角速度与旋转矩阵的关系

记录一下 角速度 $\vec{\omega}$ 与 旋转矩阵 R 之间的关系的推导过程

质点线速度与角速度的关系

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

其中 $\vec{v}$ 为质点线速度，$\vec{\omega}$ 为角速度，$\vec{r}$ 为质点在直角坐标系下的矢径

旋转矩阵

$$R_{ib} = [\vec{x_{ib}} \quad \vec{y_{ib}} \quad \vec{z_{ib}}]$$

其中 i 表示全局坐标系，b表示局部坐标系，$\vec{x_{ib}}$、$\vec{y_{ib}}$、$\vec{z_{ib}}$ 为旋转矩阵的列向量，分别是b坐标系的x轴，y轴，z轴的单位向量在全局坐标系下的坐标

推导过程1（全局坐标系角速度与旋转矩阵的关系）

$$\begin{aligned}\dot{R_{ib}} &= [\dot{\vec{x_{ib}}} \quad \dot{\vec{y_{ib}}} \quad \dot{\vec{z_{ib}}}] \\ &= [\vec{\omega_i} \times \vec{x_{ib}} \quad \vec{\omega_i} \times \vec{y_{ib}} \quad \vec{\omega_i} \times \vec{z_{ib}}] \\ &= [S(\vec{\omega_i}) \cdot \vec{x_{ib}} \quad S(\vec{\omega_i}) \cdot \vec{y_{ib}} \quad S(\vec{\omega_i}) \cdot \vec{z_{ib}}] \\ &= S(\vec{\omega_i}) \cdot R_{ib}\end{aligned}$$

注意 $\vec{\omega_i}$ 为刚体在全局坐标系下的角速度
但是更多的时候，已知的是传感器上获取到的角速度，这些传感器固连在运动物体上，因此获取局部坐标系的角速度和旋转矩阵之间的关系会更有意义。

推导过程2（局部坐标系角速度与旋转矩阵的关系）

角速度变换原理

$$\vec{\omega_i} = R_{ib} \cdot \vec{\omega_b}$$

叉乘分配率

两个向量的相对位置关系在两个向量经过相同旋转后，不会发生改变

$$R_{ib}\vec{p_b} \times R_{ib}\vec{q_b} = R_{ib}(\vec{p_b} \times \vec{q_b})$$

反对称运算分配率

$$(R \cdot \vec{p})^{\wedge} = R \cdot \vec{p}^{\wedge} \cdot R^T$$

证明

$$\begin{aligned}(R \cdot \vec{p})^{\wedge} \cdot \vec{v} &= (R \cdot \vec{p}) \times \vec{v} \\ &= R \cdot R^T \cdot [(R \cdot \vec{p}) \times \vec{v}] \\ &= [R \cdot R^T \cdot (R \cdot \vec{p})] \times [R \cdot R^T \cdot \vec{(}v)] \\ &= R \cdot ([R^T \cdot R \cdot \vec{p}] \times [R^T \cdot \vec{v}]) \\ &= R \cdot (\vec{p} \times (R^T \cdot \vec{v})) \\ &= R \cdot \vec{p}^{\wedge} \cdot R^T \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

推导过程

$$
\begin{aligned}
\dot{R_{ib}} &= S(\vec{\omega}_i) \cdot R_{ib} \\
&= S(R_{ib} \cdot \vec{\omega}_b) \cdot R_{ib} \\
&= R_{ib} \cdot S(\vec{\omega}_b) \cdot R_{ib}^T \cdot R_{ib} \\
&= R_{ib} \cdot S(\vec{\omega}_b)
\end{aligned}
$$

参考资料

[参考资料]