第九章 随机微分方程概论

随机过程及其在金融中的应用

中国人民大学出版社

随机微分方程 (Stochastic Differential Equation, SDE)

通过对 SDE 的求解，我们可以更深刻地认识随机过程的演化规律。

随机微分方程是微分方程的扩展。随机过程函数本身的导数不可定义，所以一般解微分方程的概念不适用于随机微分方程。

随机微分方程多用于对一些多样化现象进行建模，比如不停变动的股票价格，部分物理现象如热扰动等。

本章内容

1. 引言
2. 线性随机微分方程的分类
3. 线性随机微分方程的求解
   - 齐次标量线性 SDE 的求解
   - 狭义线性 SDE 的求解

SDE 的例子：几何布朗运动

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t)$$

其中：$S(t)$ 是随机过程；μ 和 σ 均是常数；$W(t)$ 是标准布朗运动。该方程在金融领域可以用来刻画股票等金融资产的价格演化。

SDE 有无穷多个可能的解，为了对解加以限定，需要加入初值条件 (initial value condition)，比如：$S(0) = S_0$。

普通微分方程 $\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\,\mathrm{d}t, \quad S(0) = S$

求解思路：

1. 采用分离变量法 (separation of variables)，将公式右侧的 $S(t)$ 提到左侧，即：

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} = \mu\,\mathrm{d}t$$

2. 对公式两侧取积分，可得：

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}S(u)}{S(u)} = \int_0^t \mu\,\mathrm{d}u \quad \Rightarrow \quad \ln S(t) - \ln S(0) = \mu t$$

3. 将初值条件代入，最终可得：

$$S(t) = S(0)e^{\mu t} = S \cdot e^{\mu t}$$

几何布朗运动 SDE 的求解

布朗运动 $W(t)$ 是处处连续且处处不可微的，这一特征造成了我们不能使用通常求解微分方程的相关方法对 SDE 进行分析和求解。

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} = \mu\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\ln[S(t)] = \mu\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t) \quad \not\Rightarrow \quad \mathrm{d}\ln[S(t)] = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t)$$

注意:

上式的原因在于布朗运动 $W(t)$ 的二次变差不为零，我们需要使用伊藤引理进行求解。

几何布朗运动 SDE 的求解 (cont.)

假设 $f(x) = \ln(x)$，根据伊藤引理可得：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f(S(t)) &= f_t\,\mathrm{d}t + f_S\,\mathrm{d}S + \frac{1}{2}f_{SS}[\,\mathrm{d}S]^2 \\
&= 0 + \frac{1}{S}[\mu S\,\mathrm{d}t + \sigma S\,\mathrm{d}W] + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S^2}\right)\sigma^2 S^2\,\mathrm{d}t \\
&= \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W - \frac{1}{2}\sigma^2\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

因此：

$$
\mathrm{d}\ln S(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t)
$$

在此基础上，我们实现了类似于微分方程中的分离变量方法。接下来对上式两端取积分。

几何布朗运动 SDE 的求解 (cont.)

$$\mathrm{d}\ln S(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t)$$

上式两端取积分可得:

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathrm{d}\ln S(u) &= \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\,\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma\,\mathrm{d}W(u)\\ \ln S(t) - \ln S(0) &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma[W(t) - W(0)]\\ \ln S(t) &= \ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W(t)\end{aligned}$$

最终得到:

$$S(t) = S_0 \cdot \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W(t)\right]$$

几何布朗运动 SDE 的解

几何布朗运动 SDE

$$\begin{cases} \mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}W(t) \\ S(0) = S_0 \end{cases}$$

解如下：

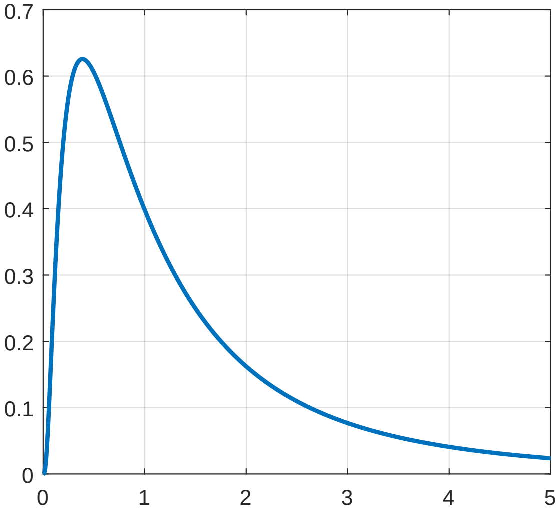
$$S(t) = S_0 \cdot \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right]$$

相应的，

$$\ln S(t) \sim \mathcal{N}\left(\ln S_0 + \left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right]t, \sigma^2 t\right)$$

因此，$\ln S(t)$ 服从正态分布。对应的 $S(t)$ 则是服从对数正态分布 (log-normal distribution)。

对数正态分布的概率密度函数图



$S(t)$ 期望和方差

服从对数正态分布的 $S(t)$ 期望和方差分别如下：

$$\mathbb{E}[S(t)] = \exp\left[\ln S_0 + \mu t\right] = S_0 \cdot e^{\mu t}$$

$$\mathrm{Var}[S(t)] = \exp\left[2\ln S_0 + 2\mu t\right]\left[\exp\left(\sigma^2 t\right) - 1\right] = S_0^2 e^{2\mu t} \cdot \left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$$

说明：

本章只涉及线性随机微分方程的求解问题。

一维线性 SDE 的基本形式

$$\mathrm{d}X(t) = \alpha\big(t, X(t)\big)\ \mathrm{d}t + \beta\big(t, X(t)\big)\ \mathrm{d}W(t)$$

其中:

$$\alpha\big(t, X(t)\big) = a_1(t)X(t) + a_2(t), \quad \beta\big(t, X(t)\big) = b_1(t)X(t) + b_2(t)$$

$\alpha\big(t, X(t)\big)$ 称作漂移项 (drift term)；$\beta\big(t, X(t)\big)$ 称为扩散项 (diffusion term)。另外 SDE 还有一个相应的初值条件 (initial value condition)，比如：$X(0) = X_0$。

线性 SDE 的分类

对于一维线性 SDE：

$$\mathrm{d}X(t) = \Big[a_1(t)X(t) + a_2(t)\Big]\,\mathrm{d}t + \Big[b_1(t)X(t) + b_2(t)\Big]\,\mathrm{d}W(t)$$

1. 若所有的系数 (a_1, a_2, b_1, b_2) 均是常数，则称为自治 (autonomous) 线性 SDE，即系数不是时变的；
2. 若 $a_2 = b_2 = 0$，则称为齐次 (homogeneous) 线性 SDE；
3. 若 $b_1 = 0$，则线性 SDE 具有加性噪声 (additive noise)；
4. 若 $b_2 = 0$，则线性 SDE 具有乘性噪声 (multiplicative noise)。

举例 1：几何布朗运动

股票价格 $S(t)$ 服从几何布朗运动如下：

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

其中：μ 和 σ 均是常数，通过比对可以看出：

$$a_1 = \mu, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = \sigma, \quad b_2 = 0$$

因此，用来刻画股价变动的几何布朗运动属于自治线性 SDE，并且具有乘性噪声。

举例 2：瓦西切克（Vasicek）模型

刻画利率 $r(t)$ 变动的瓦西切克模型如下：

$$\mathrm{d}r(t) = \big(\alpha - \beta r(t)\big)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t)$$

其中：α，β，σ 均是大于零的常数，通过比对可以看出：

$$a_1 = -\beta, \quad a_2 = \alpha, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \sigma$$

因此，用来刻画短期利率变动的瓦西切克模型属于自治线性 SDE，并且具有加性噪声。该模型来自于奥伦斯坦-乌伦贝克过程 (Ornstein-Uhlenbeck process)，简称 O-U 过程，并且该过程具有均值回复的特征。

举例 3：赫尔-怀特（Hull-White）模型

刻画利率 $r(t)$ 变动的赫尔-怀特模型如下：

$$\mathrm{d}r(t) = \big(\alpha(t) - \beta(t)r(t)\big)\,\mathrm{d}t + \sigma(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

其中：$\alpha(t)$，$\beta(t)$，$\sigma(t)$ 均是均值大于零的函数，通过比对可以看出：

$$a_1 = -\beta(t), \quad a_2 = \alpha(t), \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \sigma(t)$$

因此，赫尔-怀特模型属于具有加性噪声的线性 SDE。对比瓦西切克模型，此处的模型仍然具有均值回复的特征，只是相应的系数均是时变的。

举例 4：CIR 模型

刻画利率 $r(t)$ 变动的 CIR 模型如下：

$$\mathrm{d}r(t) = \big(\alpha - \beta r(t)\big)\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r(t)}\,\mathrm{d}W(t)$$

其中：α, β, σ 均是大于零的常数。与前面的瓦西切克模型相比，其随机项当中增加了 $\sqrt{r(t)}$。

通过比对不难发现，该模型无法被归入任何一个线性 SDE 类别中。正因为该模型中的 $\sqrt{r(t)}$ 项，该模型也称作平方根过程 (square-root process)。

举例 5：HJM 模型

刻画瞬时远期利率 $f(t,T)$ 演化的多因子 HJM 模型如下：

$$\mathrm{d}f(t,T)=\alpha(t,T)\,\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t,T)\,\mathrm{d}W_i(t)$$

通过比对可以看出：此模型的 $a_1=b_1=0$，并且由于模型中包含了 n 个布朗运动 $W_i(t)$，$i=1,2,\ldots,n$，因此这是一个多维线性 SDE。

SDE 的解

与常微分方程类似，SDE 的求解也有很多种不同的方法。然而，SDE 往往难以显式的得到相应的解 $X(t)$，也就是说，在通常情况下往往等式的两端均存在 $X(t)$ 项 (类似于微积分中提到的隐函数)。

幸运的是，对于一维线性 SDE 来说，是可以得到其显式解 (explicit solution) 的。

齐次标量线性 SDE 的定义

形如下式的 SDE

$$\mathrm{d}X(t) = \Big[a(t)X(t) + b(t)\Big]\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m}\Big[c_k(t)X(t) + d_k(t)\Big]\,\mathrm{d}W_k(t)$$

其中的 $a(\cdot)$，$b(\cdot)$，$c_k(\cdot)$，$d_k(\cdot)$ 均是连续有界的标量 (scalar) 函数，我们称作标量线性 SDE(scalar linear SDE)。若 $b(\cdot) = d_k(\cdot) \equiv 0$，则称这样的方程为齐次标量线性 SDE(homogeneous scalar linear SDE)。

注意：

几何布朗运动就是齐次标量线性 SDE 的一个特殊形式。

回顾：几何布朗运动

几何布朗运动相当于齐次标量线性 SDE，并且其中的 $a(\cdot)$ 和 $b(\cdot)$ 均是常数，其 SDE 方程和解的形式分别如下：

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}W(t), \qquad S(0) = S_0$$
$$S(t) = S_0 \cdot \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right]$$

求解的基本思路如下：

1. 使用分离变量法，将 SDE 右侧的 $S(t)$ 项，全部移到等式的左侧；
2. 使用伊藤引理，得到 $\mathrm{d}\ln S(t)$ 的 SDE；
3. 对 SDE 两端取积分，进而得到 $\ln S(t)$ 的表达式；
4. 对 $\ln S(t)$ 取指数 e，最终得到 $S(t)$ 的解。

这里我们所采用的方法，类似于常微分方程求解通常采用的分离变量法。

齐次标量线性 SDE 的解

我们可以利用类似的方法来求解齐次标量线性 SDE。假设关于随机过程 $S(t)$ 的齐次标量线性 SDE 如下：

$$\mathrm{d}S(t) = \mu(t)S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t)S(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

其中：$\mu(t)$ 和 $\sigma(t)$ 均是时间 t 的连续有界函数，并且在当前时刻，$S(0) = S_0$。则该 SDE 的显式解为：

$$S(t) = S_0 \exp\left\{\int_0^t \left[\mu(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]\,\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(u)\,\mathrm{d}W(u)\right\}$$

狭义线性 SDE 的定义

形如下式的 SDE

$$\mathrm{d}X(t) = \Big[a(t)X(t) + b(t)\Big]\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} d_k(t)\,\mathrm{d}W_k(t)$$

其中的 $a(\cdot)$，$b(\cdot)$，$d_k(\cdot)$ 均是连续有界的标量 (scalar) 函数，我们称作狭义线性 SDE(linear SDE in the narrow sense)。若 $b(\cdot) = d_k(\cdot) \equiv 0$，则这样的齐次方程就是普通的微分方程。

注意:

与前面提及的齐次标量线性 SDE 不同，此处方程的随机项不含 $X(t)$，因此不能简单地采用分离变量法进行求解。

举例：瓦西切克模型

瓦西切克模型可看作狭义线性 SDE 的特殊形式，其 SDE 如下：

$$\begin{cases} \mathrm{d}r(t) = \left[\alpha - \beta r(t)\right] \mathrm{d}t + \sigma \, \mathrm{d}W(t) \\ r(0) = r_0 \end{cases}$$

求解思路：通过构造函数的方式，将等式右侧的 $r(t)$ 项消去，进而实现 SDE 的求解。

瓦西切克模型求解

假设 $X(t)=e^{\beta t}r(t)$，根据伊藤乘法法则可得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(e^{\beta t}r(t)) &= e^{\beta t}\,\mathrm{d}r(t)+r(t)\,\mathrm{d}e^{\beta t}\\
&= e^{\beta t}\Big[\big(\alpha-\beta r(t)\big)\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}W(t)\Big]+r(t)e^{\beta t}\beta\,\mathrm{d}t\\
&= \alpha e^{\beta t}\,\mathrm{d}t+\sigma e^{\beta t}\,\mathrm{d}W(t)
\end{aligned}$$

这样的变换后，等式右侧不再有 $r(t)$ 的相关项。

瓦西切克模型求解 (cont.)

对 $\mathrm{d}(e^{\beta t}r(t)) = \alpha e^{\beta t}\,\mathrm{d}t + \sigma e^{\beta t}\,\mathrm{d}W(t)$ 两端积分，最终可得：

$$e^{\beta t}r(t) - r_0 = \alpha \int_0^t e^{\beta u}\,\mathrm{d}u + \sigma \int_0^t e^{\beta u}\,\mathrm{d}W(u)$$

因此：

$$r(t) = e^{-\beta t}r_0 + \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) + e^{-\beta t}\sigma \int_0^t e^{\beta u}\,\mathrm{d}W(u)$$

结合伊藤积分的期望为零的性质，可得：

$$\mathbb{E}[r(t)] = e^{-\beta t}r_0 + \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

瓦西切克模型求解 (cont.)

$$r(t)=e^{-\beta t}r_0+\frac{\alpha}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right)+e^{-\beta t}\sigma\int_0^t e^{\beta u}\,\mathrm{d}W(u)$$

根据伊藤等距，可得：

$$\mathrm{Var}[r(t)]=\left(e^{-\beta t}\sigma\right)^2\cdot\int_0^t e^{2\beta u}\,\mathrm{d}u=\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1-e^{-2\beta t}\right)$$

因此：

$$r(t)\sim\mathcal{N}\left(e^{-\beta t}r_0+\frac{\alpha}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right),\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1-e^{-2\beta t}\right)\right)$$

瓦西切克模型的特征

$$\mathbb{E}[r(t)] = e^{-\beta t} r_0 + \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

$$\mathrm{Var}[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta t}\right)$$

- 当 $t \to \infty$ 时，$\mathbb{E}[r(t)] \to \alpha/\beta$；
- 由于 $r(t)$ 服从的是正态分布，因此其取值有可能为负，而负利率现象在真实金融市场中是非常罕见的，因此这是瓦西切克模型的不足之处。

狭义线性 SDE 的解

对于如下狭义线性 SDE

$$\mathrm{d}X(t) = [a(t)X(t) + b(t)]\,\mathrm{d}t + \sigma(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

其初值条件为 $X(0) = X_0$，相应的显式解为：

$$\begin{aligned} X(t) = X_0 \exp\left[\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right] &+ \int_0^t \exp\left[\int_s^t a(u)\,\mathrm{d}u\right] b(s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \exp\left[\int_s^t a(u)\,\mathrm{d}u\right] \sigma(s)\,\mathrm{d}W(s) \end{aligned}$$

例 1：赫尔-怀特模型

已知 $r(0) = r_0$，求解以下赫尔-怀特模型 SDE 对应的 $r(t)$ 之显式解，并在此基础上求 $r(t)$ 的期望和方差

$$\mathrm{d}r(t) = \big(\alpha(t) - \beta(t)r(t)\big)\,\mathrm{d}t + \sigma(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

例 2：CIR 模型

已知 $r(0)=r_0$，求解以下 SDE 对应的 $r(t)$ 之期望和方差：

$$\mathrm{d}r(t)=\big(\alpha-\beta r(t)\big)\,\mathrm{d}t+\sigma\sqrt{r(t)}\,\mathrm{d}W(t)$$