第三章 可数状态马氏链

随机过程及其在金融中的应用

中国人民大学出版社

离散时间马氏链与可数状态马氏链

离散时间马氏链的时间和状态均离散，并且状态是有限的。

本章将在其基础上，将状态空间拓展为可数（countable）状态。所谓的可数状态是指状态的取值是在整数域 $\mathbb{Z}$ 上，且状态的数量无穷大，因此可数状态马氏链所包含的状态为：$S=\mathbb{Z}$。正因为可数状态马氏链的状态数是无穷多个，其与离散时间马氏链在性质上存在一定的区别。

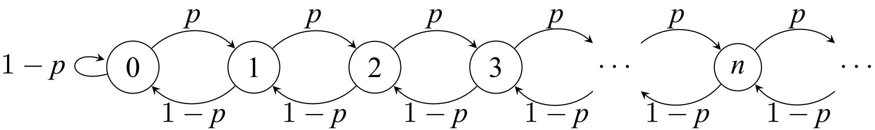
本章内容

状态的分类

可数状态马氏链遇到的新问题是常返并不能保证平稳分布的存在。与离散时间马氏链不同，可数状态马氏链中的状态分为三大类：正常返、零常返和非常返。

举例 1：带反射壁的随机游动

质点在 $\{0,1,2,\ldots\}$ 上游动，它以概率 p 向右移动一步，以概率 $(1-p)$ 向左移动一步，但是如果处于 0 点，并试图向左移动一步时，它将停留在 0 点。



带反射壁的随机游动 (cont.)

相应的转移概率如下：

$$p(0,0) = 1-p, \qquad \begin{cases} p(i,i+1) = p, & i \geq 0 \\ p(i,i-1) = 1-p, & i \geq 1 \end{cases}$$

该模型属于生灭链的特殊形式，可以根据细致平衡方程来求其平稳分布

$$p(i,j)\pi(i) = p(j,i)\pi(j)$$

$$p(i,i+1)\pi(i) = p(i+1,i)\pi(i+1), \qquad i \geq 0$$

$$p \cdot \pi(i) = (1-p) \cdot \pi(i+1)$$

因此：

$$\pi(i+1) = \frac{p}{1-p}\pi(i)$$

带反射壁的随机游动 (cont.)

令 $\pi(0)=c$，则：

$$\pi(i)=\pi(0)\left(\frac{p}{1-p}\right)^i=c\left(\frac{p}{1-p}\right)^i$$

注意到，当 $p/(1-p)<1$ 时，$p<1/2$，此时：

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi(i)=c\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{p}{1-p}\right)^i=\frac{c}{1-\dfrac{p}{1-p}}=\frac{1-p}{1-2p}c<\infty$$

对于平稳分布而言，必须满足 $\sum_{i=0}^{\infty}\pi(i)=1$，因此：

$$c=\frac{1-2p}{1-p}$$

带反射壁的随机游动 (cont.)

从而:

$$\pi(i) = \frac{1-2p}{1-p} \cdot \left(\frac{p}{1-p}\right)^i$$

因此:

$$\mathbb{E}_0(\tau_0) = \frac{1}{\pi(0)} = \frac{1-p}{1-2p} < \infty$$

称状态 0 是正常返（positive recurrent）的。因此 $p < 1/2$ 时，该马氏链是正常返的，且存在一个平稳分布 $\pi(i)$。

注意:

对正常返的马氏链，一定可以找到其对应的平稳分布；若马氏链不存在平稳分布，则其可能是零常返（null recurrent）或非常返的。

带反射壁的随机游动 (cont.)

$$\pi(i) = c\left(\frac{p}{1-p}\right)^i, \qquad c = \frac{1-2p}{1-p}$$

- 当 $p > 1/2$ 时，$p/(1-p) > 1, c < 0$，此时 $\{\pi(i)\}$ 序列是发散的 (即 $|\pi(i+1)| > |\pi(i)|$)，因而不存在平稳分布，此时马氏链是非常返的。
- 当 $p = 1/2$ 时，$p/(1-p) = 1$，$c = 0$，此时 $\pi(i) = 0$，$\forall i$，相应地：

$$\mathbb{E}_x(\tau_x) = \frac{1}{\pi(x)} = \infty$$

而 $\sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) = 1$, 因而不存在平稳分布，此时马氏链的各状态均是零常返态。

状态的判定

零常返态代表了常返态和非常返态的边界情况。三者的联系和区别具体体现在：

1. 正常返态：$\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty) = 1$，$\mathbb{E}_x(\tau_x) < \infty$；
2. 零常返态：$\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty) = 1$，$\mathbb{E}_x(\tau_x) = \infty$；
3. 非常返态：$\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty) < 1$，$\mathbb{E}_x(\tau_x) = \infty$。

分支过程

在可数状态马氏链的相关研究中，有一类非常重要的随机过程常常应用于生物学领域，这就是分支过程 (branching process)。分支过程最早由弗朗西斯·高尔顿（Francis Galton）和沃森（Watson）提出，用于对姓氏消失现象的定量解释。后来该过程被用于生物种群消亡等问题的研究。

分支过程举例

考虑一个家族的第 n 代每一个个体产生后代的个数 $Y_1, Y_2, \ldots$ 都相互独立同分布，并且每个个体产生 k 个后代的概率均是 $p_k = p(1, k)$。在时刻 n 的个体数 X_n 是一个马氏链，其状态空间为 $\{0, 1, 2, \ldots\}$，其转移概率如下：

$$p(i,j) = \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_i = j), \qquad i > 0,\ j \geq 0$$

问：该家族避免消亡的概率是多少?

思路：

此处的“消亡”是指马氏链吸收于状态 0。

分支过程举例 (cont.)

该家族的消亡发生与否，可通过一个个体的平均后代数量 μ 来确定：

$$\mu=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot p(1,k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot p_k$$

由于 X_n 表示 n 时刻的个体数，因此：

$$\mathbb{E}(X_n|X_{n-1})=\mu X_{n-1}\quad\Rightarrow\quad\mathbb{E}(X_n)=\mu\mathbb{E}(X_{n-1})$$

通过迭代可得：

$$\mathbb{E}(X_n)=\mu^n\mathbb{E}(X_0)$$

显然，$\mu<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_n)=0$，该家族以概率 1 消亡。

$\mu \geq 1$ 的情形

引入消亡概率（extinction probability），记作 α，表示当前时刻的某个个体在未来的消亡概率。[1] 即：

$$\alpha = \mathbb{P}(\tau_0 < \infty | X_0 = 1)$$

其中 τ_0 表示个体全部消亡的时刻。如果当前时刻有 k 个个体，则他们全部消亡的概率是 α^k，因此：

$$\alpha = \mathbb{P}(\tau_0 < \infty | X_0 = 1) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1, k) \cdot \mathbb{P}(\tau_0 < \infty | X_1 = k)$$

最终可得：

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot \alpha^k$$

$\mu \geq 1$ 的情形 (cont.)

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot \alpha^k$$

记 $G(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \alpha^k$，则上式可表示为：$G(\alpha) = \alpha$

当 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 1$ 时，等式左侧分别为：

$$G(0) = p_0 = p(1,0), \qquad G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

注意：

$\alpha = 1$ 是 $G(\alpha) = \alpha$ 的平凡解（trivial solution）。要求的消亡概率 α 应当是 $G(\alpha) = \alpha$ 所有根当中的最小正根。

$\mu \geq 1$ 的情形 (cont.)

对 $G(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \alpha^k$ 关于 α 求一阶和二阶导，可得：

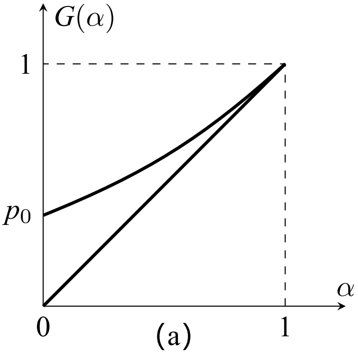
$$G'(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \alpha^{k-1} \geq 0, \qquad G''(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \cdot p_k \alpha^{k-2} \geq 0$$

由此可见，函数 $G(\alpha)$ 是凸向原点的单调递增曲线。

当 $\alpha = 1$ 时：

$$G'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \mu > 0$$

两种可能性



1. $G'(1) < 1$ 时，$\alpha = 1$；
2. $G'(1) > 1$ 时，$\alpha < 1$。

分支过程的结论

由于 $G'(1) = \mu$，因此进一步可以得到如下结论：
若 μ 表示一个个体的平均后代数量，则：

1. 当 $\mu \leq 1$ 时，消亡以概率 1 发生；
2. 当 $\mu > 1$ 时，存在一个正的概率避免消亡。

分支过程举例 1

当 $p_0 = 1/4$，$p_1 = 1/4$，$p_2 = 1/2$ 时，根据 $G(\alpha) = \alpha$，可得：

$$G(\alpha) = p_0\alpha^0 + p_1\alpha^1 + p_2\alpha^2 = \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\alpha^2 + \left(\frac{1}{4} - 1\right)\alpha + \frac{1}{4} = 0$$

$\alpha_1 = 1$ 或 $\alpha_2 = 1/2$，最小正根是 1/2。因此，$\alpha = 0.5$，即消亡概率是 0.5。

分支过程举例 2：二分支过程

当 $p_0 = 1 - a$，$p_2 = a$，$p_k = 0$，$k \neq 0, 2$ 时，根据 $G(\alpha) = \alpha$，可得：

$$G(\alpha) = p_0\alpha^0 + p_2\alpha^2 = \alpha \quad \Rightarrow \quad a\alpha^2 - \alpha + (1-a) = 0$$

解得：

$$\alpha_1 = 1 \qquad \text{或} \qquad \alpha_2 = \frac{1-a}{a}$$

1. 当 $a > 1/2$ 时，$\alpha_2 < 1$，此时最小正根是 $\frac{1-a}{a}$，因此 $\alpha = \frac{1-a}{a}$；
2. 当 $a \leq 1/2$ 时，$\alpha_2 \geq 1$，此时最小正根是 1，因此 $\alpha = 1$。

分支过程举例 3：姓氏的消亡

高尔顿和沃森最初考虑的问题是人群中姓氏消亡的概率，而姓氏是由后代中的男性所继承，因此他们所研究的问题便转化为后代中男性消亡的概率。

假设每个家庭都恰好有 3 个孩子，并且每个母亲平均有 1.5 个女儿，计算一个妇女的后代当中，男性消亡的概率。

姓氏的消亡 (cont.)

男女的概率均为 1/2；假设后代中有 k 个男性，则相应的概率分布如下：

$$\mathbb{P}(k=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8},\quad \mathbb{P}(k=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}(k=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8},\quad \mathbb{P}(k=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$$

由于平均男性后代数量为 $\mu=1.5>1$，因此需要计算消亡概率。

姓氏的消亡 (cont.)

根据 $G(\alpha)=\sum_k \alpha^k p_k=\alpha$，可得：

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha^0\cdot\mathbb{P}(k=0)+\alpha^1\cdot\mathbb{P}(k=1)+\alpha^2\cdot\mathbb{P}(k=2)+\alpha^3\cdot\mathbb{P}(k=3)\\ &= \frac{1}{8}+\frac{3}{8}\alpha+\frac{3}{8}\alpha^2+\frac{1}{8}\alpha^3\end{aligned}$$

因此，$\alpha^3+3\alpha^2-5\alpha+1=0$。由于已知 $\alpha=1$ 是一个平凡解，对刚才的多项式关于 $(\alpha-1)$ 进行分解，可得：

$$\alpha^3+3\alpha^2-5\alpha+1=(\alpha-1)(\alpha^2+4\alpha-1)=0$$

从而：

$$\alpha_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+4}}{2}=-2\pm\sqrt{5}$$

其中小于 1 的正解为 $\alpha=\sqrt{5}-2$，因此男性消亡的概率为 $\sqrt{5}-2$。