**填空题（共 98 小题）**

**难度等级1的题目：**

1.函数的驻点为 .

答：

难度等级：1；知识点：多元函数的驻点.

分析 偏导数等于零的点为函数的驻点.令



解此方程组即可得驻点.

2.设，则 .

答：

难度等级：1；知识点：二元函数的偏导数.

分析 因为，所以

3.设，则= .

答：

难度等级：1；知识点：函数的微分公式.

分析 由微分公式及得



4.若，则= .

答：

难度等级：1；知识点：二元函数的偏导数.

分析 ，所以.

5.函数的定义域为 .

答：

难度等级：1；知识点：函数的概念.

分析 因为，，所以定义域为.

6.设函数由方程所确定，则 .

答：

难度等级：1；知识点：多元函数的偏导数.

分析 方程两边对求偏导数得，所以.

7.函数在点处沿轴负向的方向导数是 .

答：0

难度等级：1；知识点：方向导数.

分析 轴负向为，所以



8.设，在上半平面处处可微，且对任意，都有，则 .

答：0

难度等级：1；知识点：复合函数的偏导数.

分析 由于对任意成立，有,两边对求导得，所以，令得，即，故.

9.函数 的驻点是 .

答：

难度等级：1；知识点：函数的极值.

分析 令,得驻点.

10.设函数，则 .

答：

难度等级：1；知识点：多元函数的概念.

分析 将中的分别换为即得



11.函数的定义域为 .

答：

难度等级：1；知识点：多元函数的概念.

分析 由得.

12.设，则 .

答：

难度等级：1；知识点：高阶偏导数.

分析 对的偏导数为，所以.

13.设函数由方程所确定，则 .

答：

难度等级：1；知识点：隐函数的偏导数.

分析 方程两边对求偏导数得



解得 

14.设，则 .

答：

难度等级：1；知识点：偏导数.

分析 直接求关于的偏导数得

15.设函数，则 .

答：

难度等级：1；知识点：函数的复合运算.

分析 按复合函数的定义将中的分别用代入得



16.函数的定义域为 .

答：.

难度等级：1；知识点：函数的定义域.

分析 即求函数的自然定义域.由得定义域



17.设，则 .

答：

难度等级：1；知识点：偏导数.

分析 因为，所以.

18.曲线在点处的切线与轴正向所成的倾角为 .

答：

难度等级：1；知识点：偏导数的几何意义.

分析 曲线在点处的切线与轴正向所成的倾角的正切为在点处关于的偏导数的值，即，所以.

19.设，则 .

答：

难度等级：1；知识点：函数的高阶偏导数.

分析 因为，所以.

20.设，则 .

答：

难度等级：1；知识点：函数的微分.

分析 

21.设函数，则 .

答： 

难度等级：1；知识点：函数的概念.

分析 .

22.函数的定义域为 .

答：

难度等级：1；知识点：函数的定义域.

分析 为自然定义域，所以，故定义域.

23.函数的定义域为 .

答： 

难度等级：1；知识点：函数的定义域.

分析 为自然定义域，所以定义域.

24.设，则 .

答：

难度等级：1；知识点：函数的微分公式.

分析 对求微分得



25.设函数可微，曲面过点，且，，则曲面在点处的切平面方程为 .

答： 

难度等级：1；知识点：曲面的切平面.

分析 曲面的切平面方程为



所以在点处的切平面方程为



即 

26.曲线在点处的切线方程是 .

答：

难度等级：1；知识点：曲线的切线.

分析 切线的方向向量为，在点处，所以，故曲线的切线方程为 

27.设，则 .

答：

难度等级：1；知识点：高阶偏导数.

分析 因为，所以.

28.若，则 .

答： 

难度等级：1；知识点：偏导数.

分析 因为，所以.

29.由方程所确定的函数的全微分 .

答：

难度等级：1；知识点：隐函数的微分.

分析 在方程两边微分得



所以 

30.设，则在极坐标系下， .

答：0

难度等级：1；知识点：复合函数的偏导数.

分析 因为，所以.

或者

31.设函数在点 处可微，则点 是函数的极值点的必要条件为 .

答： 

难度等级：1；知识点：函数可微时极值点的必要条件.

分析 函数可微时，在极值点处的偏导数存在且为0，所以.

32.设，则 .

答： 

难度等级：1；知识点：高阶偏导数.

分析 因为，所以



33.若，则 .

答：

难度等级：1；知识点：函数的偏导数.

分析 因为，所以.

34.设，则 .

答：

难度等级：1；知识点：偏导数.

分析 对求偏导数得.

35.设，则 .

答：

难度等级：1；知识点：多元函数的微分公式.

分析 

36.设，则 .

答：1

难度等级：1；知识点：偏导数.

分析 因为，所以.

37.设，则 .

答：

难度等级：1；知识点：偏导数.

分析 对求偏导数得.

38.设，则 .

答：0

难度等级：1；知识点：高阶偏导数.

分析 因为，所以.

39.函数的驻点是 .

答：

难度等级：1；知识点：二元函数的极值.

分析 驻点处函数的偏导数等于0，所以



解出得驻点.

40.若，则 .

答： 

难度等级：1；知识点：函数的偏导数.

分析 因为，所以.

41.设函数，则 .

答：

难度等级：1；知识点：复合函数.

分析 将中的分别用替换得.

42.函数由所确定，则 .

答：

难度等级：1；知识点：复合函数的导数.

分析 方程两边微分得，所以



43.设，则 .

答：

难度等级：1；知识点：多元函数的微分.

分析 

44.设具有二阶连续偏导数，，则 .

答：2

难度等级：1；知识点：高阶偏导数.

分析 因为，而，所以.

45.函数的驻点为 .

答：

难度等级：1；知识点：函数的极值.

分析 在驻点处函数的偏导数等于0，令得驻点.

46.在求函数在约束条件下的极值的时候，拉格朗日函数 .

答：

难度等级：1；知识点：函数的约束极值.

分析 由拉格朗日乘数法得函数在约束条件下的极值的时候，拉格朗日函数.

47.三元函数在约束条件下的极小值等于 .

答：

难度等级：1；知识点：函数的约束极值.

分析 令，由拉格朗日乘数法，在约束条件下的极小值点满足方程组



解此方程组得，所以极小值等于.

48.设，则= .

答：

难度等级：1；知识点：微分公式.

分析 

49.设，则 .

答：

难度等级：1；知识点：高阶偏导数.

分析 因为，所以.

50.设函数，则 .

答：

难度等级：1；知识点：函数的复合运算.

分析 将中的分别用替换得.

51.函数的定义域为 .

答：

难度等级：1；知识点：函数的定义域.

分析 自然定义域，为.

52.极限 .

答：1

难度等级：1；知识点：二元函数的极限.

分析 为初等函数，在点处有定义，所以在点处连续，故.

53.函数的间断点为 .

答：直线及.

难度等级：1；知识点：函数的间断点.

分析 函数可能的间断点为函数表达式中分母为0的点，即直线及，且这些点均为间断点.

54.设，则 .

答： 

难度等级：1；知识点：高阶偏导数.

分析 因为，所以.

55.设，则 .

答：

难度等级：1；知识点：高阶偏导数.

分析 因为，所以.

**难度等级2的题目：**

56.设满足方程，其中是可导函数，是常数，则 .

答：

难度等级：2；知识点：函数的偏导数.

分析 因为，所以



故，从而.

57.设，则在极坐标下， .

答： 

难度等级：2；知识点：复合函数的偏导数.

分析 因为，所以.

或者



58.设，则 .

答：

难度等级：2；知识点：函数的微分公式.

分析 

所以 

59.曲线在点处的切线与轴正向所成的倾角为 .

答：

难度等级：2；知识点：曲线的切线.

分析 由于可变形为，.在点处，，此即所求倾角的正切，所以倾角为.

60.设，则= .

答：

难度等级：2；知识点：高阶偏导数.

分析 ，所以，.

61.函数由方程确定，则函数的驻点是 .

答：

难度等级：2；知识点：隐函数的偏导数、多元函数的极值.

分析 先求函数的偏导数，再求驻点.方程两边求微分得



所以 

令 

得驻点坐标 

62.设，则 .

答：0

难度等级：2；知识点：高阶偏导数.

分析 对求偏导数、再对求偏导数就可以了.

，

63.设曲线在对应点处的法平面为，则点到的距离 .

答：2

难度等级：2；知识点：曲线的切线与法平面、点到平面的距离.

分析 先求的方程.法平面的法向量即切线的方向向量，为

切点为，所以法平面方程为，即，故点到的距离



64.设，则 .

答：0

难度等级：2；知识点：高阶偏导数.

分析 直接求关于的二阶偏导数然后相加.因为



所以 

65.设函数由方程所确定，则全微分 .

答：

难度等级：2；知识点：函数的微分公式、隐函数的偏导数.

分析 由方程所确定的隐函数的偏导数为，微分为，在此处，所以.

66.设函数由方程所确定，其中有一阶连续偏导数，则 .

答：

难度等级：2；知识点：隐函数的偏导数.

分析 方程两边微分得



所以 

故 

67.函数在点沿方向的方向导数是 .

答：0

难度等级：2；知识点：方向导数.

分析 函数可微时沿方向的方向导数为



所以在点处沿方向的方向导数是



68.设，则 .

答：

难度等级：2；知识点：偏导数.

分析 直接求关于的偏导数，平方后相加.因为，所以



69.曲面在点处的法线方程为 .

答：

难度等级：2；知识点：曲面的切平面与法线.

分析 曲面的法向量为，在此处，所以，故法线方程为.

70.曲线在点处的切线对轴的斜率为 .

答：

难度等级：2；知识点：隐函数的偏导数、偏导数的几何意义.

分析 曲线在点处的切线对轴的斜率为在点处关于的偏导数的值，而，所以切线对轴的斜率.

71.若函数在点处取得极值，则常数 ， .

答：0，4

难度等级：2；知识点：函数的极值点.

分析 函数可偏导，所以在其极值点处偏导数等于0，即



解出得，.

72.函数在点沿轴正向的方向导数是 .

答：

难度等级：2；知识点：方向导数.

分析 函数可微时沿方向的方向导数为



所以在点处沿轴正向的方向导数是



73.设，则 .

答：1

难度等级：2；知识点：函数的偏导数.

分析 时，，所以.

74.设，则 .

答：1

难度等级：2；知识点：偏导数.

分析 为幂指函数，求偏导数时可先换底，即，所以



75.函数在点处沿轴反向的方向导数是 .

答：0

难度等级：2；知识点：方向导数.

分析 函数可微时沿方向的方向导数为



所以在点处沿轴反向的方向导数是



76.设，则 .

答：1

难度等级：2；知识点：偏导数.

分析 因为



所以 

77.设，则 .

答：0

难度等级：2；知识点：高阶偏导数.

分析 先求出，然后代入即可.

因为 

所以 

78.曲线在点处的切线与平面夹角的正弦 .

答：

难度等级：2；知识点：曲线的切线、直线与平面的夹角.

分析 曲线在点处切线的方向向量为曲线在点处的切线与平面夹角的正弦，切线的方向向量



所以切线与平面夹角的正弦



79.函数在点（1，2）沿方向的方向导数是 .

答：

难度等级：2；知识点：方向导数.

分析 函数可微时沿方向的方向导数为



所以在点处沿的方向导数是



80.设函数由方程所确定，则 .

答：

难度等级：2；知识点：隐函数的导数.

分析 视中，方程两边同时对求导得



故 

难度等级：2；知识点：曲线的切线.

81.由方程所确定的函数在点处的全微分 .

答：

难度等级：2；知识点：隐函数的微分.

分析 方程两边微分得



将点的坐标代入得



所以 

82.极限 .

答：

难度等级：2；知识点：多元函数的极限.

分析 函数为幂指函数，可先换底.



83.设，则 .

答：

难度等级：2；知识点：函数的概念.

分析 因为

所以 

84.设，则 .

答： 

难度等级：2；知识点：函数的微分公式.

分析 

85.函数在点（2，1）沿方向的方向导数是 .

答： 

难度等级：2；知识点：方向导数.

分析 由得在点（2，1）沿的方向导数



86.设函数具有一阶连续偏导数，曲面过点，且，则曲面在点的法线与平面的夹角是 .

答：

难度等级：2；知识点：曲面的切平面、直线与平面的夹角.

分析 曲面的法向量为，单位化后，与轴的夹角是，所以曲面在点的法线与平面的夹角是.

87.函数在点沿方向的方向导数是 .

答：

难度等级：2；知识点：方向导数.

分析 由得在点沿方向的方向导数



**难度等级3的题目**：

88.设函数具有一阶连续偏导数，且，曲面过点，则曲面过点的法线与平面的交角为 .

答：

难度等级：3；知识点：曲面的切平面、平面之间的夹角.

分析 点处，所以点处曲面的法向量为，故曲面过点的法线与轴之间的夹角的余弦为，，法线与平面的交角为.

89.设，则 .

答：

难度等级：3；知识点：偏导数.

分析 对求偏导数得.

90.函数在闭域上的最大值是 .

答：

难度等级：3；知识点：函数的最值.

分析 函数只有一个驻点，显然为函数的最小值点，因此函数的最大值一定出现在闭域的边界上.当时，，最大值为；当时，，最大值为；当时，，有一个极值，在线段，两个端点处分别取值。比较后知，函数在闭域上的最大值是.

91.设函数在点处的偏导数存在，则 .

答：

难度等级：3；知识点：偏导数的定义.

分析 



92.设函数具有一阶连续偏导数，且，则曲面在点处的法线方程为 .

答：

难度等级：3；知识点：复合函数的导数、曲面的切平面与法线.

分析 在点处，曲面的法向量为，在点处，此即法线的方向向量，故所求法线方程为.

93.曲面在点的法线垂直于平面，则点到该平面的距离 .

答：

难度等级：3；知识点：曲面的切平面与法线、点到平面的距离.

分析 曲面的法向量为，与向量平行，所以



解方程组得切点，到平面的距离为



94.设函数可微，曲面过点，且.点作曲面的一个法向量，已知与轴正向的夹角为钝角，则与轴正向的夹角 .

答： 

难度等级：3；知识点：曲面的切平面与法.

分析 在点处曲面的法向量，与轴正向夹角的余弦为 .



因为与轴正向的夹角为钝角，所以取负号，.与轴正向的夹角的余弦为



所以.

95.若曲线在点处的一个切线向量与轴正向的夹角成钝角，则它与轴正向夹角的余弦 .

答：

难度等级：2；知识点：曲线的切线.

分析 曲线上点对应的，曲线的方向向量为，因为切线向量与轴正向的夹角成钝角，所以向量前取负号，即，与轴正向夹角的余弦



96.曲面在点处的切平面方程是 .

答：

难度等级：3；知识点：曲面的切平面.

分析 曲面的切平面方程为



故曲面在点处的切平面方程是



即.

97.设与都是可微函数，则曲线在点处的切线方程是 .

答：

难度等级：3；知识点：曲线的切线方程.

分析 两曲面在点处的切平面方程分别是



将两方程联立得曲线的切线方程



98.设是由确定的函数，则函数的驻点为 .

答：

难度等级：3；知识点：函数的极值.

分析 在驻点处函数的偏导数等于0，方程两边分别对求偏导数并令得且，解方程组得驻点.