MAD-CB

Regressão Múltipla

Regressão - O Que Fizemos

- Regressão Simples
- Regressão Polinomial

O Que Faremos Hoje

- Regressão Múltipla
  - Regressão com mais que uma variável independente

Dataset para Hoje - `Prestige`

- Mede o prestígio com que Canadenses tratem 102 profissões
- Faz parte do pacote `car`
- Vem do livro **An R Companion to Applied Regression** de John Fox e Sanford Weisberg

```r
data("Prestige")
head(Prestige[,c(1:4,6)])
```

```
##                       education income women prestige type
## gov.administrators        13.11  12351 11.16     68.8 prof
## general.managers          12.26  25879  4.02     69.1 prof
## accountants               12.77   9271 15.70     63.4 prof
## purchasing.officers       11.42   8865  9.11     56.8 prof
## chemists                  14.62   8403 11.68     73.5 prof
## physicists                15.64  11030  5.13     77.6 prof
```

Variáveis do Dataset

- `education`: média dos anos de escolaridade para cada profissão
- `income`: média da renda anual em 1971
- `women`: porcentagem das mulheres na profissão
- `prestige`: opinião de prestígio de ocupação baseado numa sondagem
- `census`: variável não usado em nossa analise
- `type`: variável classificando as ocupações em `wc` (colarinho branco), `bc` (operário), `prof` (profissional/executivo)

Passos 1 e 2 — Revisão e Limpeza dos Dados

```
##    education          income          women
##  Min.   : 6.380   Min.   :  611   Min.   : 0.000
##  1st Qu.: 8.445   1st Qu.: 4106   1st Qu.: 3.592
##  Median :10.540   Median : 5930   Median :13.600
##  Mean   :10.738   Mean   : 6798   Mean   :28.979
##  3rd Qu.:12.648   3rd Qu.: 8187   3rd Qu.:52.203
##  Max.   :15.970   Max.   :25879   Max.   :97.510

##     prestige       type
##  Min.   :14.80   bc  :44
##  1st Qu.:35.23   prof:31
##  Median :43.60   wc  :23
##  Mean   :46.83   NA's: 4
##  3rd Qu.:59.27
##  Max.   :87.20
```

Gráfico Densidade de `income`

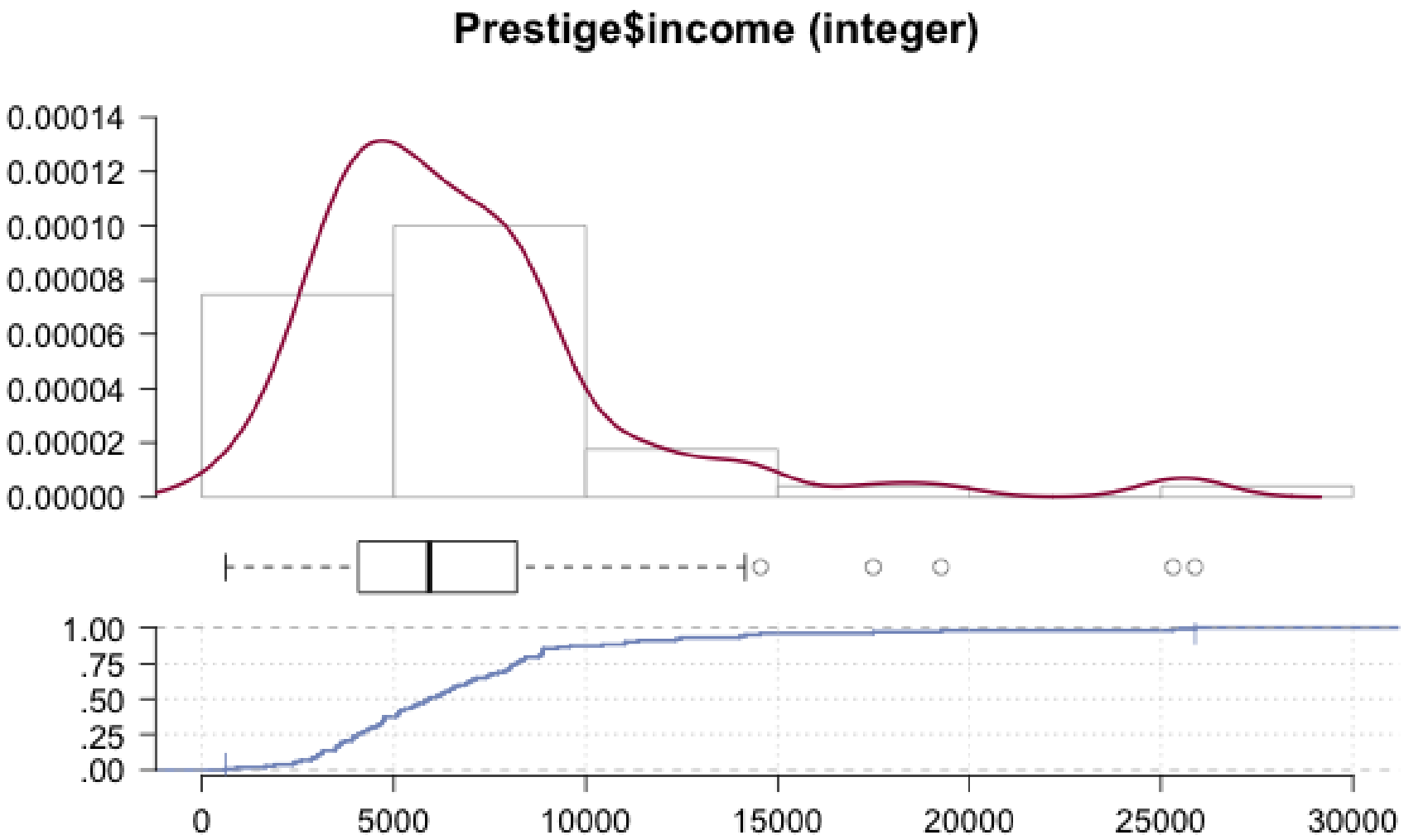
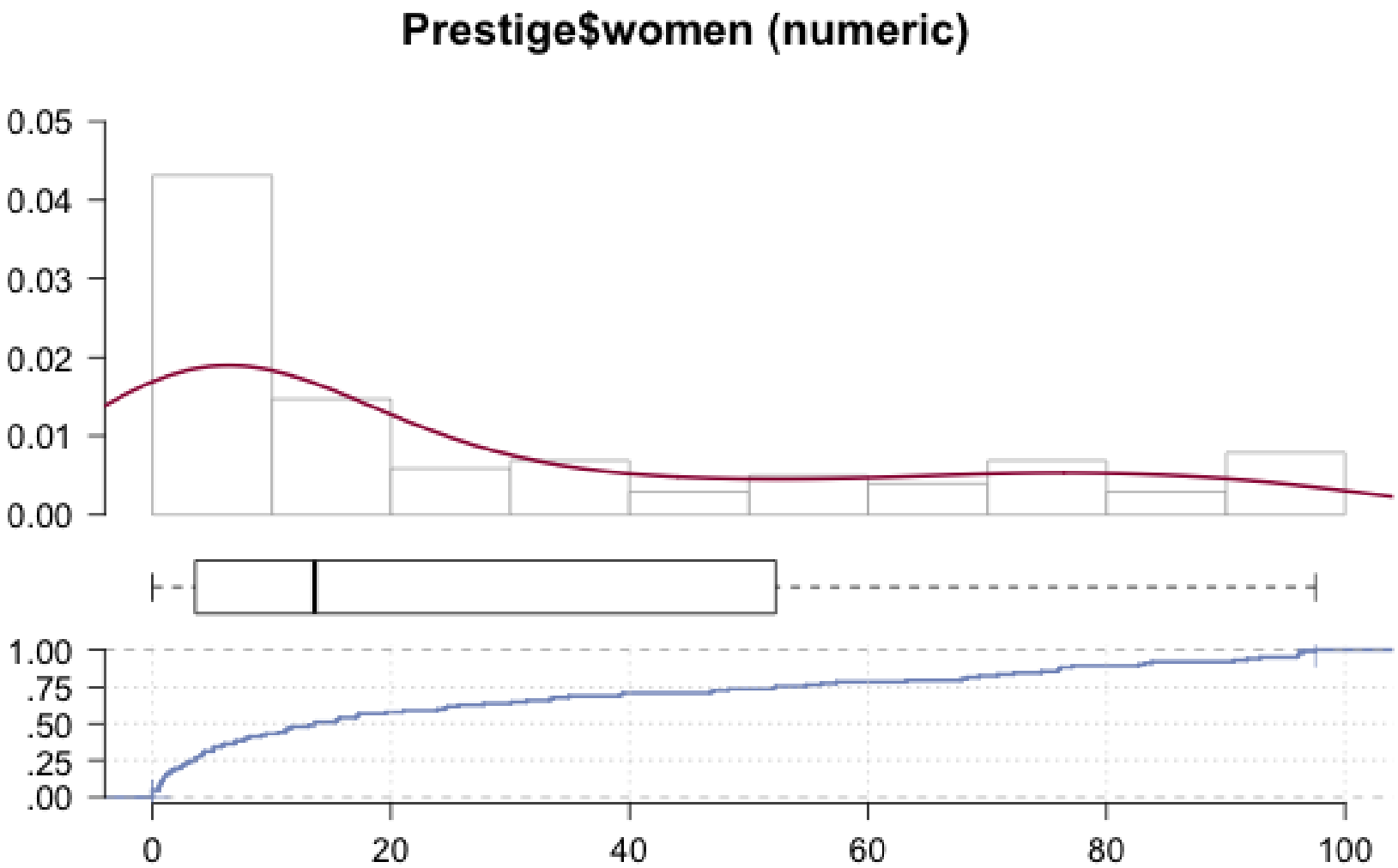
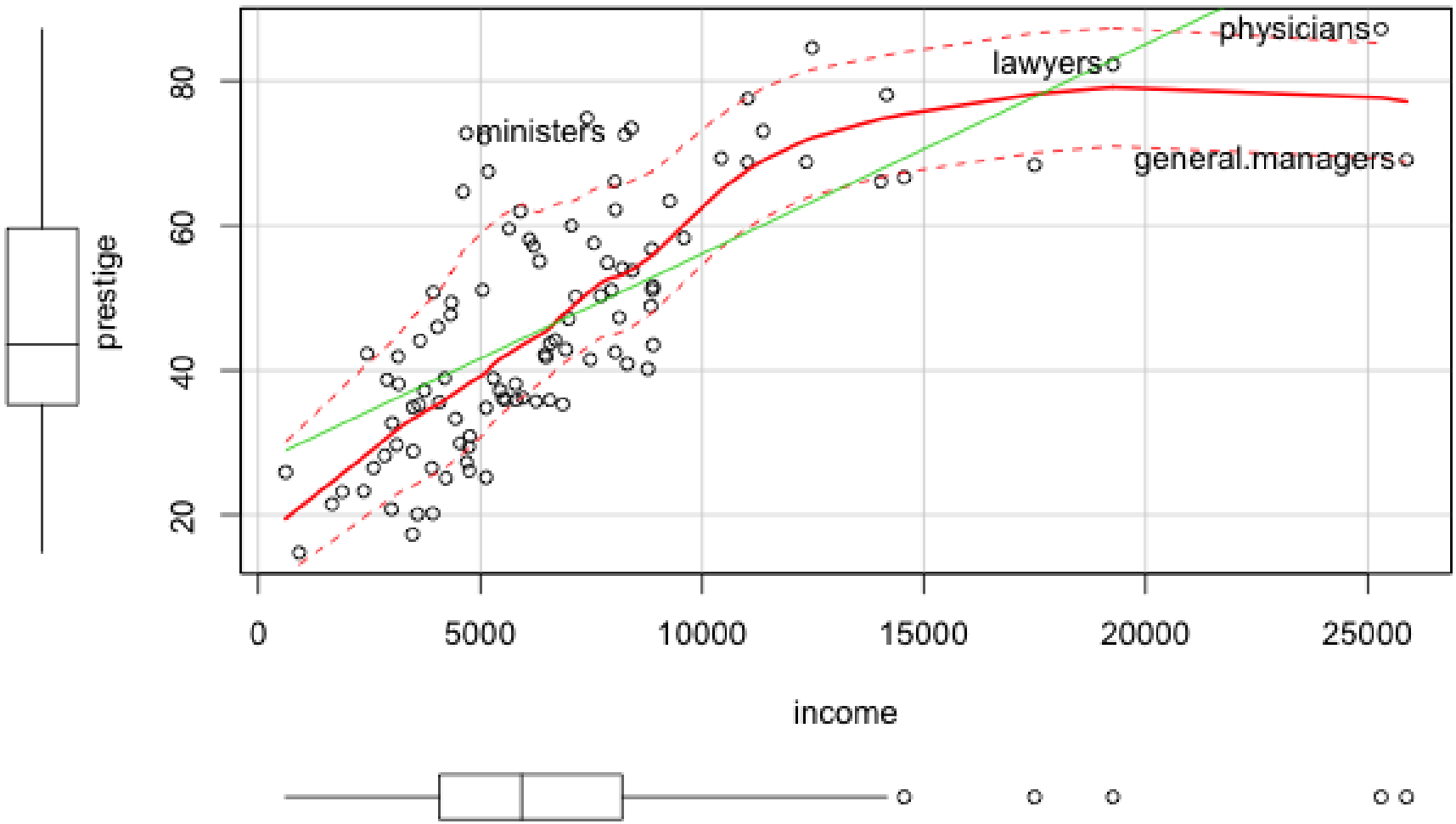


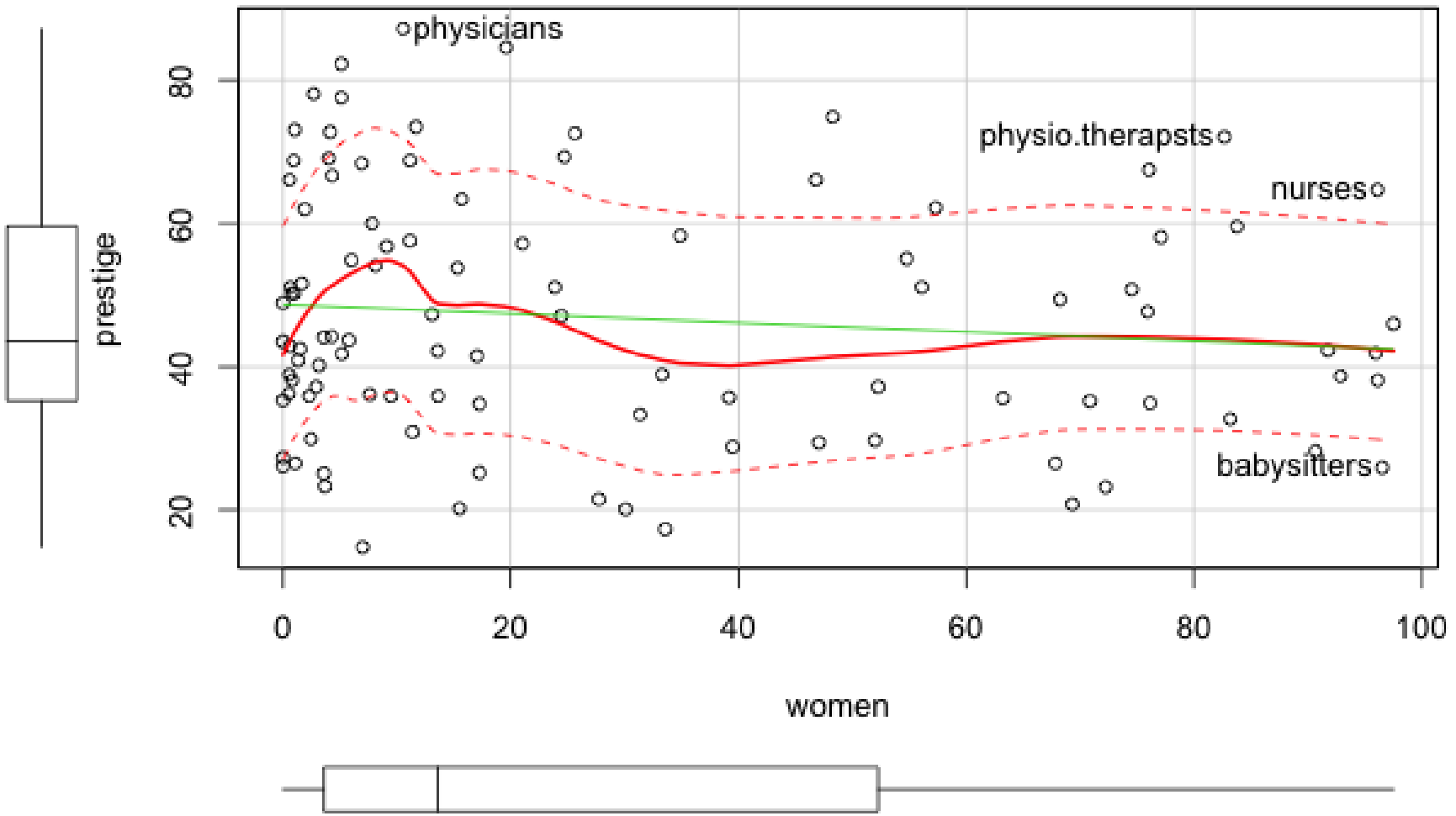
Gráfico Densidade de women



Scatterplot de prestige vs. income



Scatterplot de prestige vs. women

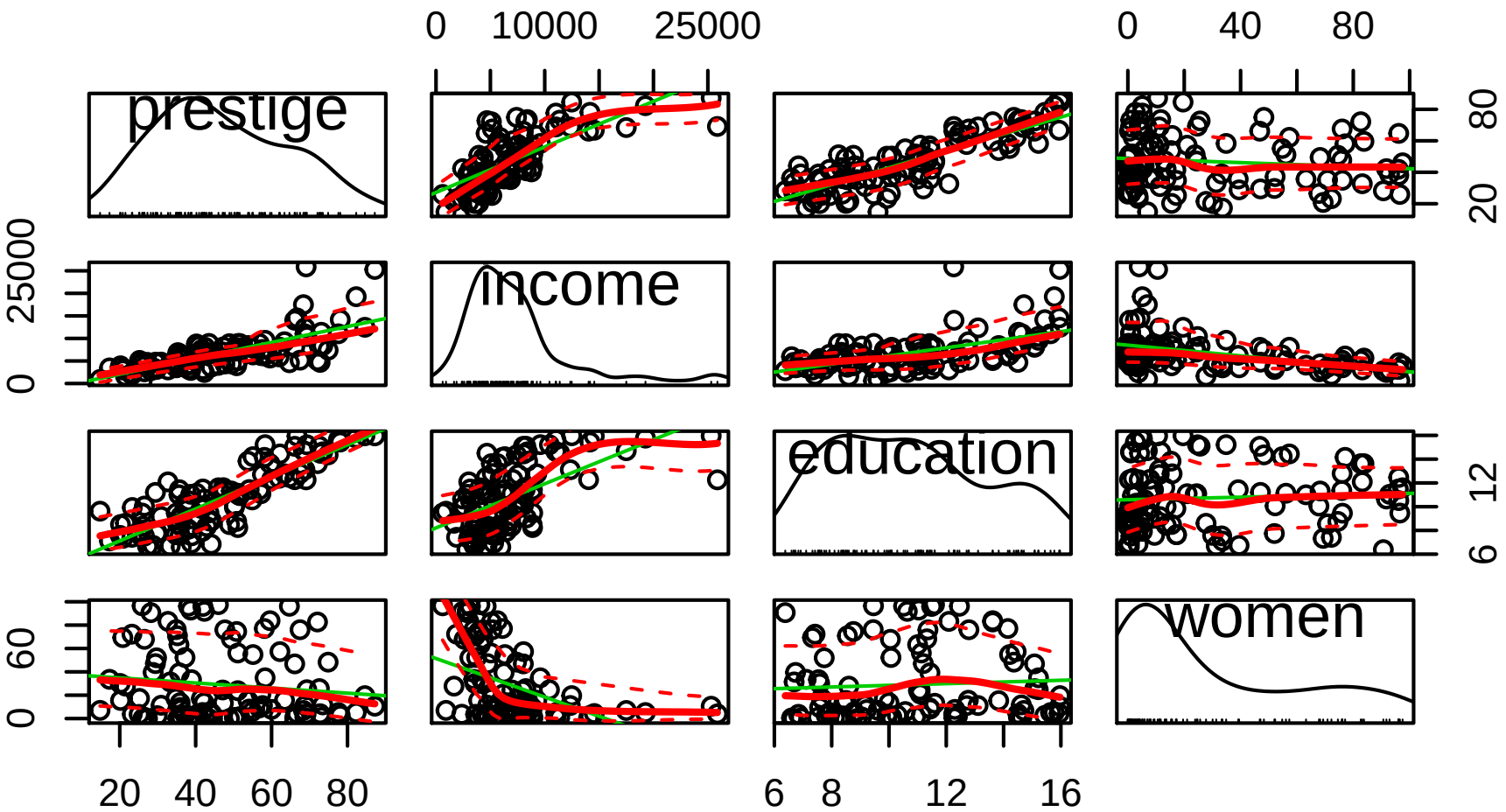


Correlações entre as Variáveis

```
##                prestige  education     income       women
## prestige    1.0000000 0.85017689  0.7149057 -0.11833419
## education   0.8501769 1.00000000  0.5775802  0.06185286
## income      0.7149057 0.57758023  1.0000000 -0.44105927
## women      -0.1183342 0.06185286 -0.4410593  1.00000000
```

Matriz de Scatterplots das Variáveis

```
scatterplotMatrix(~ prestige + income + education + women,
                  data = Prestige, span = 0.7)
```



Transformações em `income` e `women`

- Essas variáveis precisam transformação para fazer elas aptas para regressão linear

Transformações em `income` e `women`

- Essas variáveis precisam transformação para fazer elas aptas para regressão linear
- `income` tem curva de 2º grau no scatterplot

Transformações em `income` e `women`

- Essas variáveis precisam transformação para fazer elas aptas para regressão linear
- `income` tem curva de 2º grau no scatterplot
- `women` tem assimetria pronunciada a direta (boxplot)

Transformação da Variável `women`

- 2 candidatos para transformação para restaurar a normalidade

Transformação da Variável `women`

- 2 candidatos para transformação para restaurar a normalidade
- log

Transformação da Variável `women`

- 2 candidatos para transformação para restaurar a normalidade
- log
- logit

Transformação *log* para `women`

- Problema com os 0's

Transformação *log* para `women`

- Problema com os 0's
- Qualquer logarítmo não pode calcular o log de 0

Transformação *log* para `women`

- Problema com os 0's
- Qualquer logarítmo não pode calcular o log de 0
- Em R, `log(0) = -Inf`

Profissões Sem Mulheres

```
Prestige[Prestige$women == 0,]
```

```
##                       education income women prestige type
## firefighters               9.47   8895     0     43.5   bc
## rotary.well.drillers       8.88   6860     0     35.3   bc
## railway.sectionmen         6.67   4696     0     27.3   bc
## train.engineers            8.49   8845     0     48.9   bc
## longshoremen               8.37   4753     0     26.1   bc
```

Pode Modificar os Valores para Tirar os 0's

- Pode aumentar todos os valores por um pequeno quantidade sem mudar a distribuição
- Neste caso, vamos usar 0.025

Transformação *log* para `women`

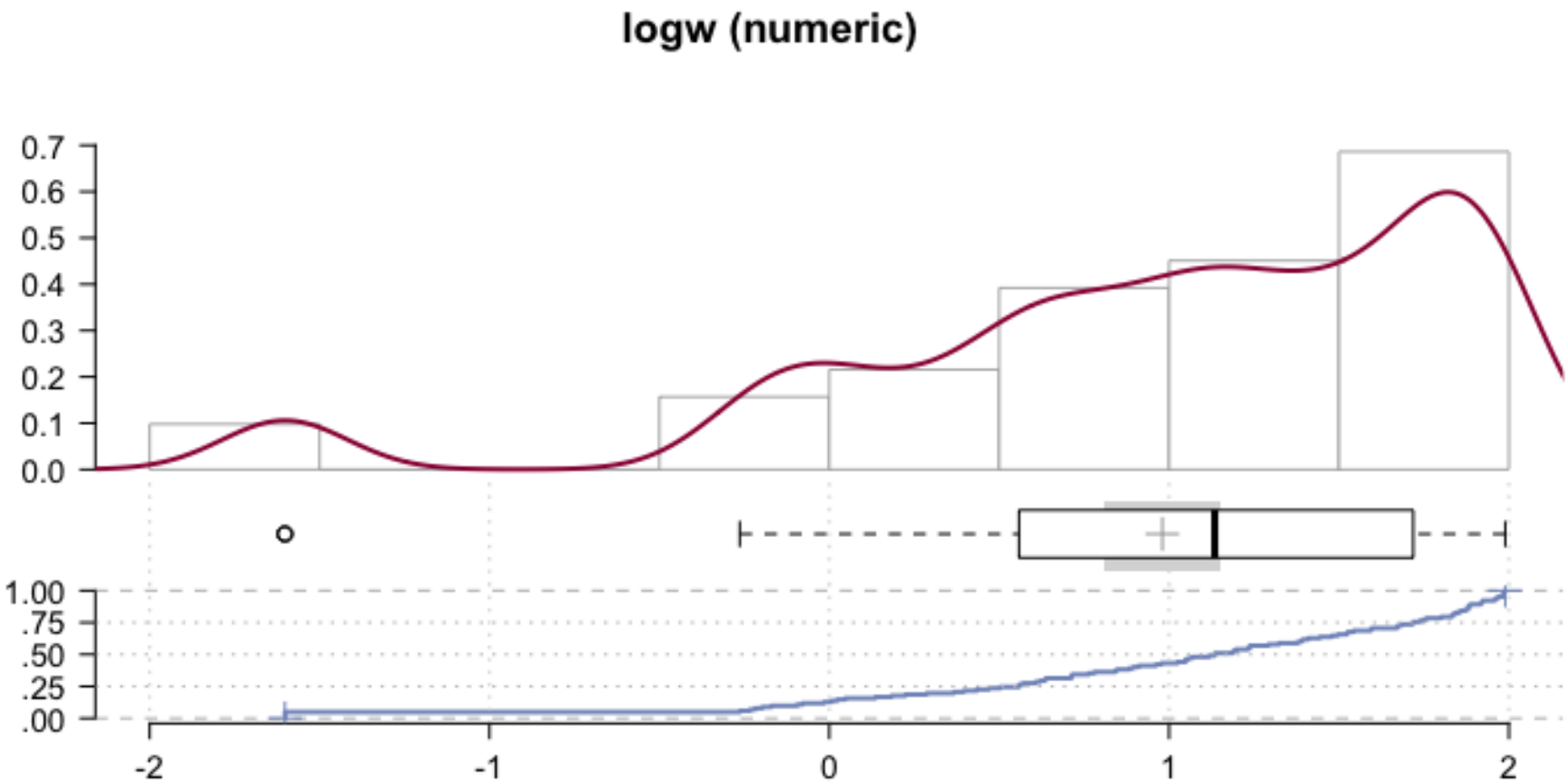
```
summary(log10(Prestige$women))
```

```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##    -Inf  0.5554  1.1340    -Inf  1.7180  1.9890
```

```
logw <- log10(Prestige$women + 0.025)
summary(logw)
```

```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
## -1.6020  0.5584  1.1340  0.9802  1.7180  1.9890
```

Gráfico de Log10(Women)



Transformação *logit*

- *logit* aplica a função seguinte para a variável:

$$logit(x) = log_e \frac{x}{1-x}$$

- Chamada a função *logit*
- Precisa ser aplicada às funções no intervalo de 0 e 1
- `women` começou como uma porcentagem.
- Podemos dividir por 100 para restaurar a forma decimal sem violar a distribuição da variável

Transformação *logit* de `women`

- Em R, existe a função *logit* no pacote *car*

Transformação *logit* de `women`

- Em R, existe a função *logit* no pacote *car*
- Calcula automaticamente o valor e controla para os 0's

Transformação *logit* de `women`

- Em R, existe a função *logit* no pacote *car*
- Calcula automaticamente o valor e controla para os 0's
- Quando variável tem 0's, restringe extensão dos valores de 0,025 até 0,975

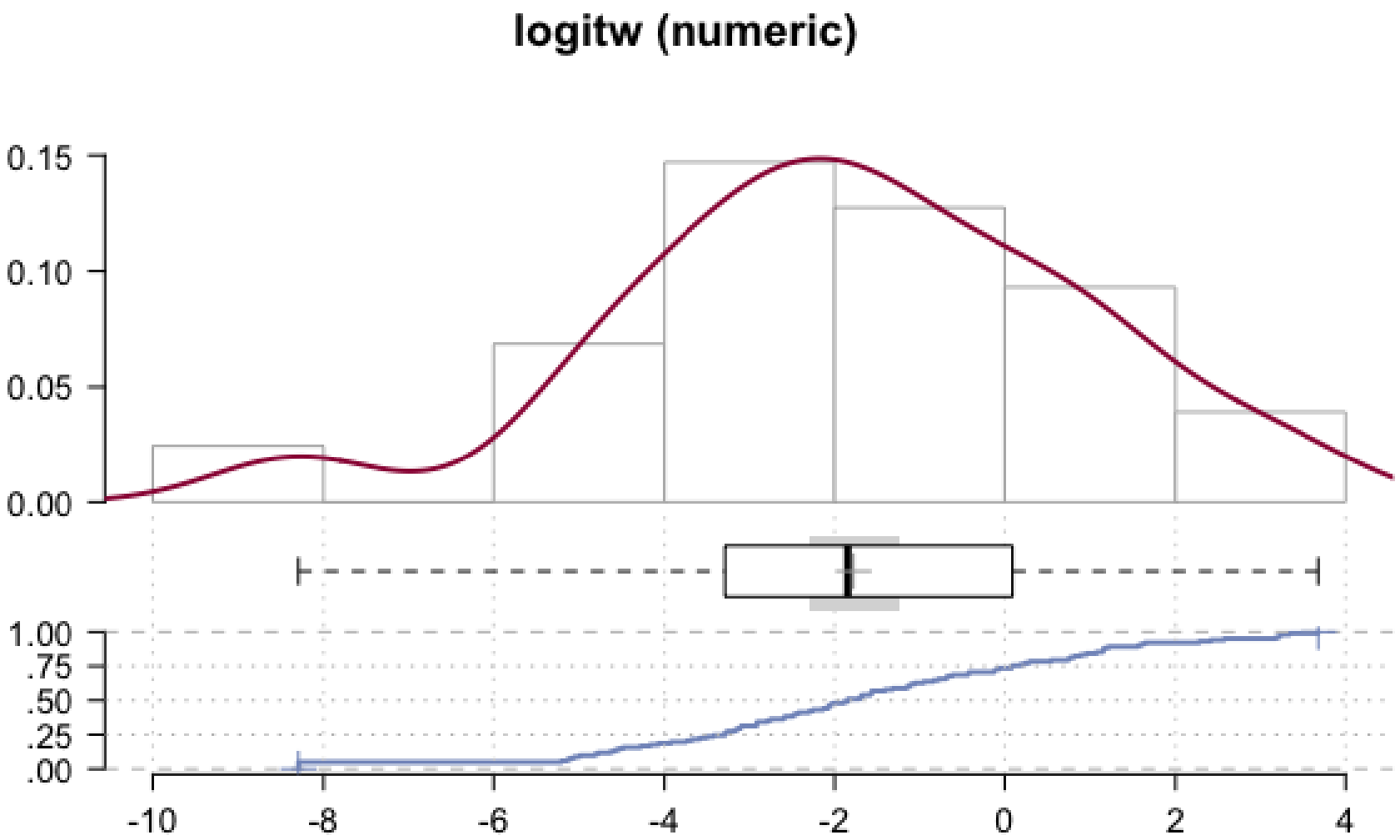
Transformação *logit* de `women`

- Em R, existe a função *logit* no pacote *car*
- Calcula automaticamente o valor e controla para os 0's
- Quando variável tem 0's, restringe extensão dos valores de 0,025 até 0,975
- Entretanto, vamos usar a mesmo aumento de 0.025 que usamos na transformação log10

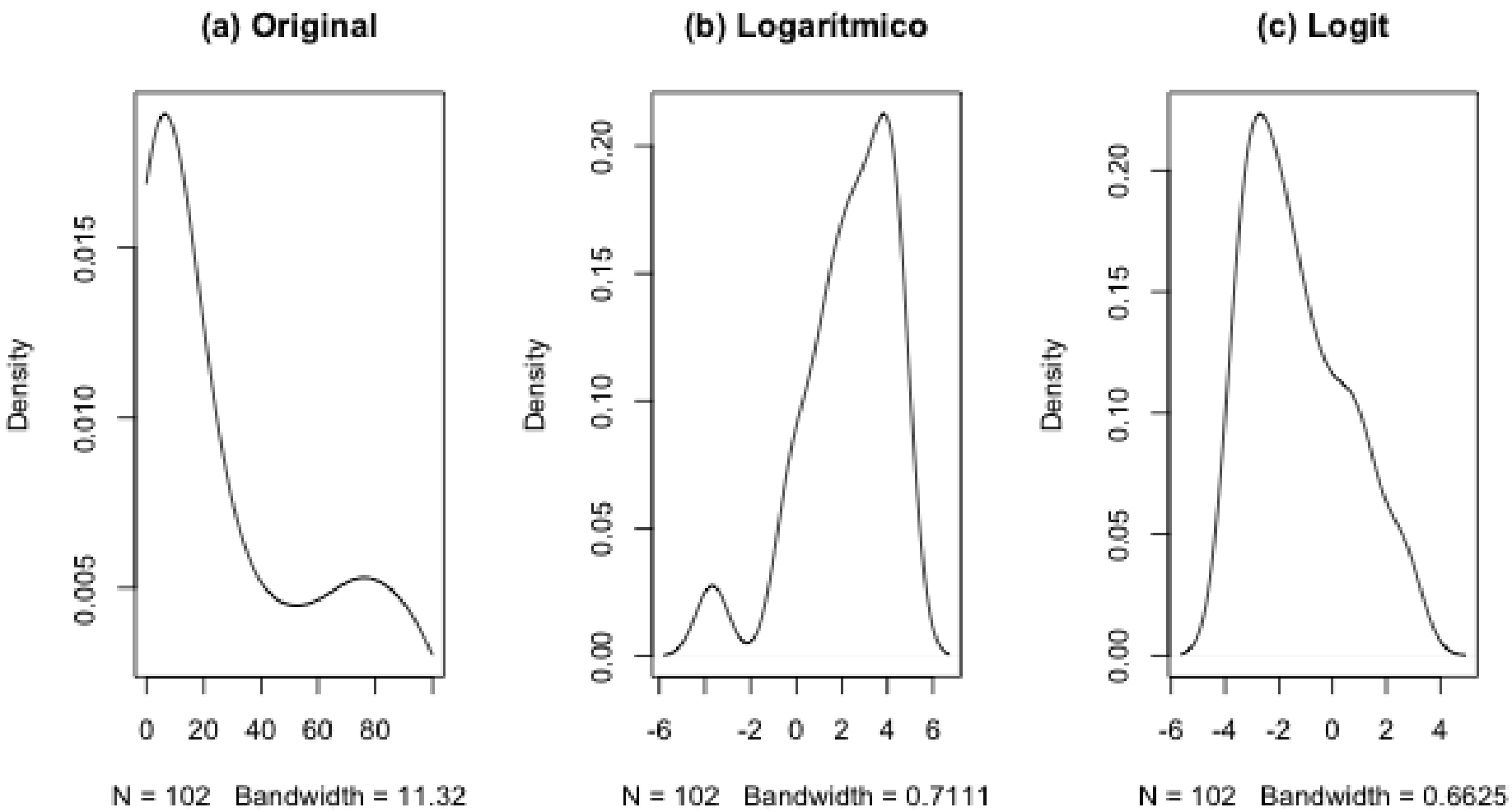
Resultado da Transformação

```
##      Min.   1st Qu.    Median      Mean   3rd Qu.      Max.
## -8.29400 -3.28300 -1.84700 -1.77800  0.08916  3.67800
```

Nova distribuição Transformada com *logit*



Resumo das Transformações *log* e *logit*

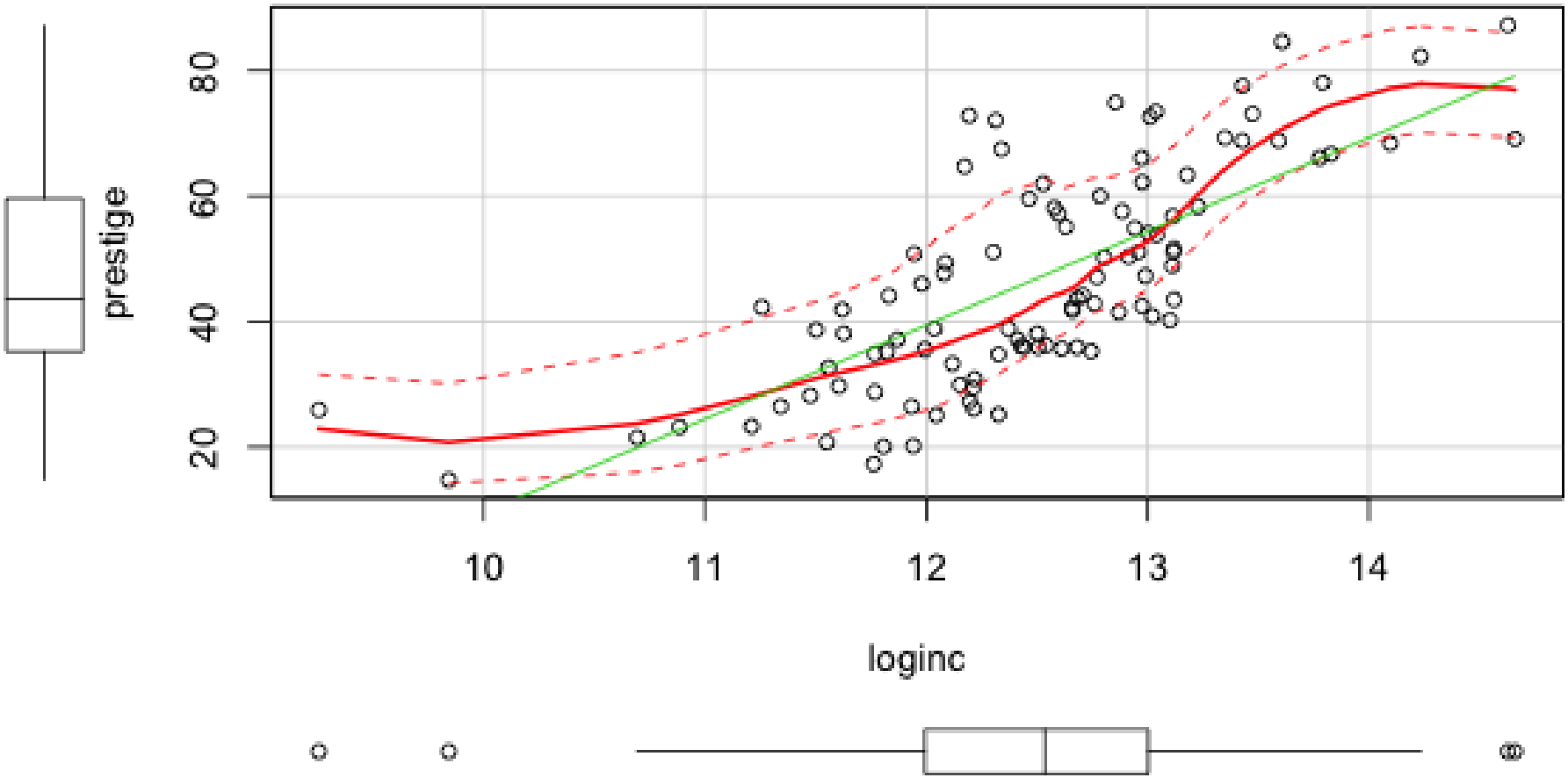


Transformação da Variável `income`

- Neste caso, renda normalmente usa a transformação *log*

```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##   9.255  12.000  12.530  12.490  13.000  14.660
```

Scatterplot com transformação da `income`



Integrar Transformações no Dataset

- Agora que testamos as transformações, podemos integrar elas no dataset
- Para `women` usaremos a transformação *logit*

```
Prestige <- mutate(Prestige,
                   womenlogit = logit((Prestige$women + 0.025)/100)
                   inclog = log2(income))
```

Vericação das Correlações

```
##                prestige education  womenlogit     inclog
## prestige     1.00000000 0.8501769 -0.03476255  0.7410561
## education    0.85017689 1.0000000  0.16670369  0.5481051
## womenlogit -0.03476255 0.1667037  1.00000000 -0.4386544
## inclog       0.74105613 0.5481051 -0.43865438  1.0000000
```

Regressão

- Primeiro modelo só vai usar os variáveis numéricas
- Outro regressor, `type`, é nominal e precisa tratamento especial
- Usaremos os mesmos símbolos de formula que na regressão simples
  - "$\sim$" (til) para separar as variáveis dependente das independentes
  - "$+$" (mais) para separar os termos independentes
- Nas formulas, não precisa especificar o nome de dataframe
  - Faz isso com o parâmetro `data = Prestige`

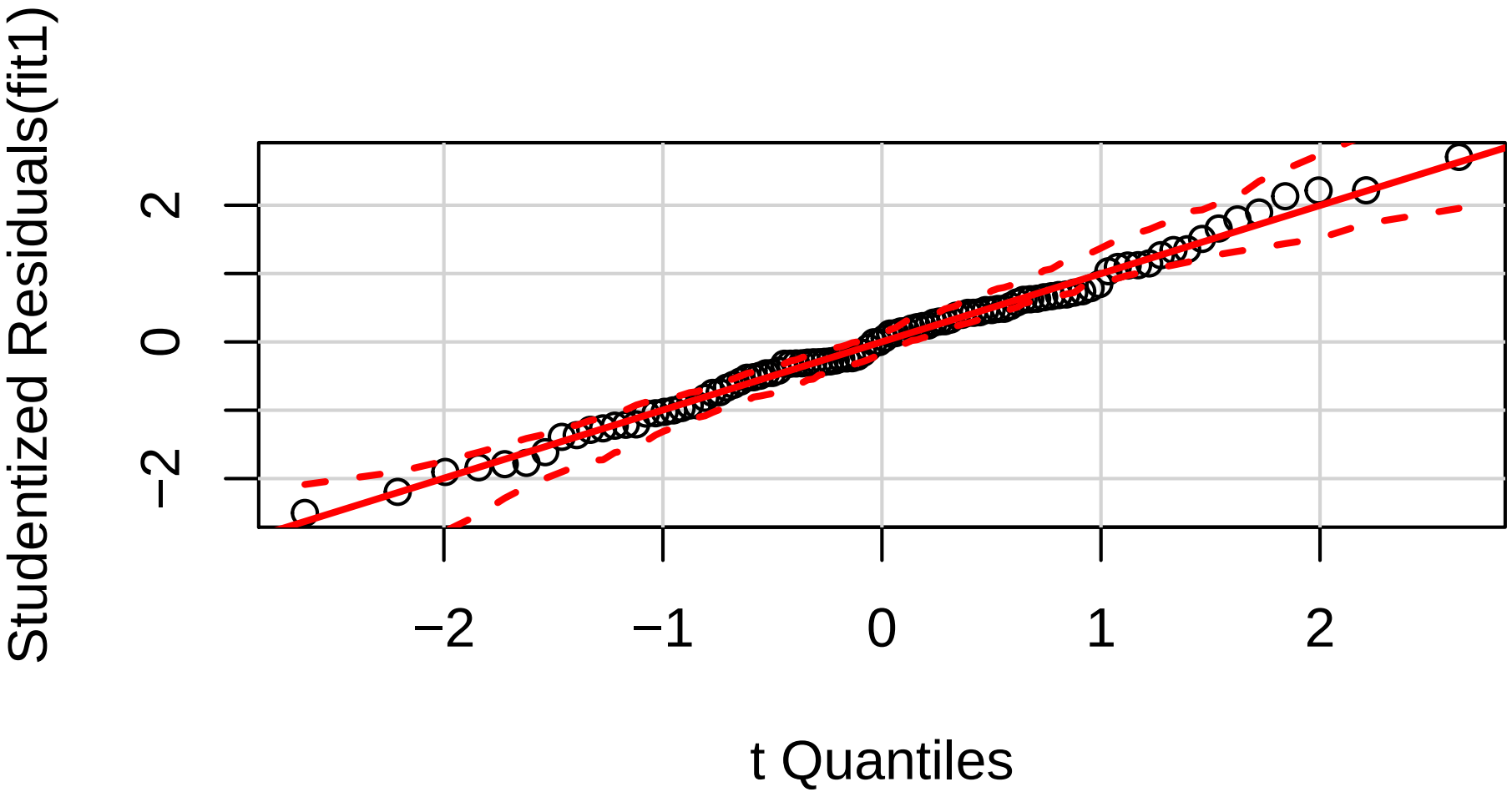
Modelo 1

```
fit1 <- lm(prestige ~ inclog + education + womenlogit,
           data = Prestige)
```

Resumo do Modelo 1

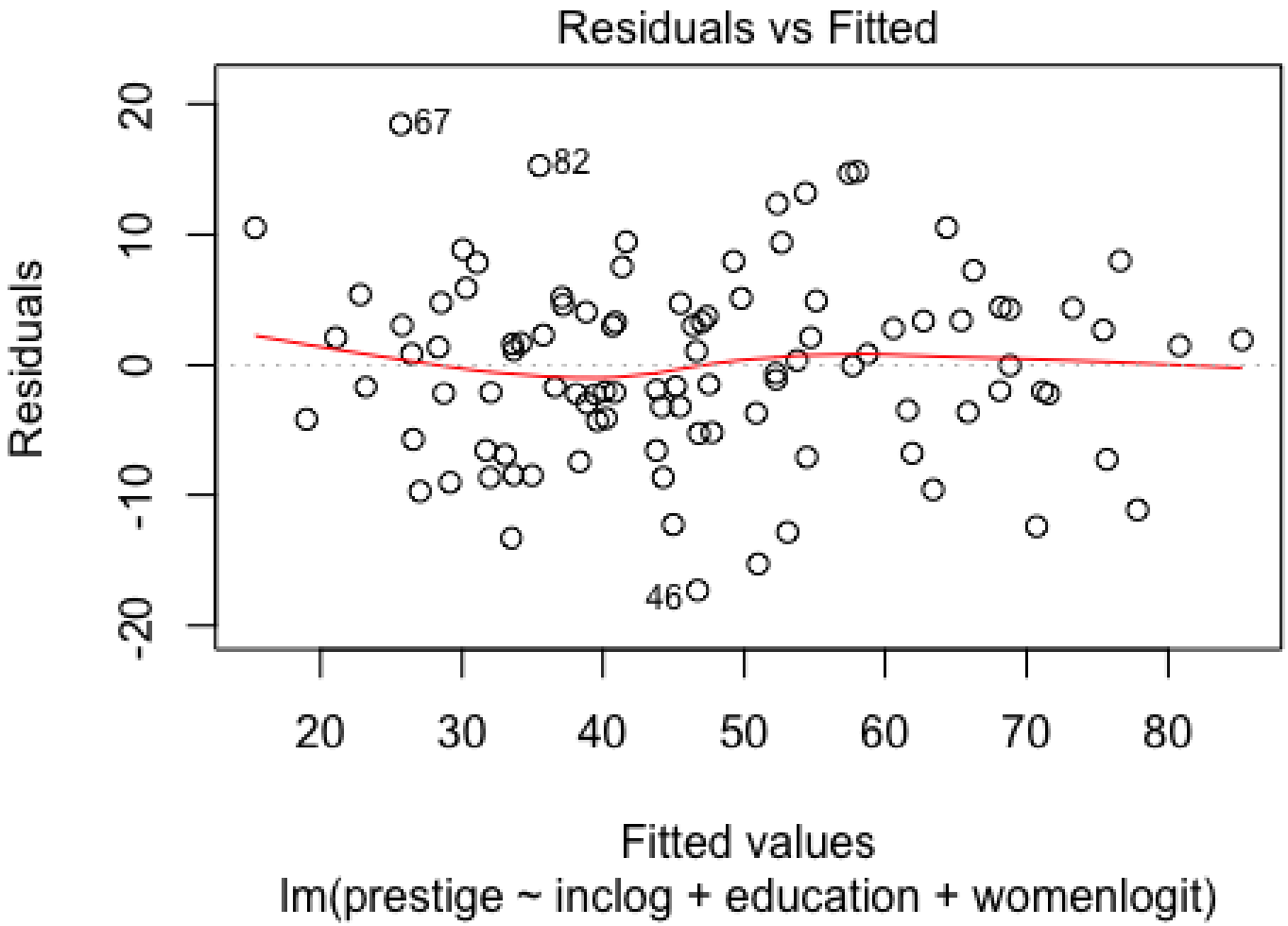
```
Call:
lm(formula = prestige ~ inclog + education + womenlogit, data = Prestige)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-17.2972  -4.1876   0.1766   4.3429  18.4359

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -103.0222    13.3980  -7.689 1.16e-11 ***
inclog         8.7821     1.2999   6.756 1.02e-09 ***
education      3.7967     0.3705  10.247  < 2e-16 ***
womenlogit     0.3609     0.3529   1.023    0.309
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 7.143 on 98 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8327,    Adjusted R-squared:  0.8276
F-statistic: 162.6 on 3 and 98 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

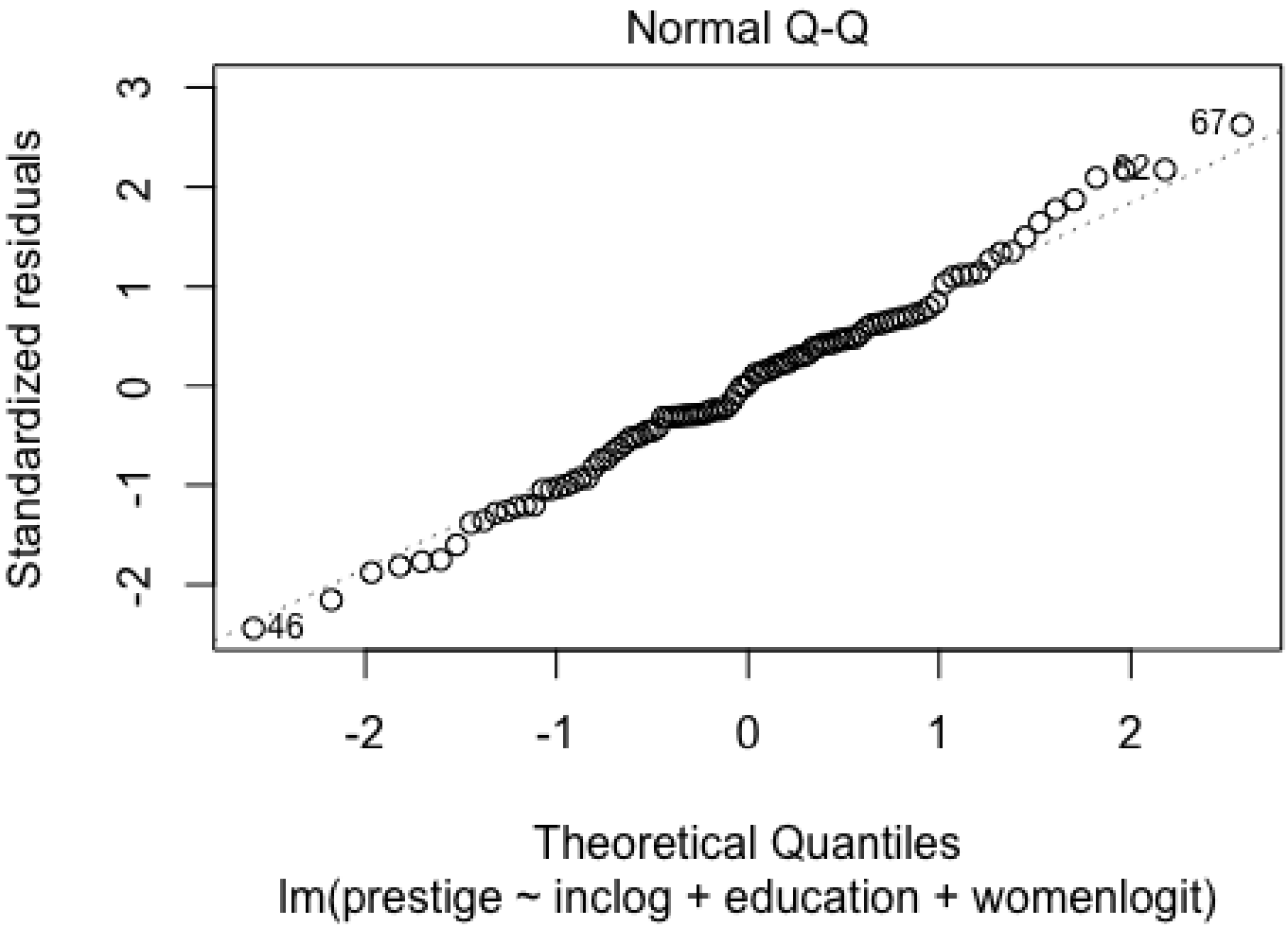
qqplot do Modelo 1

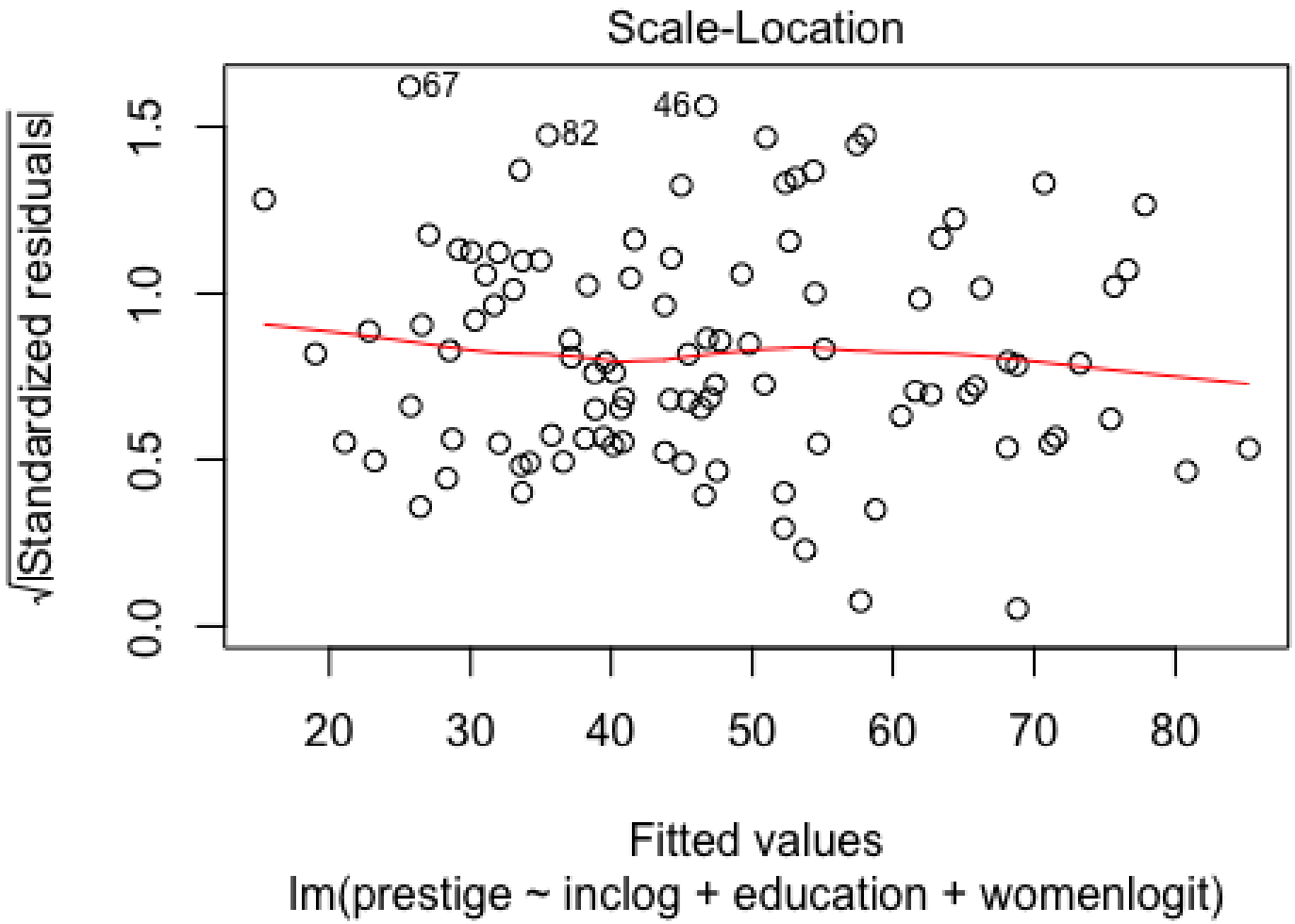


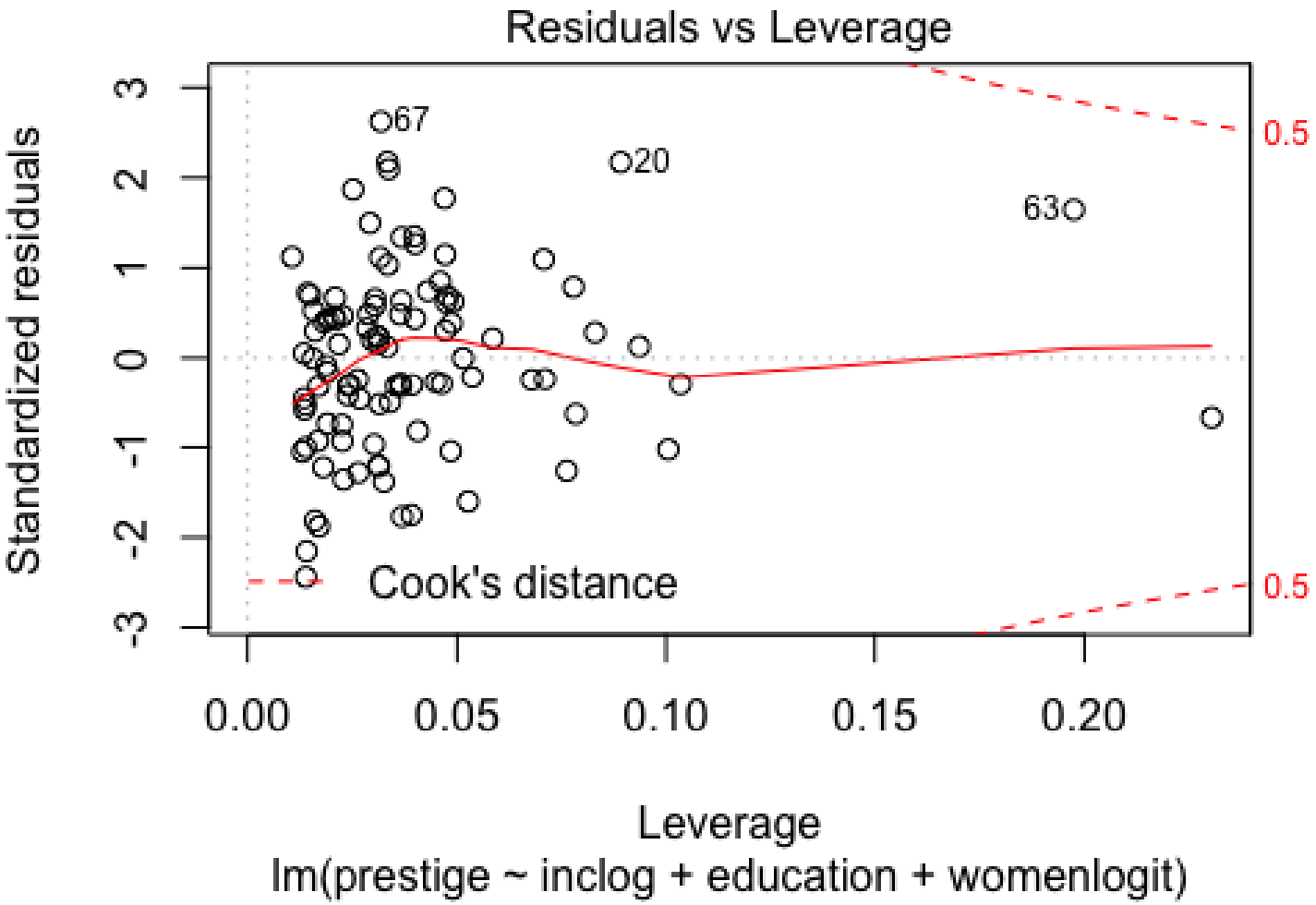
Plotagens Diagnósticos do Modelo

```
par(mfrow=c(2,2))
plot(fit1)
par(mfrow=c(1,1))
```


Residuals vs Fitted
Residuals
20
10
0
-10
-20
67
82
46
20
30
40
50
60
70
80
Fitted values
lm(prestige ~ inclog + education + womenlogit)


Normal Q-Q
Standardized residuals
3
2
1
0
-1
-2
67
62
46
-2
-1
0
1
2
Theoretical Quantiles
lm(prestige ~ inclog + education + womenlogit)


Scale-Location
√|Standardized residuals|
0.0
0.5
1.0
1.5
67
46
82
20
30
40
50
60
70
80
Fitted values
lm(prestige ~ inclog + education + womenlogit)


Residuals vs Leverage
Standardized residuals
3
2
1
0
-1
-2
-3
67
20
63
0.5
0.5
Cook's distance
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
Leverage
lm(prestige ~ inclog + education + womenlogit)

** NOT BAD**

- O modelo explica 83% da variância

** NOT BAD**

- O modelo explica 83% da variância
- `women` faz pouco contribuição para modelo

** NOT BAD**

- O modelo explica 83% da variância
- `women` faz pouco contribuição para modelo
- como prevista nas correlações

Modelo 2 - Sem women

```
fit2 <- lm(prestige ~ inclog + education,
           data = Prestige)
```

Resumo do Modelo 2

```
Call:
lm(formula = prestige ~ inclog + education, data = Prestige)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-17.0346  -4.5657  -0.1857   4.0577  18.1270

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -95.1940    10.9979  -8.656 9.27e-14 ***
inclog        7.9278     0.9961   7.959 2.94e-12 ***
education     4.0020     0.3115  12.846  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 7.145 on 99 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.831,     Adjusted R-squared:  0.8275
F-statistic: 243.3 on 2 and 99 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

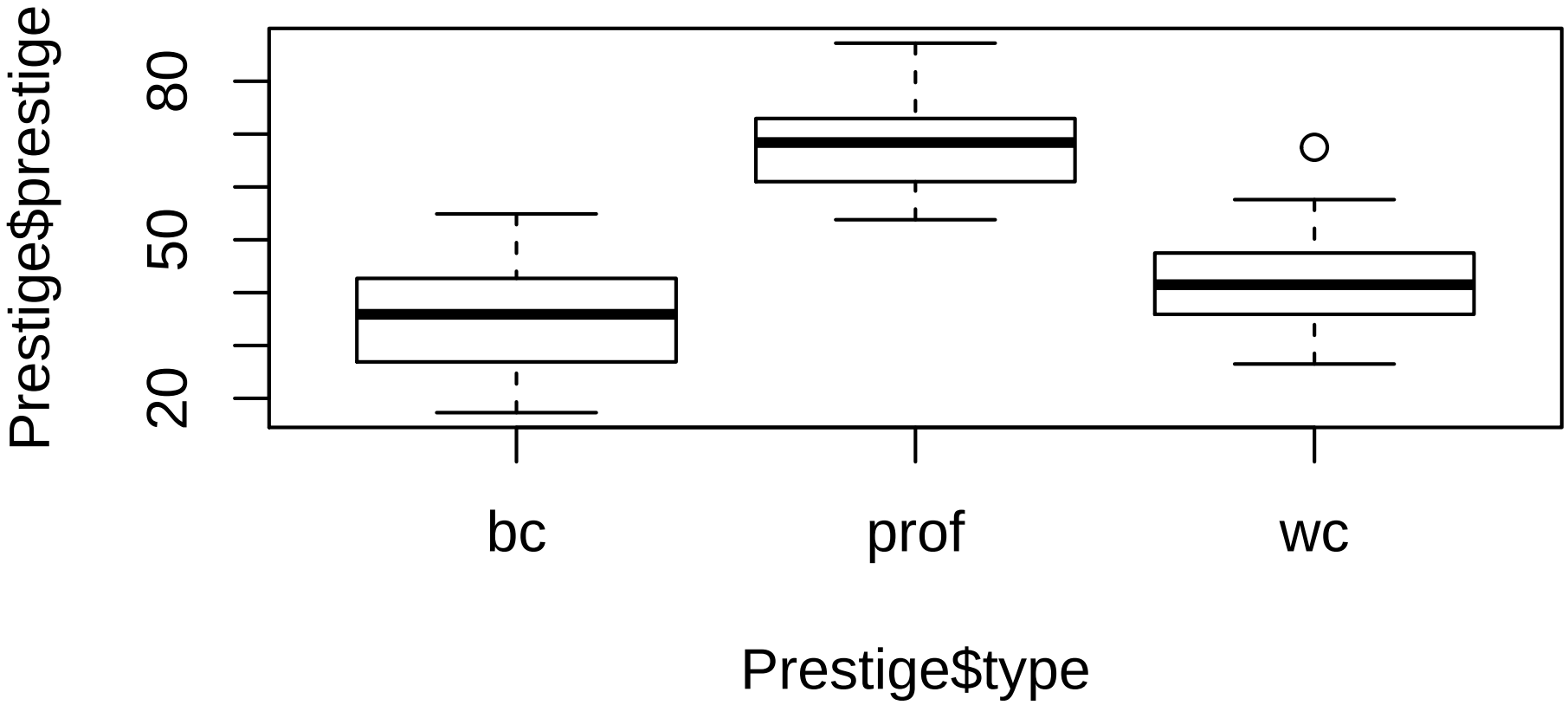
Exclusão de `women`

- Como indica os R^2, o modelo fica o mesmo sem a variável `women`

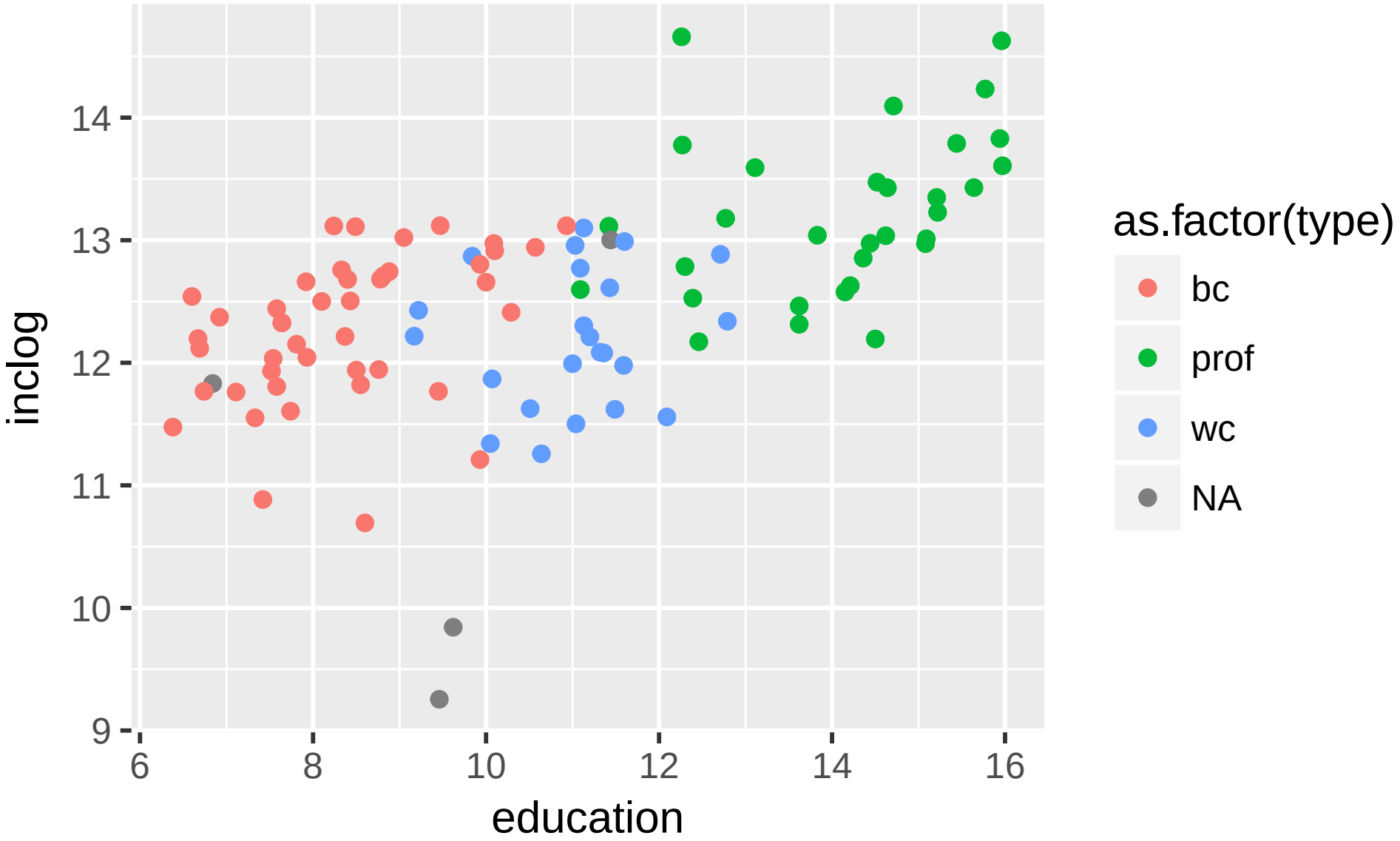
Variável `type` no Modelo

- Variável nominal/qualitativa
- 2 gráficos mostra o efeito da variável no resultado
  - boxplot mostrando `prestige` contra as categorias de `type`
  - scatterplot de `education` contra `prestige` com os tipos em cores

Boxplot



Scatterplot



R Cria Variáveis "Dummy" para os Níveis da Variável Nominal

- Pode ver com o `model.matrix` (parcial)

```
with(Prestige, model.matrix(~ type)[c(1:5, 50:54),])
```

```
##    (Intercept) typeprof typewc
## 1            1        1      0
## 2            1        1      0
## 3            1        1      0
## 4            1        1      0
## 5            1        1      0
## 51           1        0      1
## 52           1        0      1
## 54           1        0      0
## 55           1        0      1
## 56           1        0      1
```

Modelo com type

```
fit3 <- lm(prestige ~ inclog + education + type,
           data = Prestige)
```

Resumo de Modelo 3

```
Call:
lm(formula = prestige ~ inclog + education + type, data = Prestige)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-13.511  -3.746   1.011   4.356  18.438

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value     Pr(>|t|)
(Intercept) -81.2019    13.7431  -5.909 0.0000000563 ***
inclog        7.2694     1.1900   6.109 0.0000000231 ***
education     3.2845     0.6081   5.401 0.0000005058 ***
typeprof      6.7509     3.6185   1.866       0.0652 .
typewc       -1.4394     2.3780  -0.605       0.5465
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 6.637 on 93 degrees of freedom
  (4 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared:  0.8555,    Adjusted R-squared:  0.8493
F-statistic: 137.6 on 4 and 93 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Interações Entre Variáveis

- Parecem de existir uma relação entre `type` e `income` e `education`.
- `type` não parece de ser realmente independente das outras
- Podemos avaliar esta independência por incluir termos de interação entre as variáveis
- Usamos o símbolo ":" (dois pontos) para indicar interação
- E.g., `education:type`
- Programa vai aumentar mais variáveis "dummy" para tomar conta das interações

model.matrix com Interação

```
model.matrix(~ type + education + education:type,
             data = Prestige)[c(1:5, 50:54),]
```

model.matrix

	typeprof:education	typewc:education
gov.administrators	13.11	0.00
general.managers	12.26	0.00
accountants	12.77	0.00
purchasing.officers	11.42	0.00
chemists	14.62	0.00
commercial.travellers	0.00	11.13
sales.clerks	0.00	10.05
service.station.attendant	0.00	0.00
insurance.agents	0.00	11.60
real.estate.salesmen	0.00	11.09
buyers	0.00	11.03

Executar o Modelo com Interação

```
fit5 <- lm(prestige ~ inclog + education + type +
                inclog:type + education:type, data = Prestige)
```

Resumo do Modelo com Interação

```
Call:
lm(formula = prestige ~ inclog + education + type + inclog:type +
    education:type, data = Prestige)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-13.970  -4.124   1.206   3.829  18.059

Coefficients:
                   Estimate Std. Error t value     Pr(>|t|)
(Intercept)        -120.0459    20.1576  -5.955 0.0000000507 ***
inclog               11.0782     1.8063   6.133 0.0000000232 ***
education             2.3357     0.9277   2.518      0.01360 *
typeprof             85.1601    31.1810   2.731      0.00761 **
typewc               30.2412    37.9788   0.796      0.42800
inclog:typeprof      -6.5356     2.6167  -2.498      0.01434 *
inclog:typewc        -5.6530     3.0519  -1.852      0.06730 .
education:typeprof    0.6974     1.2895   0.541      0.58998
education:typewc      3.6400     1.7589   2.069      0.04140 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 6.409 on 89 degrees of freedom
  (4 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared:  0.871,     Adjusted R-squared:  0.8595
F-statistic: 75.15 on 8 and 89 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Resultado do Modelo

- Agora `inclog` tem o maior valor t e explica mais do `prestige` que as outras variáveis

Resultado do Modelo

- Agora `inclog` tem o maior valor t e explica mais do `prestige` que as outras variáveis
- `education` recuou em importância por causa da interação com `type`

Resultado do Modelo

- Agora `inclog` tem o maior valor t e explica mais do `prestige` que as outras variáveis
- `education` recuou em importância por causa da interação com `type`
- Modelo agora diz que alguém com uma um trabalho que renda bastante recebe mais prestígio que de alguém numa profissão que precisa alto grau de educação

Próxima Aula - Regressão Lógistica

- Previsão de probabilidades e odds