会议举办城市选址问题

International conference location problem

陈旭鹏 2014012882
马聿伯 2015012295
王复英 2015011175

2017 年 4 月 16 日

摘要

本文试图对会议选址问题进行探讨，建立数学模型并选出在给定数据集下的会议城市。我们认为会议最优选址需要优先考虑参会人员的身体状态，进一步抽象得出了影响身体状态的函数，在此基础上通过加权得到综合各种因素的状态函数。当所有人前往某地时的状态函数总和最大，我们就认为该地为举办会议的理想城市。我们把状态函数拆解开来进行考虑，将其分为生物钟的影响、旅途时长的影响（俗称"鞍马劳顿"）以及气候的影响（俗称"水土不服"）三个部分，并通过一定的模型假设与近似使其分别成为两地经度差、飞行时间和两地纬度差的单一变量函数。在量化过程中，考虑到人体的负反馈调节系统对状态下降的阻滞作用，我们在"逻辑斯蒂模型"的基础上列写这三个函数的微分方程，再将其与定解条件得到这些模型的参数。获得三个子模型之后，本文采用层次分析法获得了表示三部分权重的权向量，三部分状态函数的带权叠加为总的状态函数。由于每个城市都可能成为潜在的最佳开会城市，本文计算以每个城市为参会城市的状态总和，然后比较得出其中状态函数值最大的城市，即为我们要计算的最佳会议选址城市。该部分建立在之前推导出的公式的基础上，增加权向量后获得总的状态函数的公式。计算状态值、对参会者状态求和、挑选最大状态值的城市都通过 MATLAB 编程实现。本文测试了题目中给的两个样例，为了使模型具有通用性和可推广性，我们还下载了世界主要城市数据另外测试了随机产生的 200 个城市参会人数随机的样例，画出了其相对位置的图像。因此实现了任意选定一定数量的城市与参会人员即可选择出会议举办城市的要求。本模型通过 MATLAB 进行编程计算，代码见附录。本文通过 LATEX 撰写，所使用的 Excel 表格见附件。

关键词: 阻滞效应，层次分析法，MATLAB，状态函数。

目录

1 背景介绍与问题分析

1.1 问题背景

随着国际化交流的日益广泛和深入，国际性的会议次数也不可避免地增多。与传统的小型会议不同，来自全球各地的参会者需要在同一时间赶赴同一地点，舟车劳顿的他们很有可能会在接下来高强度的会议面前显得力不从心，严重时甚至会影响整个会议的进程与效果。一言以蔽之，国际化大型会议日期与地点的确定是一项值得研究的问题。

1.2 问题分析

本文的作者们期望设计一种算法，能够计算出一场具体会议（已知会议举办的日期、地点、参会人数及他们的所在地）最为合适的会议地点。结合日常生活经验，长途旅行会对一个人的状态产生或多或少的影响，该“影响”可以被拆分为三个部分。

生物钟影响（biological block effect） 生物钟是人的一种特殊生理机制，周期大约为 24h。简单说来，它是由于地球自转而产生的昼夜节律。根据地球的自转规律，全世界被划分为 24 个时区，同一时区内的人的生物钟大致处于“同步”状态。当乘坐国际航班在时区中穿行时，昼夜周期改变，就会扰乱人体生物钟周期，导致一系列生理节律紊乱的现象。综上所述，生物钟对人长途旅行状态的影响是旅行起始地和目的地经度之差 φ 的函数。

旅途时长影响（time effect） 容易想象，即使旅途的出发地和目的地处在同一经度，如果旅程足够漫长，我们依然会感到十分疲惫。在国际旅行中，尽管时差对人的影响更为显著，但我们也不能忽略旅途本身对人的影响，即俗话所说的“鞍马劳顿”。它独立于生物钟的影响，可以单纯人为仅仅是旅行时间的函数。

气候影响（climate effect） 假设我们拥有了“超能力”，在一瞬间就从一个地方转移到了另一个地方。如果这两个地方经度相同（比如从哈尔滨——海口，新西伯利亚——孟买），我们就消除了生物钟和飞行时间对人状态的影响，可显然人的状态依然会有一定的下降。这是因为初末位置的气候、饮食、生活习惯等存在显著显著差异，即俗话所说的“水土不服”。
为了量化以上因素对人状态的影响并最终求解这一问题，我们将依照下列步骤进行建模：

1. 建立飞行时间、经度差与纬度差之间的关系。
2. 分别建立时差对人状态的影响函数 f_1、飞行时长对人状态的影响函数 f_2 以及气候对人状态的影响函数 f_3 这三个子模型。

3. 通过层次分析法确定这三个因素所占权重，将这三个函数加权求和得到总函数 F_{ij},F_{ij} 表示从城市 i 飞行到城市 j 各种因素综合后对人状态的影响函数。
4. 定参。人工设计若干个实例（格式如题中最后所给那两个数据集），按照经验推断所应该选取的城市。利用这些样本，确定函数 F 中的若干个参数。

至此我们就可以得到一个具有较高可信度的算法，从而完成整个建模过程。

2 模型假设

2.1 模型的假设

1. 假设每个人的身体状况、知识储备与智力商数完全相同，且他们对会议的影响是相同的。
2. 假设最终选择的城市应该具有一定的经济基础和公共资源去举办一个规模较大的国际会议，因此我们假设备选城市的人口应该大于 30 万（在此基础上我们筛选出了 939 个备选城市）。
3. 假设时差对人的影响没有方向性（即向东飞行与向西飞行对人造成的生物钟影响相同）
4. 假设所有参会者在同一时间到达目的地。（例如会议开始前一天的下午 6 点）
5. 假设所有参会者乘坐的航班平均时速都为 900km/h，飞行路线为两地在球坐标下的最短直线距离。
6. 假设同一纬度各位置的气候完全相同，并假设太阳直射点处温度最高。

2.2 符号系统

表 1: 符号系统说明

编号	符号	说明	备注
1	f_1	时差对人状态影响函数	
2	f_2	飞行时长对人状态影响函数	
3	f_3	气候对人状态影响函数	
4	F_{ij}	各种因素综合后对人的状态影响函数	f 函数加权得出
5	φ_{ij}	两城市的经度差	Φ 为 φ_{ij} 为元素的矩阵
6	θ_{ij}	两城市的纬度差	Θ 为以 θ_{ij} 为元素的矩阵
7	r_{ij},t_{ij}	两城市的距离与飞行时间	R 为以 r_{ij} 为元素的矩阵
8	i_k	初始城市	第 k 个参会者居住城市
9	j	目的城市	根据模型，H、f、F 均为 j 的函数
11	H	总会议有效指数	总贡献，由所有的 F 求和得出
10	g	时差导致的状态下降率函数	生物钟子模型中 f_1 的导数，恒为非正值
11	h	鞍马劳顿导致的状态下降率函数	生物钟子模型中 f_2 的导数，恒为非正值
12	$\bar{\theta}$	$2\theta_0-\theta_i$，θ_0 为太阳直射处维度	维度与共轭关于直射点镜像对称
13	$\delta\theta_{ij}$	$=\min\{\lvert\theta_i-\theta_j\rvert,\lvert\bar{\theta}_i-\theta_j\rvert\}$	具体含义见文中解释
14	l	$=\frac{df_3(\delta\theta_{ij})}{d\delta\theta_{ij}}$ 气候导致的状态下降率函数	非正, 是 $\delta\theta_{ij}$ 的二次函数
15	a_{ij}	对因子，即 x_i,x_j 对 Z 的影响之比	显然有 a_{ij}=$\frac{1}{a_{ji}}$
16	λ_{max}	矩阵 A 对应的最大特征值	矩阵 A 由 a_{ij} 生成
17	W	最大特征值对应的归一化后的特征向量	

3 数据处理与模型说明

3.1 数据处理

我们的原始数据来自全球城市经纬度 Excel 表格。我们获取了列有全球城市的经纬度、人口的 excel 表格。首先我们假设会议举办城市应该有比较好的条件，因此我们设定了人口数达到三十万以上的限制条件。在此基础上筛选出了 938 个候选城市。我们将 excel 表格导入 MATLAB 中以数值矩阵格式进行处理。

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\varphi_{1\,1} & \cdots & \varphi_{1\,938}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_{938\,1} & \cdots & \varphi_{938\,938}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\theta_{1\,1} & \cdots & \theta_{1\,938}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \theta_{938\,1} & \cdots & \theta_{938\,938}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}r_{1\,1} & \cdots & r_{1\,938}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{938\,1} & \cdots & r_{938\,938}\end{bmatrix}$$

其中 φ_{ij}、θ_{ij}、r_{ij} 别为两城市 i、j 之间的经度差、纬度差及距离。

3.2 模型说明

上文已经提到，我们需要 3 个函数来刻画在不同城市举办会议对参会者的影响，这三个函数分别是：

1. 生物钟函数 f_1：时差对人状态的影响函数
2. 疲劳函数 f_2：飞行时长对人状态的影响函数
3. 气候函数 f_3: 气候对人状态的影响函数

这三个函数加权求和得到综合因素对人状态的影响函数 F，即:

$$\begin{bmatrix}f_1 & f_2 & f_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}=F$$

将每个人的状态函数求和:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n}F=H$$

其中 n 为参会者的总人数。
定义 H 为总会议有效指数，即所有人对本次会议的总贡献。
定义 i_k 为初始城市，即第 k 个参会者原先所在的城市 i。
定义 j 为目的城市，即最终举办会议的城市。
在该模型下，H 是目的城市 j 的函数:

H=H(j)

这是因为数据集已经给定参会者的个数和他们的原位置，则第 k 个参会者的三个子状态函数都是关于 j 的函数：

$$f_1 = f_{1k}(j)$$
$$f_2 = f_{2k}(j)$$
$$f_3 = f_{3k}(j)$$

所以相应的 F 和 H 也是目的城市的函数。这说明任意一个的备选目的城市 j 都对应都对应一个总会议有效指数 H，我们只需要找出最大的那个 H(j)，就可以确定相应的会议举办地 j:

$$j = max\{H(j)\}$$

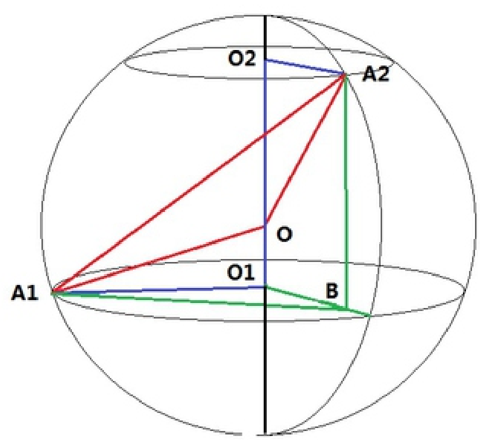
4 模型建立

4.1 建立飞行时间、经度差与纬度差之间的关系

根据假设 5，所有飞机的速度相同，飞行时间与两地距离成正比：

s=vt

简化的地球模型 我们同一用经度和纬度来确定任意一个城市的位置。若一个城市的经度为 φ，纬度为 θ，且北纬为正，南纬为负，两地经度差为 φ。则可用坐标将这个城市唯一地表示为 (φ,θ)。现在假设某个参会者从城市 A 飞至城市 B，且 A_1=(φ_1,θ_1),A_2=(φ_2,θ_2)。



飞机飞行的最短距离应该是地球大圆的劣弧长度，地球半径 R(最终按照 6370km 计算)。设角 A_1OA_2 =θ，圆 O_1,O_2 为纬度圆，显然 A_1,A_2 两地的大圆劣弧长为 Rθ。

由三角形 A_1A_2O：

$$A_1{A_2}^2=A_1O^2+A_2O^2\text{-}2A_1O\cdot 2A_2O\cdot\cos\theta=2R^2(1\text{-}\cos\theta) \tag{1}$$

作矩形 $O_1O_2A_2B$, 由三角形 A_1BO_1:

$$A_1B^2=O_1B^2+A_1{O_1}^2\text{-}2O_1B\cdot 2A_1O_1\cdot\cos\varphi=R_1^2+R_2^2\text{-}2R_1R_2cos\varphi \tag{2}$$

由三角形 A_1A_1B:

$$A_1{A_2}^2=A_1B^2+A_2B=R_1^2+R_2^2\text{-}2R_1R_2\cos\varphi+R^2(\sin\theta_1\text{-}\sin\theta_2)^2 \tag{3}$$

由 (1)、(3) 及 R_1=R$\cos\theta_1$、R_2=R$\cos\theta_2$ 可得：

$$R^2\cos\theta_1^2+R^2\cos\theta_2^2\text{-}2R^2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\varphi+R^2(\sin\ \theta_1\text{-}\sin\theta_2)^2=2R^2(1\text{-}\cos\theta) \tag{4}$$

解上面的式子可以得到 $\theta=\arccos(\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\varphi+\sin\theta_1\sin\theta_2)$, 再乘以 R 即可得到飞行距离。

4.2 子模型 ：生物钟函数模型

由之前的分析可知，一个人跨越的时区越多，时差反应对他的影响就越大。
由假设 3 我们可以近似认为，生物钟函数 f_1 只与初始城市和目的城市的经度差有关，即仅仅是经度差的函数：

$$f_1 = f_1(\varphi_{ij})$$

由假设 4 我们可以近似认为，纬度差没有正负之分，即：

$$\varphi_{ji} = \varphi_{ij}$$
$$\varphi \in [0, \pi]$$

现在我们对 f_1 进行量化，假设生物钟对人状态的影响可用 [0,1] 中的任何一个实数进行衡量：1 表示这个人完全不受生物钟的影响，0 表示这个人受到的该方面影响达到最大。

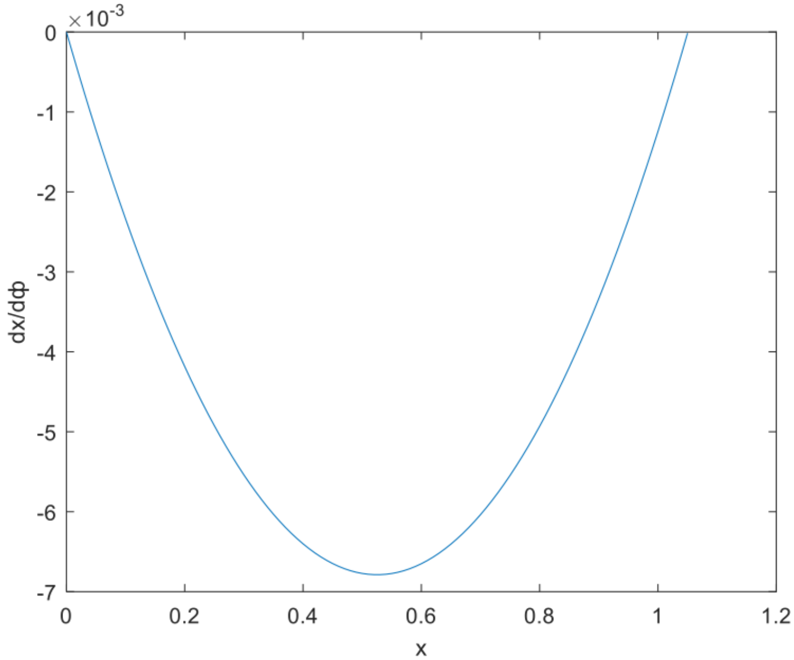
我们想象旅行者沿着与纬线平行的方向乘坐飞机旅行。科学研究表明，当他的飞行跨度小于 2 个时区时，生物钟效应对其没有显著影响。但当旅程继续进行，跨越的时区逐渐增多，人体生物钟所感受的时间和飞机所在时区的“地方时”的就会有一定的“昼夜差距“，从而影响生物钟的节律反应，导致人的状态值在短时间内会有一个急速下降的过程。但是这种下降并不会”突破天际“：当时差反应增大到一定程度时，人体内的负反馈调节系统会通过激素分泌等方式“阻滞”这种影响。尽管这种负反馈的效应不能完全抵消时差所造成的影响，却可以减缓状态的下滑趋势。

为了进一步说明我们的构思，下面用一个更通俗的说法对其进行试探性的阐释：我们可以把生物钟对人体的影响近似理解为“早睡“或者”晚睡“对人体的影响。自西向东飞行意味着”晚睡“，反之意味着”早睡“。假设此刻有三位蹩脚的作者正在完成一项数学建模作业，看起来今天晚上是要熬夜了。如果他们只是比平时晚睡了一个小时甚至更短，那这对他们第二天的状态影响几乎可以忽略不计；但若是晚睡两个小时以上呢？想象一下自己半夜赶大作业到凌晨两三点之后的第二天自己的状态吧！但如果他们的建模遇到了极大的困难（就如同现在的我们）而彻夜无眠呢？这个时候人的状态当然不会比只熬到两三点更精神，但至少感觉上两者也已经相差无几，没有那么大的差异了吧。举这个例子并非不是鼓励在数学建模的最后关头再通宵赶工，而只是单纯地希望把我们的想法尽可能地说明清楚。现在我们终于可以用数学语言对模型进行刻画了：

定义 f_1 的导数 f_1' 为（时差所导致的）状态下降率，显然状态下降率恒为非正值。

$$\frac{df_1(\varphi)}{d\varphi} = g(f_1(\varphi)) < 0 \tag{5}$$

由前面的分析，当状态值不断下降时，状态下降率的绝对值会有一个先增后减的变化过程。对 $g(f_1(\theta))$ 做最简单的假定，设 $g(f_1(\theta))$ 为的二次函数，且大致图像为：



$$g(f_1(\theta)) = a(f_1(\varphi) - f_1(\varphi_1))(f_1(\varphi) - f_1(\varphi_2)) \tag{6}$$

令 $f_1(\varphi)$=x, 则方程可改写为:

$$\frac{dx}{d\varphi} = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{7}$$

求解该微分方程，可得:

$$x(\varphi) = \frac{x_2 + x_1 e^{a\varphi + c}}{1 + e^{a\varphi + c}} \tag{8}$$

其中 a、c、x_1、x_2 为参数。

为了减小误差，应使 x(φ) 的 e 指数项尽可能大，因此我们采用角度制而非弧度制表示经度。地球分为 24 个时区，每跨越一个时区，经度值的变化为 15 度。

接着我们通过模型的实际意义确定边界条件：当两城市之间没有经度差时，显然参会者不会产生时差反应，即:

$$f_1(0)=1$$

尽管 φ 有一定的取值范围，但这并不影响我们考虑如下这种极端情况，即当 $\varphi \to \infty$ 时，参会者的受到时差的影响极大，可认为:

$$\lim_{\varphi \to \infty} f_1(\varphi) = 0$$

确定边界条件后，我们再来分析该函数的整体变化趋势并最终定参上文提到，跨越 2 个时区以内生物钟效应没有显著影响。因此我们假设跨越两个时区时，人的状态下降几乎可以忽略不计，近似认为此时的状态为原状态的 95%：

$$f_1(30)=0.95$$

接着我们考虑现实中可能发生的最极端的情况，即该乘客乘飞机跨越了 12 个时区，正好昼夜颠倒。这时的时差反应极大，已经接近无法正常进行会议的程度。因此我们近似认为：

$$f_1(180)=0.20$$

将以上四式带入，我们可得：

$$\frac{x_2}{1+e^c}=1 \tag{9}$$

$$\frac{x_2}{1+e^{30a+c}}=0.95 \tag{10}$$

$$\frac{x_2}{1+e^{180a+c}}=0.2 \tag{11}$$

解得

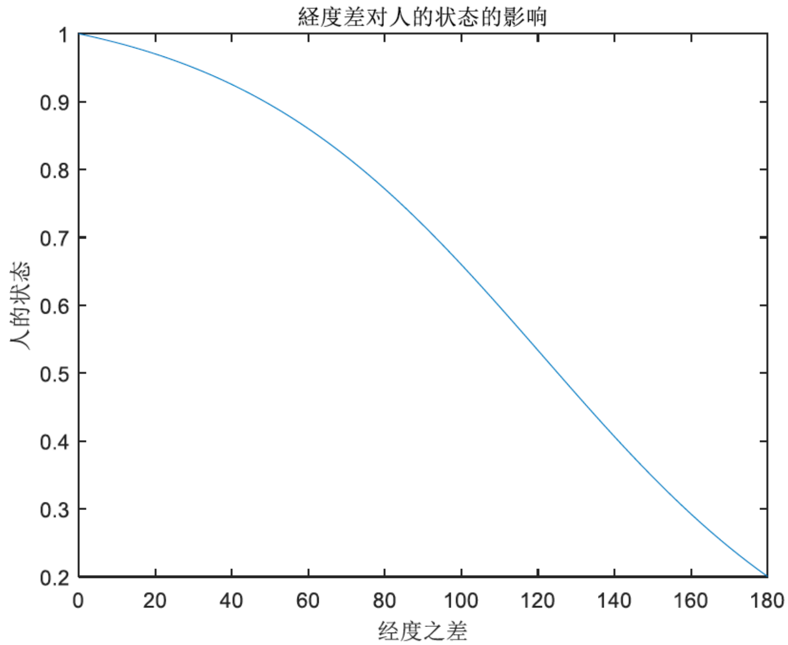
a=0.0246

c=-2.984

x_2=1.05058

综上，$f_1(\varphi)$ 可被定解：

$$f_1(\varphi)=x(\varphi)=\frac{1.05058}{1+e^{0.0246\varphi-2.984}} \tag{12}$$



4.3 子模型 ：疲劳函数模型

由之前的分析可知，一个人在飞机上飞行的时间越长，“鞍马劳顿”对他的状态影响就会越大。

由假设 5 我们可以近似认为，疲劳函数 f_2 只与飞行时间有关，即 f_1 仅仅是飞行时间的函数：

$$f_2 = f_2(t_{ij})$$

t_{ij} 代表从城市 i 到城市 j 所需时间，由于时间是标量，所以我们有：

$$t_{ij} = t_{ji}$$

现在我们对 f_2 进行量化，假设”鞍马劳顿“对人状态的影响可用 [0,1] 中的任何一个实数进行衡量：1 表示这个人完全不受旅途颠簸的影响，0 表示这个人受到的该方面影响达到最大。

与生物钟函数模型中类似，我们认为人体的负反馈调节系统会使状态函数的变化率呈现出“类二次函数“的特征：即旅途较短时几乎没有影响；但旅途持续一段时间后状态的下降会突然加快；随后体内的负反馈调节系统会通过激素分泌等方式“阻滞”这种影响。尽管这种负反馈的效应不能完全抵消“鞍马劳顿“所造成的影响，却可以减缓状态的下滑趋势。

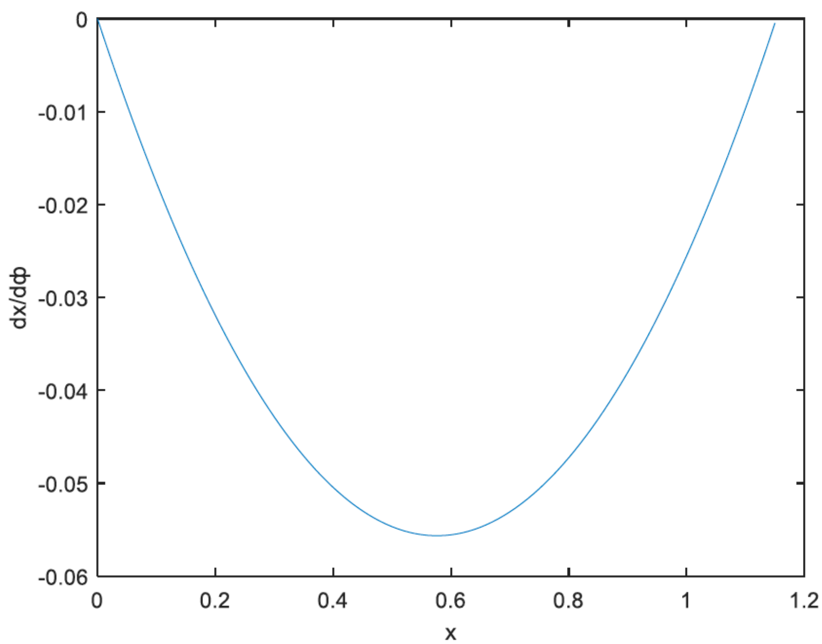
具体的分析过程与之前完全类似：

定义 f_2 的导数 f_2' 为（“鞍马劳顿“所导致的）状态下降率，显然状态下降率恒为非正值。

$$\frac{df_2(t)}{dt} = h(f_2(t)) < 0 \tag{13}$$

$$h(f_2(t)) = a(f_2(t) - f_2(t_1))(f_2(t) - f_2(t_2)) \tag{14}$$

图像如下：



求解该微分方程，可得：

$$y(t) = \frac{y_2 + y_1 e^{bt+d}}{1 + e^{bt+d}} \tag{15}$$

其中 b、d、y_1、y_2 为参数。
了简化计算（同时在一定程度上也有减小误差的效果），不至于使得的 e 指数项中 t 值过大、b 值过小，我们将 t 的单位定为小时（h）而非标准国际单位制秒 (s)。
接着我们通过模型的实际意义确定边界条件：
当旅行时间为 0 时，显然参会者不会受到任何“鞍马劳顿的影响, 即：

$$f_2(0)=1$$

当 $t \to \infty$ 时，即参会者始终处于旅行状态中，可认为：

$$\lim_{t\to\infty} f_2(t) = 0$$

确定边界条件后，我们再来分析该函数的整体变化趋势并最终定参。我们假设旅行时间小于 2 个小时的情况下，"鞍马劳顿"对人没有显著影响。即旅行时间为 2 个小时，人的状态下降几乎可以忽略不计，近似认为此时的状态为原状态的 95%：

$$f_2(2)=0.95$$

接着我们考虑现实中可能发生的最极端的情况，我们发现这 984 个城市两两之间乘飞机旅行的最长旅途大约为 15 个小时，这时我们可怜的参会者已经坐在狭小的机舱中将近一个昼夜，因此我们近似认为他的状态有着显著的下降：

$$f_2(15)=0.40$$

将以上四式带入，我们可得：

$$\frac{y_2}{1+e^d}=1 \tag{16}$$

$$\frac{y_2}{1+e^{2b+d}}=0.95 \tag{17}$$

$$\frac{y_2}{1+e^{15b+d}}=0.4 \tag{18}$$

解得

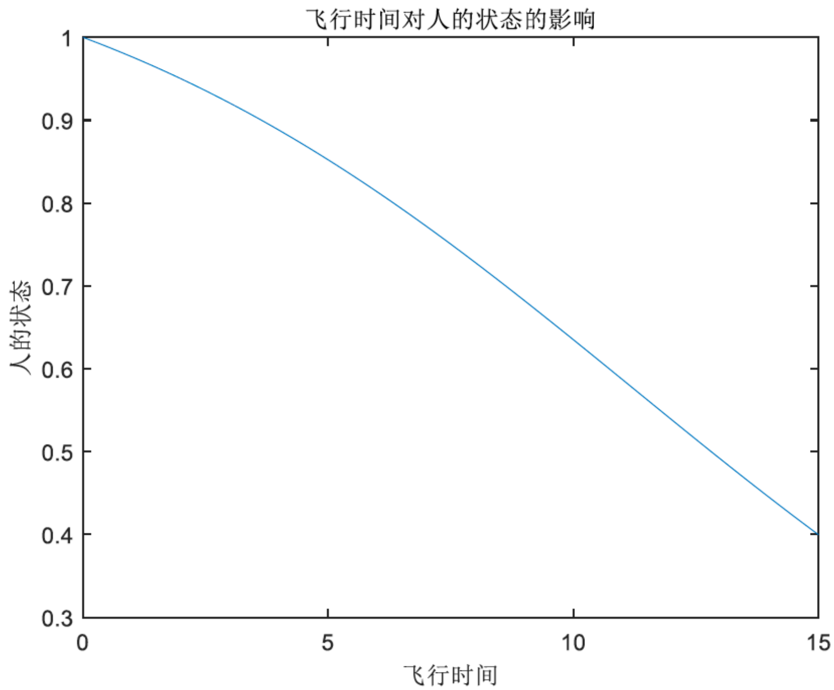
b=0.1676

d=-1.8812

y_2=1.1524

综上，f_2(t) 可被定解：

$$f_2(t)=y(t)=\frac{1.1524}{1+e^{0.1676\varphi-1.8812}} \tag{19}$$



4.4 子模型 ： 气候函数模型

在所有可能对参会者状态造成影响的因素之中,“水土不服”是最难分析、同时也是最难量化的一项指标。一方面,“水土不服”所包含的因素纷繁复杂，包括气候、饮食甚至民俗文化等等；另一方面，与时差、飞行距离这种单变量函数不同，地球上任何一个位置（只要它们具有不同的经纬度，其“水土”就会各不相同）的“水土”都是独一无二的，并且受到地理、历史甚至是经济、政治、宗教等各方面因素的综合影响。

因此我们断言，对这九百多个城市“水土”的一一详细分析已经大大超出了我们的能力，并且有悖于数学建模的精神内涵。下面我们将会做适当的假设来简化该问题，并对其做试探性的讨论：

1. 忽略起始城市与目的城市除气候之外所有其他因素的差异。这是我们用气候函数来研究这一问题的前提。

2. 第二个假设就是之前模型假设中所提到的假设 6，重复如下：
   假设同一纬度各位置的气候完全相同，并假设太阳直射点处温度最高。这是我们用纬度

值刻画气候函数 f_3 的前提，即气候对参会者的影响仅仅与初始城市的纬度 θ_i 和目的城市的纬度 θ_j 有关：

（表 1 太阳直射点纬度）

主要日期与太阳直射点纬度($\delta°$)

日期	3.21	4.05	4.20	5.05	5.21	6.06	6.22	7.07	7.23	8.23	9.23
距春分蹬天数	0	15	30	45	61	77	93	108	124	155	186
δ	0	5.72209	11.1303	15.9056	19.9424	22.5406	23.4392	22.6485	20.1503	11.4719	0
日期	10.01	10.08	10.23	10.31	11.02	11.07	11.22	11.30	12.07	12.12	12.22
距春分的天数	194	201	216	224	226	231	246	254	261	266	276
δ	−3.1735	−5.9092	−11.472	−14.176	−14.814	−16.336	−20.15	−21.642	−22.595	−23.062	−23.439
日期	1.01	1.06	1.21	1.31	2.04	2.10	2.19	2.28	3.06	3.10	3.21
距春分的天数	286	291	306	316	320	326	335	344	350	354	365
δ	−23.054	−22.577	−20.079	−17.62	−16.484	−14.636	−11.59	−8.2839	−5.9743	−4.4013	0

3. 对于所有参会者而言，最适宜的气候就是他们初始城市的气候，即 f

4. 参会者们对寒暑并没有特殊的偏爱，且初始城市与目的城市的气候差异越大，他们（受到气候因素影响）的状态值就越低。

5. 整个地球的气候状态以太阳直射点所在纬度为中轴，南北两侧大致相同。

   由于不同参会者对同一地方的气候适应情况具有主观性，因此我们研究第 k 个参会者的气候函数 f_{3k}。

   已知初始城市的纬度为 θ_i，并且人为规定纬度的方向为“北正南负”。（例如北纬 40° 计为 +40°，南纬 30° 计为-30°）。

   定义 θ_i 的共轭纬度 $\bar{\theta}_i=2\theta_0\text{-}\theta_i$，其中 θ_0 为太阳直射点所在的纬度。不难发现一个纬度和它的共轭纬度关于太阳直射点镜像对称。

   再定义广义纬度差 $\delta\theta_{ij}$:

$$\delta\theta_{ij}=\min\{|\theta_i\text{-}\theta_j|,|\bar{\theta}_i\text{-}\theta_j|\}$$

   为了解释广义纬度差 $\delta\theta_{ij}$ 的实际含义，我们用一个例子进行简单说明：假如某初始城市的纬度值为北纬 40°，目的城市的值为南纬 25°，此时太阳直射点则处于北纬 10°。

   若按照原始的纬度差定义：$\theta_{ij}=\theta_i\text{-}\theta_j=65°$，这样看起来似乎两地之间的气候差异极大，但事实并非如此。由于我们假设地球上的气候关于太阳直射点两侧对称，所以一个纬度和它

的共轭纬度具有相同的气候。再本例中，初始城市处于北纬 40°，它的共轭纬度为:$\bar{\theta}_i$=2θ_0-θ_i=-20°，即南纬 20°。这说明此时北纬 40° 与南纬 20° 气候条件一致，而南纬 25° 与南纬 20° 又仅仅有 5° 的差距，因此北纬 40° 与南纬 25° 的气候差并没有“纬度差“中那样明显。显然使用相对纬度差计算更符合模型中的情况。

$$\delta\theta_{ij}=\min\{|\theta_i-\theta_j|,|\bar{\theta}_i-\theta_j|\} \qquad =5^\circ$$

通过这个例子，我们可以看出比起纬度差，相对纬度差更能够刻画不同纬度城市之间的气候差异。因此我们把定义为关于相对纬度差的单值函数：

$$f_3=f_3(\delta_{ij})$$

先做定性分析：当两地之间的相对纬度差较小时，气候对参会者状态的影响几乎可以忽略不计；当相对纬度差处于一个比较大的值时，气候对参会者的影响会有一个显著增加的过程；而当相对纬度差更大后，气候对参会者的影响虽然很大，但并没有显著增加。

现在我们对 f_3 进行量化，假设气候对人状态的影响可用 [0,1] 中的任何一个实数进行衡量：1 表示完全不受气候因素的影响，0 表示其受到的该方面影响达到最大。

定义 f_3 的导数 f_3' 为（气候所导致的）状态下降率，显然状态下降率恒为非正值。

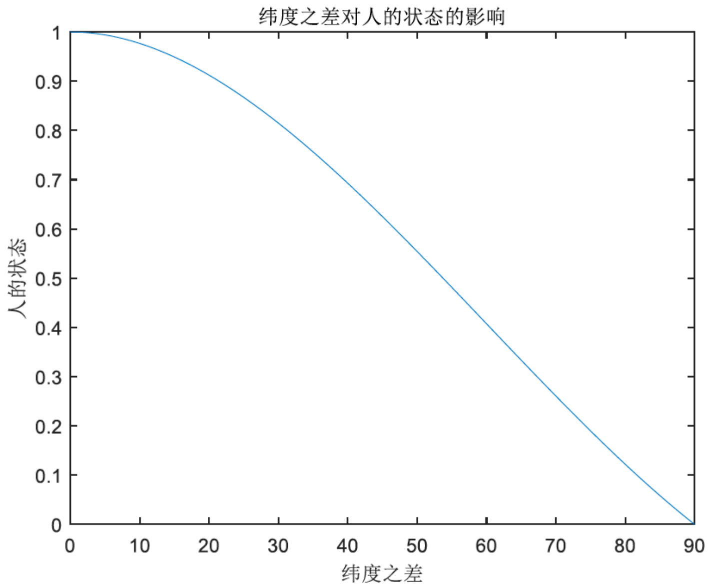
$$f_3=f_3(\delta_{ij})$$

$$\frac{df_3(\delta\theta_{ij})}{d\delta\theta_{ij}}=l(f_3(\delta\theta_{ij}))<0 \tag{20}$$

$l(f_3(\delta\theta_{ij}))$ 是关 $\delta\theta_{ij}$ 的二次函数：

$$l(f_3(\delta\theta_{ij}))=m(\delta\theta_{ij}-\delta\theta_{ij1})(\delta\theta_{ij}-\delta\theta_{ij2}) \tag{21}$$

由下图可得：



$$\delta\theta_{ij1} = 0$$
$$\delta\theta_{ij2} = 90$$

令 $f_3(\delta\theta_{ij}) = z$, 则方程可改写为:

$$\frac{dz}{d\delta\theta_{ij}} = m\delta\theta_{ij}(\delta\theta_{ij} - 90) \tag{22}$$

求解该微分方程，可得:

$$z(\delta\theta_{ij}) = m[\frac{1}{3}(\delta\theta_{ij})^3 - 45(\delta\theta_{ij})^2] + c \tag{23}$$

其中 m、c 为参数

接着我们通过模型的实际意义确定边界条件:

显然相对纬度差为 0 的两地气候相同，参会者不受影响:

$$z(0)=1$$

当相对纬度差达到 90 度时，我们认为该参会者受到的影响极大（可以想象一个常年生活在赤道的人来到南极开会）

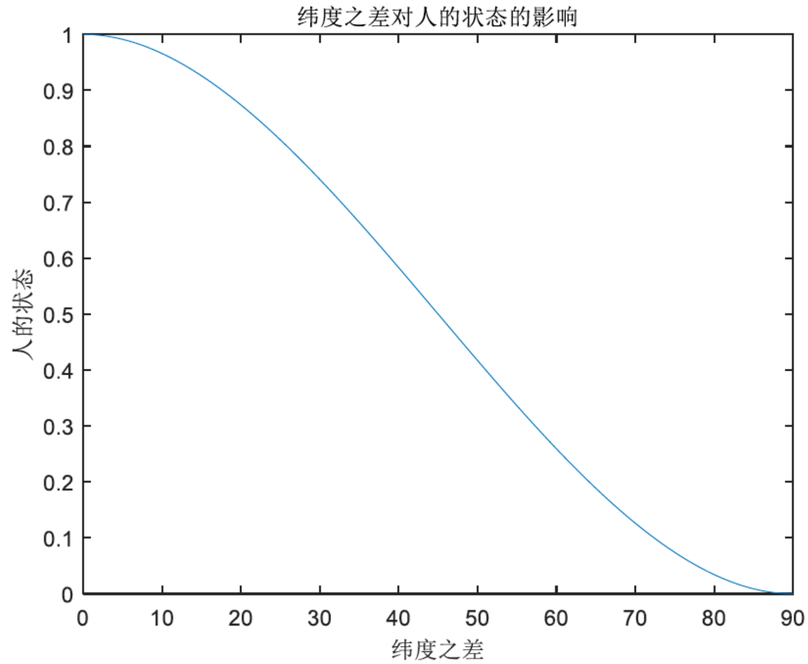
$$z(90)=0$$

将以上两式带入，我们可得:

$$m=\frac{6}{90^3}$$
$$c=1$$

综上所述，

$$f_3(\delta\theta_{ij}) = z(\delta\theta_{ij}) = \frac{2}{90^3}x^3 + \frac{3}{90^2}x^2 + 1 \tag{24}$$



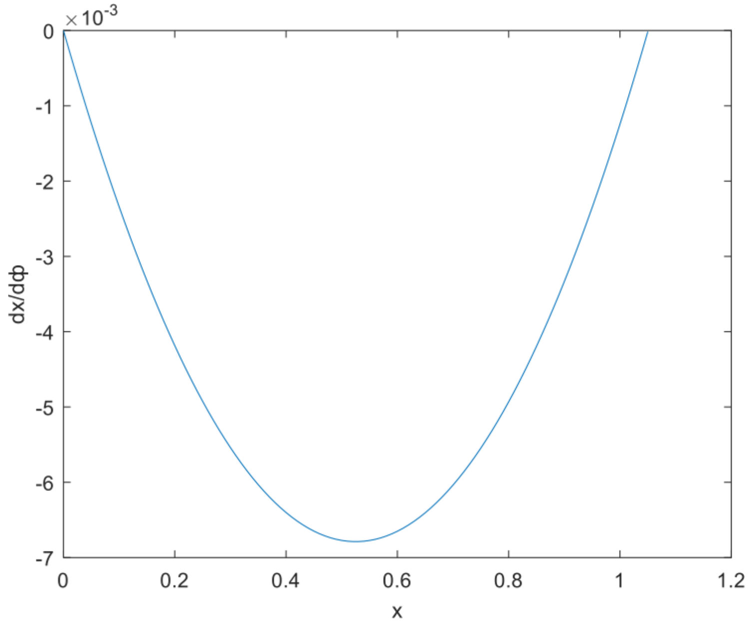
4.5 确定权向量

根据我们建立的三个小模型，我们可以分别计算每个因素对人的状态的影响。因为参会成员的状态是由飞行时间、时差、气候共同决定的，我们需要确定这三部分影响在总状态中所占的权重。我们采用层次分析法来确定。步骤如下：

1. 递阶层次结构的建立
   首先要把问题条理化、层次化，构造出一个有层次的结构模型。在这个模型下，复杂问题被分解为元素的组成部分。这些元素又按其属性及关系形成若干层次。上一层次的元素作为准则对下一层次有关元素起支配作用。这些层次可以分为三类：
   （i）最高层：这一层次中只有一个元素，一般它是分析问题的预定目标或理想结果，因此也称为目标层。我们的目标是选择最优的开会城市。
   （ii）中间层：这一层次中包含了为实现目标所涉及的中间环节，它可以由若干个层次组成，包括所需考虑的准则、子准则，因此也称为准则层。我们考虑的重要因素是飞行时

间、时差和气候。

(iii) 最底层：这一层次包括了为实现目标可供选择的各种措施、决策方案等，因此也称为措施层或方案层。这一层为我们筛选的 939 个城市，每个城市都可能成为开会城市。



2. 构造判断矩阵

层次结构反映了因素之间的关系，但准则层中的各准则在目标衡量中所占的比重并不一定相同，在决策者的心目中，它们各占有一定的比例。在确定影响某因素的诸因子在该因素中所占的比重时，遇到的主要困难是这些比重常常不易定量化。此外，当影响某因素的因子较多时，直接考虑各因子对该因素有多大程度的影响时，常常会因考虑不周全、顾此失彼而使决策者提出与他实际认为的重要性程度不相一致的数据，甚至有可能提出一组隐含矛盾。为了解决这个问题，我们可以采取对因子进行两两比较建立成对比较矩阵的办法。即每次取两个因子 x_i 和 x_j, 以 a_{ij} 表示 x_i 和 x_j 对 Z 的影响大小之比，全部比较结果用矩阵 A=$(a_{ij})_(n \times n)$ 表示，称 A 为 Z-X 之间的成对比较判断矩阵（简称判断矩阵）。容易看出，若 x_i 和 x_j 对 Z 的影响之比为 a_{ij}，则 x_j 和 x_i 对 Z 的影响之比应为：$a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}$

关于如何确定 a_{ij} 的值，可以采用数字 1-9 及其倒数作为标度。下表列出了 1-9 标度的含义：

表 2 标度的含义

标度	含 义
1	表示两个因素相比，具有相同重要性
3	表示两个因素相比，前者比后者稍重要
5	表示两个因素相比，前者比后者明显重要
7	表示两个因素相比，前者比后者强烈重要
9	表示两个因素相比，前者比后者极端重要
2，4，6，8	表示上述相邻判断的中间值

我们根据生活经验建立的判断矩阵如下：

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{时差} & \text{飞行时间} & \text{气候} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{时差} \\ \text{飞行时间} \\ \text{气候} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 4 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. 层次单排序及一致性检验

判断矩阵 A 对应于最大特征值 λ_{max} 的特征向量 W，经归一化后即为同一层次相应因素对于上一层次某因素相对重要性的排序权值，这一过程称为层次单排序。

上述构造成对比较判断矩阵的办法虽能减少其它因素的干扰，较客观地反映出一对因子影响力的差别。但综合全部比较结果时，其中难免包含一定程度的非一致性。如果比较结果是前后完全一致的，则矩阵 A 的元素还应当满足：

$$a_{ij} * a_{jk} = a_{ik} \qquad \text{i,j,k=1,2,3,}\cdots\text{,n}$$

满足该性质的矩阵 A 被称为一致矩阵，我们需要检验构造出来的反判断矩阵 A 是否严重地非一致，以便确定是否接受 A 。

对于我们构造的矩阵 A，计算得其最大特征值 λ_{max}=3.0858

对应的特征向量:

$$X = [0.9048, 0.4038, 0.1352]$$

归一化后:

$$W = [0.6267,\ 0.2797, 0.0936]$$

对判断矩阵的一致性检验的步骤如下：

（i）计算一致性指标 CI

$$\mathrm{CI}=\frac{\lambda-n}{n-1}=0.029$$

（ii）查找相应的平均随机一致性指标 RI 。

表 3 RI 的值

表 3 RI 的值

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

RI 的值是这样得到的：用随机方法构造 500 个样本矩阵：随机地从 1 9 及其倒数中抽取数字构造正互反矩阵，求得最大特征根的平均值 λ_{max}，并定义：

$$\mathrm{RI}=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}$$

查表得：n=3，RI=0.58.

(iii) 计算一致性比例 CR

当 CR <0.10 时，认为判断矩阵的一致性是可以接受的，否则应对判断矩阵作适当修正。

$$\mathrm{CR}=\frac{CI}{RI}=0.05<0.1 \qquad \text{通过一致性检验。}$$

4.6 求解最佳会议举办城市

【算法分析】

1. 获取数据筛选出 939 个备选城市，获得其经纬度数据，并将其数据导入 matlab 中，生成一个数值矩阵 flytime 和 cell 数组 flytime1；

2. 处理数据

   计算城市两两之间的飞行时间，将数据存在 939×939 的矩阵 A 中，其元素为第 i 个城市到第 j 个城市的飞行时间；

   $$a_{ij}=\frac{distance(flytime(i,2),flytime(i,3),flytime(j,2),flytime(j,3))*6370*pi}{180*900}$$

   计算城市两两之间的广义纬度差 $\delta\theta_{ij}$，将数据存在 939×939 的矩阵 B 中，其元素 b_{ij} 为第 i 个城市到第 j 个城市的广义纬度差；

   $b_i j$=min|flytime(i,2)-flytime(j,2)|,|2*E(2,month)-flytime(j,2)-flytime(i,2)|

   计算城市两两之间的经度之差的绝对值，将数据存在 939×939 的矩阵 C 中，其元素 c_{ij} 为第 i 个城市和第 j 个城市的经度之差的绝对值；

   |flytime(i,3)-flytime(j,3)|

建立矩阵 2×12 的矩阵 E，e_ij 表示第 j 月太阳直射点的纬度。

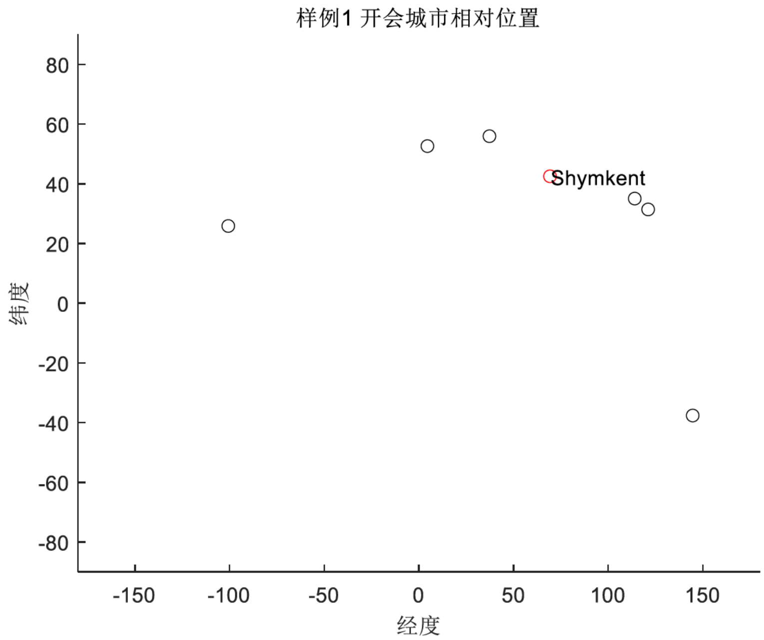
3. 获得样本数据输入开会月份，将其存在变量 month 中；
   输入参会人员来自的城市在 (1) 中的 flytime 中对应的行号，将其存在数组 place 中，设参会者来自 n 个不同的城市。根据该编号从 A、B、C 中获得其他 939 个城市到这 n 个城市的飞行时间、经度之差的绝对值、广义纬度差，分别用 939×n 的矩阵：time1、lng1、lat1。另外建立 1×n 的矩阵 num1，其第 i 列的元素表示来自第 i 个城市的参会人数；

4. 计算状态函数计算以 939 个城市中每一个城市作为开会城市的状态函数。建立矩阵 939×n 的矩阵 M，其元素 m_{ij} 表示第 j 个城市的所有人飞到第 i 个城市来开会，其总状态。计算公式如下：
   $$m_{ij}=0.6267*\frac{1.05058}{1+e^{0.1676lng1(i,j)}-1.8812}+0.2797*\frac{1.1524}{1+e^{0.0246time1(i,j)}-2.984}+0.0936*(\frac{2}{90^3}lat1(i,j)^3)-\frac{3}{90^2}lat1(i,j)^2+1)$$
   建立 1×939 的矩阵 sumM，其第 i 列表示 M 第 i 行的元素之和。
   $$\mathrm{sumM[i]}=\sum_{j=1}^{n}m_{ij}$$

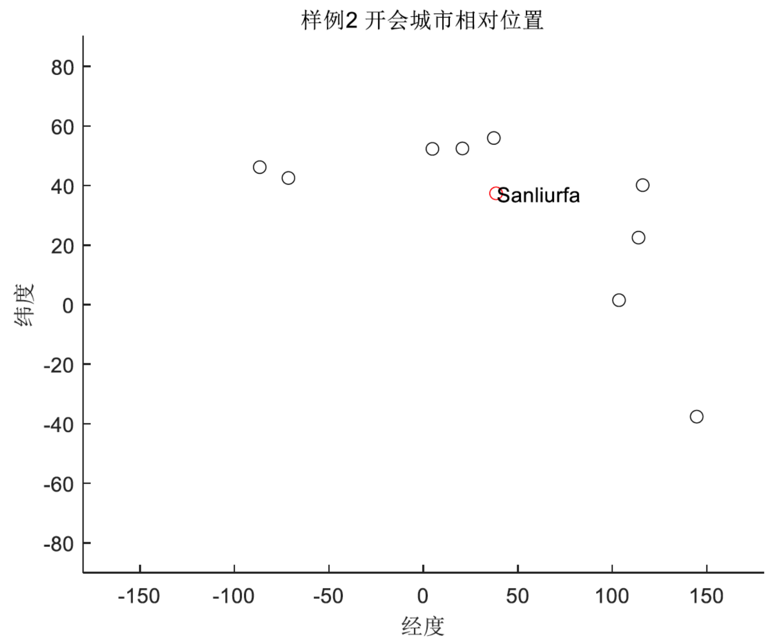
5. 寻找最佳开会城市根据 sumM 中的状态值，挑选其最大项，并输出其最大项对应的城市。

4.7 样例测试

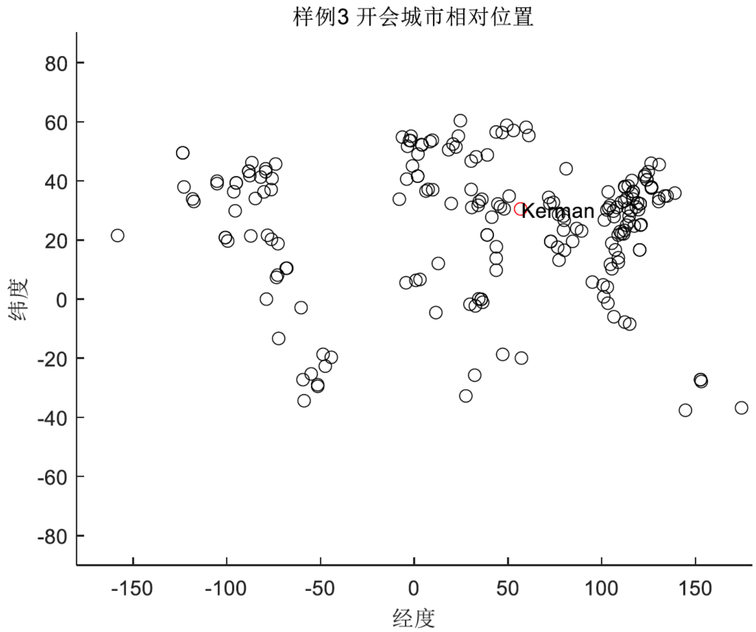
1. “Small Meeting”: Time: mid-June
   Participants: 6 individuals from:
   ⋆ Monterey CA, USA
   ⋆ Zutphen, Netherlands
   ⋆ Melbourne, Australia
   ⋆ Shanghai, China
   ⋆ Hong Kong (SAR), China
   ⋆ Moscow, Russia
   根据数据表格，这 6 个城市对应的编号分别为：
   place=[540, 935, 524, 736, 384, 543]
   计算得到最佳会议选址城市为 Shymkent.
   其相对位置见下图，其中黑色标记为参会者来自的城市，红色标记为最佳的开会城市。



2. "Big meeting": Time: January
   Participants: 11 individuals from:
   ⋆ Boston MA, USA (2 people)
   ⋆ Singapore
   ⋆ Beijing, China
   ⋆ Hong Kong (SAR), China (2 people)
   ⋆ Moscow, Russia
   ⋆ Utrecht, Netherlands
   ⋆ Warsaw, Poland
   ⋆ Copenhagen, Denmark
   ⋆ Melbourne, Australia
   查表得：place=[118, 936, 88, 324, 543,939, 937, 939, 524];
   设定人数：num1=[2,1,1,2,1,1,1,1,1];
   计算得到最佳会议选址城市为 Sanliurfa.
   其相对位置见下图，其中黑色标记为参会者来自的城市，红色标记为最佳的开会城市。



3. ”super big meeting” 我们从表格中随机选取 200 个城市，开会日期设置为九月，开会人数为 1-10 的随机数，计算其开会城市和相对位置, 得到最佳会议选址城市为 Kerman. 其相对位置见下图，其中黑色标记为参会者来自的城市，红色标记为最佳的开会城市。



5 模型优缺点

5.1 优点

1. 本文采用了层次分析法确定时差、飞行时间、气候对人的状态的影响在总的状态函数中所占的权重。能在一定程度上减少主观性，使其结果更接近我们的现实生活。
2. 本文采用通过遍历所有备选城市的状态函数获得最佳选址城市的方法，虽然计算时间略长，但是精度较高，保证了获得的城市为该模型计算得出的最优解。
3. 将综合影响函数拆分为三个子函数模型，且每个模型都是一个单一变量函数，便于函数的最终量化。
4. 合理类比“逻辑斯蒂模型”，便于模型的建立与求解。

5.2 缺点

1. 本问题中状态函数的确定主观性比较强，我们获得状态函数的方式是通过一定的生活经验和类比得来的，这对描述人的状态造成了较大的误差

2. 经过样例测试，我们发现计算得到的最佳选址城市多为一些冷门的城市，其知名度并不高，在实际生活中这些城市一般不会最为选址，因为还会受到当地的经济发展水平、学术水平的制约。

6 参考文献

1. Flower David J C,Irvine David,Folkard Simon. Perception and predictability of travel fatigue after long-haul flights: a retrospective study. Aviation Space and Environmental Medicine . 2003.

2. 蒋洪力，《太阳直射点纬度的推导和分析》，数学通报，2007 年第 46 卷第 9 期。

3. 姜启源、谢金星，《数学模型（第四版）》，高等教育出版社。

7 附录

.1 附录 1：939 个城市的经纬度数据

见附件。（Excel 表格）

.2 附录 2：matlab 源代码

Matlab Code

```
for i = 1:1339        //计算时区
    a = flytime.lng(i);
    if  a > 0
        b = (a - 7.5)/15;
        d = ceil(b);
        flytime.zone(i) = d;
    else
        a = -a;
        b = (a - 7.5)/15;
        d = ceil(b);
        flytime.zone(i) = - d;
```

```
    end
for i = 1:1338
    m =  flytime.zone(i);
    if (m>-7)&&(m<-5)    //欧洲地区权重为2，美国为1.75
        flytime.weight(i) = 1.75;
    elseif (m>0)&&(m<2)
        flytime.weight(i) = 2;
    else
        flytime.weight(i)=1;
    end
for i = 1:1338
    m =  flytime.zone(i);
    if (m>-7)&&(m<-5)
        flytime.weight(i) = 1.75;        //计算某城市参会人数
    elseif (m>0)&&(m<2)
        flytime.weight(i) = 2;
    else
        flytime.weight(i)=1;
    end
for i = 1:1338
    sum = 0;
    for j = 1:1338
        a = flytime.lat(i);
        b = flytime.lng(i);
        c = flytime.lat(j);
        d = flytime.lng(j);
        e = flytime.num(j);
        dist = distance(a,b,c,d)*e*pi*6370/180;    //计算飞行时间
        time = dist/900;
        sum = sum + time;
    end
    flytime.time(i) = sum;
end
```

```
writetable(flytime,'/Users/james/Desktop/flytime.xlsx') //数据写入表格
A=zeros(939);
B=zeros(939);
C=zeros(939);
E=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12; −20.079,−11.59,0,11.1303,19.9424,23.439220,20.1503,11.47190,0,−20,15,−23.439];

month=6;          //开会的月份
for  i=1:939
for  j=1:939
B(i,j)=min(abs(flytime(i,2)−flytime(j,2)),abs(2*E(2,month)−flytime(j,2)−flytime(i,2))); //i到j的绝对纬度
C(i,j)=abs(flytime(i,3)−flytime(j,3));//i到j的经度之差的绝对值
          A(i,j)=distance(flytime(i,2),flytime(i,3),flytime(j,2),flytime(j,3))*6370*pi/(180*900);    //i到j的飞行时间
end
end
place=[540,935,524,736,384,543];    //参会者来自的城市的编号
\%place=[118,936,88,324,543,939,937,938,524];
\%place=randi(939,1,200);
time1=zeros(939,size(place,2));
lat1=zeros(939,size(place,2));
lon1=zeros(939,size(place,2));
for  x=1:size(place,2)
time1(:,x)=A(:,place(x));
lat1(:,x)=B(:,place(x));
lon1(:,x)=C(:,place(x));
scatter(flytime(place(x),3),flytime(place(x),2),'k');   //画散点图
hold  on
end
num1=[1,1,1,1,1,1];        //来自各城市的参会者的人数
\%num1=[2,1,1,2,1,1,1,1,1];
\%num1=randi(10,1,size(place,2));
```

```
M=zeros(939,size(place,2));
a=0.398;b=0.0335;
for i=1:939
 for j=1:size(place,2)
M(i,j)=F(i,j,time1,lat1,lon1)*num1(j); //i飞到j的状态
sumM=sum(M'); //计算M每一行的和
end
end
flytime1(Maxo(sumM),1) //计算出来的最佳开会城市
scatter(flytime(Maxo(sumM),3),flytime(Maxo(sumM),2),'r');
text(flytime(Maxo(sumM),3),flytime(Maxo(sumM),2),flytime1(Maxo(sumM
    ),1));
axis([-180 180 -90 90]);
xlabel('经度');
ylabel('纬度');
title('样例1 开会城市的相对位置');
function f=F(i,j,time1,lat1,lon1)
f=0.0936+0.2797*1.1524/(1+exp(0.1676.*time1(i,j)-1.8812))
    +0.6297*1.05058/(1+exp(0.0246.*lon1(i,j)-2.984))+0.0936.*lat1(i,
    j).^2.*(2*lat1(i,j)/90^3-3/90^2);
end

function m=Maxo(sumM)
maxm=0;
for i=1:939
    if sumM(i)>maxm
        maxm=sumM(i);
        m=i;
    end
end
end
```