北京四中高中教学讲义
代数（第二册）

北京四中教学处 编

1996 年 1 月

出版说明

当前，中学教学改革已经深入到课程设置和教材改革领域。我校数学教材的改革，以发展学生的数学思维为目标，以不改变现行教学大纲规定的教学闪容为前提，试图通过对知识结构及其展开方式的统盘考虑，实现整体优化。经多年反复探索、实验，编成了这套尝试融教材与教法、学法于一体的《北京四中高中教学讲义》。

这套讲义的产生可以上溯到 1982 年。从那时起，为了发展学生智能，提高数学素养，我校部分同志就开始对高中数学教学进行以教材改革为龙头，以学法教育为重点的"整体优化实验研究"。正是在这项研究的基础上，逐步形成了这套讲义编写的特色和风格。这就是:

1. 为形成学生良好的认知结构，讲义的知识结构力求脉络分明，使学生能从整体上理解教材。

2. 为了提高学生的数学素养，本讲义把数学思想的阐述放到了重要位置。数学思想既包含对数学知识点（概念、定理、公式、法则和方法）的本质认识，也包含对问题解决的数学基本观点。它是数学中的精华，对形成和发展学生的数学能力具有特别重要的意义。为此，讲义注重展现思维过程（概念、法则被概括的过程，教学关系被抽象的过程，解题思路探索形成的过程）。在过程中认识知识点的本质，在过程中总结思维规律，在过程中揭示数学思想的指导作用。力图使学生能深刻领悟教材。

3. "再创造，再发现"在数学学习中对培养创造维能力至关重要，为引导学生积极参与"发现"，讲义在设计上做了某些尝试。

4. 例题和习题的选配，力求典型、适量、成龙配套。习题分为 A 组（基本题）、B 组（提高题）和 C 组（研究题）。教师可根据学生不同的学习水平适当选用。

5. 教材是学生学习的依据。应有利于培养自学能力，本书注重启迪学法，并在书末附有全部习题的答案或提示，以供学习时参考。

这套讲义在研究、试教和成书的过程中，始终得到了北京市和西城区教育部门有关领导的关怀和帮助，得到了北京师范大学数学系钟善基教授、曹才翰教授的热情指导，清华附中的瞿宁远老师也积极参与了我们的实验研究，并对这套教材做出了贡献，在此一并致以诚挚的谢意。

在编写过程中，北京四中数学组的教师们积极参加研讨，对他们的热情支持表示感谢。

这套讲义包括六册：高中代数第一、二、三册，三角、立体几何、解析几何各一册。

编写适应素质教育的教材，对我们来说是个尝试。由于水平所限，书中不当之处在所难免，诚恳希望专家、同行和同学们提出宝贵意见。

北京四中教学处

1996 年 1 月

目 录

第四章　不等式的性质、证明和解法

两个同类量相比较，有“相等关系”和“不等关系”，用数学式子表达它们就出现了“等式”和“不等式”。不等式不仅在数学理论中是极为重要的数学工具，而且在科学技术中有广泛的实用价值。

本章将系统地学习不等式的性质、证明和解法，并通过不等式的证明系统地学习数学论证的常用方法。

不等式与等式既有相似之处，也有不同之点。学习时要随时加以对比，尤为重要的是注意它们的不同之处。

4.1　实数集的有关知识

不等式理论的基础是实数理论。我们回顾一下实数集的有关知识。

1. 任取 $x \in \mathbb{R}$，则 $x \in \mathbb{R}^+$、$x \in \{0\}$ 和 $x \in \mathbb{R}^-$ 三种情况有且只有一种成立。

2. 两实数加、乘运算具有以下性质：

   - $a, b \in R^+$，则 $a + b \in \mathbb{R}^+$, $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$
   - $a, b \in R^-$，则 $a + b \in \mathbb{R}^-$, $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$
   - $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in R^-$，则 $a \cdot b \in \mathbb{R}^-$
   - 任取 $a \in \mathbb{R}$，恒有 $a^2 \geqslant 0$，当且仅当 $a = 0$ 时取等号

3. 比较两实数大小的法则。

我们知道，实数可以比较大小。在初中我们学过实数比较大小的几何法则：在数轴上，两个不同的点 A 与 B 分别表示两个不同的实数 a 与 b，右边的点表示的数比左边的点表示的数大。

现在我们学习与几何法则等价的比较两实数大小的代数法则。

定义

对于任意两个实数 a, b

- 若 $a-b$ 为正数，称 a 大于 b，记作 $a>b$;
- 若 $a-b$ 为零，称 a 等于 b，记作 $a=b$;
- 若 $a-b$ 为负数，称 a 小于 b，记作 $a<b$.

根据这个定义，可知：

$$\begin{aligned} a-b>0 &\iff a>b \\ a-b=0 &\iff a=b \\ a-b<0 &\iff a<b \end{aligned}$$

例 4.1 若 $a>b>c>0$，试比较 $\dfrac{b}{a-b}$ 与 $\dfrac{c}{a-c}$ 的大小.

分析： 根据实数比大小的定义，欲比较 $\dfrac{b}{a-b}$ 与 $\dfrac{c}{a-c}$ 的大小，应先研究它们的差。

解： $\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{c}{a-c}=\dfrac{b(a-c)-c(a-b)}{(a-b)(a-c)}=\dfrac{a(b-c)}{(a-b)(a-c)}$

$\because \quad a>b>c>0$

$\therefore \quad b-c>0,\ a-b>0,\ a-c>0 \ \Rightarrow$ 上式的值 >0

$\therefore \quad \dfrac{b}{a-b}>\dfrac{c}{a-c}$.

例 4.2 若 $a\in\mathbb{R}$, 试比较 $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$ 与 $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$ 的大小

分析："式子繁，先化简"，再求差。

解： $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)=(a^2+1)^2-\left(\sqrt{2}a\right)^2=(a^2+1)^2-2a^2$

$(a^2+a+1)(a^2-a+1)=(a^2+1)^2-a^2$

$$[(a^2+1)^2-2a^2]-[(a^2+1)^2-a^2]=-a^2$$

$\because \quad a\in\mathbb{R} \ \Rightarrow \ -a^2\leqslant 0$

从而：

1. 当 $a=0$ 时，$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$
2. 当 $a\neq 0$ 时，$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)<(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

说明： 以上两例说明：两实数比大小的问题，根据定义，等价于研究其差的符号，因而"求差"是基本方法。

关于两实数比大小，还有下面的定理

定理

对于任意两个实数 a、b，下列三种大小关系：

$$a > b; \qquad a = b; \qquad a < b$$

有且只有一种成立。

证明： 根据实数集的性质，实数 $(a-b)$ 或为正数，或为负数，或为零，三者必居其一且仅居其一。再由实数比大小的定义，立刻知道本定理成立。

最后，我们约定，在本章中所出现的字母，不加说明时都表示实数。

4.2 不等式的概念

用不等号（$>$，$<$，$\neq$ 等）连接两个数学解析式（代数式，指数式，对数式，三角式等等）所成的式子称为**不等式**。例如：

$$a^2 + 1 > 0, \tag{1}$$

$$3x < 6, \tag{2}$$

$$|x| < 0, \tag{3}$$

$$\lg x > \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$m + 2 < 5 + m, \tag{5}$$

$$-1 > 2. \tag{6}$$

在两个不等式中，如果每一个的左边都大于右边，如 (1) 和 (4)，或者每一个的左边都小于右边，如 (2) 和 (3)，象这样的两个不等式叫做**同向不等式**。如果一个不等式的左边大于右边，而另一个不等式的左边小于右边，如 (1) 和 (2)，象这两个不等式叫做**异向不等式**。

通常我们按不等式在字母取值范围内是否成立把不等式分作三类：

1. 若在字母取值范围内不等式恒成立，这种不等式叫做**绝对不等式**，如 (1)、(5)；

2. 若在字母取值范围内有些值使不等式成立，而另外一些值使不等式不成立，这种不等式叫做**条件不等式**，如 (2)、(4)；

3. 若在字母取值范围内不等式恒不成立，这种不等式叫做**矛盾不等式**，如 (3)、(6).

不等式这一章的基本问题是绝对不等式的证明和条件不等式的求解。
为了解决这两个基本问题，我们要先学习不等式的性质。

习题一

A

1. 比较 $(x+1)(x+2)$ 与 $(x-3)$ 的大小（其中 $x \in \mathbb{R}$）.
2. 已知 a 是实数，a^4+1 与 $2a^2$ 谁大?
3. 若 $a>b, e>f, c>0$，试比较 $f-ac$ 与 $e-bc$ 的大小。
4. 若 $m \in \mathbb{R}$，试比较 $\left(\frac{m}{\sqrt{3}}+1\right)^3-\left(\frac{m}{\sqrt{3}}-1\right)^3$ 与 2 的大小。
5. 若 $a>b>0, c<d<0, e>0$，求证:
$$\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$$
6. 试说出下列不等式中哪些是绝对不等式，哪些是矛盾不等式，哪些是条件不等式:

   (1) $a^2<0$

   (2) $a^2<\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$，其中 $a>0$

   (3) $a^2+b^2+c^2>0$

4.3　不等式的性质

在初中曾学过“等式”的一些性质，并根据对等式运算的需要做出了若干推论，现在整理如下:

性质 1

$$a=b \Longleftrightarrow b=a$$

性质 2

$$a=b,\ b=c \Rightarrow a=c \qquad (\text{传递性})$$

性质 3

$$a=b \Rightarrow a+m=b+m \qquad (\text{等量加同量})$$

推论 1

移项法则（如何叙述?）

推论 2

$$\left.\begin{aligned} a=b \\ c=d \end{aligned}\right\} \Rightarrow a+c=b+d$$

推论 3

$$\left.\begin{aligned} a=b \\ c=d \end{aligned}\right\} \Rightarrow a-c=b-d$$

性质 4

$$a=b \Rightarrow am=bm \qquad (\text{等量乘同量})$$

推论 4

$$\left.\begin{aligned} a=b \\ c=d \end{aligned}\right\} \Rightarrow ac=bd$$

推论 5

$$a=b\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{1}{b}$$

推论 6

$$\left.\begin{aligned} a=b \\ c=d\neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

推论 7

$$a = b \Rightarrow a^n = b^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

推论 8

$$a = b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \quad (n \in \mathbb{N})$$

不等式与等式是有密切联系的。类比等式的性质和推论，可以得到不等式的一些性质，并根据对不等式运算（变形）的需要可以做出若干推论（最好你能独立想出这些结论和证明方法）．

性质定理 1

$$a > b \Longleftrightarrow b < a$$

性质定理 2

$$a > b,\ b > c \Rightarrow a > c \qquad \text{(传递性)}$$

性质定理 3

$$a > b \Rightarrow a + m > b + m$$

推论 1

$$a + m > b \Rightarrow a > b - m$$

推论 2

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c = b + d$$

推论 3

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ c < d \end{array}\right\} \Rightarrow a - c > b - d$$

性质定理 4

1. $a > b,\ m > 0 \ \Rightarrow\ am > bm$

2. $a > b,\ m < 0 \ \Rightarrow\ am < bm$

推论 4

$$\left.\begin{array}{r} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ ac > bd$$

推论 5

$$\left.\begin{array}{r} a > b > 0 \\ 0 < c < d \end{array}\right\} \Rightarrow\ \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$$

推论 6

$$a > b > 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

推论 7

$$a > b \geqslant 0 \ \Rightarrow\ a^n > b^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

推论 8

$$a > b \geqslant 0 \ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \quad (n \in \mathbb{N},\ \text{且}\ n > 1)$$

推论 9

当 a, b 都是正数时：

$$\frac{a}{b} > 1 \Longleftrightarrow a > b$$
$$\frac{a}{b} = 1 \Longleftrightarrow a = b$$
$$\frac{a}{b} < 1 \Longleftrightarrow a < b$$

以下研究这些定理的证明方法。

首先应明确：四条性质定理在这个理论结构中是基础。它们的证明应依据实数比大小的定义和实数加乘运算的法则。

例如，求证：性质定理 1 $a>b \Longleftrightarrow b<a$

证明： 先证“若 $a>b$，则 $b<a$”.

由 $a>b \Rightarrow a-b>0$

$\therefore \quad -(a-b)<0$，即 $b-a<0$

$\therefore \quad b<a$

再证“若 $b<a$，则 $a>b$”

由 $b<a \Rightarrow b-a<0 \Rightarrow -(b-a)>0$，即 $a-b>0 \Rightarrow a>b$.

由以上两个方面，可得 $a>b \Longleftrightarrow b<a$

又如，求证：性质定理 2 $a>b,\ b>c \Rightarrow a>c$

证明：

$$a>b \Rightarrow a-b>0 \tag{1}$$

$$b>c \Rightarrow b-c>0 \tag{2}$$

根据正数加正数仍为正数，由 (1)(2) 可得：

$$(a-b)+(b-c)>0$$

即 $a-c>0 \Rightarrow a>c$

现在研究推论的证明，例如，求证：推论 4

$$\left.\begin{array}{l} a>b>0 \\ c>d>0 \end{array}\right\} \Rightarrow ac>bd$$

证明： $\because \quad a>b,\ c>0 \qquad \therefore \quad ac>bc$ (1)

又 $\because \quad c>d,\ b>0 \qquad \therefore \quad bc>bd$ (2)

由 (1)(2) 据传递性可得：$ac>bd$.

又如，求证推论 7

$$a>b\geqslant 0 \Rightarrow a^n>b^n, \quad n\in\mathbb{N}$$

证明： 证法 1： 由推论 4 可以证出（作为练习）。

证法 2： 也可以从“分析”结论入手：

要证 $a^n>b^n$，只要证 $a^n-b^n>0$. 根据乘法公式

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

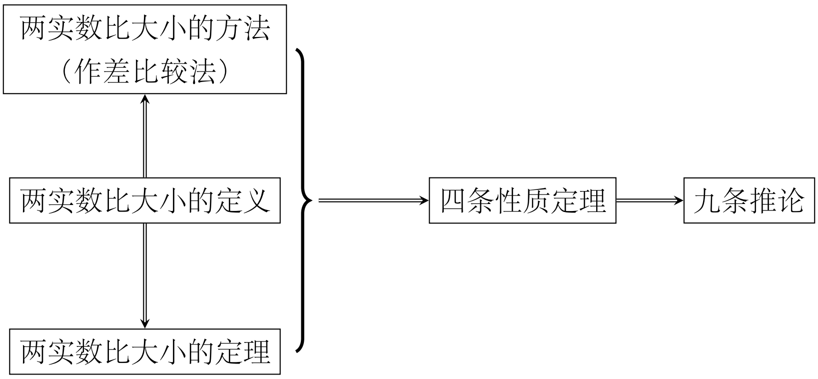
由条件 $a>b\geqslant 0$, 得

$$a-b>0, \quad (a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})>0$$

$\therefore\quad a^n-b^n>0$，从而 $a^n>b^n$

评述：从上面的证法可以看出，欲证某结论成立，先找出使结论成立的充分条件，这对于把握论证的方向是有好处的。

以上三节，结论较多，整理出它的知识结构，能帮助我们从整体上系统地掌握理论。



在这个理论结构中，有的同学可能对性质定理 1 的理解不深，甚至认为它无用。其实正因为有了它，后面的定理和推论只要对“>”成立的，对“<”也都成立。例如 $a>b,\ b>c\ \Rightarrow\ a>c$，由定理 1，$c<b,\ b<a\ \Rightarrow\ c<a$，等等。所以，在上述理论体系中，对每条性质都只叙述了对“>”成立的情况。

问题

在上述四条性质定理和九条推论的条件中，若把“>”换成“⩾”，对结果会有什么影响呢？

我们知道，“⩾”包括“>”或“=”两种情况，而这两种情况我们都有现成的结论，只要把这两种情况“合起来”就是了。例如，由

$$\left.\begin{aligned}a>b\ &\Rightarrow\ a+m>b+m\\ a=b\ &\Rightarrow\ a+m=b+m\end{aligned}\right\}$$

就有 $a\geqslant b\ \Rightarrow\ a+m\geqslant b+m.$

例 4.3 在实数范围内回答下列问题（要简述理由）：

(1) 若 $a>b$，能推出 $ac^2>bc^2$ 吗？

(2) 若 $ac^2>bc^2$，能推出 $a>b$ 吗？

(3) 若 $a>b,\ ab\neq 0$，能推出 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$ 吗？

(4) 若 $a > b > 0$ $c > d > 0$ 能推出 $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{d}$ 吗?

解:

(1) 不能。事实上，当 $c = 0$ 时，就得不出 $ac^2 > bc^2$

(2) 能。事实上，由 $ac^2 > bc^2 \Rightarrow c \neq 0$，此时 $c^2 > 0$, 由 $ac^2 > bc^2$，据定理 4 两边同乘 $\dfrac{1}{c^2}$ $(c^2 > 0)$ 即可推出 $a > b$.

(3) 不能。事实上当 $a > 0 > b$ 时，$\dfrac{1}{a} > 0$, $\dfrac{1}{b} < 0$，此时 $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.
（由此可见：推论 6 的条件是充分条件，而不是必要条件。）

(4) 不能。事实上若取 $a = c, b = d$，则 $\dfrac{a}{c} = 1$, $\dfrac{b}{a} = 1$，有 $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$.
（由此可以看出，推论 5 的条件是充分的，但不是必要的。）

评述: 解这类题，要把题目与不等式的性质“挂钩”，思考才有明确的方向，答题才有针对性。如题 (1)，目的是检查不等式性质定理 4，明确了这一点，就不难想出当 $c^2 = 0$ 时要出毛病。

习题二

A

1. 证明性质定理 3、4 (i)。

2. 证明推论 5。

3. 在实数集上回答下面的问题，并简述理由:

   (1) 若 $a > b$, $c < d$，是否能得出 $a + c > b + d$?

   (2) 若 $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$，是否能得出 $a > b$?

   (3) 若 $a > b$, $c < d$，a, b, c, d 都不为零，是否能得出 $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{d}$?

   (4) $a > b$, $c > d$ 是否能得出 $ac > bd$?

B

4. 利用公式

$$a - b = \left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right)\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-2}\sqrt[n]{b} + \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-3}\left(\sqrt[n]{b}\right)^2 + \cdots + \sqrt[n]{a}\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-2} + \left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1}\right]$$

证明推论 8

5. 用反证法证明推论 8。

6. 求证 $a>b>0,\ c<d<0\ \Rightarrow\ ac<bd$

7. 若 $ab>0$，且 $a<b$，比较 a^2 和 b^2 的大小.

8. 若 $a\in\mathbb{R}$，比较 $\dfrac{1}{1+a}$ 与 $1-a$ 的大小。

C

9. 若 $ab\neq 0$，试比较 $\sqrt[3]{a^3+b^3}$ 与 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的大小

4.4 不等式证明的基本方法

本节将通过实例学习不等式证明的基本方法：比较法、分析法、综合法，着重讲解方法的原理（依据）、格式和基本技巧。

4.4.1 比较法

例 4.4 求证 $a^2+3>3a$.

分析： 欲比较 a^2+3 与 $3a$ 的大小，只需研究其差即可。

证明： 证法 1：

$\because\quad a^2+3-3a=a^2-3a+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+3-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

$\therefore\quad a^2+3>3a.$

证法 2： $a^2+3-3a=a^2-3a+3$，（这是关于 a 的二次函数，也可用判别式确定它的值的符号。）

$\because\quad a^2$ 的系数为正，且 $\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot3<0,$

$\therefore\quad a^2-3a+3>0$，从而 $a^2+3>3a.$

例 4.5 求证 $a^2+b^2+2\geqslant 2(a+b)$.

证明： $\because\quad a^2+b^2+2-2a-2b=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)=(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant 0$

当且仅当 $a=1$ 且 $b=1$ 时等号成立。

$\therefore\quad a^2+b^2+2\geqslant 2(a+b)$

例 4.6 求证 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$

证明：

$$\begin{aligned}\because\quad a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)\\ &= \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0\end{aligned}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立，故 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$（当且仅当 $a=b=c$ 时取等号）.

例 4.7 已知 $a,b\in\mathbb{R}^+$，且 $a\neq b$，求证 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

证明：（比较法）

$$\begin{aligned}\text{设}A &= a^3+b^3-(a^2b+ab^2)=(a^3-a^2b)+(b^3-ab^2)\\ &= a^2(a-b)+b^2(b-a)=(a-b)(a^2-b^2)\\ &= (a+b)(a-b)^2\end{aligned}$$

$\because\quad a>0,\ b>0,\ a\neq b$

$\therefore\quad a+b>0,\ (a-b)^2>0$，从而 $A>0$

$\therefore\quad a^3+b^3>a^2b+ab^2$

比较法原理

为了证左 $>$ 右，根据实数比大小的定义，只要证 左 $-$ 右 >0，这种方法称为比较法，是证明不等式最基本最常用的方法。步骤是作差、变形、定号。题目不同，变形、定号的方法就不同，一般说来，有的是用因式分解，有的是用配成完全平方，有的则用二次三项式的性质。

对于例 4.7，还可以根据推论 9 来证。

证明： $\because\quad$ 左 $=a^2+b^2>0,\qquad$ 右 $=a^2b+ab^2>0$

根据推论 9，欲证 $a^2+b^2>a^2b+ab^2$ (1)

等价于证明

$$\frac{a^2+b^2}{a^2b+ab^2}>1 \tag{2}$$

即：

$$\frac{a^2-ab+b^2}{ab}>1 \tag{3}$$

欲证 (3)，只要证 $\dfrac{a^2-ab+b^2}{ab}-1>0$，即

$$\frac{(a-b)^2}{ab}>0 \tag{4}$$

$\because$　a, b 为不等正数

$\therefore$　(4) 显然成立

$\therefore$　(1) 式成立.

评述：这种证法是先"作商"，再研究商与 1 的大小。当等号两边都是正数的乘积或指数式时，常用这种证法（通常称为比商法）。这是因为指数式或乘积在"作商"后往往能约分化简。

例 4.8　若 $a, b \in \mathbb{R}^+$，求证 $a^a b^b \geqslant a^b b^a$，并指出等号成立的条件。

证明：$\because$　$a > 0, \quad b > 0$

$\therefore$　$a^a b^b$ 和 $a^b b^a$ 都是正数.（验证这一点，为的是使用推论 9）

欲证原不等式成立，只需证 $\dfrac{a^a b^b}{a^b b^a} \geqslant 1$.

而左边 $= a^{a-b} b^{b-a} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}$，讨论如下：

1. 若 $a > b > 0$，则 $\dfrac{a}{b} > 1, a - b > 0 \ \Rightarrow\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b} > 1$（根据指数函数的性质）
2. 若 $a = b > 0$，则 $\dfrac{a}{b} = 1, a - b = 0 \ \Rightarrow\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b} = 1$
3. 若 $0 < a < b$，则 $\dfrac{a}{b} < 1, a - b < 0 \ \Rightarrow\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b} > 1$

综合上述 $\dfrac{a^a b^b}{a^b b^a} \geqslant 1$，当且仅当 $a = b$ 时等号成立。

$\therefore$　$a^a b^b \geqslant a^b b^a$，当且仅当 $a = b$ 时等号成立。

4.4.2　分析法

它基于这样一种逻辑考虑：为了证命题 A，去找 A 成立的充分条件 B；为了证 B，去找 B 成立的充分条件 C；为了证 C，又去找 C 成立的充分条件 D，……直至找到一个明显成立的不等式。

例 4.9　已知 $a, b \in \mathbb{R}^+$，且 $a \neq b$，用分析法证明 $a^3 + b^3 > a^2 b + ab^2$

证明：　**证法 1：**欲证 $a^3 + b^3 > a^2 b + ab^2$　(1) 即证

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) > (a+b)ab \tag{2}$$

由于 a、b 是正数 $\ \Rightarrow\ a + b > 0$，所以欲证 (2)，只要证

$$a^2 - ab + b^2 > ab \tag{3}$$

欲证 (3)，只要证 $a^2 - 2ab + b^2 > 0$，即证

$$(a-b)^2 > 0 \tag{4}$$

$\because \quad a \neq b$

$\therefore$ (4) 显然成立.

$\therefore$ (1) 式成立。

分析法原理

执果索因，逐步逆找结论成立的充分条件，直至找到明显成立的不等式为止。

很明显，逆找的过程正是把“欲证”由繁化简的过程。因而分析法对于形式复杂的证明题是一种行之有效的方法。

分析： 因为题设中 a、b 的地位是对等的（以 a 去代换 b，同时以 b 去代换 a，所得到的式子与原式相同），由此，在证明中不妨设 $a > b > 0$（事实上，若 $b > a > 0$，证法是完全相同的）。这种通过加强假设而简化证明过程的办法称作**优化假设**。它是数学证明中很有用的一种思考方法。

证明： 证法 2： 不妨设 $a > b > 0$. 欲证 $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$ (1)

只要证 $a^3 - a^2b > ab^2 - b^3$, 即证

$$a^2(a-b) > b^2(a-b) \tag{2}$$

由 $a > b > 0 \ \Rightarrow \ a - b > 0 \ a^2 > b^2$

据定理 4，(2) 成立 $\Rightarrow$ (1) 成立.

评述： 若不用优化假设 $a > b$，欲证 (2) 就应分 $a > b$, $a < b$ 两种情况讨论之.

练习

1. 证明以下二次不等式：

(1) $x + 1 > \dfrac{2}{3}x$

(2) $a + 2b^2 + c^2 \geqslant 2ab - 2bc$

2. 证明以下二次不等式，并指出等号成立的条件：

(1) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geqslant 2(a + b + c)$,

(2) $x^2 + 5y^2 + 1 \geqslant 4xy + 2y$.

3. 用两种方法（比较法、分析法）证明：

(1) 若 $a, b \in \mathbb{R}^+$，且 $a \neq b$，则 $a^4 + b^4 > a^3b + ab^3$，

(2) 若 $a, b, m \in \mathbb{R}^+$，且 $a < b$，则 $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+m}{b+m}$

（此题表明：分子、分母都为正数的真分数，分子、分母同加上正数 m，分数值变大——但不超过 1．这是分数的一个重要性质。若 $a, b \in \mathbb{R}^+$，且 $\dfrac{a}{b}$ 是个假分数又如何呢?）

4.4.3 综合法

从已知条件出发，根据学过的定义、定理等知识，逐步推出欲证不等式。这种证明方法称为综合法。

很明显，把分析法的过程逆写出来就是一种综合法。例如，以上面例 4.9 中的证法 2 为线索逆写如下：

不妨设 $a > b > 0 \ \Rightarrow \ a - b > 0,\ a^2 > b^2$,

$\therefore \quad a^2(a-b) > b^2(a-b)$

即 $a^3 - a^2b > ab^2 - b^3$,

$\therefore \quad a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$.

综合法原理

由因导果，逐步顺找 已知成立的必要条件，直至导出结论为止。（这里的做法是以分析法找思路，以综合法写证明。很明显，这样用综合法写，过程比较简捷）

应该说明：用综合法证不等式，非常重要的一类是从平均不等式出发。这类问题本书将在 4.5 节集中研究。

习题三

A

1. 证明二次不等式，并指出等号成立的条件：

(1) $a^2 + b^2 \geqslant 2(a - b - 1)$;

(2) $3x^2 - 4xy + 5y^2 \geqslant 0$;

(3) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 4y + 2 \geqslant 0$.

2. 若 $a,b\in\mathbb{R}^+$，求证 $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$

B

3. 用两种方法（比较法、分析法）证明：若 $a,b\in\mathbb{R}^+$，则 $a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3$

4. 若 $a>1$，求证：$a^3>a+\dfrac{1}{a}-2$

5. $a>c,\ b>c>0$，求证：$\sqrt{(a+c)(b+c)}+\sqrt{(a-c)(b-c)}\leqslant 2\sqrt{ab}$

6. 若 a,b,x,y 都为正数，求证 $\dfrac{(a+b)xy}{ay+bx}\leqslant\dfrac{ax+by}{a+b}$

7. 证明：

   (1) $\dfrac{1}{\log_5 19}+\dfrac{2}{\log_3 19}+\dfrac{3}{\log_2 19}<2$

   (2) $\dfrac{2}{5}<\log_5 2<\dfrac{4}{9}$

   (3) 自编一个类似于 (2) 的题，并加以证明.

8. 当 $0<x\neq 1$, 且 $m>n>0$ 时，$x^m+\dfrac{1}{x^m}$ 与 $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ 哪个大（$m,n\in\mathbb{N}$）?

9. 用反证法证明：若 a，b，c 都是正数，则在 $b+c-a$, $c+a-b$ 和 $a+b-c$ 至少有两个是正的。

10. 若 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$，求证

$$a^ab^bc^c\geqslant a^{\frac{b+c}{2}}\cdot b^{\frac{c+a}{2}}\cdot c^{\frac{a+b}{2}}$$

C

11. 研究例 4.9 的推广。

    所谓推广，就是把真命题放在更广的范围内考查，因而是一种创造性的思维活动。要想做出推广，认清式子的“结构特征”是突破口。就此例而言，不等号两边都是二元的三次齐次式。推广至少有两个方向：(i) 次数能否提高？(ii)“元”能否增多？对于学有余力的同学，不妨试试看。

12. 已知 a，b 都是正数，

    (1) 求证 $(a+b)(a^3+b^3)\geqslant(a^2+b^2)^2$

    (2) 你能把（1）加以推广吗?

13. 设 $a,b,c,d \in \mathbb{R}$，求证

$$ac+bd \leqslant \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$$

（用多种方法，其中至少用一种几何方法或三角方法）

4.5 平均不等式

用综合法证明不等式时，常常选用一些常见的不等式作为论证的起点。其中很重要的一类就是平均不等式。本节先介绍这些不等式，然后举例说明如何应用它们来证不等式。

4.5.1 两个基本概念

定义

设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是 n 个实数，$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 叫做 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的**算术平均数** $(n\in\mathbb{N})$

定义

设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是 n 个非负数，$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 叫做 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的**几何平均数** $(n\in\mathbb{N})$

“几何平均数”的名称来源于下述简单的几何问题：把边长分别为 a，b 的长方形变成和它面积相等的正方形（图 4.1），求这个正方形的边长是多少？事实上可设正方形的边长为 x，由等积这个条件得 $ab=x^2$，所以 $x=\sqrt{ab}$. 这里边长 x 是线段 a 和 b 在这种几何意义下的平均值。这是 $n=2$ 时的情形。对于自然数 $n\geqslant 3$，情况是类似的。

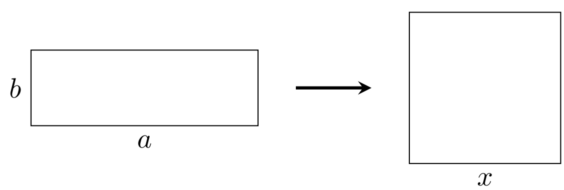


图 4.1

4.5.2 算术平均数与几何平均数之间的大小关系

现在，研究 n 个非负数的算术平均数 A_n 与几何平均数 G_n 之间的大小关系。

让我们任取 n 个（$n=2,3,4,\ldots$）非负数（见下表），通过计算（可以用计算器完成）可得：

	$A_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$	$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$	A_n 与 G_n 的大小
1, 2	$\dfrac{3}{2}=1.5$	$\sqrt{2}=1.414\cdots$	$A_2>G_2$
5, 7	$\dfrac{12}{2}=6$	$\sqrt{35}=5.916\cdots$	$A_2>G_2$
1, 2, 5	$\dfrac{8}{3}=2.666\cdots$	$\sqrt[3]{10}=2.154\cdots$	$A_3>G_3$
2, 4, 6, 8	$\dfrac{20}{4}=5$	$\sqrt[4]{384}=4.426\cdots$	$A_4>G_4$
3, 3, 3, 3	$\dfrac{12}{4}=3$	$\sqrt[4]{81}=3$	$A_4=G_4$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

由此作出猜想：任意 n 个非负数的算术平均数 A_n 一定不小于它们的几何平均数 G_n，而

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}\tag{*}$$

其中，$a_1,a_2,\ldots,a_n$ 都是非负数，$n\in\mathbb{N}$.

应该指出：上面通过具体数字反复试验而后做出猜想的方法是数学中在探索新定理时经常使用的。

(*) 就是著名的**平均不等式**。它是一个非常基本的不等式：数学家们基于各种想法给出它的证明的方法有几十种之多。它既是推证许多重要不等式的基石，而且在解最值问题当中还是一个十分得力的工具。

以下研究 (*) 的证明。

先从最简单的情况 ($n=2$) 开始，就是要证：若 a，b 都是非负数，则

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\tag{1}$$

证明： 由于 a、b 是非负数，所以有

$$a=(\sqrt{a})^2,\qquad b=(\sqrt{b})^2$$

则不等式 (1) 等价于

$$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\geqslant 2\sqrt{a}\sqrt{b} \tag{2}$$

欲证 (2)，只要证

$$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}\geqslant 0$$

即证：$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$.

此式显然成立，当且仅当 $a=b$ 时取等号.（同样的方法可以证明：当 $x,y\in\mathbb{R}$ 时，$x^2+y^2\geqslant 2xy$, 等号成立的充要条件是 $x=y$）

当 $n=3$ 时，就是证明：若 a、b、c 都为非负数，则

$$\frac{a+b+c}{3}=\sqrt[3]{abc} \tag{3}$$

证明： 因为 $a=(\sqrt[3]{a})^3$, $b=(\sqrt[3]{b})^3$, $c=(\sqrt[3]{c})^3$，设 $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$, 则 (3) 等价于

$$x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz \tag{4}$$

$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3-3xyz&=(x+y)^3+z^3-3x^2y-3xy^2-3xyz\\&=[(x+y)^3+z^3]-3xy(x+y+z)\\&=(x+y+z)[(x+y)^2-(x+y)z+z^2]-3xy(x+y+z)\\&=(x+y+z)[(x+y)^2-(x+y)z+z^2-3xy]\\&=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)\end{aligned}$$

$\because$ a,b,c 是非负数， $\therefore$ x,y,z 是非负数，

$\therefore$ $x+y+z\geqslant 0$,

又 $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$（上节例 4.6 已证）

$\therefore$ $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geqslant 0$, 当且仅当 $x=y=z$ 时取等号.

$\therefore$ $x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz$

$\therefore$ $\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$, 当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

下面作为选学内容，介绍法国数学家 Cauchy（柯西）证明 n 元平均不等式的精美的构思。

他首先用上面的方法证明了 (1)，然后去证

$$a,b,c,d\text{都是非负数}\ \Rightarrow\ \frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd} \tag{5}$$

证明： 这只要在 (1) 中，以 $\dfrac{a+b}{2}$，$\dfrac{c+d}{2}$ 分别代替 a,b 即可. 事实上，由于 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant 0$, $\dfrac{c+d}{2}\geqslant 0$，可得:

$$\frac{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}$$

显然，当且仅当 $a=b=c=d$ 时等号成立，即

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$$

接着，他提出用同样的方法可以证明：若 $a_1,a_2,\ldots,a_8$ 都是非负数，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_8}{8} \geqslant \sqrt[8]{a_1a_2\cdots a_8}$$

（你能完成这个证明吗?）

如此继续下去，就能证得对于所有的自然数 $n=2,4,8,16,\ldots,2^k,\ldots$ $(k\in\mathbb{N})$，(*) 都成立。

然后，他再利用已经证得的结论，去证明对于刚才“跳跃”过去的那些自然数 $n=3,5,6,7,9,10,\ldots$，(*) 都成立. 如利用 $n=8$ 时的结论可以证明：

若 $a_1,a_2,\ldots,a_5$ 都是非负数，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_5}{5} \geqslant \sqrt[5]{a_1a_2\cdots a_5}$$

证明： 对于 $a_1,a_2,\ldots,a_5$，我们凑出 8 个非负数：$a_1,a_2,\ldots,a_5,m,m,m$，其中 $m=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_5}{5}$，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_5+m+m+m}{8} \geqslant \sqrt[8]{a_1a_2\cdots a_5\cdot m\cdot m\cdot m}$$

即：$m\geqslant \sqrt[8]{a_1a_2\cdots a_5\cdot m^3}$

$\therefore\quad m^8\geqslant a_1a_2\cdots a_5\cdot m^3 \;\Rightarrow\; m^5\geqslant a_1a_2\cdots a_5 \;\Rightarrow\; m\geqslant \sqrt[5]{a_1a_2\cdots a_5}$

即：$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_5}{5}\geqslant \sqrt[5]{a_1a_2\cdots a_5}$ 其中，等号当且仅当 $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$ 时成立。

评述： 柯西构思的巧妙之处在于不仅省去了一个又一个的繁琐的因式分解，而且对任意的自然数 n，运用的都是通法。

练习

1. 利用 (5) 去证明 (6).
2. 利用 (5) 去证明 (3).
3. 利用 (6) 去证明 $n=6$ 的情况。
4. 根据图 4.2，用几何方法证明 (1).

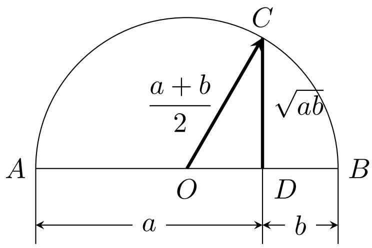


图 4.2

4.5.3 对平均不等式的认识

先将上面的结果整理如下：

定理 1

若 a，b 都是非负数，则

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \qquad \text{（等号当且仅当 } a=b \text{ 时成立）} \tag{1}$$

进而还有：若 $x,y \in \mathbb{R}$，则

$$x^2+y^2 \geqslant 2xy \qquad \text{（等号当且仅当 } x=y \text{ 时成立）} \tag{2}$$

推论 1

$$a\text{是正数} \ \Rightarrow\ a+\frac{1}{a} \geqslant 2$$
$$a\text{是负数} \ \Rightarrow\ a+\frac{1}{a} \leqslant -2$$

推论 2

$$a,b\text{同号} \ \Rightarrow\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$$
$$a,b\text{异号} \ \Rightarrow\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant -2$$

定理 2

若 a，b，c 都是非负数，则

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} \tag{3}$$

（等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立）

(3) 等价于：若 x，y，z 都是非负数，则

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz \tag{4}$$

（等号当且仅当 $x=y=z$ 时成立）

更一般地有

定理 3

若 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 都是非负数，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}, \quad (n\in\mathbb{N}) \tag{*}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立。

(*) 等价于：若 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 都是非负数，则

$$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n \geqslant nx_1x_2\cdots x_n \tag{**}$$

（等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立）

对于 (*) 或 (**)，应特别注意理解：

1. 式子的结构特征都是非负数的

   $$\text{和的形式} \geqslant \text{积的形式}$$

   若欲证不等式具有这样的结构特征，就有可能用“平均不等式”作出证明。这是能否利用“平均不等式”来证不等式的线索。

2. (*) 或 (**) 还表明，n 个非负数的和与积通过缩小或放大可以互相转化。认识了这一点用起 (*) 来就灵活多了。

以下，举例说明怎样利用“平均不等式”去证明某些不等式.

例 4.10 求证下列不等式：

(1) $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$

(2) 若 a，b，c 是不全相等的正数，求证

$$a(b^2+c^2)+b(c+a)+c(a^2+b^2) > 6abc$$

(3) $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c)$，并指出等号成立的条件.

证明:

$$\begin{array}{rr}
\because & a^2+b^2 \geqslant 2ab \\
 & b^2+c^2 \geqslant 2bc \\
+) & c^2+a^2 \geqslant 2ca \\
\hline
 & 2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+bc+ca)
\end{array}$$

(1)

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$

(2) **证法 1:** 由 $b^2+c^2 \geqslant 2bc$, $a>0$，得:

$$a(b^2+c^2) \geqslant 2abc$$

同理:

$$b(c^2+a^2) \geqslant 2abc, \qquad c(a^2+b^2) \geqslant 2abc$$

$\because\quad a,b,c$ 不全相等,

$\therefore\quad$ 上述三个不等式的等号不能同时成立。把三式左、右分别相加得

$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2) > 6abc$$

证法 2: a,b,c 是不全相等的正数,

$\therefore\quad a(b^2+c^2)$, $b(c^2+a^2)$, $c(a^2+b^2)$ 也为正数。

由平均不等式 ($n=3$ 的情况）可得

$$\begin{aligned}
a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2) &\geqslant 3\sqrt[3]{a(b^2+c^2)\cdot b(c^2+a^2)\cdot c(a^2+b^2)} \\
&> 3\sqrt[3]{a(2bc)\cdot b(2ca)\cdot c(2ab)} \qquad \text{（理由?）} \\
&= 3\sqrt[3]{(2abc)^3} = 3\cdot 2abc = 6abc
\end{aligned}$$

$\therefore\quad$ 原式成立.

(3) $\because$

$$\begin{array}{rr}
 & a^4+b^4 \geqslant 2a^2b^2 \\
 & b^4+c^4 \geqslant 2b^2c^2 \\
+) & c^4+a^4 \geqslant 2c^2a^2 \\
\hline
 & 2(a^4+b^4+c^4) \geqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)
\end{array}$$

当且仅当 $a^2=b^2=c^2$ 时等号成立.

而

$$
\begin{array}{rl}
 & a^2b^2+b^2c^2 \geqslant 2ab^2c \\
 & b^2c^2+c^2a^2 \geqslant 2abc^2 \\
+) & c^2a^2+a^2b^2 \geqslant 2a^2bc \\
\hline
 & 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geqslant 2abc(a+b+c)
\end{array}
$$

当且仅当 $ab=bc=ca$ 时等号成立。由此，$2(a^4+b^4+c^4)\geqslant 2abc(a+b+c)$,

$\therefore \quad a^4+b^4+c^4>abc(a+b+c)$，当且仅当 $a=b=c$ 时成立。

评述： 这三个小题式子的结构特征都是“和的形式 $\geqslant$ 积的形式”的迭加，从而先用平均不等式，再迭加即可。

例 4.11 已知 a，b，c 为正数，求证：

(1) $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$;

(2) $(a+b+c)^4\cdot(a^2+b^2+c^2)\geqslant 243a^2b^2c^2$.

分析： 这类不等式可看作是“和的形式 $\geqslant$ 积的形式”经迭乘而成。

证明：

(1) $\because \quad a>0,\ b>0,\ c>0$

$\therefore \quad a+b\geqslant 2\sqrt{ab}>0,\quad b+c\geqslant 2\sqrt{bc}>0,\quad c+a\geqslant 2\sqrt{ca}>0$

以上三式左、右分别相乘得

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8\sqrt{ab\cdot bc\cdot ca}=8abc$$

(2) $\because \quad a,b,c$ 都是正数，

$\therefore \quad a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}>0 \ \Rightarrow\ (a+b+c)^4\geqslant 3^4\cdot(abc)^{\frac{4}{3}}>0$

又 $a^2+b^2+c^2\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3(abc)^{\frac{2}{3}}>0$

以上三式左、右分别相乘得

$$(a+b+c)^4\cdot(a^2+b^2+c^2)\geqslant 3^4\cdot 3(abc)^{\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}}=243a^2b^2c^2$$

例 4.12 求证：$\lg 9\cdot\lg 11<1$ (1)

分析：因 $\lg 11 > 1, \lg 9 < 1$，故用两式相乘得不出欲证结果，怎么办？这个题能否用"平均"去作？事实上，从 (1) 式的结构上看，左边是两个正数 $\lg 9$ 与 $\lg 11$ 的"积"，这与平均不等式的结构特征相似，因此可用"平均"去做。此时有两个不等式可供选用：

$$ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2} \quad \text{或} \quad \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

证明： **证法 1**：

$$\begin{array}{rrl} & \lg 9 \cdot \lg 11 < & \dfrac{\lg^2 9 + \lg 11}{2} \\ +) & \lg 9 \cdot \lg 11 = & \dfrac{2\lg 9 \cdot \lg 11}{2} \\ \hline & 2\lg 9 \cdot \lg 11 < & \dfrac{(\lg 9 + \lg 11)^2}{2} \end{array}$$

于是：

$$\frac{(\lg 9+\lg 11)^2}{2} = \frac{(\lg 99)^2}{2} < \frac{\lg 100}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$\therefore \quad \lg 9 \cdot \lg 11 < 1$

证法 2：$\because \quad \lg 9 > 0, \ \lg 11 > 0$

$\therefore \quad \sqrt{\lg 9 \cdot \lg 11} < \dfrac{\lg 9 + \lg 11}{2} = \dfrac{\lg 99}{2} < \dfrac{\lg 100}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

两边平方得：$\lg 9 \cdot \lg 11 < 1$

思考题

你能把例 4.12 加以推广吗？

例 4.13 若 $a > b > 0$，求证 $a + \dfrac{1}{(a-b)b} \geqslant 3$，并指出等号成立的条件.

分析： $a + \dfrac{1}{(a-b)b}$ 可写成 $(a-b) + b + \dfrac{1}{(a-b)b}$，且由于 $a > b > 0$，可知 $a - b > 0, \ b > 0, \ \dfrac{1}{(a-b)b} > 0$，所以，可用"平均"来做.

证明：

$$a + \frac{1}{(a-b)b} = (a-b) + b + \frac{1}{(a-b)b}$$

$\because \quad a > b > 0$

$\therefore \quad a - b > 0, \ b > 0, \ \dfrac{1}{(a-b)b} > 0$，可得

$$(a-b) + b + \frac{1}{(a-b)b} \geqslant 3\sqrt[3]{(a-b) \cdot b \cdot \frac{1}{(a-b)b}} = 3$$

从而原式成立.

当且仅当 $a-b=b=\dfrac{1}{(a-b)b}$，即 $a=2,\ b=1$ 时等号成立.

评述： 这个题的结构特征是在“$\geqslant$”号的左边是一个各项皆正的“和的形式”，而右边是个特征系数 3。这就启示我们有可能用“平均”去做。方法是“凑”，使左边凑出一个三项和。

习题四

A

1. 已知 a，b，c，d 都是正数，求证

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant ab+bc+cd+da$$

2. 已知 $a,b,c\in\mathbb{R}$，求证 $a^2+b^2+c^2+3\geqslant 2(a+b+c)$，并指出等号成立的条件。

3. a，b 都是正数，求证 $a+b^2(a+1)+a^2(b+1)+b\geqslant 6ab$

4. 若 $a>1, b>1, c>1$，求证 $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)>16abc$.

5. 已知 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 都是正数，求证：

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$$

6. 已知 a，b，c，d 都是正数，求证：

(1) $(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd$

(2) $\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{a}\right)(a^3+b^3+c^3)\geqslant 12abc$

B

7. 已知 $a>0$，求证：

(1) $a+\dfrac{4}{a^2}\geqslant 3$

(2) $a^4+\dfrac{4}{a^2}\geqslant 3\sqrt[3]{4}$

8. 求证 $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$，其中 $x\in\mathbb{R}$

9. 若 $x\in\mathbb{R}$，求证：$1+2x^4\geqslant x^2+2x^3$

10. 若 $x,y\in\mathbb{R}^+$，求证：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geqslant\dfrac{4}{x+y}$

11. 当 $a\geqslant 2$ 时，求证 $\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)<1$（这个题是例 4.12 的推广）

12. (1) 若 $a>b>c>d$，求证：$a-d+\dfrac{25^2}{(a-b)(b-c)(c-d)}\geqslant 20$

(2) 若 $m>n>0$，求证：$m+n+\dfrac{16}{(m-n)n^2}\geqslant 8$

13. 若 a,b,c 为三角形的三边，求证：

(1) $(a+b+c)^3\geqslant 27(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

(2) $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}\geqslant\dfrac{9}{a+b+c}$

C

14. 若 $x>0$，求证：$1+\dfrac{1+x}{9}>\sqrt[9]{2+x}$

15. 对于任意正数 a,b，$a\neq b$，求证 $\sqrt[n+1]{ab^n}<\dfrac{a+nb}{n+1}$

16. 若 a,b,c,d 为正数，求证：

(1) $\dfrac{1}{a+b+c}+\dfrac{1}{b+c+d}+\dfrac{1}{c+d+a}+\dfrac{1}{d+a+b}\geqslant\dfrac{16}{3}\cdot\dfrac{1}{a+b+c+d}$

(2) $\dfrac{1}{a+3b+5c+7d}+\dfrac{1}{b+3c+5d+7a}+\dfrac{1}{c+3d+5a+7b}+\dfrac{1}{d+3a+5b+7c}\geqslant\dfrac{1}{a+b+c+d}$

4.6　用放缩法证明不等式

先研究一个例子。

例 4.14　若 a，b，c，d 为任意正数，求证

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$$

分析：记 $m=\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{b}{b+c+d}+\dfrac{c}{c+d+a}+\dfrac{d}{d+a+b}$

这个题并不是让我们去求 m 的值，而是证明 m 的值存在的范围是在区间 $(1,2)$ 之中，因而，就实质而言，这是一个“估值问题”。显然，先通分、求和再

估值是不可取的。处理估值问题的方法，一般是对所给的式子的值先放大（或缩小），使之由繁化简，再进一步研究。

证明： 由于 a、b、c、d 为正数，可先通过“放大”分母，把 m 缩小。

$$\begin{aligned} m &> \frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{b+c+d+a}+\frac{c}{c+d+a+b}+\frac{d}{d+a+b+c} \\ &= \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}=1 \end{aligned}$$

(“放大”之后构造出公分母，实现了由繁化简)。再把分母“缩小”，达到把 m 放大.

$$m<\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+d}+\frac{c}{c+a}+\frac{d}{d+b}=\frac{a+c}{a+c}+\frac{b+d}{b+d}=2$$

$\therefore \quad 1<m<2$.

放缩法原理

由不等式的传递性，若 $a>b, b>c$，则 $a>c$. 由此，欲证 $a>c$，可以先把 a 逐步缩小：

$$a>b_1>b_2>\cdots>b_n$$

而最后只要证出 $b_n>c$，就可断言 $a>c$. 类似地，欲证 $a<c$，可以先把 a 逐步放大：

$$a<d_1<d_2<\cdots<d_n$$

最后，只要证出 $d_n<c$，就可断言 $a<c$.

例 4.15 若 $a \geqslant b>0, n \in \mathbb{N}$，求证

$$n(a-b)b^{n-1} \leqslant a^n-b^n \leqslant n(a-b)a^{n-1} \tag{1}$$

证明： $\because \quad a \geqslant b>0, n \in \mathbb{N}$，且

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}) \tag{2}$$

(i) 当 $a=b$ 时，(1) 式显然成立；

(ii) 当 $a>b>0$ 时，(1) 式等价于

$$nb^{n-1} \leqslant a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1} \leqslant na^{n-1} \tag{3}$$

对 (3) 中间的和式使用放缩法，有

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}<a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}=na^{n-1}$$

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}>b^{n-1}+b^{n-1}+\cdots+b^{n-1}=nb^{n-1}$$

$\therefore \quad$ (3) 式成立，从而 (1) 式成立.

例 4.16 若 $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$，求证:

$$2\left(\sqrt{n+1}-1\right) < S_n < 2\sqrt{n}$$

分析：可把 S_n 看作是下面一列数

$$1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\cdots,\frac{1}{\sqrt{n}},\cdots$$

的前边 n 个项的和。这里并不要求计算 S_n 的精确值，而是估计 S_n 的值存在的范围。因而可用放缩法。由于 S_n 有 n 项，放缩后裂项相抵消是最理想的。

证明：先考虑上面一列数中的第 n 个项的通项怎样放缩（放缩的办法很多，下面的方法兼有裂项的目的）

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$
$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

再令 $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$，得:

$$2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) < \frac{1}{\sqrt{1}} < 2\left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right)$$
$$2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) < \frac{1}{\sqrt{n-1}} < 2\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}\right)$$
$$+)\qquad 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$

$$2\left(\sqrt{n+1}-1\right) < S_n < 2\left(\sqrt{n}-0\right)$$

$\therefore\quad 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) < S_n < 2\sqrt{n}.$

评述：这里的"放"或"缩"，由于把握了分式和根式的性质，使得求和成为可能。

习题五

A

1. 若 $a>0, b>0$，求证：

$$\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}<\frac{2(a+b)}{1+a+b}$$

2. 求证：$-\sqrt{2}\leqslant\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$

B

3. 求证：$1\leqslant\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$
（提示：利用 $k^2>k(k-1)$）

4. 求证：$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<3$
（提示：利用 $\frac{1}{n!}<\frac{1}{(n-1)n}$ 或 $\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$）

5. 设 $a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$，求证：

$$\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{(n+1)^2}{2}\quad(n\in\mathbb{N})$$

C

6. 若 $x_n=\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$，求证：当 $n>2$ 时，有

$$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{n}$$

（提示：对 $|x_n-\frac{1}{3}|$ 连续放大）

7. 若 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$，求证：$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$.

4.7 * 柯西不等式

作为选学内容，本节介绍著名的**柯西 (Cauchy) 不等式**。若 $a,b,x,y\in\mathbb{R}$，则

$$(ax+by)^2\leqslant(a^2+b^2)(x^2+y^2)\tag{1}$$

(注意，这个不等式在本章习题三第 13 题曾证过)

现在，探索 (1) 。

(1) 式的结构特征使我们联想到一元二次方程的判别式 $\Delta=b^2-4ac$。由此，欲证 (1), 只要证关于 t 的二次三项式

$$f(t)=(a^2+b^2)t^2-2(ax+by)t+(x^2+y^2)\geqslant 0$$

这一点可以通过对 $f(t)$ 配方实现，

$$\begin{aligned} f(t) &= (a^2t^2 - 2axt + x^2) + (b^2t^2 - 2byt + y^2) \\ &= (at-x)^2 + (bt-y)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

等号当且仅当 $at = x$, $bt = y$, 也就是 a, b 与 x, y 对应成比例时成立。

评述： 由 (1) 式的结构特征联想到 Δ, 从而想到去构造二次三项式 $f(t)$.

把 (1) 推广：当 $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ 时就有

$$(ax + by + cz)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \tag{2}$$

（等号当且仅当 a, b, c 与 x, y, z 对应成比例时成立）

当 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 与 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, 又有

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2) \tag{3}$$

(等号当且仅当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 对应成比例时成立).

例 4.17 用柯西不等式证明：

(1) 若 $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, 则 $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$,

(2) 若 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 则 $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geqslant 9$

分析: 能否使用柯西不等式，关键要认清柯西不等式的结构特征。其中，由 $(\quad)^2$ 到 $(\quad)\cdot(\quad)$ 可视为“放大”，反向用可视为“缩小”。

证明:

(1) $\because$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, 欲证原不等式，只要证 $\left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right)^2 \leqslant (a+c)(b+d)$

即证 $\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + \sqrt{c}\cdot\sqrt{d}\right)^2 \leqslant \left[(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{c})^2\right]\cdot\left[\left(\sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{d}\right)^2\right]$

由柯西不等式知此式成立

$\therefore$ 原不等式成立。

(2) $\because$ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} &(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \\ &= \left[(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2\right]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right] \\ &\geqslant \left[\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\right]^2 \qquad \text{（柯西不等式）} \\ &= (1+1+1)^2 = 9 \end{aligned}$$

* 习题六

1. 证明柯西不等式 (2)

2. 若 $a \in \mathbb{R}$, 用两种方法证明 $(1+a+a^2)^2 \leqslant 3(1+a^2+a^4)$

3. 已知 a, b, c 是互不相等的正数, $s = a+b+c$, 求证
$$\frac{s}{s-a} + \frac{s}{s-b} + \frac{s}{s-c} > \frac{9}{2}$$

4. 若 $c \geqslant 0$, $a \geqslant c$, $b \geqslant c$, 求证
$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}$$

5. $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$, 求证
$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n} \leqslant \sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \cdot \sqrt{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

6. $3a^2 + 2b^2 + c^2 = 1$, 求 $3a + 2b + c$ 的最大值.

7. 若 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, 且 $f(n) = \lg \dfrac{a^n + b^n + c^n}{3}$, 求证：$2f(n) \leqslant f(2n)$

4.8 附加条件的不等式的证明

这类问题除具有前述不等式论证的共性以外，怎样使用附加条件就成了解题的关键。利用条件的方法是多种多样的，但是把条件直接代入（或变形后代入）或从条件出发作有目标的变形（变“已知”为“所求”）是最常用的两种方法。

问

从条件 $a, b \in \mathbb{R}^+$，且 $a + b = 1$ 出发，你能获得哪些结论？试试看。

例 4.18 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$，且 $a+b+c=1$，求证
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 9 \tag{4.1}$$

分析： 应从已知和所求的结构特征悟出下面的几种证法来。

证明： **证法 1：** $\because$ $a+b+c=1$，以 $(a+b+c)$ 代换 (1) 之左边的分子，得
$$\frac{1}{a} = \frac{a+b+c}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$
$$\frac{1}{b} = \frac{a+b+c}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$$
$$\frac{1}{c} = \frac{a+b+c}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

以上三式，左、右分别相加，得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right) \tag{2}$$

又 $\because \quad a,b,c$ 都是正数，

$\therefore \quad \frac{b}{a}+\frac{c}{a}\geqslant 2,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{b}\geqslant 2,\quad \frac{a}{c}+\frac{b}{c}\geqslant 2$

代入 (2) 式得：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3+2+2+2=9.$

证法 2： 已知 $a+b+c=1$，代入 (1) 之左边

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}&=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}\\&=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\end{aligned}$$

又 a,b,c 都是正数，因而

$$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc},\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

从而：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9\sqrt[3]{abc\cdot\frac{1}{abc}}=9$$

证法 3： $\because \quad a,b,c$ 都是正数，

$$\therefore \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \tag{3}$$

又 $\because \quad a+b+c=1$，利用 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ 可得

$$1\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\ \Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geqslant 3 \tag{4}$$

由 (3)(4) 得：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geqslant 3\cdot 3=9$

例 4.19 a,b,c,d,x,y 都是正数，且 $x^2=a^2+b^2$, $y^2=c^2+d^2$，求证：

$$xy\geqslant ac+bd \tag{1}$$

分析： 由条件的结构特征容易使我们联想到直角三角形，从而可以实行“三角换元”。

证明： 由于 $x^2=a^2+b^2,\quad y^2=c^2+d^2$，且 a,b,c,d,x,y 皆正，

设 $\begin{cases}a=x\cos\alpha\\ b=x\sin\alpha\end{cases}$，$\begin{cases}c=y\cos\beta\\ d=y\sin\beta\end{cases}$ （图 4.3，α,β 为锐角）

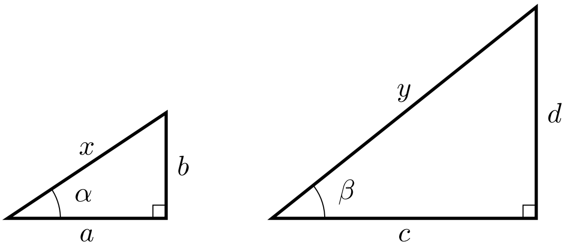


图 4.3

代入 (1)，

$$
\begin{aligned}
\text{右边} &= ac + bd = xy\cos\alpha\cos\beta + xy\sin\alpha\sin\beta \\
&= xy\cos(\alpha-\beta) \leqslant xy
\end{aligned}
$$

∴ (1) 成立.

评述： 实行三角换元是高中数学中很重要的思想方法。

思考题

若从结论入手，运用分析法，你能想出例 4.19 的新证法吗?

例 4.20 已知 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x+y+z=2$，$x^2+y^2+z^2=2$，求证：x, y, z 都不能是负数，也都不能大于 $\frac{4}{3}$.

分析：“元”多，是个难点，但 x、y、z 地位对等，只要证出一个元满足关系即可——这就使我们想到消元。消元后出现二元二次方程，从而可用判别式法。

证明： 由已知条件消去 x 得

$$y^2 + (z-2)\,y + z^2 - 2z + 1 = 0$$

这是关于 y 的一元二次方程.

∵ $y \in \mathbb{R}$,

∴ $\Delta = (z-2)^2 - 4\cdot 1\cdot (z^2-2z+1) \geqslant 0$

即 $-3z^2+4z \geqslant 0$

∴ $0 \leqslant z \leqslant \frac{4}{3}$.

由已知可见 x, y, z 地位对等。同理可得：

$$0 \leqslant y \leqslant \frac{4}{3}, \qquad 0 \leqslant z \leqslant \frac{4}{3}.$$

例 4.21 若 $x, y, z \in \mathbb{R}$, $A + B + C = \pi$, 求证

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 2yz\cos A + 2zx\cos B + 2xy\cos C. \tag{1}$$

分析: "元"多是 (1) 式的特点。若把 x 视为"主元", 这就是一元二次不等式.

证明: 欲证 (1), 只要证明

$$x^2 - 2(z\cos B + y\cos C)x + y^2 + z^2 - 2yz\cos A \geqslant 0 \tag{2}$$

这是关于 x 的二次不等式,

$\because$ x^2 的系数 > 0,

$\therefore$ 欲证 (2), 只要证明 $\Delta \leqslant 0$, 而

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(z\cos B + y\cos C)^2 - 4\cdot 1\cdot (y^2 + z^2 - 2yz\cos A)\\ &= 4[-z^2\sin^2 B - y^2\sin^2 C + 2y\boldsymbol{z}(\cos A + \cos B\cos C)]\end{aligned}$$

$\because$ $A + B + C = \pi$,

$\therefore$ $\cos A = \cos[\pi - (B + C)] = -\cos(B + C) = -\cos B\cos C + \sin B\sin C$,

代入上式,

$$\begin{aligned}\Delta &= -4[z^2\sin^2 B + y^2\sin^2 C - 2yz\sin B\sin C]\\ &= -4(z\sin B - y\sin C)^2 \leqslant 0\end{aligned}$$

从而 (1) 式成立.

思考题

对 (2) 式运用"配方法"能完成证明吗? 试试看.

例 4.22 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 且

$$a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + 3 = 0 \tag{1}$$

求证: $ab + bc + ca \leqslant 0$

分析: 为充分利用式子的对称性, 可把条件中的"3"写成

$$a\cdot\frac{1}{a} + b\cdot\frac{1}{b} + c\cdot\frac{1}{c}$$

证明: 把条件式写成

$$a\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 0$$

即: $(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) = 0 \Rightarrow (a + b + c)\cdot\dfrac{ab + bc + ca}{abc} = 0$

1. 若 $ab+bc+ca=0$，则命题 (1) 成立；

2. 若 $a+b+c=0$，则 $(a+b+c)^2=0$，即 $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

$$\therefore \quad ab+bc+ca=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\leqslant 0$$

综上所述，(1) 成立。

习题七

A

1. 若 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$，且 $a+b+c=1$，求证：$(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc$

2. 若 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$，且 $abc=1$，求证：$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8$

3. 若 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$，且 $ab+bc+ca=1$，求证：$a+b+c\geqslant\sqrt{3}$

4. 若 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$，且 $a+b+c=1$，求证：

   (1) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\geqslant 27$

   (2) $a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{1}{3}$

   (3) $ab+bc+ca\leqslant\dfrac{1}{3}$

   (4) $\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right)\geqslant 8$

5. 若 $a,b\in\mathbb{R}^+$，且 $a+b=1$，求证：$\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\geqslant 9$

6. 若 $a>b>c$，求证：$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}\geqslant\dfrac{4}{a-c}$

B

7. (1) 若 a,b 都是非负数，且 $a+b=1$，求证：$1\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$.

   (2) 对 (1)，你还能推广吗?

8. 若 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$，且 $a+b+c=3$，求证：$\sqrt{3a-2}+\sqrt{3b-2}+\sqrt{3c-2}\leqslant 3$

9. 用三角换元法证明（结构上的什么特征使你能联想到三角换元?）：

   (1) 若 $a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=1$，$a,b,x,y\in\mathbb{R}$，则 $|ax+by|\leqslant 1$，此题还能推广吗?

(2) 若 $x^2+y^2 \leqslant 1$，则 $|x^2-2xy-y^2| \leqslant \sqrt{2}$

(3) 若 $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$，则 $ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leqslant 1$

10. 已知 a,b 都是非负数，且 $a+b=1$，求证：$(ax+by)(ay+bx) \geqslant xy$

11. 若 $a>b>0$，且 $ab=1$，求证：$\dfrac{a^2+b^2}{a-b} \geqslant 2\sqrt{2}$，并指出等号成立的条件.

12. 若 $a,b,c \in \mathbb{R}$，$a+b+c=0$，$abc=1$，求证：a,b,c 中必有一个大于 $3/2$.

13. 设 $a \geqslant b > 0$，求 $f(x)=(a-b)\sqrt{1-x^2}+ax$ 的最大值.

4.9 * 平方平均数

定义

$a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是 n 个非负数，$\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$ 叫做这 n 个数的**平方平均数**。

例 4.23 若 a，b 是两个非负数，求证

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{1}$$

证明：

$$\frac{a+b}{2}=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{4}} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+a^2+b^2}{4}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

（等号当且仅当 $a=b$ 时成立）

设 $0<a<b$，则 a,b 的几何平均、算术平均、平方平均与 a,b 的大小关系如图 4.4 所示（这有助于你记住它们之间的大小顺序）

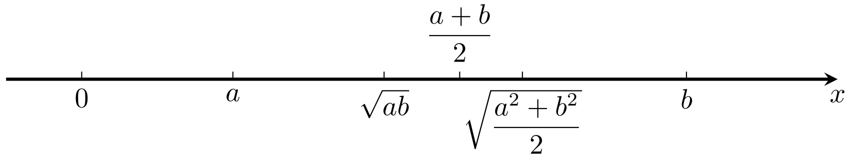


图 4.4

从 (1) 式的结构特征可以看出 $\dfrac{a+b}{2}$ 与 $\dfrac{a^2+b^2}{2}$ 通过放大或缩小在形式上可以互化。这就为解题提供了方便。

若将 (1) 式中字母的次数推广，可得

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \tag{2}$$

若将 (1) 式中字母的个数推广，可得

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \tag{3}$$

例 4.24 若 $a>0, b>0, a+b=1$，求证：

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2} \tag{4.2}$$

分析：直接展开左边，把条件代入，则运算较繁。(4) 式的结构特征启发我们，有可能用“平方平均 > 算术平均”来证。为此，把 (4) 变形，先凑出平方平均数。

证明：欲证 (4)，等价于证明

$$\sqrt{\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}} \geqslant \sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2} \tag{4.3}$$

对左边运用“平方平均 ⩾ 算术平均”，得

$$\sqrt{\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}} \geqslant \frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)}{2}=\frac{(a+b)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{2}$$

$\because\quad a>0,\ b>0,\ a+b=1$，利用上节的方法，可得：

$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)}{2} \geqslant \frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$$

$\therefore$ (5) 成立，从而 (4) 成立.

习题八

1. 若 $a+b+1=0$，求证：$\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

2. 若 a,b,c 为非负数，证明：$\dfrac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$，再推广一步试试看.

3. 若 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$，且 $a+b+c=1$，试证：

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geqslant \frac{100}{3}$$

4. 若 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$，且 $a+b+c=1$，试证：$\dfrac{a+b}{2} \leqslant \sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{2}}$ （右边称为“立方平均数”）

   这一结论再推广可能得到什么？

5. 若 $a \geqslant b \geqslant 0$，依照从小到大的顺序用“$\leqslant$”号连接下列各式：

$$a,\ b,\ \frac{a+b}{2},\ \sqrt{ab},\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

4.10 同解不等式

什么是同解方程？关于同解方程有几个基本定理？证明这些定理的方法是什么？这个问题涉及到解方程的理论根据。

类似于方程，对于不等式我们有

定义

如果两个不等式的解集相等，那么，这两个不等式叫做**同解不等式**。或者简称这两个不等式**同解**，或者**等价**. 两个不等式 A，B 同解（或等价），可以用 $A \Longleftrightarrow B$ 来表示。

关于同解不等式，有下面几个基本定理。

定理 1

不等式 $f(x)>g(x)$ 与 $g(x)<f(x)$ 同解。

分析：根据定义，要证这两个不等式同解，必须证明它们的解集相等。

证明：

(i) 设 $x=a$ 是 $f(x)>g(x)$ 的任何一个解，则 $f(a)>g(a)$，由不等式的性质知 $g(a)<f(a)$，即 $x=a$ 也是 $g(x)<f(x)$ 解。

(ii) 设 $x=b$ 是 $g(x)<f(x)$ 的任何一个解，即有 $g(b)<f(b)$，则 $f(b)>g(b)$，

$\therefore \quad x=b$ 也是 $f(x)>g(x)$ 的解.

综合（i）、（ii），知道两个不等式的解集相等。

$\therefore \quad f(x)>g(x) \Longleftrightarrow g(x)<f(x)$

定理 2

不等式 $f(x) > g(x)$ 与 $f(x) + m > g(x) + m$（其中 m 是常数）同解。

推论

把定理中的常数 m 换成函数 $m(x)$ 后，若所得不等式与原不等式的未知数的取值范围相同（即不等式两边同加 $m(x)$ 后，不等式的未知数的取值范围既不扩大，也不缩小），则两不等式同解。

说明：

(1) 用定理 1 的证明方法可以证明这个定理及推论；

(2) 要特别注意推论中对函数式 $m(x)$ 所要求的条件。如不等式

$$2x + 8 > 5x + 2 \quad 与 \quad 22x + 8 + \frac{4}{x-1} > 5x + 2 + \frac{4}{x-1}$$

就不一定同解。事实上，前一个不等式的未知数的取值范围为实数集 $\mathbb{R}$，而后一个的未知数的取值范围是 $x \in \mathbb{R}$，且 $x \neq 1$. 但是，

$$\frac{3}{x-1} > \frac{x+2}{x-2} \quad 与 \quad \frac{3}{x-1} + \frac{3x-4}{x-1} > \frac{x+2}{x-2} + \frac{3x-4}{x-1}$$

是同解的。这是因为前一个不等式两边同加 $m(x) = \dfrac{3x-4}{x-1}$ 后，两个不等式的未知数的取值范围相同。

(3) 定理 2 及其推论是“移项”的理论根据。

定理 3

1. 当常数 $k > 0$ 时，不等式 $f(x) > g(x)$ 与 $kf(x) > kg(x)$ 同解；
2. 当常数 $k < 0$ 时，$f(x) > g(x)$ 与 $kf(x) < kg(x)$ 同解.

推论

把定理中的常数 k，分别换成在不等式的未知数的取值范围上解析式 $k(x)$ 的值恒正或恒负时，定理的结论仍成立。

说明：

(1) 定理 3 和推论的证明方法同定理 1；

(2) 运用定理 3 及其推论解不等式时，条件必须掌握好，如：

解不等式 $\dfrac{1}{x} > 1$。不等式的未知数的取值范围是 $x \neq 0$, 用 $k(x) = x$ 乘两边，这时 $k(x)$ 在未知数的取值范围上不是恒正或恒负，因此必须对 $k(x)$ 分两种情况进行讨论：

(i) 当 $x > 0$ 时，$\dfrac{1}{x} > 1 \Longleftrightarrow x \cdot \dfrac{1}{x} > x \cdot 1 \Longleftrightarrow 1 > x$, 所以 $0 < x < 1$,

(ii) 当 $x < 0$ 时，$-\dfrac{1}{x} > 1 \Longleftrightarrow x \cdot \dfrac{1}{x} < x \cdot 1 \Longleftrightarrow 1 < x$, 所以无解。

综合 (i)、(ii), 知原不等式的解是 $0 < x < 1$.

由此可见，这样讨论是较繁的，特别当所用的 $k(x)$ 较复杂时就更繁。因此解分式不等式，我们一般不采用以 $k(x)$ 乘两边 (去分母) 的办法。

定理 4

(i) 不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ 与 $f(x)g(x) > 0$ 同解

(ii) 不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ 与 $f(x)g(x) < 0$ 同解。

说明： 定理 4 的证明方法同定理 1, 此定理是将分式不等式转化为整式不等式的依据。

定理 5

当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在不等式 $f(x) > g(x)$ 的未知数的取值范围上都非负时，$f(x) > g(x) \Longleftrightarrow f^n(x) > g^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

说明：

(1) 定理 5 的证明方法同定理 1。

(2) 若 $f(x), g(x)$ 在未知数的取值范围上非正，对 $f(x) > g(x)$ 两边同乘 (-1) 变成非负解决之.

(3) 这个定理是将无理不等式转化为有理不等式的依据。但在运用定理时，必须掌握好定理的条件。

对于这五个基本定理，再做几点说明：

(1) 定理 1 所起的作用如同不等式的性质中定理 1 一样，有了它，对“>”类型的不等式所成立的定理 2，对“<”类型的不等式仍然成立。

(2) 五个定理中，若把“>”改成“⩾”，定理 1、2、3、5 仍成立，但定理 4 不然。

(3) 定理 2、3、5 中的条件，都涉及原不等式中未知数的取值范围。

以下几节，我们将学习各类代数不等式和指数、对数不等式的解法。作为基础，先研究两个例题。

例 4.25 解关于 x 的不等式 $ax>b$, 其中 a，b 为任意实数。

解:

(i) 若 $a>0$，则 $x>\dfrac{b}{a}$ （定理 3）

$\therefore$ 解集为 $\left(\dfrac{b}{a},+\infty\right)$

(ii) 若 $a<0$，则 $x<\dfrac{b}{a}$ （定理 3）

$\therefore$ 解集为 $\left(-\infty,\dfrac{b}{a}\right)$

(iii) 若 $a=0$, $b<0$，任取 $x\in\mathbb{R}$, $ax>b$ 式都成立，

$\therefore$ 解集为 $\mathbb{R}$.

(iv) 若 $a=0$, $b\geqslant 0$，任取 $ax>b$ 都不成立，

$\therefore$ 解集为 $\varnothing$.

上述四种情况在解不等式时，是经常有用的。

例 4.26 解关于 x 的不等式 $mx-2>x-3m$ (1)

解: (1) $\Longleftrightarrow (m-1)x>2-3m$ (2)

(i) 若 $m-1>0$, $x>\dfrac{2-3m}{m-1}$

(ii) 若 $m-1<0$, $x<\dfrac{2-3m}{m-1}$

(iii) 若 $m-1=0$，即：$m=1$ 时，

$\because$ $2-3m=2-3\times 1=-1$,

$\therefore$ x 为任意实数。

从而：当 $m>1$ 时，解集为 $\left(\dfrac{2-3m}{m-1},+\infty\right)$；当 $m<1$ 时，解集为 $\left(-\infty,\dfrac{2-3m}{m-1}\right)$；当 $m=1$ 时，解集为 $\mathbb{R}$.

习题九

A

1. 解不等式组

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < 13 \\ x > 5 \\ x < 8 \end{cases}$$

2. 解下列不等式组

(1) $\begin{cases} 2x+4 > 7x+3 \\ 5x+6 > 6x+5 \\ 8x-2 < 9x-4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+2 \geqslant \dfrac{x-9}{6} + \dfrac{x+4}{2} \\ 6 - \left(\dfrac{x-2}{4} + \dfrac{2}{3}\right) \geqslant \dfrac{x}{6} \end{cases}$

并求出它的整数解.

(3) $3x-1 > 2-\dfrac{x+1}{3} \geqslant 1-\dfrac{2x-3}{2}$

(4) $-12 \leqslant 3\dfrac{1}{3}x - 5 \leqslant 4$

3. 解下列关于 x 的不等式

(1) $ax + b^2 > bx + a^2$

(2) $2k - 3x > 5 - kx$

(3) $mx + 4 < m - 2x$

(4) $m(mx-1) < 2(2x-1)$

4.11 高次不等式的解法

不等式 $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) > 0$ （其中 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是互不相等的实常数）是一元 n 次不等式 $(n \in \mathbb{N})$.

若 $n=1$，容易写出它的解集为 $(x_1, +\infty)$;

若 $n=2$，它是一元二次不等式。只要能正确地作出相应的二次函数的图象的草图（关键是开口方向和函数的零点不能弄错），再根据图象写出不等式的解集就没有什么困难了。现在的问题是，能否把这种解法——图象法，推广到 $n \geqslant 3$ 的情况。

很明显，这时关键在于怎样作出相应函数的图象的草图，让我们先剖析一个实例——作出下列函数图象的草图：

$$y = f(x) = (x+1)(x-1)(x+5)$$

第一步，曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标（称为**函数 $y=f(x)$ 的零点**）由小到大依次是 -5，-1，1，此时 x 轴被这三个交点分成四段，它们分别对应四个开区间：

$$(-\infty, -5), \quad (-5, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, +\infty)$$

第二步，研究曲线 $y = f(x)$ 在这四个开区间上分布在横轴的上方还是下方：

在 $(1, +\infty)$ 上，由于 $x > 1$，所以 $x+1>0, x-1>0, x+5>0 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 x 轴上方；

在 $(-1, 1)$ 上，由于 $-1 < x < 1$，所以 $x+1>0, x-1<0, x+5>0 \Rightarrow y < 0 \Rightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 x 轴下方；

在 $(-5, -1)$ 上，由于 $-5 < x < -1$，所以 $x+1<0, x-1<0, x+5>0 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 x 轴上方；

在 $(-\infty, -5)$ 上，由于 $x < -5$，所以 $x+1<0, x-1<0, x+5<0 \Rightarrow y < 0 \Rightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 x 轴下方；

规律性很明显：曲线 $y = f(x)$ 在上述四个彼此相邻的开区间内，从右到左依次位于 x 轴的上方、下方、上方、下方，而在 $x = -5, -1, 1$ 三处曲线与 x 轴相交。

第三步，根据上述分析，作出函数图像的草图（图 4.5）。

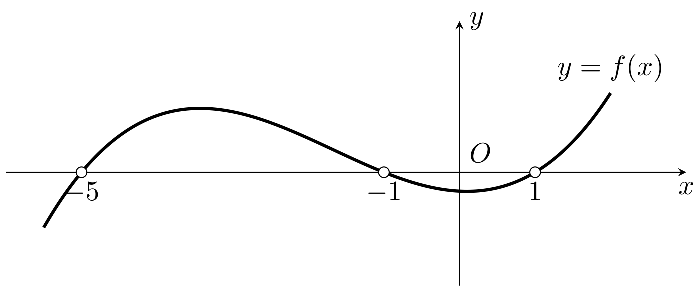


图 4.5

这种草图上要明确地表示出：

(a) 曲线与 x 轴的交点；

(b) 在某个开区间上函数的那段曲线是在 x 轴的上方还是下方。

除此以外，对草图不必做更细致的要求，例如在某个开区间上函数的最大值（最小值）画得是否确切等都无关紧要。因为在此处我们只关心不等式的解。

通过剖析实例，我们获得了作形如函数 $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$（其中 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是互不相等的实常数）图像的草图的一般方法：

第一步，求出曲线 $f(x)$ 与 x 轴交点的横坐标 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，并把它们由小到大依次标在 x 轴上。标出的 n 个点把 x 轴分成 $n+1$ 个开区间。

第二步，因为曲线 $y = f(x)$ 在这 $n+1$ 个开区间上总是依次上下相间地分布在 x 轴两侧，而且在函数的零点处彼此相连。所以，我们只要确定曲线在

最右边的开区间上分布在 x 轴的上侧还是下侧就行了。这是容易办到的，实际上我们总能使 x 的最高次幂的系数为正，曲线总是在 x 轴的上方。

第三步，根据上述分析，作出图象的草图。

例 4.27 解不等式：

(1) $(x-2)(x+1)(x+3)(x+5)>0$ (2) $(x+2)(x-3)(5-x)>0$

解：

(1) 作出函数 $y=(x-2)(x+1)(x+3)(x+5)$ 图象的草图（图 4.6）

$\therefore$ 不等式 (1) 的解集为 $(-\infty,-5)\cup(-3,-1)\cup(2,+\infty)$

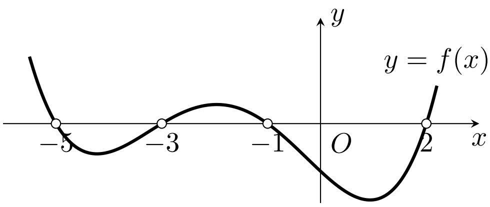


图 4.6

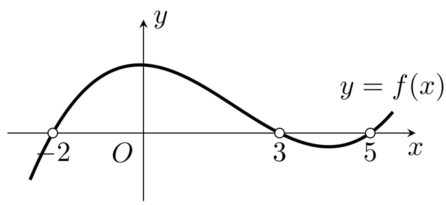


图 4.7

(2) 先把原不等式变成与它等价的 $(x+2)(x-3)(x-5)<0$，作出函数 $y=(x+2)(x-3)(x-5)$ 图象的草图（图 4.7）

$\therefore$ 解集为 $(-\infty,-2)\cup(3,5)$.

注意：在解题中，我们先以 (-1) 乘原不等式，为的是使因式 $(5-x)$ 变成 $(x-5)$。这样做可以避免出错。

说明： 这类不等式的解法可以概括成：找零点，分区间，画草图，写解集。

例 4.28 解下列不等式：

(1) $(x-4)(x-1)^2(x+2)<0$

(2) $(x+2)(x+1)^2(x-1)^3(x-3)>0$

分析： 此例中函数的解析式 $y=(x-4)(x-1)^2(x+2)$ 出现了重因式，当 x 值由大于 1 变到小于 1 的时候（不含 $x=1$），y 的取值符号没有发生变化，如图 4.8 所示.

由此，不等式 (1) 的解集为 $(-2,1)\cup(1,4)$.

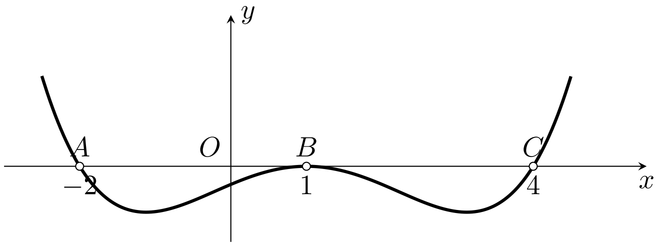


图 4.8

基于这个想法，不难得到：若 $(x-x_1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的二重因式，则曲线在点 $B(x_1)$ 处不穿过横轴，若 $(x-x_1)$ 是三重因式，则曲线在点 $B(x_1)$ 处穿过横轴，依次类推。

对于第（2）题，依上述办法作出函数 $y=(x+2)(x+1)(x-1)^3(x-3)$ 的草图（图 4.9）. 由此可得（2）的解集是 $(2-1)\cup(-1,1)\cup(3,+\infty)$.

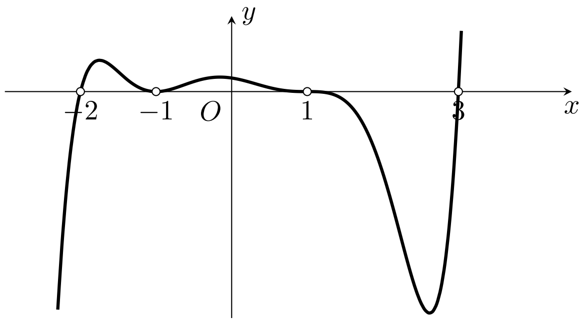


图 4.9

思考题

如何解下列不等式：

(1) $(x+3)(x-2)(x^2-2x-3)<0$;

(2) $(x-1)(x^2-x+5)>0$.

例 4.29 解不等式：$(x+3)(x-2)^2(x+1)^2(x-1)\geqslant 0$.

分析：这里出现了“⩾”。处理这类问题的办法是：在画函数图象的草图时，只要把曲线与 x 轴的交点画成“实点”即可。

解：作出函数 $y=(x+3)(x-2)^2(x+1)^2(x-1)$ 的草图（图 4.10）。

$\therefore$　不等式的解集是 $(-\infty,-3]\cup\{-1\}\cup[1,+\infty)$

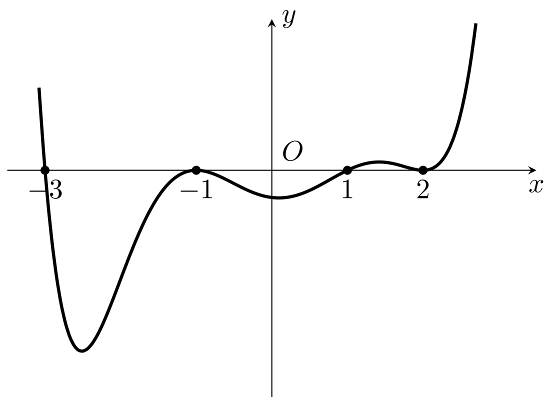


图 4.10

习题十

A

1. 解下列二次不等式：

(1) $x^2+4x-45 \geqslant 0$ (2) $x^2-5ax+6a^2>0$

2. (1) 解关于 x 的不等式：$ax^2-2ax+a+3 \leqslant 0$

(2) 关于 x 的不等式 $ax^2+5x+b>0$ 的解集是 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ ，求 a,b

(3) 关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 (α,β), $\alpha>0$, 求关于 x 的不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集。

3. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x^2-2x-3 \leqslant 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-a \geqslant 0 \\ x^2-2x-3<0 \end{cases}$

4. a 为何值时，不等式组 $\begin{cases} (x-2)(x-5) \leqslant 0 \\ x(x-a) \geqslant 0 \end{cases}$ 的解集为：

(1) $\varnothing$; (3) 与第一个不等式同解.

(2) 单元素集;

5. 解下列高次不等式：

(1) $(x+2)(x^2-1)>0$;

(2) $(2x+1)(3x-1)(2-x)\leqslant 0$;

(3) $(x+1)^3(x-5)(x^2+3x)(x-2)^2(2x+1)^2<0$;

(4) $x^2(x+3)(x-1)(x-2)^2(x-3)\geqslant 0$.

6. 不等式 $ax^2+ax+(a-1)<0$ 对所有的实数 x 都成立，求 a 的取值范围.

B

7. 已知 $M=\{x \mid x^2-3x-10\geqslant 0\}$, $N=\{x \mid x^2-(2a+3)x+a^2+3a<0\}$. 求 a 的值，使得：(1)$M\cap N=\varnothing$,　　(2)$M\cap N=N$.

8. 不等式组 $\begin{cases} x^2-x-2>0, \\ 2x^2+(2k+5)x+5k<0, \end{cases}$ 的整数解只有 -2，求 k 的取值范围。

9. 已知不等式 $x^2-x-6<0$, $x^2+2x-8>0$, $x^2-4ax+3a^2<0$ 的解集分别是 A,B,C.

(1) 试求 a 的取值范围，使 $C\supseteq A\cap B$,

(2) 试求 a 的取值范围，使 $C\supseteq \overline{A}\cap\overline{B}$.

10. 设 $A=\{x \mid (x+2)(x-1)>0\}$, $B=\{x \mid ax^2+abx+b\geqslant 0,\ a\neq 0\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=A$，求 a 与 b 的关系.

C

11. 解关于 x 的不等式 $ax^2-1<x+a$.

4.12　分式不等式的解法

分母中含有未知数的不等式称为**分式不等式**。如

$$\frac{1}{x}<2, \qquad \frac{2x+3}{x-1}>x+1$$

解分式不等式的依据是 4.10 节中的定理 4，其基本思想是将分式不等式**"化归"**与它同解的整式不等式，从而求出它的解集。

例 4.30 解不等式 $\dfrac{2x-1}{(x+2)(x-3)}<0.$

解:

$$\text{原不等式} \Longleftrightarrow (2x-1)(x+2)(x-3)<0$$

$\therefore$ 解集为 $(-\infty,-2)\cup\left(\dfrac{1}{2},3\right)$.（图 4.11）

例 4.31 解不等式 $\dfrac{x^2+x-2}{x^3+7x^2-8x}\geqslant 0.$

解:

$$\text{原不等式} \Longleftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+8)(x-1)}\geqslant 0 \Longleftrightarrow \begin{cases}(x+2)(x-1)^2x(x+8)\geqslant 0\\ x(x+8)(x-1)\neq 0\end{cases}$$

$\therefore$ 原不等式的解集是 $(-8,-2]\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.（图 4.12）

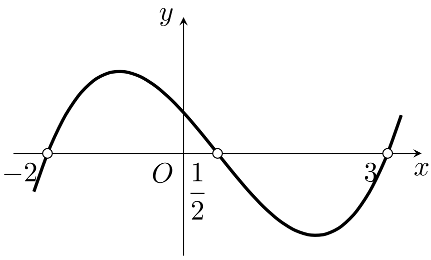


图 4.11

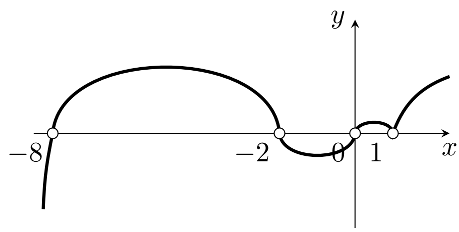


图 4.12

例 4.32 解不等式 $\dfrac{4}{x-1}\leqslant x-1.$

解:

$$\begin{aligned}\text{原不等式} &\Longleftrightarrow \frac{4}{x-1}-(x-1)\leqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{4-(x-1)^2}{x-1}\leqslant 0\\ &\Longleftrightarrow \frac{(3-x)(x+1)}{x-1}\leqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-3)(x+1)}{x-1}\geqslant 0\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x+1)(x-1)\geqslant 0\\ x-1\neq 0\end{cases}\end{aligned}$$

$\therefore$ 原不等式的解集是 $[-1,0)\cup[3,+\infty)$. （图 4.13）

例 4.33 解不等式 $3x+5+\dfrac{1}{x-4}>2x+\dfrac{1}{x-4}+3.$

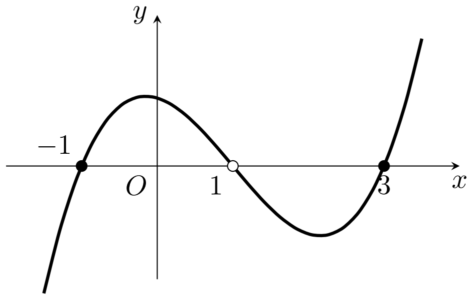


图 4.13

分析：先消去不等号两边的分式将使解法简化，但消去后的不等式与原不等式不同解，这一点必须特别注意.

解：

$$\text{原不等式} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x+5>2x+3 \\ x-4\neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\neq 4 \end{cases}$$

$\therefore$　原不等式的解集为 $(-2,4)\cup(4,+\infty)$.

例 4.34　解不等式 $\dfrac{x-a}{(x+2)(x-3)}<0$　(1)

解：

$$(1) \Longleftrightarrow (x-a)(x+2)(x-3)<0 \tag{2}$$

由于 a 的不同取值使方程 $(x-a)(x+2)(x-3)=0$ 的根在 x 轴上的相对位置不确定，故应对字母 a 的取值进行讨论。

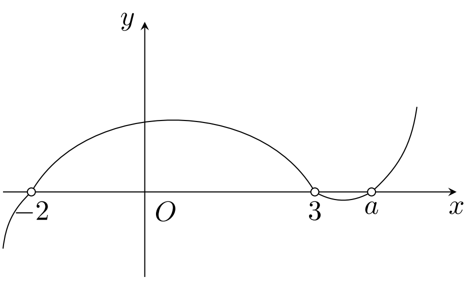


图 4.14

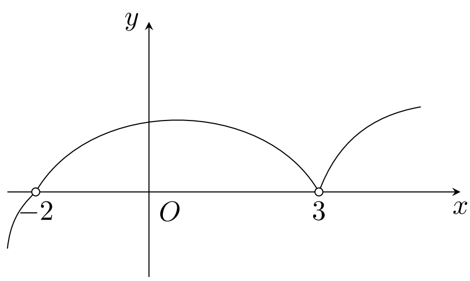


图 4.15

(i) 当 $a>3$ 时（图 4.14），解集为 $(-\infty,-2)\cup(3,a)$

(ii) 当 $a=3$ 时（图 4.15），(2) 变成 $(x-3)^2(x+2)<0$

$\therefore$　解集为 $(-\infty,-2)$.

(iii) 当 $-2 < a < 3$ 时（图 4.16），解集为 $(-\infty, -2) \cup (a, 3)$

(iv) 当 $a = -2$ 时（图 4.17），(2) 变成 $(x+2)^2(x-3) < 0$，解集为 $(-\infty, -2) \cup (-2, 3)$

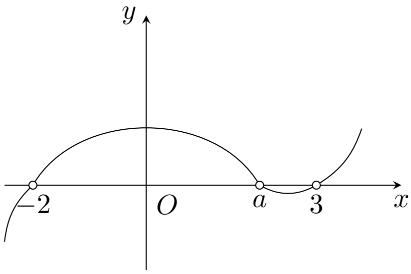


图 4.16

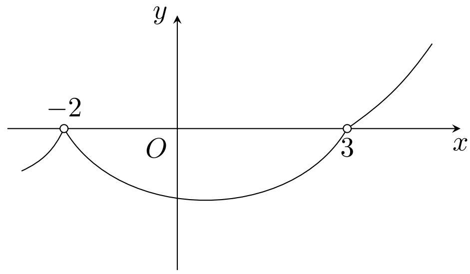


图 4.17

(v) 当 $a < -2$ 时（图 4.18），解集为 $(-\infty, a) \cup (-2, 3)$

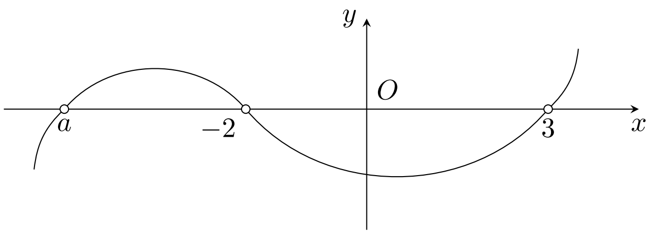


图 4.18

习题十一

A

1. 解下列不等式:

(1) $3x - 2 + \dfrac{1}{5-x} > 2x + 1 - \dfrac{1}{x-5}$

(2) $\dfrac{2x-3}{3x-4} < 2$

(3) $\dfrac{x(x-3)}{x^2-3x+2} < 0$

(4) $\dfrac{x^2}{x^2-6x+8} \geqslant 1$

(5) $\dfrac{x+1}{(x-2)^2(x+1)} < 1$

(6) $2 + \dfrac{2}{x-1} \leqslant \dfrac{5}{4-x}$

2.（选择题）下列不等式中，与 $\dfrac{x-3}{2-x} \geqslant 0$ 同解的是（　　）

(A) $(x-3)(2-x)\geqslant 0$ (C) $\dfrac{2-x}{x-3}\geqslant 0$

(B) $(x-3)(2-x)>0$ (D) $\lg(x-2)\leqslant 0$

C

3. 解关于 x 的不等式 $5^{\frac{a(1-x)}{x-2}+1}<1$

4.13 无理不等式的解法

在根号内含有未知数的不等式称为**无理不等式**。如 $\sqrt{x-1}>x-3$, $\sqrt{x}+2<\sqrt{2x-1}+1$ 等.

解无理不等式应注意:

(1) 必须使出现在不等式中的根式有意义，这就需要求出根式中函数的定义域;

(2) 无理不等式的求解，根本是**化归**为有理不等式，转化的依据是 4.10 节中的定理 5。

以下研究几个例子。

例 4.35 解不等式 $\sqrt{x-1}>x-3$ (1)

分析:

1. 为使用定理 5，应对有理式 $x-3$ 进行讨论。
2. (1) 式的结构特征使我们想到换元法。
3. (1) 式两边都是我们熟知的函数。

解: 解法 1:

$$(1)\iff (\mathrm{I})\begin{cases} x-3\geqslant 0 & \text{（限制条件）}\\ x-1\geqslant 0 & \text{（定义域）}\\ x-1>(x-3)^2 \end{cases} \quad \text{和} \quad (\mathrm{II})\begin{cases} x-3<0 & \text{（限制条件）}\\ x-1\geqslant 0 & \text{（定义域）}\end{cases}$$

而

$$(\mathrm{I})\iff\begin{cases} x\geqslant 3\\ x-1>(x-3)^2\end{cases}\iff\begin{cases} x\geqslant 3\\ (x-2)(x-5)<0\end{cases}$$

$\therefore\quad 3\leqslant x<5.$

$$(\mathrm{II}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geqslant 1 \end{cases} \qquad \therefore \quad 1 \leqslant x < 3$$

$\therefore$ (1) 的解集为 $[3,5) \cup [1,3)$，即 $[1,5)$.

解法 2： (1) 即 $\sqrt{x-1} > (x-1)-2$.

令 $t = \sqrt{x-1} \geqslant 0$，得 $\begin{cases} t \geqslant 0 \\ t^2 - t - 2 < 0 \end{cases}$

解之，得 $0 \leqslant t < 2$，即 $0 \leqslant \sqrt{x-1} < 2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x-1 < 4 \end{cases}$

$\therefore \quad 1 \leqslant x < 5$.

解法 3： 令 $y_1 = \sqrt{x-1}$，$y_2 = x-3$，从而 (1) 的解集就是使函数 $y_1 > y_2$ 的 x 的取值范围。在同一个坐标系中分别作出两个函数的图象（图 4.19）. 设它们交点的横坐标是 x_0，则 $\sqrt{x_0-1} = x_0 - 3 > 0$

解之，得 $x_0 = 2$（舍）或 $x_0 = 5$

$\therefore$ (1) 的解集为 $[1,5)$.

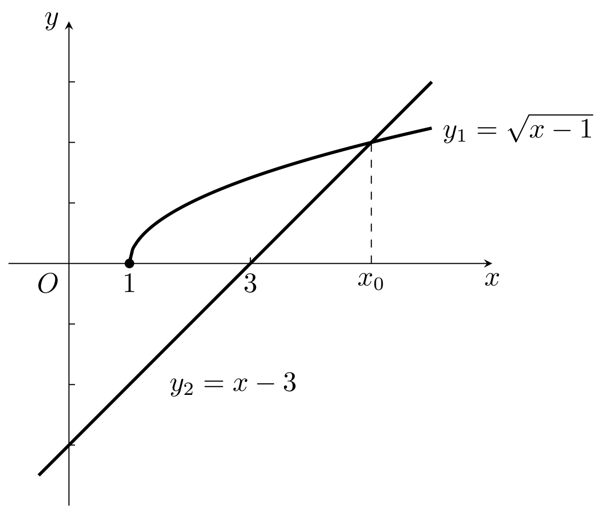


图 4.19

评述： 解法 1 是通法，应熟练掌握。换元法与图象法的突破口是认清式子的结构特征。

例 4.36 解不等式 $(x-1)\sqrt{x+2} \geqslant 0$ (1)

解:

$$(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-1)\sqrt{x+2} > 0 & (2) \\ (x-1)\sqrt{x+2} = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2 \geqslant 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad x > 1$$

(3) 的解集是 $x = 1$ 或 $x = -2$.

$\therefore$ (1) 的解集为 $[1, +\infty) \cup \{-2\}$.

例 4.37 解不等式 $\sqrt{2ax - a^2} > a - x \ (a > 0)$ (1)

解:

$$(1) \Longleftrightarrow (\mathrm{I}) \begin{cases} a - x \geqslant 0 \\ 2ax - a^2 \geqslant 0 \\ 2ax - a^2 > (a-x)^2 \end{cases} \quad 和 \quad (\mathrm{II}) \begin{cases} a - x < 0 \\ 2ax - a^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

而

$$(\mathrm{I}) \Longleftrightarrow \begin{cases} a - x \geqslant 0 \\ 2ax - a^2 > (a-x)^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leqslant a \\ (x-2a)^2 < 2a^2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \leqslant a \\ |x - 2a| < \sqrt{2}a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leqslant a \\ 2a - \sqrt{2}a < x \leqslant 2a + \sqrt{2}a \end{cases}$$

$\therefore \quad 2a - \sqrt{2}a < x \leqslant a \quad (\because \quad a > 0)$

$$(\mathrm{II}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x > a \\ x \geqslant \dfrac{a}{2} \end{cases} \qquad \therefore \quad x > a \quad (\because \quad a > 0)$$

$\therefore$ (1) 的解集是 $(2a - \sqrt{2}a, a] \cup (a, +\infty) = \big((2-\sqrt{2})a, +\infty\big)$

习题十二

A

解下列不等式 (1—8 题)

1. $4x - 3 + \sqrt{10 - x} > 3x + 2 + \sqrt{10 - x}$

2. $\sqrt{3-x} > x-2$

3. $\sqrt{2x^2-6x+4} < x+2$

4. $\sqrt{3x-15} - \sqrt{x-4} \geqslant 0$

5. $\sqrt{4-\log_{0.3} x} < \log_{0.3} x - 2$ （提示：令 $\log_{0.3} x = y$）

6. $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-5} > 1$

B

7. $\sqrt{\log_2^2 x + \log_2 x - 2} > 2\log_2 x - 2$

8. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0$

9. 设 $A = \{x \mid 5-x > \sqrt{2(x-1)}\}$, $B = \{x \mid x^2 - ax \leqslant x - a\}$, 要使 $A \subset B$, 求实数 a 的取值范围。

10. 解关于 x 的不等式 $\sqrt{2x-a} < \sqrt{x+1}$

C

11. 解关于 x 的不等式 $\sqrt{a-2x} > a-x$（提示：参考例 1 的解法 2）.

4.14 绝对值不等式的性质、解法与证明

在绝对值符号中含有未知数的不等式称为**绝对值不等式**。如 $|x-2| < 3$, $|x-1| - |x+2| \geqslant 5$ 等。

实数绝对值的定义

若 $a \in \mathbb{R}$，那么

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

显然有

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$

最简绝对值不等式的解集（填空）

(1) 若 $|x| < R$，则 $x \in$ ____；

(2) 若 $|x| > r$, $(r > 0)$，则 $x \in$ ____；

(3) 若 $r < |x| < R$, $(0 < r < R)$，则 $x \in$ ____.

说明：

(i) 若把 x 看作数轴上点 P 的坐标，则 $|x|$ 就是点 P 到原点 O 的距离。那么，上述三个最简绝对值不等式的解集的几何意义十分明显。

(ii) 把三个最简绝对值不等式写成与它等价的解集的形式是脱去绝对值符号的重要方法，应该熟练掌握。

(iii) 为了"脱去"绝对值号，有时也采用不等式两边分别平方的办法。如

$$|A| \geqslant |B| \iff A^2 \geqslant B^2$$

（这是因为 $|A| \geqslant |B| \geqslant 0$）

(iv) 这里的正数 R、r 不仅可以放宽到零和负数，而且进一步还可以放宽为含未知数的解析式（这无疑会给解题带来极大的方便）：

- 推广 1：$|x| < \varphi(x) \iff -\varphi(x) < x < \varphi(x)$;
- 推广 2：$|x| > \varphi(x) \iff x < -\varphi(x)$或$x > \varphi(x)$.

（用 5.11 中定理 1 的证法可以证明这两个推广）

例 4.38　解不等式 $|x^2 + 3x - 8| \leqslant 10$　　(1)

解： $(1) \iff -10 \leqslant x^2 + 3x - 8 \leqslant 10$　　(2)

$$(2) \iff \begin{cases} -10 \leqslant x^2 + 3x - 8 \\ x^2 + 3x - 8 \leqslant 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 3x + 2 \geqslant 0 \\ x^2 + 3x - 18 \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x+2)(x+1) \geqslant 0, & (3) \\ (x+6)(x-3) \leqslant 0, & (4) \end{cases}$$

很清楚（图 4.20），不等式组 (3)、(4) 的解集为 $[-6, -2] \cup [-1, 3]$.

例 4.39　解不等式 $|5x - x^2| > 6$　　(1)

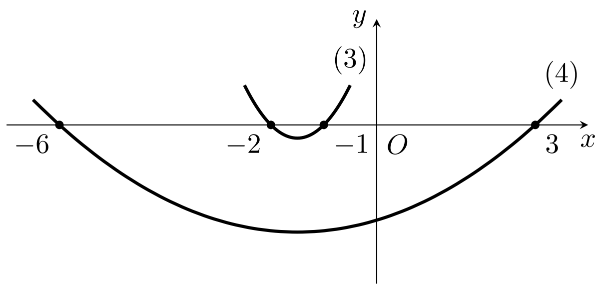


图 4.20

解：(1) 即 $|x^2-5x|>6$ (*)

（习惯上，我们总是先按 x 的降幂排列，并使 x 的最高次项的系数为正）。

$$(*) \Longleftrightarrow x^2-5x<-6, \text{或} x^2-5x>6$$

$$\Longleftrightarrow x^2-5x+6<0, \text{或} x^2-5x-6>0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3)<0, & (2) \\ (x-6)(x+1)>0, & (3) \end{cases}$$

(2) 的解集是 $(2,3)$；(3) 的解集是 $(-\infty,-1)\cup(6,+\infty)$.

$\therefore$ (1) 的解集为 $(2,3)\cup(-\infty,-1)\cup(6,+\infty)$

例 4.40 解不等式 $3\leqslant|5-2x|<9$ (1)

解：先把 (1) 改写成 $3\leqslant|2x-5|<9$ (*)

根据最简绝对值不等式 (3)，有

$$(*) \Longleftrightarrow \begin{cases} -9<2x-5\leqslant-3, & (2) \\ 3\leqslant 2x-5<9, & (3) \end{cases}$$

$\therefore$ (1) 的解集为 $(-2,1]\cup[4,7)$.

评述：上述三例，都是利用最简绝对值不等式的解集脱去了绝对值符号，这是最常用也是最基本的方法。若要用“先平方”的办法脱去绝对值号，运算量一般都较大，而且有时还有可能增解，这时必须检验。

例 4.41 解不等式 $|x^2-4|\leqslant x+2$ (1)

解：根据推广 1，(1) $\Longleftrightarrow -x-2\leqslant x^2-4\leqslant x+2$ 即

$$\begin{cases} x^2-4\geqslant -x-2, \\ x^2-4\leqslant x+2, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2\geqslant 0, \\ x^2-x-6\leqslant 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1)\geqslant 0, \\ (x+2)(x-3)\leqslant 0. \end{cases}$$

$\therefore$ (1) 的解集为 $[1,3]\cup\{-2\}$.

思考题

用图象法解此题行吗？试一试。

例 4.42 解不等式 $\left|\dfrac{x+3}{2x-1}\right| \leqslant 1$

解： **解法 1：** 原不等式同解于：

$$\begin{aligned}&|x+3| \leqslant |2x-1|,\ 且 2x-1 \neq 0,\\ \iff &(x+3)^2 \leqslant (2x-1)^2\ 且 2x-1 \neq 0,\\ \iff &3x^2-10x-8 \geqslant 0\ 且 2x-1 \neq 0\\ \iff &(3x+2)(x-4) \geqslant 0\ 且 2x-1 \neq 0.\end{aligned}$$

$\therefore$ (1) 的解集为 $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right] \cup [4, +\infty)$.

解法 2：

$$(1) \iff \left(\frac{x+3}{2x-1}\right)^2 - 1 \leqslant 0$$

$$\iff \frac{3x^2-10x-8}{(2x-1)^2} \geqslant 0 \iff \begin{cases}(3x+2)(x-4) \geqslant 0\\ (2x-1)^2 \neq 0\end{cases}$$

$\therefore$ (1) 的解集为 $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right] \cup [4, +\infty)$.

例 4.43 解不等式 $|x+7| - |x-2| < 3$ (1)

分析： 这里出现了两个绝对值号，上述三个最简绝对值不等式的结果已不能使用，只好根据“实数绝对值的定义”去脱绝对值号。为此，需要分别求出 $|x+7|$ 与 $|x-2|$ 的零点（使函数值为零的 x 值），再以诸零点为边界，把 $(-\infty, +\infty)$ 分成几个相互连接的区间，然后在每个区间上去探求 (1) 的解。也就是说，把在实数集 $\mathbb{R}$ 上解不等式 (1)，转化成在 $\mathbb{R}$ 的子区间上分别去解 (1)。这就是此法的实质。

解： 由于 $-7, 2$ 分别是 $|x+7|$ 与 $|x-2|$ 的零点，它们把区间 $(-\infty, +\infty)$ 分成三个子区间（图 4.21）。

由此，(1) 可化成三个不等式组：

$$(1)\ \begin{cases}x \geqslant 2,\\ (x+7)-(x-2) < 3,\end{cases} \iff \begin{cases}x \geqslant 2,\\ 9 < 3.\end{cases}$$

$\therefore$ 解集 $X_1 = \varnothing$

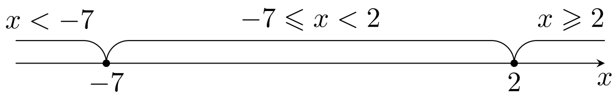


图 4.21

(2) $\begin{cases} -7\leqslant x<2, \\ (x+7)+(x-2)<3, \end{cases} \iff \begin{cases} -7\leqslant x<2, \\ x<-1. \end{cases}$

$\therefore$ 解集 $X_2=[-7,-1)$

(3) $\begin{cases} x<-7, \\ -(x+7)-[-(x-2)]<3. \end{cases} \iff \begin{cases} x<-7, \\ -9<3. \end{cases}$

$\therefore$ 解集 $X_3=(-\infty,-7)$.

$\therefore$ (1) 的解集为 $X_1\cup X_2\cup X_3=(-\infty,-1)$.

思考题

(1) 根据 (1) 式的几何意义，你能通过画出数轴直接看出它的解集吗?

(2) 根据几何意义，你能判断不等式 $|x|+|x-3|<1$ 无解吗?

例 4.44 解不等式 $\dfrac{\log_{0.1}|x-2|}{x^2-4x}<0$ (1)

解:

$$(1)\iff \begin{cases} \log_{0.1}|x-2|>0 \\ x^2-4x<0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \log_{0.1}|x-2|<0 \\ x^2-4x>0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0<|x-2|<1 \\ x(x-4)<0 \end{cases} \text{（图 4.22）} \quad \text{或} \quad \begin{cases} |x-2|>1 \\ x(x-4)>0 \end{cases} \text{（图 4.23）}$$

$\therefore$ (1) 的解集为 $(1,2)\cup(2,3)\cup(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$.

例 4.45 用简捷方法解 $|x^2-2|<|x|$ (1)

解: 解法 1: (1) 即 $\left||x|^2-2\right|<|x|$

令 $|x|=y$，则上式 $\iff |y^2-2|<y \iff 1<y<2$

$\therefore$ $1<|x|<2$.

从而 (1) 的解集为 $(-2,-1)\cup(1,2)$.

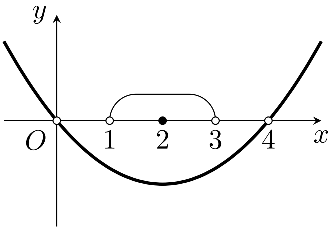


图 4.22

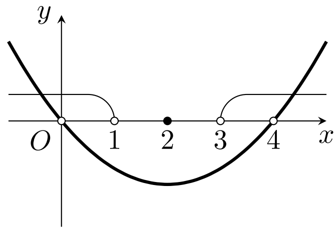


图 4.23

解法 2：$\because$　不等号两边的函数都为偶函数，

$\therefore$　若 x 为 (1) 的解，则 $-x$ 也为 (1) 的解。

当 $x \geqslant 0$ 时，(1) $\Longleftrightarrow |x^2-2| < x$，解之得 $1 < x < 2$

$\therefore$　当 $a \leqslant 0$ 时，必有 $-2 < x < -1$，从而，(1) 的解集为 $(-2\ -1) \cup (1,2)$.

习题十三

A

1. 解不等式：

(1) $|x+1| < \sqrt{2}$

(2) $1 < |x-4| \leqslant 2$

(3) $|x^2-2x-3|-2 > 0$

(4) $3 \leqslant |5-2x| < 9$

(5) $|x^2+2x-1| < 2$

(6) $|x^2-1| \geqslant x$

(7) $|x^3-1| > 1-x$

2. 解不等式：

(1) $|x+6|-|3-2x| > 4$

(2) $\sqrt{4-4x+x^2}+|x-3|-1 \leqslant 0$

(3) $\sqrt{x^2+2x+1}-2|2-x| > 5-x$

(4) $|x|+|x-3| \leqslant 1$

3. 求 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的最小值。（提示：从几何意义上考虑最简便）

4. 解不等式：

(1) $\left|\dfrac{x-3}{x+1}\right| \geqslant 1$

(2) $\left|\dfrac{2x-1}{2-x}\right| < 2$

5. 用最简捷的方法解下列不等式：

(1) $\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$　(3) $1 \leqslant \left|\frac{1}{x-2}\right| \leqslant 2$　(5) $2 < \frac{1}{x+1} \leqslant 3$

(2) $\left|\frac{1}{x}\right| \geqslant \frac{1}{3}$　(4) $0 \leqslant \frac{1}{x+1} \leqslant 2$

B

6. 用最简捷的方法解不等式 $x^2-3x-4>0$.

7. 若不等式 $|x|+|x-3|<a$ 有解，求实数 a 的取值范围。

8. 解不等式（复习指数与对数不等式的解法）:

(1) $4^x-6^x-2.9^x>0$

(2) $a^{2x}+1<a^{x+2}+a^{x-2}$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）

(3) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+4)<1$

(4) $\log_2(x+1)+\log_{0.25}(x-1)>\log_4(2x-1)$

(5) $\log_x(x+2)>2$

(6) $\log_2 x-\log_{\sqrt{x}} 2<1$

9. 用换元法解不等式:

(1) $\log_3 x+10\log_x 27>4$

(2) $\log_a x>6\log_x a-1$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）

(3) $\frac{1}{1+\lg x}+\frac{1}{1-\lg x}>2$

(4) $x^{\log_a x}>\frac{x^4\cdot\sqrt{x}}{a^2}$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）

(5) $\left|\log_{\sqrt{a}x}-2\right|-|\log_a x-2|<2$

10. 若集合 $A=\left\{n\middle|-\frac{1}{2}\leqslant\log_{\frac{1}{n}}2\leqslant-\frac{1}{3},\ n\in\mathbb{Z}\right\}$，试求 A 的元素的个数和子集的个数。

C

11. 解关于 x 的不等式 $|x|>\frac{6a^2}{a-x}$

12. 解不等式 $\frac{\lg 2x}{\lg(4x-5)}<2$

13. 解不等式 $|\sqrt{2x-1}-x|<2$

14. 当 $a>1$ 时，解关于 x 的不等式 $|a^x-1|+|a^{2x}-3|>2$

4.14.1 实数的绝对值的运算性质

根据实数绝对值的定义，可以得到：

性质 1

$$|ab| = |a| \cdot |b| \qquad (\forall a, b \in \mathbb{R})$$

性质 2

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (\forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ 且} b \neq 0)$$

（你能给出这两个性质的证明吗?）

性质 3

对于任意的实数 a, b,

(1) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$，等号当且仅当 $ab \geqslant 0$ 时成立;

(2) $|a+b| \geqslant |a| + |b|$，等号当且仅当 $ab \leqslant 0$ 时成立.

证明：欲证 (1)，只要证 $(|a+b|)^2 \leqslant (|a| + |b|)^2$，即

$$a^2 + 2ab + b^2 \leqslant a^2 + b^2 + 2|ab|$$

很明显，此式当 $ab < 0$ 时“$<$”成立，当 $ab \geqslant 0$ 时“$=$”成立。

(2) 的证明是类似的。

性质 4

对于任意实数 a, b,

(1) $|a-b| \leqslant |a| + |b|$，等号当且仅当 $ab \leqslant 0$ 时成立;

(2) $|a-b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$，等号当且仅当 $ab \geqslant 0$ 时成立.

证明：在性质 3 中以 $(-b)$ 代替 b 即可。

上述两个性质，也可以统一写成

$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$$

例 4.46 已知 $|x| < \dfrac{a}{4}$, $|y| < \dfrac{a}{6}$，求证：$|2x - 3y| < a$.

证明： $\because \quad |2x - 3y| < |2x| + |3y|$，而

$$
\begin{aligned}
|2x| &= |2| \cdot |x| = 2|x| < 2 \cdot \frac{a}{4} = \frac{a}{2} \\
|3y| &= |3| \cdot |y| = 3|y| < 3 \cdot \frac{a}{6} = \frac{a}{2}
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad |2x - 3y| < \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} = a.$

例 4.47 解不等式 $|x| + |x - 3| < 1$.

解： $\because \quad |x| + |x - 3| \geqslant |x - (x - 3)| = 3$

$\therefore$ 原不等式无解。

习题十四

A

1. 已知 $|x - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|y - b| < \varepsilon 2$, 求证:

   (1) $|(x + y) - (a + b)| < \varepsilon$

   (2) $|(x - y) - (a - b)| < \varepsilon$

2. 已知 $|x| < \sqrt{a}$, $|y| < \sqrt{b}$, 求证 $|xy| < \sqrt{ab}$.

3. 已知 $|x| < m\varepsilon$, $|y| > m > 0$, $\varepsilon > 0$. 求证: $\left|\dfrac{\pi}{y}\right| < \varepsilon$

4. 已知 $|a_n - \ell| < 1$, 求证 $|a_n| < |\ell| + 1$.

5. 已知 $|x| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $|y| < \dfrac{\varepsilon}{6}$, $|z| < \dfrac{\varepsilon}{9}$, $\varepsilon > 0$, 求证 $|x + 2y - z| < \varepsilon$.

B

6. 判断下列命题的真假（应简述理由）:

   (1) $|x - 100| + |x + 100| < 5$，无解；

   (2) $2|x - 10| + |x - 1| < 2$，无解；

   (3) $\sqrt{4 - 4x + x^2} + |x - 3| - 1 \leqslant 0$ 的解是 $[2, 3]$;

   (4) $|x - 5| + |2 - x| \leqslant -5$，无解；

(5) $|x-5|+|x+2| \leqslant 6$，无解。

7. 利用最简绝对值不等式的解集 (1) 证明本节性质 3(1).

8. (1) 求不等式 $|x-3|+|x-5|<a$ 有解的充要条件；

(2) 求不等式 $|x-3|-|x-5| \geqslant a$ 有解的充要条件。

4.14.2 绝对值不等式的证明

例 4.48 已知 $|a|<1$, $|b|<1$, 求证: $\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$ (1)

证明： 证法 1：欲证 (1)，只要证

$$-1<\frac{a+b}{1+ab}<1 \tag{2}$$

欲证 (2)，只要证

$$-1<\frac{a+b}{1+ab} \quad 且 \quad \frac{a+b}{1+ab}<1 \tag{3}$$

欲证 (3)，只要证

$$\frac{a+b}{1+ab}+1>0 \quad 且 \quad \frac{a+b}{1+ab}-1<0 \tag{4}$$

但是

$$\frac{a+b}{1+ab}+1=\frac{a+b+1+ab}{1+ab}=\frac{(b+1)(a+1)}{1+ab}>0$$

($\because \quad |a|<1, \quad |b|<1 \qquad \therefore \quad a+1>0, \quad b+1>0, \quad 1+ab>0$)

$$\frac{a+b}{1+ab}-1=\frac{a+b-1-ab}{1+ab}=\frac{-(1-a)(1-b)}{1+ab}<0$$

($\because \quad |a|<1, \quad |b|<1 \qquad \therefore \quad 1-a>0, \quad 1-b>0, \quad 1+ab>0$)

$\therefore$ (4) 成立，从而 (1) 成立.

证法 2：我们利用 $|A| \geqslant |B| \Longleftrightarrow A^2 \geqslant B^2$ 来证 (1)

欲证 (1), 只要证

$$\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)^2<1, \quad (1+ab) \neq 0 \tag{2}$$

欲证 (2), 只要证

$$(a+b)^2<(1+ab)^2, \quad 1+ab \neq 0 \tag{3}$$

欲证 (3), 只要证

$$1-a^2-b^2+a^2b^2>0, \quad 1+ab \neq 0 \tag{4}$$

欲证 (4), 只要证

$$(1-a^2)(1-b^2)>0,\quad 1+ab\neq 0 \tag{5}$$

而由 $|a|<1$，$|b|<1$ 得知 (5) 成立，从而 (1) 成立。

例 4.49 求证 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$ (1)

分析: 问题的困难在于三个分式的分母都不相同。当然我们可以用分析法先去分母逆推之，直至发现明显不等式为止，但这样做运算较繁。

在此，我们先把右边缩小化成同分母的式子。

证明: $\because\quad \dfrac{|a|}{1+|a|}\geqslant\dfrac{|a|}{1+|a|+|b|},\quad \dfrac{|b|}{1+|b|}\geqslant\dfrac{|b|}{1+|a|+|b|}$

$\therefore$ 欲证 (1), 只要证

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \tag{2}$$

欲证 (2), 只要证

$$|a+b|\cdot(1+|a|+|b|)\leqslant(1+|a+b|)(|a|+|b|) \tag{3}$$

即

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

此式显然成立 $\Rightarrow$ (2) 成立 $\Rightarrow$ (1) 成立。

作为本节最后一例，介绍用几何方法证代数不等式。

例 4.50 求证:$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-a)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$

分析: 若把 $A(a,b)$ 看作是坐标系 xOy 中的点，那么 $\sqrt{a^2+b^2}=|OA|$. 为了出现 $\sqrt{2}$，可以取 $B(1,1)$，则 $\sqrt{2}=|OB|$，有了这两个点，$\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}$ 可以表示成 $|AB|$，类似地可以处理其余两个根式。

证明:

在坐标系 xOy 中 (图 4.24) 取定三个点 $A(a,b)$，$B(1,1)$, $C(1-a,b)$. 显然

$$|OA|=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$|AB|=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}$$
$$|OC|=\sqrt{(1-a)^2+b^2}$$
$$|CB|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$$
$$|OB|=\sqrt{2}$$

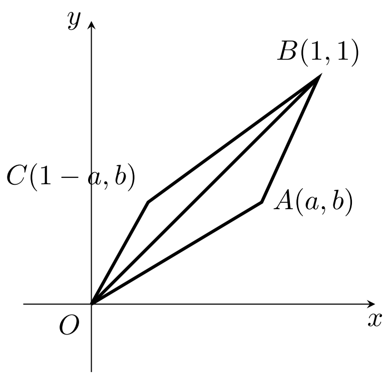


图 4.24

$\because\quad |OA|+|AB|\geqslant|OB|,$

$$\therefore\quad \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}\geqslant\sqrt{2} \tag{1}$$

$\because\quad |OC|+|CB|\geqslant|OB|$

$$\therefore\quad \sqrt{b^2+(1-a)^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}\geqslant\sqrt{2} \tag{2}$$

(1)(2) 可得欲证不等式.

(1) 式取等号的条件是当且仅当 O,A,B 共线且 A 在线段 OB 上时，即 $0\leqslant a=b\leqslant 1$。同理，可求出 (2) 式取等号的条件是 $0\leqslant 1-a=b\leqslant 1$。由此，欲证不等式取等号的条件是

$$\begin{cases}0\leqslant a=b\leqslant 1\\ 0\leqslant 1-a=b\leqslant 1\end{cases}\quad\Rightarrow\ a=b=\frac{1}{2}$$

习题十五

A

1. 用例 11 证法 2 的思想证明:

   (1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\geqslant|a|+|b|$

   (2) $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$, $(a>b>0)$

   (3) $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}\geqslant\dfrac{x+y+z}{3}$, $(x,y,z\in\mathbb{R}^+)$，并把此处证法与习题八第 2 题相对比。

2. (1) 若 $\left(\dfrac{1+ab}{a+b}\right)^2<1$, 求证: $|a|$ 与 $|b|$ 之中，一个大于 1, 另一个小于 1;

   (2) 求证 $\dfrac{1}{1+|a|}+\dfrac{1}{1+|b|}\leqslant 1+\dfrac{1}{1+|a+b|}$;

   (3) 求证 $\dfrac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}>\dfrac{\sqrt{a+b}}{1+\sqrt{a+b}}$ $(a>0,b>0)$

3. 若 x,y,a 都是实数，且 $x^2+y^2=1$, 求证 $|x\cos\alpha+y\sin\alpha|\leqslant 1$.

B

4. 用两种方法（代数方法和几何方法）证明:

   (1) 若 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$，则 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$，并指出等号成立的条件;

(2) 若 a,b,c 是三个非负数, 则 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$

5. 若 $a\in\mathbb{R}$，求证 $|\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}|<1$.

C

6. 设 $f(x)=x^2+ax+b$ 是一个整系数二次三项式, 则 $|f(1)|<\dfrac{1}{2}$, $|f(2)|<\dfrac{1}{2}$ 和 $|f(3)|<\dfrac{1}{2}$ 不能同时成立.

7. 设 $a,b,c,d\in(0,1)$，求证：$4a(1-b)$, $4b(1-c)$, $4c(1-d)$, $4d(1-a)$ 不能都大于 1.

4.15 利用平均不等式求某些函数的最大（最小）值

在指定区间上给出一个函数 $y=f(x)$ ，要问这个函数在这个区间上有没有最大值或最小值以及如何求出的问题是函数理论中的一个重要课题。解决这类问题的依据是函数的增减性，基本方法是对函数“求导数”。这个方法同学们会在“微积分”中学到。本节仅限于介绍利用平均不等式解决这类问题的方法。

先研究基本理论。

对于 n 个正数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$，有平均不等式

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \tag{*}$$

（当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立）

利用 (*) 式，容易得到下面的

推论

设 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^+$，$x_1+x_2+\cdots+x_n=S$, $x_1x_2\cdots x_n=P$

(1) 若 P 为定值，则当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，S 的值最小；

(2) 若 S 为定值，则当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，P 的值最大.

证明： $\because$ $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^+$，由 (*) 可得

$$\frac{S}{n}\geqslant\sqrt[n]{P}$$

（当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号）

(1) 若 P 为定值，则 $S \geqslant n\sqrt[n]{P}$（当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号）。

这表明，当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时，S 有最小值 $n\sqrt[n]{P}$.

(2) 若 S 为定值，则 $P \leqslant \left(\dfrac{S}{n}\right)^n$（当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号）。

这表明，当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时，P 有最大值 $\left(\dfrac{S}{n}\right)^n$.

说明：

1. 这个推论是解某些最值问题的有力工具。如，根据这个推论可以看出：

   面积为定值的矩形中，以正方形的周长为最短；

   周长为定值的矩形中，以正方形的面积为最大。

2. 在这个推论中，“取到”最值的条件应予特别注意。

例 4.51 设 $x > 0$，下列各式有最小值吗？若有，试求之：

(1) $x + \dfrac{16}{x}$　　(2) $x^2 + 2x + \dfrac{32}{x^3}$　　(3) $x + \dfrac{4}{x^2}$

分析： 这一组是求“和的最小值”，应逐一检验推论的条件。

解：

(1) 诸元 $x > 0$, $\dfrac{16}{x} > 0$, 诸元的积 $x \cdot \dfrac{16}{x} = 16$(定值)

令 $x = \dfrac{16}{x}$, $x > 0 \Rightarrow x = 4$, 从而

$$x + \frac{16}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} = 8, \quad (\text{当 } x = 4 \text{ 时取等号})$$

$\therefore$ 当 $x = 4$ 时, $x + \dfrac{16}{x}$ 取得最小值 8.

(2) 诸元 $x^2 > 0$, $2x > 0$, $\dfrac{32}{x^3} > 0$, 诸元的积 $x^2 \cdot 2x \cdot \dfrac{32}{x^3} = 64$(定值),

令 $x^2 = 2x = \dfrac{32}{x^3}$, 可得 $x = 2$, 于是

$$x^2 + 2x + \frac{32}{x^3} \geqslant 3\sqrt[3]{x^2 \cdot 2x \cdot \frac{32}{x^3}} = 3 \times 4 = 12, \quad (\text{当 } x = 2 \text{ 时取等号})$$

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时，$x^2 + 2x + \dfrac{32}{x^3}$ 取得最小值 12.

(3) 先把 $x+\dfrac{4}{x^2}$ 改写成 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{x^2}$,

此时诸元 $\dfrac{x}{2}>0$, $\dfrac{4}{x^2}>0$, 诸元的积 $\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{4}{x^2}=1$ (定值),

令 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{2}=\dfrac{4}{x^2}$，得 $x=2$，于是

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{4}{x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{4}{x^2}}=3$$

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$x+\dfrac{4}{x^2}$ 取得最小值 3.

例 4.52 下列各式能否用“平均不等式”去求它的最大值？试求之。

(1) $y=3x\cdot(5-3x)$, $\left(0<x<\dfrac{5}{3}\right)$

(2) $y=x(8-3x)$, $(0<x<2)$

(3) $y=x(5-2x)^2$, $\left(0<x<\dfrac{5}{2}\right)$

(4) $y=r^2(R-r)$, $(0<r<R,\ R\text{是常数})$

分析：这一组是“求积的最大值”，能否用“平均”去求，仍需逐一检验推论的条件。

解：

(1) 由于 $0<x<\dfrac{5}{3}$, 诸元 $3x>0$, $5-3x>0$，诸元的和 $3x+(5-3x)=5$(定值),

令 $3x=5-3x$, 得 $x=\dfrac{5}{6}\in\left(0,\dfrac{5}{3}\right)$, 所以当 $x=\dfrac{5}{6}$ 时 y 取到最大值，由平均不等式

$$\frac{3x+(5-3x)}{2}\geqslant\sqrt{3x\cdot(5-3x)}$$

得

$$\frac{5}{2}\geqslant\sqrt{y}\ \Rightarrow\ y\leqslant\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4},\quad\left(\text{当 } x=\frac{5}{6} \text{ 时取等号}\right)$$

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{5}{6}$ 时，函数 y 取得最大值 $\dfrac{25}{4}$.

(2) $y=x(8-3x)$, 由于 $x+(8-3x)\neq$ 定值，转而考虑

$$3y=3x(8-3x),\quad(0<x<2)$$

(这是因为 y 与 $3y$ 同时取得最值)

此时，诸元 $3x>0,\ 8-3x>0$, 诸元的和 $3x+(8-3x)=8$（定值），

令 $3x=8-3x$，得 $x=\dfrac{4}{3}\in(0,2)$，从而

$$\frac{3x+(8-3x)}{2}\geqslant\sqrt{3x(8-3x)}$$

即

$$\frac{8}{2}\geqslant\sqrt{3y}\ \Rightarrow\ 3y\leqslant 16\ \Rightarrow\ y\leqslant\frac{16}{3}\quad\left(\text{当 } x=\frac{4}{3}\text{ 时取等号}\right)$$

$\therefore$　当 $x=\dfrac{4}{3}$ 时函数 y 取得最大值 $\dfrac{16}{3}$.

(3) $y=x(5-2x)^2,\quad\left(0<x<\dfrac{5}{2}\right)$

由于 $x+(5-2x)+(5-2x)\neq$ 定值，转而考虑

$$4y=4x\cdot(5-2x)^2,\quad\left(0<x<\frac{5}{2}\right)$$

此时，诸元 $4x>0,\ 5-2x>0$，诸元的和 $4x+(5-2x)+(5-2x)=10$（定值），

令 $4x=5-2x$, 得 $x=\dfrac{5}{6}\in\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$, 从而

$$\frac{4x+(5-2x)+(5-2x)}{3}\geqslant\sqrt[3]{4x(5-2x)(5-2x)}$$

即

$$\frac{10}{3}\geqslant\sqrt[3]{4y}\ \Rightarrow\ y\leqslant\frac{250}{27},\quad\left(\text{当 } x=\frac{5}{6}\text{ 时取等号}\right)$$

$\therefore$　当 $x=\dfrac{5}{6}$ 时，y 取得最大值 $\dfrac{250}{27}$.

评述：在 (2)(3) 题中，由于“诸元的和”$\neq$ 定值，转而考虑 $3y,\ 4y$。这个方法应该掌握。其次，当求出使“诸元相等”的 x_0 以后，还要看 x_0 是否属于函数的定义域。

(4) 由于 $r+r+(R-r)\neq$ 定值，转而考虑

$$2y=2r^2(R-r)=r^2(2R-2r)=r\cdot r\cdot(2R-2r)$$

由于 $r\in(0,R)$, 诸元 $r>0,\ 2R-2r>0$,

诸元的和 $r+r+(2R-2r)=2R$(定值),

令 $r=2R-2r$, 得 $r=\dfrac{2}{3}R$, 于是

$$\frac{r+r+(2R-2r)}{3}\geqslant\sqrt[3]{2y}\ \Rightarrow\ 2y\leqslant\frac{8R^3}{27}\ \Rightarrow\ y\leqslant\frac{4R^3}{27}\quad\left(\text{当}x=\frac{2}{3}R\text{时取等号}\right)$$

$\therefore$ 当 $r=\dfrac{2}{3}R$ 时，y 取到最大值 $\dfrac{4R^3}{27}$.

例 4.53 若正数 x,y 满足 $x^2y^3=4$，求以下各式的最小值:

(1) $2x+3y$ (2) $2x+y$

分析: 这是“积”为定值，求“和”的最小值的问题。为了使这里的“和”与“积”能够互化，需要把“和”变形，目的是凑出“积”x^2y^3，且使诸元相等。

解:

(1) 可把 $2x+3y$ 改写成 $x+x+y+y+y$。有

$$\frac{x+x+y+y+y}{5}\geqslant\sqrt[5]{x^2y^3}=\sqrt[5]{4}$$

$\therefore$ $2x+3y\geqslant 5\sqrt[5]{4}$ （当 $x=y$ 时，等号成立）.

$\therefore$ 当 $x=y$ 时，$2x+3y$ 取到最小值 $5\sqrt[5]{4}$

(2) 把 $2x+y$ 变形为 $x+x+\dfrac{y}{3}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{y}{3}$，有

$$\frac{x+x+\frac{y}{3}+\frac{y}{3}+\frac{y}{3}}{5}\geqslant\sqrt[5]{x^2\cdot\left(\frac{y}{3}\right)^3}=\sqrt[5]{\frac{x^2y^3}{27}}=\sqrt[5]{\frac{4}{27}}\quad\left(x=\frac{y}{3}\text{ 时，等号成立}\right)$$

$\therefore$ $2x+y\geqslant 5\sqrt[5]{\dfrac{4}{27}}=\dfrac{5}{3}\sqrt[5]{36}$.

故当 $x=\dfrac{y}{3}$ 时，函数 $2x+y$ 取到最小值 $\dfrac{5}{3}\sqrt[5]{36}$.

例 4.54 若正数 x,y 满足 $6x+5y=36$，分别求

(1) xy (2) x^3y^2 的最大值

分析: 这是“和”为定值，求“积”的最大值的问题，为了使这里的“和”与“积”能够互化，需作必要的变形。

解:

(1) $\because$　x,y 为正数

$\therefore$　$6x,5y$ 也是正数，有

$$\frac{6x+5y}{2} \geqslant \sqrt{6x\cdot 5y}=\sqrt{30xy},\quad (6x=5y\text{ 时，取等号})$$

即

$$\frac{36}{2} \geqslant \sqrt{30xy}\ \Rightarrow\ xy \leqslant \frac{54}{5}\quad \left(x=\frac{5}{6}y\text{时取等号}\right)$$

$\therefore$　xy 的最大值为 $\dfrac{54}{5}$.

(2) 同上

$$\frac{2x+2x+2x+\dfrac{5y}{2}+\dfrac{5y}{2}}{5} \geqslant \sqrt[5]{(2x)^3\cdot\left(\frac{5y}{2}\right)^2}\quad \left(2x=\frac{5y}{2}\text{时取等号}\right)$$

即

$$\frac{36}{5} \geqslant \sqrt[5]{2^3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 x^3y^2}$$

$$x^3y^2 \leqslant 2^9\times 3^{10}\times 5^{-7},\quad \left(\text{当 } x=\frac{5}{4}y \text{ 时取等号}\right)$$

从而 x^3y^2 的最大值为 $2^9\times 3^{10}\times 5^{-7}$.

例 4.55　求下式的最小值的方法中哪一个正确? 为什么? $y=2x^2+\dfrac{3}{x}\quad (x>0)$

解1: $y=2x^2+\dfrac{3}{x} \geqslant 2\sqrt{2x^2\cdot\dfrac{3}{x}}=2\sqrt{6x}>0$

解2: $y=2x^2+\dfrac{3}{x}=2x^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x} \geqslant 3\sqrt[3]{2x^2\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{2}{x}}=3\sqrt[3]{4}$

解3: $y=2x^2+\dfrac{3}{x}=2x^2+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{3}{2x} \geqslant 3\sqrt[3]{2x^2\cdot\left(\dfrac{3}{2x}\right)^2}=3\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{36}$

解4: $y=2x^2+\dfrac{3}{x}=x^2+x^2+\dfrac{3}{4x}+\dfrac{3}{4x}+\dfrac{3}{4x}+\dfrac{3}{4x} \geqslant 6\sqrt[6]{(x^2)^2\cdot\left(\dfrac{3}{4x}\right)^4}=$
$6\sqrt[6]{\left(\dfrac{3}{4}\right)^4}=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{36}$

解: 解 1 是错的。这是因为 $2x^2\cdot\dfrac{3}{x}=6x$ 不是定值，推论的条件不满足。

解 2 也是错的，事实上 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x}$ 是不可能的。

解 3 中令 $2x^2 = \dfrac{3}{2x}$, 则 $x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$, 此时不等式中的"等号"可以成立，即 y 此时取到最小值。

解 4 也是对的，这是因为令 $x^2 = \dfrac{3}{4x}$, 则 $x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$, 此时 y 可以取到最小值 (根据推论 1).

例 4.56 求 $y = \sin x \cos^2 x$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最大值。

解： $\because \quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad \sin x > 0,\ y > 0$

$$\begin{aligned}\therefore \quad y^2 = \sin^2 x \cos^4 x &= \frac{2\sin^2 x \cos^2 x \cos^2 x}{2} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x}{3}\right)^3 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}\end{aligned}$$

$\therefore \quad y \leqslant \sqrt{\dfrac{4}{27}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

（当且仅当 $2\sin^2 x = \cos^2 x$ 即 $x = \arctan\sqrt{2}$ 时取"="）

$\therefore \quad y_{\max} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

例 4.57 求函数 $y = 2 - 3x^2 - 4x^{-2}$ 的最大值或最小值，$(x > 0)$.

解： $y = 2 - 3x^2 - 4x^{-2} = 2 - (3x^2 + 4.x^{-2}), (x > 0)$.

$\because \quad 3x^2 + 4x^{-2} \geqslant 2\ \sqrt{3x^2 \cdot 4x^{-2}} = 2\sqrt{3 \cdot 4} = 4\sqrt{3}$

(当且仅当 $3x^2 = 4x^{-2}$，即 $x = \sqrt[4]{\dfrac{4}{3}}$ 时取等号)

$\therefore \quad -(3x^2 + 4x^{-2}) \leqslant -4\sqrt{3}$.

$\therefore \quad y = 2 - (3x^2 + 4x^{-2}) \leqslant 2 - 4\sqrt{3}$.

$\therefore \quad y$ 的最大值为 $2-4\sqrt{3}$.

以下研究几个应用题。

例 4.58 用一块正方形的白铁片，在它的四个角各剪去一个相等的小正方形，制成一个无盖的盒子，问当小正方形的边长为多大时，制成的盒子才有最大的体积？并求出这个体积.

解： (图 4.25) 设大正方形的边长为 a, 要剪去的小正方形的边长为 x, 则制成的盒子的体积是

$$V = x \cdot (a - 2x)^2$$

运用例 2 的方法不难得出当 $x=a/6$ 时，函数 V 有最大值。即当被剪去的四个小正方形的边长都等于大正方形边长的 1/6 的时候，制成的盒子具有最大的容积：

$$V=x\cdot(a-2x)^2=\frac{a}{6}\left(a-2\cdot\frac{a}{6}\right)^2=\frac{2}{27}a^3$$

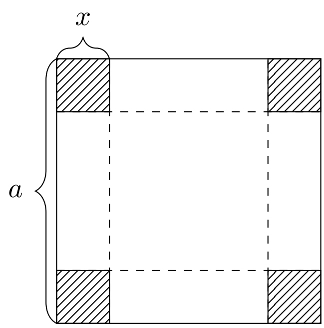


图 4.25

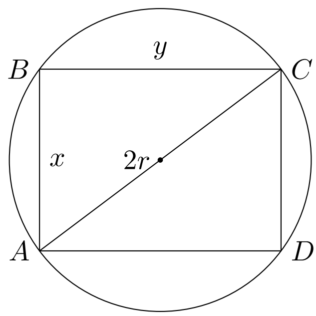


图 4.26

例 4.59 内接于圆的矩形中，怎样的矩形面积最大 (图 4.26)？

解： **解 1：** 设矩形 $ABCD$ 的边长 $AB=x$, $BC=y$.

则矩形的面积 $S=xy$ (1)

又由勾股定理得 $y=\sqrt{4r^2-x^2}$ (2)

我们的目标是求使面积 S 为最大的条件，通常把函数 S 称为“目标函数”。由 (1) 知，这里的目标函数是二元的 (这与例 9 是不同的)。(2) 式给出了这两个“元”之间的关系，通常把 (2) 这样的关系式称为“约束条件”。处理这类问题的方法之一是先把约束条件代入目标函数，使其化为一元函数再去求解。

把 (2) 代入 (1) 得

$$S=x\cdot\sqrt{4r^2-x^2}$$

因为 S 与 S^2 同时有最大值 (为什么要转而考虑 S^2 呢?), 而 $S^2=x^2(4r^2-x^2$, 记 $x^2=t$, 则

$$S^2=t(4r^2-t)$$

因 t 与 $(4r^2-t)$ 的和是定值 $4r^2$, $t>0$, $4r^2-t>0$。由推论 2，当 $t=4r^2-t$ 时，S^2 有最大值 (也就是 S 有最大值), 得 $t=2r^2$, 即 $x=\sqrt{2}r$。从而 $y=\sqrt{2}r$, 即正方形面积为最大.

解 2： 若设 $\angle ACB=\theta$, 则 $AB=2r\sin\theta$, $BC=2r\cos\theta$, 矩形面积 $S=AB\cdot BC=2r\sin\theta\cdot 2r\cos\theta=2r^2\sin 2\theta$, 当 $2\theta=90°$, 即 $\theta=45°$ 时，S 有最大值。此时 $ABCD$ 是正方形.

例 4.60 $\triangle ABC$ 中 BC 边上有一点 P, 由 P 引 AB、AC 的垂线，垂足分别是 M、N. 求使 $\triangle MNP$ 面积为最大时 P 点的位置（图 4.27）.

分析: 容易看出 A、M、P、N 四点共圆。

$\therefore\quad \angle MPN + \angle A = 180°$

记 $MP = m$，$NP = n$

$$S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2}mn\sin\angle MPN = \frac{1}{2}mn\sin A$$

$\because\quad \angle A$ 是定角，欲使 $S_{\triangle MNP}$ 为最大，须使 mn 为最大，而 m、n 是点 P 到 AB、AC 两边的距离。

这个问题是求正数 m、n 的乘积为最大的条件，因此有可能利用“平均不等式”去做。为此我们来看 $m+n$ 是否为常量呢？通过选几个特殊点试探一下，可知 $m+n \neq$ 定值。

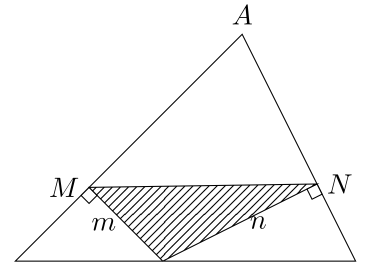


图 4.27

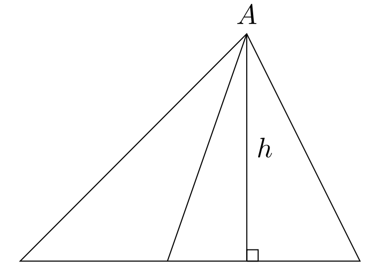


图 4.28

我们转而考虑“广义的和”$xm+yn$ 是否是定值（x, y 是两个常数）:

因 $PM\perp AB$, $PN\perp AC$, 记 $|AB| = c$, $|AC| = b$,$\triangle ABC$ 的面积为 S，则 $\frac{1}{2}bn + \frac{1}{2}cm = S$ 即

$$bn + cm = 2S$$

是一个常量，显然 $bn \geqslant 0$, $cm \geqslant 0$, 由平均不等式，得

$$\frac{bn+cm}{2} \geqslant \sqrt{bn\cdot cm} = \sqrt{bc\cdot mn}$$

欲使 mn 为最大，当且仅当 $nb = mc$ 时，即 $S_{\triangle ACP} = S_{\triangle ABP}$(图 4.28)。这两个三角形可看做是同高 (都为 h)、异底 (BP 与 PC) 的三角形，所以当且仅当 $BP = PC$ 时它们的面积相等。即点 P 位于 BC 的中点时，$\triangle MNP$ 的面积为最大。

思考题

对此例，你还能想到别的解法吗（如以参数体现 P 为动点)?

例 4.61 常见的食品罐头盒的形状大多是正圆柱体 (图 4.29), 要制造容积一定的罐头盒，它的高和底面半径多大时，用料最省（表面积最小)?

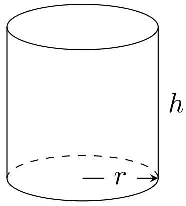


图 4.29

解: 设罐头盒的高为 h, 底面圆的半径为 r, 则容积 $V=\pi r^2 h$ (1)

表面积 $S=2\pi r^2+2\pi rh$ (2)

现在的问题是：V 为定值，h、r 多大时（或 h 与 r 的比为多大时）能使 S 取得最小值。

我们把约束条件 (1) 代入目标函数 (2), 得

$$S=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$$

将此式变形为

$$S=2\pi r^2+\frac{V}{r}+\frac{V}{r}\geqslant 3\sqrt[3]{2\pi r^2\cdot\frac{V}{r}\cdot\frac{V}{r}}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

上式取最小值的条件是 $2\pi r^2=\dfrac{V}{r}$ ，即

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt[3]{4\pi^2 V}$$

代入 (1) 得

$$h=\frac{1}{\pi}\sqrt[3]{4\pi^2 V}$$

由此可得 $h=2r$.

所以，当盒子的高与底面圆的直径相等时用料最省。

习题十六

A

1. 求下列函数的最小值:

(1) $y=\dfrac{2x^2-2x+1}{2x}, \quad (x>0)$

(2) $y=\dfrac{2(x-1)^2+5}{x-1}, \quad (x>1)$

2. 证明：周长等于定值的矩形中，面积以正方形的为最大.

3. 求下列函数的最大值：

(1) $y=2x\sqrt{100-x^2} \quad (x>0)$

(2) $y=x(3-2x)^2$

(3) $M=3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha \quad \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

4. 把 40 分成两个数，欲使这两个数的平方和为最小，应如何分?

5. 要用篱笆围一个面积为 1600 平方米的矩形养鸡场, 求篱笆至少需要多长?

B

6. 有一批木板可围成长 200 米的围墙。现在打算用来围一个矩形场地，而一边利用工厂的墙作为天然屏障。问采用怎样的围法可使场地的面积最大?

7. 已知等腰梯形周长为 60cm, 底角为 60°. 问这个梯形边长为多少时面积最大?

8. 直角三角形的斜边为定长 c, 求这个直角三角形面积的最大值，并指出取得最大值的条件。

9. 某溢洪闸门水道截面形状如图 4.30 所示，面积为 S, 在什么条件下这个截面的周长最短?

10. 在半径为 R 的球的所有外切圆锥中，求全面积最小的一个。

11. 某工厂要制造一个无盖的圆柱形桶。它的容积是 $\dfrac{3}{2}\pi$ 立方米。用来做底的金属每平方米价格 3 元，做侧面的金属每平方米价格 2 元。按照怎样的尺寸来制造这个圆桶，才能使得成本最低?

4.16 本章小结

知识结构分析

本章共有五个部分：

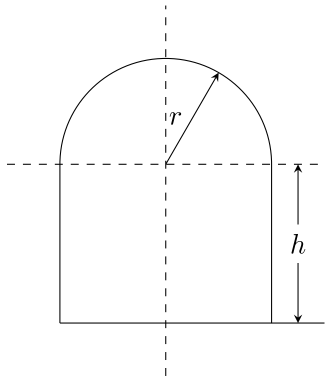


图 4.30

1. **不等式的概念与性质**：这是本章的基础，也是学好本章的关键。对此 4.3 节已做了小结。

2. **不等式的证明方法**：这是本章的重点。讲了四种证法和四个专题。四种证法是：

   (1) 比较法（作差法和作商法）——这是证明不等式的最基本、最常用的方法；

   (2) 分析法和综合法（这是论证的一般方法，在这里被用来证明不等式）；

   (3) 放缩法——这是证明不等式或估值的特定方法。

   对于这四种方法，要弄清每一种方法适用的对象（证明哪一类不等式）、原理、主要步骤（包括技巧）和表达方法（格式）。

   四个专题是：

   (1) 用平均不等式证不等式；

   (2) 附有条件的不等式的证法；

   (3) 平方平均数；

   (4) 柯西不等式。

   对这四个专题，要掌握每一专题适用的对象和主要技巧。如用“平均”法证不等式，对象是形如“和的形式　积的形式”这一类不等式，以及几个这种不等式的“迭加”或“迭乘”。主要技巧包括：(a)“和的形式”与“积的形式”的识别；(b) 字母轮换式的识别等。

3. **不等式的解法**：这也是本章的重点内容。

(1) 一元一次、二次不等式的解法；

(2) 一元高次不等式的解法；

(3) 分式不等式的解法——化归解整式不等式；

(4) 无理不等式的解法——化归解有理不等式；

(5) 指数对数不等式的解法——化归解代数不等式。

4. **绝对值不等式的性质、证明和解法**：这部分讲的都是基本知识，对以后的学习用途甚大，应当很好地掌握。

5. **利用平均不等式求函数的最大值或最小值**：这也是本章的重点。其中，正确地理解推论中的条件至关重要。它是掌握和运用有关变形技巧的基础。

本章应着重掌握的数学思想和方法

1. **通过对不等式性质及证明方法的学习，掌握比较法、分析法、综合法、放缩法等几种推理论证的方法**：要能根据题目的特点，恰当地选取证明的方法，提高思维能力和逻辑推理能力。

2. **数形结合的方法**：借助函数图象讨论不等式解的各种情况及借助数轴确定不等式（组）的解是解不等式的重要方法。

3. **化归的思想**：为了用好化归的思想，关键是掌握好转化的条件，以达到化归的目的。

复习题四

A

1. 若 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 比较 $a^3 - b^3$ 与 $3a^2(a-b)$ 的大小。

2. 若 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 试比较 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ 与 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}$ 的大小，$(n \in \mathbb{N})$.

3. 若 $a > b > c > 0$, 依照从小到大的次序用“$<$”号连接下列各式：

$$a, \quad c, \quad \frac{a+b+c}{3}, \quad \sqrt[3]{abc}, \quad \sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

4. 若 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 求证

$$\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} \leqslant \frac{\sqrt{b}}{a^5\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{b^5\sqrt{b}}.$$

5. 对于 $n \in \mathbb{N}$, 试证

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.$$

6. 若 $a,b,c \in \mathbb{R}^+$, 求证

$$(a+b+c)^3(a^2+b^2+c^2)^3(a^3+b^3+c^3) \geqslant 2187a^4b^4c^4$$

7. 若 $x \in \mathbb{R}^+$, 且 $x \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$, 求证

$$(1+x^n)(1+x)^n > 2^{n+1}x^n$$

B

8. 若 $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, 且 $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$,
求证：$-\frac{1}{4} \leqslant abcd \leqslant \frac{1}{4}$.

9. 已知 $n \in \mathbb{N}$, 求证

$$\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{12}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\frac{n(n+2)}{2}.$$

10. 若 $a,b \in \mathbb{R}^+$, 且 $ab-(a+b)=1$, 求 $a+b$ 的最小值。

11. 若 a,b,c 是三角形的三个边，求证

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}>\frac{9}{a+b+c}.$$

12. 若 a、$b,c \in \mathbb{R}^+$, 且两两不等，求证

$$2(a^3+b^3+c^3)>a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$$

13. 若 $a,b,c \in \mathbb{N}$, 求证 $ab+bc+ca \leqslant 3abc$.

14. 若 $a,b,c \in \mathbb{R}^+$, 求证

$$a^ab^bc^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \geqslant a^{\frac{b+c}{2}}b^{\frac{c+a}{2}}c^{\frac{a+b}{2}}.$$

15. 若 $a,b,c \in \mathbb{R}^+$, 求证

$$\log_3(a^2+b^2+c^2)-2\log_3(a+b+c) \geqslant -1$$

16. 已知 $\dfrac{a_1}{b_1} < \dfrac{a_2}{b_2} < \cdots < \dfrac{a_m}{b_m}$ 且所有的字母都表示正数。求证

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

17. 已知 $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{b} < \sqrt[p]{c} < \sqrt[q]{d}$, 其中 a, b, c, d 都可是正数，m, n, p, q 都是正整数，求证

$$\sqrt[m]{a} < \sqrt[m+n+p+q]{abcd} < \sqrt[q]{d}$$

18. 若 $p^3 + q^3 = 2$, p, q 为正数，求证 $p + q \leqslant 2$.

19. (1) 证明 $m = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdots \dfrac{2n-1}{2n} \cdots \dfrac{99}{100} < \dfrac{1}{10}$;

    (2) 对此题你还能加以推广吗?

20. 在直角三角形 ABC 中，a、b 是直角边，c 是斜边，r 是内切圆半径，h 为斜边上的高，求证

    (1) $c \geqslant \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$;　　　　(2) $r \leqslant \dfrac{c}{2}(\sqrt{2} - 1)$.

C

21. 在 $\triangle ABC$ 中，$A + C = 2B$ 成等差数列，且 $b = 1$,

    求证：$1 < a + c \leqslant 2$

22. 若 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

    求证：$-1 \leqslant a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqslant 1$

23. 设 $f(x) = \lg \dfrac{1 + 2^x + 4^x a}{3}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$,

    (1) 若 $0 < a \leqslant 1$, 求证：当 $x \neq 0$ 时，有 $2f(x) = f(2x)$

    (2) 如果当 $x \in (-\infty, 1)$ 时 $f(x)$ 有意义，求 a 的取值范围。

第五章　数列、数学归纳法、数列的极限

一、数列的一般概念

5.1　数列的定义

我们看下面的例子：

图 5.1 表示堆放的钢管，共堆放了 7 层，自上而下各层的钢管数排列成一列数：

$$4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,\quad 10$$

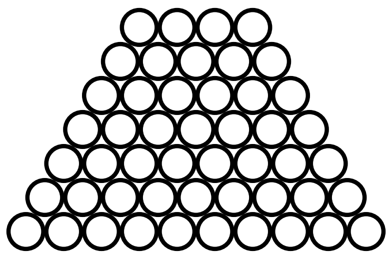


图 5.1

自然数 $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ 的倒数排列成一列数：

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \ldots$$

$\sqrt{2}$ 的精确到 $1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$ 的不足近似值排列成一列数：

$$1,\quad 1.4,\quad 1.41,\quad 1.414,\quad \ldots$$

-1 的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，4 次幂，……排列成一列数：

$$-1,\quad 1,\quad -1,\quad 1,\quad \ldots$$

再看下面的例子：

函数 $y = \dfrac{1}{x^3}$, 当 x 依次取 $1, 2, 3, \ldots, n\ (n \in \mathbb{N})$ 时，得到一列数：

$$1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{m^3}$$

函数 $y = x^2 - 1$, 当 x 依次取 $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ ($n \in \mathbb{N}$) 时，得到一列数

$$0,\ 3,\ 8,\ 15, \ldots,\ n^2 - 1$$

象上面这些例子，按一定顺序排列的一列数叫做**数列**。数列中的每一个数都叫做这个数列的**项**，各项依次叫做这个数列的第 1 项 (或首项)，第 2 项，第 3 项，⋯⋯，第 n 项.

在一个数列中，它的任一项的数值，由它所对应的项数唯一确定，因此数列中各项的值是其项数的函数，即 $a_n = f(n)$, 其中 a_n 表示第 n 项。n 为自变量 ($n \in \mathbb{N}$), 第 n 项为 a_n 的数列记作 $\{a_n\}$.

5.2 数列的表示法

数列实质上就是其定义域是自然数集 $\mathbb{N}$（或 $\mathbb{N}$ 的有限子集 $\{1, 2, \ldots, n\}$）的函数，因此数列的表示方法与过去所学的函数的表示方法完全类似。

5.2.1 列表法表示数列

将数列的各项依次列举出来：

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

其中 a_n 表示数列第 n 项的数值，n 是它的项数。显然 a_n 是 n 的函数。

5.2.2 图象法表示数列

图 5.2(1) 表示数列 $-3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots$; 图 5.2(2) 表示数列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$.

用图象法表示数列时，图象是由直角坐标系中的一些孤立点组成，其中每一个点 (n, a_n) 的横坐标 n 表示项数，纵坐标 a_n 表示该项的值，用图象表示数列时，其两个坐标轴上的单位可以不同。

5.2.3 解析法表示数列

如果数列的第 n 项 a_n 能用项数 n 的解析式表示为：$a_n = f(n)$ ($n \in \mathbb{N}$)。这种表示方法称为解析法，这个解析式叫做数列的**通项公式**。

图 5.2(1) 所表示的数列的通项公式 $a_n = 2n - 5$; 图 5.2(2) 所表示的数列的通项公式为 $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

不是所有的数列都能用解析法来表示。例如 $\sqrt{2}$ 的精确到 $1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$ 的不足近似值组成的数列 $1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots$ 就没有通项公式。

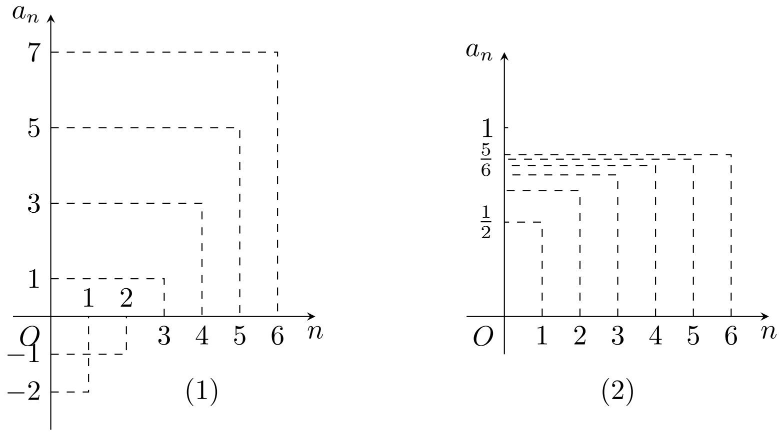


图 5.2

5.2.4 用递推式表示数列

有时数列可以用它的前几项的值（称初始条件或初始值），和数列中相邻若干项间的关系式（称递推式）给出。例如一个数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1$ $(n\in\mathbb{N})$ ，这个数列就是 $1,3,7,15,31,63,\ldots$; 又如数列 $2,5,8,11,14,\ldots$, 可以表示为：$a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+3$.

练习

按照下列条件，写出数列的前五项。

1. 数列的通项公式是：

(1) $a_n=-3n+1$

(2) $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

(3) $a_n=\dfrac{2n-1}{n+1}$

(4) $a_n=n^2+2$

2. 数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=2$，且 $(n\in\mathbb{N})$.

3. 数列 $\{a_n\}$ 的图象如图 5.3.

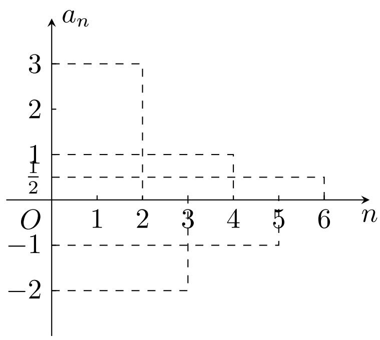


图 5.3

5.3　简单数列的通项公式的求法

用语言叙述或用列表法给出的一些数列的前几项，我们可以利用归纳的办法，写出它们的通项公式。

例 5.1　写出下列各数列的通项公式。

(1) 自然数的倒数组成的数列；

(2) 每项的值都比项数的立方少 2 的数列；

(3) -1 的自然数次幂组成的数列。

解:

(1) $a_n = \dfrac{1}{n}$　　(2) $a_n = n^3 - 2$　　(3) $a_n = (-1)^n$

例 5.2　写出下列各数列的一个通项公式，使其前六项分别是:

(1) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{31}{32}$, $\frac{63}{64}$

(2) $2,\ -6,\ 18,\ -54,\ 162,\ -486$

(3) $-1,\ \frac{3}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{1}{5},\ \frac{3}{6}$

(4) $9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ 99999,\ 999999$

解:

(1) 分母为 2^n，分子均比分母少 1, 所以数列的通项公式为 $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$

(2) 分析数列的前 6 项发现，第 1 项是 2, 第 2 项是 2 的 -3 倍，第 3 项又是第二项的 -3 倍，以此类推，可归纳出其通项公式为 $a_n = 2 \times (-3)^{n-1}$

(3) 数列各项的分母依次为 $1, 2, \ldots$, 恰与项数相同；各项的分子为 $1, 3, 1, 3, \ldots$, 可以说是第 1 项比 2 少 1, 第 2 项比 2 多 1, 以此类推；又数列相邻两项值的符号相反，且第 1 项为负值，因此可用符号 $(-1)^n$ 来表示，由此归纳可得通项公式为 $a_n = (-1)^n \dfrac{2+(-1)^n}{n}$.

(4) 数列第 1 项可改写为 $10-1$, 第 2 项为 10^2-1,……故通项公式为 $a_n = 10^n - 1$.

评述:

(1) 分析数列中各项的值与项数间的关系，从而归纳出通项公式，是求数列通项公式的最基本的方法。

(2) 给出数列的前几项，求这个数列的通项公式时，其通项公式并不是唯一的。事实上，满足一个数列的前若干项的通项公式可以有无穷多个。例如，上例中的 (1) 的通项公式可以写成:

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) \cdot f(n)$$

（其中 $f(n)$ 是含 n 的任何一个函数式），其前六项均符合要求，这是因为公式的后一部分，当 n 依次取 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 时，其值都是 0.

练习

1. 写出数列的一个通项公式，使得数列的前五项分别是

   (1) 15, 25, 35, 45, 55

   (2) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16}$

   (3) 1, 3, 5, 7, 9

   (4) $1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}-\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}-\frac{1}{6}$

   (5) $0,\ -5,\ 8,\ -17,\ 24$

   (6) 3, 33, 333, 3333, 33333

2. 观察下列数列的特点，用适当的数填空并对每一个数列各写出一个通项公式:

   (1) 2, 4, (　), 8, 10, (　), 14

(2) 2, 4, ( ), 16, 32, ( ), 128, ( )

(3) ( ), 4, 9, 16, ( ), ( ), 49, 64, ( )

(4) ( ), 4, 3, 2, 1, ( ), -1, ( ), ( )

(5) 1, $\sqrt{2}$, ( ), 2, $\sqrt{5}$, ( ), ( ), $2\sqrt{2}$

(6) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, ( ), $\frac{1}{42}$, ( ), $\frac{1}{72}$

3. 已知数列的通项公式，试判断后面所给的数是否是数列中的项，如果是，是第几项。

(1) $a_n = n(n+2)$, (a) 142, (b) 175

(2) $a_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$, (a) $\dfrac{3}{5}$, (b) $\dfrac{17}{26}$

(3) $a_n = \dfrac{n^2+3n}{n+1}$, (a) $\dfrac{182}{13}$, (b) $\dfrac{350}{13}$

5.4 数列的分类

按照数列的项数，可将数列分成有穷数列和无穷数列

有穷数列：如果在某一项的后面不再有任何项，这个数列叫做**有穷数列**。例如，在前一百个自然数中，一切质数组成的数列 $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots, 97$ 是有穷数列。

无穷数列：如果在任何一项的后面都有跟随着的项，这个数列叫做**无穷数列**。例如，自然数中所有奇数组成的数列，是无穷数列。

当用列表法表示数列时，写出末项的，表示有穷数列，如 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}$ 表示有穷数列；写不出末项的，则表示无穷数列，如 $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots$ 表示无穷数列。

按照项与项之间的大小关系，可将数列分成常数列，递增数列，递减数列和摆动数列

(1) 常数列：数列中各项的值都相等的数列叫**常数列**。如 $3, 3, 3, \ldots, 3, \ldots$ 就是常数列；

(2) 递增数列：一个数列从第 2 项起，每一项都大于它的前面的一项，即 $a_{n+1} >$

a_n $(n \in \mathbb{N})$，这样的数列叫做**递增数列**。例如，自然数的平方组成的数列 $1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$ 就是递增数列。

(3) 递减数列：一个数列从第 2 项起，每一项都小于它的前面的一项，即 $a_{n+1} < a_n$ $(n \in \mathbb{N})$，这样的数列叫做**递减数列**。例如，自然数的倒数组成的数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ 就是递减数列。

递增数列与递减数列，统称**单调数列**。

(4) 摆动数列：一个数列，从第 2 项起，有些项大于它的前一项，有些项又小于它的前一项，这样的数列叫做**摆动数列**. 例如数列 $1, -2, 4, -8, 16, \ldots, (-2)^{n-1}, \ldots$ 是摆动数列。

例 5.3 判断下列数列是递增数列、递减数列，还是摆动数列? 数列的通项公式如下：

(1) $a_n = 2n + 5$

(2) $a_n = -3n + 1$

(3) $a_n = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

(4) $a_n = -\frac{1}{2} \times 5^{n-1}$

(5) $a_n = \frac{2n-3}{n+1}$

解: 判断数列的增减性要根据递增数列、递减数列的定义，即计算 $a_{n+1} - a_n$，并判断其值的正负。但对摆动数列，则可写出数列的若干项予以判断。

(1) $\because \quad a_{n+1} - a_n = [2(n+1)+5] - (2n+5) = 2 > 0$

$\therefore$ 数列 $\{2n+5\}$ 是递增数列。

(2) $\because \quad a_{n+1} - a_n = [-3(n+1)+1] - (-3n+1) = -3 < 0$

$\therefore$ 数列 $\{-3n+1\}$ 是递减数列。

(3) 数列的前三项是：$-\frac{2}{3}$，$\frac{2}{9}$，$-\frac{2}{27}$，显然它是摆动数列。

(4)

$$\begin{aligned}\because \quad a_{n+1} - a_n &= -\frac{1}{2} \times 5^n - \left[-\frac{1}{2} \times 5^{n-1}\right] \\ &= -\frac{1}{2} \times 5^{n-1}(5-1) = -2 \times 5^{n-1} < 0\end{aligned}$$

$\therefore$ 数列 $\left\{-\frac{1}{2} \times 5^{n-1}\right\}$ 为递减数列。

(5)

$$\because \quad a_{n+1}-a_n=\frac{2(n+1)-3}{(n+1)+1}-\frac{2n-3}{n+1}$$
$$=\frac{(2n^2+n-1)-(2n^2+n-6)}{(n+2)(n+1)}=\frac{5}{(n+2)(n+1)}>0$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\dfrac{2n-3}{n+1}\right\}$ 是递增数列。

评述：这里数列的“增减性”的判断方法和函数 $f(x)$ 的增减性的判断方法类似。

5.5 数列的前 n 项和

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和是指 $a_1+a_2+\cdots+a_n$，记作 S_n，

S_1 表示前一项之和，所以 $S_1=a_1$；

S_2 表示前两项之和，所以 $S_2=a_1+a_2$；

………………

S_{n-1} 表示前 $n-1$ 项之和，所以 $S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$

S_n 表示前 n 项之和，所以 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

因此，只有当 $n\geqslant 1$ 时，S_n 才是有意义的，例如 S_{n-1}，只有当 $n\geqslant 2$ 时，才有意义.

由 S_n 的含义可知，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，而当 $n=1$ 时，$a_1=S_1$。这就是 S_n 与 a_n 之间的关系：

$$a_n=\begin{cases} S_1 & n=1 \\ S_n-S_{n-1} & n\geqslant 2 \end{cases}$$

例 5.4 已知数列的前 n 项和，求数列的通项公式。

(1) $S_n=n^2-2n+2$ (2) $S_n=3^n-2$ (3) $S_n=\dfrac{3^n-2^n}{2^n}$

解:

(1) $n=1$ 时, $a_1=S_1=1$

$n\geqslant 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-2n+2)-[(n-1)^2-2(n-1)+2]=2n-3$

又 $n=1$ 时，$2n-3=-1\neq a_1$，

$\therefore$ 通项公式为 $a_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 2n-3, & n \geqslant 2 \end{cases}$

(2) $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 1$

$n \geqslant 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n - 2) - (3^{n-1} - 2) = 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

又 $n=1$ 时，$2 \cdot 3^{n-1} = 2 \neq a_1$,

$\therefore$ 通项公式为 $a_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 2 \cdot 3^{n-1}, & n \geqslant 2 \end{cases}$

(3) $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \dfrac{3-2}{2} = \dfrac{1}{2}$

$n \geqslant 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

又 $n=1$ 时，$\dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2} = a_1$,

$\therefore$ 通项公式为 $a_n = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

评述:

(1) $a_n = \begin{cases} S_1, & n=1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geqslant 2 \end{cases}$ 相当于分段函数的表达式。

(2) 若当由 $S_n - S_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$ 得到的 a_n 的解析式中，把 $n=1$ 代入后的值恰好等于 a_1 时，要把通项公式写成统一的表达式，如本例中的 (3).

练习

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 S_n, 求它的通项公式:

1. $S_n = a \cdot n^2 + b \cdot n \quad$ (a、b 为已知常数)
2. $S_n = a \cdot n^2 + b \cdot n + c \quad$ (a、b、c 为已知常数)
3. $S_n = n^3 + n - 1$
4. $S_n = 2 \cdot 3^n - 1$
5. $S_n = a \cdot b^{n-1} \quad (a, b \neq 0)$
6. $S_n = a \cdot n$

习题一

A

1. 写出下列各数列的一个通项公式，使它的前几项分别是:

(1) $1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5$

(2) $0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24$

(3) $2,\ 7,\ 28,\ 63,\ 126$

(4) $1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \frac{1}{81}$

(5) $\frac{1}{3},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{15},\ \frac{1}{24},\ \frac{1}{35}$

(6) $5,\ 55,\ 555,\ 5555$

(7) $1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0$

(8) $2,\ 0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 0$

2. 按照所给条件分别写出数列的前 5 项:

(1) 通项公式为 $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

(2) 通项公式为 $a_n = -2^{n-1} + 3$

(3) 若 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}\ (n \in \mathbb{N})$

(4) 若 $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + 3\ (n \in \mathbb{N})$

(5) 若 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n\ (n \in \mathbb{N})$

(6) 若 $a_1 = 3,\ a_2 = 9,\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n\ (n \in \mathbb{N})$

(7) 若 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}\ (n \in \mathbb{N})$

(8) 若 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 2}\ (n \in \mathbb{N})$

3. 由 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，求它的通项公式

(1) $S_n = n^2 + 2n + 1$ (2) $S_n = 2 \cdot 3^n - 1$ (3) $S_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

4. 已知 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2n^3 - 3n$, 则 $a_5 + a_6 =$ ____; $a_8 + a_9 + a_{10} =$ ____.

B

5. 判断无穷数列是递增数列、递减数列，还是摆动数列？并给以证明。它们的通项公式分别是:

(1) $a_n=3n-5$

(2) $a_n=-2n+5$

(3) $a_n=\dfrac{4}{n}$

(4) $a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

(5) $a_n=\lg n$

(6) $a_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$

(7) $a_n=n^3$

(8) $a_n=\dfrac{3n-2}{n+1}$

(9) $a_n=2-\dfrac{3}{n+1}$

(10) $a_n=n^2+2n-3$

(11) $a_n=a\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ （其中 $a\neq 0$）

二、等差数列

5.6 等差数列的有关概念

观察下面的数列:

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \ldots \tag{1}$$

$$5,\ 0,\ -5,\ -10,\ -15,\ \ldots \tag{2}$$

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots \tag{3}$$

它们分别具有下述的特点:

(1) 中，从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都是 3;

(2) 中，从第 2 项起，每一项与它的前一项之差都是 -5;

(3) 中，从第 2 项起，每一项与它的前一项之差都是 0.

它们的共同特点是: 从第 2 项起，每一项与它的前一项之差都等于同一个常数，通常把这个常数记作 d, 即

$$a_n-a_{n-1}=d\quad(n\geqslant 2,\quad d\text{ 是常数})$$

这类数列叫做**等差数列**，常数 d 叫做等差数列的**公差**。上述三个等差数列的公差分别是 $3,-5$ 和 0, 数列 (3) 说明常数数列一定是等差数列。

如果有三个数 x,A,y 组成等差数列，那么 A 叫做 x 和 y 的**等差中项**。

如果 x,A,y 成等差数列，由等差数列的定义可知 $A-x=y-A$，所以

$$A=\frac{x+y}{2}$$

显然，任何两个数，都有唯一确定的等差中项。

容易看出，在一个无穷的等差数列中，从第 2 项起，每一项都是它的前一项与后一项的等差中项；反之，在一个数列中，如果从第 2 项起，每一项都是它的前一项与后一项的等差中项，那么这个数列一定是等差数列。

例 5.5 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n - 5$.

(1) 求证：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，并求其公差；

(2) 求出数列的首项及第 100 项；

(3) 判断 100 和 110 是不是该数列中的项，如果是，是第几项?

解:

(1) 由于 $a_n - a_{n-1} = 3n - 5 - [3(n-1) - 5] = 3$（常数），所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且公差是 3.

(2) $a_1 = 3 \times 1 - 5 = -2$. $a_{100} = 3 \times 100 - 5 = 295$.

(3) 设 $3n - 5 = 100$，解之得 $n = 35$，所以 100 是数列的第 35 项。

设 $3n - 5 = 110$，解之得 $n = \dfrac{115}{3}$ 不是正整数，所以 110 不是数列 $\{a_n\}$ 中的项。

例 5.6 求证：通项公式是 $a_n = an + b$（a、b 是常数）的数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且公差 $d = a$.

证明: $\because \quad a_n - a_{n-1} = an + b - [a(n-1) + b] = a,$

$\therefore \quad \{a_n\}$ 是等差数列，且以 a 为公差。

例 5.6 说明当 $a \neq 0$ ，即通项公式是 n 的一次式时，该数列必为等差数列，且其一次项系数恰好是此等差数列的公差。

显然，当 $a = 0$ 时，数列是常数列，也是等差数列。

5.7 等差数列的通项公式

上面的例 5.6 告诉我们，一个数列的通项公式是 n 的一次式时，该数列一定是等差数列，并且其一次项系数恰好是该等差数列的公差。那么一个等差数列若公差 $d \neq 0$ 时，其通项公式是否也一定是 n 的一次式呢?

为此，我们做如下的探讨:

由等差数列的定义，有

$$
\begin{aligned}
&a_2 = a_1 + d,\\
&a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,\\
&a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

这样，可以归纳得出

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

这是由对事物的部分对象的考察，观察其规律，得出的结论。这个方法就是不完全归纳法。所得结论的正确性，今后我们可以用数学归纳法给予证明。

这个公式，还可以用下面的方法得到

由等差数列的定义，可知

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= d \\
a_3 - a_2 &= d \\
a_4 - a_3 &= d \\
&\cdots\cdots\cdots \\
a_{n-1} - a_{n-2} &= d \\
a_n - a_{n-1} &= d
\end{aligned}$$

将这 $n-1$ 个式子的等号两边分别相加，得 $a_n - a_1 = (n-1)d$，即

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

这个方法，通常称为**迭加法**。

$a_n = a_1 + (n-1)d$ 就是用首项 a_1 和公差 d 表示的等差数列的**通项公式**。

$\because \quad a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d)$

$\therefore$ 当 $d \neq 0$ 时，a_n 是 n 的一次式，且一次项的系数是公差 d.

显然，如果 $a_n = dn + (a_1 - d)$ 中的 $d = 0$，$\{a_n\}$ 也是等差数列。

结合 5.6 中的例 5.6, 我们可以得到下述定理:

定理 1

数列 $\{a_n\}$ 是等差数列的充分必要条件是 $a_n = dn + b$, 其中 d 为公差，b 为常数。

用图象法表示等差数列时，点 (n, a_n) 一定在斜率为 d 的一条直线上。

5.6 中的数列 (1) 可用图 5.4 来表示，其中点 $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,7)$, $(4,10)$, ……都在直线 $y = 3x - 2$ 上。其中直线的斜率 3, 恰好是该数列的公差。

与确定函数式 $y = kx + b$ 一样，要确定一个等差数列的通项公式，需要知道两个独立条件，例如数列中的某一项和公差，或数列中的任何两项，等等。

例 5.7 已知等差数列的公差为 d, 第 m 项是 a_m，试求其第 n 项 a_n.

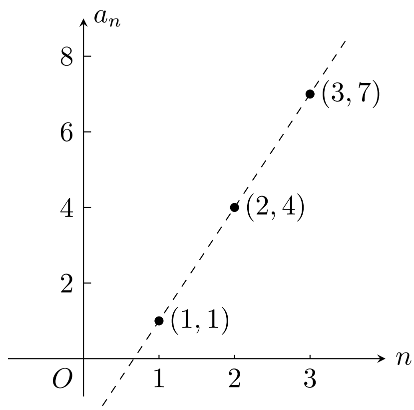


图 5.4

解: 由等差数列的通项公式可知 $a_n = a_1 + (n-1)d$, 即

$$a_m = a_1 + (m-1)d$$

两式相减，得 $a_n - a_m = (n-m)d$，即

$$a_n = a_m + (n-m)d$$

此例说明: 等差数列的通项公式，可以用数列中的任何一项及公差来表示。特别当 $m = 1$ 时，就是

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

例 5.8 等差数列的第 5 项是 20, 公差是 3, 求它的第 50 项。

解: **解法一**: $\because \quad a_5 = a_1 + 4d,$

$\therefore \quad a_1 + 4 \times 3 = 20$，解得 $a_1 = 8$

$\therefore \quad a_{50} = a_1 + 49d = 8 + 49 \times 3 = 155.$

解法二：因为 $d = 3$，由定理 1 可设数列的通项公式为

$$a_n = 3n + b$$

$\therefore \quad a_5 = 3 \times 5 + b = 20$

$\therefore \quad b = 5$，于是

$$a_{50} = 3 \times 50 + 5 = 155$$

解法三：由例 5.7 的结论，有

$$a_{50} = a_5 + (50-5)d$$

于是

$$a_{50} = 20 + 45 \times 3 = 155$$

例 5.9 梯子共有 12 级，从上面数第四级的宽是 54cm, 最低一级宽 110cm, 已知各级的宽度成等差数列，试计算梯子各级的宽。

解: 用 $\{a_n\}$ 表示题中的等差数列, 其公差为 d, 设 $a_n = dn+b$, 由已知 $a_4 = 54$, $a_{12} = 110$，所以

$$\begin{cases} 54 = d \cdot 4 + b \\ 110 = d \cdot 12 + b \end{cases}$$

解关于 d、b 的方程组，得 $d = 7$，$b = 26$ ，于是

$$a_n = 7n + 26$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad a_1 &= 7 \times 1 + 26 = 33 \\ a_2 &= 7 \times 2 + 26 = 40 \\ a_3 &= 7 \times 3 + 26 = 47 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

答：梯子自上而下各级的宽度依次为 33, 40, 47, 54, 61, 68, 75, 82, 89, 96, 103 和 110(cm).

例 5.10 在 -1 和 9 之间插入三个数，使这五个数组成等差数列，求插入的三个数。

解: 设数列为 $\{a_n\}$，由题意知 $a_1 = -1$，$a_5 = 9$。

由等差数列通项公式，有

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{9-(-1)}{5-1} = 2.5$$

$\therefore \quad a_2 = 1.5, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 6.5$

答：插入的三个数分别为 1.5, 4 和 6.5.

另解: 因为等差数列 $\{a_n\}$ 共有 5 项，所以 a_3 是 a_1 和 a_5 的等差中项，即

$$a_3 = \frac{-1+9}{2} = 4$$

又 a_2 是 a_1 和 a_3 的等差中项，a_4 是 a_3 和 a_5 的等差中项，故

$$a_3 = \frac{-1+4}{2} = 1.5, \quad a_4 = \frac{4+9}{2} = 6.5$$

答：插入的三个数分别为 1.5, 4 和 6.5.

例 5.11 已知 a^2, b^2, c^2 成等差数列，且 $b+c$, $c+a$, $a+b$ 均不为零，求证：$\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{c+a}$, $\dfrac{1}{a+b}$ 也成等差数列.

解： 因为 a^2, b^2, c^2 成等差数列，所以 $2b^2 = a^2 + c^2$，于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b} = \frac{a+b+b+c}{ab+b^2+ac+bc} &= \frac{a+2b+c}{ab+\dfrac{a^2+c^2}{2}+ac+bc}\\ &= \frac{2(a+2b+c)}{2ab+a^2+c^2+2ac+2bc}\\ &= \frac{2(a+2b+c)}{(a+c)(a+c+2b)} = \frac{2}{a+c}\end{aligned}$$

$\therefore$ $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{c+a}$, $\dfrac{1}{a+b}$ 也成等差数列.

例 5.12 已知一个直角形的三条边成等差数列，求证它们的比是 3:4:5.

解： 将成等差数列的三边的长从小到大排列，它们可以表示为 $a-d$, a, $a+d$, 其中 $a-d>0$, $d>0$, d 就是它们的公差。由于它们是直角三角形的三边的长，根据勾股定理，得到

$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2$$

解之得 $a = 4d$, 从而，三角形三边长依次为 $3d$, $4d$ 和 $5d$, 因此，三条边之比为 $3:4:5$.

评述： 此例中设成等差数列的三数为 $x-d$ ，x 和 $x+d$（d 为公差）。可简化运算过程。若四数成等差数列时，可设为 $x-3d$, $x-d$, $x+d$ 和 $x+3d$ ，这样可用两个量 x, d 表示四个数。但需注意这里 d 并非其公差，公差是 $2d$.

例 5.13 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 求证：

(1) 当 $d>0$ 时，数列是递增数列；

(2) 当 $d<0$ 时，数列是递减数列。

解： 因为 $\{an\}$ 是等差数列，当 $d \neq 0$ 时它的通项公式是 n 的一次式，且其一次项系数恰是数列的公差 d, 即 $a_n = dn + c$.

由一次函数的性质可知：

- 当 $d>0$ 时，函数 $y = dx + c$ 是增函数，故数列 $\{d_n + c\}$ 也为递增数列，
- 当 $d<0$ 时，函数 $y = dx + c$ 是减函数，故数列 $\{dn + c\}$ 为递减数列。

例 5.14 一个等差数列的首项是 50, 公差是 -0.6, 从第几项开始是负数。

解：该数列的通项公式是 $a_n = 50 - (n-1) \times 0.6$，令 $50 - (n-1) \times 0.6 = 0$，解之得：

$$n = 84.3$$

由于数列是首项为正的递减数列，所以从第 85 项开始是负数。

例 5.15 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$k, \ell, m, n \in \mathbb{N}$，若 $k + \ell = m + n$，则 $a_k + a_\ell = a_m + a_n$

证明：设数列的公差为 d, 则有

$$a_k = a_1 + (k-1)d,$$
$$a_\ell = a_1 + (\ell - 1)d.$$

$\therefore \quad a_k + a_\ell = 2a_1 + (k + \ell - 2)d$

$\because \quad a_m = a_\ell + (m - \ell)d, \quad a_n = a_1 + (n-1)d$

$\therefore \quad a_m + a_n = 2a_1 + (m + n - 2)d$

$\because \quad k + \ell = m + n$

$\therefore \quad a_k + a_\ell = a_m + a_n$

评述：此例说明，在等差数列中，项数之和相等时，对应的两项之和也相等，例如等差数列 $\{a_n\}$ 中，有 $a_5 + a_{13} = a_2 + a_{16} = a_8 + a_{10} = \cdots$，这是等差数列的一个重要性质。

特别地 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots$.

练习

1. 解下列各题：

   (1) 求等差数列 3, 7, 11, . . . 的第 4，7,10 项;

   (2) 求等差数列 10, 8, 6, . . . 的第 20 项;

   (3) 求等差数列 2, 9, 16, $\cdots$ 的第 n 项;

   (4) 求等差数列 0, $-3\frac{1}{2}$, -7, $\cdots$ 的第 $n+1$ 项。

2. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 求证：

   (1) $d = \dfrac{a_n - a_1}{n - 1}, \quad (n \neq 1)$

   (2) $d = \dfrac{a_n - a_m}{n - m}, \quad (m \neq n)$

3. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 d.

(1) 已知 $d=-\frac{1}{3}$, $a_7=8$, 求 a_1;

(2) 已知 $a_1=12$, $a_6=27$, 求 d;

(3) 已知 $a_1=3$, $a_n=21$, $d=2$, 求 n;

(4) 已知 $a_4=10$, $a_7=19$, 求 a_1 和 d;

(5) 已知 $a_1=1.7$, $d=0.3$, 求证 46.7 是该数列中的项，并说明是第几项。

4. 求证等差数列 $\{a_n\}$ 中所有的奇数项组成的数列也是等差数列，并求这个数列的公差。

5. 求下列各题中两个数的等差中项：

(1) 647 与 895

(2) -180 与 360

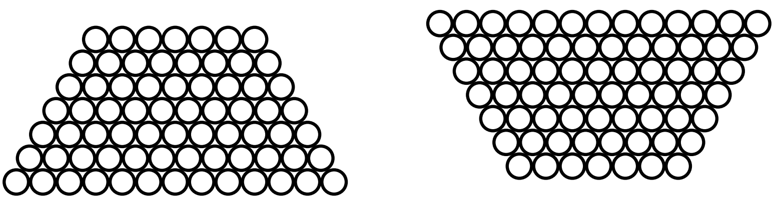
(3) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 与 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

(4) $(a+b)^2$ 与 $(a-b)^2$

5.8 等差数列前 n 项的和

我们观察下面的例子：

图 5.5(1) 表示有规则堆放着的钢管。



(1) (2)

图 5.5

显然，自上而下各层的钢管数排成一个等差数列：7,8、9、10、11、12、13.

为了求出钢管的总数，我们可以设想如图 5.5(2) 那样，在这堆钢管旁边倒放着同样的一堆钢管，把两堆合起来，每层钢管数都相等，即

$$7+13=8+12=\cdots=13+7$$

由于共有七层，因此两堆钢管总数就是：$(7+13)\times 7$，那么，所求钢管总数是

$$\frac{7+13}{2}\times 7=70$$

一般地，设有等差数列 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$，它的前 n 项的和记作 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

根据等差数列的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_n+(n-1)d]$$

再把项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]$$

将这两个式子相加，得

$$\begin{aligned}2S_n&=\overbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}^{n\text{个}}\\&=n(a_1+a_n)\end{aligned}$$

由此得到等差数列 $\{a_n\}$ 的**前 n 项的和的公式**

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2} \tag{1}$$

若将 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入 (1) 式，又可得出

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d \tag{2}$$

从上述求 S_n 的分析过程可见，在一个等差数列的前 n 项中，与两端（即 a_1 和 a_n）“等距离”的两项之和都等于首末两项之和 a_1+a_n。这是等差数列所具有的一个重要性质。

公式 (1) 和公式 (2) 中，分别含有四个量：a_1，a_n，n，S_n 和 a_n，d，S_n，n。如果已知其中三个量，那么每个公式都可看作以其第四个量为未知数的方程，从而第四个量都可以求出。

如果再加上前一节学的等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，那么在等差数列中，常涉及到以下五个量：a_1，d，n，a_n 和 S_n，并且它们由一组公式：通项公式和前 n 项和公式联系着，因此若已知其中的任何三个量，即可得到以其余两个量为未知数的方程组，从而可以求出其余的两个量。

例 5.16 求自然数集合中，前 100 个自然数的和。

解：前 100 个自然数，组成首项是 1，公差是 1 的等差数列，共有 100 项，且第 100 项是 100，所以

$$S_{100} = \frac{1+100}{2} \times 100 = 5050$$

(这正是著名的德国数学家高斯 (1777—1855) 在他 10 岁时，很快地算出 $1+2+\cdots+100$ 的结果时所用的解法)。

例 5.17 图 5.6 表示一个堆放铅笔的 V 形架，它的最下面一层放一支铅笔，在上每一层都比它下面一层多放一支，最上面一层放 120 支，问这个 V 形架上共放着多少支铅笔?

答案是 7260 支铅笔，请读者完成计算过程。

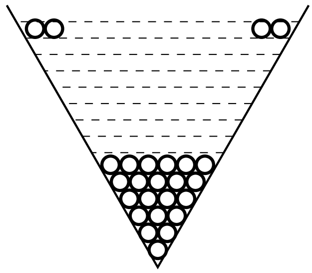


图 5.6

例 5.18 正偶数组成的数列 $2, 4, 6, \ldots$ 的前多少项的和等于 9900?

分析：已知：$a_1 = 2$，公差 $d = 2$，$S_n = 9900$，求 n。因此，我们利用公式 $S_n = n \cdot a_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$ 求解。

解：由已知，得

$$n \cdot 2 + \frac{n(n-1)}{2} = 9900$$

化简得

$$n^2 + n - 9900 = 0$$

解得 $n = 99$ 或 $n = -100$（后者不合题意，舍去)。

答：数列的前 99 项之和为 9900。

例 5.19 求集合 $M = \{m \mid m = 7n,\ n \in \mathbb{N},\ 且 m < 100\}$ 中元素的个数，并求这些元素之和。

解：$\because \quad 7n < 100 \qquad\qquad \therefore \quad n < \dfrac{100}{7} = 14\dfrac{2}{7}$

由于满足上面不等式的自然数 n 共有 14 个，故集合 M 里的元素共 14 个，将它们从小到大列出，就是

$$7, \quad 7 \times 2, \quad 7 \times 3,\ \ldots,\ 7 \times 14$$

即 $7,\ 14,\ 21, \ldots, 98$

这个数列是以首项为 7，第 14 项为 $a_{14}=98$ 的等差数列，因此它们的和为

$$S_{14}=\frac{14(7+98)}{2}=735$$

答：集合 M 里共有 14 个元素，它们的和为 735。

这个例说明：在 100 以内的自然数中，共有 14 个数能被 4 7 整除，且它们的和为 735。

例 5.20 有一个凸多边形，它的各内角的度数成等差数列，其最小角为 $60°$，公差为 $20°$，求它的边数。

解： 设此多边形的边数为 n，因为它的内角度数成等差数列，且公差是 $20°$，第一个角是 $60°$，所以

$$S_n=n\cdot 60+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 20$$

另一方面，凸多边形内角和为 $(n-2)\cdot 180°$，所以

$$n\cdot 60+n(x-1)\cdot 20=(m-2)\cdot 180$$

化简整理，得

$$n^2-13n+36=0$$

解之，得 $n=4$，或 $n=9$.

若 $n=9$，则 $a_9=a_1+(9-1)\cdot d=60+8\times 20>180$, 所以 $n=9$ 不合题意，应舍去。

答：这个多边形的边数是 4。

观察公式，$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$ 是项数 n 的二次型代数式，我们有下面的定理

定理 2

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证数列 $\{a_n\}$ 是等差数列的充要条件是 $S_n=an^2+bn$（其中 a，b 为已知常数）。

证明： 先证“必要性”，即证“若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $S_n=a\cdot n^2+bn$.”证明如下：

$\because \quad \{a_n\}$ 是等差数列，

$$\therefore \quad S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$$

只需令 $\dfrac{d}{2}=a$，$\quad a_1-\dfrac{d}{2}=b$，则有 $S_n=an^2+bn$.

再证“充分性”，即证“若数列的前 n 项和 $S_n=an^2+bn$，则 $\{a_n\}$ 是等差数列”，证明如下：$\because \quad S_n=an^2+bn$

$$\therefore \quad a_n = \begin{cases} S_n - S_{n-1} = 2an - a + b, & n \geqslant 2 \\ S_1 = a + b, & n = 1 \end{cases}$$

$\because \quad n = 1$ 时，$2an - a + b = a + b = S_1$

$\therefore \quad$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2an - a + b\ (n \geqslant 1)$，由定理 1，$\{a_n\}$ 是等差数列。

例 5.21 设 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $S_{10} = 100, S_{100} = 10$，试求前 110 项之和 S_{110}.

分析：解法之一是，利用等差数列的求和公式 $S_n = a_n + \dfrac{n(n-1)}{2}d$ ，及条件 $S_{10} = 100, S_{100} = 10$，列出关于 a_1 与 d 的二元方程组，解出 a_1 与 d 来，然后再求 S_{110}（请读者自己来完成）.

解法之二是，利用定理 2，可设 $S_n = an^2 + bn$，依据条件用待定系数法求出 a 与 b 来，再求 S_{110}。

解：因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，由定理 2 可设 $S_n = an^2 + bn$，由已知，有

$$\begin{cases} a \cdot 10^2 + b \cdot 10 = 100 \\ a \cdot 100^2 + b \cdot 100 = 10 \end{cases}$$

解之，得 $\begin{cases} a = -\dfrac{11}{100} \\ b = \dfrac{111}{10} \end{cases}$

$$\therefore \quad S_{110} = -\frac{11}{100} \times 110^2 + \frac{111}{10} \times 110 = -110$$

例 5.22 已知等差数列中，$a_3 + a_{18} = 100$，求 S_{20}.

解：$\because \quad a_3 + a_{18} = a_1 + a_{20} = 100$

$$\therefore \quad S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \times 20 = \frac{100}{2} \times 20 = 1000.$$

例 5.23 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n - 26$，求其前 n 项和 S_n 的最大值或最小值。

解：$\because \quad a_1 = 3 \times 1 - 26 = -23 < 0, \quad d = 3 > 0$

$\therefore \quad S_n$ 有最小值，无最大值。

设 $a_n = 3n - 26 \leqslant 0$，得

$$n \leqslant \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$

即数列的前 8 项均为负数，而第 9 项 $a_9 = 3 \times 9 - 26 = 1 > 0$，故前 8 项之和 S_8 是 S_n 的最小值。其最小值为

$$S_8 = 8 \times (-23) + \frac{8 \times 7}{2} \times 3 = -100$$

例 5.24 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n = 32$，公差为 -4，求它的前 n 项和 S_n 的最大值或最小值。

解: 因为 $a_1 = 32, d = -4 < 0$，所以数列的前 n 项和 S_n 有最大值，无最小值。

设 $a_n = 32 + (n-1) \times (-4) \geqslant 0$, 求得 $n \leqslant 9$, 即数列的前 9 项为非负数，而第 10 项开始为负数，又 $a_0 = 0$, 所以前 8 项的和与前 9 项的和相等，即 $S_8 = S_9$，且它们是 S_n 的最大值，最大值是:

$$S_8 = 32 \times 8 + \frac{8 \times 7}{2} \times (-4) = 144$$

或

$$S_9 = 32 \times 9 + \frac{9 \times 8}{2} \times (-4) = 144$$

另解: 因为等差数列前 n 项和 S_n 当 $d \neq 0$ 时是 n 的二次式，所以也可以借助于求二次函数的极值的方法，来求 S_n 的最大值或最小值。

如例 5.16 中，$a_n = 3n - 26$，所以 $a_1 = -23$，于是

$$\begin{aligned} S_n = \frac{n(-23 + 3n - 26)}{2} &= \frac{3}{2}n^2 - \frac{49}{2}n \\ &= \frac{3}{2}\left(n - \frac{49}{6}\right)^2 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{49}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

然而，这里 $n \in \mathbb{N}$，所以 $n - \dfrac{49}{6} \neq 0$，只有当 $\left|n - \dfrac{49}{6}\right|$ 最小时，即 $n = 8$ 时，S_n 取得最小值，此时，$(S_n)_{\min} = \dfrac{3}{2} \times 8^2 - \dfrac{49}{2} \times 8 = -100$

又如例 5.17 中，有

$$\begin{aligned} S_n = \frac{n(32 + 32 - 4n - 4)}{2} &= -2n^2 + 34n \\ &= -2\left(n - \frac{17}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{17}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

当 $\left|n - \dfrac{49}{6}\right|$ 最小，即 $n = 8$ 或 $n = 9$ 时，S_n 取得最大值 144.

例 5.25 求数列 $\left\{\lg\left(1000 \sin^n \dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$ 的前 n 项之和 S_n 的最大值.

解:

$$\because \quad a_n - a_{n-1} = \lg 1000\sin^n\frac{\pi}{4} - \lg 1000\sin^{n-1}\frac{\pi}{4} = \lg\frac{1000\sin^n\frac{\pi}{4}}{1000\sin^{n-1}\frac{\pi}{4}} = \lg\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\lg 2$$

$\therefore$ 该数列是等差数列，其公差为 $-\frac{1}{2}\lg 2$，首项 $a_1 = \lg 1000\sin\frac{\pi}{4} = 3-\frac{1}{2}\lg 2$. 因为 $a_i > 0$, $d < 0$，故 S_n 有最大值。

设 $a_n = \lg 1000\sin^n\frac{\pi}{4} \geqslant 0$, 得

$$3-\frac{n}{2}\lg 2 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad n \leqslant \frac{6}{\lg 2} \approx 19.9$$

答：S_{19} 是 S_n 的最大值，其值 $S_{19} \approx 28.40$.

（读者可利用另一种方法求其最大值）

练习

1. 根据下列各题的条件，求相应的等差数列 am 的前 n 项和”S

   (1) $a_1 = 5, \quad a_n = 65, \quad n = 10;$

   (2) $a_1 = 100, \quad d = -2, \quad n = 50;$

   (3) $a_1 = \frac{2}{3}, \quad a_n = -\frac{3}{2}, \quad n = 14;$

   (4) $a_1 = 14.5, \quad d = 0.7, \quad a_n = 32.$

2. (1) 求自然数列中前 100 个奇数的和；

   (2) 求前 100 个自然数中，所有被 3 除余 2 的自然数的个数，以及它们的和；

   (3) 两位自然数中被 7 除余 1 的各数之和。

3. 根据下列各题中的条件，求相应的等差数列 $\{a_n\}$ 中的有关未知数：

   (1) $a_1 = 20, \quad a_n = 54, \quad S_n = 999$，求 d 和 n;

   (2) $d = \frac{1}{3}, \quad n = 37, \quad S_n = 629$，求 a_1 和 a_n;

   (3) $a_1 = \frac{5}{6}, \quad d = -\frac{1}{6}, \quad S_n = -5$，求 n 和 a_n;

   (4) $d = 2, \quad n = 15, \quad a_n = -10$，求 a_1 和 S_n.

4. (1) 在正整数集合里，有多少个三位数，并求出它们的和；

   (2) 在三位正整数的集合中有多少个数是 7 的整数倍? 并求它们的和，

   (3) 求等差数列 $13, 15, 17, \ldots, 81$ 的各项之和；

   (4) 求等差数列 $10, 7, 4, \ldots, -47$ 的各项之和。

5. 根据下列条件，求数列前多少项的和最大（或最小），并求出其最大值或最小值.

   (1) $\{a_n\}$ 是等差数列，且

   (a) $a_2 = 7, \quad a_6 = 23$; (b) $a_{20} = -1, \quad d = -\dfrac{1}{2}$.

   (2) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

   (a) $a_n = -5n + 2$; (b) $a_n = 33 - 3n$.

   (3) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2n^2 - 23n + \dfrac{123}{2}$

习题二

A

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列。

   (1) 若 $a_2 + a_9 + a_{12} + a_{19} = 100$，求 S_{20};

   (2) 若 $a_{10} = 20$，求 S_{19};

   (3) 若 $a_4 = 7, a_9 = 5$，求 a_{19} 和 a_{20}.

2. 三个数成等差数列，它们的和等于 18，它们的平方和等于 116，求这三个数。

3. (1) 某等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 3n - 2$，求它的前 n 项和；

   (2) 某等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式是 $S_n = 5n^2 + 3n$，求它的前 3 项及通项公式。

4. 一个等差数列的第 6 项是 5，第 3 项与第 8 项之和也是 5，求该数列的前 9 项之和。

5. 一个屋顶的某一斜面成等腰梯形，最上面一层铺了瓦片 21 块，往下每一层多铺一块，斜面上共铺了瓦片 19 层，共铺了多少块瓦?

6. 一个剧场设置了 20 排座位，第一排 38 个座位，往后每一排比前一排多 2 个座位。这个剧场一共设置了多少个座位?

7. (1) 一个等差数列的第 1 项是 5.6，第 6 项是 20.6，求它的第四项。
   (2) 一个等差数列第 3 项是 9，第 9 项是 3，求它的第 2 项。
   (3) 一个等差数列第 5 项是 $5a-b$，第 2 项是 $2a+2b$，求第 3 项和第 6 项。

8. (1) 在 12 和 60 之间，插入 3 个数，使这 5 个数构成等差数列，求这三个数。
   (2) 在 8 和 36 之间插入 6 个数，使这 8 个数构成等差数列，求这六个数。
   (3) 在 a 和 b 之间插入 10 个数，使这 12 个数构成等差数列，求这个数列的第六项。

9. 在通常情况下，从地面到 1 万米高空，高度每增加 1 千米，气温就下降某一固定数值。如果 1 千米高度的气温是 8.5°C，5 千米高度的气温是 -17.5°C。求 2 千米、4 千米及 8 千米高度的气温。

10. 安装在一个公共轴上的 5 个皮带轮的直径成等差数列，其中最大的与最小的皮带轮直径分别是 216 毫米与 120 毫米，求中间三个皮带轮的直径。

B

11. 某多边形的周长等于 195cm，所有各边的长成等差数列，最大的边长等于 40cm，公差是 3cm，求多边形的边数。

12. 一个梯形两条底边的长分别是 12cm 和 22cm，将梯形的一条腰 10 等分，过每个分点画平行于梯形底边的直线，求这些直线夹在梯形两腰间的线段的长度之和。

13. 长方体的三条棱的长成等差数列，它的对角线的长是 $5\sqrt{2}$cm，全面积是 94cm^2，求它的体积。

14. 一个凸多边形的各内角的度数成等差数列，其公差为 5°，又最小内角是 120°，求这个多边形的边数。

15. 已知数 $\lg 1000,\ \lg 1000\cos\dfrac{\pi}{3},\ \lg 1000\cos^2\dfrac{\pi}{3},\ldots,\lg 1000\cos^{n-1}\dfrac{\pi}{3},\ldots$ 的前多少项的和最大，并求出其最大值。

三、等比数列

5.9 等比数列的有关概念

观察下面的数列：

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ldots \tag{1}$$

$$5,\ 5,\ 5,\ 5,\ldots \tag{2}$$

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots \tag{3}$$

- 数列（1）中，从第 2 项起每一项与前一项的比都等于 2;
- 数列（2）中，从第 2 项起每一项与前一项的比都等于 1;
- 数列（3）中，以第 2 项起每一项与前一项的比都等于 $-\dfrac{1}{2}$.

它们的共同特点是：以第 2 项起，每一项与它的前一项之比都等于同一个非零常数，通常把这个常数记作 q，即

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q \quad (n\geqslant 2,\ n\in\mathbb{N},\ q\text{为常数},\ q\neq 0)$$

这类数列叫做**等比数例**，常数 q 叫做等比数列的**公比**。上述三个等比数列的公比分别是 2, 1 和 $-\dfrac{1}{2}$. 数列（2）说明一个非零常数列一定是等比数列，且它的公比为 1。

由等比数列的定义可知，一个等比数列中的任何一项都不能是零。

如果有三个数 x、G、y 组成等比数列，那么 G 叫做 x 和 y 的**等比中项**。根据等比数列的定义可知 $\dfrac{G}{x}=\dfrac{y}{G}$，所以 $G^2=xy$，因此 $G=\pm\sqrt{xy}$.

由此可知，在实数集合内，只有当 x 与 y 是同号的两个数时，它们才有等比中项，当两个数有等比中项时，必有两个等比中项，且它们互为相反数。

容易看出，在一个无穷的等比数列中，从第 2 项起，每一项都是它的前一项与后一项的等比中项。

例 5.26 已知数列的通项公式为 $a_n = \frac{1}{3} \times 2^n$，求证:

(1) 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，并求其公比;

(2) 求出数列的首项及第 10 项;

(3) 判断 256 和 $170\frac{2}{3}$ 是不是该数列中的项。如果是，是第几项?

解:

(1) $\because \quad \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{\frac{1}{3} \times 2^n}{\frac{1}{3} \times 2^{n-1}} = 2$（常数）

$\therefore$ 　数列是等比数列，且公比是 2。

(2) 首项 $a_1 = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$, $a_{10} = \frac{1}{3} \times 2^{10} = \frac{1024}{3}$.

(3) 设 $a_n = \frac{1}{3} \times 2^n = 259$，则 $n = 8 + \log_2 3$ 不是整数，所以 256 不是数列中的项。

设 $a_n = \frac{1}{3} \times 2^n = 170\frac{2}{3} = \frac{512}{3}$ 则 $n = 9$，所以 $170\frac{2}{3}$ 是该数列的第 9 项。

5.10 等比数列的通项公式

如果等比数列 $\{a_n\}$ 的第一项为 a_1，公比为 q，那么根据等比数列的定义得

$$
\begin{aligned}
&a_2 = a_1 q, \\
&a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2, \\
&a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) q = a_1 q^3. \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

由此我们可以归纳出，数列的通项公式是

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad (a_1 \neq 0,\ q \neq 0)$$

其正确性，可用数学归纳法给予证明。

上面的公式还可用下面的方法得到：

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ \frac{a_2}{a_1} &= q \\ \frac{a_3}{a_2} &= q \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} &= q \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} &= q \end{aligned}$$

将这 n 个等式的等号两边分别相乘，即可得出

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

上面这个方法，称之为**迭乘法**。

等比数列通项公式还可以改写成

$$a_n = \frac{a_1}{q} \cdot q^n = cq^n$$

其中 $c = \dfrac{a_1}{q}$，是一个不为零的常数。

要确定函数 $y = c \cdot q^x$ 需要两个独立条件，因此要确定等比数列的通项公式，也需要两个独立条件。

例 5.27 求等比数列 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, -1, $\sqrt{2}$, $-2, \ldots$ 的第 100 项。

解： $\because \quad a_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad q = -\sqrt{2}$

$\therefore \quad a_{100} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\sqrt{2}\right)^{100-1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{99} = -2^{49}$

例 5.28 一个等比数列的第 3 项与第 4 项分别是 12 与 18，求它的第 1 项，第 2 项，和它的通项公式。

解： 设这个数列为 $\{a_n\}$，则它的公比

$$q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$\because \quad a_3 = a_2 \cdot q = a_2 \cdot \dfrac{3}{2} = 12$

$\therefore \quad a_2 = 8$

$\because \quad a_2 = a_1 q = a_1 \cdot \dfrac{3}{2} = 8$

$\therefore \quad a_1 = \dfrac{16}{3}, \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \dfrac{16}{3} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} = 2^{5-n} \cdot 3^{n-2}$

例 5.29 培育水稻新品种，如果得到第一代 120 粒种子，并且从第一代起，以后各代的每一粒种子都可以得到下一代的 120 粒种子，到第五代大约可以得到这种新品种的种子多少粒（保留两位有效数字）?

解: 由于每代的种子数是它的前一代种子数的 120 倍，逐代的种子数组成等比数列，记作 $\{a_n\}$，其中 $a_1 = 120$, $q = 120$, 因此

$$a_5 = 120 \times 120^{5-1} \approx 2.5 \times 10^{10}$$

答：到第五代大约可以得到种子 2.5×10^{10} 粒。

例 5.30 求证数列 $\{a_n\}$（其中 $a_k \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots$）是等比数列的充要条件是其通项公式为 $a_n = c \cdot q^n$（其中 c、q 均为非零常数）.

证明: 先证“充分性”，即证“若 $a_n = c \cdot q^n$，则 $\{a_n\}$ 成等比数列”，证明如下:

$\because \quad a_n = c \cdot q^n \quad (cq \neq 0)$

$\therefore \quad \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{c \cdot q^n}{c \cdot q^{n-1}} = q$（非零常数），

$\therefore \quad \{a_n\}$ 是等比数列。

再证“必要性”，即“若 $\{a_n\}$ 成等比数列，则 $a_n = cq^n$”.

$\because \quad \{a_n\}$ 成等比数列，

$\therefore \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \dfrac{a_1}{q} \cdot q^n$

令 $c = \dfrac{a_1}{q}$，即得到 $a_n = c \cdot q^n$ ·

综上可知，$\{a_n\}$ 成等比数列的充要条件 $a_n = c \cdot q^n \quad (cq \neq 0)$

例 5.31 在 1 和 8 之间插入 5 个数，使得这 7 个数组成等比数列，试求插入的 5 个数。

解: 设数列的公比为 q. 由 $a_1 = 1$ 得

$$a_7 = 8 = a_1 q^6 = q^5$$

$\therefore \quad q = \pm\sqrt{2}$

答：插入的 5 个数是 $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$, 2, $-2\sqrt{2}$, 4, $-4\sqrt{2}$.

例 5.32 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比为 q，求证 $a_n = a_m q^{n-m}$.

证明： 由等比数列通项公式，得

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \qquad a_m = a_1 q^{m-1}$$

$\therefore \quad a_n = a_1 q^{m-1} \cdot q^{n-m} = a_m q^{n-m}$

例 5.33 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列且 $a_m = 16$, $a_{m+4} = 9$，求数列的通项公式。

解： 设数列的公比为 q，则 $a_{m+4} = a_m q^4$，即

$$q^4 = \frac{9}{16} \quad \Rightarrow \quad q = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \quad a_n = a_m \cdot q^{n-m} = 16 \times \left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-m}$

例 5.34 设 $\{a_n\}$ 为等比数列。$k, \ell, m, n \in \mathbb{N}$, 若 $k+\ell = m+n$, 则 $a_k \cdot a_\ell = a_m \cdot a_n$

证明： 设公比为 q，则

$$a_k \cdot a_\ell = a_1 q^{k-1} \cdot a_1 q^{\ell-1} = a_1^2 \cdot q^{k+\ell-2}$$
$$a_m \cdot a_n = a_1 q^{m-1} \cdot a_1 q^{n-1} = a_1^2 \cdot q^{m+n-2}$$

$\because \quad k + \ell = m + n$

$\therefore \quad a_k \cdot a_\ell = a_m \cdot a_n$

评述： 此例说明，在等比数列中，当两项的项数和与另两项项数和相等时，对应的两项之积也相等。这是等比数列的重要性质之一。

特别地，$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \cdots$.

练习

1. 解下列各题：

   (1) 求等比数列 5, -15, 45, ... 的第 4 项，第 5 项；

   (2) 求等比数列 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, ... 的第 6 项；

   (3) 求等比数列 $\sqrt{2}$, 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ... 的第 n 项；

   (4) 求等比数列 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... 的第 $n+1$ 项。

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，设公比为 q.

   (1) 已知 $a_9 = \frac{4}{9}$, $\quad q = -\frac{1}{3}$, 求 a_1;

(2) 已知 $a_2 = 10, \quad a_3 = 20$，求 a_n;

(3) 已知 $a_2 = 2, \quad a_5 = 54$，求 q;

(4) 已知 $a_1 = 1, \quad a_n = 256, \quad q = 2$，求 n;

(5) 已知 $a_4 = 27, \quad q = -3$，求 a_7;

(6) 已知 $a_5 - a_1 = 15, \quad a_4 - a_2 = 6$，求 a_n.

3. 求下列各组数的等比中项。

(1) 45 与 80

(2) $9\frac{3}{8}$ 与 $1\frac{1}{2}$

(3) $7+3\sqrt{5}$ 与 $7-3\sqrt{5}$

(4) $a^4+a^2b^2$ 与 $b^4+a^2b^2 \quad (2b \neq 0)$

4. (1) 在 9 和 243 之间插入两个数，使它们同这两个数成等比数列;

(2) 在 160 和 5 之间插入 4 个数，使它们同这两个数成等比数列。

5. 某林场计划第一年造林 80 亩，以后每一年比前一年多造林 20%，第五年造林多少亩（保留到个位）?

5.11 等比数列前 n 项的和

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，首项为 a_1，由等比数列的定义，有

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1q \\
a_3 &= a_2q \\
a_4 &= a_3q \\
&\cdots\cdots\cdots \\
a_{n-1} &= a_{n-2}q \\
a_n &= a_{n-1}q
\end{aligned}
$$

将上述 $n-1$ $(n \geqslant 2)$ 个等式的等号两边分别相加，得

$$a_2+a_3+\cdots+a_n = q(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$$

即

$$S_n - a_1 = q(S_n - a_n)$$
$$(1-q)S = a_1 - a_n q$$

当 $q \neq 1$ 时，

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$$

上式对 $n=1$ 显然成立。

当 $q=1$ 时，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = na_1$，这样就得出等比数列前 n 项和公式

$$S_n = \begin{cases} na_1, & q = 1 \\ \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases} \tag{1}$$

将等比数列的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 代入，可得

$$S_n = \begin{cases} na_1, & q = 1 \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases} \tag{2}$$

公式（2）中 $q \neq 1$ 时的结论还可以用下面的方法得到，设

$$S_n = a_1 + a_2 q + a_3 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \tag{*}$$

将上式中各项都乘以 q，便得到

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \tag{**}$$

比较上述两式的右端，可见，(*）的右式中，从第 2 项至第 n 项与（**）式右端的第 1 项至第 $n-1$ 项完全相同，因此，以（*）式两边分别减去（**）式两边，便可得到

$$(1-q)S_n = a_1 - a_1 q^n$$

从而得出

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

等比数列的前 n 项和公式 (1) 和 (2), 及等比数列的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 其中涉及 a_1, q, n, a_n 和 S_n 这 5 个量。而它们又通过通项公式及前 n 项和公式联系着，因此只要已知其中的任何三个量，即可得到以其余两个量为未知数的方程组，从而可以求出其余两个量。

例 5.35 求等比数列 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... 的第 10 项及前 10 项之和。

解: 已知 $a_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}, \quad n = 10$

$$\therefore \quad a_{10} = a_1 q^{10-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{1024}, \qquad S_{10} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024}$$

例 5.36 某制糖厂今年制糖 5 万吨，如果平均每年的产量比上一年增加 10%，那么从今年起，几年内可以使总产量达到 30 万吨（保留到个位）?

解: 由题意可知，这个糖厂从今年起，平均每年的产量（万吨）组成一个等比数列，记为 $\{a_n\}$，其中

$$a_1 = 5, \quad q = 1 + 10\% = 1.1, \quad S_n = 30$$

于是得到

$$\frac{5(1 - 1.1^n)}{1 - 1.1} = 30$$

整理后，得

$$1.1^n = 1.6$$

两边取对数，得

$$n \lg 1.1 = \lg 1.6$$

$\therefore \quad n = \frac{\lg 1.6}{\lg 1.1} = \frac{0.2041}{0.0414} \approx 5$

答: 5 年内可以使总产量达到 30 万吨。

例 5.37 已知无穷数列 $10^{\frac{0}{5}}$, $10^{\frac{1}{5}}$, $10^{\frac{2}{5}}$, $\ldots, 10^{\frac{n-1}{5}}, \ldots$ 求证:

(1) 这个数列是等比数列;

(2) 这个数列中任意一项是它后面第 5 项的 $\frac{1}{10}$;

(3) 这个数列中任意两项的积仍然在这个数列中;

(4) 求该数列的前 n 项之积。

解:

(1) 这个数列中的第 n 项与第 $n+1$ 项分别是 $10^{\frac{n-1}{5}}$ 与 $10^{\frac{n}{5}}$ $(n \geqslant 1)$，于是 $n+1$ 项与第 n 项的比为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{\frac{n}{5}}}{10^{\frac{n-1}{5}}} = 10^{\frac{n}{5}-\frac{n-1}{5}} = 10^{\frac{1}{5}}$$

即它们的比值是常数 $10^{\frac{1}{5}}$，因此这个数是以 $10^{\frac{1}{5}}$ 为公比的等比数列。

(2) 这个数列的第 n 项 $a_n = 10^{\frac{n-1}{5}}$，第 $n+5$ 项 $a_{n+5} = 10^{\frac{n+5-1}{5}} = 10^{\frac{n+4}{5}}$，于是

$$\frac{a_n}{a_{n+5}} = \frac{10^{\frac{n-1}{5}}}{10^{\frac{n+4}{5}}} = 10^{\frac{n-1}{5}-\frac{n+4}{5}} = 10^{-\frac{5}{5}} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

这说明，这个数列中的任意一项，每经过 5 项后，就变大为原来的 10 倍，例如 $a_8 = 10 \cdot a_3$，$a_{19} = 10 \cdot a_{14}$ 等。

(3) 从该数列中任取两项，假设它们分别是 a_{n_1} 和 a_{n_2}，则 $a_{n_1} = 10^{\frac{n_1-1}{5}}$，$a_{n_2} = 10^{\frac{n_2-1}{5}}$（其中 $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$），那么

$$a_{n_1} \cdot a_{n_2} = 10^{\frac{n_1-1}{5}} \cdot 10^{\frac{n_2-1}{5}} = 10^{\frac{n_1-1}{5}+\frac{n_2-1}{5}} = 10^{\frac{(n_1+n_2-1)-1}{5}}$$

因为 $n_1 \geqslant 1, n_2 \geqslant 1, n_1 \neq n_2$，所以 $n_1 + n_2 > 2$，即

$$n_1 + n_2 - 1 > 1$$

又因为 $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$，所以 $n_1 + n_2 - 1 \in \mathbb{N}$，这就说明 $10^{\frac{(n_1+n_2-1)-1}{5}}$ 是数列的第 $n_1 + n_2 - 1$ 项

(4)

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 \cdots a_n &= 10^{\frac{0}{5}} \cdot 10^{\frac{1}{5}} \cdots 10^{\frac{n-1}{5}} \\ &= 10^{\frac{0}{5}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{n-1}{5}} \\ &= 10^{\frac{1}{5}\cdot\frac{0+n-1}{2}\cdot n} = 10^{\frac{n^2-n}{10}} \end{aligned}$$

练习

1. 根据下列条件，求相应的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n：

(1) $a_1 = 3$，$q = 2$，$n = 6$；

(2) $a_1 = 2.4,\ q = -1.5,\ n = 5$;

(3) $a_1 = 8,\ q = \dfrac{1}{2},\ n = 5$;

(4) $a_1 = -27,\ q = -\dfrac{1}{3},\ n = 6$.

2. (1) 求等比数列 $1, 2, 4, \ldots$ 从第 5 项到第 10 项的和;

(2) 求等比数列 $\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{8}, \ldots$ 从第 3 项到第 7 项的和.

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中

(1) 已知 $a_1 = -1.5, a_4 = 96$，求 q 及 S_4;

(2) 已知 $q = \dfrac{1}{2}, S_6 = 3\dfrac{7}{8}$，求 a_1 与 a_5;

(3) 已知 $a_1 = 2, S_3 = 26$，求 q 与 a_3;

(4) 已知 $a_3 = 1\dfrac{1}{2}$，$S_3 = 4\dfrac{1}{2}$，求 a_1 与 q.

习题三

A

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中:

(1) 已知 n，q，a_n，求 a_1 与 S_n

(2) 已知 q，n，S_n，求 a_1 与 a_n

(3) 已知 a_1，q，S_n，求 a_n

(4) 已知 q，a_n，S_n，求 a_1

2. 某工厂去年的产值是 138 万元，计划在今后 5 年内每年比上一年产值增长 10%。从今年起，到第 5 年这个厂的年产值是多少? 这 5 年的总产值是多少（精确到万元)?

3. 画一个边长为 2cm 的正方形，再以这个正方形的对角线为边画第二个正方形，以第二个正方形的对角线为边画第 3 个正方形，这样一共画了 10 个正方形。求:

(1) 第 10 个正方形的面积;

(2) 这 10 个正方形的面积之和。

4. 一个球从 100 米高处自由落下，每次着地后又跳回到原来高度的一半再落下。当它第 10 次着地时，共经过了多少米（保留到个位)?

5. 从盛满 20 升纯酒精的容器里倒出 1 升，然后用水填满，再倒出 1 升混合液，用水填满，这样继续进行，一共倒了 3 次，这时容器里还有多少升纯酒精（保留到个位)?

6. 三个数成等比数列，它们的和等于 14，它们的积等于 64，求这三个数。

7. 抽气机的活塞每运动一次，从容器里抽出 $\dfrac{1}{8}$ 的空气，因而使容器里空气的压强降低为原来的 $\dfrac{7}{8}$，已知最初容器里空气的压强是 750 毫米高水银柱，求活塞运动 5 次后容器里空气的压强（保留到个位）。

8. 某种细菌在培养过程中，每 30 分钟分裂一次（一个分裂为两个），经过 4 小时，这种细菌由 1 个可繁殖成多少个? 电动机轴的直径从小到大共有 5 种尺寸，它们的数值（单位：mm）组成一个等比数列，其中最小的数值为 40，最大的数值为 100，求它们的公比（保留到千分位）。

9. 一个工厂今年生产某种机器 1080 台，计划到后年把产量提高到每年生产机器 1920 台, 如果每一年比上一年增长的百分率相等, 求这个百分率(精确到 1%)。

B

11. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比是 q，求证：$a_1a_2\cdots a_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

12. 一个等比数列的各项都是正数，求证这个数列的各项的对数组成等差数列。

13. 已知 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 是等差数列，C 是正的常数，求证 $C^{a_1}, C^{a_2}, C^{a_3}, \ldots$ 是等比数列。

14. 成等差数列的三个正数之和是 15，并且将这三个数分别加上 $1, 4, 19$ 后，就成等比数列，求这三个数。

15. 某工厂的三年生产计划是：每年比上一年增产机器的台数相同。如果第三年比原计划多生产 1000 台，那么每年比上一年增长的百分数就相同，而且第三年生产的台数恰为原计划三年生产总台数的一半, 问原计划每年各生产机器多少台?

16. 已知无穷数列 $10^{\frac{0}{10}}, 10^{\frac{1}{10}}, 10^{\frac{2}{10}}, \ldots, 10^{\frac{n-1}{10}}, \ldots$，求证：

(1) 这个数列是以 $10^{\frac{1}{10}}$ 为公比的等比数列;

(2) 这个数列中的任意一项是它后面第 10 项的 $\frac{1}{10}$;

(3) 这个数列中的任意两项的积仍然在这个数列中。

17. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = a \neq 0$，其前 n 项为 S_n，若 $S_1, S_2, \ldots, S_n$ 是以 q 为公比的等比数列，求证：$a_2, a_3, \ldots, a_n$ 也是等比数列。

四、特殊数列求和问题

本节学习等差数列与等比数列以外的一些特殊数列的求和的方法。

5.12 可转化为等差（或等比）数列求和

5.12.1 分组转化法

例 5.38 求 $S_n = \left(x + \frac{1}{y}\right) + \left(2x + \frac{1}{y^2}\right) + \cdots + \left(nx + \frac{1}{y^n}\right)$

分析： 表面上看，数列既非等差又非等比。如果对每个括号内的前项或后项分别考察，则依次构成等差数列和等比数列。

解： 令 $S'_n = x + 2x + \cdots + nx = \frac{x + nx}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}x$

$$S''_n = \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \cdots + \frac{1}{y^n} = \begin{cases} n, & y = 1 \\ \dfrac{y^n - 1}{y^n(y-1)}, & y \neq 1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad S_n = S'_n + S''_n = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2}x + n, & y = 1 \\ \dfrac{n(n+1)}{2}x + \dfrac{y^n - 1}{y^n(y-1)}, & y \neq 1 \end{cases}$$

例 5.39 求下面各数列的和：

(1) $9,\ 99,\ 999,\ \ldots, \overbrace{99\cdots9}^{n\text{ 个 }9}$ (2) $5,\ 55,\ 555,\ \ldots, \overbrace{55\cdots5}^{n\text{ 个 }5}$

分析： 直接求和是不可设想的。然而对于 (1)，把每一项分别改写为 $10-1$, $100-1$, $\ldots, 10^n - 1$，便很容易得到解决；对于（2）只需把数列各项改写为 $9 \cdot \frac{5}{9}$，$99 \cdot \frac{5}{9}, \ldots, \overbrace{99\cdots9}^{n\text{ 个 }9} \cdot \frac{5}{9}$，即可转化为（1）.

解：

(1) $S_n = (10-1)+(100-1)+\cdots+(10^n-1) = 10+100+\cdots+10^n-n = \dfrac{10}{9}(10^n-1)-n$

(2) $S_n = \dfrac{5}{9}\left[\dfrac{10}{9}(10^n-1)-n\right] = \dfrac{50}{81}(10^n-1)-\dfrac{5}{9}n$

例 5.40 试求在不大于 100 的自然数中，能被 2 或 3 整除的各数之和。

分析: 若将满足条件的数一一写出，然后相加，并不困难；但如果把题中的"100"改为"1000"或更大的数，那么将是极为麻烦的。

我们把满足条件的数中，能被 2 整除，被 3 整除，以及既被 2 整除又被 3 整除的数，分门别类地求和，再寻求最后的答案，便得到了解决问题的一般方法。

解: 设 S'_1，S'_2，S'_3 分别表示 100 以内能被 2 整除，能被 3 整除以及既能被 2 整除又能被 3 整除的各数之和，则

$$S'_1 = \frac{2+100}{2}\times 50 = 2550$$
$$S'_2 = \frac{3+99}{2}\times 33 = 1683$$
$$S'_3 = \frac{6+96}{2}\times 16 = 816$$

设满足条件的各数之和为 S. 那么

$$S = S'_1 + S'_2 - S'_3 = 3417$$

5.12.2 "差比数列"的求和方法

例 5.41 设 $a\neq 0, a\neq 1$，求数列 $a,\ 2a^2,\ 3a^3,\ldots,na^n,\ldots$ 的前 n 项和。

分析: 该数列既非等差数列，又非等比数列，但系数部分构成等差数列，字母部分构成等比数列。这种数列不妨称为"差比数列"。可利用推导等比数列求和公式的第二种方法来求和。

解: 设

$$S_n = a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + na^n \qquad (1)$$
$$a\cdot S_n = a^2 + 2a^3 + 3a^4 + \cdots + na^{n+1} \qquad (2)$$

(1) 与 (2) 的两边分别相减，得

$$(1-a)S_n = a + a^2 + \cdots + a^n - n \cdot a^{n+1}$$

$\because \quad a \neq 1$

$\therefore \quad S_n = \dfrac{1}{1-a}\left[\dfrac{a(1-a^n)}{1-a} - na^{n+1}\right] = \dfrac{a(1-a^n)}{(1-a)^2} - \dfrac{na^{n+1}}{1-a}$

评述: “差比数列”的一般形式为 $\{C_n\}$, $C_n = a_n \cdot b_n$，其中 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列。本例题给出了“差比数列”求和的一般方法。

练习

1. 求和:

   (1) $1\dfrac{1}{2} + 3\dfrac{1}{4} + 5\dfrac{1}{8} + \cdots + \left(2n - 1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$

   (2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{7}{8} + \cdots + \dfrac{2^n-1}{2^n}$

2. 求数列 1, -3, 5, $-7, \ldots, (-1)^{n+1} + (2n-1), \ldots$ 的前 $2n$ 项的和 S_{2n}。

3. (1) 求在小于 300 的自然数中，能被 6 整除，但不能被 8 整除的各数之和

   (2) 求集合 $\{m \mid m = 7n,\ 且 m = 5k\ (n, k \in \mathbb{N})\ 且 m < 1000\}$ 中元素的个数和它们的和

   (3) 求 1000 以内的既不能被 7 整除，又不能被 5 整除的所有自然数的和 S.

   (4) 在前 100 个自然数中，所有既能被 6 整除，又能被 4 整除的数有多少个？并求其和。

4. 求数列 0.9, 0.99, $\ldots, 0.\overbrace{99\cdots9}^{n\text{ 个 }9}$ 的前 n 项的和

5. 求数列 $\dfrac{1}{2}$, $-1\dfrac{1}{3}$, $2\dfrac{1}{2}$, $-3\dfrac{1}{3}$, $4\dfrac{1}{2}$, $-5\dfrac{1}{3}, \ldots, 98\dfrac{1}{2}$, $-99\dfrac{1}{3}$ 的和。

6. 求数列前 n 项的和 S_n

   (1) 1, $3a$, $5a^2, \ldots, (2n-1)a^{n-1}, \ldots$

   (2) 1, $\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{7}{25}, \ldots, \dfrac{3^{n-2}}{5^{n-1}}, \ldots$

   (3) $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3^2}$, $\dfrac{1}{3^3}$, $\dfrac{2}{3^4}$, $\dfrac{1}{3^5}$, $\dfrac{2}{3^6}, \ldots$

5.13　裂项求和法

例 5.42　求下列各式的和

(1) $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

(2) $\dfrac{1}{2\times 4}+\dfrac{1}{4\times 6}+\dfrac{1}{6\times 8}+\cdots+\dfrac{1}{2n(2n+2)}$

分析：对于（1），考虑到数列 $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ 的每一项都可化为两项之差：

$$\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

于是所求之和为

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

显然，其中前一个括号的后项，与其后一个括号的前项相抵消。故称为裂项抵消法。

对于（2）可以类似地处理

解：

(1)

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{n}{4(n+1)}\end{aligned}$$

评述：若（2）采取下述方法，可更简便：

$$\text{原式}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

可归结为（1）.

例 5.43 求数列 $\left\{\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

分析: 以通项入手进行分析

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$$

于是采用例 5.42 的解法即可.

解:

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\times5}+\frac{1}{5\times9}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}\\&=\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{n}{4n+1}\end{aligned}$$

例 5.44 求数列 $\left\{\dfrac{1}{2n(2n+4)}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

分析: 可将其通项化简:

$$\frac{1}{2n(2n+4)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

解:

$$\begin{aligned}S_n=\frac{1}{8}\Bigg[&\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\\&\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\Bigg]\\=&\frac{1}{8}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]\\=&\frac{3}{16}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\end{aligned}$$

评述: 本例与例 5.42、例 5.43 不同。裂项抵消之后，并非只剩两项，而是剩四项：1，$\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{n+1}$，$-\dfrac{1}{n+2}$.

练习

求和:

1. $\dfrac{1}{1\times 4}+\dfrac{1}{4\times 7}+\dfrac{1}{7\times 10}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$
2. $\dfrac{1}{1\times 4}+\dfrac{1}{2\times 5}+\dfrac{1}{3\times 6}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+3)}$

5.14 前 n 个自然数的平方和的求法及应用

例 5.45 求和 $S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2\quad(n\in\mathbb{N})$

分析: 求和的方法很多，这里只介绍利用两数和的立方公式求此和的方法。

解: $\because\quad(m+1)^3=m^3+3m^2+3m+1$，分别取 $m=1,2,\ldots,n-1,n$ 得:

$$\begin{aligned}
(1+1)^3&=1^3+3\times 1^2+3\times 1+1\\
(2+1)^3&=2^3+3\times 2^2+3\times 2+1\\
(3+1)^3&=3^3+3\times 3^2+3\times 3+1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(n+1)^3&=n^3+3\times n^2+3\times n+1
\end{aligned}$$

将上述 n 个等式的两边分别相加，得

$$(n+1)^3=1^3+3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad 1^2+2^2+\cdots+n^2&=\frac{1}{3}\left[(n+1)^3-1-3(1+2+\cdots+n)-n\right]\\
&=\frac{1}{3}\left[n^3+3n^2+3n-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\right]\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

此即前 n 个自然数的平方和的公式:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

评述:

1. 本例给出的方法可以推广。例如，利用 $(m+1)^4 = m^4+4m^3+6m^2+4m+1$ 可求出前 n 个自然数的立方和 $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$ 等等。
2. 可根据该公式解决数列 $\{an^2+bn+c\ (a \neq 0)\}$ 的求和问题。

例 5.46 求下列各数列的前 n 项的和 S_n。

(1) $1\times 2,\ 2\times 3,\ 3\times 4,\ldots,n(n+1),\ldots$

(2) $2\times 5,\ 3\times 6,\ 4\times 7,\ldots,(n+1)(n+4),\ldots$

分析: 欲求数列的前 n 项和，可从对通项公式变形入手。例如 (1) 通项为 n^2+n. 于是 $S_n=(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)$，问题可解. （2）也类似.
解:

(1)

$$\begin{aligned}S_n &= (1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

(2) $\because \quad (n+1)(n+4)=n^2+5n+4$

$$\begin{aligned}\therefore \quad S_n &= (1^2+2^2+\cdots+n^2)+5(1+2+\cdots+n)+4n\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{5}{2}n(n+1)+4n\\ &= \frac{1}{6}n[2n^2+3n+1+15n+15+24]\\ &= \frac{1}{3}n(n^2+9n+20)=\frac{1}{3}n(n+4)(n+5)\end{aligned}$$

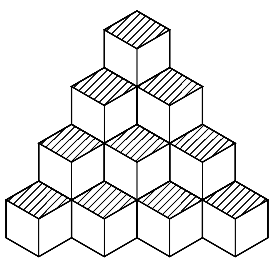


图 5.7

例 5.47 一堆零件堆积如图 5.7，第 1 层 1 个，第 2 层 $(1+2)$ 个，第 3 层 $(1+2+3)$ 个，……，求 n 层的总个数 S_n。

分析： 依题意，第 k 层有 $1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_n&=\frac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

$\therefore$ n 层的总个数为 $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

评述： 本例的实质是求数列 1，$1+2$，$1+2+3,\ldots,1+2+3+\cdots+n,\ldots$ 的前 n 项之和。

练习

1. 求和 $11^2+13^2+15^2+\cdots+(2n+9)^2$
2. 利用 $(m+1)^4=m^4+4m^3+6m^2+4m+1$，推导前 n 个自然数的立方和的公式
$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
3. 利用上题的公式，求和：

(1) $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3$

(2) $1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+n(n+1)(n+2)$

习题四

A

1. 求下列各数列的前 n 项的和 S_n，已知数列的通项公式为

(1) $a_n=2n+\frac{1}{3^n}$

(2) $a_n=a^n-n$

(3) $a_n=0.\overbrace{77\cdots7}^{n\text{ 个 }7}$

2. 由下图所示，这 n^2 个自然数之和为 14400，求 n

$$
\begin{array}{l}
1,\ 2,\ 3, \ldots, n \\
2,\ 4,\ 6, \ldots, 2n \\
3,\ 6,\ 9, \ldots, 3n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n,\ 2n,\ 3n, \ldots, n^2
\end{array}
$$

3. 求下列各数列的前 n 项和

(1) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \ldots,\ \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

(2) $\dfrac{1}{2^2-1},\ \dfrac{1}{4^2-1},\ \dfrac{1}{6^2-1}, \ldots, \dfrac{1}{(2n)^2-1}$

B

4. 求下列各式的和:

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{42}+\dfrac{1}{56}+\dfrac{1}{72}+\dfrac{1}{90}$

(2) $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+100}$

5. 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_n \neq 0\ (n \in \mathbb{N})$，求证

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

6. 设 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_n > 1\ (n \in \mathbb{N})$，求证

$$\frac{1}{\lg a_1 \cdot \lg a_2}+\frac{1}{\lg a_2 \cdot \lg a_3}+\cdots+\frac{1}{\lg a_{n-1} \cdot \lg a_n}=\frac{n-1}{\lg a_1 \cdot \lg a_n}$$

五、数学归纳法

5.15 演绎法与归纳法

5.15.1 演绎法

演绎法是从普遍性的规律（如概念、公理、定理等）出发去认识特殊的，个别的研究对象的方法，即从一般到特殊的推理方法。

演绎法是数学推理的重要方法，其基本模式是三段论法，即:

1. 大前提：已知的一般原理，
2. 小前提：所研究特殊事物的特征，
3. 结论：从已知的一般原理结合特殊事物的特征做出的判断。

例如，对 $y=f(x)$ 定义域内任何 x，都有 $f(-x)=-f(x)$, 则 $f(x)$ 是奇函数。今有函数 $f(x)=-x^3+\sin x$. 显然 $f(-x)=-(-x)^3+\sin(-x)=x^3-\sin x=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数.

5.15.2 归纳法

归纳法是通过考察事物的部分对象而得到的有关事物的一般性结论的方法。即从特殊到一般的推理方法。

例如，观察下列各式：

$$1=1^2$$
$$1+3=4=2^2$$
$$1+3+5=9=3^2$$
$$1+3+5+7=16=4^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

通过归纳得出:“自然数中，前 n 个奇数之和等于 n 的平方”，即

$$1+3+5+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +(2n-1)=n^2$$

这样得出的结论只是一种猜想（假说），其结论是否对任意自然数 n 都正确，还不能确定。

5.15.3 不完全归纳法与完全归纳法

不完全归纳法，是“在考察某类事物的部分对象后概括出某种属性的思维方法”。由于它只考察了部分对象而得出的结论，对于没考察到的对象，是否也都符合，则很难确保其结论的可靠性。例如，$f(n)=n^2+n+41$，当 n 依次取 $1,2,3,\ldots,39$ 时，所得结果 $f(n)$ 均为素数，如果，由此归纳出：“n 为任意自然数时，$f(n)$ 必是素数”的结论，就是不正确的。因为 $n=40$ 时，$f(n)=40^2+40+41=41^2$，不是素数。

完全归纳法，则是“在考察某类事物的全部对象之后，概括出事物的某种属性”的方法。

例如，正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$, 其中 a、b、c 依次为 $\triangle ABC$ 中角 A、B、C 的对边，R 为三角形外接圆的半径。是在证明了，无论其圆心是在 $\triangle ABC$ 的边上，在 $\triangle ABC$ 内部，还是外部（因为只有这三种情况），都是正确的，因此断言，对任何三角形，上述结论都是正确的。

正弦定理的证明方法就是完全归纳法。即考察某类事物的所有对象的一切可能的特殊情况，将其一一列举，无一遗漏，因此也称为穷举法，所得结论必然是正确的。

完全归纳法所得结论是可靠的。

5.16 数学归纳法

对于由归纳法得到的某些与自然数有关的数学命题。如"自然数中，前 n 个奇数之和等于 n^2". 若对任何自然数 n 都一一考察到是不可能的，我们常采用下面的方法来证明其正确性：

第一步，证明当 n 取第一个值 n_0（例如：$n_0=1$）时命题成立；

第二步，假设 $n=k$ 时命题成立，证明 $n=k+1$ 时命题也成立（由此可断定这个命题对于 n 取第一个值 n_0 后面的所有自然数也都成立）。

这种证明方法，叫做**数学归纳法**。

例如，我们用数学归纳法来证明，如果 $\{a_n\}$ 是一个等差数列，那么 $a_n=a_1+(n-1)d$ 对一切 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。

证明：

(1) 当 $n=1$ 时，左边是 a_1，右边是 $a_1+0d=a_1$, 等式是成立的。

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，就是

$$a_k=a1+(k-1)d$$

那么，

$$a_{k+1}=a_k+d=a_1+(k-1)d+d=a_1+[(k+1)-1]d$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，等式也成立。

根据（1），$n=1$ 时等式成立，再根据（2），$n=1+1=2$ 时等式也成立。由于 $n=2$ 时等式成立，再根据（2），$n=2+1=3$ 时等式也成立。这样递推下去，就知道 $n=4,5,6,\dots$ 时等式都成立。因此根据（1）和（2）可以断定，等式对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。

从上面的例子看到，用数学归纳法证明一个与自然数有关的命题的步骤是：

(1) 证明当 n 取第一个值 n_0（例如 $n_0 = 1$ 或 2 等）时结论正确；

(2) 假设当 $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$, 且$k \geqslant n_0$) 时结论正确，证明当 $n = k + 1$ 时结论也正确。

在完成了这两个步骤以后，就可以断定命题对于从 n_0 开始的所有自然数 n 都正确。

例 5.48 用数学归纳法证明 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

证明：

(1) 当 $n = 1$ 时，左边 $= 1$，右边 $= 1$，等式成立。

(2) 假设当 $n = k$ 时等式成立，就是 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$，那么，

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] &= k^2 + [2(k + 1) - 1] \\ &= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 \end{aligned}$$

这就是说，当 $n = k + 1$ 时等式也成立。

根据（1）和（2），可知等式对任何 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。

本例所证明的等式 ($n = 5$) 可以用图 5.8 表示出来。

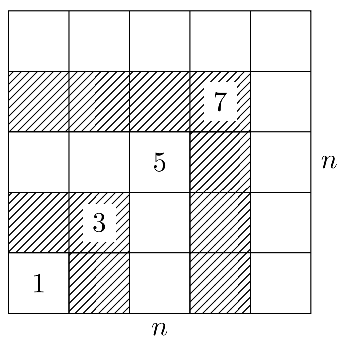


图 5.8

用数学归纳法证明命题的这两个步骤，是缺一不可的。若只完成（1），而缺（2），则是不完全归纳法，不能保证结论的正确性；若只有步骤（2）而缺少步骤（1），也可能得出不正确的结论。例如，假设 $n = k$ 时，等式 $2+4+6+\cdots+2n = n^2 + n + 1$ 成立，就是

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k^2 + k + 1$$

那么，

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) &= k^2 + k + 1 + 2(k + 1) \\ &= (k + 1)^2 + (k + 1) + 1 \end{aligned}$$

这就是说，如果 $n=k$ 时等式成立，那么 $n=k+1$ 时等式也成立。但如果仅根据这一步就得出等式对于任何 $n\in\mathbb{N}$ 都成立的结论，那就错了。事实上，当 $n=1$ 时，上式左边 $=2$，右边 $=1^2+1+1=3$，左边 $\neq$ 右边。这也说明，如果缺少步骤（1）这个基础，步骤（2）就没有意义了。

练习

用数学归纳法证明：

1. $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$.
2. 首项是 a_1，公比是 q 的等比数列的通项公式是 $a_n=a_1q^{n-1}$.

5.17 数学归纳法的应用举例

例 5.49 用数学归纳法证明

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\quad(n\in\mathbb{N})$$

证明：

(1) 当 $n=1$ 时，左边 $=1^2=1$，右边 $=\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}=1$，等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ $(k\in\mathbb{N})$ 时等式成立，就是

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

那么

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}(k+1)[2k^2+k+6k+6]\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\\&=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式成立。

根据（1）和（2），等式对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。

例 5.50 用数学归纳法证明：

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

证明：

(1) 当 $n=1$ 时，左边 $=\dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$，右边 $=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$，等式成立。

(2) 假设当 $n=k$ $(k\in\mathbb{N})$ 时等式成立，就是

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

那么，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\=&\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\=&\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}\\=&\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{(k+1)+1}\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式成立。

根据（1）和（2），等式对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。

例 5.51 用数学归纳法证明 $x^{2n}-y^{2n}$ $(n\in\mathbb{N})$ 能被 $x+y$ 整除。

证明：

(1) 当 $n=1$ 时，$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 能被 $x+y$ 整除。

(2) 假设当 $n=k$ $(k\in\mathbb{N})$ 时，$x^{2k}-y^{2k}$ 能被 $x+y$ 整除，那么

$$\begin{aligned}x^{2(k+1)}-y^{2(k+1)}&=x^2\cdot x^{2k}-y^2\cdot y^{2k}\\&=x^2\cdot x^{2k}-x^2\cdot y^{2k}+x^2\cdot y^{2k}-y^2\cdot y^{2k}\\&=x^2(x^{2k}-y^{2k})+y^{2k}(x^2-y^2)\end{aligned}$$

因为 $x^{2k}-y^{2k}$ 与 x^2-y^2 都能被 $x+y$ 整除，所以它们的和 $x^2(x^{2k}-y^{2k})+y^{2k}(x^2-y^2)$ 也能被 $x+y$ 整除。这就是说，当 $n=k+1$ 时，$x^{2(k+1)}-y^{2(k+1)}$ 能被 $x+y$ 整除。

根据（1）和（2），可知命题对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都成立.

例 5.52 平面内有 n 条直线，其中任何两条不平行，任何三条不过同一点，证明交点的个数 $f(n)$ 等于 $\dfrac{1}{2}n(n-1)$.

证明:

(1) 当 $n=2$ 时，两条直线的交点只有 1 个，即 $f(2)=1$. 又当 $n=2$ 时，

$$\frac{1}{2}\times 2\times(2-1)=1$$

因此命题成立。

(2) 假设 $n=k$ 时命题成立，就是说，平面内满足题设的任何 k 条直线的交点的个数 $f(k)$ 等于 $\frac{1}{2}k(k-1)$. 现在来考虑平面内有 $k+1$ 条直线的情况。任取其中的 1 条直线，记为 ℓ（图 5.9）由上述归纳法的假设，除 ℓ 以外的其他 k 条直线的交点的个数 $f(k)$ 等于 $\frac{1}{2}k(k-1)$. 另外，因为已知任何两条直线不平行，所以直线 ℓ 必与平面内其他 k 条直线都相交；又因为已知任何三条直线不过同一点，所以上面的 k 个交点两两不相同，且与平面内其他的 $\frac{1}{2}k(k-1)$ 个交点也两两不相同，从而平面内交点的个数是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}k(k-1)+k&=\frac{1}{2}k[(k-1)+2]\\&=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-1]\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，$k+1$ 条直线的交点的个数 $f(k+1)$ 等于 $\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-1]$.

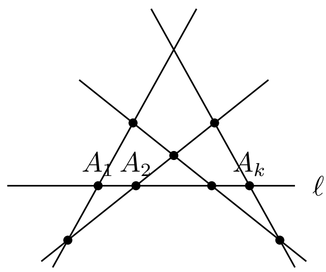


图 5.9

根据（1）和（2），命题对任何 $n\geqslant 2$ ($n\in\mathbb{N}$) 都成立。

例 5.53 设 $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$，用数学归纳法证明

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

证明:

(1) 当 $n=1$ 时，左边是 $\sin\alpha$，右边是 $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha$，等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ ($k\in\mathbb{N}$) 时等式成立，就是

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin k\alpha=\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

那么

$$
\begin{aligned}
&\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin k\alpha+\sin(k+1)\alpha\\
=&\frac{\sin\dfrac{k\alpha}{2}\sin\dfrac{(k+1)}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}+\sin(k+1)\alpha\\
=&\frac{\sin\dfrac{k\alpha}{2}\sin\dfrac{(k+1)}{2}\alpha+\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin(k+1)\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\\
=&\frac{\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{2k+1}{2}\alpha+\cos\dfrac{2k+1}{2}\alpha-\cos\dfrac{2k+3}{2}\alpha\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\\
=&\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{2k+3}{2}\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\dfrac{(k+1)\alpha}{2}\sin\dfrac{[(k+1)+1]\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据（1）和（2），等式对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。

例 5.54 若 $n\in\mathbb{N}$，求证 $f(n)=n^3+5n$ 能被 6 整除。

证明:

(1) 当 $n=1$ 时，$f(1)=1+5=6$ 命题成立。

(2) 假设 $n=k$ 时，命题成立，即 $f(k)=k^3+5k$ 能被 6 整除。

当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
f(k+1)=(k+1)^3+5(k+1)&=k^3+3k^2+3k+1+5k+5\\
&=k^3+5k+3(k^2+k+2)=k^3+5k+3k(k+1)+6
\end{aligned}
$$

由归纳假设，k^3+5k 能被 6 整除。

又 $k(k+1)$ 能被 2 整除，从而 $3k(k+1)$ 能被 6 整除，6 能被 6 整除。

故 $n=k+1$ 时命题也成立。

（1）和（2）说明，对任何 $n\in\mathbb{N}$, $f(n)=n^3+5n$ 能被 6 整除。

例 5.55 若 $n\in\mathbb{N}$，求证 $f(n)=3^{3m+2}+5\cdot 2^{3m+1}$ 能被 19 整除。

证明:

(1) 当 $n=1$ 时，$f(1)=3^{3+2}+5\cdot 2^{3+1}=323=19\times 17$

$\therefore$ 命题成立。

(2) 假设 $n=k$ 时，命题成立，即 $f(k)=3^{3k+2}+5\cdot 2^{3k+1}$ 能被 19 整除。

当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
f(k+1)=3^{3(k+1)+2}+5\cdot 2^{3(k+1)+1}&=27\cdot 3^{3k+2}+5\cdot 8\cdot 2^{3k+1}\\
&=8(3^{3k+2}+5\cdot 2^{3k+1})+19\cdot 3^{3k+2}
\end{aligned}
$$

由归纳假设，$8(3^{3k+2}+5\cdot 2^{3k+1})$ 能被 19 整除。

又显然 $19\cdot 3^{3k+2}$ 能被 19 整除。

即 $n=k+1$ 时，命题也成立

由（1)、（2）对 $n\in\mathbb{N}$, $f(n)=3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1}$ 能被 19 整除。

例 5.56 已知 $x>-1$, 且 $x\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$，求证 $(1+x)^n>1+nx$.

证明:

(1) 当 $n=2$ 时，

$$
\begin{aligned}
&\text{左边}=(1+x)^2\ 1+2x+x^2\\
&\text{右边}=1+2x
\end{aligned}
$$

因为 $x^2>0$. 所以原不等式成立。

(2) 假设 $n=k$ $(k\geqslant 2)$ 时不等式成立，就是 $(1+x)^k>1+kx$.

当 $n=k+1$ 时，因为 $x>-1$，所以 $1+x>0$，于是

$$
\begin{aligned}
\text{左边}&=(1+x)^{k+1}=(1+x)(1+x)^k\\
&>(1+x)(1+kx)=1+(k+1)x+kx^2\\
\text{右边}&=1+(k+1)x
\end{aligned}
$$

因为 $kx^2>0$，所以左边 $>$ 右边，即

$$(1+x)^{k+1}>1+(k+1)x$$

这就是说，原不等式当 $n=k+1$ 时也成立。

根据（1）和（2)，原不等式对任何不小于 2 的自然数 n 都成立。

例 5.57 若 $n \in \mathbb{N}$，求证

$$\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\sqrt{3\cdot 4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\frac{(n+1)^2}{2}$$

证明：

(1) 当 $n=1$ 时，左边 $=\sqrt{2}$，右边 $=2$，左边 $<$ 右边，所以原不等式成立。

(2) 假设 $n=k$ $(k\in\mathbb{N})$ 时原不等式成立，即

$$\begin{aligned}&\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\sqrt{3\cdot 4}+\cdots+\sqrt{k(k+1)}+\sqrt{(k+1)(k+2)}\\&\quad<\frac{(k+1)^2}{2}+\sqrt{(k+1)(k+2)}\end{aligned}$$

由于 $k+1>0,\ k+2>0,\ k+1\neq k+2$，所以

$$\sqrt{(k+1)(k+2)}<\frac{(k+1)+(k+2)}{2}=\frac{2k+3}{2}$$

因此

$$\begin{aligned}\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\sqrt{3\cdot 4}+\cdots+\sqrt{(k+1)(k+2)}&<\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{2k+3}{2}\\&=\frac{[(k+1)+1]^2}{2}\end{aligned}$$

$\therefore$ 原不等式当 $n=k+1$ 时也成立。

由（1）与（2）可知，原不等式对于任意的 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。

例 5.58 已知：$n\in\mathbb{N}$，求证 $|\sin n\theta|\leqslant n|\sin\theta|$.

证明：

(1) 当 $n=1$ 时，

$$\text{左边}=|\sin\theta|=\text{右边}$$

所以原不等式成立。

(2) 假设 $n=k$ $(k\in\mathbb{N})$ 时原不等式成立，即

$$|\sin k\theta|\leqslant k|\sin\theta|$$

当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}|\sin(k+1)\theta|&=|\sin k\theta\cdot\cos\theta+\cos k\theta\cdot\sin\theta|\\&\leqslant|\sin k\theta\cdot\cos\theta|+|\cos k\theta\cdot\sin\theta|\\&=|\sin k\theta|\cdot|\cos\theta|+|\cos k\theta|\cdot|\sin\theta|\end{aligned}$$

$\because \quad |\cos\theta| \leqslant 1, \quad |\cos k\theta| \leqslant 1$

$\therefore \quad |\sin(k+1)\theta| \leqslant |\sin k\theta| + |\sin\theta| \leqslant k|\sin\theta| + |\sin\theta| = (k+1)|\sin\theta|.$

这就是说，当 $n = k + 1$ 时原不等式成立。

由（1）和（2），对任意的 $n \in \mathbb{N}$，原不等式都成立。

习题五

A

1. 用数学归纳法证明：

(1) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$

(2) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$

(3) $\dfrac{1}{2 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 6} + \dfrac{1}{6 \cdot 8} + \cdots + \dfrac{1}{2n(2n+2)} = \dfrac{n}{4(n+1)}$

2. 用数学归纳法证明：

(1) $n^3 + 5n$ $(n \in \mathbb{N})$ 能被 6 整除

(2) $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ 能被 14 整除

(3) 三个连续自然数的立方和能被 9 整除

3. 如果 $\sin\alpha \neq 0$，用数学归纳法证明：

(1) $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 2^2\alpha \cdots \cos 2^{n-1}\alpha = \dfrac{\sin 2^n\alpha}{2^n \sin\alpha}$

(2) $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cdots + \cos(2n-1)\alpha = \dfrac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}$

4. 证明凸 n 边形的对角线的条数 $f(n) = \dfrac{1}{2}n(n-3) \quad (n \geqslant 3)$

B

5. 求证：

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} \ (n \in \mathbb{N})$$

6. 用数学归纳法证明：当自然数 $n \geqslant 2$ 时，

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

7. 证明：$f(n)=3^{2n+2}-8n-9\ (n\in\mathbb{N})$ 被 64 整除。

   若 $n\in\mathbb{N}$，求证 $f(n)=(3n+1)7^n-1$ 被 9 整除。

8. 求证：$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2-\dfrac{1}{n}$（$n\in\mathbb{N}$ 且 $n\geqslant 2$）

9. 若 n 是大于 2 的自然数，求证 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<n$

10. 用数学归纳法证明：

    (1) 平面上凸 n 边形的内角和 $f(n)=(n-2)\pi \quad (n\geqslant 3)$;

    (2) 平面上有 n 条直线，其中任两条不平行，任三条不共点，求证这 n 条直线交点的个数 $f(n)=\dfrac{1}{2}n(n-1) \quad (n\geqslant 2)$.

11. 平面上有 n 个圆。其中，任两圆都相交于两个点，且任三个圆都不相交于同一个点，试求这 n 个圆把平面划分成多少个部分。

12. 空间有 n 个平面，其中任两个都相交（且交线彼此都不平行），任三个都不交于同一条直线，任四个都不交于同一个点，试求这 n 个平面把空间划分成多少个部分。

六、数列的极限

前面我们研究了数列的概念，等差数列，等比数列，以及一些特殊数列的求和问题，下面研究数列的极限问题。

5.18 数列的极限

我们考察下面两个无穷数列：

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\dots,\frac{n}{n+1},\dots \tag{1}$$

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\dots,\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\dots \tag{2}$$

为直观起见，我们把这两个数列中的前几项分别在图象中表示出来（图 5.10）：

容易看出，当项数 n 无限增大时，表示数列（1）的各点与纵坐标为 1 的直线的距离无限地变小，即数列各项的值，无限的趋近于 1；表示数列（2）的各点与横轴的距离无限地变小，即数列的各项的值无限地趋向于 0。

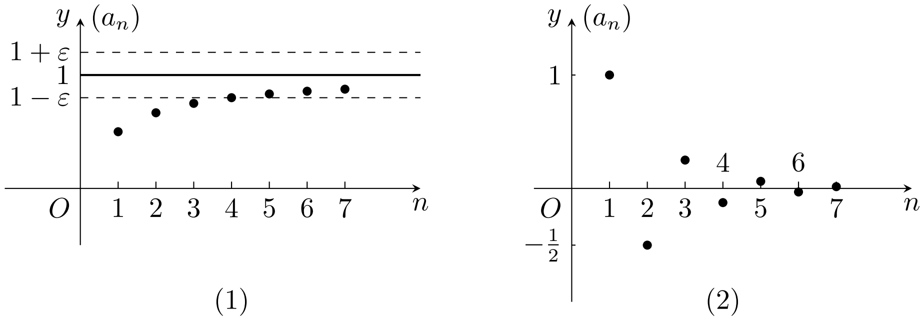


图 5.10

我们可以用 $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|$ 表示数列（1）中的各项的值与数 1 接近的程度，同样可以用 $\left|\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-0\right|$ 表示数列（2）中各项的值与 0 接近的程度。

事实上，在数列（1）中，各项的值与 1 的差的绝对值可列表表示如下（表 5.1）：

表 5.1

项号	项	这一项与 1 的差的绝对值
1	$\frac{1}{2}$	$\left\lvert\frac{1}{2}-1\right\rvert=\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{3}$	$\left\lvert\frac{2}{3}-1\right\rvert=\frac{1}{3}$
3	$\frac{3}{4}$	$\left\lvert\frac{3}{4}-1\right\rvert=\frac{1}{4}$
4	$\frac{4}{5}$	$\left\lvert\frac{4}{5}-1\right\rvert=\frac{1}{5}$
5	$\frac{5}{6}$	$\left\lvert\frac{5}{6}-1\right\rvert=\frac{1}{6}$
6	$\frac{6}{7}$	$\left\lvert\frac{6}{7}-1\right\rvert=\frac{1}{7}$
7	$\frac{7}{8}$	$\left\lvert\frac{7}{8}-1\right\rvert=\frac{1}{8}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots\cdots$

我们看到，无论预先指定多么小的一个正数 ε，总能在数列（1）中找到这样一项，使得这一项后面的所有项与 1 的差的绝对值都小于 ε。直观地看，对于任意预先指定的正数 ε，可以在表示数列 (1) 的图象上作两条平行于直线 $y=1$ 的直线 ℓ_1： $y=1+\varepsilon$ 和 ℓ_2： $y=1-\varepsilon$，它们与直线 $y=1$ 的距离都是 ε。同

时，在数列（1）中总可以找到这样一项，使得这一项后面的所有项的对应点都落在直线 ℓ_1 和 ℓ_2 之间。显然当 ε 较小时，ℓ_1 与 ℓ_2 间的距离较小，数列（1）的前若干项的对应点可能没有落在 ℓ_1 与 ℓ_2 之间，但由于随着 n 的增大，数列（1）的对应点越来越逼近直线 $y=1$. 因此总能找到一项，使得这一项后面的所有项的对应点都落在 ℓ_1 与 ℓ_2 之间。例如取 $\varepsilon=0.2$，则数列（1）中第 4 项后面的各项与 1 的差的绝对值都小于 ε; 又如取 $\varepsilon=0.01$，则数列（1）中第 99 项后面的所有项与 1 的差的绝对值都小于 ε。在这种情况下我们说数列（1）的极限是 1。

同样，对于数列（2），我们也可列出下表（表 5.2）。

表 5.2

项号	项	这一项与 0 的差的绝对值
1	1	$\lvert 1-0\rvert=1$
2	$-\frac{1}{2}$	$\left\lvert -\frac{1}{2}-0\right\rvert=0.5$
3	$\frac{1}{4}$	$\left\lvert \frac{1}{4}-0\right\rvert=0.25$
4	$-\frac{1}{8}$	$\left\lvert -\frac{1}{8}-0\right\rvert=0.125$
5	$\frac{1}{16}$	$\left\lvert \frac{1}{16}-0\right\rvert=0.0625$
6	$-\frac{1}{32}$	$\left\lvert -\frac{1}{32}-0\right\rvert=0.03125$
7	$\frac{1}{64}$	$\left\lvert \frac{1}{64}-0\right\rvert=0.015625$
8	$-\frac{1}{128}$	$\left\lvert -\frac{1}{128}-0\right\rvert=0.0078125$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots\cdots$

可以看出，如果取 $\varepsilon=0.1$，那么数列（2）中第 4 项后面的所有项与 0 的差的绝对值都小于 ε；如果取 $\varepsilon=0.01$，那么第 7 项后面的所有项与 0 的差的绝对值都小于 ε。就是说，无论预先指定多么小的一个正数 ε，总能在数列（2）中找到这样一项，使得这一项后面的所有项与 0 的差的绝对值都小于 ε。这时，我们说数列（2）的极限是 0。

一般地，对于无穷数列 $\{a_n\}$，如果存在一个常数 A，无论预先指定多么小的正数 ε，都能在数列中找到一项 a_N，使得这一项后面的所有项与 A 的差的绝对值都小于 ε（即当 $n>N$ 时，$|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立)，就把常数 A 叫做**数**

列 $\{a_n\}$ 的极限[①]，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

这个式子读作"当 n 趋向于无穷大时，a_n 的极限等于 A"。"$\to$"表示"趋向于"，"∞"表示"无穷大"，"$n\to\infty$"表示"n 趋向于无穷大"，也就是 n 无限增大的意思。

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 有时也可记作

$$当\ n\to\infty\ 时，a_n\to A$$

从数列极限的定义可以看出，数列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限，是指当 n 无限增大时，数列 $\{a_n\}$ 中的项 a_n 无限趋近于常数 A，也就是 a_n 与 A 的差的绝对值无限趋近于零.

例 5.59 已知数列 $1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{4},\ \ldots,(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n},\ldots$

(1) 写出这个数列的各项与 0 的差的绝对值；

(2) 第几项后面的所有项与 0 的差的绝对值都小于 0.1？都小于 0.001？都小于 0.0003?

(3) 第几项后面的所有项与 0 的差的绝对值都小于任何预先指定的正数 ε?

(4) 0 是不是这个数列的极限?

解:

(1) 这个数列的各项与 0 的差的绝对值依次是

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$$

(2) 要使 $\dfrac{1}{n}<0.1$，只要 $n>10$ 就行了。这就是说，第 10 项后面的所有项与 0 的差的绝对值都小于 0.1。

要使 $\dfrac{1}{n}<0.001$，只要 $n>1000$ 就行了，这就是说，第 1000 项后面的所有项与 0 的差的绝对值都小于 0.001。

要使 $\dfrac{1}{n}<0.0003$ 只要 $n>3333\dfrac{1}{3}$ 就行了，这就是说，第 3333 项后面的所有项与 0 的差的绝对值都小于 0.0003。

(3) 要使 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 就行了，设 $\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的整数部分是 N，记 $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]=N$[②]，那么 N 项后面的所有项与 0 的差的绝对值都小于 ε。

[①] lim 的英文 limit（极限）的头三个字母。

[②] $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数，称 $[x]$ 为高斯符号. 如 $[5.6]=5$，$[0.21]=0$, $[\pi]=3$, $[-2.13]=-3$.

(4) 从第（3）小题可以知道，0 是这个数列的极限，记作：

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=0$$

例 5.60 已知数列 $\{a_n\}$

$$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{8}{5},\ldots,\frac{2n}{n+1},\ldots$$

求证此数列以 2 为极限。

证明： 对于任何预先指定的正数 ε，欲使 $|a_n-2|<\varepsilon$ 对于 a_N 后面的所有项都成立，只需

$$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<\varepsilon$$

只需

$$\frac{2}{n+1}<\varepsilon$$

只需

$$n>\frac{2}{\varepsilon}-1$$

设 $\left[\dfrac{2}{\varepsilon}-1\right]=N$，那么，当 $n>N$ 时，$|a_n-2|<\varepsilon$ 恒成立，所以数列 $\{a_n\}$ 以 2 为极限。

例 5.61 求常数数列 $-7,\ -7,\ -7,\ \ldots$ 的极限。

解： 这个数列的各项与 -7 的差的绝对值都等于 0，所以从第 1 项起，这个绝对值就能够小于任意指定的正数 ε。因此这个数列的极限是 -7。

一般地，任何一个常数数列的极限都是这个常数本身，即

$$\lim_{n\to\infty}C=C \qquad (C\text{ 是常数})$$

应该指出，并不是每一个无穷数列都有极限。例如数列 $1,2,3,\ldots,n,\ldots$ 与 $-1,1,-1,1,\ldots,(-1)^n,\ldots$ 都没有极限。

例 5.62 已知数列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限，试判断下列命题是否正确：

(1) 数列 $\{a_n-A\}$ 必是递减数列：

(2) 数列 $\{|a_n-A|\}$ 必是递减数列或常数列；

(3) 对于任意自然数 m，n，若 $m>n$，则 $|a_m-A|\leqslant|a_n-A|$；

(4) 对于任何预先指定的正数 ε，只有有限个自然数 n，使得 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon$.

解:

(1) 不正确。如数列 $\{a_n\}$： $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \dots$ 以 0 为极限，但数列 $\{|a_n - 0|\}$ 是摆动数列。

(2) 不正确。如数列 $\{a_n\}$： $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3}, \dots$ 以 0 为极限，但数列 $\{|a_n - 0|\}$ 是摆动数列.

(3) 不正确。如数列 $\left\{\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3}\right\}$ 不符合这一命题。

(4) 正确。因为数列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限，也就是说，对于任何预先指定的正数 ε，都能找到自然数 N，当 $n > N$ 时，$|a_n - A| < \varepsilon$ 恒成立。a_N 及 a_N 前面的项只有有限多个，在这有限多项中可能全体或部分适合 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon$.

练习

1. 已知数列 $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$
   (1) 把这个数列的前 5 项在坐标平面上表示出来；
   (2) 写出这个数列的各项与 1 的差的绝对值；
   (3) 第几项后面的所有项与 1 的差的绝对值都小于 0.1？都小于 0.01？都小于 0.0001？都小于任何预先指定的正数 ε？
   (4) 1 是不是这个无穷数列的极限？
2. 举出两个极限是 5 的无穷数列的例子。
3. 证明数列 $4 - \frac{1}{10}, 4 - \frac{1}{20}, \dots, 4 - \frac{1}{10n}, \dots$ 以 4 为极限。

5.19 数列极限的运算法则

上面我们介绍了数列极限的定义，并根据这个定义可以确定以下几个最简单的数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$（$C$ 是常数）

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1)$

现在证明（3）当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

证明：

(1) 当 $q = 0$ 时，$\{q^n\}$ 的每一项都是 0，由数列极限的定义易知 $\{q^n\}$ 有极限 0. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

(2) 若 $q \neq 0$，对任意给定的正数 $\varepsilon < 1$[①]，要使 $|q^n - 0| < \varepsilon$，即 $|q|^n < \varepsilon$，通过两边取对数可知，只要 $n \lg |q| < \lg \varepsilon$

$\because \quad \lg |q| < 0$

$\therefore$ 只要 $n > \dfrac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$，由此可取 $N = \left[\dfrac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}\right]$

$\therefore$ 对任意给定的正数 ε $(0 < \varepsilon < 1)$ 取 $N = \left[\dfrac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}\right]$，则当 $n > N$ 时，就有 $|q^n - 0| < \varepsilon$. 根据数列极限的定义，得到

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

综合（1）、（2）对任意的 $|q| < 1$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

然而，通常求极限的问题比较复杂，这就需要分析已知数列是由哪些简单数列经过怎样的运算结合而成的，这样就能把复杂的数列极限的计算问题简化为简单的数列极限的计算问题，为此，下面引入数列极限的四则运算法则（证明从略）：

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，那么

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

特别地，如果 c 是常数，那么，

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = \lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = cA$$

[①]取 $0 < \varepsilon < 1$，可证 $\dfrac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$ 是正数.

上面的数列极限的运算法则表明，如果两个数列都有极限，那么，这两个数列的各对应项的和、差、积、商组成的数列有极限，并且分别等于这两个数列的极限的和、差、积、商（作为除数的数列的各项及其极限值不能为零）。

例如，数列 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4},\ldots,\dfrac{n}{n+1},\ldots$ 与 2，2，$2,\ldots,2,\ldots$ 的极限分别是 1 与 2，那么根据上面的运算法则，这两个数列的各对应项的和组成的数列

$$2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{2}{3},\ 2+\frac{3}{4},\ldots,2+\frac{n}{n+1},\ldots$$

的极限是 3.

上面的数列极限的运算法则，也可将两个数列推广到三个、四个、……有限个数列，得出相应的结论。特别要注意，它不能推广到无限个数列。如，以下的运算是错误的：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}+\cdots\\
=&\,0+0+0+\cdots+0+\cdots=0
\end{aligned}$$

正确解法是：

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{2}\\
&=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

例 5.63 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=5$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-4b_n)$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-4b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}3a_n-\lim\limits_{n\to\infty}4b_n=2\lim\limits_{n\to\infty}a_n-4\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3$

例 5.64 求：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{1}{n}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{3n^2+2n}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}{-\dfrac{3}{n}}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{3}{2n^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2n^2}\right)$

解:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=5+0=5$

(2) 当 n 无限增大时，分式 $\dfrac{2n^2+1}{3n^2+2n}$ 中的分母、分子同时无限增大，上面的极限运算法则不能直接运用，为此，我们将分式中的分子、分母同时除以 n^2 后再求它的极限，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{2}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}{-\dfrac{3}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{n}}{-3}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}(-3)}=-\dfrac{1}{3}$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n^2}+\frac{3}{2n^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+\cdots+(2n+1)}{2n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{2}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}2}$$

$$=\frac{1+0+0}{2}=\frac{1}{2}$$

例 5.65 已知等比数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots$$

求这个数列前 n 项的和当 $n\to\infty$ 时的极限。

解：这个数列的公比是 $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$. 根据等比数列前 n 项和的公式，得

$$S_n=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

上述结果可从图 5.11 中看出，图 5.11 中各小矩形与小正方形面积的和的极限等于大正方形的面积。

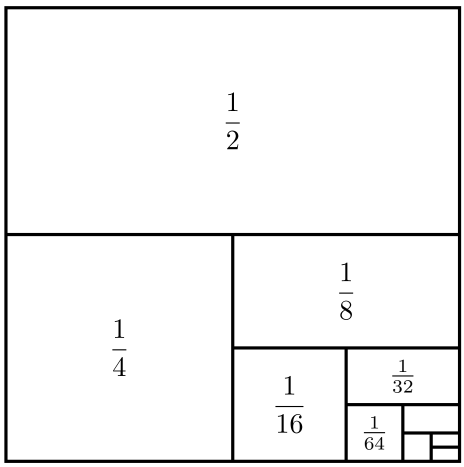


图 5.11

例 5.65 中的无穷等比数列有这样的特点：它的公比绝对值小于 1。

一般地，设无穷等比数列 a_1, a_1q, $a_1q^2,\ldots,a_1q^{n-1},\ldots$ 的公比 q 的绝对值小于 1，我们来求它的前 n 项的和当 n 无限增大时的极限。

无穷等比数列前 n 项的和是

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

因此，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n)\\&=\frac{a_1}{1-q}\left(1-\lim_{n\to\infty}q^n\right)\end{aligned}$$

因为当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$，所以，

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}\cdot(1-0)=\frac{a_1}{1-q}$$

公比的绝对值小于 1 的无穷等比数列前 n 项的和，当 n 无限增大时的极限，叫做这个无穷等比数列**各项的和**（注意：这与有限个数的和从意义上说是不一样的），并且用符号 S 表示。从上面的推导过程可以知道，

$$S=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+\cdots=\frac{a_1}{1-q}\quad(|q|<1)$$

例 4 例 5

例 5.66 求无穷等比数列 0.3, 0.03, 0.003, ... 各项的和。

解： $\because\quad a_1=0.3,\quad q=0.1$

$\therefore\quad S=\dfrac{0.3}{1-0.1}=\dfrac{1}{3}$

例 5.67 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 各奇数项的和为 2，各偶数项的和为 1，求此数列。

解： 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，那么 $\{a_n\}$ 的奇数项按原次序排成首项为 a_1，公比为 q^2 的无穷等比数列，$\{a_n\}$ 的偶数项按原次序排成首项是 a_1q，公比为 q^2 的无穷等比数列。由已知条件，得

$$\frac{a_1}{1-q^2}=2,\qquad \frac{a_1q}{1-q^2}=1$$

解得

$$a_1=\frac{3}{2},\qquad q=\frac{1}{2}$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 是 $\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{8},\ldots,3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n,\ldots$

例 5.68 将下列循环小数化成分数：

(1) $0.\dot{7}$　　(2) $0.2\dot{3}\dot{1}$

解：

(1) 纯循环小数 $0.\dot{7}=0.777\cdots$ 可以写成

$$\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots$$

这里各项组成公比等于 $\dfrac{1}{10}$ 的无穷等比数列，因此，

$$0.\dot{7}=\frac{\dfrac{7}{10}}{1-\dfrac{1}{10}}=\frac{7}{9}$$

(2) 混循环小数 $0.2\dot{3}\dot{1}=0.2313131\cdots$ 可以写成

$$\frac{2}{10}+\frac{31}{1000}+\frac{31}{100000}+\frac{31}{10000000}+\cdots$$

这里从第 2 项起各项组成公比等于 $\dfrac{1}{100}$ 的无穷等比数列，因此，

$$0.2\dot{3}\dot{1}=\frac{2}{10}+\frac{\dfrac{31}{1000}}{1-\dfrac{1}{100}}=\frac{2}{10}+\frac{31}{990}=\frac{229}{990}$$

练习

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{n^2-10}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2^n}{3^n+1}$

2. 求下列无穷等比数列各项的和.

(1) $3,\ 1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9},\cdots$

(2) $1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{8},\cdots$

3. 将下列循环小数化成分数.

(1) $0.\dot{2}\dot{1}$ (2) $1.2\dot{3}$ (3) $0.1\dot{2}3\dot{4}$

习题六

A

1. 已知无穷数列 $5+1,\ 5-\dfrac{1}{2},\ 5+\dfrac{1}{3},\ 5-\dfrac{1}{4},\cdots$

(1) 把这个数列的前 8 项在坐标平面上表示出来；

(2) 计算这个数列的第 n 项与 5 的差的绝对值 $|a_n-5|$;

(3) 对于预先指定的正数 0.2, 0.05, 0.001, ε，找出相应的自然数 N，使得 $n>N$ 时，$|a_n-5|$ 分别小于这些指定正数；

(4) 确定这个数列的极限。

2. 判断下列无穷数列是否有极限，若有，求出极限值。

(1) $-2,\ 0,\ 2,\ 0,\ldots,(-1)^n-1,\ldots;$

(2) $1,\ 0,\ -\dfrac{1}{3},\ 0,\ \dfrac{1}{5},\ 0,\ldots,\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2},\ldots$

(3) $\dfrac{5}{3},\ \dfrac{9}{6},\ \dfrac{13}{9},\ldots,\dfrac{2n+3}{3n},\ldots$

(4) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{9}{4},\ldots,\dfrac{n^2}{n+1},\ldots$

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n}-3\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{2n-3}{3n}\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-3n}{7n+4}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n-3}{3n^2+n-2}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+9}{n^2-1}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n+1}{n^2+2n+1}$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3^n}\right]$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{2n}{n^2}\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2^n}{3^n+1}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+1)+(n^2+2)+\cdots+(n^2+n)}{n(n-1)(n-2)}$

5. 求下列无穷等比数列各项的和

(1) $\frac{8}{9}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{8}, \cdots$

(2) $6\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}, \frac{4}{15}, \frac{4}{75}, \cdots$

(3) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}, 1, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \cdots$

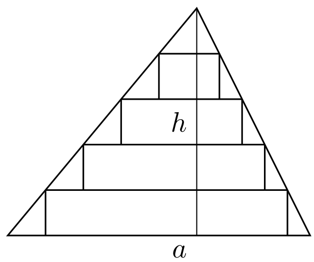
(4) $1, -x, x^2, -x^3, \cdots \quad (|x| < 1)$

6. 如图，三角形的一条底边是 a，这条边上的高是 h。

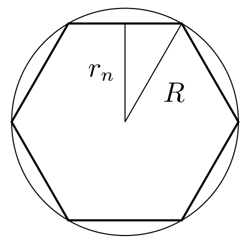
(1) 过高的 5 等分点分别作底边的平行线，并作出相应的 4 个矩形，求这些矩形的面积和。

(2) 把高 n 等分，同样作 $n-1$ 个矩形，求这些矩形面积的和。

(3) 求证：当 n 无限增大时，这些矩形面积的和的极限等于三角形面积 $\frac{ah}{2}$.



(第 6 题)



(第 7 题)

7. (1) 如图，在圆内接正 n 边形中，r_n 是边心距，p_n 是周长，S_n 是面积，求证 $S_n = \frac{1}{2}p_n \cdot r_n$.

(2) 当圆内接正多形的边数无限增加时，r_n 的极限是圆的半径 R，p_n 的极限是圆的周长 $2\pi R$，S_n 的极限是圆面积，求证圆面积等于 πR^2.

8. 在边长为 a 的等边三角形中，连接各边中点，作一内接正三角形，在这个三角形中，再用同样的方法作新的内接正三角形；这样无限地继续下去。

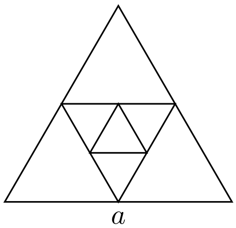
(1) 求所有这些三角形周长的和;

(2) 求所有这些三角形面积的和。

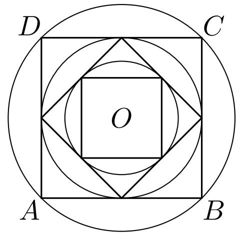
9. 在半径为 R 的圆里，作一内接正方形，在这个正方形里作内切圆，再在这个圆里作内接正方形，这样无限继续下去。

(1) 求所有这些圆的面积的和;

(2) 求所有这些正方形面积的和。

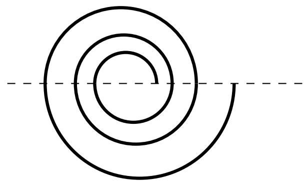


(第 8 题)



(第 9 题)

10. 如图：第一个半圆的直径是 2.5cm，第二个半圆的直径是 2cm，以后每个半圆的直径都是前一个的 $\dfrac{4}{5}$，这样无限继续下去，求整条曲线的长。



(第 10 题)

11. 将下列循环小数化成分数：

(1) $0.\dot{4}$　　(2) $0.\dot{1}3\dot{5}$　　(3) $0.4\dot{3}\dot{6}$　　(4) $2.13\dot{8}$

B

12. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$.

13. 下列命题分别是“数列 $\{a_n\}$ 有极限 A”的什么条件（充分、必要、充要）?

(1) 对于任意预先给定的正数 ε，总能找到自然数 n，使得 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立；

(2) 对于某一个非常小的正数 ε, 能找到自然数 N 使 $n > N$ 时, $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立；

(3) 对于任意预先给定的正数 ε，$|a_n - A| < \varepsilon$ 对于任意自然数 n 都成立；

(4) 对于任意预先给定的正数 ε，存在无穷多个自然数 n。使 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立；

(5) 对于任意预先给定的正数 ε, 总能找到自然数 N, 使 $n > N$ 时, $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ 恒成立.

14. (1) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an^3 + 10n^2}{n^3 - an^2 - 10} = \dfrac{1}{2}$，求常数 a 的值。

(2) 已知当 $n \to \infty$ 时，$\sqrt{3n^2 + 1} - kn$ 存在极限，求常数 k 的值。

5.20 本章小结

5.20.1 知识结构分析

数列的一般概念

1. 定义：按一定顺序排列起来的一列数，叫做数列。
2. 数列表示法：列表法、图象法、解析法（即用通项公式）和递推式法。
3. 通项公式 an 与数列前 n 项和间的关系是：

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geqslant 2 \end{cases}$$

4. 数列分类.

   按 n ($n \in \mathbb{N}$) 的取值范围分成有穷数列、无穷数列.

   按相邻两项的大小关系来分，可分为：递增数列 ($a_{n+1} > a_n$)，递减数列 ($a_{n+1} < a_n$)，常数列 ($a_{n+1} = a_n$)，摆动数列.

等差数列

1. 定义：从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数：$a_{n+1} - a_n = d$(常数). 也可以用递推关系式来定义：已知 a_1 及 $a_{n+1} = a_n + d$($n \in \mathbb{N}$，d 为常数)。
2. 等差数列的通项公式：已知 a_1 和公差 d 时，$a_n = a_1 + (n-1)d$.
3. 等差数列前 n 项和的公式：$S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$
4. 等差数列具有以下性质：

   (1) 用图象法表示等差数列时，其各点均在以公差为斜率的一条直线。由此可得下述关系式：公差 $d = \dfrac{a_n - a_m}{n - m}$ ($n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$). 特别，当 $m = 1$ 时，$d = \dfrac{a_n - a_1}{n - 1}$ ($n \neq 1$).

   (2) 等差数列的前 n 项中，与 a_1 和 a_n 距离相等的任何两项的和均等于 $a_1 + a_n$, 即

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots$$

(3) 等差数列中，若某两项的项数之和一定时，则相应两项的数值之和也是定值。即，若 $k+\ell=m+n$, 则 $a_k+a_\ell=a_m+a_n$ $(k,\ell,m,n\in\mathbb{N})$.

(4) 一个数列 $\{a_n\}$ 是等差数列的充要条件是

(a) 通项公式是 $a_n=dn+c$ (d、c 为常数)，且 n 的系数 d 就是等差数列的公差；

(b) 前 n 项和公式为 $S_n=an^2+bn$ (a、b 是常数）.

(c) 从第 2 项起, 任何一项都是它的前一项和它的后一项的等差中项。

等比数列

1. 定义: 从第 2 项起, 每一项与它前一项的比都等于同一个常数, 即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$ 常数）. 也可以用以下的递推关系式来表示：已知 $a_1\neq 0$, $q\neq 0$，并 $a_{n+1}=a_nq$ $(n\in\mathbb{N})$.

2. 等比数列的通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$.

3. 等比数列的前 n 项和公式:

$$S_n=\begin{cases} na_1, & q=1\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1\end{cases} \quad \text{或} \quad S_n=\begin{cases} na_1, & q=1\\ \dfrac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq 1\end{cases}$$

4. 等比数列具有以下性质:

(1) 用图象法表示等比数列时，其各点均在函数 $y=c\cdot q^n$ 的图象上，其中 q 为公比，$c=\dfrac{a_1}{q}$.

(2) 等比数列的前 n 项中，与 a_1 和 a_n 距离相等的两项的乘积，都等于 a_1 与 a_n 的乘积，即:

$$a_1a_n=a_2a_{n-1}=a_3a_{n-2}=\cdots$$

(3) 等比数列中，若某两项的项数之和一定时，则相应两项数值之积也是定值。即，若 $k+\ell=m+n$，则

$$a_k\cdot a_\ell=a_m\cdot a_n \quad (\text{其中 } k,\ell,m,n\in\mathbb{N})$$

(4) 一个数列 $\{a_n\}$ 是等比数列的充要条件是

(a) 数列的通项公式为 $a_n=c\cdot q^n$ $(c\cdot q\neq 0)$.

(b) 从第 2 项起，每一项都是它的前一项与后一项的等比中项。

特殊数列求和问题

除等差数列和等比数列以外，还应掌握求一些特殊数列前 n 项和的方法。

1. 可转化为等差（或等比）数列的求和问题:

   (1) $a_n = b_n + c_n$, 而 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 分别为等差或等比数列，于是可分别对 $\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 求和，再将结果进行加（或减），即可求得 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。

   (2) $a_n = b_n \cdot c_n$，且 $\{b_n\}$ 为等差数列，$\{c_n\}$ 为等比数列，可用推导等比数列前 n 项和公式的方法（简称错位相减法）求和，称为“差比数列”求和。

2. 裂项抵消法。把数列的每一项都分裂为两项之差，再取和时，多数项互相抵消，只剩少数几项之代数和，极易求出其和。

   例如 $\{c_n\}$ 是等差数列，且 $a_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. 设 $b_n = \dfrac{1}{a_n a_{n+1}}$，那么数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和即可用裂项抵消法求得。

3. 形如通项公式为 $a_n = an^2 + bn + c$ $(a \neq 0)$ 的数列的前 n 项和，可借助于前 n 个自然数的和与前 n 个自然数平方和的公式解决。

数学归纳法

1. 数学归纳法是一种证明与自然数 n 有关的数学命题的重要方法。用数学归纳法证明命题的步骤是

   (1) 证明当 n 取第一个值 n_0（例如 $n_0 = 1$, $n_0 = 2$ 等）时结论正确;

   (2) 假设当 $n = k$ （$k \in \mathbb{N}$，且 $k \geqslant n_0$）时结论正确，证明当 $n = k + 1$ 时结论也正确。

   在完成了这两个步骤以后，就可以断定命题对于从 n_0 开始的所有自然数 n 都正确。

   上面的第一步是递推的基础，第二步是递推的依据，两者缺一不可。

2. 用数学归纳法证明命题时，难点在第二步，即在假设 $n = k$ 时命题成立，推出 $n = k + 1$ 时命题也成立。因此，在推导中，必须用到“归纳假设”。对于较为困难的问题，综合与分析可以同时运用。

数列的极限

极限概念是微积分的最重要的、最基本的概念，极限概念和运算法则是研究微积分全部内容的重要工具。

1. 数列极限的定义：

   对于一个无穷数列 $\{a_n\}$，如果存在一个常数 A，对于无论预先指定多么小的正数 ε，都能在数列中找到一项 a_N，使得这一项后面所有的项与 A 的差的绝对值都小于 ε（即当 $n > N$ 时，$|a_n - A| < \varepsilon$ 恒成立），就把常数 A 叫做数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

2. 掌握数列极限的定义必须深刻地理解以下几点：

   (1) ε 必须具有绝对的任意性；

   (2) N 的存在性及对 ε 的依赖性；

   (3) 当 $n > N$ 时，$|a_n - A| < \varepsilon$ 恒成立的意义。

3. 数列极限的运算法则：

   如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，那么，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0,\ b_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N})$$

   说明：数列的加、乘的极限运算法则能推广到（即适用于）任意有限个数列的情况。但要特别注意，不能推广到无限个数列的情况。

4. 无穷等比数列各项的和

   (1) 定义：公比的绝对值小于 1 的无穷等比数列前 n 项的和当 n 无限增大时的极限，叫做这个无穷等比数列各项的和，并且用符号 S 表示。

   (2) 公式：$S = \dfrac{a_1}{1-q} \quad (|q| < 1)$

   (3) 应用：可将循环小数化成分数。还可解决某些无穷变化的简单几何图形的面积或某些曲线（圆）的周长及所围成的面积问题。

5.20.2 几点说明

本章涉及下列重要的数学思想和方法。

函数和方程的思想

数列是一种特殊的函数，其特殊在于它的定义域是自然数集或是它的有限子集。

等差数列、等比数列的基本问题，就是已知 a_1，$(d)q$，n，a_n，S_n 中的任意 3 个量，求其它两个量。通过通项公式及前 n 项和公式组成的方程组来求解。

极限的思想和方法

由数列极限的定义可知，这里不是着眼于某一个数，而且研究一系列的数，不是静止地研究每一个数，而是研究它们的变化趋势，这是理解极限概念的关键所在。早在两千多年前，《庄子 · 天下篇》中就有"一尺之棰，日取其半，万世不竭"之语，这正是朴素的极限思想的体现。极限思想和方法是人们从有限中认识无限，从近似中认识精确，从量变中认识质变的一种辩证的思想。求无穷数列各项和的方法，用的就是极限的方法。

归纳法与数学归纳法

归纳法是科学的探索与发展不可少的方法，通过归纳法提出科学的猜想，猜想的结论未必可靠，然而没有猜想就没有前进。数学归纳法是一种完全归纳法，通过数学归纳法的证明，可以保证某些猜想的合理性和正确性。

复习题五

A

1. 选择题（有且只有一个正确答案）

(1) 公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列一定是（　　）

(A) 递增数列　　(C) 摆动数列

(B) 递减数列　　(D) 递增数列或递减数列

(2) $b^2 = ac$ 是 a, b, c 三数成等比数列的（　　）

(A) 充分条件　(C) 充要条件

(B) 必要条件　(D) 不充分也不必要条件

(3) 两位自然数中，所有被 7 整除的数之和为（　　）

(A) 726　(B) 728　(C) 730　(D) 735

(4) 某种细菌在培养过程中，每 20 分钟分裂一次（一个分裂成两个），经过 3 小时，这种细菌由 1 个可繁殖成（　　）

(A) 511 个　(C) 1023 个

(B) 512 个　(D) 1024 个

(5) 等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 与 T_n，若 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n}{3n+1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 等于（　　）

(A) 1　(B) $\dfrac{6}{3}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{4}{9}$

2. 填空题

(1) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2n^2-3n+1$，则它的通项公式 $a_n=$ ________.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}-1$，则它的通项公式 $a_n=$ ________.

(3) 等差数列中，$a_3+a_8+a_{13}+a_{18}=50$，则该数列的前 20 项之和为________.

(4) 等比数列中，$a_6\cdot a_{25}+a_4\cdot a_{27}=4$，则该数列的前 30 项的积为________.

(5) 已知等差数列中，$a_5=3$, $a_{15}=-7$，则数列的第 20 项 $a_{20}=$ ________.

(6) 数列 $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,x^{n-1},\ldots$ 的前 n 项之和 $S_n=$ ________.

(7) 已知等差数列中 $a_n=A$, 则 $S_{2n-1}=$ ________.

(8) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 只有 n 项 $(n>10)$，其前 10 项之和为 100，后 10 项之和为 160，则该数列各项之和 $S_n=$ ________.

3. 解方程 $\lg x+\lg x^2+\cdots+\lg x^n=n^2+n$.

4. 有四个数，其中前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，且第一数与第四数之和是 37，第二数与第三数的和是 36，求这四个数。

5. (1) 三个数成递增的等比数列，其和为 65，若小数减去 1，大数减 19，则所得三数成等差数列，求原来的三个数。

   (2) 在 a 和 b 之间插入 3 个数，这 3 个数之和为 27，积为 504，且这 3 数同原来的两数 a、b 构成等差数列，求这 5 个数。

6. 已知 a、b、c 三数成等差数列，x、y、z 三数成等比数列，且 x、y、z 均为正数，求证

$$(b-c)\log_m x+(c-a)\log_m y+(a-b)\log_m z=0$$

7. 已知 a，b，c 成等差数列，求证：

   (1) $b+c, c+a, a+b$ 也成等差数列；

   (2) a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab 也成等差数列；

   (3) $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ 也成等差数列。

8. 已知 a、b、c、d 成等比数列（公比 $q\neq -1$) 求证：

   (1) ab、bc，cd 成等比数列；

   (2) $a+b$, $b+c$, $c+d$ 成等比数列；

   (3) $(a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(b-d)^2$

9. 求和：$S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n(n+1)$，又知 $b_n=a_n^2$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S'_n.

11. 求数列 $\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{5^2}$，$\dfrac{3}{5^3}$，$\dfrac{1}{5^4}$，$\dfrac{2}{5^5}$，$\dfrac{3}{5^6}$，$\dfrac{1}{5^7}$，$\ldots$ 所有项的和.

12. 用数学归纳法证明：

    (1) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

    (2) $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)$

    (3) $4^{2n+1}+3^{n+2}$ $(n\in\mathbb{N})$ 能被 13 整除；

    (4) $6^{2n-1}+1$ $(n\in\mathbb{N})$ 能被 7 整除.

13. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2n^3}$　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2.1)^n-(1.9)^n}{3\cdot(2.1)^{n+1}}$　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n^2+1}-n\sqrt{n^2-2}\right)$

14. 已知 $a>0$，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}$

15. (1) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>1$，且 $a_1=b\ (b\neq 0)$，
求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_6+a_7+\cdots+a_n}$

(2) 已知等比数项 $\{a_n\}$，如果 $a_1+a_2+a_3=18,\ a_2+a_3+a_4=-9$，
求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

16. 已知 $\sin\alpha$ 是 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的等差中项，$\sin\theta$, $\sin\beta$, $\cos\theta$ 成等比数列，求证 $2\cos 2\alpha=\cos 2\beta$.

17. 已知 a、b、c 成等比数列，m 是 a、b 的等差中项，n 是 b、c 的等差中项，求证 $\dfrac{a}{m}+\dfrac{c}{n}=2$.

18. 已知 a、b、c 和 m、n、p 分别成等差数列，且 $\dfrac{a}{m}$, $\dfrac{b}{n}$, $\dfrac{c}{p}$ 成等比数列，求证：$\dfrac{m}{p}+\dfrac{p}{m}=\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}$.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2-11n+10$，从第几项起这个数列中的项都是正数？从第几项起各项都大于 70?

20. 长方体的三条棱的长成等差数列，它的对角线的长是 14cm，全面积是 22cm^2，求它的体积。

21. 三角形的三个内角成等差数列，它的面积是 $10\sqrt{3}\text{cm}^2$, 周长是 20cm，求三角形三边长。

22. 一个等差数列的首项是 -60，其第十七项为 -12，求此数列取绝对值后，所得数列的前 30 项的和。

23. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(n+1)\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^n\ (n\in\mathbb{N})$.

(1) 求证这个数列先增后减，

(2) 当 n 为何值时的值最大，其值是多少?

24. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且各项为正，求证：

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}}$$

25. 设 $S_n=1^2+2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2$，求证：$S_n$ 是连续 n 个整数的和.

26. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $\dfrac{n}{n+1}$，又 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$，试求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和.

27. 用归纳法求数列

$$1,\ (1+2+1),\ (1+2+3+2+1),\ldots,[1+2+\cdots+n+(n-1)+\cdots+2+1],\ldots$$

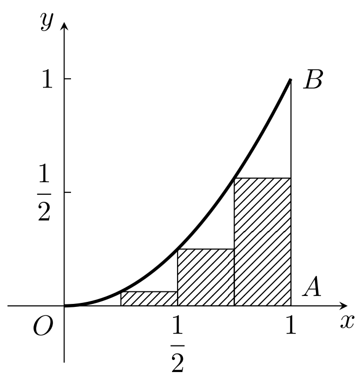
的通项公式及前 n 项和的公式，并用数学归纳法予以证明。

28. 设首项为 1、公比为 q $(q>0)$ 的等比数列的前 n 项之和为 S_n. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{S_{n+1}}$.

29. 如图，坐标平面上有一曲边三角形 OAB，A、B 坐标分别为 $(1,0)$、$(1,1)$. OA、AB 边是直线段，OB 边是抛物线段：$y=x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

(1) 过 OA 边的四等分点分别作 AB 的平行线，并作出相应的三个矩形，求这些矩形面积的和；

(2) 把 OA 边 n 等分，同样作出 $n-1$ 个矩形，求这些矩形面积的和，并求当 n 无限增大时，这些矩形面积的极限。



第 29 题

第六章　复数

6.1　引言——数系的发展与复数的起源

数的概念及运算是从生产和科学研究的实践中产生和发展起来的。截至目前，同学们学过的数系是下表中实线画出的部分：

$$\text{复数集}(\mathbb{C})\begin{cases}\text{实数集}(\mathbb{R})\begin{cases}\text{有理数集}(\mathbb{Q})\left.\begin{cases}\text{整数集}(\mathbb{Z})\begin{cases}\text{自然数集}(\mathbb{N})\\ \text{零}\\ \text{负数}\end{cases}\\ \text{分数集}\end{cases}\right\}\begin{matrix}\text{循环小数}\\ \text{（包括整数}\\ \text{和有限小数）}\end{matrix}\\ \text{无理数集——无限不循环小数}\end{cases}\\ \text{虚数集}\end{cases}$$

正如表中所列出的，从正整数（自然数）集 $\mathbb{N}$ 到实数集 $\mathbb{R}$，数系已经经历了三次扩充（下表中实箭头表示的部分）。本章将研究第四次扩充（虚箭头表示的部分）：

$$\underset{(\mathbb{N})}{\text{正整数集}}\xrightarrow[\text{引进零和负数}]{\text{第 I 次}}\underset{(\mathbb{Z})}{\text{整数集}}\xrightarrow[\text{引进分数}]{\text{第 II 次}}\underset{(\mathbb{Q})}{\text{有理数集}}$$

$$\xrightarrow[\text{引进无理数}]{\text{第 III 次}}\underset{(\mathbb{R})}{\text{实数集}}\xrightarrow[\text{引进虚数}]{\text{第 IV 次}}\underset{(\mathbb{C})}{\text{复数集}}$$

“温故知新”，让我们先回顾一下前三次扩充的事实和规律.

6.1.1 从数集上的元素看

数集的每次扩充都是在原有数集的基础上引入新数，构造出一个新数集，且使原有的数集成为新数集上的一个真子集。也就是说，数集以**逐次包含**的方式扩充。

6.1.2 从数集上的运算看

在新数集上我们这样定义新的运算法则：一方面要使新法则运用到原有数集上时必须与原有数集上的运算结果相一致；另一方面我们还希望新法则能使原数集上的运算规律保持不变。例如，在有理数集上计算 $(+5)+(+6)$ 的结果应与在算术（正有理数集）中计算 $5+6$ 的结果相一致，而且我们还希望在算术中对加法和乘法成立的交换律、结合律和分配律能在有理数集上保持不变。也就是说，在原来数集上成立的算律，在扩充后的数集上希望它能继续成立。这是很重要的**数集扩充的原则**。

6.1.3 从数集扩充的动力看

数集的每次扩充既是度量的需要（这一点大家比较清楚），又是数学理论发展的需要（特别是解方程的需要）。例如：

方程 $x+4=0$ 在自然数集上无解，而在扩充后的整数集上有唯一解 $x=-4$;

方程 $5x=3$，在整数集上无解，而在扩充后的有理数集上有唯一解 $x=\dfrac{3}{5}$（若不扩充数集，连这种最简单的一元一次方程的理论也不能完整）。

方程 $x^2=2$ 在有理数集上无解，在扩充后的实数集上有两个解 $x=\pm\sqrt{2}$.

最早呼唤扩充实数集的问题是解二次方程。事实上，在实数集上不能提供二次方程的完整理论。如方程

$$x^2=-1 \tag{1}$$

在实数集上就没有解，因为任意实数的平方都不可能为负数。

摆在人们面前有两种选择：要么宣布方程 (1) 无解；要么沿着数集扩充的方向朝前走——引入新数，扩充实数集，使方程 (1) 有解。一些严峻的事实迫使人们选择了后者。于是在 16 世纪中叶，人们开始引入一个由等式

$$i^2=-1 \tag{2}$$

所定义的新数 i（它显然不是实数）[①]，它被称做虚数单位。这样，方程 (*) 至

[①] i 是英文单词 imaginaries（虚的）的字头，瑞士大数学家欧拉首先用它表示虚数单位.

少有了一个根 i。进而，根据数集扩充的原则，我们还规定实数可以和它进行四则运算，并且进行四则运算时，原有的加、乘算律仍然成立。于是自然造出了诸如 $2i, 3i, 2+5i$ 这样一些新数。

应该指出: 引进的新数 i 以及上面造出的形如 $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ 的数，起初人们对它感到迷惑不解，特别是当 $b\neq 0$ 时，认为这些都是“虚假的数”[这是因为当时人们习惯于把数作为某种计数手段，然而形如 $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R},$ 且$b\neq 0)$ 的新数却起不到计数手段的作用],“虚数”正是由此而得名。

虚数诞生后，除了用来表示方程的解以外，一时尚找不到更多的应用，因此发展十分缓慢。到了 18 世纪末叶，维塞尔（Wessel）、阿尔纲（Argand）和高斯（Gauss）几乎同时给这些新数以几何解释（见 6.2 节）以后，才在数学、物理的应用和研究中逐渐有了越来越多且越来越重要的用途，这进一步推动了人们研究的兴趣。19 世纪初，高斯把形如 $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ 的数称为复数。如果说微积分的研究统治了 18 世纪的话，那么，19 世纪数学家们的兴奋中心便是关于复数理论及其应用的研究。现在复数已经发展成为一门十分重要的基础数学分支——复变函数论，它是数学、物理和技术科学中有力的数学工具之一。

本章将学习复数的初步知识。

6.2 复数的概念

6.2.1 复数的定义

在引言中我们已经看到，虚数单位 i 是由等式 $i^2=-1$ 定义的。形如 $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ 的数称为**复数**，一般用小写字母 z 表示，即 $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$，a 与 b 分别叫做 z 的**实部** [记作 $R(z)$] 与**虚部** [记作 $I(z)$]. 全体复数构成的集合称为**复数集**，一般用大写字母 $\mathbb{C}$ 来表示[①].

对于复数 $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$:

- 当 $b=0$ 时，z 就是实数;
- 当 $b\neq 0$ 时，z 叫做**虚数**;
- 当 $a=0$，且 $b\neq 0$ 时，z 叫做**纯虚数**。

以上事实还可以用“充要条件”的记号表示为:

[①] C 是英语词组 Complex numbers（复数）的第一个字母。

$$a+bi\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow b=0$$
$$a+bi\text{是虚数}\Longleftrightarrow b\neq 0$$
$$a+bi\text{是纯虚数}\Longleftrightarrow a=0\text{且}b\neq 0$$

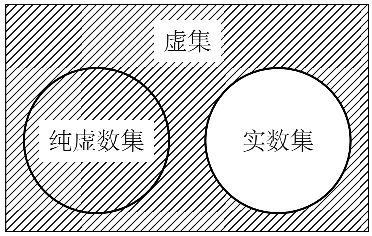


图 6.1

由此可以看出: 实数集和虚数集都是复数集的真子集（图 6.1）

例 6.1 已知 $z=(m^2-3m-4)+(m-5)i$，其中 $m\in\mathbb{R}$，试求 m 为何值时，

(1) $z\in\mathbb{R}$; (2) z 是虚数; (3) z 是纯虚数。

分析： 由 $m\in\mathbb{R}\Rightarrow(m^2-3m-4)\in\mathbb{R}$, $(m-5)\in\mathbb{R}$, 以下应根据复数分类的充要条件来解。

解:

(1) $\because\quad b=0\Rightarrow z\in\mathbb{R}$

$\therefore\quad m-5=0$，可得 $m=5$.

(2) $\because\quad b\neq 0\Rightarrow z$ 是虚数,

$\therefore\quad m-5\neq 0$，得 $m\neq 5$.

(3) $\because\quad \begin{cases}a=0\\ b\neq 0\end{cases}\Rightarrow z$ 是纯虚数,

$$\therefore\quad \begin{cases}m^2-3m-4=0\\ m-5\neq 0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}m=4\text{或}m=-1\\ m\neq 5\end{cases}$$

$\therefore\quad m=4$ 或 $m=-1$.

6.2.2 复数相等的定义

若两个复数 $z_1=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ 与 $z_2=c+di\ (c,d\in\mathbb{R})$ 的实部与虚部分别相等，称这两个**复数相等**，记作 $z_1=z_2$，即

$$a+bi=c+di\Longleftrightarrow a=c\text{且}b=d$$

由此可见，一个复数对应唯一的有序实数对 (a,b)，反之亦然。

推论 1

$$a + bi = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{且} b = 0$$

推论 2

$$a + bi \neq c + di \Longleftrightarrow a \neq c \text{或} b \neq d$$

例 6.2 已知 $(2x-1)+(3-x)i = x-(3+y)i$，其中 $x, y \in \mathbb{R}$，求 x 与 y。

分析： 由 $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow (2x-1) \in \mathbb{R}$，$(3-x) \in \mathbb{R}$，$(3+y) \in \mathbb{R}$，以下可用复数相等的定义转化成方程组来解。

解： 由已知条件

$$\begin{cases} 2x - 1 = x \\ 3 - x = -(3+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \end{cases}$$

应该理解：当给出两个复数相等这样的条件时，就意味着在实数集上能获得两个独立条件。

6.2.3 复数在平面上的表示

引言告诉我们，复数的几何解释的出现是使复数能在数学和物理中得以应用的极为重要的原因，也是复数发展史上的转折点，本节开始研究复数的几何解释。

由复数相等的定义可以看出，任何一个复数 $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ 对应唯一的有序实数对 (a, b)，而有序实数对 (a, b) 又对应直角坐标系（笛卡儿坐标系）上的唯一的点 $Z(a, b)$（图 6.2），由此想到，点 $Z(a, b)$ 的位置可以形象地用来表示复数 $z = a + bi$，而且这种表示是唯一的（图 6.3）。这种用来表示复数的平面称为**复平面**（也叫**高斯平面**），在高斯平面上，x 轴叫做**实轴**，y 轴除去原点后的部分叫做**虚轴**（因为原点表示实数 0，所以原点不能在虚轴上）。

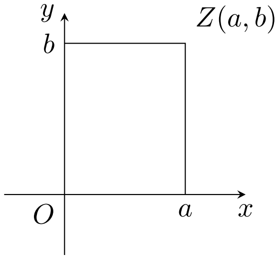


图 6.2

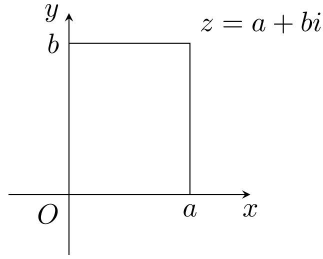


图 6.3

练习

1. 在复平面上回答：

   (1) 表示实数的点集构成的图形是________；

   (2) 表示虚数的点集构成的图形是________；

   (3) 表示纯虚数的点集构成的图形是________.

2. 数集 $\mathbb{C}$ 与复平面上的点集之间的对应是________.

3. 在复平面上图示满足 $1 \leqslant R(Z) \leqslant 3$，且 $1 < I(Z) \leqslant 2$ 的点 Z 构成的图形.

6.2.4 共轭复数

实部相等，虚部为相反数的两个复数称作**共轭复数**（当虚部不为 0 时，也称**共轭虚数**）。复数 z 的共轭复数记为 $\bar{z}$。根据这个定义可以看出：

(1) 若 $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$，则 $\bar{z}=a-bi$，

$\bar{\bar{z}}=\overline{a-bi}=a+bi$，即 $\bar{\bar{z}}=z$

(2) 在复平面上，表示两个互为共轭的复数 z 与 $\bar{z}$ 的点关于实轴对称（图 6.4）。

(3) 不难证明：$z\in\mathbb{R} \Longleftrightarrow \bar{z}=z$

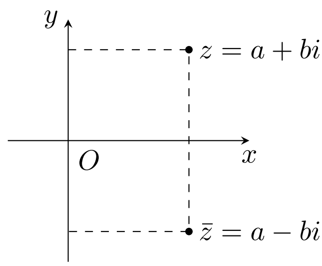


图 6.4

6.2.5 虚数无大小顺序

我们知道，两个实数可以比大小。但是两个虚数之间是不能比大小的，虚数与实数之间也不能比大小。关于这两个命题的证明本书从略。

习题一

A

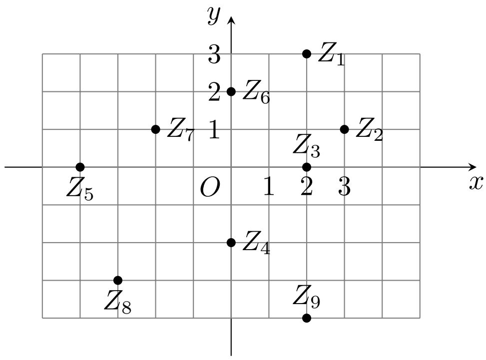
1. 说出下列复数中，哪些是实数，哪些是纯虚数，哪些是虚数：

$$0.618,\ \frac{2}{7}i,\ 0,\ i,\ i^2,\ 2+3i,\ 2+\sqrt{7},\ 5i+8,\ 3-9\sqrt{2}i,\ i^2(1-\sqrt{3}),\ 3-\sqrt{5}i$$

2. 说出下列复数的实部与虚部：

$$-5+\sqrt{3}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}i,\ -i,\ 0,\ -\sqrt{3},\ 8i-4$$

3. 说出图中复平面上的点 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_8, Z_9$ 所表示的复数。



第 3 题

4. 在复平面内描出表示下列复数的点。

$$z_1=2+5i,\ z_2=-3+2i,\ z_3=\frac{1}{2}-3i,\ z_4=-i-3,\ z_5=5,$$

$$z_6=-4i,\ z_7=3i,\ z_8=-\sqrt{3}$$

5. 设 $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$, 当 a,b 满足什么条件时，表示复数 z 的点才能位于 (口答)：

(1) 实轴上;

(2) 虚轴上;

(3) 上半平面 (不包括实轴);

(4) 右半平面 (不包括虚轴和原点).

6. 说出下列复数的共轭复数，并在复平面内把每对共轭复数表示出来。

$$z_1=4-3i,\ z_2=-1+i,\ z_3=-5-2i,\ z_4=4i-2,\ z_5=5,\ z_6=-3i$$

7. 说出复数 $2, \pi, 0, -\dfrac{1}{3}$ 的共轭复数。

8. 判断下列命题的真假，并说明理由。

   (1) 设 $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$, 当 $a = 0$ 时，z 是纯虚数;

   (2) 原点是复平面内实轴与虚轴的公共点;

   (3) 实数的共轭复数一定是实数，虚数的共轭复数一定是虚数。

9. 填空:

   (1) 若把复数集 $\mathbb{C}$ 看做全集，那么 $\mathbb{R}$ 的补集是________;

   (2) 实数集与虚数集的交集是________;

   (3) 纯虚数集是虚数集的________.

10. $m\ (m \in \mathbb{R})$ 取什么值时，复数 $z = (m^2 - 3m - 4) + (m^2 - 5m - 6)i$ 是

    (1) 实数;　　(2) 纯虚数;　　(3) 零。

11. m 是什么实数时，$z = (2 + i)m^2 - 3(1 + i)m - 2(1 - i)$ 是:

    (1) 实数;　　(2) 虚数;　　(3) 纯虚数;　　(4) 零。

12. 求适合下列条件的 x 与 $y\ (x, y \in \mathbb{R})$ 值:

    (1) $(3x - 4) + (2y - 1)i = 0$;　　(3) $x^2 - y^2 + 2xyi = 8 + 6i$;

    (2) $(x + y) - xyi = 24i - 5$;　　(4) $(2x^2 - 5x + 2) + i(y^2 + y - 2) = 0$.

B

13. 已知 $z_1 = \sin 2\theta + i\cos\theta$, $z_2 = \cos\theta + i\sqrt{3}\sin\theta$, θ 取何值时:

    (1) $z_1 = z_2$　　(2) $z_1 = \bar{z}_2$

14. 证明:

    (1) $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = z$;

    (2) z为纯虚数 $\Longleftrightarrow \overline{z} = -z\ (z \neq 0)$。

15. 在复平面上图示满足下列条件的复数 z 所构成的图形。

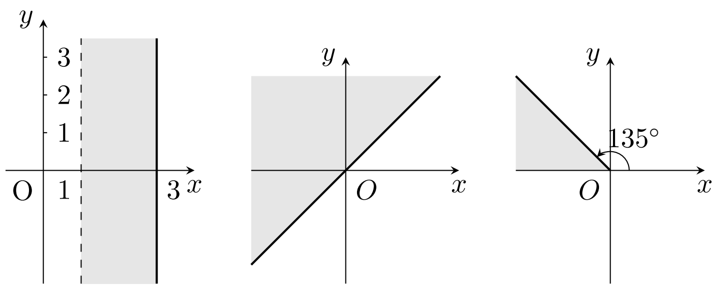
(1) $0 \leqslant I(z) < 3$

(2) $R(z) + I(z) = 0$

(3) $R(z) + 2I(z) = 1$

(4) $[R(z)]^2 + [I(z)]^2 = 2$

16. 用复数表示图中的用影区域：(见图)



第 16 题

6.2.6　复数的向量表示

在物理学中，我们经常遇到力、速度、加速度、电场强度等，这些量，除了要考虑它们的绝对值的大小以外，还要考虑它们的方向，我们把这种既有绝对值大小又有方向的量叫做**向量**。向量可以用有向线段表示，线段的长度就是这个向量的绝对值（叫做这个**向量的模**），线段的方向（用箭头表示）就是这个向量的方向。模相等且方向相同的向量，不管它们的起点在哪里，都认为是**相等的向量**。在这一规定下，向量可以根据需要进行平移。模为零的向量（它的方向是任意的）叫做**零向量**，规定所有的零向量相等。

复数可以用向量表示。前面我们已经看到

$$\text{复数集 } \mathbb{C} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{复平面上的点集}$$

如图 6.5 中，复平面内点 $Z(a,b)$ 表示复数 $a+bi$，连接 OZ，如果我们把有向线段 OZ（方向是从原点 O 指向点 Z）看成向量，记作 $\overrightarrow{OZ}$，这样就把复数同向量联系起来了。

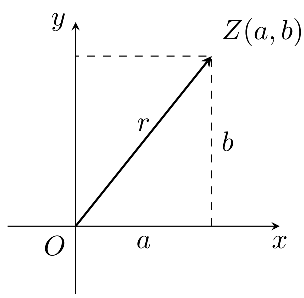


图 6.5

很明显，从原点出发的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是由点 Z 所表示的复数唯一确定的；反过来，点 Z 所表示的复数也可以由从原点出发的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 唯一确定. 因此，复数集 $\mathbb{C}$ 与复平面内所有以原点为起点的向量所成的集合也是一一对应的。此外，我们还规定，相等的向量表示同一个复数。

当 $z=a+bi$ 用向量 $\overrightarrow{OZ}$ 表示时，由于 $\overrightarrow{OZ}$ 的模（记作 $|\overrightarrow{OZ}|$）$r=\sqrt{a^2+b^2}$，于是，我们也把 r 叫做**复数 $a+bi$ 的模**（或**绝对值**），记作 $|z|$ 或 $|a+bi|$. 因此有

$$|\overrightarrow{OZ}|=|z|=|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}$$

其几何意义是复平面上表示复数 z 的点到原点的距离。

很有趣的是：当 $b=0$ 时，$z=a+bi=a, |z|=|a|$，即 $|z|$ 就是实数 a 的绝对值。可见,"复数的模（也叫复数的绝对值）"是实数的绝对值这一概念的扩充。

例 6.3 求复数 $z_1=3+4i$ 与 $z_2=-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}i$ 的模，并比较它们的大小（很明显，$|z|$ 是非负实数，所以可比大小）.

解:

$$|z_1|=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$$|z_2|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}<5$$

$\therefore\quad |z_1|>|z_2|$.

例 6.4 设 $z\in\mathbb{C}$，且满足下列条件：

(1) $|z|=3$

(2) $2\leqslant|z|<4$

试问在复平面上表示复数 z 的点集构成什么图形?

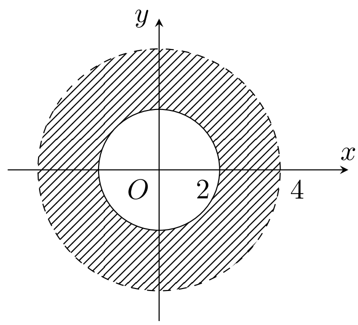


图 6.6

解:

(1) 由 $|z|=3$ 可知，表示复数 z 的点到原点的距离等于 3，所以满足条件 $|z|=3$ 的复数 z 的点集构成以原点为圆心，以 3 为半径的圆。

(2) 不等式 $2\leqslant|z|<4$ 可化为不等式组 $\begin{cases}|z|<4\\|z|\geqslant 2\end{cases}$

不等式 $|z|<4$ 的解集是圆 $|z|=4$ 内部所有的点组成的集合，不等式 $|z|\geqslant 2$ 的解集是圆 $|z|=2$ 及其外部所有的点组成的集合，这两个集合的交集，就是上述不等式的解集，也就是满足条件 $2\leqslant|z|<4$ 的点 Z 的集

合，即复数 z 所表示点的集合是以原点为圆心，半径分别为 2 与 4 的圆所夹的圆环，但不包括外圆的边界（图 6.6）。

例 6.5 用复数表示下列复平面上的阴影区域（图 6.7）。

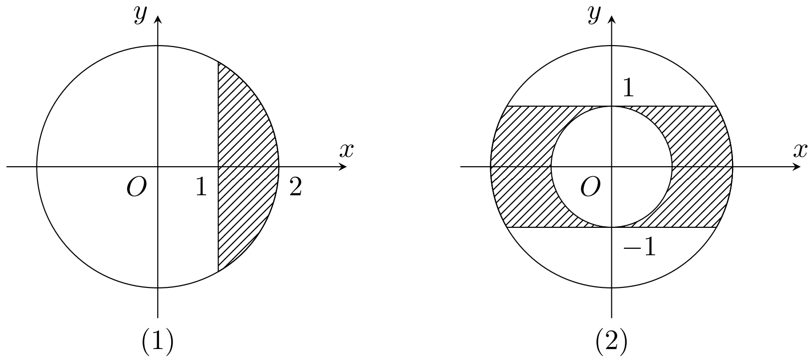


图 6.7

解:

(1) $\begin{cases} |z| \leqslant 2 \\ R(z) \geqslant 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 1 \leqslant |z| \leqslant 2 \\ -1 \leqslant I(z) \leqslant 1 \end{cases}$

习题二

A

1. 求证:

   (1) 任给 $z \in \mathbb{C}$, 都有 $|z| = |\overline{z}|$

   (2) 设 $z \in \mathbb{C}$, 则 $z = 0 \Longleftrightarrow |z| = 0$

2. 比较 $z_1 = -5 + 12i$ 与 $z_2 = -6 - 6\sqrt{3}i$ 的模的大小。

3. 求证：复平面内分别和复数 $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$, $z_3 = \sqrt{3} - \sqrt{2}i$, $z_4 = -2 + i$ 对应的四点 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 共圆.

4. 若 $|x + yi| = 1$ $(x, y \in \mathbb{R})$, 求表示 $z = x + yi$ 的点的轨迹。

B

5. 设 $z \in \mathbb{C}$, 用阴影图示满足下列条件的复数在复平面上的点集。

(1) $|z| = 3$

(2) $|z| < 3$

(3) $|z| > 3$

(4) $2 \leqslant |z| < 5$

(5) $\big||z| - 3\big| < 2$

(6) $\big||z| - 2\big| + |z| - 2 = 0$

6. 设 $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, 满足下列条件的复数在复平面上的点集是什么图形? 用阴影图示之。

(1) $0 < |x| < 2$

(2) $x > 0, \quad y < 0, \quad x^2 + y^2 < 16$

(3) $y \geqslant 2$

7. 设 $z \in \mathbb{C}$, 图示满足下列条件的点 z 的集合:

(1) $|z| \leqslant 3$, 且 $R(z) \geqslant I(z)$

(2) $|z| = 2$, 且 $R(z) = -I(z)$

(3) $1 \leqslant |z| < 3$, 且 $I(z) \leqslant -1$

8. 求出满足下列条件的复数 z, 并且图示之。

(1) $|z| = 1, \quad R(z) = -\dfrac{1}{2}$

(2) $|z| = 1, \quad R(z) = \dfrac{1}{2}$

6.3 复数的四则运算

在引言中我们已看到，当人们引入数 i 后，接踵而至的问题便是定义运算法则，并且希望这些新法则遵循“数集扩充的原则”。(为书写简便，约定：本节中说到复数 $a + bi$, $c + di$ 时，都假定 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

6.3.1 复数的加法

根据引言中提供的规定运算法则的原则，我们规定（定义）两复数 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ 的加法法则如下:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \tag{1}$$

这就是说，z_1, z_2 的和是个唯一确定的复数，它以 $(a + c)$ 为实部，以 $(b + d)$ 为虚部。

不难验证:

1. 这样规定的加法法则满足交换律、结合律。即对任何 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$，都有

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

2. 若 $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ 时，用这个法则与用实数加法法则计算其和，结果是一致的。

现在研究复数加法的几何意义。

从物理学知道，要求出作用于同一点 O，但不在同一直线上的两个力 $\overrightarrow{F_1}$ 与 $\overrightarrow{F_2}$ 的合力，只要用表示 $\overrightarrow{F_1}$ 与 $\overrightarrow{F_2}$ 的向量为相邻的两边画一个平行四边形，那么，平行四边形中，以力的作用点 O 为起点的那条对角线所表示的向量就是合力 $\overrightarrow{F}$［图 6.8（1）］。这个法则通常叫做向量加法的平行四边形法则。

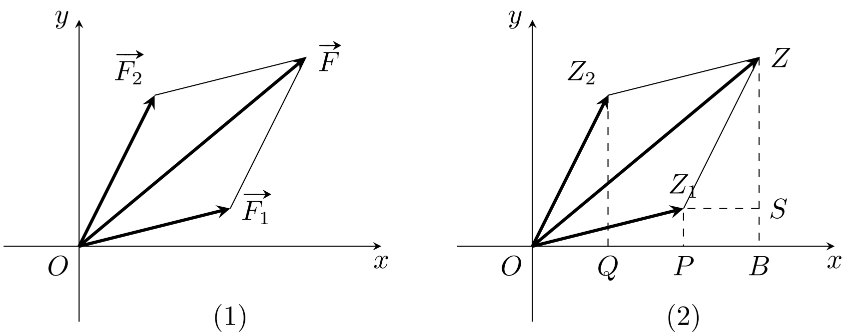


图 6.8

复数用向量来表示，如果与这些复数对应的向量不在同一直线上，那么这些复数的加法就可以按照向量加法的平行四边形法则来进行。下面我们来证明这个事实。

设 $\overrightarrow{OZ_1}$ 及 $\overrightarrow{OZ_2}$ 分别与复数 $a+bi$ 及 $c+di$ 对应，且设 $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$ 不在同一直线上［图 6.8（2）］。以 $\overrightarrow{OZ_1}$ 及 $\overrightarrow{OZ_2}$ 为两条邻边画平行四边形 OOZ_1Z_2，画 x 轴的垂线 PZ_1, QZ_2 及 RZ，并且画 $Z_1S \perp RZ$。容易证明

$$\triangle ZZ_1S \cong \triangle Z_2OQ$$

并且四边形 Z_1PRS 是矩形，因此

$$OR = OP + PR = OP + Z_1S = OP + OQ = a + c$$
$$RZ = RS + SZ = PZ_1 + QZ_2 = b + d$$

于是，点 Z 的坐标是 $(a+c, b+d)$，这说明 $\overrightarrow{OZ}$ 就是与复数 $(a+c)+(b+d)i$ 对应的向量。

由此可知，求两个复数的和，可以先画出与这两个复数对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$, $\overrightarrow{OZ_2}$，如果 $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$ 不在同一直线上，再以这两个向量为两条邻边画平行四边形，那么与这个平行四边形的对角线 OZ 所表示的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应的复数，就是所求两个复数的和。

如果 $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$ 在同一直线上，我们可以画出一个“压扁”了的平行四边形，并据此画出它的对角线来表示 $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$ 的和。

复数加法还可以用向量加法的三角形法则来进行。由图 6.8（2）可以看出 $\overrightarrow{OZ_2}$ 与 $\overrightarrow{Z_1Z}$ 是相等的向量，因此可以平移向量 $\overrightarrow{OZ_2}$，使其起点与向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 的终点重合，得到向量 $\overrightarrow{Z_1Z}$ 构成 $\triangle OZ_1Z$，则向量 $\overrightarrow{OZ}$ 就是所求两个复数的和。

6.3.2 复数的减法

复数的减法规定（定义）为复数加法的逆运算，即把满足

$$(c+di)+(x+yi)=a+bi \tag{2}$$

的复数 $x+yi$，叫做**复数 $a+bi$ 减去复数 $c+di$ 的差**，记作 $(a+bi)-(c+di)$.

根据复数相等的定义，由 (2) 得

$$\begin{cases} c+x=a \\ d+y=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a-c \\ y=b-d \end{cases}$$

$\therefore \quad x+yi=(a-c)+(b-d)i$

从而

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

这就是复数的**减法法则**。由此可见，两复数的差也是一个唯一确定的复数。

由上所述，可以看出，复数的加（减）法与多项式的加（减）法是类似的，就是把复数的实部与实部、虚部与虚部分别相加（减）。

例 6.6 计算:

(1) $(-5+2i)+(7+4i)+(2-3i)$

(2) $(5-6i)+(3-4i)-(2-5i)-(-7-4i)$

解:

(1) $(-5+2i)+(7+4i)+(2-3i)=(-5+7+2)+(2+4-3)i=4+3i$

(2) $(5-6i)+(3-4i)-(2-5i)-(-7-4i)=(5+3-2+7)+(-6-4+5+4)i=13-i$

例 6.7 设 z_1、$z_2 \in \mathbb{C}$, 求证:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}, \qquad \overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$$

证明: 设 $z_1=a+bi, \quad z_2=c+di\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2}&=\overline{(a+bi)+(c+di)}=\overline{(a+c)+(b+d)i}\\&=(a+c)-(b+d)i=(a-bi)+(c-di)\\&=\overline{z_1}+\overline{z_2}\end{aligned}$$

(后一个证明，由读者完成)

例 6.8 填空（设 $z=a+bi,a,b\in\mathbb{R}$）

$$z+\overline{z}=\underline{\qquad\qquad}$$
$$z-\overline{z}=\underline{\qquad\qquad}$$

现在研究复数减法的几何意义。

由于减法是加法的逆运算，从图 6.8（2）中可以看出：如果向量 $\overrightarrow{OZ}$ 表示复数 $a+bi$，向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 表示复数 $c+di$, 则向量 $\overrightarrow{OZ_2}$ 所表示的复数就是 $(a+bi)-(c+di)$ 所得的差，而向量 $\overrightarrow{Z_1Z}$ 与向量 $\overrightarrow{OZ_2}$ 相等，因而它也表示 $(a+bi)-(c+di)$ 所得的差。这就是说，在复平面上，连接表示两复数的点，方向指向被减复数，就能得到与两复数之差对应的向量，这就是复数减法的几何意义.

例 6.9 在复平面上，用复数表示两点间的距离公式。

解: 根据复数减法的几何意义，向量 $\overrightarrow{Z_2Z_1}$ 表示两复数的差 z_1-z_2(图 6.9), 由复数的模的定义可知

$$|\overrightarrow{z_2z_1}|=|z_1-z_2|$$

又因为 $|\overrightarrow{z_2z_1}|$ 就是复平面上两点 z_1, z_2 间的距离，我们把它记作 d，就有

$$d=|z_1-z_2|$$

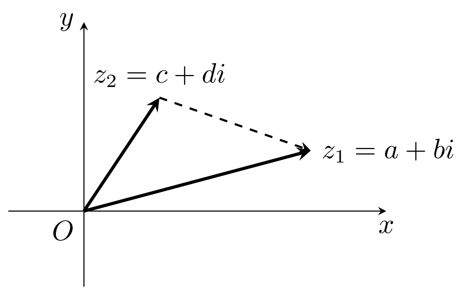


图 6.9

这就是复平面上表示复数 z_1, z_2 对应的两点间的**距离公式**.

例 6.10 在复平面上，求表示下列每组复数对应的两点间的距离:

(1) $z_1 = 3+2i, \quad z_2 = -3-5i$ (2) $z_3 = a+bi, \quad z_4 = c+di$

解:

(1)

$$
\begin{aligned}
d_{z_1z_2} &= |z_1 - z_2| = |(3+2i)-(-3-5i)| = |(3+5)+(2+5)i| \\
&= |8+7i| = \sqrt{8^2+7^2} = \sqrt{113}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
d_{z_3z_4} &= |z_3 - z_4| = |(a+bi)-(c+di)| = |(a-c)+(b-d)i| \\
&= \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}
\end{aligned}
$$

这与平面解析几何中两点间的距离公式是一致的.

例 6.11 在复平面上求圆的方程。

解: 设圆心对应的复数为 $z_0 = a+bi$，圆上任一点对应的复数为 $z = x+yi$，圆的半径为 r（图 6.10），则根据圆的定义得

$$|z - z_0| = r$$

这就是复平面上圆的方程.

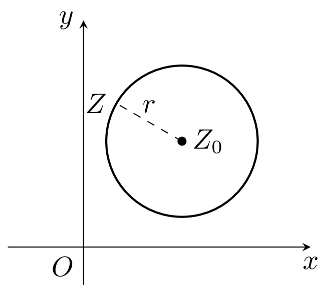


图 6.10

应当明确，利用复数减法的几何意义和复数的模的定义所得出的复平面上两点间的距离公式是一个很重要的结果。与直角坐标平面上的两点间距离公式

$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

相比，它结构上更加简明、直接，因而对简化平面曲线的方程必将起到一定的作用。

例 6.12 若点 Z 满足 $|z+2\sqrt{3}-2i| \leqslant 1$，求 $|z|$ 的最大值与最小值及相应的复数 z。

解: 由于

$$|z+2\sqrt{3}-2i| = \left|z - \left(-2\sqrt{3}+2i\right)\right| \leqslant 1$$

这一步先把条件写成 $|z-z_0|$ 的形式，可知点 Z 的集合构成以 $z_0=-2\sqrt{3}+2i$ 为圆心，以 1 为半径的一个圆面（图 6.11），所以，使 $|z|$ 最大（或最小）的点 Z 就是直线 OZ_0 与圆的两个交点 Z_1 和 Z_2.

$$|OZ_0|=\sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=4$$

$$|z|_{\max}=|OZ_0|+R=4+1=5$$

$$|z|_{\min}=|OZ_0|-R=4-1=3$$

利用三角函数容易算出：

$$z_1=-\frac{5}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{2}i$$

$$z_2=-\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}i$$

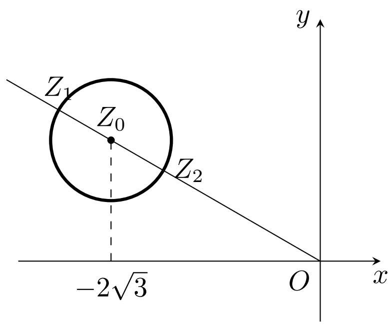


图 6.11

习题三

A

1. 证明复数加法满足交换律和结合律。

2. 计算：

(1) $(2+3i)+(3-4i)+(4-8i)+(-2-6i)$

(2) $\left(\frac{2}{3}+i\right)+\left(1-\frac{2}{3}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i\right)$

(3) $\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}i\right)-\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}i\right)\right]+\left(-\sqrt{2}i+\sqrt{3}\right)$

(4) $[(a+b)+(a-b)i]-[(a-b)-(a+b)i]$

(5) $(3-2i)-(-2+3i)+(5-4i)-(2-5i)-(-1+7i)$

3. 在复平面上若 A、B 对应的复数是 $6+5i$ 与 $-3+4i$，

(1) 求 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 表示的复数；

(2) 求 $\overrightarrow{AB}$ 表示的复数与 $\overrightarrow{BA}$ 表示的复数；

(3) 求 $-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 表示的复数；

(4) 求 $(-\overrightarrow{OA})+(-\overrightarrow{OB})$ 表示的复数

4. 在复平面上，求表示下列各组复数对应的两点间的距离：

(1) $z_1 = 2+i, \quad z_2 = 3-i$ (2) $z_3 = 8+5i, \quad z_4 = 4-2i$

5. 复平面上两点对应的复数是 z_1, z_2，以这两个点为端点的线段的垂直平分线的方程是________

6. 复平面上一椭圆的两个焦点的坐标为 $(-\sqrt{5}, 0)$ 和 $(\sqrt{5}, 0)$，椭圆上的动点到两焦点的距离之和为 6，椭圆的方程是________

B

7. 复平面上有两个定点，它们对应的复数是 z_1, z_2，平面上动点到这两个定点距离之和为 $2m$。当 $2m > |z_1 - z_2|$, $2m = |z_1 - z_2|$, $2m < |z_1 - z_2|$ 时，分别求动点的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形。

8. 设 z_1, z_2 是非零复数，用几何方法证明著名的**三角形不等式**

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

并指出等号成立的条件（注意分情况讨论）。

9. 复数 z 满足 $|z + \sqrt{2} - \sqrt{2}i| \leqslant 1$，求 $|z|$ 的最大值与最小值，及相应的复数 z。

10. 设 $|z+1| = |z-i|$，且 $z + 2 + \dfrac{4}{z+2} \in \mathbb{R}$，求 z.

6.3.3 复数的乘法

我们规定（定义）两个复数 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ 的乘法法则如下：

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)i\end{aligned}$$

这就是说，复数的乘法能像多项式那样进行运算，但是必须把结果中的 i^2 换成 -1，并将实部和虚部分别合并。由此可以看出，复数的积是唯一确定的一个复数。

容易验证，这样定义的乘法法则：

(1) 满足交换律、结合律和乘法对加法的分配律，即对任何 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$，有

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

(2) 正整数指数幂的运算律也能推广到复数集中，即对任何复数 z, z_1, z_2，有

$$\begin{aligned} z^m \cdot z^n &= z^{m+n} \\ (z^m)^n &= z^{mn} \qquad\qquad (m, n \in \mathbb{N}) \\ (z_1 \cdot z_2)^n &= z_1^n \cdot z_2^n \end{aligned}$$

(3) 若 $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ 时，用这个法则与用实数乘法法则计算其积，结果是一致的。

有了如上的算律，现在研究 $i^n = ?$（其中 $n \in \mathbb{N}$）

$$\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -i \\ i^4 &= i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = 1 \end{aligned}$$

从而，对于任何 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$\begin{aligned} i^{4n} &= (i^4)^n = 1 \\ i^{4n+1} &= i^{4n} \cdot i = i \\ i^{4n+2} &= i^{4n} \cdot i^2 = -1 \\ i^{4n+3} &= i^{4n} \cdot i^3 = -i \end{aligned}$$

上述这些关系，称为虚数单位 i 乘方运算的**周期性**.

例 6.13 计算下列各式：

(1) i^{101}

(2) i^{9999}

(3) $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100}$

(4) $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} \quad (n \in \mathbb{N})$

解：

(1) $i^{101} = i^{4\times25+1} = i$

(2) $i^{9999} = i^{4\times2499+3} = -i$

(3) $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100} = \dfrac{i(1-i^{100})}{1-i} = \dfrac{i(1-i^{4\times25})}{1-i} = \dfrac{i(1-1)}{1-i} = 0$

(4) $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = i^n(1 + i + i^2 + i^3) = i^n(1 + i - 1 - i) = 0$

由（4）可以看出，虚数单位 i 的连续 4 个正整数次幂的和为零，这是 i 的乘方运算的周期性造成的，也可以说是 i 的乘方运算周期性的另一种表现形式，利用这一结论，你能迅速简捷地计算出（3）式的结果吗?

现在计算很重要的 $z\cdot\bar{z}=$?

设 $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$，则

$$z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

另一方面，

$$a^2+b^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2=|z|^2=|\bar{z}|^2$$

比较以上两式，得到

定理

对于任意的 $z\in\mathbb{C}$，有

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$$

应该注意：这个定理虽然形式上极其简单，但它却把 z，$\bar{z}$，$|z|$，$|\bar{z}|$ 联系在一个等式之中，是一个非常重要的结果。

推论

若 z 为虚数，则 $|z|^2\neq z^2$.（这与实数集上的结果是不同的！）

例 6.14 计算：

(1) $(1-2i)(3+2i)(-1+3i)$ (2) $(-3+4i)(-3-4i)$

解：

(1) $(1-2i)(3+2i)(-1+3i)=(7-4i)(-1+3i)=5+25i$

(2) $(-3+4i)(-3-4i)=(-3)^2-(4i)^2=25$

又解：原式 $=(-3+4i)\overline{(-3+4i)}=|-3+4i|^2=(-3)^2+4^2=25$

例 6.15 计算 $(x-1+i)(x-1-i)(x+1+i)(x+1-i)$，$(x\in\mathbb{R})$

解:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \left[(x-1)^2 - i^2\right] \cdot \left[(x+1)^2 - i^2\right] \\
&= (x^2 - 2x + 1 + 1)(x^2 + 2x + 1 + 1) \\
&= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \\
&= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\
&= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = x^4 + 4
\end{aligned}
$$

注意: 由于复数的乘法能像多项式的乘法那样进行运算，所以在实数运算中的乘法公式都可以“移植”到复数中来，如在上例中我们就使用了平方差公式。

例 6.16 若 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$，证明下式，并解释它的几何意义:

$$
|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 \tag{*}
$$

分析: 式子中出现有“模的平方”，这就有可能利用 $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ 把 (*) 转化为易于运算的形式。

证明:

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\
&= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\
&= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2
\end{aligned}
$$

分析: 也可以设 $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di\ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ 去解。

当表示 z_1, z_2 的点与原点不共线时，(*) 表示平行四边形两对角线的平方和等于四条边的平方和（图 6.12）。

注意:

(1) 此例与例 6.14（2）中展示的应用公式 $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ 的两种方式应掌握；

(2) 当 O, z_1, z_2 表示的点不共线时，应充分认识 $|z_1|, |z_2|, |z_1 + z_2|$ 能构成三角形，$|z_1|, |z_2|, |z_1 - z_2|$ 也能构成三角形，从而得到利用几何方法解决复数问题的渠道.

习题四

A

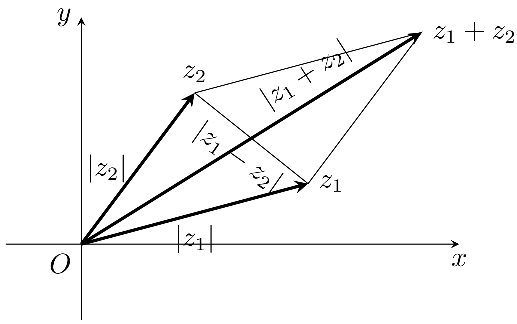


图 6.12

1. 证明复数的乘法满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律。

2. 计算:

(1) $(-8-7i)(-3i)$

(2) $(4-3i)(-5-4i)$

(3) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)$

(4) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}i-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

3.（口答）i^{11}, i^{25}, i^{26}, i^{70}, i^{100}, i^{400}, i^{1000}, i^{1002} 各等于什么?

4. 计算:

(1) $(-0.2+0.3i)(0.5-0.4i)$

(2) $(1-2i)(2+i)(3-4i)$

(3) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}i)(\sqrt{a}-\sqrt{b}i) \quad (a,b\in\mathbb{R}^+)$

(4) $(a+bi)(a-bi)(-a+bi)(-a-bi)$

(5) $(a+bi)(a^2-abi-b^2)$

(6) $(a-bi)(a^2+abi-b^2)$

5. 利用公式 $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$，把下列各式分解成一次因式的积:

(1) x^2+4

(2) a^4-b^4

(3) $a^2+2ab+b^2+c^2$

(4) x^2+2x+3

6. 计算 $(1-i)+(2-i^3)+(3-i^5)+(4-i^7)$

7. 填空（并记住这些结果）：

   (a) $(1+i)^2=$ ________

   (b) $(1-i)^2=$ ________

   (c) $i^{4n+1}\cdot i^{4n+2}\cdot i^{4n+3}\cdot i^{4n+4}=$ ________ （其中 $n\in\mathbb{N}$ 或 $n=0$）

8. 计算：

   (1) $(1+i)^{10}$

   (2) $(1-i)^6$

   (3) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7$

B

9. 求证：若 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$，且 $z_1\cdot z_2=0$，则中至少有一个是零。（提示：从复数 z 为 0 的定义入手）

10. 设 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, 满足 $|z_1|=|z_2|=1$，且 $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$, 求 $|z_1-z_2|$.

11. 复平面内，一个平行四边形的三个顶点分别表示复数 0, $4+7i$, $-2+9i$，求第四个顶点表示的复数。

6.3.4 复数的除法

复数的除法规定（定义）为乘法的逆运算，即把满足

$$(c+di)(x+yi)=a+bi\quad(c+di\neq0)\tag{3}$$

的复数 $x+yi$，叫做复数 $a+bi$ 除以 $c+di$ 的商，记作 $(a+bi)\div(c+di)$ 或 $\dfrac{a+bi}{c+di}$. 现在，利用 (3) 式，求出 $x+yi$.

由于 $c+di\neq0$，所以，在 (3) 式两边分别乘以 $\overline{c+di}=c-di$，有

$$(c-di)(c+di)(x+yi)=(a+bi)(c-di)$$

即 $(c^2+d^2)x+(c^2+d^2)yi=(ac+bd)+(bc-ad)i$, 利用复数相等的定义，得

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\qquad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

$$\therefore\quad (a+bi)\div(c+di)=x+yi=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\tag{4}$$

另一方面，若把 $(a+bi)\div(c+di)$ 形式地写作

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}\xRightarrow{\text{分离实虚部}}\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \tag{5}$$

比较 (4)，(5) 可见，欲求两复数的商，可先写成“分式”，然后使分母“实数化”，再把实部与虚部分离即

$$\begin{aligned}(a+bi)\div(c+di)=\frac{a+bi}{c+di}&=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

例 6.17 计算 $(1+2i)\div(3-4i)$

解:

$$\begin{aligned}(1+2i)\div(3-4i)=\frac{1+2i}{3-4i}&=\frac{(1+2i)\cdot(3+4i)}{(3-4i)\cdot(3+4i)}\\&=\frac{-5+10i}{3^2+4^2}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\end{aligned}$$

例 6.18 解方程 $(5z-1)i+3z-2i=0$，其中 $z\in\mathbb{C}$.

解: 解 1: 设 $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$，则有

$$(5x+5yi-1)i+3x+3yi-2i=0$$

即：$(3x-5y)+(5x+3y-3)i=0$

由于 $x,y\in\mathbb{R}$，利用复数相等的定义，得

$$\begin{cases}3x-5y=0\\5x+3y-3=0\end{cases}$$

解之，得：$x=\dfrac{15}{34},\quad y=\dfrac{9}{34}$

$\therefore\quad z=\dfrac{15}{34}+\dfrac{9}{34}i$

解 2: 原方程同解于 $(5i+3)z=3i$，根据复数除法的定义，z 是 $3i$ 除以 $(3+5i)$ 的商，即

$$z=\frac{3i}{3+5i}=\frac{3i\cdot(3-5i)}{(3+5i)\cdot(3-5i)}=\frac{15+9i}{3^2+5^2}=\frac{15}{34}+\frac{9}{34}i$$

评述: 与解 1 相比，解 2 简明得多。其步骤与解实系数一元一次方程相似，但应着重理解这里使用了复数除法的定义.

例 6.19 若 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$，求证

(1) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(2) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$

分析：由共轭复数的概念，要解决此问题必须分清复数的实部与虚部，为此可设 $z_1 = a+bi,\ z_2 = c+di \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R})$.

证明：

(1) 设 $z_1 = a+bi,\ z_2 = c+di \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\because \quad \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a+bi)\cdot(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} \\ &= (ac-bd)-(ad+bc)i \\ \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} &= \overline{a+bi}\cdot\overline{c+di} = (a-bi)\cdot(c-di) \\ &= (ac-bd)-(ad+bc)i\end{aligned}$$

$\therefore \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(2) 由读者自己完成证明.

习题五

A

1.（口答）$\dfrac{1}{i}$, $\dfrac{1}{i^3}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}i}$, $\left(\dfrac{1}{i}\right)^5$, $\dfrac{1+i}{1-i}$ 各等于什么?

2. 计算:

(1) $\dfrac{1}{11-5i}$

(2) $\dfrac{7-9i}{1+i}$

(3) $\dfrac{1-2i}{3+4i}$

(4) $\dfrac{1+2i}{2+4i}$

(5) $\dfrac{(1-2i)^2}{3-4i} - \dfrac{(2+i)^2}{4-3i}$

(6) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}i}{\sqrt{5}-\sqrt{3}i} - \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}i}{\sqrt{3}-\sqrt{5}i}$

3. 计算:

(1) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{10}$

(2) $(3+3i)^4$

(3) $\left(\dfrac{2+2i}{5-5i}\right)^4$

(4) $(a+ai)^6$

4. 设 $f(z) = \dfrac{z^2-z+1}{z^2+z+1}$，求:

(1) $f(2+3i)$

(2) $f(2-3i)$

(3) $f(1-i)$

(4) $f(1+i)$

B

5. 已知 $z_1=5+10i,\quad z_2=3-4i,\quad \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$, 求 z.

6. 已知复数 z 的平方等于 $5-12i$, 求 z.

7. 设 $z\in\mathbb{C}$, 解方程:

(1) $\dfrac{1}{2}(z-1)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+z)i$

(2) $(z-i)i=3(z-3)$

8. 设 $x,y\in\mathbb{C}$, 解方程组 $\begin{cases}(3+i)x+(3-i)y=16\\(3+2i)x+(3-2i)y=14\end{cases}$

9. 设 $x,y,z\in\mathbb{C}$, 解方程组 $\begin{cases}x+iy-2z=10\\x-y+2iz=20\\ix+3iy-(1+i)z=30\end{cases}$

10. 定义 i^0 的意义是 1，i^-m 的意义是 $\dfrac{1}{i^m}$ $(m\in\mathbb{N})$, 求证

(1) $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, $i^{4n+4}=1$ 对一切 $n\in\mathbb{Z}$ 都成立(这个命题说明了什么)。

(2) 证明 $i^m+i^{m+1}+i^{m+2}+i^{m+3}=0$（其中 $m\in\mathbb{Z}$）.

11. 若 $(x+yi)^3=a+bi$, $(a,b,x,y\in\mathbb{R})$, 求证

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=4(x^2-y^2)$$

12. $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ 是关于 x 的实系数方程

$$f(x)=mx^3+nx^2+px+q=0\quad(m\neq 0)$$

的一个根。求证：$\bar{z}=a-bi$ 也是此方程的根。

6.4 复数的三角形式

复数的三角形式是彻底解决复数乘、除、乘方和开方题的桥梁。因此确定复数的三角形式是很重要的。

6.4.1 复数的模与辐角

前面我们已经学过，复数 $z=a+bi$ 可以用复平面上的点表示（图 6.13），进而，又可以用从原点出发的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 表示。由此容易想到，复数是否也可以用 r 与 θ 表示呢?

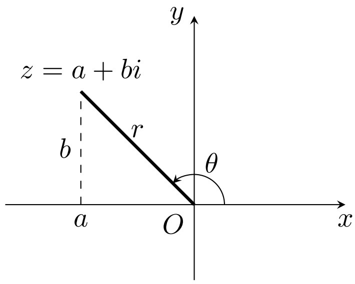


图 6.13

1. 当 $z\neq 0$ 时，$r=|\overrightarrow{OZ}|=\sqrt{a^2+b^2}$，称为 z 的**模**，显然 z 有唯一的模，θ 是 $\overrightarrow{OX}$ 转到 $\overrightarrow{OZ}$ 的角，称为复数 z 的**辐角**[①]，记为

$$\operatorname{Arg} z=\theta$$

很明显，$\operatorname{Arg} z$ 是多值的。事实上，若 z 的一个辐角是 α，则有 $\operatorname{Arg} z=\alpha+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. 如复数 i 的辐角 $\operatorname{Arg} i=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

为了今后使用上方便，把属于 $[0,2\pi)$ 的 z 的辐角叫做 z 的辐角的**主值**，记作 $\arg z$，即

$$0\leqslant \arg z<2\pi$$

由此可以看出，非零复数 z 有唯一的 $\arg z$，而且

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})\tag{1}$$

2. 当 $z=0$ 时，$|z|=0$，规定任意一个周内角都可以作为 z 的辐角的主值。

练习

1.（填空）：若 $m\in\mathbb{R}^+$，则

[①]arg 是英语单词 argument（辐角）的前三个字母.

(1) $\arg m =$ ________　　(3) $\arg(mi) =$ ________

(2) $\arg(-m) =$ ________　　(4) $\arg(-mi) =$ ________

2. 判断下列命题的真假:

(1) 每个复数对应唯一确定的模 (　)

(2) 每个复数对应唯一确定的辐角的主值 (　)

(3) 两个非零复数相等 $\Leftrightarrow$ 它们的模与辐角的主值分别相等 (　)

6.4.2 用模与辐角表示复数

从三角函数定义我们知道（图 6.13）:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{r} = \cos\theta \\ \dfrac{b}{r} = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

$$z = a + bi = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{2}$$

(2) 称为复数 z 的**三角形式**。为了区别，把 $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ 称作 z 的**代数形式**.

例 6.20 把下列复数表示成三角形式:

(1) $z_1 = \sqrt{3} + i$　　(2) $z_2 = 1 - i$　　(3) $z_3 = -1$

分析: 欲化成三角形式，关键是求出 r、θ，这只要在复平面上先确定点 z 的位置就好办了.

解:

(1) $\because \quad r_1 = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1} = 2, \quad \theta_1 = \dfrac{\pi}{6}$ （图 6.14）

$\therefore \quad z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(2) $\because \quad r_2 = \sqrt{2}, \quad \theta_2 = -\dfrac{\pi}{4}$ （图 6.15）

$\therefore \quad z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

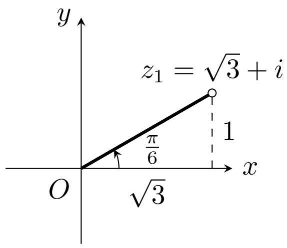


图 6.14

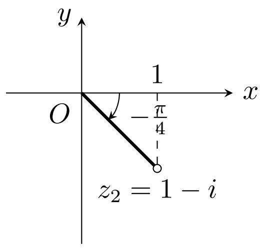


图 6.15

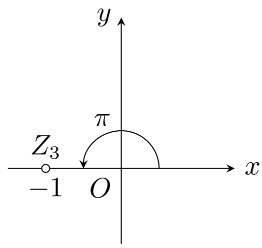


图 6.16

(3) $\because \quad r_3=1, \quad \theta_3=\pi$ （图 6.16）

$\therefore \quad z_3=\cos\pi+i\sin\pi$

例 6.21 判断下列各式是否是三角形式，若不是，化为三角形式：

(1) $z_1=-2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

(2) $z_2=2(\cos\theta-i\sin\theta)$

(3) $z_3=3(\sin\theta+i\cos\theta)$

(4) $z_4=-2(\sin\theta+i\cos\theta)$

(5) $z_5=2(\cos 90^\circ+i\sin 30^\circ)$

解:

(1) 这不是三角形式。

容易看出在复平面上 z_1 是 $z_0=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ 关于原点的对称点（图 6.17），从而

$$z_1=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)\right]=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

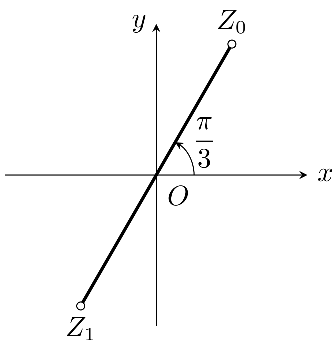


图 6.17

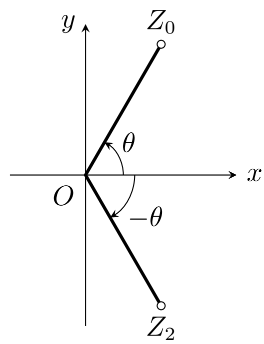


图 6.18

(2) 这也不是三角形式。在复平面上，视 θ 为锐角时 z_2 是 $z_0=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ 关于实轴的对称点（图 6.18），从而

$$z_2=2[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$$

(3) 这也不是三角形式。从图 6.19 可以看出，z_3 的辐角是 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$.

$\therefore \quad z_3=3\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$

(4) 这也不是三角形式。从图 6.20 可以看出 z_4 是 z_0 关于原点的对称点。z_0 的辐角是 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$，从而 z_4 的辐角是 $\dfrac{3\pi}{2}-\theta$.

$\therefore \quad z_4=2\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)\right]$

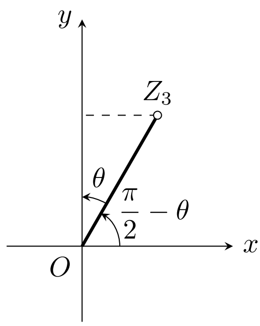


图 6.19

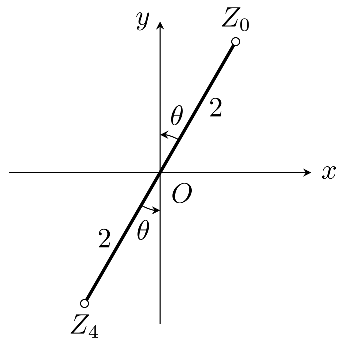


图 6.20

(5) 这也不是三角形式。

$$z_5=2(\cos 90^\circ+i\sin 30^\circ)=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

评述：解决这类问题必须：

(1) 对复数三角形式的结构特征要理解得很清楚，其中 $r\geqslant\theta$；前面是 θ 角的余弦，后面是 θ 角的正弦；中间用加号连接。

(2) 上面的方法是：把 θ 视为锐角，先在第一象限中构造出与 z 对称的点 z_0，再根据符号画出点 z，最后利用 z 与 z_0 的对称性写出 z 的模与辐角。

(3) 也可以直接使用诱导公式解决问题：把 θ 视为锐角后，由符号定 z 所在象限，再看函数变不变，以确定用哪个诱导公式。如对 z_4，由符号定出它在第三象限，且两个弦函数名称都需要变，从而用 $\dfrac{3\pi}{2}-\theta$ 的诱导公式就行了.

$\therefore \quad z_4=2\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)\right]$

例 6.22 化下列复数为三角形式：

(1) $z_1 = -4 + 3i$　　　　(2) $z_2 = 5 - 12i$

解:

(1) 先在第一象限构造 z_1 的对称点 $z_0 = 4 + 3i$，立刻有

$$|z_0| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \qquad \arg z_0 = \arctan\frac{3}{4} \qquad \text{（图 6.21）}$$

$$\therefore \quad z_1 = 5\left[\cos\left(\pi - \arctan\frac{3}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \arctan\frac{3}{4}\right)\right]$$

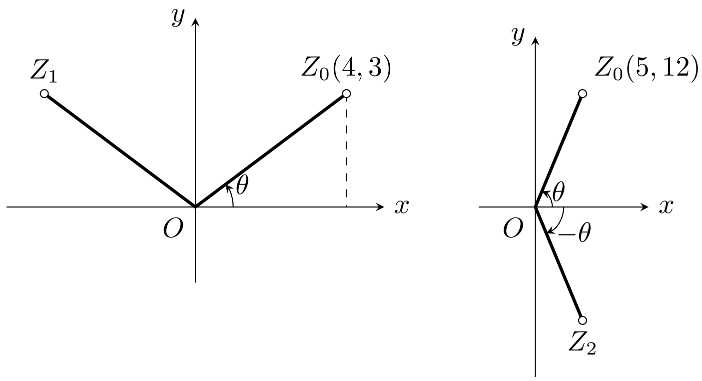


图 6.21

(2) 在第一象限构造 z_2 的对称点 $z_0 = 5 + 12i$，则

$$|z_0| = 13, \qquad \arg z_0 = \arctan\frac{12}{5}$$

$$\therefore \quad z_2 = 13\left[\cos\left(-\arctan\frac{12}{5}\right) + i\sin\left(-\arctan\frac{12}{5}\right)\right]$$

例 6.23 求复数 $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta \quad (\pi < \theta < 2\pi)$ 的模与辐角.

分析: 化 z 为三角形式就能一举得到模与辐角。

解: **解法 1:**

$$z = 2\cos^2\frac{\theta}{2} + i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\because \quad \pi < \theta < 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \pi \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad z &= -2\cos\frac{\theta}{2}\left(-\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ &= -2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right] \end{aligned}$$

$\therefore\quad |z| = -2\cos\dfrac{\theta}{2},\quad \operatorname{Arg} z = \dfrac{\theta}{2} + \pi + 2k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})$

解法 2: 分别求模与辐角

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta} = \sqrt{2+2\cos\theta}$$
$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = \left|2\cos\frac{\theta}{2}\right| = -2\cos\frac{\theta}{2}$$
$$\tan\varphi = \frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$$

由于 $a = 1+\cos\theta > 0,\quad b = \sin\theta < 0$ （$\because\ \pi < \theta < 2\pi$）

$\therefore$ 点 z 在第四象限，而 $\dfrac{\theta}{2} \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$

$\therefore\quad \operatorname{Arg} z = \left(\dfrac{\theta}{2} + \pi\right) + 2k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})$

习题六

A

1. 对于下列复数，在复平面上用从原点出发的向量表示它们，并把复数化成三角形式:

(1) -3　　(4) $-1-\sqrt{3}i$　　(7) $\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

(2) $2i$　　(5) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$　　(8) $-6-8i$

(3) $-4i$　　(6) $2-3i$　　(9) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

2. 下列复数是否是三角形式？若不是，就把它化成三角形式:

(1) $-5(\cos\theta + i\sin\theta)$

(2) $2(\cos\theta - \sin\theta)$

(3) $-\sqrt{2}(\cos\theta - i\sin\theta)$

(4) $\dfrac{1}{3}(\sin\theta + i\cos\theta)$

(5) $-\sqrt{3}(\sin\theta + i\cos\theta)$

(6) $\sqrt{3}(\sin\theta - i\cos\theta)$

(7) $1+\cos\theta + i\sin\theta,\quad (0<\theta<\pi)$

(8) $1-\cos\theta + i\sin\theta,\quad (0<\theta<\pi)$

(9) $1+i\tan\theta,\quad \left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

(10) $\tan\theta + i,\quad \left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

3. 将下列复数化为代数形式:

(1) $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $8\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$

(3) $9\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$

(4) $6\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

(5) $9\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$

(6) $z_k=\cos\left(k\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(k\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)$
$(k=1,3,5,7)$

B

4. 设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $r>0$, 则 $\bar{z}=$ ________（用三角形式表示）。

5. 若 $Z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $z_2=\cos\beta+i\sin\beta$ $(0<\alpha<\pi,\ 0<\beta<\pi)$，求复数 z_1+z_2 的模与辐角.

6. 已知 $|z|=2\sqrt{7}$, $\arg(z-4)=\dfrac{\pi}{3}$，求 z.

6.4.3 利用三角形式进行复数的乘法运算

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

即

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]\quad(3)$$

这就是说，**两个复数相乘，积的模等于两复数模的积，积的辐角等于两复数辐角的和**。

注意：若 z_1,z_2 未化为三角形式，是不能使用上述法则的。

例 6.24 设 $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$，$z_2=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，求 $z_1\cdot z_2$

解：

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\&=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)\right]\\&=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{3}+\sqrt{3}i\end{aligned}$$

例 6.25 若 $z_1=2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$, $z_2=\dfrac{3}{2}(\cos 105^\circ+\sin 105^\circ)$，试用几何作图的方法，用从原点出发的向量表示出 $z=z_1\cdot z_2$.

解: 根据 (3) 式，在复平面上先作出表示复数 z_1 的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$（图 6.22)，然后把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 逆时针旋转 105°，并把其模变为原来的 $\dfrac{3}{2}$ 倍，所得到的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 就是表示复数 z 的向量。这就是**复数乘法的几何意义**。

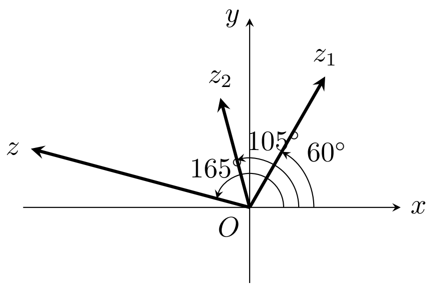


图 6.22

应该注意，当 z_2 的辐角是负角 θ 时，则应该把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 顺时针旋转一个角 $|\theta|$.

例 6.26 设 $\overrightarrow{OZ}$ 表示 $z=-1+i$。若 $\overrightarrow{OZ}$ 逆时针旋转 120°，并伸长为原来的 2 倍得到 $\overrightarrow{OZ_1}$，求 $\overrightarrow{OZ_1}$ 表示的复数 z_1.

解: 根据复数乘法的几何意义，设 $z_1=z\cdot z_0$，其中

$$z_0=2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+\sqrt{3}i$$

$\therefore\quad z_1=z\cdot z_0=(-1+i)\left(-1+\sqrt{3}i\right)=\left(1-\sqrt{3}\right)-\left(1+\sqrt{3}\right)i$

评述: 从这个例子可以看出：欲求 z_1，关键在于根据使 $\overrightarrow{OZ}$ 旋转、拉长的条件正确地构造出“旋转伸缩因子”$z_0=r_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)$. 当旋转方向是逆时针时，$\theta_0>0$，当旋转方向是顺时针时，$\theta_0<0$，而 r_0 则是把 $\overrightarrow{OZ}$ 拉长的倍数。特别地，

(1) 当 $\overrightarrow{OZ}$ 长度不变，逆时针旋转 90° 时，$z_0=$ ________;

(2) 当 $\overrightarrow{OZ}$ 长度不变，顺时针旋转 90° 时，$z_0=$ ________.

例 6.27 如图 6.23 所示，$ABCD$ 是正方形，且已知 A、B 两点分别表示复数 $2-i$ 和 $3+3i$，求 C、D 两点表示的复数。

解: $\because\quad z_{\overrightarrow{OA}}=2-i,\quad z_{\overrightarrow{OB}}=3+3i$

$\therefore\quad z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{OB}}-z_{\overrightarrow{OA}}=(3+3i)-(2-i)=1+4i$

由乘法的几何意义可知

$$z_{\overrightarrow{AD}}=z_{\overrightarrow{AB}}\cdot i=(1+4i)\cdot i=-4+i$$
$$z_{\overrightarrow{AC}}=z_{\overrightarrow{AB}}\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=(1+4i)(1+i)=-3+5i$$

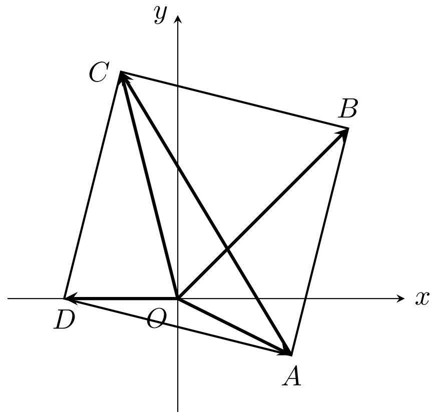


图 6.23

$\therefore$ D 点表示的复数为

$$z_{\overrightarrow{OD}} = z_{\overrightarrow{OA}} + z_{\overrightarrow{AD}} = (2-i) + (-4+i) = -2$$

C 点表示的复数为

$$z_{\overrightarrow{OC}} = z_{\overrightarrow{OA}} + z_{\overrightarrow{AC}} = (2-i) + (-3+5i) = -1+4i$$

评述:

(1) 本题在解决问题过程中，充分利用了复数加、减、乘法运算的几何意义，通过向量间的关系，找到了相关的复数间的关系，这是解决本问题的关键。

(2) 复数乘法的几何意义，对于起点不在原点的向量也同样适用。

(3) 判断向量的终点表示的复数是否是向量表示的复数时，应看向量的起点是否在原点，若向量的起点在原点，则向量终点表示的复数就是向量所表示的复数，否则就不是，这时只需再做一次加法运算就可以了，即加上向量的起点表示的复数。

例 6.28 如图 6.24 所示，平面上有三个并列而全等的正方形，利用复数证明 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \dfrac{\pi}{2}$.

分析: 由复数乘法的几何意义可知，要想利用复数证明 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \dfrac{\pi}{2}$，只需找出三个特定的复数 z_1, z_2, z_3，使它们的辐角依次是 $\angle 1, \angle 2, \angle 3$，那么乘积 $z_1 z_2 z_3$ 的一个辐角就等于 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$，因此只需证明 $z_1 z_2 z_3$ 所得复数的辐角只可能是 $\dfrac{\pi}{2}$ 即可.

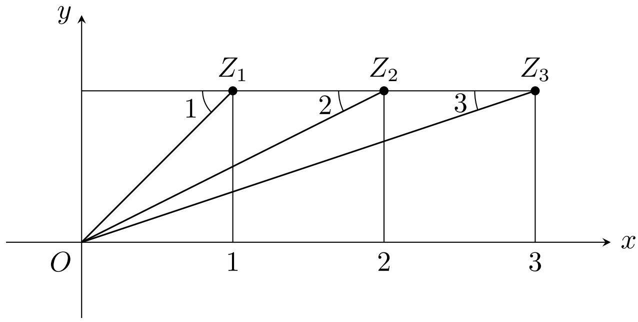


图 6.24

证明：如图 6.24 确定的复平面，利用两条直线平行内错角相等的定理，能使 $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ 分别转化为复数 $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2+i$, $z_3 = 3+i$ 的辐角主值，于是

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3$$

$\because \quad z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = (1+i)(2+i)(3+i) = (1+3i)(3+i) = 10i$

$\therefore \quad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ (*)

又 $\because \quad 0 < \arg z_1 < \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 < \arg z_2 < \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 < \arg z_3 < \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \quad 0 < \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3 < \dfrac{3\pi}{2}$,

$\therefore \quad \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3 = \dfrac{\pi}{2}$, [在 (*) 式中取 $k = 0$].

即 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \dfrac{\pi}{2}$.

例 6.29 利用复数计算 $\arcsin \dfrac{1}{\sqrt{10}} + \arccos \dfrac{5}{\sqrt{26}} + \arctan \dfrac{1}{7} + \operatorname{arccot} 8$

解：我们分别以 $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ 标记上述四个角，不难看出

$$\alpha = \arg(3+i), \quad \beta = \arg(5+i), \quad \gamma = \arg(7+i), \quad \theta = \arg(8+i)$$

由于 $z = (3+i)(5+i)(7+i)(8+i) = 650 + 650i$, 从而

$$\operatorname{Arg} z = \pi + 2k\pi, \ (k \in \mathbb{Z}) \tag{*}$$

但是，由于 $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ 都是锐角，

从而 $0 < \alpha + \beta + \gamma + \theta < 2\pi$.

$\therefore \quad \alpha + \beta + \gamma + \theta = \dfrac{\pi}{4}$（在 (*) 式中，取 $k = 0$）

习题七

A

1. 把下列复数的三角形式写在横线上：

(1) $\cos\theta - i\sin\theta =$ ________

(2) $-(\cos\theta + i\sin\theta) =$ ________

(3) $\sin\theta + i\cos\theta =$ ________

(4) $\sin\theta - i\cos\theta =$ ________

(5) $-\sin\theta - i\cos\theta =$ ________

(6) $-\cos\theta + i\sin\theta =$ ________

2. 计算：

(1) $8\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

(3) $\sqrt{2}(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$

(4) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(5) $\sqrt{10}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(6) $3(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ)\cdot 2(\cos 54^\circ + i\sin 54^\circ)\cdot 5(\cos 108^\circ + i\sin 108^\circ)$

(7) $[2(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)]^3$

(8) $5(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)\cdot 2[\cos(-150^\circ) + i\sin(-150^\circ)]$

(9) $(\cos\theta - i\sin\theta)\cdot(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)$

(10) $(-\cos\theta - i\sin\theta)\cdot(\sin\theta - i\cos\theta)$

3. 在直角坐标系中，已知 $A(1,1)$, $B(2,2)$，求：

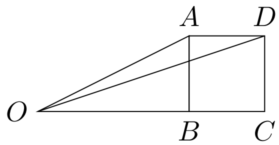
(1) 以 AB 为边的正方形的其余两顶点坐标；

(2) 以 AB 为斜边的等腰直角三角形 ABM 的顶点 M 的坐标。

4. 把与复数 $3-\sqrt{3}i$ 对应的向量按顺时针方向旋转 60°，求与所得的向量对应的复数。

5. 直角三角形 ABC 中，$\angle C = \dfrac{\pi}{2}$，$BC = \dfrac{1}{3}AC$，点 E 在 AC 上，且 $EC = 2AE$，利用复数证明 $\angle CBE + \angle CBA = \dfrac{3\pi}{4}$.

6. 如图 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形，$OB = 2a$，用复数证明 $\angle AOB + \angle DOC = \dfrac{\pi}{4}$。



第 6 题

B

7. 把模相等的两个复数 z_1，z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 分别逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\dfrac{5\pi}{3}$ 后，与向量 $\overrightarrow{OM}$ 重合。已知 $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$, 求 z_1 的代数形式和 $\arg z_1$。

8. 用两种方法证明（或求值）:

   (1) $\arcsin\dfrac{4}{5} + 2\arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{2}$

   (2) $\arctan(-2) + \arctan(-3) = ?$

9. 计算 $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}} + \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{50}} + \arctan\dfrac{7}{31} + \operatorname{arccot} 10$

10. α, β 均为锐角，且 $\tan\alpha = \dfrac{1}{7}$，$\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$，求证 $\alpha + 2\beta = \dfrac{\pi}{4}$.

11. 设 $\arg(1-3i) = \alpha, \arg(3-i) = \beta$，求 $\alpha + \beta$.

6.4.4 利用三角形式进行复数的乘方运算

现在我们研究 n 个复数相乘的问题。

设 $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n$。利用数学归纳法容易证明

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n \left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n\right)\right]$$

特别是当 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$ 时，即

$$r_1 = r2 = \cdots = r_n = r, \qquad \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta$$

代入上式就有

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad (n \in \mathbb{N})$$

这就是说，**复数 z 的 n $(n \in \mathbb{N})$ 次幂，其模等于 z 的模的 n 次幂，其辐角等于 z 的辐角的 n 倍**。这就是著名的**棣莫佛**[①]**定理**。

例 6.30 计算 $\left(\sqrt{3}-i\right)^6$

解： 先把 $\sqrt{3}-i$ 化为三角形式，再利用棣莫佛定理

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-i\right)^6 = \left[2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right] &= 2^6(\cos 11\pi + i\sin 11\pi) \\ &= 64(\cos\pi + i\sin\pi) = 64(-1) = -64\end{aligned}$$

例 6.31 计算

(1) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$ (2) $\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

解：

(1) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

(2) $\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)^3 = \cos 4\pi + i\sin 4\pi = 1$

例 6.32 下列哪种算法是正确的：

算法 1：

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10} &= \left[\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3\right]^3\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) \\ &= 1^3\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

算法 2：

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10} = \left[\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^8\right]^{\frac{10}{8}} = 1^{\frac{10}{8}} = 1$$

[①]棣莫佛（Abraham de Moivre）1667–1754 年，法国数学家.

解：算法 1 是正确的。这说明在复数集中 $(z^n)^m = 2^{mn}$， $m,n \in \mathbb{Z}$，而 m，n 不能为分数。

例 6.33 若 $z = \left(1+\sqrt{3}i\right)^n$，当 n 为哪些正整数时 $z \in \mathbb{R}$.

解： $z = \left(1+\sqrt{3}i\right)^n = \left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^n = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{3} + i\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\frac{n\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

$\therefore$ $n = 3k\ (k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N})$

$\therefore$ 当 n 为 $3k\ (k \in \mathbb{N})$ 时，$z \in \mathbb{R}$.

例 6.34 计算 $(1+i\tan\theta)^n$，其中 $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$

解：记 $z = 1+i\tan\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) = \dfrac{-1}{\cos\theta}\left[\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)\right]$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad z^n &= \frac{(-1)^n}{\cos^n\theta}\left[\cos(n\pi+n\theta) + i\sin(n\pi+n\theta)\right] \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^n\theta}(\cos n\theta + i\sin n\theta), & n\text{为偶数} \\ \dfrac{-1}{\cos^n\theta}\left[\cos(\pi+n\theta) + i\sin(\pi+n\theta)\right], & n\text{为奇数} \end{cases}
\end{aligned}$$

例 6.35 求证：两个互为共轭的复数，其 n 次幂仍为共轭复数 $(n \in \mathbb{N})$

证明：设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$， $\bar{z} = r\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$

$$\begin{aligned}
z^n &= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \\
\bar{z}^n &= r^n\left[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right] = r^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)
\end{aligned}$$

$\therefore$ z^n 与 $\bar{z}^n$ 仍为共轭复数.

例 6.36 利用复数证明：

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \qquad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

证明：设 $z = \cos\theta + i\sin\theta$，一方面，由棣莫佛定理得

$$z^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

另一方面，由乘法公式得

$$z^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta$$

比较以上两式，得

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

习题八

A

1. 计算:

(1) $[3(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ)]^5$

(2) $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6$

(3) $[3(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)]^6$

(4) $[2(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)]^6$

(5) $(1-i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7$

(6) $(1-i)^{10}$

(7) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^4$

(8) $\left(2-2\sqrt{3}i\right)^4$

2. 计算:

(1) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{101}$

(2) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{101}$

B

3. 设 $z = \left(-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\right)^n$，当 n 为哪些正整数时，$z \in \mathbb{R}$.

4. 求证: $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$，当 n 为正偶数时，值为 ± 2 或 0；当 n 为正奇数时，值为 $\pm\sqrt{2}$.

5. 用复数证明三倍角公式:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

6. 计算

(1) 若 $2\pi < \theta < 3\pi$，计算 $(1+\cos\theta + i\sin\theta)^n$

(2) $(\tan\theta + i)^5$

6.4.5 利用三角形式进行复数的除法运算

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，$z_2\neq 0$. 根据 6.3 节复数除法的定义，有

$$\begin{aligned}z_1\div z_2=\frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}\\&=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}\\&=\frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\left[\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)\right]\\&=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]\end{aligned}$$

即

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

这就是说，**两个复数相除，商的模等于被除数与除数模的商，商的辐角等于被除数与除数辐角的差**。

例 6.37 计算：$4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)\div 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

解：

$$\begin{aligned}\text{原式}=\frac{4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)}&=2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right]\\&=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2(0+i)=2i\end{aligned}$$

例 6.38 计算：$\dfrac{(\sin\theta-i\cos\theta)^2\cdot(-\cos\theta+i\sin\theta)^3}{(\cos\theta-i\sin\theta)^4}$

分析：须先化成三角形式再乘、除. 原式为：

$$\begin{aligned}&\frac{\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)\right]^2\cdot\left[\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)\right]^3}{\left[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right]^4}\\&=\frac{\left[\cos(3\pi+2\theta)+i\sin(3\pi+2\theta)\right]\left[\cos(3\pi-3\theta)+i\sin(3\pi-3\theta)\right]}{\cos(-4\theta)+i\sin(-4\theta)}\\&=\frac{\cos(6\pi-\theta)+i\sin(6\pi-\theta)}{\cos(-4\theta)+i\sin(-4\theta)}\\&=\cos(6\pi+3\theta)+i\sin(6\pi+3\theta)=\cos 3\theta+i\sin 3\theta\end{aligned}$$

例 6.39 设 $z_1=6\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$，$z_2=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，试用几何作图的方法，用起点在原点的向量表示 $z=z_1\div z_2$

解: 先作出表示 z_1,z_2 的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$（图 6.25），然后把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 顺时针旋转 $\dfrac{\pi}{4}$，再把它的模缩为原来的 $\dfrac{1}{2}$，所得向量 $\overrightarrow{OZ}$ 表示 $z_1\div z_2$. 这就是**复数除法的几何意义**。这里应特别注意:

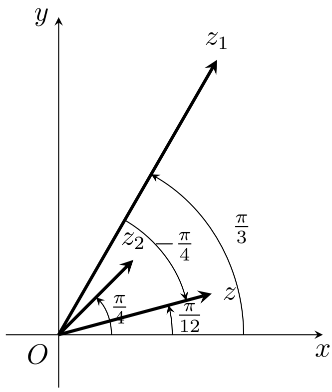


图 6.25

$$\text{商的模}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}$$

（这提供了求两复数模的比的有效方法）

$$\text{商的辐角}=\theta_1-\theta_2$$

（这提供了求向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 夹角的方法）

例 6.40 已知：$z=\dfrac{(3-4i)^2\cdot(\sqrt{3}+i)^4}{(1+i)^6}$，求 $|z|$.

分析: 若将 z 算出，再求 $|z|$ 显然很繁。可直接根据 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, $|z^n|=|z|^n$ 去做.

解: $|z|=\left|\dfrac{(3-4i)^2\cdot(\sqrt{3}+i)^4}{(1+i)^6}\right|=\dfrac{|3-4i|^2\cdot\left|\sqrt{3}+i\right|^4}{|1+i|^6}=\dfrac{5^2\cdot 2^4}{\left(\sqrt{2}\right)^6}=50$

例 6.41 若 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 分别表示复数 $z_1=1+2\sqrt{3}i$, $z_2=7+\sqrt{3}i$（图 6.26），求 $\angle Z_2OZ_1$ 并判断 $\triangle OZ_1Z_2$ 的形状。

分析: 利用复数除法的几何意义求向量的夹角是比较简捷的。

解: 欲求 $\angle Z_2OZ_1$，可算

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+\sqrt{2}i}{7+\sqrt{3}i}&=\frac{\left(1+2\sqrt{3}i\right)\left(7-\sqrt{3}i\right)}{\left(7+\sqrt{3}i\right)\left(7-\sqrt{3}i\right)}\\&=\frac{13+13\sqrt{3}i}{52}=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

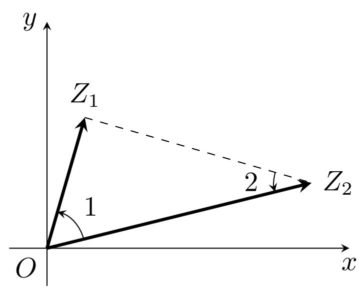


图 6.26

$\therefore \quad \angle Z_2OZ_1 = \dfrac{\pi}{3}$ 且 $|\overrightarrow{OZ_1}| : |\overrightarrow{OZ_2}| = 1:2$

设 $|OZ_1| = k, \quad |OZ_2| = 2k\ (k>0)$，由余弦定理

$$\begin{aligned}|Z_1Z_2|^2 &= k^2 + (2k)^2 - 2k\cdot 2k\cos 60^\circ = 3k^2\\ |Z_1Z_2| &= \sqrt{3}k\end{aligned}$$

而 $k^2 + \left(\sqrt{3}k\right)^2 = (2k)^2 \Rightarrow |OZ_1|^2 + |Z_1Z_2|^2 = |OZ_2|^2$

$\therefore \quad \triangle OZ_1Z_2$ 是有一个锐角为 60° 的直角三角形.

例 6.42 如图 6.27，在复平面 xOy 上若点 A, B 表示的复数是 $\alpha, \beta\ (\alpha \neq 0)$，且 $\beta - (1+i)\alpha = 0$，判断 $\triangle AOB$ 的形状，并证明它的面积 $S = \dfrac{1}{2}|\alpha|^2$

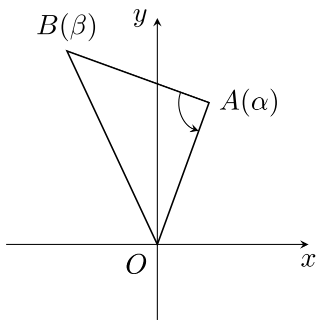


图 6.27

解：解法 1：

$$\begin{cases}\alpha \neq 0\\ \beta - (1+i)\alpha = 0\end{cases} \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$\therefore \quad \angle AOB = \dfrac{\pi}{4}$.

再去计算 $\angle OAB$：$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ 分别表示复数 $\alpha, \beta - \alpha$，由

$$\beta - \alpha = \alpha i \Rightarrow \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$\therefore \quad \angle OAB = 90^\circ$. 从而 $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形.

解法 2：

$$\begin{cases}|\overrightarrow{OA}| = |\alpha|\\ |\overrightarrow{AB}| = |\beta - \alpha| = |\alpha i| = |\alpha|\end{cases} \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}|$$

而

$$\begin{cases} |\overrightarrow{OB}| = |\beta| = |(1+i)\alpha| = \sqrt{2}|\alpha| \\ |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 = |\alpha|^2 + |\alpha|^2 = 2|\alpha|^2 \end{cases} \quad \Rightarrow |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2$$

$\therefore$　$\triangle AOB$ 是等腰直角三角形.

由上，$S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{AB}| = \dfrac{1}{2}|\alpha|^2$

习题九

A

1. 计算:

(1) $12\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right) \div 3\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$

(2) $\sqrt{3}(\cos 150° + i\sin 150°) \div \sqrt{2}(\cos 225° + i\sin 225°)$

(3) $2 \div \left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(4) $-i \div 2(\cos 120° + i\sin 120°)$

2. 计算:

(1) $10\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) \div 5\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

(2) $12\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right) \div 6\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

3. (1) 求证: $\dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

(2) 写出下列复数 z 的倒数 $\dfrac{1}{z}$ 的模与辐角的主值:

$$z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right), \quad z_2 = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}, \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

4. 计算: $\dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^6\left(\cos\dfrac{\phi}{2} + i\sin\dfrac{\phi}{2}\right)^8}{\sin\phi - i\cos\phi}$

5. 化简:

(1) $\dfrac{(\cos 7\theta + i\sin 7\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}{(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)}$

(2) $\dfrac{\cos\phi - i\sin\phi}{\cos\phi + i\sin\phi}$

6. 计算:

(1) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^5}{-1+\sqrt{3}i}$ (2) $\left(\dfrac{2+2i}{1-\sqrt{3}i}\right)^3$

7. (1) 已知 $z=\dfrac{(4-3i)^2\cdot(-1+\sqrt{3}i)^{10}}{(1-i)^{12}}$，求 $|z|$.

(2) 已知 $z=\dfrac{(\sin\theta+i\cos\theta)^2\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)^3}{(\sin\theta-i\cos\theta)^4}$，求 $|z|$.

(3) 已知 $z=\dfrac{\sin\theta-i\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{2}\sin\theta+i\cos\theta}$，求证：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant|z|\leqslant\sqrt{2}$.

B

8. 复平面内 $\triangle OAB$ 的三个顶点 O、A、B 分别对应复数 0，α，β，已知 α,β 满足 $\beta+(1-i)\alpha=0$，且 $|\alpha-3|=1$，设 $\triangle OAB$ 的面积为 S，

(1) 求证：$S=\dfrac{1}{2}|\alpha|^2$

(2) 求 S 的最大值与最小值。

9. 复数 $z_1\cdot z_2\neq0$，且 $4z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$，若 z_1,z_2 对应点 A、B. 试判断 $\triangle OAB$ 的形状，当 $|z_1|=r$ 时，求 $\triangle OAB$ 的面积。

10. 若 $n\in\mathbb{N}$，求使 $\left(\dfrac{3}{3+\sqrt{3}i}\right)^n$ 为实数的最小的 n。

6.4.6 利用三角形式进行复数的开方运算

先给出方根的定义与开方的意义：

(1) 若 $\delta^n=z$ ($n\in\mathbb{N}$，且 $\delta,z\in\mathbb{C}$)，称 δ 为**复数 z 的 n 次方根**；

(2) 求 z 的 n 次方根的运算称为**把 z 开 n 次方**。

顺便提一下，为了不引起混乱，在中学阶段 z 开 n 次方的运算不引入符号，而只有非负实数的算术根才用符号表示，如 $\sqrt[n]{r}$ 表示非负实数 r 的 n 次算术根.

现在，我们利用三角形式求复数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 次方根。

设 $\delta=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$ 是 z 的 n 次方根，则 $\delta^n=z$，即

$$\rho^n[\cos(n\phi)+i\sin(n\phi)]=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

由复数相等的定义，得

$$\begin{cases}\rho^n=r\\ n\phi=\theta+2k\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r}\\ \phi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

$$\therefore \quad \delta = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad (k\in\mathbb{Z}) \qquad (*)$$

上式中，当 k 取 $0,1,\ldots,n-1$ 各值时，就可以得到上式的 n 个值。当 k 取 n 时，辐角 $\dfrac{\theta}{n}+2\pi$ 的终边与 k 取 0 时，辐角 $\dfrac{\theta}{n}$ 的终边重合；当 k 取 $n+1$ 时，辐角 $\dfrac{\theta}{n}+\dfrac{2\pi}{n}+2\pi$ 的终边与 k 取 1 时，辐角 $\dfrac{\theta}{n}+\dfrac{2\pi}{n}$ 的终边重合；……。即当 k 取 n，$n+1$ 以及其他各个整数时，又重复出现 k 取 $0,1,\ldots,n-1$ 时的结果，所以，复数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 次方根是

$$\delta = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \quad (k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

这就是说：复数的 n $(n\in\mathbb{N})$ 次方根是 n 个复数，它们的模都等于这个复数的模的 n 次算术根，它们的辐角分别等于这个复数的辐角与 2π 的 $0,1,\ldots,n-1$ 倍的和的 n 分之一。

例 6.43 设 a 为正实数时，求 $-a$ 的平方根。

解： $\because \quad -a = a(\cos\pi+i\sin\pi)$

$\therefore \quad -a$ 的平方根是 $\sqrt{a}\left(\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{2}\right) \quad (k=0,1)$

即 $-a$ 的平方根是下面两个复数：

$$\sqrt{a}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right), \quad \sqrt{a}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

即 $\sqrt{a}i$，$-\sqrt{a}i$.

说明： 从例 6.43 可以看出，负数 $-a$ $(a>0)$ 的平方根是 $\pm\sqrt{a}i$.

例 6.44 求 $1-i$ 的四次方根.

解： $\because \quad 1-i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$

$\therefore \quad 1-i$ 的四次方根是

$$\begin{aligned}&\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)\\ =\ &\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)\right] \quad (k=0,1,2,3)\end{aligned}$$

即 $1-i$ 的四次方根是下面四个复数：

$$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right), \qquad \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16}+i\sin\frac{15\pi}{16}\right)$$

$$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16}+i\sin\frac{23\pi}{16}\right), \qquad \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{16}+i\sin\frac{31\pi}{16}\right)$$

说明：

(1) $1-i$ 的四次方根的四个复数辐角分别为 $\dfrac{7\pi}{16},\dfrac{15\pi}{16},\dfrac{23\pi}{16},\dfrac{31\pi}{16}$，它们组成一个等差数列，其首项为 $\dfrac{7\pi}{16}$，公差为 $\dfrac{\pi}{2}$.

一般来说，复数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 次方根是 n 个复数，它们的模都等于 $\sqrt[n]{r}$，它们的辐角组成一个等差数列，其首项为 $\dfrac{\theta}{n}$，公差为 $\dfrac{2\pi}{n}$.

据此，复数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 次方根的几何意义是复平面上的 n 个点，这 n 个点均匀分布在以原点为圆心，以 $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆上，组成一个正 n 边形。

(2) $1-i$ 的四次方根还可以写成下面的形式

$$\begin{aligned}
&\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right)\\
&\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)\right]\\
=&\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\\
&\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\times 2\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\times 2\right)\right]\\
=&\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^2\\
&\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\times 3\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\times 3\right)\right]\\
=&\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^3
\end{aligned}$$

不难看出这四个复数构成一个等比数列,其首项为 $\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{16}+i\sin\dfrac{7\pi}{16}\right)$，公比为 $\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

一般来说，复数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 个 n 次方根，组成一个等比数列，其首项为 $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta}{n}+i\sin\dfrac{\theta}{n}\right)$，公比为 $\left(\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

如果求一下这 n 个 n 次方根的和，会发现这个和恒为零（请同学们自己计算一下）.

例 6.45 解方程 $x^3=1$.

分析： 这里 x 就是 1 的立方根，可用开立方的办法求解.

解： $\because \quad 1=\cos 0+i\sin 0$

$\therefore \quad 1$ 的立方根是 $\cos\dfrac{2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{2k\pi}{3}\ (k=0,1,2)$，即

$$\cos 0+i\sin 0=1$$
$$\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

说明： 习惯上用 ω 表示 1 的一个立方虚根 $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ，此时另一个立方虚根 $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 可记为 $\bar{\omega}$. 复数 ω 有如下特征:

(1) $|\omega|=|\bar{\omega}|=1$

(2) $\omega\cdot\bar{\omega}=1$，即 $\omega,\bar{\omega}$ 互为倒数

(3) $\omega^2=\bar{\omega}$，$(\bar{\omega})^2=\omega$

(4) $1+\omega+\omega^2=0$

(5) $\omega^{3n}=1$，$\omega^{3n+1}=\omega$，$\omega^{3n+2}=\omega^2\ (n\in\mathbb{N})$；即 ω 的乘方运算具有周期性.

例 6.46 计算 z^{100}:

(1) $z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　　　(2) $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

解:

(1) $\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}=(\omega^2)^{100}=\omega^{200}=\omega^{66\times 3+2}=\omega^2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(2) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}=(-\omega)^{100}=\omega^{100}=\omega^{33\times 3+1}=\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

例 6.47 求 $3-4i$ 的平方根。

分析： 由于复数 $3-4i$ 的辐角不是特殊角，所以利用复数三角形式求它的平方根比较繁。可根据平方根的定义利用复数的代数形式直接求它的平方根。

解： 设 $3-4i$ 的平方根是 $x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$, 则 $(x+yi)^2=3-4i$, 即

$$x^2-y^2+2xyi=3-4i$$

根据复数相等的条件可得

$$\begin{cases} x^2+y^2=3, & (1) \\ 2xy, & (2) \end{cases}$$

$(1)^2+(2)^2$ 得：$(x^2+y^2)^2=25$

$\therefore \quad x^2+y^2=5 \qquad (3)$

解 (1)(3) 组成的方程组得：$\begin{cases} x^2=4 \\ y^2=1 \end{cases}$

由 (2) 可知 $xy<0$，

$\therefore \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

故 $3-4i$ 的平方根为 $\pm(2-i)$.

习题十

A

1. (1) 说出下列各数的平方根：

$$-9, \quad -2.89, \quad -m^2\ (m\in\mathbb{R}^+), \quad a-b\ (a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$$

(2) 说出下列各数的立方根：-1, 8, -27, 64, -125

(3) 说出下列各数的平方根：$2i$, $-2i$

2. 在复数集 $\mathbb{C}$ 中解下列方程：

(1) $9x^2+16=0$

(2) $-3x^2=5$

(3) $x^2=-i$

(4) $x^2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

3. 求 -16 的四次方根。

4. 在复数集 $\mathbb{C}$ 中解下列方程，并把方程的根表示在复平面上：

(1) $x^3-27=0$

(2) $x^3+1=0$

(3) $x^4-16=0$

(4) $x^4+1=0$

5. 求 1 的六次方根 δ，并化简 $1+\delta+\delta^2+\delta^4+\delta^6+\delta^8+\delta^{10}$（其中 $\delta\neq\pm1$）

6. 求:

(1) $8(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$ 的六次方根;

(2) $-i$ 的五次方根.

B

7. 利用方根的性质计算:

(1) $\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}$　　(2) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}$　　(3) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^{100}$

8. 若 $f(x)=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n+\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$

求证:当 n 是 3 的整数倍时,$f(n)=2$;当 n 不是 3 的整数倍时,$f(n)=-1$.

9. 设 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，求 $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{10}$ 的值（用两种解法）。

10. 设 $z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$，求 $1+z^4+z^8+z^{12}+z^{16}$ 的值。

11. 方程 $x^2+x+1=0$ 的两根为 α，β，求 $\alpha^{100}+\beta^{100}$ 的值。

12. 方程 $x^3+x^2+x+1=0$ 的两虚数根为 α，β，求 $\alpha^{100}+\beta^{100}$ 的值

13. 设 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，求证

(1) $1+\omega^n+\omega^{2n}=\begin{cases}3, & n=3k\\ 0, & n\neq 3k\end{cases}\quad(k\in\mathbb{N})$

(2) $(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n=2\cos\dfrac{n\pi}{3}\quad(n\in\mathbb{N})$

14. 求下列各复数的平方根:

(1) $5+12i$

(2) $-21-20i$

(3) $8-6i$

(4) $-12+16i$

6.5 复数的简单应用

6.5.1 复数与方程

一元一次方程

如 $(5z-1)i+3z-2i=0$. 其解法像解实系数一元一次方程一样。

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$

1. $a,b,c\in\mathbb{R}$

   (1) 判别式定理：记 $\Delta=b^2-4ac$,

   (a) $\Delta>0 \iff$ 方程有不等二实根；

   (b) $\Delta=0 \iff$ 方程有相等二实根；

   (c) $\Delta<0 \iff$ 方程有共轭二虚根。

   对于（c），方程可写成：

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

   $\because \quad \Delta<0$，有

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

   $\therefore \quad x+\dfrac{b}{2a}=\pm\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}}i$，从而 $x=\dfrac{-b}{2a}\pm\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}}i$

   这就是说，实系数一元二次方程当 $\Delta<0$ 时，将出现两个共轭虚根。

   (2) 求根公式：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \Delta\geqslant 0\text{时}$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}i}{2a} \qquad \Delta<0\text{时}$$

   (3) 韦达定理（略）.

2. $a,b,c\in\mathbb{C}$

   (1) 判别式定理不成立。

   (2) 求根公式：$x=\dfrac{-b\pm\delta}{2a}$，$\delta$ 是 b^2-4ac 的一个平方根。

   (3) 韦达定理（略）。

例 6.48 解方程 $2x^2-4x+3=0$

解: $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot2\cdot3=-8$

-8 的平方根是 $2\sqrt{2}i$ 或 $-2\sqrt{2}i$

$$x=\frac{-b\pm\delta}{2a}=\frac{4\pm2\sqrt{2}i}{2\cdot2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$\therefore\quad x_1=1+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\quad x_2=1-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

例 6.49 解方程 $x^2-(5-3i)x+(4-7i)=0$

解: $\Delta=b^2-4ac=(5-3i)^2-4\cdot1\cdot(4-7i)=25-30i-9-16+28i=-2i$

$-2i$ 的平方根是 $(1-i)$ 或 $-(1-i)$

$$x=\frac{-b\pm\delta}{2a}=\frac{(5-3i)\pm(1-i)}{2}$$

$\therefore\quad x_1=3-2i,\quad x_2=2-i$

例 6.50 解方程 $2x^2-6ix-6=0$

解: $\Delta=b^2-4ac=(-6i)^2-4\cdot2\cdot(-6)=12$

$\therefore\quad x=\frac{6i\pm2\sqrt{3}}{2\cdot2}=\frac{3i\pm\sqrt{3}}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

评述: 此例中 $\Delta>0$，但有两个虚根，可见判别式定理已不成立.

例 6.51 关于 x 的方程 $x^2-(2i-1)x+3m-i=0\ (m\in\mathbb{R})$，有实根，求这个实根及实数 m 的取值范围。

分析: 这是复系数方程，已经不能用判别式确定有实根的条件。若用求根公式也较繁。我们用复数为零的充要条件来做。

解: 设 x_0 是方程的实根，则

$$x_0^2-(2i-1)x_0+3m-i=0$$
$$(x_0^2+x_0+3m)-(2x_0+1)i=0$$

$\because\quad x_0,m\in\mathbb{R}$

$\therefore\quad \begin{cases}x_0^2+x_0+3m=0\\ 2x_0+1=0\end{cases}$

解之，得：$x_0=-\frac{1}{2},\quad m=\frac{1}{12}$

$\therefore\quad$ 方程的实根是 $-\frac{1}{2}$，实数 $m=\frac{1}{12}$.

二项方程

形如 $a_nx^n + a_0 = 0$ $(a_0, a_n \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N})$ 的方程称为**二项方程**。任何一个二项方程都可以化成

$$x^n = b \quad (n \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{C})$$

的形式，因此，都可以通过复数开方求出它的根。

含有 z，$\bar{z}$，$|z|$ 的方程

这类方程由于遇到共轭复数与复数的模，因此必须区分复数的实部和虚部，所以解这类方程应先设 $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$，然后利用复数相等的条件转化为二元方程组解决。

例 6.52 设 $z \in \mathbb{C}$，解方程 $|z| + 2\bar{z} = 3 - 6i$

解： 设 $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$，原方程化为

$$\sqrt{x^2 + y^2} + 2(x - yi) = 3 - 6i$$

即：$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + 2x\right) - 2yi = 3 - 6i$

根据复数相等的条件得

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + 2x = 3 \\ 2y = 6 \end{cases}$$

解此方程组，得 $x = 0,\ y = 3$（$x = 4,\ y = 3$ 是增根，舍去）.

$\therefore$ 原方程的解是 $3i$.

例 6.53 解方程 $\bar{z}^3 = z$.

分析： 三次方程解起来比较困难，但考虑到 $|\bar{z}| = z$，可复复数相等则模一定相等的道理，以达到降次的目的.

解： 在方程两边取模，得

$$|\bar{z}^3| = |z| \Leftrightarrow |\bar{z}|^3 = |z| \Leftrightarrow |z|^3 - |z| = 0$$

$\therefore$ $|z|\left(|z|^2 - 1\right) = 0$

解之得 $|z| = 0$ 或 $|z| = 1$

1. 当 $|z| = 0$ 时，$z_1 = 0$

2. 当 $|z|=1$ 时，令 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，代入原方程，得

$$\cos 3\theta - i\sin 3\theta = \cos\theta + i\sin\theta$$

即 $\cos(-3\theta)+i\sin(-3\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$

根据复数相等的条件，得：$-3\theta+2k\pi=\theta$

$\therefore \quad \theta=\dfrac{\pi}{2}\cdot k \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\therefore \quad z_2=1,\ z_3=-1,\ z_4=i,\ z_5=-i$

从而原方程有五个根：$0,\quad \pm 1,\quad \pm i$.

习题十一

A

1. 解方程：

(1) $(x-2)i=\dfrac{i-x}{2}$ (2) $(2-i)(x-3i)=\dfrac{5(x-1)}{3}$

2. 解方程：

(1) $x^2+x+6=0$

(2) $18x^2-42x+29=0$

(3) $x^2-ix+6=0$

(4) $x^2-4x+(4-2i)=0$

(5) $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$

(6) $x^{12}+63x^6-64=0$

3. (1) 求方程 $(1+i)x^2-(1-i)x-(2+6i)=0$ 的实根;

(2) 关于 x 的方程 $(1+i)x^2+(p+4i)x+pi+4=0\ (p>0)$ 有实根，求实数 p 和这个实根.

4. 解方程和方程组：

(1) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x}=1$

(2) $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{5}{2}$

(3) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=2 \end{cases}$

5. 在实数集中分解因式：

(1) x^2+5

(2) $2x^2-6x+5$

(3) $x^2-2x\cos\alpha+1$

(4) x^6-1

6.（选择题）非零复数 z_1，z_2 在复平面上分别对应点 Z_1、Z_2, O 为原点。若 $z_1^2+z_2^2=0$，则

(A) O, Z_1, Z_2 在一条直线上。

(B) $\triangle OZ_1Z_2$ 是一等边三角形，

(C) $\triangle OZ_1Z_2$ 是直角三角形，

(D) 满足题意的 Z_1, Z_2 不存在。

7. 解方程：

(1) $(x+2)^3=(1-i)^3$

(2) $(1+i)^x=(1-i)^x$

（提示：可变成二项方程）

8. 解关于 x, y $(x, y\in\mathbb{R})$ 的方程：

(1) $x^2+xi+2-3i=y^2+yi+9-2i$

(2) $2x^2-5x+3+(y^2+y-6)i=0$

(3) $\dfrac{x}{1-i}+\dfrac{y}{1-2i}=\dfrac{5}{1-3i}$

9. 解方程：

(1) $|x|-\bar{x}=1+2i$

(2) $z+|\bar{z}|=2+i$

(3) $z^2=\bar{z}$

(4) $2x+|x|=2+6i$

(5) $z+z^{-1}=1$

B

10. 已知 $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$，求证 $x^n+\dfrac{1}{x^n}=2\cos n\theta$ $(n\in\mathbb{N})$。

11. 已知方程 $x^2+x+p=0$ 的两个虚根为 α，β，且 $|\alpha-\beta|=3$, 求实数 p。

12. 已知复数 z 满足 $\left|\dfrac{z-1}{z}\right|=\dfrac{1}{2}$, $\arg\dfrac{z-1}{z}=\dfrac{\pi}{3}$, 求 z。

13. 设 $p, q\in\mathbb{R}$，关于 x 的方程 $x^2+2(p-q)x+2(p^2+q^2)=0$ 有虚根，且这个根的平方是实数，求 $\dfrac{p}{q}$ 的值。

14. 若 $z\in\mathbb{C}$, 关于 x 的方程 $x^2-zx-2(1-i)=0$ 有实根，求 $|z|$ 的最小值。

6.5.2　复数的共轭与模

共轭复数的性质

互为共轭的两个复数 $z=a+bi$、$z=a-bi$ 具有许多重要的性质，概括如下：

1. 几何性质：点 $A(z)$ 与 $B(z)$ 关于实轴对称 $\Rightarrow |z|=|\bar{z}|$ 且它们的辐角互为相反数。

2. 代数性质：

   (1) $z+\bar{z}=2a, \quad z-\bar{z}=2bi$

   (2) $z\cdot\bar{z}=|z|^2$，特别是：$|z|=1 \Leftrightarrow z$ 与 $\bar{z}$ 互为倒数

   (3) $\bar{\bar{z}}=z$

   (4) $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z}=z$

   (5) z 为纯虚数 $\Leftrightarrow z\neq 0$ 且 $\bar{z}=-z$

3. 运算性质：

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2, \qquad \overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2 \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

复数的模的性质

复数 $z=a+bi$ 的模也有许多重要性质：

1. 定义与几何意义：向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模称为复数 z 的模（图 6.15），即

$$|z|=|\overrightarrow{OZ}|=r=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow |z|\geqslant 0$$

   $|z|$ 表示点 $Z(a,b)$ 到原点的距离 $r\Rightarrow |z-z_0|=r\ (r>0)$ 表示一个圆。

2. 运算性质：

   - $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2| \xrightarrow{\text{推广}} \begin{cases} |z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdots z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdots|z_n| \\ |z^n|=|z|^n\neq z^n \end{cases}$
   - $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|} \quad (|z_2|\neq 0)$
   - $\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant |z_1\pm z_2|\leqslant |z_1|+|z_2|$

例 6.54 设 $|z|=1$，且 $z\neq\pm i$，求证 $f(z)=\dfrac{z}{1+z^2}\in\mathbb{R}$.

分析： 这个题属于附条件的证明（或求值）题，要解这类题从根本上说必须抓好：

1. 从条件出发，能得到哪些必要条件–这是对条件的全面地深入地分析；
2. 从结论看，能找出它的哪些充分条件–这是进一步确立解题目标。

弄清了这两点，解题途径就多了。具体到此题，由 $|z|=1$ 且 $z\neq\pm i$ 能得到的必要条件是：

(1) 可设 $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$，则 $a^2+b^2=1$ 且 $a\neq 0$,

(2) 可设 $z=\cos\theta+i\sin\theta,\ \theta\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$;

(3) 从几何上看，点 z 在单位圆上运动，且 $z\neq\pm i$;

(4) $z\cdot\bar{z}=|z|^2=1\qquad\therefore\quad z$ 与 $\bar{z}$ 互为倒数。

由结论能够考虑到的充分条件是：

(1) 若 $f(z)$ 的虚部为零；

(2) 若有 $\overline{f(z)}=f(z)$;

(3) 若分子的辐角等于分母的辐角；

(4) 若 $\dfrac{1}{f(z)}$ 为实数。

我们只要分别在两组条件之间“搭上桥”，就能获得证明途径。

证明： **证法 1：** 计算 $\overline{f(z)}=\overline{\left(\dfrac{z}{1+z^2}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$，由已知条件

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2=1\Rightarrow\bar{z}=\frac{1}{z}$$

代入上式得

$$\overline{f(z)}=\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}=\frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z^2}}=\frac{z}{z^2+1}=f(z)$$

$\therefore\quad f(z)$ 是实数

证法 2： 利用 $z\cdot\bar{z}=|z|^2=1$，知 $z\neq 0$，代入 $f(z)$ 有

$$f(z)=\frac{z}{1+z^2}=\frac{2}{z\cdot\bar{z}+z^2}=\frac{z}{z(z+\bar{z})}=\frac{1}{z+\bar{z}}=\frac{1}{2a}$$

（设 $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$，则 $z+\bar{z}=2a$）

$\therefore\quad f(z)$ 是实数

证法 3：$\because\quad z\cdot\bar{z}=1\qquad\therefore\quad z\neq 0$

考虑 $\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{1+z^2}{z}=\dfrac{1}{z}+z=\bar{z}+z=2a\in\mathbb{R}$（设 $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$）

$\therefore\quad f(z)$ 是实数

证法 4：用三角形式（留给读者）。

评述：这题的"分析"写得较详尽，为的是强调"双向"发散思维的方法。这是解题的一个基本功。

例 6.55 若 $z=\cos\theta+i\sin\theta$, $(0\leqslant\theta<2\pi)$，求 θ 为何值时，$1-i+z$ 的模取得最大值与最小值，并求这个最大值和最小值.

分析：这是计算复数的模的最大（小）值的问题。

解：**解 1**：（用模的定义）

$$\begin{aligned}|1-i+\cos\theta+i\sin\theta|&=|(1+\cos\theta)+(\sin\theta-1)i|\\&=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(\sin\theta-1)^2}\\&=\sqrt{3+2(\cos\theta-\sin\theta)}\\&=\sqrt{3+2\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\end{aligned}$$

$\because\quad\theta\in[0,2\pi)$

$\therefore\quad$ 当 $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$，即 $\theta=\dfrac{7\pi}{4}$ 时，有 $|1-i+z|_{\max}=\sqrt{2}+1$；当 $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$，即 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ 时，有 $|1-i+z|_{\min}=\sqrt{2}-1$.

解 2：把 $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R},\ x^2+y^2=1)$ 代入 $|1-i+z|$ 也可求解（请同学们自己完成）。

解 3：（用三角不等式）由于有

$$\big||1-i|-|z|\big|\leqslant|1-i+z|\leqslant|1-i|+|z|$$

从已知条件知道 $|z|=1$，代入上式得

$$\sqrt{2}-1\leqslant|(1-i)+z|\leqslant\sqrt{2}+1$$

当 $1-i$ 与 z 对应的向量同向时，第二个等号成立，即 $\arg z=\dfrac{7\pi}{4}$ 时，$|1-i+z|$ 有最大值 $\sqrt{2}+1$;

当 $1-i$ 与 z 对应的向量反向时，第一个等号成立，即 $\arg z=\dfrac{3\pi}{4}$ 时，$|1-i+z|$ 有最小值 $\sqrt{2}-1$.

解 4:（把复数的模看作两点间的距离）

记 $d = |1 - i + z| = |z - (-1 + i)|$，看作是复平面上表示复数 $(-1 + i)$ 和复数 z 的两点间的距离（图 6.28），此时，表示 z 的点在单位圆上运动。很明显，只有当点 $(-1 + i)$，点 Z 和点 O 共线时，d 才能取得最大、最小值（以下略）。

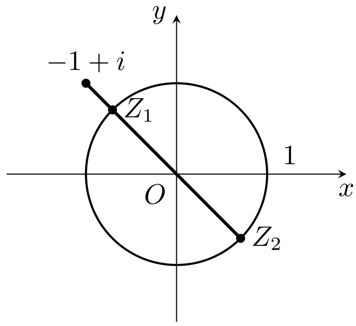


图 6.28

解 5:（利用 $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$) 考虑

$$|z + 1 - i|^2 = (z + 1 - i) \cdot \overline{(z + 1 - i)}$$

$\because \quad z = \cos\theta + i\sin\theta$，代入上式有

$$\begin{aligned}|z + 1 - i| &= [(1 + \cos\theta) + (-1 + \sin\theta)i][(1 + \cos\theta) - (-1 + \sin\theta)i] \\ &= (1 + \cos\theta)^2 + (1 - \sin\theta)^2 \\ &= 3 + 2(\cos\theta - \sin\theta)\end{aligned}$$

（以下同解 1）

评述: 解法 1 与 2 是利用模的定义，解法 3、5 是利用模的性质，解法 4 是利用模的几何意义，解法 5 则别开生面。

例 6.56 若 $|z| = 1$，当 z 为何值时，$|z^2 - z + 1|$ 能取到最大（小）值。

解: 由 $|z| = 1$ 知 $z \cdot \bar{z} = 1$.

设 $z = a + bi\ a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|z^2 - z + 1| = |z^2 - z + 1| \cdot |\bar{z}| &= |z^2 \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{z} + \bar{z}| \\ &= |z - 1 + \bar{z}| = |2a - 1|\end{aligned}$$

$\because \quad |z| = 1 \Rightarrow -1 \leqslant a \leqslant 1$

$\therefore \quad |2a - 1|_{\max} = |2(-1) - 1| = 3$（当 $z = -1$ 时）；$|2a - 1|_{\min} = 0$（当 $z = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 时）.

评述: 这里以 $|z|$ 乘 $|z^2 - z + 1|$ 为的是使其“降次”化简（还可以用 $1 = z \cdot \bar{z}$ 代入达到降次的目的）。

例 6.57 已知 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$，且 $|z_1 - \bar{z}_2| = |1 - z_1 z_2|$，

求证：$|z_1|$ 与 $|z_2|$ 中至少有一个等于 1.　　(*)

分析： 欲证 (*)，应证 $(|z_1|-1)(|z_2|-1)=0$. 因而由条件应设法分解因式。

证明：

$$|z_1-\bar{z}_2|=|1-z_1z_2|$$
$$|z_1-\bar{z}_2|^2=|1-z_1z_2|^2$$
$$(z_1-\bar{z}_2)\overline{(z_1-\bar{z}_2)}=(1-z_1z_2)\overline{(1-z_1\cdot z_2)}$$
$$(z_1-\bar{z}_2)(\bar{z}_1-z_2)=(1-z_1z_2)(1-\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2)$$
$$|z_1|^2-z_1z_2-\bar{z}_1\bar{z}_2+|z_2|^2=1-\bar{z}_1\bar{z}_2-z_1z_2+|z_1|^2\cdot|z_2|^2$$

$\therefore\quad |z_1|^2\cdot|z_2|^2-|z_1|^2-|z_2|^2+1=0\Rightarrow(|z_1|^2-1)(|z_2|^2-1)=0$

因此：$|z_1|^2=1$ 或 $|z_2|^2=1$，即

$$|z_1|=1\quad\text{或}\quad|z_2|=1$$

评述： 这里解题目标的确立对思路起了“导航”作用。

例 6.58 求满足 $|z+3-\sqrt{3}i|\leqslant\sqrt{3}$，且有最小辐角的复数 z。

解： 满足 $|z+3-\sqrt{3}i|\leqslant\sqrt{3}$，即 $\left|z-(-3+\sqrt{3}i)\right|\leqslant\sqrt{3}$ 的点 z 分布在以点 $z_0=-3+\sqrt{3}i$ 为圆心，以 $\sqrt{3}$ 为半径的包括边界的圆面上。很明显，过原点 O 引圆的另一条切线 OZ_1（图 6.29），则切点 Z_1 对应的复数的辐角比圆面上其他任何点对应的复数的辐角都要小。因此，只要求出复数 z_1 来就行了.

连接 OZ_0, AZ_0, Z_0Z_1，据平面几何知识知道，$|OA|=|OZ_1|=3$，且 $\angle1=\angle2$，而 $\angle1=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore\quad \arg z_1=\pi-2\angle1=\dfrac{2\pi}{3}$，从而

$$z_1=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$\therefore\quad z=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

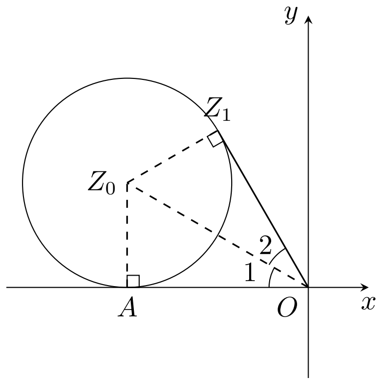


图 6.29

评述： 充分利用复数的几何意义，采用数形结合的方法，是解决复数问题的重要途径。

例 6.59 设 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$，满足 $z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{A}\cdot z_1+A\cdot\bar{z}_2=0$，$A$ 是不为零的复数。求证：

1. $|z_1+A|\cdot|z_2+A|=|A|^2$

2. $\dfrac{z_1+A}{z_2+A}=\left|\dfrac{z_1+A}{z_2+A}\right|$

分析： 处理附条件等式证明题的基本方法是推出法和代入法。

我们先看看推出法。欲证明（1）式，联系到已知，只要推出下式即可。

$$(z_1+A)\overline{(z_2+A)}=A^2 \tag{*}$$

这是把条件式分解因式的结果（先确立解题目标，为思路“导航”）.

若使用代入法，既可由已知解出 z_1 代入（留给读者试试）。也可以把条件式“代入”，为此，先把（1）式左边变形。

证明： **证法 1：** 由 $z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{A}\cdot z_1+A\cdot\bar{z}_2=0$（注意其结构特征）得

$$(z_1+A)(\bar{z}_2+\bar{A})=A\bar{A}=|A|^2$$

对此式两边取模，得

$$|(z_1+A)\overline{(z_2+A)}|=|A|^2$$

即

$$|z_1+A|\cdot|z_2+A|=|A|^2$$

证法 2：

$$\begin{aligned}|z_1+A|\cdot|z_2+A|&=|z_1+A|\cdot|\bar{z}_2+\bar{A}|\\&=|(z_1+A)(\bar{z}_2+\bar{A})|=|z_1\bar{z}_2+z_1\bar{A}+A\bar{z}_2+A\bar{A}|\\\text{代入条件}\to&=|0+A\bar{A}|=|A|^2\end{aligned}$$

现在来证明（2）：由左 $\Rightarrow$ 右，（由左式先构造出右边的分母）

$$\begin{aligned}\frac{z_1+A}{z_2+A}&=\frac{(z_1+A)\overline{(z_2+A)}}{(z_2+A)\overline{(z_2+A)}}\\&=\frac{z_1\bar{z}_2+A\bar{z}_2+A\bar{z}_1+A\bar{A}}{|z_2+A|^2}\\\text{代入条件}\to&=\frac{|A|^2}{|z_2+A|^2}=\frac{|z_1+A|\cdot|z_2+A|}{|z_2+A|^2}=\left|\frac{z_1+A}{z_2+A}\right|\end{aligned}$$

（2）的证明有多种思路，读者可以自己试试.

习题十二

A

1. 若 $z\in\mathbb{C}$，求证 $z+\dfrac{1}{z}$ 为实数的充要条件是 $|z|=1$.

2. 若 $|z+2i|\leqslant 1$, 求 $|z|$ 的最大（小）值。

3. 若 $|z|=3$，求 $|z-3i|$ 的最大值。

4. 若 $|z|=1$，求证 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}\right|=1$（用多种方法）。

5. 复数 z 满足 $|z-4i|\leqslant 2$，则 $\arg z$ 的最大值是____，最小值是____.

B

6. 若 $z\cdot\bar{z}+(1-2i)z+(1+2i)\bar{z}\leqslant 3$。求 $|z|$ 的最大（小）值。

7. 复数 z 满足 $2|z-3-3i|=|z|$，求 $|z|$ 的最大（小）值。

8. 若 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, 且 $a+b=8$, $c+d=12$，求 $(a+bi)$, $(c+di)$ 的模的最小值。

9. 设 $z_1=\sqrt{a-5}+ai$ $(a\geqslant 5,\ a\in\mathbb{R})$，$z_2=2\cos\theta+3i\sin\theta$, $\theta\in\mathbb{R}$. 求 $(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$ 的最小值。

10. 若 $z+\dfrac{4}{z}\in\mathbb{R}$，且 $|z-2|=2$，求复数 z。

11. 若 $k\in\mathbb{R}$, $z=\cos\theta+i\sin\theta$,

    (1) k 与 θ 各为何值时，$z^3+k\bar{z}^3$ 为纯虚数；

    (2) 若 $k>0$，当 θ 变化时，求 $|z^3+k\bar{z}^3|$ 的最大（小）值。

12. 设 $z=1+\sin\alpha+i\cos\alpha$ $\left(-\pi<\alpha<-\dfrac{\pi}{2}\right)$，求 $|z|$ 与 $\arg z$.

13. 设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(\pi<\theta<2\pi)$，求 z^2+z 的模与辐角。

6.5.3　复数与几何

例 6.60　求点 z 的轨迹（t 为参数，且 $t\in\mathbb{R}$）

(1) $z=t(1+i)$ (2) $z=t+\dfrac{i}{t}$ (3) $z=a\cos t+ib\sin t$

解:

(1) $\because$ $z=t+it$，令 $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$，则

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$$

消去 t，得 $x=y$.

$\therefore$ 点 z 的轨迹是第 I、III 象限的角平分线.

(2) $z=t+\dfrac{i}{t}$，令 $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$，则

$$\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{1}{t} \end{cases}$$

消去 t，得轨迹方程 $xy=1$.

$\therefore$ 轨迹为等轴双曲线 $xy=1$.

(3) $z=a\cos t+ib\sin t$，令 $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$，得

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$

由此得 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$

$\therefore$ 轨迹是在标准位置上的椭圆.

评述: 对这类轨迹问题，我们设 $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$，正确地实现 z 的实、虚部分离即可.

例 6.61 点 F 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的右焦点，A 为椭圆上的动点，$FABC$ 是正方形（图 6.30），当 A 在椭圆上运动一圈时，求点 C 的轨迹。

解: 设 C 点表示的复数为 $x+yi$，A 点表示的复数为 $a+bi\ (x,y,a,b\in\mathbb{R})$,

$\because$ $z_{\overrightarrow{OF}}=\sqrt{3}$, $z_{\overrightarrow{OC}}=x+yi$

$\therefore$ $z_{\overrightarrow{FC}}=z_{\overrightarrow{OC}}-z_{\overrightarrow{OF}}=x-\sqrt{3}+yi$

$\because$ $FABC$ 是正方形,

$\therefore\quad z_{\overrightarrow{FA}} = z_{\overrightarrow{FC}} \cdot i = -y + \left(x - \sqrt{3}\right) i$

而 $z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{OF}} + z_{\overrightarrow{FA}} = \sqrt{3} - y + \left(x - \sqrt{3}\right) i$，又 $z_{\overrightarrow{OA}} = a + bi$

$$\therefore\quad \begin{cases} a = \sqrt{3} - y \\ b = x - \sqrt{3} \end{cases}$$

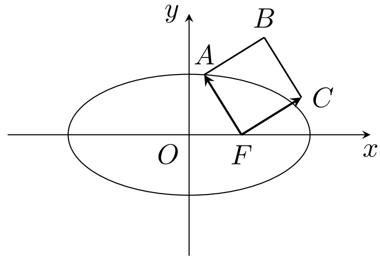


图 6.30

$\because\quad$ 点 A 在椭圆 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上运动

$\therefore\quad \dfrac{\left(\sqrt{3} - y\right)^2}{4} + \left(x - \sqrt{3}\right)^2 = 1$，即

$$\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + \frac{\left(y - \sqrt{3}\right)^2}{4} = 1$$

$\therefore\quad C$ 点的轨迹是长轴垂直于 Ox 轴且交于 F 点的竖立的椭圆。

例 6.62 若 $\delta = \omega i + 3$，复数 ω 对应的点在曲线

$$|z - 5| - |z + 5| = 6 \tag{1}$$

上运动，在复平面上求出复数 δ 对应的点的轨迹方程，并画出图形。

分析： **分析 1：** (1) 是双曲线的左半支，ω 对应的点在其上运动，利用 (1) 的参数方程可以写出 ω，从而可得出 δ 的表达式，使问题获解。

分析 2： 由于 ω 对应的点 A 在 (1) 上运动，有

$$|\omega - 5| - |\omega + 5| = 6 \tag{2}$$

利用 $\delta = \omega i + 3$，可由 (2) 直接通过代换，得出 δ 对应的点 B 所满足的方程。

分析 3： 由于 ω 对应的点 A 在已知曲线 C 上运动，$\delta = \omega i + 3$, 根据复数乘法与加法的意义，也可以利用几何方法处理之。

解： **解 1：** 由 (1) 可得 $a = 3$, $c = 5$, $b = 4$, 而可把 (1) 写成普通方程：

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1, \quad (x < 0)$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x = 3\sec\theta \\ y = 4\tan\theta \end{cases} \Rightarrow \omega = 3\sec\theta + i4\tan\theta, \quad \left[\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

令 $\delta = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$

$$\therefore\quad \begin{cases} x = 3 - 4\tan\theta \\ y = 3\sec\theta \end{cases}, \quad \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

消去参数 θ，可得

$$-\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad (y < 0)$$

画出其图形（图 6.31）

解 2：由 $\delta=\omega i+3$ 得 $\omega=3i-\delta i$，代入 (2) 得

$$|-\delta i+3i-5|-|-\delta i+3i+5|=6$$

两边同乘 $|i|$，得

$$|\delta-5i-3|-|\delta+5i-3|=6$$

而 $|\delta-(3+5i)|-|\delta-(3-5i)|=6$，其轨迹是以 $(3+5i)$, $(3-5i)$ 为焦点，$2a=6$ 的双曲线的下半支（图 6.31）。

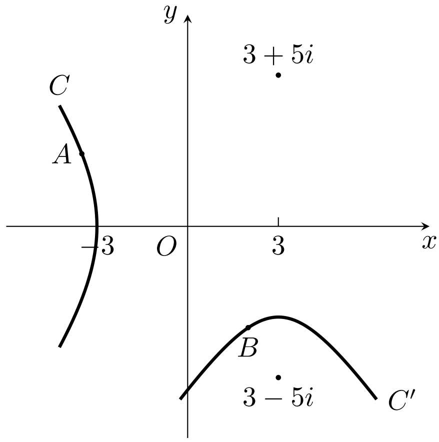


图 6.31

解 3：由于 ω 对应的点 A 在曲线 C 上运动，$\delta=\omega i+3$，从而把曲线 C 绕原点逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$，再向右平移 3 个单位，便得到 δ 对应的点 B 的轨迹 C'（图 6.31）. 此时，曲线 C 的焦点 ±5 变成 $\pm5i+3$，也就是 $3\pm5i$. 由于旋转中，曲线的形状、大小均不变，所以 $2a=6$，由此，曲线 C' 的方程应为

$$|\delta-(3+5i)|-|\delta-(3-5i)|=6$$

例 6.63 若 $\dfrac{z}{z-1}$ 为纯虚数，求点 x 的轨迹.

解： **解 1**：设 $\dfrac{z}{z-i}=bi\ (b\in\mathbb{R},\ b\neq0)$，则 $(1-bi)z=-bi$. 由于 $1-bi\neq0$，

$\therefore\quad z=\dfrac{-bi}{1-bi}=\dfrac{b^2-bi}{1+b^2}$

令 $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$，得

$$\begin{cases}x=\dfrac{b^2}{1+b^2}\\ y=\dfrac{-b}{1+b^2}\end{cases}\quad(b\neq0)\xrightarrow{\text{消参}}x^2+y^2=x\ (xy\neq0)\Rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}\ (xy\neq0)$$

这是以 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 为圆心，以 $\dfrac{1}{2}$ 为半径的圆［除去 $(0,0)$、$(1,0)$ 点］.

解 2：$\because\quad\dfrac{z}{z-1}$ 为纯虚数

$$\therefore \quad \overline{\left(\frac{z}{z-1}\right)} = -\left(\frac{z}{z-1}\right) \quad (z \neq 0)$$

$$\frac{\bar{z}}{\overline{z-1}} + \frac{z}{z-1} = 0$$

$$\frac{2|z|^2 - (z+\bar{z})}{|z-1|^2} = 0 \quad (z \neq 0)$$

设 $z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$，由上式得

$$2(x^2+y^2) - 2x = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\ (xy \neq 0)$$

（以下略）.

解 3：设 $z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$

$$\frac{z}{z-1} = \frac{x+yi}{x-1+yi} = \frac{x^2+y^2-x-yi}{(x-1)^2+y^2}$$

$\because \quad \dfrac{z}{z-1}$ 是纯虚数

$\therefore \quad \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \neq 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \\ -y \neq 0 \end{cases}$ 即 $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}\ (y \neq 0)$（以下略）.

习题十三

A

1. 已知定点 $A(1,0)$ 和动点 $B(0,t)$, $t \in \mathbb{R}$. 若 ABC 是等边三角形（A，B，C 是顺时针方向标注）。试求点 C 的轨迹。

2. 点 B 在单位圆上运动，$\overrightarrow{OA} = 2$, $\triangle ABC$ 是正三角形（A、B、C 顺时针方向标注），求点 C 的轨迹方程。

3. 设复数 ω 对应的点在单位圆上运动，设 $\delta = \omega - \dfrac{1}{\omega}$，求 δ 对应的点的轨迹。

4. 已知复平面内一点 z 到 $(-5,0)$ 与 $(5,0)$ 的距离之差为 6，

   (1) 写出点 z 满足的复数方程，并画出图形；

(2) 若点 P 在上述曲线上运动，求等边三角形 OPQ 顶点 Q 的轨迹方程（O，P，Q 为逆时针方向标注）。

B

5. 若点 B 在半圆 $x^2+y^2=1$ $(-1\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$ 上运动，点 A 为 $(2,0)$，且 $\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的等腰直角三角形。问点 B 在何处时，点 O 到点 C 的距离最长，并求这个最长的距离。

6. 若复数 z 满足 $(z-3)(\bar{z}-3)+(z+3)(\bar{z}+3)=2(|z^2-9|+2)$. 求点 z 表示的图形，并求出它的普通方程。

7. 若 $z_1=-1+i$, $z_2=1+i$, 复数 z 对应的点在线段 z_1z_2 上运动，求 z^2 对应的点的轨迹的普通方程。

8. 已知 $z\cdot\bar{z}-\bar{A}\cdot z-A\cdot\bar{z}=0$，其中 $z,A\in\mathbb{C}$，且 A 为常数，求复数 z 表示的点的轨迹。

6.5.4 其他几何问题

复数及其计算有明确的几何意义。因此，复数与几何有天然的联系，除了上述轨迹问题以外，再看几个例子。

例 6.64 三个互不相等的复数 z_1, z_2, z_3 满足 $z_1+z_2+z_3=0$, 且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|$，这三个复数在复平面上的对应点为 A,B,C，

求证：$\triangle BAC$ 是正三角形（图 6.32）.

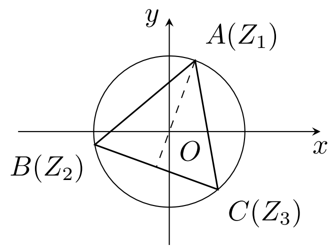


图 6.32

证明： **证明 1：** $|z_1|=|z_2|=|z_3|\Rightarrow$ 原点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心。

$z_1+z_2+z_3=0\Rightarrow$ 原点是 $\triangle ABC$ 的重心。

设 $z_k=a_k+b_ki$, $k=1,2,3$，则由

$$\begin{aligned}z_1+z_2+z_3=0&\Rightarrow(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)i=0\\&\Rightarrow\frac{a_1+a_2+a_3}{3}+\frac{b_1+b_2+b_3}{3}i=0\\&\Rightarrow\frac{a_1+a_2+a_3}{3}=0\quad\text{且}\quad\frac{b_1+b_2+b_3}{3}=0\end{aligned}$$

$\therefore\quad \triangle ABC$ 的重心为 $(0,0)$.

由于 $\triangle ABC$ 的外心与重心重合，

$\therefore\quad \triangle ABC$ 是正三角形。

评述： 事实上可以证明了 $\triangle ABC$ 的重心是 $\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$, 这是一个重要的结论。

证明 2: 反向延长 $\overrightarrow{OZ_1}$, 交圆于 Z_1', 则 $Z_1' = -Z_1$.

由 $z_1+z_2+z_3=0 \Rightarrow -z_1 = z_2+z_3$

$\therefore\quad z_2+z_3 = z_1' \Rightarrow OZ_2Z_1'Z_3$ 是平行四边形.

又由 $|z_2| = |z_3|$ 知 $OZ_2Z_1'Z_3$ 是菱形（图 6.33）.

由于 $|z_1'| = |z_1| = |z_2| \Rightarrow \triangle OZ_2Z_1'$ 是正三角形. 从而 $\angle Z_2OZ_3 = 120°$.

同理，$\angle Z_3OZ_1 = \angle Z_1OZ_2 = 120°$

$\therefore\quad \triangle Z_1Z_2Z_3$ 是正三角形。

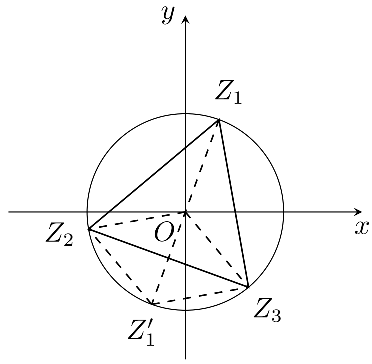


图 6.33

证明 3： 也可以去证 $|AB| = |AC| = |BC|$. (*)

$$\because\quad |AB| = |z_1 - z_2|,\quad |AC| = |z_1 - z_3|$$

$$|z_1 - \bar{z}_2|^2 = (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$$

$$|\bar{z}_1 - z_3|^2 = (z_1 - z_3)\overline{(z_1 - z_3)} = |z_1|^2 + |z_3|^2 - (z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3)$$

$\because\quad |z_1| = |z_2| = |z_3| = r$

$\therefore\quad$ 欲证 (*)，只要证

$$z_1\cdot\bar{z}_2 + \bar{z}_1\cdot z_2 = z_1\cdot\bar{z}_3 + \bar{z}_1\cdot z_3 = z_2\cdot\bar{z}_3 + \bar{z}_2\cdot z_3 \tag{**}$$

这是一个轮换对称式，欲证它，只要证 $z_1\cdot\bar{z}_2 + \bar{z}_1\cdot z_2$ 是个常量。

$$\begin{cases} -z_3 = z_1 + z_2 \\ -\bar{z}_3 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \end{cases} \Rightarrow |x_3|^2 = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1 z_2 + z_2\bar{z}_1$$

$$\Rightarrow |x_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$$

$$\Rightarrow z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = |x_3|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 = -|x_3|^2 = -r^2$$

$\therefore\quad$ (**) 成立，从而 (*) 成立，所以 $\triangle ABC$ 是正三角形。

例 6.65　已知 $z\in\mathbb{C}$，且 $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = a\ (a\in\mathbb{R}^+)$,

求 $z_1^3 + z_1^2\cdot\bar{z}_2 + \bar{z}_1\cdot z_2^2 + z_2^3$ 的值.

分析: 由 $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = a \ (a \in \mathbb{R}^+)$, 知 z_1, z_2 都是非零复数，且点 Z_1，点 Z_2 与原点构成正三角形的三个顶点（这一点是解此题的突破口!）。

解: 设 $z_2 = z_1\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = z_1\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$，代入原式:

$$
\begin{aligned}
& z_1^3 + z_1^2 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2^2 + z_2^3 \\
= & z_1^3 + z_1^2 \cdot \bar{z}_1 \overline{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} + \bar{z}_1 \cdot z_1^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + z_1^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 \\
= & z_1^3 + z_1 \cdot |z_1|^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + z_1 \cdot |z_1|^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - z_1^3 = 0
\end{aligned}
$$

习题十四

A

1. (1) 设 $\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，复平面上有三个点：$O(0)$, $A(\omega - z)$, $B(\omega + z)$（括号内表示该点对应的复数），而且这三个点构成等腰直角三角形，$\angle AOB = \dfrac{\pi}{2}$，求 z。

   (2) $\arg(z+1) = \dfrac{\pi}{6}$, $\arg(z-1) = \dfrac{2\pi}{3}$，求 z。

   (3) 在复平面上，直角 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 分别对应复数 z、z^2、z^3，且 $|z| = 2$, $\angle BAC = 90°$，求 z。

2. 对于两个非零复数 z_1，z_2，对应它们的向量分别是 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$，求证：$\overrightarrow{OZ_1} \perp \overrightarrow{OZ_2} \Leftrightarrow R(z_1 \cdot \bar{z}_2) = 0.$

B

3. 设 $A = \{z \mid |z+1| \leqslant |z-i|\}$，$B = \{z \mid |z+2| \leqslant 2\}$, $C = A \cap B$, 求点集 C 的图形占有的面积。

4. P、Q 是复平面上的点集:

$$P = \{z \mid z \cdot \bar{z} + 3i\bar{z} - 3iz + 5 = 0\},$$
$$Q = \{\delta | \delta = 2iz,\ z \in P\}$$

   (1) 点集 P、Q 各表示什么曲线? 在同一个坐标系中画出 P、Q 各表示的曲线;

(2) 设 $z_1 \in P$, $z_2 \in Q$，求 $|z_1 - z_2|$ 的最大（小）值。

5. 设复数集合 $M = \{z \mid |z-2+i| \leqslant 2,\ z \in \mathbb{C}\} \cap \{z \mid |z-2-i| = |z-4+i|,\ z \in \mathbb{C}\}$

(1) 在复平面上作出表示 M 的图形，并说明图形的名称；

(2) 求 $\arg z\ (z \in M)$ 的范围；

(3) 求 $|z|\ (z \in M)$ 的范围。

6.6 本章小结

6.6.1 知识结构分析

复数及其有关概念

1. 虚数单位 i 及其幂的运算性质。

$$
\begin{aligned}
&i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i, \\
&i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

2. 对虚数单位 i 还规定实数与它可以进行四则运算，且原有的加、乘运算律仍然成立，从而出现了形如 $a+bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ 的数，称此种数为复数。

3. 复数系：

$$
\begin{array}{c} \text{复数} \\ (a+bi) \end{array}
\begin{cases}
\begin{array}{c} \text{实数} \\ (b=0) \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{虚数} \\ (b \neq 0) \end{array}
\begin{cases}
\begin{array}{c} \text{纯虚数} \\ (a=0) \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{非纯虚数} \\ (a \neq 0) \end{array}
\end{cases}
\end{cases}
$$

4. 复数的表示形式：

- 复数的代数形式：$z = a+bi\ (a, b \in \mathbb{R})$;
- 复数的几何形式：复平面内的一点 $Z(a, b)$ 或向量 $\overrightarrow{OZ}$;
- 复数的三角形式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

复数的三种表示形式之间是可以互化的，除了实数零以外，它们彼此之间都是一一对应的，即

$$
\begin{tikzcd}
\text{复数 } z=a+bi \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{复数 } z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{点 } Z(a,b) \arrow[r, leftrightarrow] & \text{向量 } \overrightarrow{OZ}
\end{tikzcd}
$$

由复数的三种表示形式可知：确定一个复数需要两个实数，即确定一个复数要且仅要两个独立的条件。

5. 复数相等的条件：

- 代数形式：$z_1=a+bi,\quad z_2=c+di\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$

$$z_1=z_2\Longleftrightarrow\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}$$

- 三角形式：$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$$z_1=z_2\Longleftrightarrow\begin{cases}r_1=r_2\\ \theta_1=\theta_2+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

- 几何形式：相等的复数表示复平面内的同一个点，反之，复平面内的一个点表示的两个复数相等。

相等的复数在复平面内表示的两个向量方向一致且长度相等，反之，复平面内的两个向量方向一致且长度相等，则它们表示的两个复数相等（向量的起点不一定在原点）。

6. 复数的模及其运算性质：

复数的模，即是表示复数的向量的长度，

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}\quad(a,b\in\mathbb{R})$$

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad |z^n|=|z|^n,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\ (z_1\neq 0)$$

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

（想一想上述不等式中等号成立的条件）

7. 复数的辐角：以 x 轴的正半轴为始边，以向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在的射线（起点是原点）为终边的角 θ，叫做复数 z 的辐角。辐角的主值记为 $\arg z$，且 $0 \leqslant \arg z < 2\pi$，因此，$\theta = \arg z + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

8. 共轭复数及其运算性质：复数 $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ 的共轭复数记为 $\bar{z} = a - bi$.

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\ (z_2 \neq 0), \qquad |z|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

复数的运算及其几何意义

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OZ}:\ & z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta);\\
\overrightarrow{OZ_1}:\ & z_1 = a_1 + b_1 i = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1);\\
\overrightarrow{OZ_2}:\ & z_2 = a_2 + b_2 i = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2);
\end{aligned}$$

1. 复数的加减法

$$z_1 \pm z_2 = (a + 1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$$

复数的加、减法运算通常用复数的代数形式进行，其几何意义可用平行四边形法则或三角形法则确定。

2. 复数的乘法：

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)\\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i\\
z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]
\end{aligned}$$

积所对应的向量由 $\overrightarrow{OZ_1}$，绕原点逆时针方向旋转 θ_2 角，模伸长到原来的 r_2 倍来确定。

3. 复数的除法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

商所对应的向量由 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕原点顺时针方向旋转 θ_2 角，模缩小到原来的 r_2 分之一来确定。商的几何意义经常用来确定向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 的夹角。

4. 复数的乘方：

$$z^n = (a+bi)^n \quad \text{利用乘法公式运算}$$
$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

幂所对应的向量由 $\overrightarrow{OZ}$ 绕原点逆时针方向旋转 $(n-1)\theta$ 角，模伸长到原来的 r^{n-1} 倍来确定。

5. 复数的开方：

$z = a + bi$ 的二次方根可根据方根的定义及复数相等的条件，利用代数的方法求得。

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 的 n 次方根为：

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right] \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

n 次方根所对应的向量有且仅有 n 个，其模均为 $\sqrt[n]{r}$，辐角组成 n 项等差数列，其首项为 $\dfrac{\theta}{n}$，公差为 $\dfrac{2\pi}{n}$，因此，复数开 n 次方所得到的 n 个 n 次方根所表示的点，均匀分布在以原点为圆心，以 $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆上，组成一个正 n 边形。

6.6.2 本章应着重掌握的数学思想

数形结合的思想应是本章的核心，它可以把十分抽象且缺乏实际意义的复数“几何化”，从而为复数在数学、物理技术上的应用开辟了道路。

复习题六

A

1. 计算：

(1) $i^{100} + i^{101} + i^{102} + \cdots + i^{1000}$

(2) $i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 100i^{100}$

(3) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2n}$

(4) $i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdots i^{99}$

2. 判断下列命题的真假：

(1) 纯虚数与虚轴上的点是一一对应的；

(2) 若 $|z|=1$，则 $-1\leqslant z\leqslant 1$;

(3) $|z|^2=z^2$;

(4) $z_1\cdot z_2=0$, 则 z_1,z_2 中至少有一个为零;

(5) $z_1^2+z_2^2=0$，则 $z_1=z_2=0$;

(6) $|z_1|+|z_2|=0$，则 $z_1=z_2=0$;

(7) $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0\quad(n\in\mathbb{N})$.

3. 已知复数 $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$，求下列各式的实部与虚部：

(1) z^2　　(2) z^3　　(3) $\dfrac{1}{z}$

4. 求证：

(1) $(1+i)\left(1+\sqrt{3}i\right)(\cos\theta+i\sin\theta)=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}+\theta\right)+i\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}+\theta\right)\right]$

(2) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-i)(\cos\theta-i\sin\theta)}=\sqrt{2}\left[\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$

5. 化简

$$\frac{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)^2}{\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)}\times\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^2(\cos 2\phi-i\sin 2\phi)}{\cos(\theta-\phi)+i\sin(\theta-\phi)}$$

6. 设点 Z 表示复数 z，在复平面内如何通过画图的方法，找出表示下列复数的点?

(1) $z+(3+4i)$

(2) $z-4+i$

(3) $-\sqrt{2}z$

(4) $z(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$

(5) $-iz$

(6) $\dfrac{a^2}{z}\ (a\in\mathbb{R}^+)$

7. 当 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^n$ 为实数时，求 n 的最小正整数值.

8. $\overrightarrow{OZ}$ 表示复数 $-1+i$，把 $\overrightarrow{OZ}$ 逆时针旋转 $120°$，并拉长为原来的 $\sqrt{3}$ 倍得到 $\overrightarrow{OZ_1}$，设 $\overrightarrow{OZ_1}$ 表示的复数是 z_1，则 $\bar{z}_1 =$ ________.

9. 设 $z = \dfrac{1-\sin\theta + i\cos\theta}{1-\sin\theta - i\cos\theta}$

   (1) 当 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 时，计算 z

   (2) 若 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$，求 $|z|$ 与 $\arg z$

   (3) 当 $\theta = \dfrac{\pi}{5}$ 时，求使 $z^n \in \mathbb{R}$ 的最小自然数 n，并求此时 z^n 的值.

B

10. 设 α，β 是实系数一元二次方程的两个虚根。若 $\dfrac{\alpha^2}{\beta} \in \mathbb{R}$, 求 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 的值。

11. 设 α，β 分别是复平面上点 A、B 表示的复数。若 $\alpha^2+\beta^2=\alpha\beta$, $\alpha \neq 0$ 且 $|AB|=2$，

    (1) 求 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ 的辐角的主值与 $|\alpha|$,

    (2) 求向量 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 的模。

12. 关于 x 的二次方程 $x^2+(2+i)x+4ab+(2a-b)i=0$ $(a,b\in\mathbb{R})$ 有实根，求点 $P(a,b)$ 的轨迹 C 的方程，若曲线 C 是二次曲线，求其中心坐标和准线方程；若曲线 C 不是二次曲线，请说明理由。

13. 若 z_A，z_B 是复平面上定点 A，B 表示的复数，设 z_P 是这个平面上动点 P 表示的复数，且

$$z_P = \frac{1-it}{2}\cdot z_A + \frac{1+it}{2}\cdot z_B \quad (t\in\mathbb{R})$$

    求点 P 的轨迹.

14. (1) 证明：对于任意实数 t，复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}i$ 的模 $r=|z|$ 适合 $r \leqslant \sqrt[4]{2}$.

    (2) 当实数 t 取什么值时，复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}i$ 的辐角的主值 θ 满足 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}$.

15. 设 z_1，z_2 是复平面上两动点，O 为原点，且满足：

    (1) z_1, z_2 表示的复数的辐角分别是 $\theta, -\theta$ $(0<\theta<90°)$;

    (2) $\triangle Z_1OZ_2$ 的面积为定值 S;

求 $\triangle Z_1OZ_2$ 的重心 Z 表示的复数 z 的模的最小值。

16. 设 $A=\{z \mid z=2\sin\theta+4+2i\cos\theta,\ \theta\in\mathbb{R}\}$

$B=\{z \mid (1+ki)z+(1-ki)z+6=0,\ k\text{为实常数}\}$

(1) k 为何值时，$A\cap B$ 为单元素集?

(2) k 为何值时，$A\cap B$ 为双元素集?

(3) k 为何值时，$A\cap B$ 的元素为实数?

(4) k 为何值时，$A\cap B=\varnothing$.

17. 设复数 z 和 ω 满足 $z\omega+2iz-2i\omega+1=0$，且 $|z|=\sqrt{3}$,

求证：$|\omega-4i|$ 的值为常数，并求出这个常数。