第四章 泊松过程

随机过程及其在金融中的应用

中国人民大学出版社

本章内容

1. 指数分布
   - 指数分布的基本概念
   - 指数分布的矩
   - 指数分布的性质
2. 泊松分布
   - 泊松分布的概念
   - 泊松分布的性质
3. 泊松过程
   - 泊松过程的定义
   - 泊松过程的性质
   - 泊松过程的条件分布
   - 泊松过程的变换
4. 泊松过程的拓展
   - 非齐次泊松过程
   - 复合泊松过程

引言

泊松过程（Poisson process）是一类重要的时间连续、状态离散的随机过程。作为以法国数学家泊松（Simeon Denis Poisson）命名的随机过程，这是一类非常特殊的计数过程（counting process），由于其良好的性质，在很多学科领域均有应用，比如：信号处理、金融工程、风险管理、运筹学等。

指数分布的基本概念

若随机变量 T 满足

$$\mathbb{P}(T \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \forall t \ge 0$$

则称其服从速率为 λ 的指数分布（exponential distribution），记作 $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$。

记 $F(t) = \mathbb{P}(T \le t)$ 为分布函数，则相应的密度函数如下：

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

指数分布的矩

1. 一阶矩（期望）:

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty t \cdot f_T(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^\infty t \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

2. 二阶矩:

$$\mathbb{E}(T^2) = \int_0^\infty t^2 \cdot f_T(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^\infty t^2 \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda^2}$$

3. 方差:

$$\mathrm{Var}(T) = \mathbb{E}(T^2) - [\mathbb{E}(T)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

指数分布的矩 (cont.)

对于 $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$，其均值为 $1/\lambda$，方差为 $1/\lambda^2$。

若 $S = \lambda T$，则 $S \sim \mathcal{E}(1)$，其均值为 1，方差也为 1。

简要证明:

由于 $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$，$S \sim \mathcal{E}(1)$，假设 $Z = S/\lambda$，则对 $\forall\, t$，有:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq t) &= \mathbb{P}(S/\lambda \leq t) = \mathbb{P}(S \leq \lambda t) \\ &= 1 - \exp\left[-1 \cdot (\lambda t)\right] = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad T = Z = \frac{S}{\lambda} \\ &= \mathbb{P}(T \leq t) \end{aligned}$$

指数分布的无记忆性

假设 T 服从速率为 λ 的指数分布，则：

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s)$$

简要证明：

由于：

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(T > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

因此：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > t + s | T > t) &= \frac{\mathbb{P}(T > t + s,\ T > t)}{\mathbb{P}(T > t)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(T > t + s)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda s} = \mathbb{P}(T > s) \end{aligned}$$

指数分布的无记忆性 (cont.)

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s)$$

如果将 T 看作一个仪器的寿命，那么上式说明了，在该仪器已经正常工作 t 小时的前提下，其继续正常工作 s 小时的（条件）概率，与其出厂后正常工作 s 小时的（无条件）概率是完全相等的。也就是说，仪器之前正常工作的 t 小时，不会对其未来正常工作的时间产生任何影响，该特征就是无记忆性（lack of memory）。

注意:

指数分布是唯一具有无记忆性的连续型概率分布。

举例

假设顾客在银行的时间服从均值为 10 分钟的指数分布，问：

1. 一个顾客在此银行用时超过 15 分钟的概率是多少?
2. 假定一个顾客 10 分钟后仍在银行，则她在银行用时超过 15 分钟的概率是多少?

注意：

此处 $\lambda = 1/10$。

解答

如果以 X 表示顾客在这个银行的时间，则问题 (1) 中的概率如下：

$$\mathbb{P}(X>15)=\mathrm{e}^{-\lambda t}=\exp\left(-\frac{1}{10}\times 15\right)=0.22$$

问题 (2) 需要求一个已经在银行用时 10 分钟的顾客至少再用时 5 分钟的概率。根据指数分布的无记忆性，该概率与之前的用时无关，且等于一个刚进入银行的顾客停留至少 5 分钟的概率，即要求的概率如下：

$$\mathbb{P}(X>5)=\mathrm{e}^{-\lambda t}=\exp\left(-\frac{1}{10}\times 5\right)=0.604$$

定理 1

假设 T_i 服从速率为 λ_i 的指数分布 $(i = 1, 2, \ldots, n)$，且 T_i 之间相互独立。则：

$$\min(T_1, T_2, \ldots, T_n) \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$$

简单证明

由不等式的性质，可得：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\min(T_1, T_2, \ldots, T_n) > t] &= \mathbb{P}(T_1 > t, T_2 > t, \ldots, T_n > t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i > t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda_i t} \\
&= \exp\left[-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)t\right]
\end{aligned}$$

即：

$$\min(T_1, T_2, \ldots, T_n) \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$$

定理 2

假设 $T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$，$T_2 \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$，且两者相互独立，则：

$$\mathbb{E}\left[\max(T_1, T_2)\right] = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

简单证明

由下列恒等式：

$$\max(T_1, T_2) = T_1 + T_2 - \min(T_1, T_2)$$

根据期望的线性性质，可得：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\max(T_1, T_2)] &= \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T_2) - \mathbb{E}[\min(T_1, T_2)] \\ &= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}\end{aligned}$$

定理 3：指数分布的排序

假设 $T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$，$T_2 \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$，且两者相互独立，则：

$$\mathbb{P}(T_1 < T_2) = \mathbb{P}[T_1 = \min(T_1, T_2)] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

简单证明

利用卷积公式，证明如下：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1 < T_2) &= \int_0^\infty f_{T_1}(u)\mathbb{P}(u < T_2)\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 u}\mathrm{e}^{-\lambda_2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty \lambda_1 \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)u}\,\mathrm{d}u = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\end{aligned}$$

推论

T_i 是 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ 中最小随机变量的概率为：

$$\mathbb{P}[T_i = \min(T_1, T_2, \ldots, T_n)] = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

举例 1

假设小明到达邮局时，邮局的两位办事员都在忙，并且没有人在排队等待。只要有一位办事员有空，就可以为小明提供服务。假设办事员 i 的服务时间服从速率为 λ_i 的指数分布 $(i=1,2)$，求小明待在邮局的期望时间。

思路:

小明待在邮局的时间分成两段：一段是等待两位办事员中的一位忙完所需要的时间，记作 W；另一段是其中一位办事员为小明提供服务所需的时间，记作 S。于是问题就转化成求 $\mathbb{E}(W)+\mathbb{E}(S)$。进一步假设两位办事员完成当前工作所需的时间分别为 T_1 和 T_2。

举例 1(cont.)

首先，小明等待的时间 $\mathbb{E}(W)$ 应当为 T_1 和 T_2 之中的较小值，于是有：

$$\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}[\min(T_1, T_2)] = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

接下来，如果是办事员 1 先结束当前业务，其对应的概率为：

$$\mathbb{P}(T_1 < T_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

在此情形下，由办事员 1 为小明提供服务，相应的服务时间期望值为 $1/\lambda_1$；类似地，如果是办事员 2 先结束当前服务，其对应的概率为：

$$\mathbb{P}(T_1 > T_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

在此情形下，由办事员 2 为小明提供服务，相应的服务时间期望值为 $1/\lambda_2$。

举例 1(cont.)

将两种情形综合起来，可得：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}(T_1)\cdot\mathbb{P}(T_1 < T_2) + \mathbb{E}(T_2)\cdot\mathbb{P}(T_1 > T_2)\\ &= \frac{1}{\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\\ &= \frac{2}{\lambda_1+\lambda_2}\end{aligned}$$

最终可得：

$$\mathbb{E}(W) + \mathbb{E}(S) = \frac{3}{\lambda_1+\lambda_2}$$

举例 2

C 进入一家邮局，发现 A 和 B 分别在接受办事员 1 和办事员 2 的服务。已知两位办事员服务的时间服从速率为 λ_i 的指数分布（$i = 1, 2$）。

问：C 最后一个离开邮局的概率是多少?

举例 2：方法一

假设 A 和 B 二人当中，A 先办完事情离开，相应的概率为 $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$。此时只剩下 C 和 B 在邮局办理业务。根据指数分布的无记忆性，接下来 B 先办完事情离开的概率为 $\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$。

类似地，B 先办完事情离开的概率为 $\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$。此时只剩下 A 和 C 在邮局办理业务。根据指数分布的无记忆性，接下来 A 先办完事情离开的概率为 $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$。

因此，将两种情形下的概率相加，最终可得：

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}$$

举例 2：方法二

若 A 是最后一个离开的，则第一步与 B 相比，B 先完成服务；第二步与 C 相比，C 先完成服务，因此 A 最后一个离开邮局的概率为：

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2$$

类似地，B 最后一个离开邮局的概率为：

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2$$

于是，根据概率的完备性，C 是最后一个离开邮局的概率为：

$$1-\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2=\frac{2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}$$

定理 4

假设 $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$，且 $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ 相互独立。则这些随机变量之和 T_n（$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n$）的密度函数如下：

$$f_{T_n}(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad t \geq 0$$

即 T_n 服从 Gamma 分布，记作 $T_n \sim \Gamma(n, 1/\lambda)$；另外，$T_n$ 还服从埃尔朗（Erlang）分布，记作 $T_n \sim \mathrm{Erlang}(n, \lambda)$。

泊松分布的概念

若随机变量 X 满足：

$$\mathbb{P}(X=n)=\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!},\quad n=0,1,2,\ldots$$

则称 X 服从均值为 λ 的泊松分布（Poisson distribution），记作：$X\sim\mathrm{Poi}(\lambda)$。

泊松分布的性质

对于泊松分布 $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$，其各阶矩具有如下性质：

1. $\mathbb{E}(X) = \lambda$；
2. $\mathbb{E}(X^2) = \lambda + \lambda^2$；
3. $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \lambda$。

定理

- 若 $X_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda_i)$，$i = 1, 2, \ldots, n$，且 X_i 相互独立，则：

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Poi}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

- 若 $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$，则下式成立：

$$\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-k+1)] = \lambda^k$$

- 泊松分布与二项分布的关系。当 $n \to \infty$ 时，二项分布将趋近于泊松分布，即：

$$B(n, \lambda/n) \to \mathrm{Poi}(\lambda)$$

举例 3

某保险公司的人寿险种有 1000 人投保，每个人在一年内的死亡概率为 0.5%，并且每个人在一年内死亡与否是相互独立的。求在未来一年中，这 1000 人当中死亡人数为 10 人的概率。

该问题可看作一个成功概率 $p = 0.5\%$，试验次数 $N = 1000$ 次，其中成功次数 $k = 10$ 次的二项分布。使用二项分布中的概率计算公式，可得：

$$\binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \binom{1000}{10} \times 0.005^{10} \times (1-0.005)^{1000-10} = 1.7996\%$$

如果使用泊松分布进行近似计算，则有 $\lambda = Np = 1000 \times 0.5\% = 5$，于是相应的概率如下：

$$\mathbb{P}(k=10) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{5^{10}}{10!} \mathrm{e}^{-5} = 1.8133\%$$

泊松过程的第一种定义方式

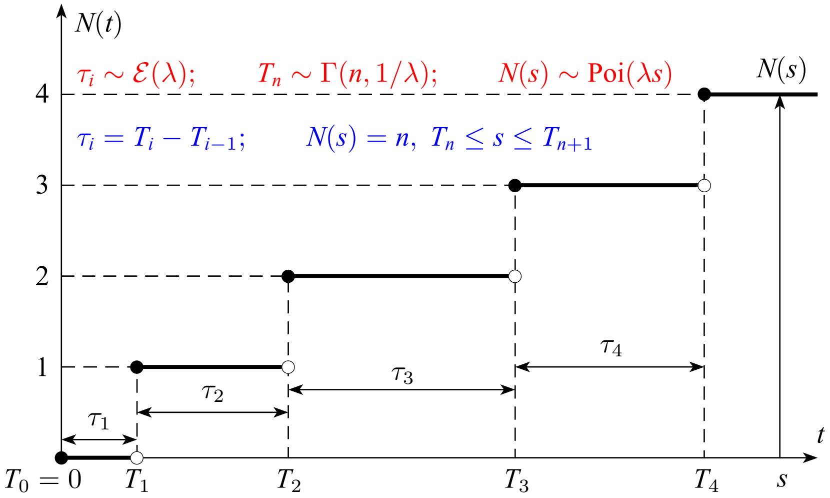
假设 $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$，且 $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ 相互独立。$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n$，$n \geq 1$，$T_0 = 0$。定义 $N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$，$N(t)$ 称为泊松过程，并且服从均值为 λt 的泊松分布，即：

$$\mathbb{P}[N(t) = n] = \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

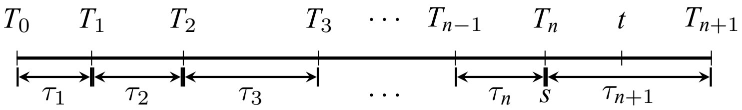
解读：

这里的 τ_n 可理解为到达一个商店的第 n 个和第 $(n-1)$ 个顾客的时间间隔；T_n 可理解为第 n 个顾客到达的时刻，则 $N(t)$ 表示在时刻 t 之前到达的顾客数量。因此，$\mathbb{P}[N(t) = n]$ 可理解为在时刻 t 之前到达的顾客数量是 n 的概率。

相关分布关系的图示


$N(t)$
$\tau_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$;
$T_n \sim \Gamma(n, 1/\lambda)$;
$N(s) \sim \mathrm{Poi}(\lambda s)$
$N(s)$
$\tau_i = T_i - T_{i-1}$;
$N(s) = n,\ T_n \leq s \leq T_{n+1}$
4
3
2
1
τ_1
τ_2
τ_3
τ_4
t
$T_0 = 0$
T_1
T_2
T_3
T_4
s

两组等价关系



1. “t 时刻的计数不小于 n”，等价于“计数为 n 的时刻不大于 t 时刻”，即：
$$\{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\}$$
2. “t 时刻的计数为 n”，等价于“t 时刻介于计数为 n 和 $(n+1)$ 的时刻之间”，即：
$$\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

泊松过程的第二种定义方式

已知 t 时刻前的计数为 n，即 $N(t)=n$，假设在很短的时间段 $[t,t+\Delta t]$ 内有以下概率：

$$\mathbb{P}[N(t+\Delta t)=n]=1-\lambda\Delta t+O(\Delta t)$$
$$\mathbb{P}[N(t+\Delta t)=n+1]=\lambda\Delta t+O(\Delta t)$$
$$\mathbb{P}[N(t+\Delta t)=n+2]=O(\Delta t)$$

则称 $N(t)$ 是速率/强度为 λ 的泊松过程，即 $N(t)\sim\mathrm{Poi}(\lambda t)$。

泊松过程的性质

1. $N(0)=0$;
2. $N(t+s)-N(s)\sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$, $N(t+0)-N(0)=N(t)\sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$
   即：长度相等的时间段内，事件发生个数的概率分布是相同的，也被称为平稳增量（stationary increment）;
3. $N(t)$ 具有独立增量（independent increment），即对于 $t_0<t_1<\cdots<t_n$，有：

$$N(t_1)-N(t_0),\ N(t_2)-N(t_1),\ \ldots,\ N(t_n)-N(t_{n-1})\ \text{均独立。}$$

平稳的含义

平稳（stationary）可以细分为严平稳（strictly stationary）和宽平稳（weakly stationary）两大类。

所谓严平稳，是指一个随机过程的联合分布函数不随时间而发生改变；而宽平稳也称作协方差平稳（covariance stationary），是指一个过程的协方差不随时间而发生改变，即期望、方差和协方差不变。

根据这一定义，泊松过程的增量明显满足宽平稳的基本条件。

引理

- $N(t+s)-N(s)$，$t\geq 0$ 是一个速率为 λ 的泊松过程，且与 $N(r)$，$0\leq r\leq s$ 相互独立。
- 若对任何 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n, k_i$ 取值为正整数，且序列不减，则：

$$\mathbb{P}\left[N(t_n)=k_n|N(t_{n-1})=k_{n-1},\ldots,N(t_1)=k_1\right]$$
$$=\mathbb{P}\left[N(t_n)=k_n|N(t_{n-1})=k_{n-1}\right]$$

举例 4

假设一个计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是速率为 2 的泊松过程，求 $\mathbb{P}[N(20) - N(18) = 2]$。

解答

根据泊松过程的增量平稳性，可进行如下简化：

$$\mathbb{P}[N(20) - N(18) = 2] = \mathbb{P}[N(2) = 2]$$

于是此处的 $t = 2, n = 2$。结合速率 $\lambda = 2$，可得：

$$\mathbb{P}[N(t) = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

$$\mathbb{P}[N(2) = 2] = \frac{(2 \times 2)^2}{2!}\mathrm{e}^{-2\times 2} = 8\mathrm{e}^{-4} = 14.65\%$$

最终可得：

$$\mathbb{P}[N(20) - N(18) = 2] = 14.65\%$$

泊松过程的条件分布

关于泊松过程的条件分布问题，我们主要关注两点：

1. 到达时刻的条件分布；
2. 到达次数的条件分布。

到达时刻的条件分布举例

用 $N(t)$ 表示在 t 分钟内到达商店的顾客数量。$N(t)$ 满足速率为 λ 的泊松分布，即 $N(t) \sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$。目前已知 $N(t) = 1$，假设 T_1 是第一位顾客到达的时刻，显然 $T_1 \leq s$，$s \in (0, t)$。

求到达时刻的条件分布。

思路：

问题转化为求解 $\mathbb{P}[T_1 \leq s | N(t) = 1]$。

由于 $\{T_1 \le s\}$ 等价于 $\{N(s) \ge 1\}$，因此：

$$\mathbb{P}[T_1 \le s | N(t) = 1] = \mathbb{P}[N(s) \ge 1 | N(t) = 1]$$

需要注意的是，由于 $s \le t$，在 $N(t) = 1$ 的前提条件下，$N(s)$ 不可能大于 1，因此：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[T_1 \le s | N(t) = 1] &= \mathbb{P}[N(s) = 1 | N(t) = 1] \\
&= \frac{\mathbb{P}[N(s) = 1, N(t) = 1]}{\mathbb{P}[N(t) = 1]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0]}{\mathbb{P}[N(t) = 1]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[N(s) = 1] \cdot \mathbb{P}[N(t - s) = 0]}{\mathbb{P}[N(t) = 1]} \\
&= \frac{\lambda s \mathrm{e}^{-\lambda s} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda (t-s)}}{\lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}
\end{aligned}$$

到达时刻的条件分布结论

最终得到的条件分布函数和条件密度函数如下：

1. 条件概率分布函数：

$$F(s) = \mathbb{P}[T_1 \leq s | N(t) = 1] = \mathbb{P}[N(s) \geq 1 | N(t) = 1] = \frac{s}{t}$$

2. 条件概率密度函数：

$$f(s) = \frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{t}, \qquad s \in (0, t)$$

因此在 t 时刻之前有一个顾客到达的条件下，其到达的时刻 T_1 服从 $[0, t]$ 上的均匀分布（uniform distribution）。

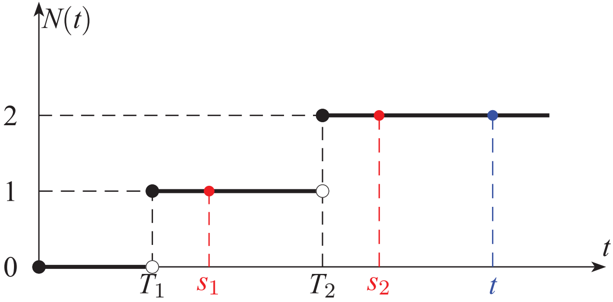
问题引申

在 $N(t)=2$ 的条件下，到达时刻的条件分布及其概率密度分别为多少?

思路:

取 $s_1<s_2$，使得 $s_1\geq T_1$，$s_2\geq T_2$，构造条件分布 $F(s_1,s_2)$，表达式如下:

$$F(s_1,s_2)=\mathbb{P}\left(T_1\leq s_1,T_2\leq s_2|N(t)=2\right)$$



推导过程

$$
\begin{aligned}
F(s_1, s_2) &= \mathbb{P}\left[T_1 \le s_1, T_2 \le s_2 | N(t) = 2\right] \\
&= \mathbb{P}\left[N(s_1) = 1, N(s_2) = 2 | N(t) = 2\right] \\
&= \frac{\mathbb{P}[N(s_1) = 1, N(s_2) = 2, N(t) = 2]}{\mathbb{P}[N(t) = 2]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[N(s_1) = 1] \cdot \mathbb{P}[N(s_2) - N(s_1) = 1] \cdot \mathbb{P}[N(t) - N(s_2) = 0]}{\mathbb{P}[N(t) = 2]}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathbb{P}[N(s_1) = 1] \cdot \mathbb{P}[N(s_2 - s_1) = 1] \cdot \mathbb{P}[N(t - s_2) = 0]}{\mathbb{P}[N(t) = 2]} \\
&= \frac{\lambda s_1 \mathrm{e}^{-\lambda s_1} \cdot \lambda(s_2 - s_1)\mathrm{e}^{-\lambda(s_2 - s_1)} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda(t - s_2)}}{\frac{1}{2}(\lambda t)^2 \mathrm{e}^{-\lambda t}} \\
&= \frac{2s_1(s_2 - s_1)}{t^2} = \frac{2s_1 s_2 - 2s_1^2}{t^2}
\end{aligned}
$$

条件分布和条件概率密度

条件分布：

$$F(s_1, s_2) = \frac{2s_1s_2 - 2s_1^2}{t^2}$$

条件概率密度：

$$f(s_1, s_2) = \frac{\partial^2 F(s_1s_2)}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{2}{t^2}$$

按照类似的方法可以得到在条件 $N(t) = n > 0$ 下，$(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ 的联合密度函数如下：

$$f(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \frac{n!}{t^n}$$

到达次数的条件分布

如果 $s < t$，且 $0 \leq m \leq n$，那么

$$\mathbb{P}[N(s) = m | N(t) = n] = \binom{n}{m} \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}$$

即在给定 $N(t) = n$ 时，$N(s)$ 的条件分布是二项分布 $B(n, s/t)$。

到达次数的条件分布 (cont.)

由于 $s<t$，且 $0\le m\le n$，因此：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[N(s)=m|N(t)=n] &= \frac{\mathbb{P}[N(s)=m, N(t)=n]}{\mathbb{P}[N(t)=n]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[N(s)=m, N(t-s)=n-m]}{\mathbb{P}[N(t)=n]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[N(s)=m]\cdot\mathbb{P}[N(t-s)=n-m]}{\mathbb{P}[N(t)=n]} \\
&= \frac{\frac{(\lambda s)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda s}\cdot\frac{[\lambda(t-s)]^{n-m}}{(n-m)!}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}} \\
&= \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{s^m\cdot(t-s)^{n-m}}{t^n} \\
&= \binom{n}{m}\cdot\frac{s^m\cdot(t-s)^{n-m}}{t^m\cdot t^{n-m}} = \binom{n}{m}\cdot\left(\frac{s}{t}\right)^m\left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-m}
\end{aligned}
$$

到达次数的条件分布 (cont.)

$$\mathbb{P}[N(s)=m|N(t)=n]=\binom{n}{m}\cdot\left(\frac{s}{t}\right)^m\left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-m}$$

根据最终的结果不难看出：到达次数的条件分布服从 n 次试验中成功次数为 m、成功概率为 s/t 的二项分布，即 $B\left(n,s/t\right)$。

注意

如果将条件概率公式当中的条件和结果颠倒，得到的结果是泊松分布，具体计算过程如下：

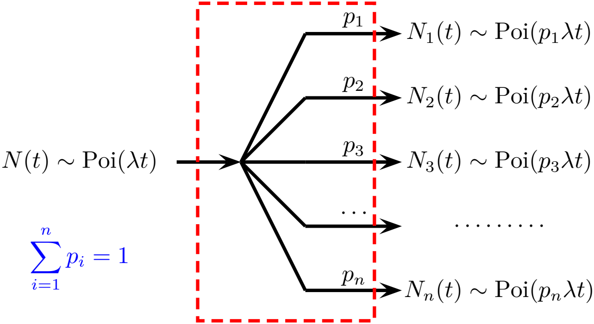
$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[N(t)=n|N(s)=m] &= \frac{\mathbb{P}[N(t)=n, N(s)=m]}{\mathbb{P}[N(s)=m]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[N(s)=m]\cdot\mathbb{P}[N(t-s)=n-m]}{\mathbb{P}[N(s)=m]} \\
&= \mathbb{P}[N(t-s)=n-m] \\
&= \frac{[\lambda(t-s)]^{n-m}}{(n-m)!}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}
\end{aligned}
$$

泊松过程的变换

泊松过程的变换分为两大类：一类是稀释（thinning），即某一个泊松过程可以拆分成若干个独立的泊松过程；另一类是叠加(superposition)，即若干个独立的泊松过程可以合成一个泊松过程。

泊松过程的稀释

设 $N(t)$ 是速率为 λ 的泊松过程［即 $N(t) \sim \text{Poi}(\lambda t)$］，表示到 t 时刻记录的事件个数。假设其中每个事件被记录的概率为 p，且事件是否被记录是独立的。若被记录的事件记为 $N_1(t)$，$t \geq 0$，则：$N_1(t) \sim \text{Poi}(p\lambda t)$



推导过程

根据全概率公式，可得：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N_1(t)=n] &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}[N_1(t)=n|N(t)=m+n]\cdot\mathbb{P}[N(t)=m+n] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} p^n(1-p)^m \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{m+n}}{(m+n)!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!\,n!} p^n(1-p)^m \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{m+n}}{(m+n)!}
\end{aligned}$$

$\mathbb{P}[N_1(t)=n|N(t)=m+n]$ 表示 $(m+n)$ 个事件当中，被记录的事件有 n 个的概率。由于事件是否被记录是独立的，因此这里可看作成功概率为 p 的二项分布，相应的概率就是：

$$\mathbb{P}[N_1(t)=n|N(t)=m+n] = \binom{m+n}{n} p^n(1-p)^m$$

推导过程 (cont.)

根据 $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$，可得:

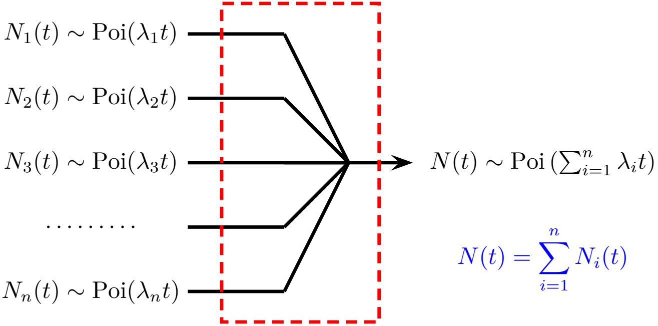
$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[N_1(t) = n] &= \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-p)^m (\lambda t)^m}{m!} \cdot \frac{p^n (\lambda t)^n}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(p\lambda t)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda t]^m}{m!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(p\lambda t)^n}{n!} \cdot \mathrm{e}^{(1-p)\lambda t} = \mathrm{e}^{-p\lambda t} \frac{(p\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

因此:

$$
N_1(t) \sim \mathrm{Poi}(p\lambda t)
$$

泊松过程的叠加

假设 $N_1(t), \ldots, N_k(t)$ 是独立的泊松过程，速率分别为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$，则 $N_1(t) + \cdots + N_k(t)$ 是一个泊松过程，并且速率为 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$。



泊松过程的拓展

前面所介绍的泊松过程，从严格意义上讲是一种特殊的齐次泊松过程。在现实应用中需要对其进行一定的拓展。具有代表性的拓展有两类：

- 非齐次泊松过程；
- 复合泊松过程。

非齐次泊松过程

满足以下条件的计数过程 $\{N(t):t\geq 0\}$ 就是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程（nonhomogeneous Poisson process)。

1. $N(0)=0$;
2. $N(t)$ 具有独立增量性;
3. $\mathbb{E}[N(r)-N(s)]=\int_s^r \lambda(t)\,\mathrm{d}t, \quad N(r)-N(s)\sim \mathrm{Poi}\left(\int_s^r \lambda(t)\,\mathrm{d}t\right)$。

注意:

此时的时间间隔 $\tau_1,\tau_2,\ldots$ 不再服从指数分布，并且不满足独立性条件。当 $\lambda(t)=\lambda$ 时，强度/速率不随时间而发生改变，此时便是我们所熟悉的 (齐次）泊松过程。

非齐次泊松过程的性质

非齐次泊松过程在 t 时刻计数为 n 的概率如下:

$$\mathbb{P}[N(t) = n] = p_n(t) = \frac{[m(0,t)]^n}{n!} \exp\left[-m(0,t)\right]$$

其中:

$$m(s,t) = \int_s^t \lambda(t')\, \mathrm{d}t'$$

非齐次泊松过程的期望和方差:

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathrm{Var}[N(t)] = m(0,t) = \int_0^t \lambda(t')\, \mathrm{d}t'$$

举例 5

设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个强度函数为 $\lambda(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos \omega t)$ 的非齐次泊松过程，其中 $\omega \neq 0$。

求 $\mathbb{E}[X(t)]$ 和 $\mathrm{Var}[X(t)]$。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t)] = \mathrm{Var}[X(t)] = \int_0^t \lambda(t')\, \mathrm{d}t' &= \int_0^t \frac{1}{2}(1 + \cos \omega t')\, \mathrm{d}t' \\
&= \frac{1}{2}\left(t' + \frac{1}{\omega}\sin \omega t'\right)\Bigg|_{t'=0}^{t'=t} \\
&= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{\omega}\sin \omega t\right)
\end{aligned}
$$

举例 6

设某路公共汽车从早晨 5 时到晚上 21 时有车发出，乘客流量如下: 5 时按平均乘客为 200 人/小时计算；5 时至 8 时乘客平均到达率线性增加，8 时到达率为 1400 人/小时；8 时至 18 时保持平均到达率不变；18 时至 21 时到达率以 1400 人/小时线性下降，到 21 时为 200 人/小时。假定乘客数在不重叠的时间间隔内是相互独立的。

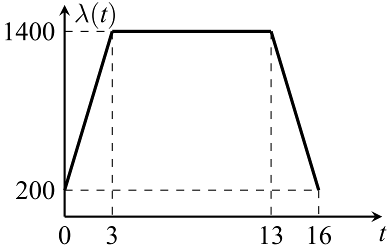
求 12 时至 14 时有 2000 人来站乘车的概率，并求出这两个小时内来站乘车的人数的期望值。

举例 6(cont.)

思路:

将刚开始的早晨 5 时记为时刻 $t=0$，其他的时间以此类推，最终 21 时记为时刻 $t=16$。由此可以得到乘客到达率的函数 $\lambda(t)$ 如下:

$$\lambda(t)=\begin{cases}200+400t, & t\in[0,3]\\ 1400, & t\in[3,13]\\ 1400-400(t-13), & t\in[13,16]\end{cases}$$



举例 6(cont.)

所要求的时间段应当为 $t \in [7,9]$，相应地：

$$m(7,9) = \int_7^9 \lambda(t)\,\mathrm{d}t = \int_7^9 1400\,\mathrm{d}t = 1400 \times (9-7) = 2800(\text{人})$$

在 12 时到 14 时有 2000 名乘客到达的概率为：

$$\mathbb{P}[N(9) - N(7) = 2000] = \mathrm{e}^{-m(7,9)} \frac{[m(7,9)]^n}{n!} = \mathrm{e}^{-2800} \frac{2800^{2000}}{2000!}$$

相应地，这段时间内乘客数的期望值即为：

$$m(7,9) = 2800(\text{人})$$

复合泊松过程

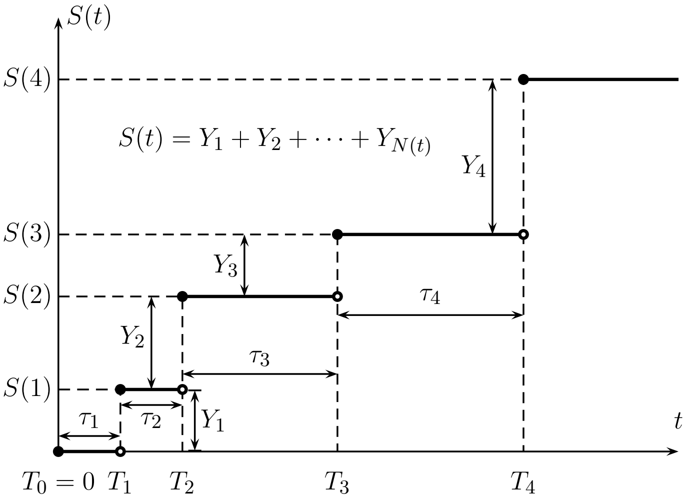
满足以下条件的 $\{S(t):t\geq 0\}$ 就是复合泊松过程（compound Poisson process）:

$$S(t)=Y_1+Y_2+\cdots+Y_{N(t)}=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$$

其中，$\{N(t):t\geq 0\}$ 是比率为 λ 的泊松过程；$\{Y_i:i\geq 1\}$ 是独立同分布的随机变量，且 $\{Y_i\}$ 的分布函数与泊松过程 $\{N(t):t\geq 0\}$ 是独立的。

复合泊松过程与泊松过程

先前的泊松过程可看作复合泊松过程的特殊情形（此时 $Y_i = 1$）



复合泊松过程举例 1

假设 $N(t)$ 是在时间段 $[0,t]$ 内到达某商店的人数，并且 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是泊松过程。假设 Y_k 是到达商店的顾客 k 消费的金额，如果假设 $\{Y_k\}$，$k=1,2,\ldots,N(t)$ 是独立同分布的随机变量序列，并且与 $\{N(t)\}$ 独立，那么商店在时间段 $[0,t]$ 内的总营业额 $X(t)$ 就是：

$$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \qquad t\geq 0$$

这里的 $\{X(t),\ t\geq 0\}$ 就是一个复合泊松过程。

复合泊松过程举例 2

在股票市场上，假设 $N(t)$ 是某股票在时间段 $[0,t]$ 内跳空上涨或下跌的次数，并且 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是泊松过程。假设 Y_k 是股价第 k 次跳跃的幅度，股价的跳跃幅度 $\{Y_k\}$，$k = 1, 2, \ldots, N(t)$ 是独立同分布的随机变量序列，并且与 $\{N(t)\}$ 独立。

那么在时间段 $[0,t]$ 内，该股票价格总的跳跃幅度 $X(t)$ 就是：

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \qquad t \geq 0$$

这里的 $\{X(t),\ t \geq 0\}$ 也是一个复合泊松过程。

随机和

定理:

假设 $Y_1, Y_2, \ldots$ 表示独立同分布的随机变量，并且均值为 μ、方差为 σ^2，已知 $S(t) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{N(t)}$，其中 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是速率为 λ 的泊松过程。则 $S(t)$ 的均值和方差分别如下:

$$\mathbb{E}[S(t)] = \mu\lambda t, \quad \mathrm{Var}[S(t)] = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2)$$

随机和的期望

由于 $\{N(t)\}$ 是速率为 λ 的泊松过程，因此：

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathrm{Var}[N(t)] = \lambda t$$

首先求出 $\mathbb{E}[S(t)]$，具体如下：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[S(t)|N(t)=n] \cdot \mathbb{P}[N(t)=n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\mu \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t} \\
&= \mu\lambda t \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \mu\lambda t \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\
&= \mu\lambda t \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = \mu\lambda t
\end{aligned}$$

随机和的二阶矩

接下来求出 $\mathbb{E}[S^2(t)]$，具体如下：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^2(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[S^2(t)|N(t)=n] \cdot \mathbb{P}[N(t)=n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2\mu^2 + n\sigma^2) \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t} \\
&= \mu^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t} + \sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t} \\
&= \mu^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \mathbb{P}[N(t)=n] + \sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}[N(t)=n] \\
&= \mu^2 \mathbb{E}[N^2(t)] + \sigma^2 \mathbb{E}[N(t)]
\end{aligned}$$

随机和的方差

最后求出 $\mathrm{Var}[S(t)]$：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S(t)] &= \mathbb{E}\left[S^2(t)\right] - [\mathbb{E}S(t)]^2 \\
&= \mu^2\mathbb{E}\left[N^2(t)\right] + \sigma^2\mathbb{E}[N(t)] - \mu^2\{\mathbb{E}[N(t)]\}^2 \\
&= \sigma^2\mathbb{E}[N(t)] + \mu^2\left\{\mathbb{E}\left[N^2(t)\right] - \{\mathbb{E}[N(t)]\}^2\right\} \\
&= \sigma^2\mathbb{E}[N(t)] + \mu^2\mathrm{Var}[N(t)] \\
&= \lambda t(\sigma^2 + \mu^2)
\end{aligned}
$$