MPC建模

动力学模型

目前对于四足机器人进行动力学建模，为了简化模型的建立，主要采用单刚体动力学建模的方式简化分析。

下面我们采用牛顿欧拉方程进行动力学建模，如下：

$$\ddot{\vec{p}} = \frac{\sum_{i=1}^{4} \vec{f}_i}{m} + \vec{g} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(I\omega)}{dt} &= I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) \\ &\approx I\dot{\omega} \\ &= \sum_{i=1}^{4} \vec{r}_i \times \vec{f}_i \end{aligned} \tag{2}$$

同时运动学模型如下：

$$\dot{\vec{p}} = \vec{v} \tag{3}$$

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\gamma/cos\beta & sin\gamma/cos\beta & 0 \\ -sin\gamma & cos\gamma & 0 \\ tan\beta cos\gamma & tan\beta sin\gamma & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \omega_x^i \\ \omega_y^i \\ \omega_z^i \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} cos\gamma & sin\gamma & 0 \\ -sin\gamma & cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \omega_x^i \\ \omega_y^i \\ \omega_z^i \end{bmatrix} \tag{4}$$

此时可以根据标准的 $\dot{x} = Ax + Bu$ 对上面的分析进行整合，其中Ax是运动学部分，Bu是动力学部分

此时我们定义 状态变量如下：

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_{3\times1} \\ p_{3\times1} \\ \omega_{3\times1} \\ v_{3\times1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

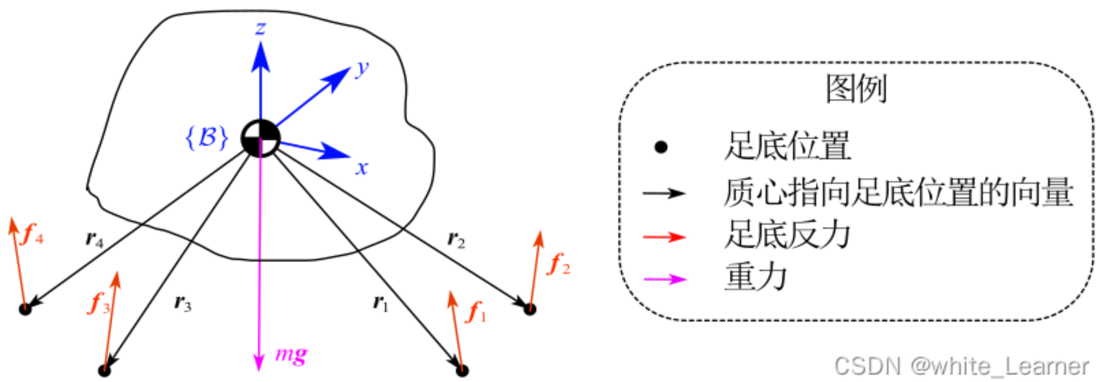
其中 θ 表示固连坐标系下的欧拉角，p表示质心的位置，ω表示角速度（在全局坐标系下），v表示质心的速度

最终整理可得

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_{3\times1} \\ p_{3\times1} \\ \omega_{3\times1} \\ v_{3\times1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & R_z^T(\gamma) & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 1_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ p \\ \omega \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ I_{3\times3}^{-1}[r_1]_\times & I_{3\times3}^{-1}[r_2]_\times & I_{3\times3}^{-1}[r_3]_\times & I_{3\times3}^{-1}[r_4]_\times \\ 1_{3\times3}/m & 1_{3\times3}/m & 1_{3\times3}/m & 1_{3\times3}/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {f^1}_{3\times1} \\ {f^2}_{3\times1} \\ {f^3}_{3\times1} \\ {f^4}_{3\times1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3\times1} \\ 0_{3\times1} \\ 0_{3\times1} \\ g_{3\times1} \end{bmatrix}$$

上述方程可以进一步整理成：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_{3\times1} \\ p_{3\times1} \\ \omega_{3\times1} \\ v_{3\times1} \\ g_{3\times1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & R_z^T(\gamma) & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 1_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 1_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ p \\ \omega \\ v \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ I_{3\times3}^{-1}[r_1]_\times & I_{3\times3}^{-1}[r_2]_\times & I_{3\times3}^{-1}[r_3]_\times & I_{3\times3}^{-1}[r_4]_\times \\ 1_{3\times3}/m & 1_{3\times3}/m & 1_{3\times3}/m & 1_{3\times3}/m \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {f^1}_{3\times1} \\ {f^2}_{3\times1} \\ {f^3}_{3\times1} \\ {f^4}_{3\times1} \end{bmatrix}$$



进一步将上述方程离散化

$$\begin{bmatrix} \theta_{3\times1} \\ p_{3\times1} \\ \omega_{3\times1} \\ v_{3\times1} \\ g_{3\times1} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1_{3\times3} & 0_{3\times3} & R_z^T(\gamma)\delta t & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 1_{3\times3} & 0_{3\times3} & 1_{3\times3}\delta t & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 1_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 1_{3\times3} & 1_{3\times3}\delta t \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 1_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ p \\ \omega \\ v \\ g \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ I_{3\times3}^{-1}[r_1]_\times\delta t & I_{3\times3}^{-1}[r_2]_\times\delta t & I_{3\times3}^{-1}[r_3]_\times\delta t & I_{3\times3}^{-1}[r_4]_\times\delta t \\ 1_{3\times3}\delta t/m & 1_{3\times3}\delta t/m & 1_{3\times3}\delta t/m & 1_{3\times3}\delta t/m \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \Bigg[$$

预测模型

这里的公式推导不会绑定某个具体的动力学微分方程，只要是形如$x_{k+1}=Ax_k+Bu_k$这种形式的都可以使用，接下来的推导也是基于这个式子

这里明确几个变量的含义：k表示当前时刻；P表示预测步数（《手推MPC公式》叫做预测步长，我这里感觉预测步数更合适）

$\hat{x}_{k+1}=Ax_k+Bu_k$

$\hat{x}_{k+2}=A^2x_k+ABu_k+Bu_{k+1}$

$\hat{x}_{k+3}=A^3x_k+A^2Bu_k+ABu_{k+1}+Bu_{k+2}$

$\hat{x}_{k+P}=A^Px_k+A^{P-1}Bu_k+A^{P-2}Bu_{k+1}+\ldots+ABu_{k+P-2}+Bu_{k+P-1}$

上述公式的意思是，假设我们已知动力学模型以及当前系统的状态变量，那么我们可以预测未来P步的系统状态，整理成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix}\hat{x}_{k+1}\\ \hat{x}_{k+2}\\ \ldots\\ \hat{x}_{k+P}\end{bmatrix}_{(nP\times n)}=\begin{bmatrix}A^1\\ A^2\\ \ldots\\ A^P\end{bmatrix}_{(nP\times n)}x_{k(n\times 1)}+\begin{bmatrix}A^0B & 0 & 0 & \ldots & 0\\ A^1B & A^0B & 0 & \ldots & 0\\ A^2B & A^1B & A^0B & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A^{P-1}B & A^{P-2}B & A^{P-3}B & \ldots & A^0B\end{bmatrix}_{(nP\times mP)}\begin{bmatrix}u_k\\ u_{k+1}\\ \ldots\\ u_{k+P-1}\end{bmatrix}_{(mP\times 1)}$$

对上式简化后为

$$\hat{X}_{(nP\times n)}=A_{(nP\times n)}x_{k(n\times 1)}+B_{(nP\times mP)}U_{(mP\times 1)}$$

其中n表示某个时刻状态变量x的维度，m表示某个是口控制变量u的维度,P表示预测的步数，k表示当前时刻的时间

二次规划

代价函数

我们这里有两个诉求

1. 我们希望模型预测值和我们期望的值尽可能的一致
2. 我们希望用最小的能量达成这件事，也就是控制向量越小越好

因此建立如下的代价函数

$$Y=\sum_{i=1}^{P}\|\hat{x}_{k+i}-x_{k+i,ref}\|q_i+\|u_{k+i-1}\|r_i$$

其中 q_i,r_i 表示的权重系数（0～1），表示的是希望与参考值更接近还是能量更小的原则那个更优先

整理成矩阵形式为

$$\begin{aligned}Y&=(\hat{X}-X_{ref})^TQ(\hat{X}-X_{ref})+U^TRU\\ &=(Ax_k+BU-X_{ref})^TQ(Ax_k+BU-X_{ref})+U^TRU\\ &=(Ax_k)^TQ(Ax_k)+(BU)^TQ(BU)+X_{ref}^TQX_{ref}+2(Ax_k)^TQ(BU)-2(Ax_k)^TQX_{ref}-2(BU)^TQX_{ref}+U^TRU\\ &\approx(BU)^TQ(BU)+2(Ax_k)^TQ(BU)-2(BU)^TQX_{ref}+U^TRU\\ &=U^T(B^TQB+R)U+2(BU)^TQ^TAx_k-2(BU)^TQX_{ref}\\ &=U^T(B^TQB+R)U+2(BU)^TQAx_k-2(BU)^TQX_{ref}\\ &=U^T(B^TQB+R)U+2U^TB^TQ(Ax_k-X_{ref})\\ &=\frac{1}{2}U^THU+U^Tg\\ &=U^T(B^TQB+R)U+2(B^TQ(Ax_k-X_{ref}))^TU\end{aligned}$$

求取最优解U^*

$$\frac{\partial Y}{\partial U}=2(B^TQB+R)U+2(B^TQ(Ax_k-X_{ref}))=0$$

那么可得最优解

$$U^*=-(B^TQB+R)^{-1}B^TQ(Ax_k-X_{ref})$$

注意这里$Q=Q^T,R=R^T$

这里涉及到了矩阵求导，有几个关键的公式可以参考一下

$$\frac{\partial(a_{(m\times 1)}^TX_{(m\times n)}b_{(n\times 1)})}{\partial X_{(m\times n)}}=ab_{(m\times n)}^T$$

$$\frac{\partial(a_{(m\times 1)}^TX_{(m\times n)}^Tb_{(n\times 1)})}{\partial X_{(n\times m)}}=ba_{(n\times m)}^T$$

$$\frac{\partial(x^TAx)}{\partial x} = Ax + A^Tx$$

约束

上面讲述了基于代价函数的最有解的解析解的形式，当时现实中更多的会存在额外的约束。

二次规划可以求取存在约束的情况下的最优解。

针对四足机器人来说，主要考虑足端受力的限制条件。

1. 水平方向不能大于最大的静摩擦力，否则会产生打滑现象
2. 竖直方向不能超过某个最大值，否则会产生非弹性形变; 同时电机的输出同样存在上限。

因此约束建立的模型如下:

$$\begin{cases} f_{\min} \le f_z \le f_{\max} \\ -\mu f_z \le f_x \le \mu f_z \\ -\mu f_z \le f_y \le \mu f_z \end{cases}$$

整理成矩阵形式为 $c_{min\,(12\times1)} \le C_{20\times12}U_{12\times1} \le c_{max\,(12\times1)}$

$$C_{20\times12} = \begin{bmatrix} C_{1\,(5\times3)} & 0_{(5\times3)} & 0_{(5\times3)} & 0_{(5\times3)} \\ 0_{(5\times3)} & C_{2\,(5\times3)} & 0_{(5\times3)} & 0_{(5\times3)} \\ 0_{(5\times3)} & 0_{(5\times3)} & C_{3\,(5\times3)} & 0_{(5\times3)} \\ 0_{(5\times3)} & 0_{(5\times3)} & 0_{(5\times3)} & C_{4\,(5\times3)} \end{bmatrix}_{(20\times12)}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 1/\mu & 0 & 1 \\ -1/\mu & 0 & 1 \\ 0 & 1/\mu & 1 \\ 0 & -1/\mu & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这里没有考虑f_z的下界约束，因为一定为非负值

结合之前的二次性代价函数以及约束，可以功过二次规划来求取最优解，这个最优解包含了P步的控制向量，只需要取第一步对应的控制向量即可，输入到当前时刻对系统进行控制

误差补偿（反馈校正）

k时刻：我们使用预测模型对输出进行预测P步

k+1时刻：我们不需要重新使用预测模型重新预测P步，而是取k时刻的[k+2,k+P] 进行误差补偿后作为此时的 前P-1个预测

其中误差项为：$e_{k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}$ 同时所有的P-1项补偿使用的都是e_{k+1}这一个误差项

$$\hat{x}_{correct} = S \cdot \hat{x} + H \cdot e_{k+1}$$

其中S为移位矩阵，H为权重矩阵（0～1）表示信任多少误差项

参考资料

https://blog.csdn.net/wills9/article/details/119377036

https://zhuanlan.zhihu.com/p/273729929

https://www.matrixcalculus.org/