第八章 随机积分概论

随机过程及其在金融中的应用

中国人民大学出版社

本章内容

1. 普通积分回顾
2. 随机积分的构造
3. 伊藤积分的性质
4. 伊藤引理
   - 伊藤过程
   - 伊藤引理

普通积分

对于一个普通确定性积分 (deterministic integral)，可以通过对确定性的函数进行相关的运算操作，进而进行求解。比如：

$$R(T) = \int_0^T g(t)\ \mathrm{d}t$$

此处的积分求解，可以使用离散化函数定义域 $[0, T]$ 的方式，通过对求和取极限的方式得到。以上式为例，我们对 $[0, T]$ 进行划分，可以得到该时间段的一个分划 (partition)，即：

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$$

普通积分的黎曼和

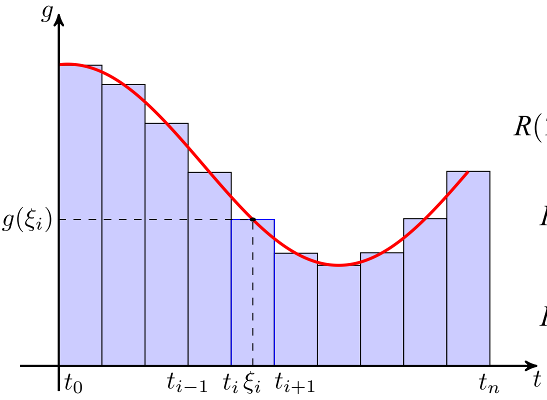
据此可以得到关于这个确定性积分的近似计算方法，称之为黎曼和 (Riemann sum)，具体形式如下：

$$R_1 = \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

我们也可以通过选取 $[t_i, t_{i+1}]$ 时间段中的任何一点的 $g(\xi_i)$ 取值作为矩形的高度，即：

$$R_2 = \sum_{i=0}^{n-1} g\left(\xi_i\right)\left(t_{i+1} - t_i\right), \quad \xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

黎曼和的图形展示



$$R(T) = \int_0^T g(t)\ \mathrm{d}t$$

$$R_1 = \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$R_2 = \sum_{i=0}^{n-1} g\left(\xi_i\right)\left(t_{i+1} - t_i\right)$$

$$\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

黎曼积分

这种基于对定义域切割所进行的积分求解方法，称为黎曼积分 (Riemann integral)。不太严格地来说，黎曼积分就是当分割越来越“精细”的时候，黎曼和趋向的极限。

记对时间段 $[0,T]$ 的划分当中，最长的时间段为 $\|\Pi\|$，即：$\|\Pi\| = \max(t_{i+1}-t_i), \quad i=0,1,2,\ldots,n-1$，于是有：

$$R(T) = \int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{\|\Pi\|\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=0}^{n-1} g\left(\xi_i\right)\left(t_{i+1}-t_i\right)$$

对于光滑函数 $g(t)$ 而言，其二次变差为零，相应的每个小区间中 $g(\xi_i)$ 取值对最终的积分结果没有影响。

黎曼-斯蒂尔切斯积分

对于光滑函数 $f(t)$ 和 $g(t)$，以下积分称为黎曼-斯蒂尔切斯积分 (Riemann-Stieltjes integral)，简称 RS 积分：

$$RS(T) = \int_0^T g(t)\, \mathrm{d}f(t)$$

与黎曼积分类似，RS 积分也有类似的黎曼和形式的表达方式，也就是黎曼-斯蒂尔切斯和 (Riemann-Stieltjes sum)。

$$RS_1 = \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)\left[f(t_{i+1}) - f(t_i)\right]$$

$$RS_2 = \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\left[f(t_{i+1}) - f(t_i)\right], \qquad \xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

黎曼-斯蒂尔切斯积分 (cont.)

同样，当划分的区间数 $n \to \infty$ 时：

$$RS(T) = \int_0^T g(t)\ \mathrm{d}f(t) = \lim_{\substack{\|\Pi\| \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} g\left(\xi_i\right) \left[f(t_{i+1}) - f(t_i)\right]$$

由于光滑函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的二次变差均为零，对应的每个小区间中 $g(\xi_i)$ 取值对最终的积分结果没有影响。

随机积分的形式

随机积分的一般形式如下：

$$I(T)=\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

其中：$W(t)$ 是 $\mathcal{F}(t)$ 可测的布朗运动，并且 $W(t)\sim\mathcal{N}(0,t)$；$g(t)$ 是一个 $\mathcal{F}(t)$ 可测的随机过程；上述积分对应的概率空间为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$。

注意：

布朗运动处处连续且处处不可微，我们无法像普通积分那样，将 $\mathrm{d}W(t)$ 写成 $W'(t)\,\mathrm{d}t$。所以普通的积分方法对这里的随机积分是无效的。

随机积分 $I(T) = \int_0^T g(t)\ \mathrm{d}W(t)$

对 $[0, T]$ 时间段进行剖分，假设 $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ 是对该时间段的一个分划 (partition)，即：$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$

假设 $g(t)$ 在每个子区间 $[t_i, t_{i+1})$，$i = 1, 2, \ldots, n-1$ 内均是常数，分别记作 $g(t_i)$。这样的过程 $\{g(t_i)\}$ 称作简单过程 (simple process)。

随机积分 $I(T)=\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}W(t)$ (cont.)

将 $W(t)$ 想象成时刻 t 每股股票的价格；$g(t_i)$ 想象成子区间 $[t_i,t_{i+1})$ 内持有的股票数量，则股票在 t 时刻的总价值 $I(t)$ 分别为：

$$I(t)=\begin{cases} g(t_0)[W(t)-W(t_0)]=g(0)W(t) & t\in[t_0,t_1] \\ g(0)W(t_1)+g(t_1)[W(t)-W(t_1)] & t\in[t_1,t_2] \\ g(0)W(t_1)+g(t_1)[W(t_2)-W(t_1)]+g(t_2)[W(t)-W(t_2)] & t\in[t_2,t_3] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \end{cases}$$

因此：若 $t\in[t_k,t_{k+1}]$，则有：

$$I(t)=\sum_{i=0}^{k-1} g(t_i)[W(t_{i+1})-W(t_i)]+g(t_k)[W(t)-W(t_k)]$$

随机积分 $I(T)=\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}W(t)$ (cont.)

注意：

$$I(t)=\sum_{i=0}^{k-1} g(t_i)[W(t_{i+1})-W(t_i)]+g(t_k)[W(t)-W(t_k)]$$

其中的 $g(t_i)$ 是基于时间区间 $[t_i,t_{i+1})$ 的左侧端点而确定的。

在普通确定性函数积分中，由于函数的二次变差为零，使得对积分取黎曼和，不受 $g(\xi_i)$，$\xi_i\in[t_i,t_{i+1})$ 选取的影响。但是在布朗运动当中，二次变差非零的特征，使得这一性质无法成立。

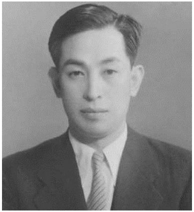
随机积分的取值，受到函数 $g(t)$ 在 $[t_i,t_{i+1})$ 上取点的影响。

$$I(t)=\sum_{i=0}^{k-1} g(t_i)[W(t_{i+1})-W(t_i)]+g(t_k)[W(t)-W(t_k)]$$

在上面的举例中，股票在每个时刻的价值变动，是基于 t_i 时刻的股票头寸数，乘以 $[t_i, t_{i+1})$ 时间段股票价格的变动。

根据各区间的左侧端点进行的随机积分，在金融中具有重要的意义，意味着我们只能根据当前时刻的信息决定持有金融资产的数量。

这种形式的随机积分称作伊藤积分 (Itô integral)。



Kiyosi Itô

1915–2008

伊藤积分的 RS 和表达式

令时间段 $[0, T]$ 中的最长子区间 $\|\Pi\| = \max |t_{i+1} - t_i|$ 长度趋于零时，伊藤积分可以写成如下的黎曼-斯蒂尔切斯和的表达式：

$$I(T) = \int_0^T g(u)\, \mathrm{d}W(u) = \lim_{\substack{\|\Pi\|\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=0}^{n-1} g\left(t_i\right)\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right]$$

注意：

不同于确定性积分，以伊藤积分为代表的随机积分，由于是针对布朗运动进行积分求解，因而求算的结果仍然是随机变量。因此，对随机积分的研究不可避免地要涉及对积分的期望、方差等数字特征的求解和计算。

伊藤积分的微分形式

$$I(T) = \int_0^T g(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

上式的伊藤积分还可以写成如下的微分形式 (differential form)：

$$\mathrm{d}I(t) = g(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

斯特拉托诺维奇积分

如果选取时间段的中点，则由此构成的随机积分称作斯特拉托诺维奇积分 (Stratonovich integral)，为了与伊藤积分加以区分，记作：

$$SI(T) = \int_0^T g(u) \circ \, \mathrm{d}W(u)$$

Ruslan L. Stratonovich

1930–1997

伊藤积分的性质

假设 $g(t)$，$t \in [0, T]$ 是满足平方可积条件[1]，并且 $\mathcal{F}(t)$ 可测的随机过程。对于形如 $I(t) = \int_0^t g(u)\,\mathrm{d}W(u)$ 的伊藤积分，其具有如下性质：

- 鞅性：$I(t)$ 是鞅
- 期望：$\mathbb{E}[I(t)] = 0, \qquad 0 \le t \le T$

伊藤积分 $I(t) = \int_0^t g(u)\,\mathrm{d}W(u)$ 的性质 (cont.)

- 伊藤等距 (Itô isometry)

$$\mathbb{E}[I^2(t)] = \mathbb{E}\int_0^t g^2(u)\,\mathrm{d}u$$

相应地:

$$\mathrm{Var}[I(t)] = \mathbb{E}[I^2(t)] - [\mathbb{E}I(t)]^2 = \mathbb{E}[I^2(t)] = \mathbb{E}\int_0^t g^2(u)\,\mathrm{d}u$$

- 伊藤积分的二次变差

$$\langle I, I\rangle(t) = \int_0^t g^2(u)\,\mathrm{d}u$$

伊藤积分的性质 (cont.)

与确定性积分类似，伊藤积分具有如下相似的性质：

1. 可加性 (additive)：对于两个过程 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$，下面的等式成立

$$\int_a^b X_1(t)\,\mathrm{d}W(t) + \int_a^b X_2(t)\,\mathrm{d}W(t) = \int_a^b \big[X_1(t) + X_2(t)\big]\,\mathrm{d}W(t)$$

2. 积分区间可加性：对于 $a < b < c$，下面的等式成立

$$\int_a^c X(t)\,\mathrm{d}W(t) = \int_a^b X(t)\,\mathrm{d}W(t) + \int_b^c X(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

3. 标量乘法 (scalar multiplication) 成立：对于任意常数 k，下面的等式成立

$$\int_a^b kX(t)\,\mathrm{d}W(t) = k\int_a^b X(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

确定性函数伊藤积分之伊藤等距

假设 $W(s)$ 是一个布朗运动；$f(s)$ 是关于时间 s 的确定性函数。则确定性函数 (deterministic function) 伊藤积分 $I(t) = \int_0^t f(s)\, \mathrm{d}W(s)$ 具有以下性质：

$$\mathbb{E}[I^2(t)] = \int_0^t f^2(s)\, \mathrm{d}s$$

确定性函数伊藤积分的性质

假设 $W(s)$ 是一个布朗运动；$f(s)$ 是关于时间 s 的确定性函数。定义如下伊藤积分：

$$I(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W(s)$$

对任意 $t \geq 0$，随机变量 $I(t)$ 服从均值为零，方差为 $\int_0^t f^2(s)\,\mathrm{d}s$ 的正态分布，即：

$$I(t) \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t f^2(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

只有在被积函数 $f(s)$ 是确定性的情况下，该结论才成立。如果 $f(s)$ 包含随机项，该结论是不成立的。

伊藤过程的概念

对于随机过程 $\{X(t)\}$，若其满足随机微分方程

$$\mathrm{d}X(t) = F(t)\ \mathrm{d}t + G(t)\ \mathrm{d}W(t)$$

则称作伊藤过程 (Itô process)。其中 $F(t)$ 和 $G(t)$ 均是 $\mathcal{F}(t)$ 可测的随机过程。

随机过程 $\{X(t)\}$ 的瞬时增量受到两方面因素的影响：一个是确定性因素的影响，以随机过程 $\{F(t)\}$ 随时间的变化来刻画；另一个是随机性因素的影响，以随机过程 $\{G(t)\}$ 随布朗运动的变化来刻画。

伊藤过程 $\mathrm{d}X(t) = F(t)\,\mathrm{d}t + G(t)\,\mathrm{d}W(t)$

假设 $F(t)=\mu$，$G(t)=\sigma$，其中 μ 和 σ 均是常数，则由此得到的随机微分方程 $\mathrm{d}X(t)=\mu\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}W(t)$ 就是带有漂移的布朗运动 (Brownian motion with drift)。

如果 $\mu=0$, $\sigma=1$，则 $\mathrm{d}X(t)=\mathrm{d}W(t)$，此时 $X(t)$ 就是标准布朗运动 (standard Brownian motion)。

伊藤过程也可以写成对应的积分形式。对于 $[0,T]$ 上的伊藤过程，其积分形式如下：

$$\int_0^T \mathrm{d}X(t) = \int_0^T F(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T G(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

积分形式更正式且严谨，而微分形式则相对容易理解。

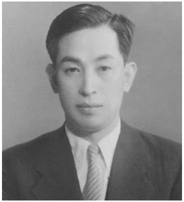
伊藤引理的重要意义

伊藤引理是随机微积分的核心，其地位相当于普通微积分中的微分理论。

仍需强调的是，由于布朗运动的二次变差不为零，因此随机微分理论具有全新的特征。

Wolfgang Doeblin

1915–1940



Kiyoshi Itô

1915–2008

回顾：普通微积分的链式法则

对于一个光滑的函数 $G(t)$ 而言，若有一个可微的函数 $f(x)$，根据普通微积分的链式法则 (chain rule)，我们有：

$$\frac{\mathrm{d}f\left[G(t)\right]}{\mathrm{d}t} = f'\left[G(t)\right]G'(t)$$

上式也可以写成对应的微分形式：

$$\mathrm{d}f\left[G(t)\right] = f'\left[G(t)\right]G'(t)\,\mathrm{d}t = f'\left[G(t)\right]\,\mathrm{d}G(t)$$

回顾：泰勒展开式

根据泰勒展开式，更精确的形式如下：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f[G(t)] = f'[G(t)]\,\mathrm{d}G(t) + \frac{1}{2!}f''[G(t)][\,\mathrm{d}G(t)]^2 \\
+ \frac{1}{3!}f^{(3)}[G(t)][\,\mathrm{d}G(t)]^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

由于 $G(t)$ 是光滑函数，因此其高阶变差均等于零，即：

$$
[\,\mathrm{d}G(t)]^2 = [\,\mathrm{d}G(t)]^3 = \cdots = 0
$$

因此，对于光滑函数 $G(t)$， $\mathrm{d}f[G(t)] = f'[G(t)]G'(t)\,\mathrm{d}t = f'[G(t)]\,\mathrm{d}G(t)$ 已经足以用来刻画 $f[G(t)]$ 的微分。

$\mathrm{d}f\left[W(t)\right]$ 的求解

由于布朗运动 $W(t)$ 的二次变差不为零。考虑到这一因素，我们就需要使用泰勒展开式，具体如下：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f\left[W(t)\right] &= f'\left[W(t)\right]\,\mathrm{d}W(t) + \frac{1}{2}f''\left[W(t)\right]\left[\,\mathrm{d}W(t)\right]^2 \\
&= f'\left[W(t)\right]\,\mathrm{d}W(t) + \frac{1}{2}f''\left[W(t)\right]\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

更高阶的变差均为零，因此泰勒展开式后面的各项均不再体现。

伊藤引理 (一维)

定义过程 $Z(t)=f(t,X(t))$，并且 $X(t)$ 是满足如下形式的伊藤过程

$$\mathrm{d}X(t)=F(t)\,\mathrm{d}t+G(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

则随机过程 $\{Z(t)\}$ 满足如下形式的随机微分方程 (stochastic differential equation, SDE)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(t,X)=&\left[\frac{\partial f(t,X)}{\partial t}+F(t)\frac{\partial f(t,X)}{\partial X}+\frac{1}{2}G^2(t)\frac{\partial^2 f(t,X)}{\partial X^2}\right]\,\mathrm{d}t\\&+G(t)\frac{\partial f(t,X)}{\partial X}\,\mathrm{d}W(t)\end{aligned}$$

该方程称作伊藤引理 (Itô's lemma)，也称为伊藤公式 (Itô's formula) 或伊藤-德布林公式 (Itô-Doeblin formula)。

伊藤引理 (cont.)

伊藤引理也可以简写如下：

$$\mathrm{d}f(t,X) = \left[f_t + F(t)f_X + \frac{1}{2}G^2(t)f_{XX}\right]\mathrm{d}t + G(t)f_X\,\mathrm{d}W(t)$$

通过伊藤引理，我们可以将随机过程 $X(t)$ 的随机微分方程，通过变量替换的方式转变为随机过程 $Z(t) = f[t, X(t)]$ 的随机微分方程。

布朗运动变化量的乘法法则 (product rule) 表

	$\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}W_1(t)$	$\mathrm{d}W_2(t)$
$\mathrm{d}t$	0	0	0
$\mathrm{d}W_1(t)$	0	$\mathrm{d}t$	$\rho\,\mathrm{d}t$
$\mathrm{d}W_2(t)$	0	$\rho\,\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}t$

其中：$W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 均是标准布朗运动，并且两者的相关系数为 ρ。

例 1

已知 $\mathcal{F}(t)$ 可测的随机过程 $X(t)$ 的表达式如下：

$$X(t) = \exp\left[\theta W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right]$$

其中：$W(t)$ 是标准布朗运动，θ 是常数。

求 $X(t)$ 的随机微分方程。

例 1：解法一

根据题意，可得：

$$Y(t)=\theta W(t)-\frac{1}{2}\theta^2 t,\qquad X[Y(t)]=\exp[Y(t)]$$

根据伊藤引理，可得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X[Y(t)] &= X_t\,\mathrm{d}t+X_Y\,\mathrm{d}Y(t)+\frac{1}{2}X_{YY}[\,\mathrm{d}Y(t)]^2\\
&= X(t)\left[\theta\,\mathrm{d}W(t)-\frac{1}{2}\theta^2\,\mathrm{d}t\right]+\frac{1}{2}X(t)\left[\theta\,\mathrm{d}W(t)-\frac{1}{2}\theta^2\,\mathrm{d}t\right]^2\\
&= X(t)\theta\,\mathrm{d}W(t)-\frac{1}{2}X(t)\theta^2\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}X(t)\theta^2\,\mathrm{d}t\\
&= \theta X(t)\,\mathrm{d}W(t)
\end{aligned}$$

因此： $\mathrm{d}X(t)=\theta X(t)\,\mathrm{d}W(t)$

例 1：解法二

根据泰勒展开式进行计算，那么过程如下：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}X(t) &= X_t \,\mathrm{d}t + X_W \,\mathrm{d}W(t) + \frac{1}{2}X_{WW}[\,\mathrm{d}W(t)]^2 \\
&= -\frac{1}{2}X(t)\theta^2 \,\mathrm{d}t + \theta X(t) \,\mathrm{d}W(t) + \frac{1}{2}X(t)\theta^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \theta X(t) \,\mathrm{d}W(t)
\end{aligned}
$$

说明：

第一种方法是针对 $X[Y(t)]$ 进行求偏导的计算，相应地，$X_t[Y(t)] = 0$；而第二种方法则是针对 $X[t, W(t)]$ 进行求偏导的计算，相应地，$X_t[t, W(t)] = -\dfrac{1}{2}\theta^2 X(t)$。

例 2

已知 $\mathcal{F}(t)$ 可测的随机过程 $X(t)$ 的表达式如下：

$$X(t) = W^2(t)$$

其中：$W(t)$ 是标准布朗运动。

求 $X(t)$ 的随机微分方程。

使用泰勒展开式，可得：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X &= X_t \, \mathrm{d}t + X_W \, \mathrm{d}W(t) + \frac{1}{2} X_{WW} [\, \mathrm{d}W(t)]^2 \\ &= 0 + 2W(t) \, \mathrm{d}W(t) + \frac{1}{2} \times 2 \, \mathrm{d}t \\ &= 2W(t) \, \mathrm{d}W(t) + \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

例 3

已知 $\mathcal{F}(t)$ 可测的随机过程 $f(S(t)) = \ln S(t)$，其中 $S(t)$ 的随机微分方程如下：

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

其中：$W(t)$ 是标准布朗运动，μ 和 σ 均是常数。

求 $f[S(t)]$ 的随机微分方程。

例 3 解答

令 $\mu(t)=\mu S(t)$，$\sigma(t)=\sigma S(t)$，根据伊藤引理可得：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \left[f_t+\mu(t)f_S+\frac{1}{2}\sigma^2(t)f_{SS}\right]\,\mathrm{d}t+\sigma(t)f_S\,\mathrm{d}W(t)\\
&=\left[0+\mu S\frac{1}{S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\left(-\frac{1}{S^2}\right)\right]\,\mathrm{d}t+\sigma S\frac{1}{S}\,\mathrm{d}W(t)\\
&=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}W(t)
\end{aligned}
$$

这里也可以使用泰勒展开式进行求解，具体如下：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= f_t\,\mathrm{d}t+f_S\,\mathrm{d}S+\frac{1}{2}f_{SS}(\,\mathrm{d}S)^2\\
&=0+\frac{1}{S}\mu S\,\mathrm{d}t+\sigma S\,\mathrm{d}W(t)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S^2}\right)(\sigma^2S^2\,\mathrm{d}t)\\
&=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}W(t)
\end{aligned}
$$

例 4

假设 $f(S,t) = S - Ke^{-r(T-t)}$，并且其中的随机过程 $S(t)$ 的随机微分方程如下：

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

其中：$W(t)$ 是标准布朗运动，μ 和 σ 均是常数。

求 $f(S,t)$ 的随机微分方程。

例 4 解答

使用泰勒展开式进行求解，具体如下:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= f_t\,\mathrm{d}t + f_S\,\mathrm{d}S + \frac{1}{2}f_{SS}(\,\mathrm{d}S)^2 \\
&= -K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\cdot r\,\mathrm{d}t + \,\mathrm{d}S + 0 \\
&= -rK\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,\mathrm{d}t + \mu S\,\mathrm{d}t + \sigma S\,\mathrm{d}W(t) \\
&= \left[-\,rK\mathrm{e}^{-r(T-t)} + \mu S\right]\mathrm{d}t + \sigma S\,\mathrm{d}W(t)
\end{aligned}
$$

因此:

$$
\mathrm{d}f(S,t) = \left[-\,rK\mathrm{e}^{-r(T-t)} + \mu S(t)\right]\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}W(t)
$$

说明:

此处的随机微分方程常常用于金融远期合约的建模。

例 5

假设 $f(S,t)=Se^{r(T-t)}$，并且其中的随机过程 $S(t)$ 的随机微分方程如下：

$$\mathrm{d}S(t)=\mu S(t)\,\mathrm{d}t+\sigma S(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

其中：$W(t)$ 是标准布朗运动，μ 和 σ 均是常数。

求 $f(S,t)$ 的随机微分方程。

例 5 解答

使用泰勒展开式进行求解，具体如下：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= f_t\,\mathrm{d}t + f_S\,\mathrm{d}S + \frac{1}{2}f_{SS}(\mathrm{d}S)^2 \\
&= -S\mathrm{e}^{r(T-t)}\cdot r\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{r(T-t)}\,\mathrm{d}S + 0 \\
&= -rS\mathrm{e}^{r(T-t)}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{r(T-t)}[\mu S\,\mathrm{d}t + \sigma S\,\mathrm{d}W(t)] \\
&= \mathrm{e}^{r(T-t)}\Big[\big(-rS + \mu S\big)\,\mathrm{d}t + \sigma S\,\mathrm{d}W(t)\Big] \\
&= S\mathrm{e}^{r(T-t)}[(\mu - r)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t)] \\
&= f(S,t)[(\mu - r)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t)]
\end{aligned}
$$

说明:

此处的随机微分方程常常用于金融期货合约的建模。

二维伊藤引理

令函数 $f(t,x,y)$ 的各一阶和二阶偏导数均存在且连续。假设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 均是伊藤过程，则相应的二维伊藤公式如下：

$$
\begin{aligned}
df = & f_t \,\mathrm{d}t + f_x \,\mathrm{d}X(t) + f_y \,\mathrm{d}Y(t) + f_{xy}[\,\mathrm{d}X(t)\,\mathrm{d}Y(t)] \\
& + \frac{1}{2} f_{xx}[\,\mathrm{d}X(t)]^2 + \frac{1}{2} f_{yy}[\,\mathrm{d}Y(t)]^2
\end{aligned}
$$

伊藤乘法法则

假设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 均是伊藤过程，则有：

$$\mathrm{d}\Big[X(t)Y(t)\Big] = X(t)\,\mathrm{d}Y(t) + Y(t)\,\mathrm{d}X(t) + \mathrm{d}X(t)\,\mathrm{d}Y(t)$$

注意：

对于普通的函数 $F(t)$ 和 $G(t)$，其微分的乘法法则如下：

$$\mathrm{d}\Big[F(t)G(t)\Big] = F(t)\,\mathrm{d}G(t) + G(t)\,\mathrm{d}F(t)$$

相比之下，在伊藤过程中，其微分的乘法却多出一项 $\mathrm{d}X(t)\,\mathrm{d}Y(t)$，称为交叉变差项 (cross variation term)，出现这项的原因在于：布朗运动的二次变差不为零。

伊藤乘法法则 (cont.)

对 $\mathrm{d}\Big[X(t)Y(t)\Big] = X(t)\,\mathrm{d}Y(t) + Y(t)\,\mathrm{d}X(t) + \mathrm{d}X(t)\,\mathrm{d}Y(t)$ 的两侧同时取积分，可得：

$$\int_0^t \mathrm{d}\Big[X(u)Y(u)\Big] = \int_0^t X(u)\,\mathrm{d}Y(u) + \int_0^t Y(u)\,\mathrm{d}X(u) + \int_0^t \mathrm{d}\langle X, Y\rangle(u)$$

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(u)\,\mathrm{d}Y(u) + \int_0^t Y(u)\,\mathrm{d}X(u) + \int_0^t \mathrm{d}\langle X, Y\rangle(u)$$

其中：$\mathrm{d}\langle X, Y\rangle(u) = \mathrm{d}X(u)\,\mathrm{d}Y(u)$，也就是交叉变差项。

伊藤乘法法则的推论

假设 $X(t)$ 是伊藤过程，$G(t)$ 是确定性函数，则有：

$$\mathrm{d}\Big[X(t)G(t)\Big] = X(t)\,\mathrm{d}G(t) + G(t)\,\mathrm{d}X(t)$$

注意：

此处没有了交叉变差项 $\mathrm{d}G(t)\,\mathrm{d}X(t)$，这是因为确定性函数 $G(t)$ 当中不包含随机项，因此将之与随机函数 $X(t)$ 求交叉变差后，$\mathrm{d}G(t)\,\mathrm{d}X(t) = 0$，自然可以将之忽略。

伊藤乘法法则的推论 (cont.)

对 $\mathrm{d}\Big[X(t)G(t)\Big] = X(t)\,\mathrm{d}G(t) + G(t)\,\mathrm{d}X(t)$ 的两侧同时取积分，可得:

$$\int_0^t \mathrm{d}\Big[X(u)G(u)\Big] = \int_0^t X(u)\,\mathrm{d}G(u) + \int_0^t G(u)\,\mathrm{d}X(u)$$

$$X(t)G(t) = X(0)G(0) + \int_0^t X(u)\,\mathrm{d}G(u) + \int_0^t G(u)\,\mathrm{d}X(u)$$

进一步可以得到:

$$\int_0^t X(u)\,\mathrm{d}G(u) = X(u)G(u)\Big|_0^t - \int_0^t G(u)\,\mathrm{d}X(u)$$

$$\int_0^t G(u)\,\mathrm{d}X(u) = X(u)G(u)\Big|_0^t - \int_0^t X(u)\,\mathrm{d}G(u)$$

此处的结果，与普通积分中的分部积分非常相似。

例 6

假设随机过程 $X(t)$ 对应的随机微分方程如下：

$$\mathrm{d}X(t) = -\frac{1}{2}bX(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sigma\ \mathrm{d}W(t)$$

求 $Y(t) = X(t)\exp\left(\frac{1}{2}bt\right)$ 的随机微分方程。

例 6 解答

注意到 $Y(t)$ 是由确定性函数 $G(t)=\exp\left(\frac{1}{2}bt\right)$ 与随机函数 $X(t)$ 所构成的。因此:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}Y(t) &= X(t)\ \mathrm{d}G(t) + G(t)\ \mathrm{d}X(t) \\
&= X(t)\cdot\frac{1}{2}b\exp\left(\frac{1}{2}bt\right)\mathrm{d}t + \exp\left(\frac{1}{2}bt\right)\left[-\frac{1}{2}bX(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sigma\ \mathrm{d}W(t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sigma\exp\left(\frac{1}{2}bt\right)\mathrm{d}W(t)
\end{aligned}
$$

例 7

已知关于 $S(t)$ 的随机微分方程如下：

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{V(t)}S(t)\,\mathrm{d}W_1(t)$$

其中：

$$\mathrm{d}V(t) = [a + bV(t)]\,\mathrm{d}t + \xi V(t)^{\alpha}\,\mathrm{d}W_2(t)$$

并且 $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 均是标准布朗运动，两者的相关系数为 ρ。

求 $f(t, S, V)$ 的随机微分方程。

例 7 解答

根据伊藤乘法法则可得：

$$[\,\mathrm{d}W_1(t)]^2 = [\,\mathrm{d}W_2(t)]^2 = \mathrm{d}t, \quad [\,\mathrm{d}W_1(t)\,\mathrm{d}W_2(t)] = \rho\,\mathrm{d}t$$

由泰勒展开式可得：

$$\mathrm{d}f(t,S,V) = f_t\,\mathrm{d}t + f_S\,\mathrm{d}S + f_V\,\mathrm{d}V + f_{SV}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\left[f_{SS}(\,\mathrm{d}S)^2 + f_{VV}(\,\mathrm{d}V)^2\right]$$

由于：

$$(\,\mathrm{d}S)^2 = VS\,\mathrm{d}t \qquad (\,\mathrm{d}V)^2 = \xi^2 V^{2\alpha}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}S\,\mathrm{d}V = \sqrt{V}S\xi V^{\alpha}\rho\,\mathrm{d}t = \rho\xi S V^{\alpha+0.5}\,\mathrm{d}t$$

例 7 解答 (cont.)

因此：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f = {} & f_t\,\mathrm{d}t + f_S\left(\mu S\,\mathrm{d}t + \sqrt{V}S\,\mathrm{d}W_1\right) + f_V[(a+bV)\,\mathrm{d}t + \xi V^{\alpha}\,\mathrm{d}W_2] \\
& + f_{SV}\left(\rho\xi S V^{\alpha+0.5}\,\mathrm{d}t\right) + \frac{1}{2}\left(f_{SS}VS\,\mathrm{d}t + f_{VV}\xi^2 V^{2\alpha}\,\mathrm{d}t\right) \\
= {} & \left[f_t + \mu S f_S + (a+bV)f_V + \rho\xi S V^{\alpha+0.5} f_{SV} + \frac{1}{2}SVf_{SS} + \frac{1}{2}\xi^2 V^{2\alpha} f_{VV}\right]\,\mathrm{d}t \\
& + \sqrt{V}Sf_S\,\mathrm{d}W_1 + \xi V^{\alpha} f_V\,\mathrm{d}W_2
\end{aligned}
$$

说明:

上面的随机过程包含两个部分：一个是资产价格的过程，另一个是相应波动率的过程。该模型也因此被称为随机波动率模型（stochastic volatility model），由史蒂文·赫斯顿（Steven Heston）于 1993 年提出。

例 8

已知 $W(t)$ 是标准布朗运动，证明：

$$\int_0^t W^2(s)\,\mathrm{d}W(s) = \frac{1}{3}W^3(t) - \int_0^t W(s)\,\mathrm{d}s$$

思路

以 $\frac{1}{3}W^3(t)$ 为突破口，利用伊藤引理。

例 8 解答

假设 $X(t)=\dfrac{1}{3}W^3(t)$，根据伊藤引理可得：

$$\mathrm{d}X = X_t\,\mathrm{d}t + X_W\,\mathrm{d}W + \frac{1}{2}X_{WW}(\,\mathrm{d}W)^2 = 0 + W^2\,\mathrm{d}W + W\,\mathrm{d}t$$

因此：

$$\mathrm{d}X(t) = W^2(t)\,\mathrm{d}W(t) + W(t)\,\mathrm{d}t$$

对上式的两端取积分，可得：

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathrm{d}X(s) &= \int_0^t W^2(s)\,\mathrm{d}W(s) + \int_0^t W(s)\,\mathrm{d}s \\
\int_0^t W^2(s)\,\mathrm{d}W(s) &= \int_0^t \mathrm{d}X(s) - \int_0^t W(s)\,\mathrm{d}s \\
&= X(t) - X(0) - \int_0^t W(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{3}W^3(t) - \frac{1}{3}W^3(0) - \int_0^t W(s)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

例 8 解答 (cont.)

因此：

$$\int_0^t W^2(s)\,\mathrm{d}W(s) = \frac{1}{3}W^3(t) - \int_0^t W(s)\,\mathrm{d}s$$

注意：

对于确定性函数 $f(t)$，若 $f(0)=0$，则其积分的结果如下：

$$\int_0^t f^2(s)\,\mathrm{d}f(s) = \frac{1}{3}f^3(s)\Big|_0^t = \frac{1}{3}f^3(t) - \frac{1}{3}f^3(0) = \frac{1}{3}f^3(t)$$

而本题对于布朗运动所做的随机积分，结果中却多出一项，两者的差异源自布朗运动的二次变差不为零。