第七章 鞅

随机过程及其在金融中的应用

中国人民大学出版社

鞅的起源

鞅 (martingale) 的概念最早起源于赌博中的双倍押注法 (double gambling)，在该策略下，如果每次输了就把下注的资金翻倍。对于公平赌博而言，如此反复最终总能赢钱。

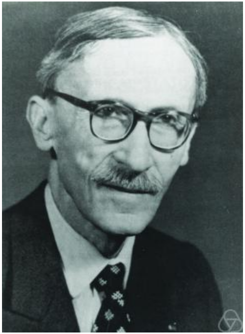
而在马术上，鞅指的是套在马颈上的缰绳（也称马颔缰），以防止马甩头，并借此控制马的行进方向。

鞅的应用

鞅 (martingale) 是一类重要的随机过程。鞅的研究丰富了概率论的内容，很多以往被认为是复杂的东西，在纳入鞅论的框架后得以简化。

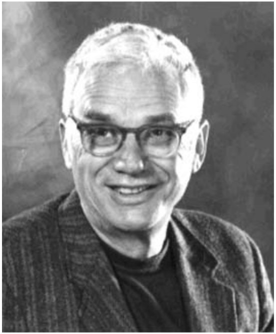
近几十年来，鞅理论不仅在随机过程中占据重要的地位，而且在金融、保险等领域的实际问题中得到了广泛的应用。

相关学者



Paul P. Levy

1886–1971



Joseph L. Doob

1910–2004

Paul-André Meyer

1934–2003

本章内容

1. 条件期望
2. 鞅的概念和性质
   - 离散鞅
   - 连续鞅
   - 鞅的金融学意义
3. 可选抽样定理
   - 停时的含义
   - 可选抽样定理
   - 定理的应用举例

条件期望的概念

假设有两个随机变量 X 和 Y，并且它们的取值取决于 N 次发生的事件构成的信息集 $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_N\}$。以其中 n 次事件的信息集为条件，得到的随机变量期望就是条件期望 (conditional expectation)。记作：

$$\mathbb{E}_n(X) = \mathbb{E}(X|Z_1, Z_2, \ldots, Z_n), \quad \mathbb{E}_n(Y) = \mathbb{E}(Y|Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$$

可测的概念

随机变量 $\mathbb{E}_n(X)$ 的值，仅与 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ 有关时，可以将其写作

$$\mathbb{E}_n(X) = \mathbb{E}(X|Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$$

其中 $f(\cdot)$ 是函数。显然此处随机变量 $\mathbb{E}_n(X)$ 可以表示为 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ 的函数，称 $\mathbb{E}_n(X)$ 关于 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ 可测 (measurable)。

条件期望的性质

- 线性性质 (linearity)：对于所有常数 c_1 和 c_2，以下等式成立：

$$\mathbb{E}_n(c_1X + c_2Y) = c_1\mathbb{E}_n(X) + c_2\mathbb{E}_n(Y)$$

- 提取已知量 (taking out what is known)：若 X 的取值只依赖于 n 次事件的信息集，则：

$$\mathbb{E}_n(XY) = X \cdot \mathbb{E}_n(Y)$$

  在这里，X 在 n 次事件的信息集下是可测的，从而可以从条件期望中提取出来。

条件期望的性质 (cont.)

- 累次条件期望 (iterated conditioning)：若 $0 \le n \le m \le N$，则有：

$$\mathbb{E}_n\left[\mathbb{E}_m(X)\right] = \mathbb{E}_n(X)$$

从中可以看出，X 的条件期望，取决于信息集中最小者。特别是针对无条件期望而言，有：

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}_m(X)\right] = \mathbb{E}(X)$$

- 独立性 (independence)：若 X 取决于第 $(n+1)$ 到 N 次事件所构成的信息集 $\{Z_{n+1}, Z_{n+2}, \ldots, Z_N\}$，则有：

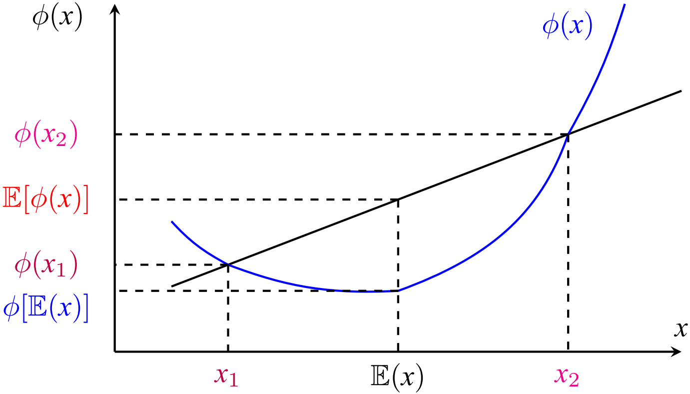
$$\mathbb{E}_n(X) = \mathbb{E}(X)$$

因为此处的条件与随机变量 X 无关。

条件期望的性质 (cont.)

- 詹森（Jensen）不等式：如果 $\phi(\cdot)$ 是凸函数，则下列不等式成立

$$\mathbb{E}_n[\phi(X)] \geq \phi(\mathbb{E}_n(X))$$



离散鞅的概念

假设有一个随机序列 $\{X_n\}$，$n = 0, 1, 2, \ldots$，若对 $\forall n \geq 0$，均有 $\mathbb{E}|X_n| < \infty$，并且

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n, \ldots, X_2, X_1) = X_n$$

则称 $\{X_n\}$ 为离散鞅 (discrete martingale) 序列。

注意:

离散鞅具有某种无后效性，并且随机变量 X_{n+1} 对之前所有信息下的条件期望，只取决于 n 时刻的 X_n，而与 n 时刻之前的随机变量序列 $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ 无关，并且该条件期望刚好等于 n 时刻的随机变量 X_n。

对比：马氏过程

- 离散鞅的表达式：$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n,\ldots,X_2,X_1)=X_n$
- 马氏过程的表达式：$\mathbb{P}(X_{n+1}|X_n,\ldots,X_2,X_1)=\mathbb{P}(X_{n+1}|X_n)$

进行对比可知：鞅是通过条件期望定义的，侧重于未来结果的公平性；马氏过程则是通过条件概率定义的，侧重于过程的无记忆性，因此两者之间并无太多的相关性。

注意:

对于布朗运动而言，其既是马氏过程也是鞅。

例子：对称随机游走

假设单位时间内，某粒子在一维坐标上可能向左或向右游走一个单位，将游走的距离分别记作 $+1$ 和 -1，对应的概率均为 50%，记 X_i 是 i 时刻粒子游走的距离，则有：

$$\mathbb{P}(X_i = +1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 0.5$$

假设截至 n 时刻，粒子游走的总距离为 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，并且 $S_0 = 0$。

证明 S_n 是鞅。

提示：

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$

对称随机游走证明

根据 $S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$，可得：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{n+1}|S_0,S_1,\ldots,S_n)&=\mathbb{E}(S_n+X_{n+1}|S_0,S_1,\ldots,S_n)\\&=\mathbb{E}(S_n|S_0,S_1,\ldots,S_n)+\mathbb{E}(X_{n+1}|S_0,S_1,\ldots,S_n)\\&=\mathbb{E}(S_n|S_0,S_1,\ldots,S_n)+\mathbb{E}(X_{n+1})\\&=S_n+[0.5\times(+1)+0.5\times(-1)]=S_n\end{aligned}$$

其中，X_{n+1} 的取值与之前的信息集 $S_0,S_1,\ldots,S_n$ 独立，因而条件期望可以表示为对应的无条件期望，即：

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|S_0,S_1,\ldots,S_n)=\mathbb{E}(X_{n+1})$$

对称随机游走证明 (cont.)

另外，下式成立：

$$\mathbb{E}(|S_n|) = \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|\right] \leq \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} |X_i|\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(|X_i|) = n < \infty$$

因此，S_n 是鞅。

定义和定理

定义

设 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 是两个随机序列，其中 $n = 0, 1, 2, \ldots$。若对任意 n，有：

1. $\mathbb{E}|X_n| < \infty$；
2. X_n 是关于 $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ 的函数；
3. $\mathbb{E}(X_{n+1}|Y_n, \ldots, Y_1, Y_0) = X_n$。

则称 $\{X_n\}$ 是关于 $\{Y_n\}$ 的鞅。

定理

$\{X_t\}$ 是关于 $\{Y_t\}$ 鞅的充要条件为：$\forall m, n\ (m > n > 0)$，有：

$$\mathbb{E}[X_m|Y_0, Y_1, \ldots, Y_n] = X_n$$

鞅的推论 1

对于常数序列 $\{c_n\}$，其中 $c_n = c$，则 $\{c_n\}$ 为鞅。

简要证明

根据鞅的定义有：

$$\mathbb{E}(c_{n+1}|Y_0, Y_1, \ldots, Y_n) = \mathbb{E}(c|Y_0, Y_1, \ldots, Y_n) = c = c_n$$

因此，$\{c_n\}$ 为鞅。

鞅的推论 2

若 $\{X_n\}$ 为鞅，则对任意 $n \geq 0$，有：$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0$

简要证明

由于 $\{X_n\}$ 为鞅，因此 $\mathbb{E}(X_{n+1}|Y_n, \ldots, Y_1, Y_0) = X_n$，对该式两端取期望，可得：

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X_{n+1}|Y_n, \ldots, Y_1, Y_0)\right] = \mathbb{E}(X_n)$$

根据前面条件期望的性质 3 可知：

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X_{n+1}|Y_n, \ldots, Y_1, Y_0)\right] = \mathbb{E}(X_{n+1})$$

因此，$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)$。依此类推，最终可得：

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) = \cdots = \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_0)$$

由此可见，若随机过程 $\{X_n\}$ 是鞅，则其期望值不随时间而发生改变。

例子：公平赌博的双倍下注问题

记 M_n 为第 n 次赌博后的财富总额，并且 $M_0 = 0$。X_n 表示第 n 次赌博的结果，$X_n = 1$ 表示赢钱；$X_n = -1$ 表示输钱。

由于是公平赌博，因此，$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 0.5$，这里赌博的规则是：如果输钱，则下次下注翻倍；一旦赢钱就离开赌场。

假定前 n 次赌博均输钱，则输掉的总金额为：

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad \Rightarrow \quad M_n = -2^n + 1$$

公平赌博的双倍下注问题 (cont.)

1. 如果下一次赢钱，则可得 2^n，相应地：

$$M_{n+1} = 2^n - (2^n - 1) = 1$$

2. 如果下一次仍然输钱，则：

$$M_{n+1} = -2^n - (2^n - 1) = -2^{n+1} + 1$$

由此可得：

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|M_n) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \left(-2^{n+1} + 1\right) = -2^n + 1 = M_n$$

可见，M_n 是鞅。

例子：波利亚坛子 (Polya's urn) 问题

考虑一个装有红黄两色小球的坛子。在初始状态下，红黄小球各一个，每次从中抽取一个小球并放回。若拿出的是红色小球，则放回后再加入一个红色的小球；若拿出的是黄色小球，则采取同样的做法。以 X_n 表示第 n 次抽取后坛子中的红球数量，显然 $X_0 = 1$，相应的转移概率为：

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 | X_n = k) = \frac{k}{n+2}, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = k) = 1 - \frac{k}{n+2}$$

令 M_n 是第 n 次抽取后，红球所占的比例，即 $M_n = X_n/(n+2)$，试证明 M_n 是一个关于 $\{X_n\}$ 的鞅。

波利亚坛子问题求解

由于:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n=k) &= (k+1)\cdot\mathbb{P}(X_{n+1}=k+1|X_n=k) \\ &\quad + k\cdot\mathbb{P}(X_{n+1}=k|X_n=k) \\ &= (k+1)\cdot\frac{k}{n+2}+k\cdot\left(1-\frac{k}{n+2}\right) \\ &= k+\frac{k}{n+2}\end{aligned}$$

因此:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n)=X_n+\frac{X_n}{n+2}$$

波利亚坛子问题求解 (cont.)

由于 $M_n = \dfrac{X_n}{n+2}$，故:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1}|X_1,\ldots,X_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{X_{n+1}}{n+3}\middle| X_1,\ldots,X_n\right) \\
&= \frac{1}{n+3}\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n) \\
&= \frac{1}{n+3}\left(X_n + \frac{X_n}{n+2}\right) \\
&= \frac{X_n}{n+2} = M_n
\end{aligned}$$

因此，M_n 是一个关于 $\{X_n\}$ 的鞅。

连续鞅的引入

前面所介绍的是时间离散情形下的离散鞅，在金融的相关研究中，往往更关心连续时间下的随机过程相关特征，在介绍连续鞅之前，先从几个概念开始：

- 可积 (integrable)；
- 域流 (filtration)。

可积的概念

可积的定义

对于一个随机变量 X

1. 若 $\mathbb{E}|X| < \infty$，则称 X 是可积的 (integrable)；
2. 若 $\mathbb{E}(X^2) < \infty$，则称 X 是平方可积的 (square integrable)。

根据可积的定义可知：

$$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}|X| < \infty$$

因此，当随机变量 X 可积时，其期望值必然是有限的。类似地，当 X 是平方可积时，其方差也必然是有限的。

域流的概念

域流的定义

假设 T 是一个固定的正数，并且对每一个 $t \in [0, T]$，都有一个 σ 代数 $\mathcal{F}(t)$ 与之相对应。若对任意 $0 \leq s \leq t \leq T$，均有 $\mathcal{F}(s) \subseteq \mathcal{F}(t)$ 成立，则称 $\{\mathcal{F}(t)\}$，$t \in [0, T]$ 所构成的 σ 代数族是一个域流 (filtration)。

$\mathcal{F}(t)$ 可看作 $[0, t]$ 时间段的所有信息 (information)。随着时间的推移，信息量逐渐增加，体现为新时刻包含了旧时刻的所有信息。由这些信息所组成的序列 $\{\mathcal{F}(0), \mathcal{F}(1), \ldots, \mathcal{F}(t)\}$ 构成了域流，相当于一串信息流，并且 $\mathcal{F}(0) \subseteq \mathcal{F}(1) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}(t)$。

基于条件期望的结论

- 对于可积随机变量 X 和 Y，有：

$$\mathbb{E}[c_1X + c_2Y|\mathcal{F}] = c_1\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + c_2\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$$

  其中：c_1 和 c_2 是常数。

- 若 X 和 Y 是可积随机变量，XY 可积，并且 X 为 $\mathcal{F}$ 可测，则有：

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{F}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}], \qquad \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = X$$

  由于 X 为 $\mathcal{F}$ 可测，因此 $\mathcal{F}$ 中所包含的信息足以确定 X 的值。

基于条件期望的结论 (cont.)

- 若可积随机变量 X 与 $\mathcal{F}$ 独立，则：

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$$

由于 X 与 $\mathcal{F}$ 独立，因此 $\mathcal{F}$ 中所包含的信息无法确定 X 的值。

- 若 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$，则对于可积随机变量 X，下式成立：

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{F}\right] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$$

这里由于 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$，因此 $\mathcal{F}$ 中所包含的信息要小于 $\mathcal{G}$，于是最终的条件期望取决于信息量较少的 $\mathcal{F}$。

基于条件期望的结论 (cont.)

- 若 $\phi(x)$ 是关于 x 的凸函数，且 X 是可积随机变量，则有：

$$\mathbb{E}\left[\phi(X)|\mathcal{F}\right] \geq \phi\left(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\right)$$

注意：

该结论是前面所介绍的条件期望之 Jensen 不等式的直接推广。

连续鞅的定义

若概率空间 $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$ 上的随机过程 M_t 满足以下三个条件，则称其为关于域流 $\{\mathcal{F}(t)\}$ 和概率测度 $\mathbb{P}$ 的连续鞅。

1. 对任意 t，有 $\mathbb{E}|M_t| < \infty$，即 M_t 是可积的；
2. M_t 对任意 t 均是 $\mathcal{F}(t)$ 可测的 (measurable)；
3. 若 $s < t$，则
$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}(s)] = M_s, \quad \text{a.s.}$$

两个等价公式

原公式

$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}(s)] = M_s$$

等价公式

$$\mathbb{E}[M_t - M_s|\mathcal{F}(s)] = 0$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{M_t}{M_s}\middle|\mathcal{F}(s)\right] = 1$$

例：泊松过程是鞅

假设泊松过程 $\{N(t),\ t \geq 0\}$ 的强度为 λ，
试证：$N(t) - \lambda t$ 是一个鞅。

思路:

设 $s > t$，记 $X(t) = N(t) - \lambda t$，可得:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(s) - X(t)|\mathcal{F}(t)] &= \mathbb{E}\left\{\left[N(s) - \lambda s\right] - \left[N(t) - \lambda t\right]\Big|\mathcal{F}(t)\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\left[N(s) - N(t)\right]\Big|\mathcal{F}(t)\right\} - (\lambda s - \lambda t)
\end{aligned}$$

简要证明

根据泊松过程的增量独立性，$N(s)-N(t)$ 与 $\mathcal{F}(t)$ 独立，因此：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(s)-X(t)|\mathcal{F}(t)] &= \mathbb{E}\big[N(s)-N(t)\big]-\lambda(s-t)\\ &= \mathbb{E}N(s)-\mathbb{E}N(t)-\lambda(s-t)\\ &= \lambda s-\lambda t-\lambda(s-t)=0\end{aligned}$$

因此，$X(t)=N(t)-\lambda t$ 是一个鞅。

更进一步地，还可以验证 $X(t)$ 可积，即：

$$\mathbb{E}|X(t)|=\mathbb{E}|N(t)-\lambda t|\leq\mathbb{E}[N(t)+\lambda t]=\mathbb{E}N(t)+\lambda t=2\lambda t<\infty$$

上鞅和下鞅

定义

对于随机过程 M_t，若 $s < t$ 并且满足：

1. $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}(s)] \geq M_s$，则称 M_t 是下鞅 (submartingale)；
2. $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}(s)] \leq M_s$，则称 M_t 是上鞅 (supermartingale)；

对于下鞅而言下式成立：

$$\mathbb{E}[M_t] \geq \mathbb{E}[M_s], \qquad s < t$$

不难看出，随着时间的流逝，M_t 的期望值趋向于增大；相反对于上鞅，M_t 的期望值趋向于减小。

上鞅和下鞅的含义

对于公平赌博而言，赌徒赢钱的期望值不随时间而发生改变，因此是鞅。

相比之下，上鞅则意味着赌徒赢钱的期望值随时间而减小，因此是亏本的赌博 (劣赌)；下鞅意味着赌徒赢钱的期望值随时间而增大，因此是盈利的赌博 (优赌)。

布朗运动与鞅

对于布朗运动 $W(t)$ 而言，当 $0 < s < t$ 时，有：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W(t)|\mathcal{F}(s)] &= \mathbb{E}[W(t) - W(s) + W(s)|\mathcal{F}(s)] \\ &= \mathbb{E}[W(t) - W(s)|\mathcal{F}(s)] + \mathbb{E}[W(s)|\mathcal{F}(s)] \\ &= \mathbb{E}[W(t) - W(s)] + W(s) = W(s)\end{aligned}$$

其中：$W(t) - W(s)$ 与 $\mathcal{F}(s)$ 独立，并且 $W(s)$ 是 $\mathcal{F}(s)$ 可测。

因此：布朗运动 $W(t)$ 是关于 $\mathcal{F}(t)$ 的鞅。

鞅的金融学意义

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t+u)-X(t)|\mathcal{F}(t)] &= \mathbb{E}[X(t+u)|\mathcal{F}(t)]-\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}(t)] \\
&= X(t)-X(t)=0
\end{aligned}
$$

由于鞅在未来的移动方向是不可能被预测的，因此，如果观测到一个随机过程的轨迹 (trajectory) 有明显的趋势性倾向或周期性规律，那么，该随机过程一定不是鞅。

有效市场假说 (EMH) 认为，如果无法利用市场的历史信息对未来资产价格的走势做出任何预测，则这样的市场就是有效的。这一概念与鞅的含义不谋而合。

鞅的金融学意义 (cont.)

在金融工程当中，往往基于无套利分析法对金融产品进行定价。在有效市场中套利机会是不存在的，正因如此，鞅可以看作无套利的数学描述。

对常见的金融资产价格进行分析，会发现它们并非都满足鞅的特性。比如熟悉的欧式期权，其时间价值会因为合约到期日的临近而趋于减少，因此欧式期权的价值满足上鞅。

停时的含义

一个定义在正实数域上的随机变量，记作 τ，使得

$$\{\tau > t\} \in \mathcal{F}(t), \qquad t > 0$$

则称 τ 是停时。

说明:

关于 $\{\tau > t\}$ 这一事件的信息只取决于 $\mathcal{F}(t)$ 中的信息。换句话说，若在 t 之前停时已经发生，则相应地 $\tau \leq t$；若截至 t 时刻停时仍未发生，则意味着 $\tau > t$。以上两种可能性均取决于 $[0, t]$ 时间段随机变量的所有信息，即 $\mathcal{F}(t)$。

定理

若 τ 和 θ 均是停时，则它们的较小值 $\tau \wedge \theta$ 和较大值 $\tau \vee \theta$ 都是停时。

简要证明:

由于 τ 和 θ 均是停时，因此满足:

$$\{\tau > t\} \in \mathcal{F}(t), \quad \{\theta > t\} \in \mathcal{F}(t) \qquad t > 0$$

因此:

$$\{(\tau \wedge \theta) > t\} = \{\tau > t \text{ 并且 } \theta > t\} = \{\tau > t\} \cap \{\theta > t\} \in \mathcal{F}(t)$$
$$\{(\tau \vee \theta) > t\} = \{\tau > t \text{ 或者 } \theta > t\} = \{\tau > t\} \cup \{\theta > t\} \in \mathcal{F}(t)$$

最后的变换来自 σ-代数的性质：对交集和并集运算封闭。因而 $\tau \wedge \theta$ 和 $\tau \vee \theta$ 都是停时。

首中时刻与停时

定义：

过程 X_t 首次到达 x 处的时刻即首中时刻，定义如下：

$$\tau_x = \min\{t : t > 0, X_t = x\}$$

首中时刻可看作停时的一个特例。在时间离散时，$\{\tau_x > t\}$ 表示首次到达 x 处的时间大于 t，这意味着在 t 时刻之前，过程 X_s 均未到过 x 处，即：

$$\begin{aligned}\{\tau_x > t\} &= \{X_s \neq x,\ 0 \leq s \leq t\} \\ &= \{X_0 \neq x\} \cap \{X_1 \neq x\} \cap \cdots \cap \{X_t \neq x\} \in \mathcal{F}(t), \qquad t \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

首中时刻 (cont.)

过程到达 x 或 y 处的首中时刻定义为：

$$\tau_{x,y} = \min\{t : t > 0, X_t = x \text{ 或 } X_t = y\}$$

注意：

不是所有的正实数随机变量都是停时，比如：

$$\tau = \min\left\{t \in [0,T] : X_t = \max_{s\in[0,T]} X_s\right\}$$

即：在 $[0,T]$ 时间段内，首次到达该区间最大值的对应时点。因为在该时间段内，决定 $\{\tau > t\}$ 这一事件是否成立的信息 $\mathcal{F}(t)$ 还不充分。类似地，以下随机变量 τ_x 也不是停时：

$$\tau_x = \max\{t : t > 0, X_t = x\}$$

即：在 $(0,\infty)$ 时间段内，最后一次到达 x 处的时间。

停时的直观理解

停时可看作一种停止观察随机过程的“规则”。例如，“当股票价格第一次涨到每股 20 元时把它卖了”是一个停时规则。然而，“在股票第一次涨到每股 20 元的前一天收盘前把它卖了”就不是一个停时规则，因为我们无法根据当前的信息预知第二天股价是否会涨到 20 元。

停止过程

Z_t 是定义在正实数域上的随机过程，并且 τ 是其上的停时，则定义停止过程（stopped process）$Z_{t\wedge\tau}$ 如下：

$$Z_{t\wedge\tau} = \begin{cases} Z_\tau, & t \geq \tau \\ Z_t, & t < \tau \end{cases}$$

停止过程在金融衍生产品的研究中常用于刻画障碍期权问题，比如对于其中的敲出期权而言，当标的资产的价格达到障碍价格时，该期权自动废止，相应的资产价格变动的过程停留在期权废止的时间，此时停止的时间 τ 小于等于期权的期限 t；若在该期权到期前，标的资产价格一直未达到障碍价格时，该期权将在到期日 t 终止，于是标的资产达到期权障碍价格的时间 τ 必然大于 t。

可选抽样定理 (optional sampling theorem)

假设随机过程 M_t 及其停时 τ 均是 $\mathcal{F}(t)$ 可测的。若 M_t 是鞅，则停止过程 $M_{t\wedge\tau}$，$t \geq 0$ 也是鞅。

注意:

对任意停时 $0 < \tau \leq t$，可得:

$$\mathbb{E}\left(M_\tau\right) = \mathbb{E}\left(M_{\tau\wedge t}\right) = \mathbb{E}\left(M_{\tau\wedge 0}\right) = \mathbb{E}(M_0)$$

可选抽样定理的证明

此处基于离散鞅进行证明。由鞅的定义可知：

$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}(t-1)] = M_{t-1}$$

停止过程 $M_{t\wedge\tau}$ 可以拆分成两个部分，具体如下：

$$M_{t\wedge\tau} = M_\tau \mathbf{1}_{\{\tau<t\}} + M_t \mathbf{1}_{\{\tau\geq t\}} = \begin{cases} M_\tau, & \tau < t \\ M_t, & \tau \geq t \end{cases}$$

其中，

$$M_\tau \mathbf{1}_{\{\tau<t\}} = \sum_{n=1}^{t-1} M_n \mathbf{1}_{\{\tau=n\}}$$

可选抽样定理的证明 (cont.)

因此可得:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{t\wedge\tau}|\mathcal{F}(t-1)] &= \mathbb{E}\left[M_\tau \mathbf{1}_{\{\tau<t\}}|\mathcal{F}(t-1)\right] + \mathbb{E}\left[M_t \mathbf{1}_{\{\tau\geq t\}}|\mathcal{F}(t-1)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{t-1} \mathbb{E}\left[M_n \mathbf{1}_{\{\tau=n\}}|\mathcal{F}(t-1)\right] + \mathbb{E}\left[M_t \mathbf{1}_{\{\tau\geq t\}}|\mathcal{F}(t-1)\right]\end{aligned}$$

上式当中，由于 $n \leq t-1$，故 $M_n \mathbf{1}_{\{\tau=n\}}$ 是 $\mathcal{F}(t-1)$ 可测的，另外 $\mathbf{1}_{\{\tau\geq t\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{\tau\leq t-1\}}$，因此也是 $\mathcal{F}(t-1)$ 可测的。

注意:

$$\mathbb{E}\left[M_n \mathbf{1}_{\{\tau=n\}}|\mathcal{F}(t-1)\right] = M_n \mathbf{1}_{\{\tau=n\}}$$

$$\mathbb{E}\left[M_t \mathbf{1}_{\{\tau\geq t\}}|\mathcal{F}(t-1)\right] = \mathbf{1}_{\{\tau\geq t\}}\mathbb{E}\left[M_t|\mathcal{F}(t-1)\right] = \mathbf{1}_{\{\tau\geq t\}}M_{t-1}$$

可选抽样定理的证明 (cont.)

从而：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{t\wedge\tau}|\mathcal{F}(t-1)] &= \sum_{n=1}^{t-1} M_n \mathbf{1}_{\{\tau=n\}} + \mathbf{1}_{\{\tau\geq t\}} M_{t-1} \\
&= \sum_{n=1}^{t-2} M_n \mathbf{1}_{\{\tau=n\}} + \mathbf{1}_{\{\tau=t-1\}} M_{t-1} + \mathbf{1}_{\{\tau\geq t\}} M_{t-1} \\
&= \sum_{n=1}^{t-2} M_n \mathbf{1}_{\{\tau=n\}} + M_{t-1} \mathbf{1}_{\{\tau\geq t-1\}} \\
&= M_{(t-1)\wedge\tau}
\end{aligned}
$$

因此，停止过程 $M_{t\wedge\tau}$ 是鞅。

布朗运动首中概率的计算

假设 a 和 b 是两个端点，并且 $a < b$，假设布朗运动 $X(t)$ 在 0 时刻位于 x 处 $[X(0) = x]$，并且 $a \leq x \leq b$，其形式如下：

$$X(t) = x + W(t)$$

求布朗运动 $X(t)$ 首次击中 a 和 b 的概率分别是多少？

思路：

记布朗运动首次击中 a 或 b 的时间为 $\tau_{a,b}$，该时刻即为停时：

$$\tau_{a,b} = \min\left\{t : t \geq 0, X(t) = a \text{ 或 } X(t) = b\right\}$$

解答：

由于 $X(t)$ 是鞅，因此根据可选抽样定理，停止过程 $X(\tau_{a,b} \wedge t)$ 也是鞅。另外 $X(0) = x$，$a \leq x \leq b$，因此有：

$$\mathbb{E}\left[X(\tau_{a,b})|X(0) = x\right] = \mathbb{E}\left[X(0)|X(0) = x\right] = x$$

运用全概率公式可得：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X(\tau_{a,b})|X(0) = x\right] = a \cdot \mathbb{P}\left[X(\tau_{a,b} = a)|X(0) = x\right] \\ + b \cdot \mathbb{P}\left[X(\tau_{a,b} = b)|X(0) = x\right] = x\end{aligned}$$

解答 (cont.)

又因为

$$\mathbb{P}\left[X(\tau_{a,b}=a)|X(0)=x\right]+\mathbb{P}\left[X(\tau_{a,b}=b)|X(0)=x\right]=1$$

将两式联立，可得：

$$\mathbb{P}\left[X(\tau_{a,b}=a)|X(0)=x\right]=\frac{b-x}{b-a}$$
$$\mathbb{P}\left[X(\tau_{a,b}=b)|X(0)=x\right]=1-\frac{b-x}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}$$

布朗运动首中的期望时间计算

假设 a 和 b 是两个端点，并且 $a<b$，假设布朗运动 $X(t)$ 在 0 时刻位于 x 处 $[X(0)=x]$，并且 $a\le x\le b$，其形式如下：

$$X(t)=x+W(t)$$

求布朗运动 $X(t)$ 首次击中 a 或 b 的期望时间。

思路:

利用 $W^2(t)-t$ 是鞅的性质。

解答:

$W^2(t)-t$ 是鞅，因此:

$$\mathbb{E}\left[X^2(t)-t|X(0)=x\right]=\mathbb{E}\left[X^2(0)-0|X(0)=x\right]=X^2(0)=x^2$$

根据可选抽样定理，停时 $X^2(\tau_{a,b})-\tau_{a,b}$ 也是鞅。因此:

$$\begin{aligned}x^2&=\mathbb{E}\left[X^2(\tau_{a,b})-\tau_{a,b}|X(0)=x\right]\\&=\mathbb{E}\left[X^2(\tau_{a,b})|X(0)=x\right]-\mathbb{E}\left[\tau_{a,b}|X(0)=x\right]\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X^2(\tau_{a,b})|X(0)=x\right]&=a^2\cdot\mathbb{P}\left[X(\tau_{a,b})=a|X(0)=x\right]\\&\quad+b^2\cdot\mathbb{P}\left[X(\tau_{a,b})=b|X(0)=x\right]\\&=a^2\cdot\frac{b-x}{b-a}+b^2\cdot\frac{x-a}{b-a}\end{aligned}$$

最终:

$$\mathbb{E}\left[\tau_{a,b}|X(0)=x\right]=a^2\cdot\frac{b-x}{b-a}+b^2\cdot\frac{x-a}{b-a}-x^2=(x-a)(b-x)$$

带漂移的布朗运动击中概率的计算

假设 a 和 b 是两个端点，并且 $a < b$，假设带漂移的布朗运动 $X(t)$ 在 0 时刻位于 x 处 $[X(0) = x]$，并且 $a \le x \le b$，其形式如下：

$$X(t) = x + W(t) + \mu t$$

问：$X(t)$ 首次击中 a 和 b 的概率分别是多少?

思路：

由于带漂移的布朗运动 $X(t)$ 不是鞅，因此需要对其进行变换。在此基础上构造鞅 $M(t)$，其表达式如下：

$$M(t) = \exp\left[\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right]$$

解答:

由于 $M(t)$ 是鞅，因此根据可选抽样定理，停止过程 $M(\tau_{a,b}\wedge t)$ 也是鞅。因此有:

$$M(\tau_{a,b}\wedge t)=\mathbb{E}[M(0)]=1$$

令 $\sigma=-2\mu$，则有:

$$\begin{aligned}\exp\left[\sigma X(t)\right]&=\exp\left[\sigma x+\sigma W(t)+\sigma\mu t\right]\\&=\exp\left[\sigma x+\sigma W(t)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\right]\\&=\mathrm{e}^{\sigma x}M(t)\end{aligned}$$

因此:

$$M(t)=\mathrm{e}^{-\sigma x}\cdot\mathrm{e}^{\sigma X(t)}$$

解答 (cont.)

根据全概率公式，有：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(M_{\tau_{a,b}}\right) &= \mathrm{e}^{-\sigma x}\cdot\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\sigma X(\tau_{a,b})}\right]\\
&= \mathrm{e}^{-\sigma x}\cdot\left\{\mathrm{e}^{\sigma a}\cdot\mathbb{P}[X(\tau_{a,b})=a|X_0=x]+\mathrm{e}^{\sigma b}\cdot\mathbb{P}[X(\tau_{a,b})=b|X_0=x]\right\}\\
&= \mathrm{e}^{\sigma(a-x)}\cdot\mathbb{P}[X(\tau_{a,b})=a|X_0=x]+\mathrm{e}^{\sigma(b-x)}\cdot\mathbb{P}[X(\tau_{a,b})=b|X_0=x]
\end{aligned}
$$

因此：

$$
\begin{cases}
\mathrm{e}^{\sigma(a-x)}\cdot\mathbb{P}[X(\tau_{a,b})=a|X_0=x]+\mathrm{e}^{\sigma(b-x)}\cdot\mathbb{P}[X(\tau_{a,b})=b|X_0=x]=1\\
\mathbb{P}[X(\tau_{a,b})=a|X_0=x]+\mathbb{P}[X(\tau_{a,b})=b|X_0=x]=1
\end{cases}
$$

解答 (cont.)

两式联立可得:

$$\mathbb{P}[X(\tau_{a,b}) = a | X_0 = x] = \frac{\mathrm{e}^{\sigma x} - \mathrm{e}^{\sigma b}}{\mathrm{e}^{\sigma a} - \mathrm{e}^{\sigma b}} = \frac{\mathrm{e}^{-2\mu x} - \mathrm{e}^{-2\mu b}}{\mathrm{e}^{-2\mu a} - \mathrm{e}^{-2\mu b}}$$

$$\mathbb{P}[X(\tau_{a,b}) = b | X_0 = x] = 1 - \frac{\mathrm{e}^{\sigma x} - \mathrm{e}^{\sigma b}}{\mathrm{e}^{\sigma a} - \mathrm{e}^{\sigma b}} = \frac{\mathrm{e}^{-2\mu a} - \mathrm{e}^{-2\mu x}}{\mathrm{e}^{-2\mu a} - \mathrm{e}^{-2\mu b}}$$