第二章 离散时间马氏链 2

随机过程及其在金融中的应用

中国人民大学出版社

本章内容

1. 平稳分布
   - 平稳概率分布
   - 双随机链
   - 细致平衡条件
   - 马氏链的可逆性
2. 极限行为
3. 离出分布和离出时间
   - 离出分布
   - 离出时间

平稳分布

一个非周期性，且有限状态的不可约马氏链收敛于一个平稳分布 $\{\pi(y),\ y \in S\}$，即：

$$\lim_{n\to\infty} p^n(x,y) = \pi(y)$$

运用条件概率的定义：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = j) &= \sum_i \mathbb{P}(X_0 = i, X_n = j) \\
&= \sum_i \mathbb{P}(X_0 = i)\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_i q(i)p^n(i,j)
\end{aligned}$$

其中，$q(i) = \mathbb{P}(X_0 = i)$ 是初始概率。

$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_i q(i)p^n(i,j)$ 的矩阵-向量形式

由 $q(i),\ i \in S$ 组成的概率向量 $\mathbf{q}$ 构成初始概率分布，并将之右乘转移概率矩阵 $\mathbf{P}^n$，可得 n 期概率所组成的向量 $\mathbf{q}_n$，具体如下：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}\mathbf{P}^n &= \underbrace{\begin{bmatrix} q(1) & q(2) & \cdots & q(k) \end{bmatrix}}_{\text{初始概率向量}} \overbrace{\begin{bmatrix} p^n(1,1) & p^n(1,2) & \cdots & p^n(1,k) \\ p^n(2,1) & p^n(2,2) & \cdots & p^n(2,k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^n(k,1) & p^n(k,2) & \cdots & p^n(k,k) \end{bmatrix}}^{n\text{ 阶转移概率矩阵}} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} q(i)p^n(i,1) & \sum_{i=1}^{k} q(i)p^n(i,2) & \cdots & \sum_{i=1}^{k} q(i)p^n(i,k) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) & \mathbb{P}(X_n = 2) & \cdots & \mathbb{P}(X_n = k) \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{q}_n
\end{aligned}
$$

n 期概率分布的矩阵-向量形式

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_i q(i)p^n(i,j) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}\mathbf{P}^n = \mathbf{q}_n$$

在已知初始概率分布 $\mathbf{q}$ 的基础上，对其乘以 n 阶转移概率矩阵 $\mathbf{P}^n$，最终可得 n 期概率分布 $\mathbf{q}_n$。

平稳概率分布和极限分布

记 $\mathbf{q}\mathbf{P}^n = \boldsymbol{\pi}$，如果 $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$，则称 $\boldsymbol{\pi}$ 为平稳概率向量，其中的各元素组成平稳概率分布；如果 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \bar{\pi}(i)$，此时称 $\bar{\pi}(i)$ 组成的是极限分布。

说明:

对于不可约、非周期（irreducible & aperiodic）的马氏链，其平稳分布和极限分布是相等的。

社会流动问题中的平稳概率分布

假设 X_n 是一个家族第 n 代所处社会阶层的情况。假设总共有三个阶层，阶层间的代际转移概率矩阵如下所示：

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

求平稳状态下，该家族处于三个社会阶层的概率分别是多少？

社会流动问题中的平稳概率分布 (cont.)

由题意，可知：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

方程 $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$ 可以表达为：

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix}$$

社会流动问题中的平稳概率分布 (cont.)

求解平稳概率分布就转化为对上式中的 π_1, π_2, π_3 进行求解，可得：

$$\begin{cases} 0.7\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3 = \pi_1 \\ 0.2\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.4\pi_3 = \pi_2 \\ 0.1\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.4\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

最终可得：

$$\pi_1 = \frac{22}{47}, \qquad \pi_2 = \frac{16}{47}, \qquad \pi_3 = \frac{9}{47}$$

需要说明的是，上面的方程组在进行计算时，除最后一个作为概率完备性的约束条件必须保留外，其余的三个方程应当删去一个多余的。

使用软件求解的基本思路

$$\begin{cases} 0.7\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3 = \pi_1 \\ 0.2\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.4\pi_3 = \pi_2 \\ 0.1\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.4\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -0.3\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3 = 0 \\ 0.2\pi_1 - 0.5\pi_2 + 0.4\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

上面的方程组可化为如下矩阵形式:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\pi}} \underbrace{\begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 & 1 \\ 0.3 & -0.5 & 1 \\ 0.2 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

从而得到:

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{A} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbf{b}\mathbf{A}^{-1}$$

使用软件求解的基本思路 (cont.)

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{bA}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 & 1 \\ 0.3 & -0.5 & 1 \\ 0.2 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

其中:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 & 1 \\ 0.3 & -0.5 & 1 \\ 0.2 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -90/47 & 20/47 & 70/47 \\ -10/47 & -50/47 & 60/47 \\ 22/47 & 16/47 & 9/47 \end{bmatrix}$$

可见，π 的结果，刚好就是对应的 $\mathbf{A}^{-1}$ 的最后一行，即:

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \frac{22}{47} & \frac{16}{47} & \frac{9}{47} \end{bmatrix}$$

使用软件求解的注意事项

$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{b}\mathbf{A}^{-1}$ 使用的前提是矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆（invertible）。
以赌徒破产问题为例，相应的转移概率矩阵 $\mathbf{P}$ 与求解用到的 $\mathbf{A}$ 分别如下：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & -1 & 0.4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.6 & -1 & 0.4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.6 & -1 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这里的矩阵 $\mathbf{A}$ 不是满秩的（该矩阵的秩为 5），因此不存在逆矩阵。

遍历马氏链

对于非周期、不可约且状态有限的马氏链，可以利用 $\pi = \mathbf{b}\mathbf{A}^{-1}$ 正常计算平稳概率分布。

由于这类马氏链具有良好的性质，因此也称为遍历马氏链（ergodic Markov chain）。之所以称其为“遍历马氏链”，是因为这类马氏链的各状态均是常返的，在有限时间内可以访问状态空间中的各个状态。

双随机链

若马氏链的转移概率矩阵各列元素之和均为 1，则称其是双随机链 (doubly stochastic chain)，即：

$$\sum_x p(x, y) = 1$$

在双随机链当中，其各行和各列的元素之和均等于 1，即：

$$\sum_x p(x, y) = 1, \qquad \text{同时} \qquad \sum_y p(x, y) = 1$$

双随机链的性质

若 $\mathbf{P}$ 是 N 个状态马氏链的双随机转移概率，则均匀分布 $\pi(x)=1/N,\ \forall x$ 是其平稳分布。

推论:

若 $\mathbf{P}$ 是 N 个状态马氏链的转移概率，且均匀分布 $\pi(x)=\dfrac{1}{N},\ \forall x$ 是其平稳分布，则 $\mathbf{P}$ 是双随机的。

细致平衡条件

如果 $\pi(x)p(x,y)=\pi(y)p(y,x)$，则称 $\boldsymbol{\pi}$ 满足细致平衡条件（detailed balance condition）。

原先的 $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P}=\boldsymbol{\pi}$ 说明，在所有的转移结束后，每个状态的概率与初始时的概率相等，即：

$$\begin{aligned}\sum_x \pi(x)p(x,y) = \pi(y) &= \pi(y)\sum_x p(y,x)\\ &= \sum_x \pi(y)p(y,x)\end{aligned}$$

而在细致平衡条件下，从状态 x 一步转移到状态 y 的概率，刚好等于从状态 y 一步转移到状态 x 的概率，即：

$$\pi(x)p(x,y)=\pi(y)p(y,x)$$

细致平衡条件 (cont.)

$$\sum_x \pi(x)p(x,y) = \sum_x \pi(y)p(y,x)$$

$$\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x)$$

上面两个等式之间唯一的区别就是一个求和符号。但是可以看出：细致平衡条件比之前的 $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$ 更严格，因为其要求对应的项必须严格相等。正因为如此，满足细致平衡条件的马氏链一定存在平稳分布；但是具有平稳分布的马氏链不一定满足细致平衡条件。

细致平衡条件可以降低平稳分布在计算上的难度，并且该条件经常被运用于可数状态马氏链的平稳分布求解问题中。

举例 9：生灭链

假设某物种在下个阶段可能会发生如下变化：产生一个新个体的概率为 0.3；死亡的概率为 0.2；未发生任何变化的概率为 0.5。对于 7 期的马氏链，最终的转移概率矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

求其平稳分布。

生灭链 (cont.)

经过验证可以发现，该链并不违反细致平衡条件。根据细致平衡条件，可以列出如下等式：

$$\pi(i)p(i,i+1) = \pi(i+1)p(i+1,i), \qquad i = 1,2,\ldots,6$$

即：

$$0.3\pi(i) = 0.2\pi(i+1) \;\Rightarrow\; \pi(i+1) = 1.5\pi(i), \quad i = 1,2,\ldots,6$$

利用 $\sum_{i=1}^{7}\pi(i) = 1$，并假设 $\pi(1) = c$，最终可得：

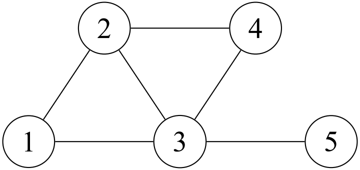
$$c\left(1+1.5+1.5^2+\cdots+1.5^6\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1.5-1}{1.5^7-1} \approx 0.0311$$

于是：

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} 0.0311 & 0.0466 & 0.0699 & 0.1049 & 0.1574 & 0.2360 & 0.3541 \end{bmatrix}$$

举例 10：图上的随机游走

假设有一个包含五个顶点的图，每个顶点会以等概率游走至相邻的顶点。



求由此构成的马氏链的平稳分布。

图上的随机游走 (cont.)

该问题当中，相邻两个顶点之间的转移概率均为正，因此不违反细致平衡条件。首先构造对应的转移概率矩阵 $\mathbf{P}$：

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

图上的随机游走 (cont.)

根据细致平衡条件，可列出如下方程组：

$$\begin{cases} \pi(1)p(1,2) = \pi(2)p(2,1) \\ \pi(1)p(1,3) = \pi(3)p(3,1) \\ \pi(4)p(4,2) = \pi(2)p(2,4) \\ \pi(4)p(4,3) = \pi(3)p(3,4) \\ \pi(5)p(5,3) = \pi(3)p(3,5) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\pi(1) = \frac{1}{3}\pi(2) \\ \frac{1}{2}\pi(1) = \frac{1}{4}\pi(3) \\ \frac{1}{2}\pi(4) = \frac{1}{3}\pi(2) \\ \frac{1}{2}\pi(4) = \frac{1}{4}\pi(3) \\ \pi(5) = \frac{1}{4}\pi(3) \end{cases}$$

令 $\pi(3) = c$，可得：

$$\pi(1) = \frac{1}{2}c, \quad \pi(2) = \frac{3}{4}c, \quad \pi(4) = \frac{1}{2}c, \quad \pi(5) = \frac{1}{4}c$$

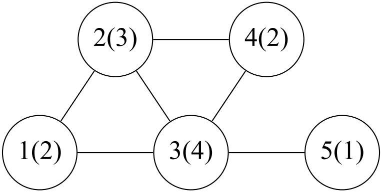
图上的随机游走 (cont.)

由于 $\sum_i \pi(i) = 1$，因此:

$$c = \frac{1}{3}$$

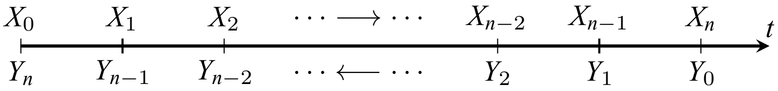
最终可得:

$$\pi(1) = \frac{2}{12}, \quad \pi(2) = \frac{3}{12}, \quad \pi(3) = \frac{4}{12}, \quad \pi(4) = \frac{2}{12}, \quad \pi(5) = \frac{1}{12}$$



马氏链的可逆性（reversible）

$\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ 是从平稳分布 $\pi(i)$ 开始的遍历马氏链，若逆向观察 $X_m, 0 \le m \le n$，则 $\{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0\}$ 也构成一个马氏链。



基于 $\{X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots X_{n+k}\}$ 构成的马氏链的可逆性可得：

$$\mathbb{P}(X_{n+1}|X_n, X_{n-1}\ldots X_0) = \mathbb{P}(X_{n+1}|X_n)$$

$$\mathbb{P}(X_{n-1}|X_n, X_{n+1}\ldots X_{n+k}) = \mathbb{P}(X_{n-1}|X_n)$$

马氏链的可逆性 (cont.)

根据贝叶斯定理可得：

$$\mathbb{P}(X_{n-1}|X_n) = \frac{\mathbb{P}(X_n|X_{n-1})\mathbb{P}(X_{n-1})}{\mathbb{P}(X_n)}$$

注意到，$\mathbb{P}(X_n)$ 的取值会因 n 的不同而有所变化，因此 $\mathbb{P}(X_{n-1}|X_n)$ 的取值也会受到 n 的影响。正因如此，原马氏链的反向链 $\{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0\}$ 不一定会满足时齐性。

注意：

马氏链的可逆性适用于遍历马氏链。对于具有吸收态的马氏链而言，可逆性显然不成立。

对偶转移概率

对于遍历马氏链 $\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ 而言，若固定 n 且令 $Y_m = X_{n-m}, 0 \le m \le n$，则 Y_m 是一个马氏链，其转移概率为

$$\hat{p}(i,j) = \mathbb{P}(Y_{m+1} = j | Y_m = i) = \frac{\pi(j)p(j,i)}{\pi(i)}$$

其中，$\hat{p}(i,j)$ 称为对偶（dual）转移概率。

细致平衡条件与可逆性

当 π 满足细致平衡条件 $\pi(i)p(i,j) = \pi(j)p(j,i)$ 时，

$$\hat{p}(i,j) = \frac{\pi(j)p(j,i)}{\pi(i)} = \frac{\pi(i)p(i,j)}{\pi(i)} = p(i,j)$$

即，在细致平衡条件下，逆向链的转移概率与原链相同。

细致平衡条件与可逆性 (cont.)

假设马氏链从 π 开始，分别经过状态 $x_0, x_1, \ldots, x_n$，则：

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\pi (X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \\
&= \pi(x_0) p(x_0, x_1) p(x_1, x_2) \cdots p(x_{n-1}, x_n) \\
&= \pi(x_1) p(x_1, x_0) p(x_1, x_2) \cdots p(x_{n-1}, x_n) \\
&= \pi(x_2) p(x_1, x_0) p(x_2, x_1) \cdots p(x_{n-1}, x_n) \\
&= \cdots\cdots \\
&= \pi(x_n) p(x_n, x_{n-1}) p(x_{n-1}, x_{n-2}) \cdots p(x_2, x_1) p(x_1, x_0) \\
&= \mathbb{P}_\pi \left(\hat{X}_0 = x_n, \hat{X}_1 = x_{n-1}, \ldots, \hat{X}_{n-1} = x_1, \hat{X}_n = x_0 \right)
\end{aligned}
$$

极限行为

如果 y 是一个非常返态，则对 $\forall x$，均有：

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^n(x,y) < \infty$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} p^n(x,y) = 0$$

这意味着我们在考虑马氏链的极限行为时，只需将注意力集中在常返态上，特别是只包含一个不可约常返类的马氏链。

相关定理

收敛定理

假设 **P** 不可约、非周期且具有平稳分布 π，则:

$$\lim_{n\to\infty} p^n(x,y) = \pi(y)$$

渐近频率定理

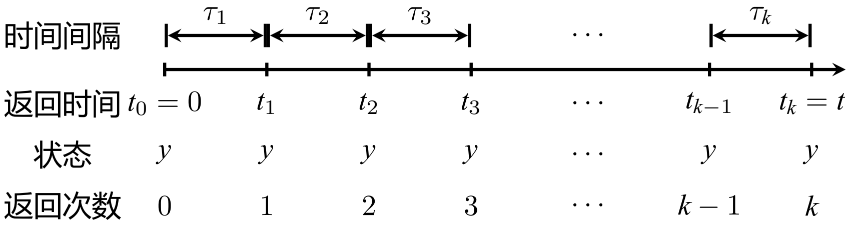
假设 **P** 不可约，且所有状态均是常返态，记 $N_t(y)$ 为在时刻 t 之前访问 y 的总次数，则:

$$\frac{N_t(y)}{t} \to \frac{1}{\mathbb{E}_y(\tau_y)}, \qquad \text{a.s.}$$

渐近频率定理的证明

证明需要使用大数定律。假设从时刻 0 到 t，返回状态 y 的次数为 k，记每次返回的时刻分别为 $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_k$ (其中 $t_0 = 0$，$t_k = t$)，每次返回的时间间隔分别为 $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$，则：

$$\tau_i = t_i - t_{i-1}, \qquad 1 \leq i \leq k$$



渐近频率定理的证明 (cont.)

由大数定律可知：每次访问的时间间隔 τ_i 是独立同分布的，因此，当 $n \to \infty$ 时，可得：

$$\frac{\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_k}{k} = \frac{t}{k} \to \mathbb{E}_y(\tau_y), \qquad \text{a.s.}$$

其中，$\mathbb{E}_y(\tau_y)$ 是从状态 y 首次返回的期望时间。这里的访问次数 k 就是 $N_t(y)$，因此：

$$\frac{N_t(y)}{t} \to \frac{1}{\mathbb{E}_y(\tau_y)}, \qquad \text{a.s.}$$

定理

假设 $\mathbf{P}$ 不可约，且具有平稳分布 π，则：

$$\pi(y) = \frac{1}{\mathbb{E}_y(\tau_y)}$$

该定理说明：状态 y 下的平稳分布对应的概率 $\pi(y)$ 等于首次返回状态 y 期望步数的倒数；并且在状态期间 $n \to \infty$ 时等于返回状态 y 的次数占整个状态步数 n 的比例。

简要证明

由于平稳分布 π 满足:

$$\lim_{n\to\infty} p^n(x,y) = \pi(y), \qquad \forall x \in S$$

因此，相应的 $\pi(y)$ 可以看作在转移步数 $n \to \infty$ 时，到达状态 y 的“可能性”。故 $\pi(y)$ 可以看成访问状态 y 的步数 $N_n(y)$ 占总的转移步数 n 的“比重”，从而可得:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(y)}{n} = \pi(y)$$

根据前面的渐近频率定理可得:

$$\mathbb{E}_y(\tau_y) = \frac{1}{\pi(y)}$$

回顾修复链

在修复链当中，状态空间 $\{0,1,2,3,12,13,23\}$ 对应平稳分布的概率分别如下：

$$\pi(0)=\frac{3000}{8910},\quad \pi(1)=\frac{500}{8910},\quad \pi(2)=\frac{1200}{8910},\quad \pi(3)=\frac{4000}{8910},$$

$$\pi(12)=\frac{22}{8910},\quad \pi(13)=\frac{60}{8910},\quad \pi(23)=\frac{128}{8910}$$

问：若让机器正常运转 1800 天，分别需要多少个零件 1、零件 2 和零件 3？

修复链 (cont.)

各零件需替换的概率分别为:

$$
\begin{aligned}
\text{零件 1:} \quad & \pi(12)+\pi(13)=\frac{22}{8910}+\frac{60}{8910}=\frac{82}{8910}\\
\text{零件 2:} \quad & \pi(12)+\pi(23)=\frac{22}{8910}+\frac{128}{8910}=\frac{150}{8910}\\
\text{零件 3:} \quad & \pi(13)+\pi(23)=\frac{60}{8910}+\frac{128}{8910}=\frac{188}{8910}
\end{aligned}
$$

根据 $\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(y)}{n}=\pi(y)$ 的变形形式:

$$N_n(y)\to n\cdot\pi(y), \qquad \text{a.s.}$$

可以得到需要的各零件的数量如下:

$$\text{零件 1:} \quad 1800\times\frac{82}{8910}=16.56(\text{个}) \qquad \text{零件 2:} \quad 1800\times\frac{150}{8910}=30.3(\text{个})$$

$$\text{零件 3:} \quad 1800\times\frac{188}{8910}=37.98(\text{个})$$

库存链

假设每销售一单位的商品，可获得 12 元的利润，但在店里存储一单位商品的花费为 2 元/天。商品每天的需求量 k 不超过 3 单位。

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	0.3	0.4	0.2	0.1

问：在以下三种策略下，每天净利润的期望值分别是多少？

1. $s = 2, S = 3$ 库存策略；
2. $s = 1, S = 3$ 库存策略；
3. $s = 0, S = 3$ 库存策略。

其中，s 表示需要补货的最大库存（即前一天库存若达到该值或以下，就需要在第二天之前补足库存）；S 表示库存的最大数量。

$s=2, S=3$ 库存策略

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

平稳概率分布如下:

$$
\pi(0)=0.1, \quad \pi(1)=0.2, \quad \pi(2)=0.4, \quad \pi(3)=0.3
$$

$s=2, S=3$ 库存策略 (cont.)

相应的销售额为：

$$12\times[0.1\times(3-0)+0.2\times(3-1)+0.4\times(3-2)+0.3\times(3-3)] = 13.2(\text{元/天})$$

库存的花费为：

$$2\times(0.1\times 0+0.2\times 1+0.4\times 2+0.3\times 3) = 3.8(\text{元/天})$$

每天净利润的期望值为：

$$13.2-3.8=9.4(\text{元})$$

$s=1, S=3$ 库存策略

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\
1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\
2 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\
3 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3
\end{array}
$$

平稳概率分布如下：

$$
\pi(0)=\frac{19}{110}, \quad \pi(1)=\frac{30}{110}, \quad \pi(2)=\frac{40}{110}, \quad \pi(3)=\frac{21}{110}
$$

$s=1, S=3$ 库存策略 (cont.)

注意，当存货为 2 时，若需求量为 3，则只能售出 2 件商品，因此该策略下的销售额应当扣减这一情形。该事件的概率为：

$$\pi(2)\times\mathbb{P}(k=3)=\frac{40}{110}\times 0.1=0.036$$

相应的销售额为：

$$13.2-0.036\times 12=12.764(\text{元/天})$$

库存的花费为：

$$2\times\left(\frac{19}{110}\times 0+\frac{30}{110}\times 1+\frac{40}{110}\times 2+\frac{21}{110}\times 3\right)=3.145(\text{元/天})$$

每天净利润的期望值为：

$$12.764-3.145=9.619(\text{元})$$

$s = 0, S = 3$ 库存策略

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.7 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

平稳概率分布如下:

$$\pi(0) = \frac{343}{1070}, \quad \pi(1) = \frac{300}{1070}, \quad \pi(2) = \frac{280}{1070}, \quad \pi(3) = \frac{147}{1070}$$

$s = 0, S = 3$ 库存策略 (cont.)

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	0.3	0.4	0.2	0.1

注意，此时仍存在存货小于需求量的情形，此类事件的概率为：

$$\begin{aligned}
&\pi(2) \times \mathbb{P}(k=3) \times (3-2) + \pi(1) \times [\mathbb{P}(k=3) \times (3-1) + \mathbb{P}(k=2) \times (2-1)] \\
&= \frac{280}{1070} \times 0.1 \times 1 + \frac{300}{1070} \times (0.1 \times 2 + 0.2 \times 1) \\
&= \frac{148}{1070}
\end{aligned}$$

$s = 0, S = 3$ 库存策略 (cont.)

相应的销售额为:

$$13.2 - \frac{148}{1070} \times 12 = 11.54(\text{元/天})$$

库存的花费为:

$$2 \times \left(\frac{343}{1070} \times 0 + \frac{300}{1070} \times 1 + \frac{280}{1070} \times 2 + \frac{147}{1070} \times 3 \right) = 2.43(\text{元/天})$$

每天净利润的期望值为:

$$11.54 - 2.43 = 9.11(\text{元})$$

离出分布的含义

离出分布（exit distribution）考查的是：对于至少存在两个不同吸收态的马氏链，从给定的非常返态 j 开始，该马氏链最终进入某一特定吸收态 i 的概率是多少?

换句话说，离出分布考查的是一个非常返态 j 最终被某一状态 i 吸收的概率（即吸收概率，absorption probability）。

比如：在赌徒破产模型中，有两个吸收态（破产和赚钱离场），赌徒进入赌场，最终破产或赚钱离场的概率分别是多少？这里所要求得的概率就是吸收概率。在前面的式 (2.5) 中已经给出了吸收概率的最终取值。本节则是侧重于如何计算这些概率。

离出分布的计算

记非常返态 x 最终被状态 z 吸收的概率为 $h(x)=\mathbb{P}(X_\tau=z|X_0=x)$，根据 C-K 方程可得：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_\tau=z|X_0=x)&=\sum_y \mathbb{P}(X_\tau=z|X_1=y)\mathbb{P}(X_1=y|X_0=x)\\&=\sum_y \mathbb{P}(X_\tau=z|X_1=y)\cdot p(x,y)\end{aligned}$$

因此：

$$h(x)=\sum_y p(x,y)\cdot h(y)$$

举例 11：两年制大学

在当地一所两年制大学里，60% 的新生可升到二年级，25% 仍为一年级学生，15% 退学；70% 的二年级学生毕业，20% 仍为二年级学生，10% 退学。

问：新生最终毕业的比例是多少？

思路：

在此问题中，存在两个吸收态（常返态）：“毕业”和“退学”。相应的问题就转化成：给定当前状态为“新生”，马氏链最终进入吸收态“毕业”的概率是多少？

两年制大学 (cont.)

状态空间 {1,2,G,D} 中的状态 1、2、G、D 分别表示一年级、二年级、毕业（graduate）和退学（dropout），得到相应的转移概率矩阵如下：

$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ G \\ D \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & G & D \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0.25 & 0.6 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

两年制大学 (cont.)

用 $h(x)$ 表示现在状态是 x 的学生最终毕业的概率，可得：

$$\begin{cases} h(1) = \sum_{s\in S} p(1,s)\cdot h(s) = p(1,1)h(1) + p(1,2)h(2) + p(1,G)h(G) + p(1,D)h(D) \\ h(2) = \sum_{s\in S} p(2,s)\cdot h(s) = p(2,1)h(1) + p(2,2)h(2) + p(2,G)h(G) + p(2,D)h(D) \end{cases}$$

由于 $h(G) = 1, \quad h(D) = 0$，因此：

$$\begin{cases} h(1) = 0.25h(1) + 0.6h(2) \\ h(2) = 0.2h(2) + 0.7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(1) = 0.7 \\ h(2) = 0.875 \end{cases}$$

因此，新生最终毕业的概率是 0.7；二年级学生最终毕业的概率是 0.875。

矩阵-向量的形式重新表述

$$\begin{bmatrix} h(1) \\ h(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.6 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(1) \\ h(2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

相应的矩阵形式如下：

$$\mathbf{h} = \mathbf{A}\mathbf{h} + \mathbf{b}$$

其中，$\mathbf{h}$ 是由 $h(1)$ 和 $h(2)$ 组成的列向量；$\mathbf{A}$ 是由非常返态 1 和 2 组成的分块矩阵；$\mathbf{b}$ 是由吸收态 G（毕业）与非常返态 1 和 2 组成的分块矩阵。对上式进行简单的运算，可得：

$$\mathbf{h} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$$

其中，$\mathbf{I}$ 是主对角线元素均为 1 的单位矩阵（identity matrix）。

转移概率矩阵分块

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 0.25 & 0.6 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

其中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.6 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

回顾赌徒破产问题

转移概率矩阵如下：

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

求赌徒最终破产的概率。

赌徒破产问题 (cont.)

由于吸收态 0 和 5 分别对应赌徒破产出局和获利离开两种情形，那么参照刚才所介绍的方法，可以将上面的矩阵进行重新组织，非常返态和吸收态分别进行归类，重组后的转移概率矩阵如下：

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

赌徒破产问题 (cont.)

如果要求出赌徒最终破产的概率，相应的矩阵和向量如下：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0.4 & 0 & 0\\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0\\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4\\ 0 & 0 & 0.6 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0.6\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

将之代入 $\mathbf{h}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$，最终可得：

$$\mathbf{h}=\begin{bmatrix}0.9242\\ 0.8104\\ 0.6398\\ 0.3839\end{bmatrix}$$

结论：

赌徒初始财富为 1 时，破产概率是 92.42%；初始财富为 2 时，破产概率是 81.04%；初始财富为 3 时，破产概率是 63.98%；初始财富为 4 时，破产概率是 38.39%。

离出时间的含义

离出时间（exit time）考查的是：对于存在吸收态的马氏链，从给定的非常返态开始，该马氏链最终被吸收态所吸收的期望时间是多少？

比如：在赌徒破产模型中，有两个吸收态（破产和赚钱离场），赌徒进入赌场，最终破产或赚钱离场的平均时间是多少？这里所要求得的“平均时间”就是离出时间。

离出时间的计算

记非常返态 x 最终被吸收的期望时间为 $g(x)=\mathbb{E}_x(T)$，根据马氏性，对任意非常返态 y 可得：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x(T) &= 1+\sum_y \mathbb{P}(X_1=y|X_0=x)\mathbb{E}_y(T)\\ &= 1+\sum_y p(x,y)\mathbb{E}_y(T)\end{aligned}$$

由于这里假设状态 x 在被吸收之前，访问了非常返态 y，因此这一过程中经历了一步的转移，故公式当中需要加上 1。最终得到：

$$g(x)=1+\sum_y p(x,y)\cdot g(y)$$

举例 11：两年制大学

在当地一所两年制大学里，60% 的新生可升到二年级，25% 仍为一年级学生，15% 退学；70% 的二年级学生毕业，20% 仍为二年级学生，10% 退学。

问：平均来看，一个学生到毕业或者退学需要花费几年时间?

思路

在此问题中，存在两个吸收态（常返态)："毕业"和"退学"。相应的问题就转化成：给定当前状态为"新生"，马氏链最终进入吸收态"毕业"或"退学"的期望时间是多少?

两年制大学 (cont.)

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & G & D \\
\hline
1 & 0.25 & 0.6 & 0 & 0.15 \\
2 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\
G & 0 & 0 & 1 & 0 \\
D & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

用 $g(x)$ 表示现在状态是 x 的学生最终毕业或退学所需时间的期望值，可得：

$$
\begin{cases}
g(1) = 1 + \sum_y p(x,y) \cdot g(y) = 1 + p(1,1)g(1) + p(1,2)g(2) \\
g(2) = 1 + \sum_y p(x,y) \cdot g(y) = 1 + p(2,1)g(1) + p(2,2)g(2)
\end{cases}
$$

两年制大学 (cont.)

因此:

$$\begin{cases} g(1) = 1 + 0.25g(1) + 0.6g(2) \\ g(2) = 1 + 0.2g(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 7/3 \\ g(2) = 5/4 \end{cases}$$

故一年级学生到毕业或退学所需的期望时间约为 2.33 年；二年级学生到毕业或退学所需的期望时间约为 1.25 年。

矩阵-向量的形式重新表述

$$\begin{bmatrix} g(1) \\ g(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.6 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(1) \\ g(2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

相应的矩阵形式如下：

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{g} + \vec{\mathbf{1}}$$

其中，$\mathbf{g}$ 是由 $g(1)$ 和 $g(2)$ 组成的列向量；$\mathbf{A}$ 是由非常返态 1 和 2 组成的分块矩阵；$\vec{\mathbf{1}}$ 是元素全为 1 的列向量。对上式进行简单的运算，可得：

$$\mathbf{g} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\vec{\mathbf{1}}$$

其中，$\mathbf{I}$ 是主对角线元素均为 1 的单位矩阵。

转移概率矩阵分块

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 0.25 & 0.6 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

其中：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.6 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

回顾赌徒破产问题

赌徒破产问题当中，转移概率矩阵如下：

$$
\begin{array}{c}
\\
0\\1\\2\\3\\4\\5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

求赌徒最终离开赌场的期望时间。

赌徒破产问题 (cont.)

将非常返态和吸收态分别进行归类，重组后的转移概率矩阵如下：

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

相应的矩阵和向量如下：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

赌徒破产问题 (cont.)

代入 $\mathbf{g}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\vec{\mathbf{1}}$，最终可得：

$$\mathbf{g}=\begin{bmatrix}3.1043\\5.2607\\5.9953\\4.5972\end{bmatrix}$$

结论：

赌徒初始财富为 1 时，其离开赌场的期望时间是 3.1043 步；初始财富为 2 时，其离开赌场的期望时间是 5.2607 步；初始财富为 3 时，其离开赌场的期望时间是 5.9953 步；初始财富为 4 时，其离开赌场的期望时间是 4.5972 步。