Remanenz
C	$\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}=\mathrm{F}$	Kapazität
c	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	Lichtgeschwindigkeit $c = 2.99792 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
D	$\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2}$ VA	1) Betrag der elektrischen Flussdichte 2) Verzerrungsblindleistung
d_s, d_p		Verlustfaktor $= 1/Q_s, 1/Q_p$
E	$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$	Betrag der elektrischen Feldstärke
e		Euler'sche Konstante 2.71828
e	As	Elementarladung $e = 1.6021892 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A\,s}$
F	$\frac{\mathrm{VAs}}{\mathrm{m}}=\mathrm{N}$	Betrag der Kraft
f	$\frac{1}{\mathrm{s}}=\mathrm{Hz}$	Frequenz
f_0	$\frac{1}{\mathrm{s}}=\mathrm{Hz}$	Resonanzfrequenz
G	$\frac{1}{\Omega}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}$	elektrischer Leitwert, $G = 1/R$
H	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$	Betrag der magnetischen Feldstärke
H_c	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$	Koerzitivfeldstärke
I	A	Gleichstrom
i	A	zeitabhängiger Strom
J	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$	Betrag der Stromdichte
j		imaginäre Einheit $= \sqrt{-1}$
L	$\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}=\mathrm{H}$	Induktivität
M	$\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}$	Gegeninduktivität
N		Windungszahl
P	VA=W	Leistung, (Wirkleistung)
p	VA=W	zeitabhängige Momentanleistung
Q	As VAr	1) Ladung bzw. Punktladung 2) Blindleistung
Q_p		Güte des Parallelschwingkreises
Q_s		güte des Serienschwingkreises

R	$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}=\Omega$	ohmscher Widerstand
R_m	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vs}}$	magnetischer Widerstand
S	VA	Scheinleistung
$\underline{S}$	VA	komplexe Leistung
T	K	1) Temperatur
	s	2) Periodendauer
t	s	Zeit
U	V	Gleichspannung
$\underline{U}(\omega)$	Vs	Fourier-Transformierte von u(t)
$\underline{U}(s)$	Vs	Laplace-Transformierte von u(t)
u	V	zeitabhängige Spannung
$"u$		Übersetzungsverhältnis
W	VAs=J	Energie
X	$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}=\Omega$	Blindwiderstand, Reaktanz
X_C	$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}=\Omega$	kapazitiver Blindwiderstand
X_L	$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}=\Omega$	induktiver Blindwiderstand
x		Realteil der komplexen Grösse $\underline{z}$
$\underline{Y}$	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}=\frac{1}{\Omega}$	Admittanz
y		Imaginärteil der komplexen Grösse $\underline{z}$
$\underline{Z}$	$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}=\Omega$	Impedanz
$\lvert\underline{Z}\rvert$	$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}=\Omega$	Scheinwiderstand
$\underline{z}$		komplexe z-Ebene

Wechselstromrechnung

Re{..}	Realteil von ..
Im{..}	Imaginärteil von ..
$\overline{u}$	zeitlicher Mittelwert von u(t)
$\hat{u}$	Spitzenwert(Amplitude) von u(t)
$\overline{\lvert u\rvert}$	Gleichrichtwert von u(t)
$\underline{\mathrm{u}}$	komplexe Grösse
$\underline{u}^*$	konjugiert komplexer Wert von $\underline{\mathrm{u}}$
$\underline{\hat{u}}$	komplexe Amplitude von u(t), Spitzenwertzeiger
$\lvert\underline{\hat{u}}\rvert$	Betrag des komplexen Spitzenwertzeigers $\underline{\hat{u}}$

Appendix C

Referenzen

Bibliography

[1] https://ledtipps.net/wirkungsgrad/, "Wirkungsgrad Vergleichstabelle", Februar 2022

[2] User: KMJ, "Glühlampe der Marke Neolux mit klarem Glaskolben", *Wikipedia*, Juni 2004.

[3] User: Wollschaf, "Halogenlampe von Osram mit G9-Stiftsockel ", *Wikipedia*, Juli 2004.

[4] User: Kuebi, "Moderne Energiesparlampe mit E27 Sockel für 220—230 Volt Wechselspannung mit 8 Watt Leistung ", *Wikipedia*, October 2007.

[5] User: Christian Taube, "Verschiedene Leuchtstofflampen", *Wikipedia*, April 2005.

[6] Windell Oskay, "Luxeon K2 LED", *Flickr*, Juni 2008.