牛顿欧拉方程

描述刚体的运动和力学之间的关系有多种方式，例如拉格朗日方程，牛顿欧拉方程等。
其中拉个朗日方程是从能量角度来描述，而牛顿欧拉方程则是从刚体的平动和转动两个运动类型来描述的。

newton方程

　　这个的分析思路是从物体的受力分析开始的，比如质点的话就是直接的外部主力。要是刚体的话需要考虑外力和内力。

质点

　　根据牛顿第二定律可知

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

平动刚体

　　平动刚体是由N个质点组成的，不同的质点速度均相同, 记为 $\vec{r}_P$

　　第 i 个质点受到内力和外力的作用，内力记为 $\vec{F}_i^{(i)}$ ，外力记为 $\vec{F}_i^{(e)}$

　　根据上一节质点的受力方程，可知

$$m_i \cdot \ddot{r}_i = \vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)}$$

　　整体刚体受力为

$$\begin{aligned}
\sum_i m_i \cdot \ddot{r}_i &= \sum_i \vec{F}_i^{(i)} + \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \\
&= (\sum_i m_i) \cdot \ddot{\vec{r}}_P \\
&= 0 + \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \\
&= F = m \cdot \ddot{\vec{r}}_P
\end{aligned}$$

一般运动刚体

　　刚体质心的定义

$$\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i = m \cdot \vec{r}_C$$

　　整体刚体受力

$$\begin{aligned}
\sum_i m_i \cdot \ddot{r}_i &= \sum_i \vec{F}_i^{(i)} + \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \\
&= 0 + \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \\
&= F = m \cdot \ddot{\vec{r}}_C
\end{aligned}$$

动量矩定理

质点对定点

质点对坐标系原点（O）的动量

$$\vec{p} = m \cdot \dot{\vec{r}}$$

质点对坐标系原点（O）的角动量（动量矩）

$$\vec{l_O} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \dot{\vec{r}})$$

动量矩定理（动量矩的微分方程）

$$\begin{aligned} \dot{\vec{l_O}} &= \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \\ &= \dot{\vec{r}} \times (m \cdot \dot{\vec{p}}) + \vec{r} \times (m \cdot \ddot{\vec{r}}) \\ &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{n}_O \end{aligned}$$

刚体对定点

刚体由N个质点组成，其中第 i 个质点的动量矩微分方程表达为

$$\dot{\vec{l_O}}^i = \vec{n}_O^{(e)^i} + \vec{n}_O^{(i)^i}$$

刚体整体的动量矩微分方程表达为

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{\vec{l_O}}^i &= \sum_i \vec{n}_O^{(e)^i} + \sum_i \vec{n}_O^{(i)^i} \\ &= \sum_i \vec{n}_O^{(e)^i} \\ &= \vec{M}_O = \dot{\vec{L}}_O \end{aligned}$$

刚体对任意点

假设刚体不以 O 点为参考点，而是以 任意一点 P （可能是动点）为参考点，那么对于刚体上任意一个质点 A 的矢径存在如下关系

$$\begin{gathered} \vec{r}_{OA} = \vec{r}_{OP} + \vec{r}_{PA} \\ \vec{r_O}^i = \vec{r_{OP}} + \vec{r_P}^i \end{gathered}$$

刚体对 P 点的 （绝对）动量矩，（其中动量是相对 O 点的，是绝对的）

$$
\begin{aligned}
\vec{L}_P &= \sum_i \vec{r_P}^i \times (m_i \cdot \dot{\vec{r_O}}^i) \\
&= \sum_i \vec{r_O}^i \times (m_i \cdot \dot{\vec{r_O}}^i) - \sum_i \vec{r_{OP}} \times (m_i \cdot \dot{\vec{r_O}}) \\
&= \vec{L}_O - \vec{r_{OP}} \times \sum_i m_i \cdot \dot{\vec{r_O}} \\
&= \vec{L}_O - \vec{r_{OP}} \times (m \cdot \dot{\vec{r_C}})
\end{aligned}
$$

相应的动量矩的微分方程为

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{L}}_P &= \dot{\vec{L}}_O - \vec{r}_{OP} \times \vec{F} - \dot{\vec{r}}_{OP} \times (m \cdot \dot{\vec{r}}_C) \\
&= \vec{M}_O - \vec{r}_{OP} \times \vec{F} - \dot{\vec{r}}_{OP} \times (m \cdot \dot{\vec{r}}_C) \\
&= \vec{M}_P - \dot{\vec{r}}_{OP} \times (m \cdot \dot{\vec{r}}_C)
\end{aligned}
$$

刚体对质心

刚体对质心的绝对动量矩和相对动量矩相同

对上式中的 P 取 质心 C 时，存在动量矩微分方程为

$$
\dot{\vec{L}}_P = \dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C = \dot{\vec{L}}^r_C
$$

惯性张量

此概念的引出的场景是刚体绕定点转动，因此下面的推导都是基于这个场景的

此时存在如下速度关系

$$
\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}
$$

叉乘转点乘公式（这里存在向量运算转矩阵运算的概念）

$$
a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c = (a^T c)b - (a^T b)c
$$

刚体对定点

根据刚体的动量矩公式可知

$$
\begin{aligned}
\vec{L_O} &= \sum_i \vec{r_i} \times \vec{p_i} \\
&= \sum_i \vec{r_i} \times (m_i \cdot \dot{\vec{r_i}}) \\
&= \sum_i \vec{r_i} \times (m_i \cdot \vec{\omega} \times \vec{r_i}) \\
&= \sum_i m_i \cdot \vec{r_i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_i}) \\
&= \sum_i m_i \cdot ((\vec{r_i} \cdot \vec{r_i})\vec{\omega} - (\vec{r_i} \cdot \vec{\omega})\vec{r_i}) \\
&= \sum_i m_i[(\vec{r_i}^T \vec{r_i})\vec{\omega} - \vec{r_i}(\vec{r_i}^T \vec{\omega})] \\
&= (\sum_i m_i[(\vec{r_i}^T \vec{r_i})I - \vec{r_i}\vec{r_i}^T])\vec{\omega} \\
&= I_O \cdot \vec{\omega}
\end{aligned}
$$

刚体对质心

分析刚体对质心的相对动量矩和惯性张量的关系

刚体相对质心的惯性张量是一个特殊的常值矩阵，因此探究这个关系会很有价值

$$
\begin{aligned}
\vec{L_C}^r &= \sum_i \vec{r_C}^i \times \vec{p_C} \\
&= \sum_i \vec{r_C}^i \times (m_i \cdot \dot{\vec{r_C}}^i) \\
&= \sum_i m_i[\vec{r_C}^i \times (\vec{\omega_C} \times \vec{r_C}^i)] \\
&= \sum_i m_i[(\vec{r}^i_C \cdot \vec{r}^i_C)\vec{\omega_C} - (\vec{r}^i_C \cdot \vec{\omega_C})\vec{r}^i_C] \\
&= \sum_i m_i[(\vec{r}^i_C{}^T \vec{r}^i_C)\vec{\omega_C} - \vec{r}^i_C(\vec{r}^i_C{}^T \vec{\omega_C})] \\
&= (\sum_i m_i[(\vec{r}^i_C{}^T \vec{r}^i_C)I - \vec{r}^i_C\vec{r}^i_C{}^T])\vec{\omega_C} \\
&= I^r_C \cdot \vec{\omega_C}
\end{aligned}
$$

坐标转换

$$
I_O = R_{OB} \cdot I_B \cdot R_{OB}^T
$$

欧拉方程

所谓的欧拉方程是使用变矢量的绝对导数和相对导数定理把动量矩定理表示在动坐标系中（通常是与刚体固连的坐标系）中。

变矢量的绝对导数和相对导数定理 （科里奥利公式）

首先来推导一下科里奥利公式

已知绝对坐标系的原点为O，空间内有一点A，同时空间内还有一个运动的坐标系B

此时存在矢径关系如下

$$
\begin{aligned}
\vec{r}^i_{OA} &= \vec{r}^i_{OB} + \vec{r}^i_{BA} \\
&= \vec{r}^i_{OB} + R^i_b \cdot \vec{r}^b_{BA}
\end{aligned}
$$

此时矢径的微分方程如下

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}^i_{OA} &= \dot{\vec{r}}^i_{OB} + \dot{R}^i_b \cdot \vec{r}^b_{BA} + R^i_b \cdot \dot{\vec{r}}^b_{BA} \\
&= \vec{\omega}^i_B \times \vec{r}^i_{OB} + \vec{\omega}^i_B \times (R^i_b \cdot \vec{r}^b_{BA}) + R^i_b \cdot \dot{\vec{r}}^b_{BA} \\
&= \vec{\omega}^i_B \times (\vec{r}^i_{OB} + R^i_b \cdot \vec{r}^b_{BA}) + R^i_b \cdot \dot{\vec{r}}^b_{BA} \\
&= \vec{\omega}^i_B \times \vec{r}^i_{OA} + R^i_b \cdot \dot{\vec{r}}^b_{BA} \\
&= \vec{\omega}^i_B \times \vec{r}^i_{OA} + \dot{\vec{r}}^i_{OA}{}^r
\end{aligned}
$$

总结公式如下

$$
\dot{\vec{r}}^i = \vec{\omega}^i \times \vec{r}^i + \dot{\vec{r}}^{i\,r}
$$

其中 $\dot{\vec{r}}^{i\,r}$ 是 局部坐标系下的矢径的变化率在全局坐标系下的表达

绕定点转动刚体

已知全局坐标系为 O 系， 局部坐标系为 B 系， 刚体相对 全局坐标系的角速度为 $\vec{\omega^O}$

首先计算刚体相对于O 系的动量矩如下

$$
\begin{aligned}
\vec{L_O} &= \sum_i \vec{r}^O_i \times (m_i \cdot \dot{\vec{r}}^O_i) \\
&= \sum_i \vec{r}^O_i \times (m_i \cdot \vec{\omega}^O \times \vec{r}^O_i) \\
&= \sum_i m_i \cdot (\vec{r}^O_i \times \vec{\omega}^O \times \vec{r}^O_i) \\
&= \sum_i m_i \cdot [(\vec{r}^O_i \cdot \vec{r}^O_i)\vec{\omega}^O - (\vec{r}^O_i \cdot \vec{\omega}^O)\vec{r}^O_i] \\
&= \sum_i m_i \cdot [(\vec{r}^{O^T}_i \vec{r}^O_i)@\vec{\omega}^O - (\vec{r}^{O^T}_i \vec{\omega}^O)@\vec{r}^O_i] \\
&= \sum_i m_i \cdot [(\vec{r}^{O^T}_i \vec{r}^O_i)@\vec{\omega}^O - \vec{r}^O_i@(\vec{r}^{O^T}_i \vec{\omega}^O)] \\
&= \sum_i m_i \cdot [(\vec{r}^{O^T}_i \vec{r}^O_i)@I - \vec{r}^O_i@\vec{r}^{O^T}_i]@\vec{\omega}^O \\
&= \vec{J}^O \vec{\omega}^O
\end{aligned}
$$

同理可以得到固连在刚体上的坐标系B 系下的惯性张量

$$
\vec{J}_B = \sum_i m_i \cdot [(\vec{r}^{B^T}_i \vec{r}^B_i)@I - \vec{r}^B_i@\vec{r}^{B^T}_i]
$$

同时根据惯性张量的坐标转换公式可知

$$
J_O = R_{OB} \cdot J_B \cdot R^T_{OB}
$$

1. 证明方法1

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{L}}_O &= \dot{J}_O \cdot \vec{\omega}^O + J_O \cdot \dot{\vec{\omega}}^O \\
&= (R_{OB} \cdot \dot{J}_B \cdot R_{OB}^T) \cdot \vec{\omega}^O + J_O \cdot \dot{\vec{\omega}}^O \\
&= [(\dot{R}_{OB} J_B R_{OB}^T) + R_{OB} \dot{J}_B R_{OB}^T + R_{OB} J_B \dot{R}_{OB}^T] \cdot \vec{\omega}^O + J_O \cdot \dot{\vec{\omega}}^O \\
&= [(\dot{R}_{OB} J_B R_{OB}^T) + 0 + R_{OB} J_B \dot{R}_{OB}^T] \cdot \vec{\omega}^O + J_O \cdot \dot{\vec{\omega}}^O \\
&= [\vec{\omega}^O \times (R_{OB} J_B R_{OB}^T) - (R_{OB} J_B R_{OB}^T) \times \vec{\omega}^O] \cdot \vec{\omega}^O + J_O \cdot \dot{\vec{\omega}}^O \\
&= [\vec{\omega}^O \times J_O - J_O \times \vec{\omega}^O] \cdot \vec{\omega}^O + J_O \cdot \dot{\vec{\omega}}^O \\
&= \vec{\omega}^O \times J_O \cdot \vec{\omega}^O - J_O \cdot (\vec{\omega}^O \times \vec{\omega}^O) + J_O \cdot \dot{\vec{\omega}}^O \\
&= \vec{\omega}^O \times J_O \cdot \vec{\omega}^O + J_O \cdot \dot{\vec{\omega}}^O \\
&= \vec{\omega}^O \times \vec{L}_O + J_O \cdot \dot{\vec{\omega}}^O
\end{aligned}
$$

2. 证明方法2 （硬推）

   这里只展示 J_O 的求导过程，其余的与上面一致

$$
\begin{aligned}
\dot{J}_O &= \sum_i m_i \cdot [({\vec{r}_i^O}^T \dot{\vec{r}}_i^O)@I - \vec{r}_i^O @ {\vec{r}_i^O}^T] \\
&= \sum_i m_i \cdot [({\dot{\vec{r}}_i^O}{}^T \vec{r}_i^O @I) + ({\vec{r}_i^O}^T \dot{\vec{r}}_i^O @I) - \dot{\vec{r}}_i^O @ {\vec{r}_i^O}^T - \vec{r}_i^O @ {\dot{\vec{r}}_i^O}{}^T] \\
&= \sum_i m_i \cdot [(\vec{\omega}^O \times \vec{r}_i^O) \cdot \vec{r}_i^O @I + \vec{r}_i \cdot (\vec{\omega}^O \times \vec{r}_i^O)@I - (\vec{\omega}^O \times \vec{r}_i^O){\vec{r}_i^O}^T - \vec{r}_i^O(\vec{\omega}^O \times \vec{r}_i^O)^T] \\
&= \sum_i m_i \cdot [0 + 0 - (\vec{\omega}^O \times \vec{r}_i^O){\vec{r}_i^O}^T - \vec{r}_i^O(\vec{\omega}^O \times \vec{r}_i^O)^T] \\
&= \sum_i m_i \cdot [({\color{red}{\vec{r}_i^O}^T \vec{r}_i^O \times \vec{\omega}^O} - (\vec{\omega}^O \times \vec{r}_i^O){\vec{r}_i^O}^T) - ({\color{red}{\vec{r}_i^O}^T \vec{r}_i^O \times \vec{\omega}^O} - \vec{r}_i^O {\vec{r}_i^O}^T \times \vec{\omega}^O)] \\
&= \sum_i m_i \cdot [\vec{\omega}^O \times ({\vec{r}_i^O}^T \vec{r}_i^O @I - \vec{r}_i^O @ {\vec{r}_i^O}^T) - ({\vec{r}_i^O}^T \vec{r}_i^O @I - \vec{r}_i^O @ {\vec{r}_i^O}^T) \times \vec{\omega}^O] \\
&= \vec{\omega}^O \times J_O - J_O \times \vec{\omega}^O
\end{aligned}
$$

一般运动刚体

太懒了，没有证明

注意b 表示任意的一个坐标系，只要下面的物理量在同一坐标系内，下面的等式都成立

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{L}}_C{}^b &= \vec{M}_C{}^b \\
&= I_C^b \cdot \dot{\vec{\omega}}^b + \vec{\omega}^b \times I_C^b \cdot \vec{\omega}^b
\end{aligned}
$$

参考资料

https://www.zhihu.com/question/327324524/answer/3405589606

https://zhuanlan.zhihu.com/p/664766369

《机器人动力学与控制（霍伟）》