

计算电磁学笔记

上海交通大学 电子工程系 劳佳

前　　言

这本笔记是本人 2005 年至 2008 年,在上海交通大学电子工程系就读电磁场与微波技术专业研究生期间所做的。笔记里面大部分章节内容,来自于金荣洪教授所讲授的《计算电磁学》以及《导波系统的电磁原理和数值解法》两门课程的讲义,小部分涉及到周希朗教授《微波应用数学》课程内容,也包括本人当时所阅读部分书籍和论文时所整理的一些资料。本人并重绘了所有插图。

当然,作为“笔记”,意味着其中创新内容近乎于零,大部分是抄书抄讲义抄论文。有些经典书籍,图书馆多年散佚殆尽,仅存复印本辗转流传,重新排印绘图之后,也能比原书易读些,自己还不免欣赏一番;有些论文或者段落,看过一遍无甚印象,算过抄过一遍,倒也有些心得。如今虽复印扫描手段便利,但“三读不如一抄”,此法虽笨,也还有益。受当时时间所限,部分章节(如几何绕射理论一章)内容没有整理完整,整体来看也弄得比较仓促。参考文献尽量整理了一些,但仍旧不免有遗漏。

时隔四年,看到这本承载着当时读研时小小的学术梦想和学习热情的讲义,仍然不免感慨。虽然现在不再从事这个行业,但当时付出的时间和努力,也记录着年轻的时候,曾经认真地想要做好一件事情。现在,在征得了金荣洪教授的同意之后,将这本讲义放在网站上公开。希望读到这本讲义的人,能够得到一些助益和收获。笔记中的错漏必然有不少,如蒙您指出,不胜感激。

劳佳

2012 年 5 月于宾州

目 录

前 言	ii
第1章 绪论	1
1.1 电磁场问题及求解方法	1
1.1.1 电磁场边值问题的三类求解方法	1
1.1.2 解析法	1
1.1.3 近似法	2
1.2 电磁场的数值分析方法简介	3
第2章 矢量及并矢分析	6
2.1 广义正交曲线坐标系	6
2.1.1 单位矢量与度量因子	6
2.1.2 坐标变换下单位矢量间的关系	7
2.1.3 变量分离的充要条件	8
2.2 电磁理论中的符号矢量方法	10
2.2.1 传统算子理论中的问题	11
2.2.2 新算符的引入	12
2.2.3 符号矢量方法	13
2.2.4 其它常用运算及矢量恒等式	15
2.3 并矢及其运算	17
2.3.1 并矢函数	17
2.3.2 并矢的分析	19
2.4 矢量和并矢积分定理	20
2.4.1 基本积分定理	20
2.4.2 Green 定理	21
第3章 电磁场中的若干问题	23
3.1 电磁位函数	23
3.1.1 标量电位与矢量磁位	23
3.1.2 标量磁位与矢量电位	24
3.1.3 Coulomb 规范	25
3.1.4 Hertz 位	26
3.1.5 Debye 位	28

3.2 矢量波函数	30
3.2.1 矢量波函数的引入	30
3.2.2 矢量波函数基	31
3.3 并矢格林函数	31
3.3.1 并矢格林函数的引出	31
3.3.2 并矢格林函数的解	33
3.3.3 并矢格林函数的对称性	35
3.4 积分方程	36
3.4.1 标量方程	36
3.4.2 矢量方程	41
第4章 变分问题	47
4.1 变分和变分方程	47
4.2 变分问题及 Euler 边值问题	48
4.2.1 简单泛函	48
4.2.2 含一阶导函数的泛函	48
4.2.3 含一阶偏导数的泛函	49
4.2.4 含二阶偏导数(不含一阶偏导)的泛函	51
4.2.5 约束条件下的变分问题	52
4.2.6 微分方程形式的约束条件	52
4.2.7 泛函方程形式的约束条件	53
4.3 线性算子方程化为变分方程	54
4.3.1 正算子的确定性方程	54
4.3.2 下有界算子的本征值方程	55
4.3.3 正定算子的广义本征值方程	57
4.3.4 非自伴算子的确定性方程	57
第5章 各种泛函解法	59
5.1 概述	59
5.2 Rayleigh-Ritz 法	59
5.2.1 根据物理原理的直接变分解	60
5.2.2 确定性算子方程的变分解	60
5.2.3 广义本征值算子方程的变分解	61
5.2.4 基函数序列的选择	62
5.3 近似变分解的改进	64
5.3.1 Ritz 法的误差估值	64

5.3.2 直接变分问题中泛函极值的上、下界.....	64
5.3.3 Trefftz 法.....	65
5.3.4 Weinstein 法.....	65
5.3.5 调节边界法.....	66
5.4 变分法在电磁场问题中的计算实例.....	67
5.4.1 波导管传播常数的变分解	67
5.4.2 细天线输入阻抗的变分解	70
5.5 加权余量法	73
5.6 矩量法.....	75
5.7 边界积分法	76
5.7.1 内域基的边界积分法.....	76
5.7.2 Green 函数法的应用.....	78
5.7.3 边界基的边界积分法.....	79
5.8 有限元和边界元法.....	80
5.8.1 有限元法.....	80
5.8.2 矩量法	82
5.8.3 单矩法(单边矩量法)	82
5.8.4 边界元法.....	84
5.9 各种泛函解法的关系.....	85
第6章 矩量法.....	86
6.1 矩量法的基本原理.....	86
6.1.1 权函数的选择	88
6.1.2 基函数的选择	93
6.1.3 矩量法中的若干问题.....	97
6.2 近似算子和扩展算子.....	98
6.2.1 近似算子	98
6.2.2 扩展算子	100
6.3 二维散射场的矩量法解	101
6.3.1 二维电磁场的 Green 函数.....	102
6.3.2 导体柱体 TM 场的矩量法解	103
6.3.3 应用实例.....	106
6.4 线形天线中的矩量法解	108
6.4.1 线天线的积分方程	108
6.4.2 矩量法解	110
6.4.3 线形天线阵列的矩量法解	113

6.5 任意弯曲细线天线的矩量法解	114
6.5.1 电流分布的近似算子方程	114
6.5.2 电流分布的矩量法解	115
6.5.3 天线参数的计算	118
6.5.4 应用实例	119
6.6 本征值问题的矩量法解	120
6.7 非均匀传输线本征值问题	122
6.7.1 二阶微分算子的矩量法解	123
6.7.2 一阶微分算子的矩量法解	125
6.8 柱形波导本征值问题的矩量法解	127
6.9 矩量法求解中的一些关键技术	128
6.9.1 迭代技术	129
6.9.2 空间分解技术	132
6.9.3 对角化技术	134
第7章 测度不变方程法	137
7.1 基本思想	137
7.2 理论证明	141
7.3 时域 MEI 方法	142
7.3.1 基本原理	142
7.3.2 MEI 系数的测试	143
7.4 表面 MEI 方法	145
7.5 MEI 方法的一些新发展	147
第8章 谱域方法	148
8.1 基本概念及其应用简介	148
8.2 频率选择表面的分析	149
8.2.1 频率选择表面	149
8.2.2 FSS 散射问题的建立	149
8.2.3 矩量法解算子方程	154
8.2.4 场分解以及传输系数的计算	161
8.3 多层介质问题	162
8.3.1 多层介质的一般谱域格林函数	163
8.3.2 有厚度有耗传输线的谱域解法	167
第9章 直线法	170
9.1 基本概念	170

9.2 应用实例.....	171
9.2.1 带调谐片的微带线结构.....	171
9.2.2 平面谐振腔的分析	174
9.2.3 误差分析及精度改进.....	177
9.3 直线法新进展	177
第 10 章 几何绕射理论	179
10.1基本概念.....	179
10.1.1 高频的几何光学近似.....	179
10.1.2 几何光学的强度定律.....	181
10.1.3 均匀媒质中射线场的基本表达式.....	182
10.1.4 Fermat 原理	183
10.1.5 几何绕射理论的基本概念	183
10.2理想导电劈	187
10.2.1 理想导电劈的本征函数解	187
10.2.2 绕射场的分离	189
第 11 章 分数阶 Fourier 分析	191
11.1分数阶微积分	191
11.1.1 定义的引入.....	192
11.1.2 分数阶微积分的性质.....	195
11.2分数阶 Fourier 变换	197
11.2.1 FRFT 的定义	197
11.2.2 FRFT 的性质	198
11.2.3 FRFT 与时频分析.....	200
附录 A 常用广义正交曲线坐标系.....	202
附录 B 泛函基础	209
B.1 集合、映射与 Hilbert 空间.....	209
B.1.1 集合	209
B.1.2 映射——运算规则的拓扑表示	210
B.1.3 Hilbert 空间	211
B.2 算子	213
B.2.1 线性算子.....	213
B.2.2 对称算子、正定算子和自伴算子	214

B.3 自伴边值问题	216
B.3.1 Sturm-Liouville (S-L) 边值问题	216
B.3.2 Poisson 边值问题	217
B.3.3 Helmholtz 边值问题	218
B.3.4 Fredholm 边值问题	219
参考文献	221

第1章 绪论

1.1 电磁场问题及求解方法

自 1864 年 Maxwell 以统一的数学模型总结了物理学的基本电磁定律, 电磁场理论作为物理学的一个活跃分支, 获得了长足的发展, 经历了经典电动力学 → 相对论电动力学、量子电动力学的飞跃, 而且作为无线电工程的理论基础, 在各类边值问题的稳态解、瞬态解、边值问题的反演理论等方面进行了广泛而深入的研究. 但是在电磁场工程应用中面临的基本问题仍然是求解各种复杂形状和媒质的边值问题. 这也是本课程的主要任务.

电磁现象是自然界最基本的现象之一. 本课程是一门非常基础性的课程, 在现代无线通信、光通信、微电子学、生命科学、生物医学工程、电力电机、微纳米科学等很多领域都有重要应用.

电磁场边值问题三要素 包含电磁源分布、媒质及边界条件、电磁场分布.

三类任务

本征值问题: 媒质和边界条件 → 求可能存在的场分布模式 (如矩形波导管中的本征模式);

场分析: 媒质、边条以及源分布 → 实际场分布 (如室内场分布);

逆散射: 媒质和边条及实际场分布 → 求源分布 (雷达).

1.1.1 电磁场边值问题的三类求解方法

解析法: 所有这些问题仅在某些极少数的情况下 (简单媒质和边条) 才有解析形式的严格解.

近似法: 微扰法、变分法、几何光学、物理光学、几何绕射理论等

数值法: 算子方程的离散化、计算方法、计算机技术. 在大多数的实际问题中必须用数值解法, 如矩量法 (MoM)、有限元法 (FEM)、边界元法 (BEM)、有限差分法 (FDM)、直线法 (LM)、小波法 (wavelet)、传输线矩阵法 (TLM) 等.

1.1.2 解析法

严格建立和求解偏微分方程或积分方程

- + 可将解表示为已知函数的显式, 从而可以得到精确的数字答案;
- + 可以作为近似解和数值解的检验标准;
- + 结果与物理参数的内在关系明确, 有利于设计. 大多数情况下物理意义明确.
- 只有少数情况可以用解析法求解

分离变量法 求解偏微分方程的经典方法, 是将偏微分方程化解为几个常微分方程, 然后求常微分方程, 解为本征函数或其组合.

- 要求所选用的坐标系变量可分离. 常用的十三中坐标系中只有十一种适用. 要求边界与坐标系共面;
- 要求偏微分方程是齐次的. 对于非齐次偏微分方程, 只有自由项和系数满足级数展开和积分变换的条件, 才能应用.

格林函数法 先求单位源产生的场分布 — Green 函数, 然后在乘以源分布在源所在区域积分得到总场.

- + 可以利用 δ 函数的性质, 为 Green 函数的求解带来便利;
- + 只要已知一定条件下的 Green 函数, 不论源分布如何变化, 都可以直接应用.
- 对于许多问题, Green 函数的求解相当困难;
- Sommerfeld 类积分十分困难.

1.1.3 近似法

本质上是一种近似的解析法, 即在某些假设条件下对问题简化. 可以解决一类解析法无法解决的问题. 也可以将解析法可以解决的问题用一种更简便的方式表达.

- 随着所期望的求解精度的提高, 计算量增大, 而减少计算量的直接后果的是解的精度不满足要求.
- 假设条件限制了适用范围. 使用时特别要注意前提条件是什么.

常用的有: 逐步逼近法、微扰法、变分法、迭代变分法、几何光学法、物理光学法、几何绕射理论和物理绕射理论等.

微扰法 在同一区域、同样边界条件下, 考虑两个方程: 一个有已知严格解和另一个待求. 要求两者相似而且接近. 前者的解作为零阶近似, 加入微扰后逐步逼近待求方程的解.

如已知方程

$$L(\varphi) + \lambda\varphi = 0 \quad (1.1)$$

其中 L 为微分算子, φ 和 λ 分别为本征函数和本征值.

待求方程

$$L(\varphi) + (\lambda' - \varepsilon u)\varphi = 0 \quad (1.2)$$

φ, λ' 分别为本征函数和本征值, u 为所考虑区域的连续函数. ε 为微扰参数, $-\varepsilon u\varphi$ 就是微扰项. 将 φ, λ' 关于 ε 展开:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \varepsilon^i \\ \lambda' = \lambda + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \varepsilon^i \end{cases} \quad (1.3)$$

将式 (1.3) 代入式 (1.2), 求解得到 A_i, B_i 即可. 其缺点是要求微扰量很小.

变分法 首先将偏微分方程化为相应的变分形式, 即找到一个包含待求函数的泛函, 而且要求该泛函有极值存在. 假设一个试探函数, 它与待求函数满足同样的边界条件和初始条件, 同时包括几个待定参数—变分参数. 由泛函对每一个变分参数的变分等于零得到变分参数—得到由试探函数和变分参数表示的解. 试探函数中的变分参数越多, 解越精确, 但工作量也越大. 也可以用迭代方式求解—逐步逼近法.

几何绕射理论 (GTD) 高频近似的经典方法为几何光学和物理光学法, 但其前提条件是频率趋向于无穷大(波长趋向于零), 因而所讨论的物体(散射体)的尺寸必须远大于波长时才能应用, 而且对于散射体的边缘、拐角、尖端或阴影区都不能应用. GTD 近似条件类似但适当放宽以解决这些问题(散射体的边缘、拐角、尖端或阴影区等).

GTD 的基础是: 广义费马原理 → 绕射定律 → 绕射线传播路径; 绕射场沿该路径传播;

局部性原理: 绕射场取决于绕射点邻域内散射体的物理特性和几何特性;

离开绕射点后绕射场仍然遵守几何光学定律, 即沿直线传播而且在绕射线管内能量守恒, 绕射场相位延迟等于媒质的传播常数与传播距离的乘积.

基本思路: 典型问题的严格解 → 由局部性原理得到一般问题的局部解 → 所有绕射场迭加得到总的绕射场.

- 典型问题的解的数量有限. 限制应用范围;
- 复杂问题绕射点的确定比较困难, 实际上其本身就已经是一个极值问题;
- GTD 在散焦区失效—已经被 UTD、等效边缘流等方法克服.

1.2 电磁场的数值分析方法简介

- + 使得复杂问题的求解成为可能
- + 为理论分析、工程设计带来了变革 → 新的方法、设计思想不断涌现
- + 从数学理论上, 各种方法之间由一定的内在联系, 但工程应用中各有优缺点、互为补充 →
没有最好的, 只有对某一个问题最合适的;
- 也是一种近似方法, 它的正确与否必须用实验或其他可靠结果验证;
- 不是万能的, 单纯的数值方法往往计算量十分惊人, 受计算机的承受能力、工作量、计算成本等方面的制约. 即任何数值方法是否有效必须考虑计算量、设计成本、误差能否接受、结果是否稳定等;
- 物理意义不明. 由分析结果进行设计时问题转化为一个计算量庞大的优化问题.

有限差分法 (FDM: Finite Difference Method)

- 最早出现在 50 年代中期: 力学

- 利用差分原理将电磁场连续场域问题变换为离散系统问题求解, 也就是用离散网格上的值逼近连续场分布
- 关键是场域和边界上偏微分方程的差分格式
- + 直观、简单. 对边值问题、初值问题中各类偏、常微分方程, 椭圆、双曲、抛物型二阶线性方程以至高阶方程均可适用.
- 复杂边界形状处理困难, 三维问题处理复杂、计算量大, 开放区域吸收边界条件

有限元法 (FEM: Finite Element Method)

- 最早出现在 1960 年, R.W.Clough: 力学
- 变分原理和剖分插值为基础, 可以认为是有限差分法与变分法中 Ritz 法的结合. 将场域划分为许多小区域, 在每一个小区域上建立场元方程并用变分求泛函极值的方式建立网格上场元之间的关系, 最后再联立成整个场域的线性代数方程.
- + 适用于处理复杂边界、复杂媒质的情况
- + 易于标准化处理, 已有通用程序、软件
- + 计算精度高
- 分割的单元数和节点数较多, 导致问题的初始化复杂
- 代数方程阶数高, 计算量大, 计算成本高, 尤其对三维问题
- 无限区域的处理比较困难, 而且误差大.

边界元法 (BEM: Boundary Element Method)

- 70 年代中期: 力学, 80 年代移植到电磁场领域
- 是边界积分法和有限元法的结合
- 将内域场用边界积分表示为边界上的场, 再在边界上离散化处理.
- + 降维 → 三维问题的边界是二维, 成为二维问题, 计算量大大减少
- 在场域中利用格林函数, 因而不适用含有非均匀媒质的情况
- 对多种媒质的问题必须处理各媒质区域的边界, 然后构成联立方程, 比较复杂
- 所得代数方程的系数矩阵不是稀疏矩阵, 因而所有元素都要用数值方式计算, 增加了计算量

矩量法 (MoM: Moment of Method)

- 1968 年 R.F.Harrington 提出. 直接出现在电磁场领域
- 适用于各种类型的线性算子方程, 算子可以是微分、积分、矩阵以及他们的组合
- 将待求函数用一组基函数展开, 再选择一组权函数对其进行加权内积, 将算子方程化为代数方程求解
- 也是一种内域法 (与 FEM 一样), 因而计算量大
- 目前已经成为电磁场数值计算中使用最多、应用最广泛的一种方法

谱域法 (SDM: Spectral Domain Method)

- 1971 年 R.Mitra 等提出, T.Itoh 对此作了较大的贡献
- SDM 本质上是一种积分变换方法
- 时域信号 — (傅立叶变换) — 频域信号
- 空域电磁波 — (傅立叶变换) — 谱域电磁波 (直角坐标的变换是平面波的迭加, 圆柱坐标内的变换是柱面波的迭加)
- + 降维, 简化问题, 尤其适合于处理多层媒质问题
- 谱域格林函数的求解
- 傅立叶反变换, 即谱域积分, 收敛慢.

奇异点展开法 (SEM: Singularity Extended Method)

主要是描述天线及散射体的暂态特性, 最早由 Prony 在 1975 年提出了奇点直接提取方法. 其基本概念是将电磁场响应用复频率平面内的奇点来描述. 如果用给定的瞬态波投射到目标上, 则从目标上散射回来的瞬态波与原来的波形不同, 称为响应波. 他们之间存在转换函数关系, 这个关系就表征了目标的固有特征. 因此响应波可以用目标转换函数的极点位置和留数来描述 → 目标不同, 响应波不同, 极点位置和留数也不同 → 确定目标形状和性质 → 用于目标识别.

关键是极点提取, 有 Prony 法、POF (Pencil of Function) 法、Modified FFT 法、相关矩阵等.

以上介绍了几种数值方法, 还有一大类或者趋势是组合方法, 如: MM-GTD, BEM-FEM, MoM 与格林函数的结合等.

第2章 矢量及并矢分析

2.1 广义正交曲线坐标系

2.1.1 单位矢量与度量因子

设正交曲线坐标为 $p(u_1, u_2, u_3)$, 直角坐标: $p(x, y, z)$, 则有

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = g_1(x, y, z) \\ u_2 = g_2(x, y, z) \\ u_3 = g_3(x, y, z) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x = G_1(u_1, u_2, u_3) \\ y = G_2(u_1, u_2, u_3) \\ z = G_3(u_1, u_2, u_3) \end{array} \quad (2.1)$$

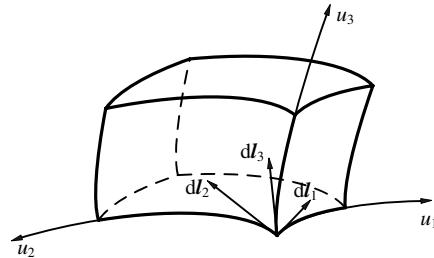


图 2.1 体积元

一般来说, 微分 du_i 并不一定具有长度量纲, 并沿着坐标曲线的弧长微元矢量 dl_i 的, 只有用适当的系数 h_i 乘 du_i 才得到弧长, 即

$$dl = \hat{u}_1 dl_1 + \hat{u}_2 dl_2 + \hat{u}_3 dl_3 = \hat{u}_1 h_1 du_1 + \hat{u}_2 h_2 du_2 + \hat{u}_3 h_3 du_3 \quad (2.2)$$

h_i 称为度量因子 (Lamé 系数), 其中 $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ 一般不是常矢量. 因为在直角坐标系下 $dl = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz$, 设 dl 只沿 u_1 线方向, u_2, u_3 为常数, 则

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \frac{dl}{h_1 du_1} = \frac{\hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz}{h_1 du_1} \\ &= \hat{x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial u_1} + \hat{y} \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial u_1} + \hat{z} \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ &= \hat{x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial G_1}{\partial u_1} + \hat{y} \frac{1}{h_1} \frac{\partial G_2}{\partial u_1} + \hat{z} \frac{1}{h_1} \frac{\partial G_3}{\partial u_1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial x}{\partial u_3} du_3$$

同理

$$\hat{u}_2 = \hat{x} \frac{1}{h_2} \frac{\partial G_1}{\partial u_2} + \hat{y} \frac{1}{h_2} \frac{\partial G_2}{\partial u_2} + \hat{z} \frac{1}{h_2} \frac{\partial G_3}{\partial u_2}. \quad (2.4)$$

$$\hat{u}_3 = \hat{x} \frac{1}{h_3} \frac{\partial G_1}{\partial u_3} + \hat{y} \frac{1}{h_3} \frac{\partial G_2}{\partial u_3} + \hat{z} \frac{1}{h_3} \frac{\partial G_3}{\partial u_3}. \quad (2.5)$$

其中 $h_i, i = 1, 2, 3$ 为度量因子, 以及已知 G_1, G_2, G_3 , 则 $\hat{\mathbf{u}}_i, i = 1, 2, 3$ 可确定. 由于 $d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{x}} dx + \hat{\mathbf{y}} dy + \hat{\mathbf{z}} dz$, 若只沿 u_1 方向, 则 $d\mathbf{l}_1 = d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial y}{\partial u_1} du_1 + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial z}{\partial u_1} du_1$, 所以

$$dl_1 = h_1 du_1 = \left[\left(\frac{\partial G_1}{\partial u_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial G_2}{\partial u_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial G_3}{\partial u_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} du_1$$

即

$$h_i = \sqrt{\left[\sum_{n=1}^3 \left(\frac{\partial G_n}{\partial u_i} \right)^2 \right]}, \quad i = 1, 2, 3$$

体积元为

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 = \frac{du_1 du_2 du_3}{|\nabla du_1| |\nabla du_2| |\nabla du_3|} \quad (2.6)$$

2.1.2 坐标变换下单位矢量间的关系

设

$$d\mathbf{l} = h_1 du_1 \hat{\mathbf{u}}_1 + h_2 du_2 \hat{\mathbf{u}}_2 + h_3 du_3 \hat{\mathbf{u}}_3 \quad (\text{变前的坐标系})$$

$$d\mathbf{l} = h'_1 du'_1 \hat{\mathbf{u}}'_1 + h'_2 du'_2 \hat{\mathbf{u}}'_2 + h'_3 du'_3 \hat{\mathbf{u}}'_3 \quad (\text{变后的坐标系})$$

于是有

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}'_1 = \frac{\partial \mathbf{l}}{h'_1 \partial u'_1} = \hat{\mathbf{u}}_1 \frac{h_1}{h'_1} \frac{\partial u_1}{\partial u'_1} + \hat{\mathbf{u}}_2 \frac{h_2}{h'_1} \frac{\partial u_2}{\partial u'_1} + \hat{\mathbf{u}}_3 \frac{h_3}{h'_1} \frac{\partial u_3}{\partial u'_1} \\ \hat{\mathbf{u}}'_2 = \hat{\mathbf{u}}_1 \frac{h_1}{h'_2} \frac{\partial u_1}{\partial u'_2} + \hat{\mathbf{u}}_2 \frac{h_2}{h'_2} \frac{\partial u_2}{\partial u'_2} + \hat{\mathbf{u}}_3 \frac{h_3}{h'_2} \frac{\partial u_3}{\partial u'_2} \\ \hat{\mathbf{u}}'_3 = \hat{\mathbf{u}}_1 \frac{h_1}{h'_3} \frac{\partial u_1}{\partial u'_3} + \hat{\mathbf{u}}_2 \frac{h_2}{h'_3} \frac{\partial u_2}{\partial u'_3} + \hat{\mathbf{u}}_3 \frac{h_3}{h'_3} \frac{\partial u_3}{\partial u'_3} \end{cases} \quad (2.7)$$

特别地, 对和直角坐标之间的变换, 用矩阵表示, 有

$$\begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

其中 $[T]$ 为变换矩阵, 矩阵 $[T]$ 的行列式称为 Jacobi 式, 记为

$$J = |T| = \frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = (\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3) \quad (2.9)$$

在 $J \neq 0$ 时, 有

$$[T][dx_i] = [du_i] = [T][T]^{-1}[du_i]$$

例 椭圆柱坐标系,

$$\left. \begin{array}{l} x = G_1 = p \cosh \xi \cos \eta \\ y = G_2 = p \sinh \xi \sin \eta \\ z = G_3 = z \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} h_1 = h_\xi = h_2 = h_\eta = p \sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} \\ h_3 = h_z = 1 \end{array} \quad (2.10)$$

证明

$$\begin{aligned} h_1 = h_\xi &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = [(p \sinh \xi \cos \eta)^2 + (-p \cosh \xi \sin \eta)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= p [(\cos^2 \xi - 1) \cos^2 \eta + \cosh^2 \xi (1 - \cos^2 \eta)]^{\frac{1}{2}} = p \sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} \end{aligned}$$

2.1.3 变量分离的充要条件

这里讨论的变量分离限于标量 Helmholtz 方程^[59]

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (2.11)$$

由后述式 (2.45), 在正交曲线坐标系下展开为

$$\sum_{n=1}^3 \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \frac{\partial}{\partial u_n} \left| \frac{h_1 h_2 h_3}{h_n^2} \frac{\partial \psi}{\partial u_n} \right| + k^2 \psi = 0 \quad (2.12)$$

设有 3×3 行列式如下

$$S = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

则按第一列各元素的代数余子式展开, 有

$$\sum_{n=1}^3 M_n \varphi_{n1} = S, \quad \sum_{n=1}^3 M_n \varphi_{nm} = 0, m \neq 1 \quad (2.14)$$

其中

$$M_1 = \frac{\partial S}{\partial \varphi_{11}} = \begin{vmatrix} \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix}, \quad M_2 = - \begin{vmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{22} & \varphi_{23} \end{vmatrix}$$

若方程 (2.12) 可以展开为分离变量

$$\psi(u_1, u_2, u_3) = U_1(u_1)U_2(u_2)U_3(u_3) \quad (2.15)$$

且分别满足方程

$$\frac{1}{f_n} \frac{d}{du_n} \left[f_n \frac{d}{du_n} U_n(u_n) \right] + [k_1^2 \varphi_{n1} + k_2^2 \varphi_{n2} + k_3^2 \varphi_{n3}] U_n(u_n) = 0 \quad (2.16)$$

式中 $n = 1, 2, 3, k_1 = k$, 而 k_2, k_3 为新的分离常数. 若将上式乘以 $\frac{M_n}{S} U_l U_m$, 其中 $n, l, m = 1, 2, 3, n \neq l \neq m$, 再对 n 求和, 考虑到 (2.14) 的关系, 可得

$$\sum_{n=1}^3 \frac{M_n}{S f_n} \frac{\partial}{\partial u_n} \left[f_n \frac{\partial \psi}{\partial u_n} \right] + k^2 \psi = 0 \quad (2.17)$$

则此式与 (2.12) 形式相同. 由此可知, 若 (2.12) 式可分离为如式 (2.16) 的三个独立常微分方程, 须满足下列条件:

1. f_1, f_2, f_3 应该分别仅为 u_1, u_2, u_3 的函数, 即 $f_n = f_n(u_n)$;
2. 行列式 S 的每一行中各元素 φ_{nm} 应当仅为 u_n 的函数. 具有这种特性的行列式称为 Stäckel 行列式. 显然, 第一列各元素的余子式 M_n 应当与 u_n 无关.
3. 比较式 (2.12) 和式 (2.17) 可知, 因子 $\frac{h_1 h_2 h_3}{h_n^2}$ 应为 $f_n(u_n)$ 与另一函数 $g_n(u_l, u_m)$ 的乘积, g_n 与 u_n 无关. 即

$$\frac{h_1 h_2 h_3}{h_n^2} = f_n(u_n) g_n(u_l, u_m), \quad , n, l, m = 1, 2, 3, n \neq l \neq m \quad (2.18)$$

将式 (2.18) 代入式 (2.12), 可知

$$h_n^2 = \frac{S}{M_n} \quad (2.19)$$

于是

$$\frac{h_1 h_2 h_3}{S} = \frac{f_1(u_1) g_1(u_2, u_3)}{M_1(u_2, u_3)} = \frac{f_2(u_2) g_2(u_3, u_1)}{M_2(u_3, u_1)} = \frac{f_3(u_3) g_3(u_1, u_2)}{M_3(u_1, u_2)} \quad (2.20)$$

由此求得

$$\frac{h_1 h_2 h_3}{S} = f_1(u_1) f_2(u_2) f_3(u_3) \quad (2.21)$$

这样, 若在给定坐标系中, Stäckel 行列式存在, 且式 (2.21) 成立, 那么 Helmholtz 方程在相应的坐标系中即可分离变量.

例 直角坐标系中, $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, 由式 (2.18) 有

$$\begin{aligned} 1 &= f_1(x)g_1(y,z) \\ 1 &= f_2(y)g_2(z,x) \\ 1 &= f_3(z)g_3(x,y) \end{aligned}$$

可见 $f_1 = f_2 = f_3 = 1$, $S = 1$, $M_1 = M_2 = M_3 = 1$, 经过试探以后可以建立 Stäckel 行列式为

$$S = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

因此, Helmholtz 方程在直角坐标系中是可以分离变量的.

又如在圆柱坐标系中, $h_1 = h_3 = 1$, $h_2 = \rho$, 于是有

$$\begin{aligned} \rho &= f_1(\rho)g_1(\varphi,z) \\ \frac{1}{\rho} &= f_2(\varphi)g_2(z,\rho) \\ \rho &= f_2(z)g_2(\rho,\varphi) \end{aligned}$$

由此可知 $f_1 = \rho$, $f_2 = f_3 = 1$, $S = 1$, $M_1 = M_2 = M_3 = 1$, 则有

$$S = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{\rho^2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

球坐标下, $f_1 = r^2$, $f_2 = \sin \theta$, $f_3 = 1$, $M_1 = 1$, $M_2 = \frac{1}{r^2}$, $M_3 = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$, Stäckel 行列式为

$$S = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sin^2 \theta} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.2 电磁理论中的符号矢量方法

矢量场论是电磁理论中最基本的数学工具. 但是, 传统的 ∇ 算子及其与其它算子的组合表达的运算法, 却难以找到系统的阐述和严格的论证. 戴振铎教授对矢量场论作了全面的历史回顾, 指出了至今仍存在于矢量分析中的混淆和错误, 找到了产生错误的根源, 并通过“符号矢量”方法, 系统地建立了一套完善的矢量场符号运算理论, 澄清了矢量分析学科中长期存在的问题.^[57]

2.2.1 传统算子理论中的问题

众所周知, 在笛卡尔坐标系下, ∇ 算子的定义为

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.22)$$

其中, $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 分别代表三个正交坐标轴方向上的单位矢量, 若用 x_1, x_2, x_3 分别代替 x, y, z , 则上式可表示为

$$\nabla = \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.23)$$

在目前通用的矢量分析中, 都是利用上述 ∇ 算子表述矢量场的散度和旋度的, 表达形式如下:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \quad (2.24)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \quad (2.25)$$

在笛卡尔坐标系下, 表面上看这个结果没有问题, 但实际上, 这个结果仅仅是一个形式上凑出来的结果而不是推算出来的. 例如, 认为 $\partial/\partial x_i$ 是标量算子, 因而可以越过点乘和叉乘符号, 直接作用于矢量之上, 这一步骤是没有根据的. 于是, 当散度和旋度在其它坐标系中用 ∇ 算符表达的适合, 这种概念造成的错误就会逐渐暴露出来.

从物理意义上讲, 矢量的散度和旋度是不依赖与坐标系的选择的, 算符 “ ∇ ” 和矢量符号 “ \mathbf{F} ” 的形式可用于任何坐标系中. 也就是说, 如果上述算符 ∇ 与矢量形式的点乘和形式的叉乘的概念正确的化, 那么在任何坐标系下, 都可以将矢量的散度和旋度表示为算子 ∇ 和矢量 \mathbf{F} 之间的点乘和叉乘.

在正交坐标系下, 假定矢量的散度是一个点积, 则

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\sum_i \hat{u}_i \frac{\partial}{\partial v_i} \right) \cdot \mathbf{F} = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial F_i}{\partial v_i} \quad (2.26)$$

其中, h_i 是度量因子, \hat{u}_i 是 i 坐标轴上的单位矢量, v_i 是相应的坐标变量. 例如, 对于球坐标系, $\hat{u}_i = (\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\varphi)$, $v_i = (r, \theta, \varphi)$, $h_i = (1, r, r \sin \theta)$, 则 ∇ 算符与矢量 \mathbf{F} 的点乘为

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial r} F_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} F_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} F_\varphi$$

而用正确方法求得的球坐标系下的矢量 \mathbf{F} 的散度表达式为

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} F_\varphi$$

显然, $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq \operatorname{div} \mathbf{F}$. 类似的运算也可以说明 $\nabla \times \mathbf{F} \neq \operatorname{rot} \mathbf{F}$. Morse 等发现, 若要用点乘和叉乘表达散度和旋度, 则在正交曲线坐标系中, 同一个 ∇ 算符表示梯度和散度, 必须具有不同的形式, 才能得到正确的结果, 即

$$\begin{aligned}\nabla &= \sum_i \hat{\mathbf{u}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial v_i} && \text{(对于梯度)} \\ \nabla &= \sum_i \frac{1}{\Omega} \hat{\mathbf{u}}_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\Omega}{h_i} \right) && \text{(对于散度)}\end{aligned}$$

式中, $\Omega = \prod_i h_i$. 而且要按照下述计算步骤才能得到正确的结果:

$$\left[\sum_i \frac{1}{\Omega} \hat{\mathbf{u}}_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\Omega}{h_i} \right) \right] \cdot \mathbf{F} \rightarrow \frac{1}{\Omega} \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\Omega}{h_i} \hat{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{F} \right)$$

上述现象说明, 不能简单使用 ∇ 算符的同一形式, 而且还要加上没有根据的规则才能得到散度表达式的正确结果. 此外, 运算中还要对含 ∇ 的表达式做出一些运算方法的规则. 例如

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{B}_c) \mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A}_c - (\nabla \cdot \mathbf{A}_c) \mathbf{B} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B}_c\end{aligned}$$

式中下标 c 表示该矢量对于算子而言是常矢量.

上式中第一步运算把 ∇ 看成矢量, 利用矢量恒等式得到; 第二步把 ∇ 看成微分符号, 根据两函数乘积的微分法则得出. 从所得结果看, $(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A}$ 不是 $(\operatorname{div} \mathbf{B}) \mathbf{A}$ 而是 $(\nabla \cdot \mathbf{B}_c) \mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A}_c$. 再者, 按规定 \mathbf{B}_c 是常矢量, $\nabla \cdot \mathbf{B}_c = 0$, 会得到错误结果, 于是在传统的矢量分析中, 为了避免这一错误, 不得不规定算子 ∇ 必须作用于变矢量, 故将 $(\nabla \cdot \mathbf{B}_c) \mathbf{A}$ 改为 $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$. 这种处理虽然可以得到正确的结果, 但没有合理的解释.

2.2.2 新算符的引入

戴振铎教授通过分析 ∇ 算子在矢量场论中出现的问题, 发现其错误的根源在于 ∇ 只是梯度算子, 而散度和旋度算子根本不是 ∇ 与其它算子的复合, 而是独立的. 戴振铎教授引入了两个新符号 ∇ 和 ∇ 分别表示散度和旋度算子. 在笛卡尔坐标系中原有的梯度算子 ∇ 和新引入的算子

分别定义为:

$$\nabla = \sum_i \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.27a)$$

$$\nabla = \sum_i \hat{x}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.27b)$$

$$\nabla = \sum_i \hat{x}_i \times \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.27c)$$

在正交曲线坐标系中, ∇ 、 ∇ 和 ∇ 分别定义为

$$\nabla = \sum_i \frac{\hat{u}_i}{h_i} \frac{\partial}{\partial v_i} \quad (2.28a)$$

$$\nabla = \sum_i \frac{\hat{u}_i}{h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.28b)$$

$$\nabla = \sum_i \frac{\hat{u}_i}{h_i} \times \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.28c)$$

∇ 、 ∇ 和 ∇ 具有不依赖坐标系选择的性质.

2.2.3 符号矢量方法

90年代, 戴振铎教授正式提出“符号矢量”方法, 并形成了系统理论. 其核心思想是引入符号矢量 ∇ , 并将 ∇ 的表达式 $T(\nabla)$ 定义为

$$T\nabla = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_S T(\hat{n}) dS}{\Delta V} \quad (2.29)$$

式中, ΔV 是任意小体积, S 是包围 ΔV 的表面, \hat{n} 是 S 面上面元 dS 的单位外法线矢量. $T(\nabla)$ 是一个符号表达式, 包含一个符号矢量 ∇ . 将一个有意义的矢量表达式中的某个矢量用矢量 ∇ 代替就得到了一个符号表达式. 例如, 选择 $T(\nabla) = \mathbf{F} \cdot \nabla$, 那么 $T(\hat{n})$ 的形式就被限定为 $\mathbf{F} \cdot \hat{n}$, 于是

$$\mathbf{F} \cdot \nabla = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS}{\Delta V} = \operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_i \hat{x}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \quad (2.30)$$

如果选择 $T(\nabla) = \nabla \cdot \mathbf{F}$, 结果不变, 因为 $\hat{n} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \hat{n}$, 因此

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \nabla = \nabla \mathbf{F} \quad (2.31)$$

上述结论正好符合散度的定义, 而这个作用是通过符号矢量 ∇ 与 \mathbf{F} 的点乘来表达的. 如果

选择 $T(\nabla)$ 的形式为 $f \nabla$ 或 ∇f , 由式 (2.29) 可以得到梯度表达式

$$\nabla f = f \nabla = \nabla f \quad (2.32)$$

如果选择 $T(\nabla) = \nabla \times \mathbf{F} = -\mathbf{F} \times \nabla$, 可得旋度表达式

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\mathbf{F} \times \nabla = \nabla \times \mathbf{F} \quad (2.33)$$

上述结论也是显见成立的. 对于三维体积 ΔV , $\oint_s \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}} dS$ 是 \mathbf{F} 沿表面的最大流量, 其随 ΔV 趋于零 ($\Delta V \rightarrow \Delta S, S \rightarrow l$) 便过渡到二维的最大环量面密度, 即 \mathbf{F} 的旋度. 同理, 对于标量场 f , 其在某点的最大变化率的大小与方向即为 f 的梯度. 由 $\oint_s f \hat{\mathbf{n}} dS$ 得到的是 f 增加最快的方向, 取极限就得到了标量场 f 在该点的梯度 ∇f .

由以上分析可知, 符号矢量 ∇ 可以作为梯度算子 ∇ , 散度算子 ∇ 以及旋度选择 ∇ 的生成矢量.

在正交曲线坐标系下, 通过推导, 可以得到如下的计算 $T(\nabla)$ 的表达式:

$$T(\nabla) = \frac{1}{\Omega} \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left[\frac{\Omega}{h_i} T(\hat{\mathbf{u}}_i) \right] \quad (2.34)$$

利用以下的关系式

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\Omega}{h_i} \hat{\mathbf{u}}_i \right) = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_i}{\partial v_i} = - \left[\frac{1}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial v_j} \hat{\mathbf{u}}_j + \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial v_k} \hat{\mathbf{u}}_k \right] \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_i}{\partial v_j} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial v_i} \hat{\mathbf{u}}_j, \quad (i \neq j) \quad (2.37)$$

于是有

$$\nabla \mathbf{F} = \frac{1}{\Omega} \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\Omega}{h_i} F_i \right) \quad (2.38)$$

$$\nabla \mathbf{F} = \frac{1}{\Omega} \sum_{i,j,k} h_i \hat{\mathbf{u}}_i \left[\frac{\partial(h_k F_k)}{\partial v_j} - \frac{\partial(h_j F_j)}{\partial v_k} \right] \quad (2.39)$$

其中, $i, j, k = 1, 2, 3$ 顺序循环取值.

引理 2.2.1 对于任意 $T(\nabla)$ 表达式, 式中的符号矢量 ∇ 可以作为一个矢量, 矢量代数中的恒等式均适用.

引理 2.2.2 对含有两个函数的符号表达式, 有

$$T(\nabla, a, b) = T(\nabla_a, a, b) + T(\nabla_b, a, b) \quad (2.40)$$

其中, ∇_a 和 ∇_b 是两个部分符号矢量, 简单来讲, 就是仅对 a (或 b) 进行微分运算. 其定义如下:

$$T(\nabla_a, a, b) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\left[\iint_s T(\hat{n}, a, b) dS \right]_{b=const}}{\Delta V} \quad (2.41)$$

在正交曲线坐标系下, 上式可化为

$$T(\nabla_a, a, b) = \frac{1}{\Omega} \sum \frac{\partial}{\partial v_i} \left[\frac{\Omega}{h_i} T(\hat{u}_i, a, b) \right]_{b=const} \quad (2.42)$$

利用符号矢量方法推导矢量分析中的恒等式, 不仅可以获得正确的结果, 而且过程非常清晰. 如推导 $\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla_A \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \nabla_B \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

由引理 1, 根据三重矢量叉乘公式有:

$$\begin{aligned} \nabla_A \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (\nabla_A \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\nabla_A \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla_A) \mathbf{A} - (\nabla_A \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} \\ &= \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} - \mathbf{B} \nabla \mathbf{A} \end{aligned} \quad (2.43)$$

这是根据 ∇ 的矢量性, 因而有 $\nabla_A \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla_A$. 同理有

$$\nabla_B \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B}$$

因此

$$\nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \mathbf{A} \quad (2.44)$$

2.2.4 其它常用运算及矢量恒等式

f 的 Laplace 运算式:

$$\nabla \nabla f = \sum_i \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\Omega}{h_i^2} \frac{\partial f}{\partial v_i} \right) \quad (2.45)$$

\mathbf{F} 的 Laplace 运算式:

$$\nabla \nabla \mathbf{F} = \sum_i \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\Omega}{h_i^2} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v_i} \right) = \nabla \nabla \mathbf{F} - \nabla \nabla \mathbf{F} \quad (2.46)$$

常用坐标系下的标量 Laplace 算子:

圆柱坐标系

$$\nabla \nabla \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

圆球坐标系

$$\begin{aligned} \nabla \nabla &\equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \varphi}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

单位矢量的导数:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_j}{\partial v_k} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_k}{\partial v_j} \hat{\mathbf{u}}_k \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_i}{\partial v_i} = - \left(\frac{1}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial v_j} \hat{\mathbf{u}}_j + \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial v_k} \hat{\mathbf{u}}_k \right) \quad (2.48)$$

矢量恒等式

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (2.49)$$

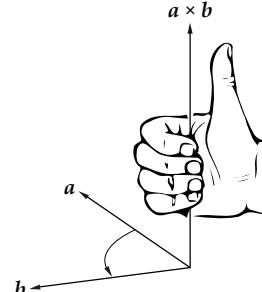


图 2.2 矢量的叉乘

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (2.50)$$

$$\text{Lagrange 恒等式 } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix} \quad (2.51)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{d} \quad (2.52)$$

$$\nabla(ab) = a\nabla b + b\nabla a \quad (2.53)$$

$$\nabla(a\mathbf{b}) = a\nabla\mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla a \quad (2.54)$$

$$\nabla(a\mathbf{b}) = \nabla a \times \mathbf{b} + a\nabla\mathbf{b} \quad (2.55)$$

$$\nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} \quad (2.56)$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \nabla \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} \quad (2.57)$$

$$\nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \nabla \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} - \mathbf{b} \nabla \mathbf{a} \quad (2.58)$$

$$\nabla(\nabla \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \mathbf{a}) - \nabla \nabla \mathbf{a} \quad (2.59)$$

$$\nabla(\nabla \mathbf{a}) = 0 \quad (2.60)$$

$$\nabla(\nabla \mathbf{a}) = 0 \quad (2.61)$$

证明 证明式 (2.56).

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \nabla_a \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \nabla_b \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{b} \cdot (\nabla_a \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla_b \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b}. \blacksquare \end{aligned} \quad (2.62)$$

证明 证明式 (2.57)^[3].

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \nabla_a(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) + \nabla_b(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{b} \cdot \nabla_a) \mathbf{a} - \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \nabla_a) + (\mathbf{a} \cdot \nabla_b) \mathbf{b} - \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \nabla_b) \\ &= (\mathbf{b} \cdot \nabla_a) \mathbf{a} + \mathbf{b} \times (\nabla_a \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla_b) \mathbf{b} + \mathbf{a} \times (\nabla_b \times \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \times \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \nabla \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a}. \blacksquare \end{aligned} \quad (2.63)$$

2.3 并矢及其运算

2.3.1 并矢函数

如果两个矢量不是点乘或叉乘，而是并乘，就构成二阶张量，也称为并矢，定义为

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \mathbf{A} \mathbf{B} \quad (2.64)$$

其中， \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 分别称为 $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ 的前元素和后元素。或者，考虑三个不同的矢量函数

$$\mathbf{D}_j = \sum_i D_{ij} \hat{x}_i, \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.65)$$

则并矢函数 $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ 可定义为

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \sum_j \mathbf{D}_j \hat{x}_j \quad (2.66)$$

其中 \mathbf{D}_j 称为 $\bar{\mathbf{D}}$ 的三个矢量分量, 将式 (2.65) 代入式 (2.66), 则

$$\bar{\mathbf{D}} = \sum_i \sum_j D_{ij} \hat{\mathbf{x}}_i \hat{\mathbf{x}}_j \quad (2.67)$$

定义并矢的转置 $(\bar{\mathbf{D}})^T$

$$(\bar{\mathbf{D}})^T = \mathbf{B}\mathbf{A} = \sum_j \hat{\mathbf{x}}_j \mathbf{D}_j = \sum_i \sum_j D_{ij} \hat{\mathbf{x}}_j \hat{\mathbf{x}}_i = \sum_i \sum_j D_{ji} \hat{\mathbf{x}}_i \hat{\mathbf{x}}_j \quad (2.68)$$

定义并矢与矢量之间的前标积, 它是一个矢量:

$$\mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{D}} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = \sum_j (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_j) \hat{\mathbf{x}}_j = \sum_i \sum_j C_i D_{ij} \hat{\mathbf{x}}_j \quad (2.69)$$

定义并矢与矢量之间的后标积, 它是一个通常与前标积不相等的矢量:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} \\ &= \sum_j \mathbf{D}_j (\hat{\mathbf{x}}_j \cdot \mathbf{C}) = \sum_i \sum_j C_i D_{ij} \hat{\mathbf{x}}_i = \sum_i \sum_j C_i D_{ji} \hat{\mathbf{x}}_j \end{aligned} \quad (2.70)$$

于是有

$$\mathbf{a} \cdot (\bar{\mathbf{D}})^T = \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{a} \quad (2.71)$$

矢量与并矢之间同样可以做矢积, 定义矢量与并矢的前矢积:

$$\mathbf{C} \times \bar{\mathbf{D}} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A})\mathbf{B} = \sum_j (\mathbf{C} \times \mathbf{D}_j) \hat{\mathbf{x}}_j \quad (2.72)$$

而后矢量积定义为:

$$\bar{\mathbf{D}} \times \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \sum_j \mathbf{D}_j (\hat{\mathbf{x}}_j \times \mathbf{C}) \quad (2.73)$$

将矢量混合积恒等式每一项分别后置 $\hat{\mathbf{x}}_j$, 将所得结果求和, 得到

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \bar{\mathbf{c}}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{c}}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \bar{\mathbf{c}} \quad (2.74)$$

若将后两项中的 \mathbf{b} 变为并矢, 考虑三个独立的方程:

$$-(\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{c}}) \cdot \mathbf{b}_j = (\bar{\mathbf{c}})^T \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_j) \quad (2.75)$$

再后置一个单位矢量 \hat{x}_j , 将结果对 j 求和, 得到

$$-(\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{c}})^T \cdot \mathbf{b} = (\bar{\mathbf{c}})^T \cdot (\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{b}}) \quad (2.76)$$

类似地, 可以得到

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \bar{\mathbf{c}}) = (\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{c}})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\bar{\mathbf{c}} \quad (2.77)$$

$$\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{b}} = -[(\bar{\mathbf{b}})^T \times \mathbf{a}]^T \quad (2.78)$$

并矢与并矢的点乘:

$$\mathbf{AB} \cdot (\mathbf{CD}) = A(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D} \neq (\mathbf{CD}) \cdot \mathbf{AB} \quad (2.79)$$

并矢之间有四种二重运算

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) \quad (2.80a)$$

$$\mathbf{AB} \dot{\times} \mathbf{CD} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \times \mathbf{D}) \quad (2.80b)$$

$$\mathbf{AB} \dot{\times} \mathbf{CD} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) \quad (2.80c)$$

$$\mathbf{AB} \ddot{\times} \mathbf{CD} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C})(\mathbf{A} \times \mathbf{D}) \quad (2.80d)$$

2.3.2 并矢的分析

并矢的散度 $\nabla \bar{\mathbf{F}}$ 定义为

$$\nabla \bar{\mathbf{F}} = \sum_j (\nabla F_j) \hat{x}_j = \sum_i \sum_j \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} \hat{x}_j \quad (2.81)$$

它是一个矢量函数. 并矢函数的旋度定义为

$$\nabla \bar{\mathbf{F}} = \sum_j (\nabla F_j) \hat{x}_j = \sum_i \sum_j (\nabla F_{ij} \times \hat{x}_i) \hat{x}_j \quad (2.82)$$

此处应用了矢量恒等式 $\nabla(F_{ij} \hat{x}_j) = \nabla F_{ij} \times \hat{x}_j$.

并矢函数的旋度是一个并矢函数. 一个矢量函数的梯度定义为

$$\nabla \mathbf{F} = \sum_j (\nabla F_j) \hat{x}_j = \sum_i \sum_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \hat{x}_i \hat{x}_j \quad (2.83)$$

它是一个并矢.

若一个并矢函数是一单位并矢 $\bar{\mathbf{I}}$ 和一个标量函数 f 的积, 即 $\bar{\mathbf{F}} = f \bar{\mathbf{I}}$, 则

$$\nabla \bar{\mathbf{F}} = \nabla(f \bar{\mathbf{I}}) = \sum_i \nabla(f \hat{\mathbf{x}}_i) \hat{\mathbf{x}}_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{\mathbf{x}}_i = \nabla f \quad (2.84)$$

且

$$\nabla \bar{\mathbf{F}} = \nabla(f \bar{\mathbf{I}}) = \sum_i \nabla(f \hat{\mathbf{x}}_i) \hat{\mathbf{x}}_i = \sum_i (\nabla f \times \hat{\mathbf{x}}_i) \hat{\mathbf{x}}_i = \nabla f \times \bar{\mathbf{I}} \quad (2.85)$$

并矢函数还具有下列计算公式:

$$\nabla(a \mathbf{b}) = a \nabla \mathbf{b} + (\nabla a) \mathbf{b} \quad (2.86)$$

$$\nabla(a \bar{\mathbf{b}}) = a \nabla \bar{\mathbf{b}} + (\nabla a) \cdot \bar{\mathbf{b}} \quad (2.87)$$

$$\nabla(a \bar{\mathbf{b}}) = a \nabla \bar{\mathbf{b}} + (\nabla a) \times \bar{\mathbf{b}} \quad (2.88)$$

$$\nabla(\nabla \bar{\mathbf{a}}) = \nabla(\nabla \bar{\mathbf{a}}) - \nabla(\nabla \bar{\mathbf{a}}) \quad (2.89)$$

$$\nabla(\nabla \bar{\mathbf{a}}) = 0 \quad (2.90)$$

2.4 矢量和并矢积分定理

2.4.1 基本积分定理

对于矢量和并矢有下列熟知的积分定理:

1. Gauss / Остроградский 定理 (散度定理)

$$\iiint_V \nabla \mathbf{F} dV = \iint_S (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}) dS \quad (2.91)$$

$$\iint_S \nabla_S \mathbf{F} dS = \oint_l (\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{F}) dl, \quad (\hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{n}}, \text{即面元边沿外法线单矢}) \quad (2.92)$$

$$\iiint_V \nabla \bar{\mathbf{A}} dV = \iint_S (\hat{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{A}}) dS \quad (2.93)$$

2. 旋度定理

$$\iiint_V \nabla \mathbf{F} dV = \iint_S (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}) dS \quad (2.94)$$

$$\iint_S \nabla_S \mathbf{F} dS = \oint_l (\hat{\mathbf{m}} \times \mathbf{F}) dl \quad (2.95)$$

$$\iiint_V \nabla \bar{\mathbf{A}} dV = \iint_S (\hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{A}}) dS \quad (2.96)$$

3. 梯度定理

$$\iiint_V \nabla f \, dV = \oint_S \hat{\mathbf{n}} f \, dS \quad (2.97)$$

$$\iint_S \nabla_S f \, dS = \oint_L \hat{\mathbf{m}} f \, dl \quad (2.98)$$

$$\iint_S \nabla_S \mathbf{F} \, dV = \oint_S \hat{\mathbf{n}} \mathbf{F} \, dS \quad (2.99)$$

4. Stokes 定理

$$\iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathbf{F} \, dS = \oint_L \mathbf{F} \cdot dl \quad (2.100)$$

$$\iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{A}} \, dS = \oint_L dl \cdot \bar{\mathbf{A}} \quad (2.101)$$

5. 叉积梯度定理

$$\iint_S \hat{\mathbf{n}} \times \nabla f \, dS = \oint_L f \, dl \quad (2.102)$$

6. 叉 ∇ 叉积定理

$$\iint_S (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla) \times \mathbf{F} \, dS = \oint_L dl \times \mathbf{F} \quad (2.103)$$

2.4.2 Green 定理

若 f_1, f_2 在区域 V 及其闭合边界 S 具有一阶连续偏导, 在 V 内具有二阶连续偏导. 将 $f_1 \nabla f_2$ 代入 Gauss 公式, 有

$$\oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot f_1 \nabla f_2 \, dS = \iiint_V \nabla \cdot (f_1 \nabla f_2) \, dV = \iiint_V (f_1 \nabla \nabla f_2 + \nabla f_1 \cdot \nabla f_2) \, dV \quad (2.104)$$

称为第一标量 Green 定理. 交换 f_1, f_2 并与原式相减, 得到

$$\iiint_V (f_1 \nabla \nabla f_2 - f_2 \nabla \nabla f_1) \, dV = \oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1) \, dS \quad (2.105)$$

称为第二标量 Green 定理.

类似地, 将 $\mathbf{A} = \mathbf{F}_1 \times \nabla \mathbf{F}_2$ 代入 Gauss 公式, 由式 (2.56), 有 $\nabla \mathbf{A} = \nabla \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \nabla \mathbf{F}_2$, 于是可得第一矢量 Green 定理:

$$\iiint_V (\nabla \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \nabla \mathbf{F}_2) \, dV = \oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{F}_1 \times \nabla \mathbf{F}_2) \, dS \quad (2.106)$$

第二矢量 Green 定理:

$$\iiint_V (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla \nabla \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_2 \cdot \nabla \nabla \mathbf{F}_1) dV = \oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{F}_2 \times \nabla \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \times \nabla \mathbf{F}_2) dS \quad (2.107)$$

进一步地, 从矢量 Green 定理出发, 还可以得到它们的并矢形式. 在第一矢量 Green 定理中, 令 $\mathbf{F}_1 = \mathbf{P}, \mathbf{F}_2 = \mathbf{Q}_j$ 代入, 并在每一项后并置 $\hat{\mathbf{x}}_j$, 得到三个方程后相加, 就得到第一矢量—并矢 Green 定理:

$$\iiint_V [(\nabla \mathbf{P}) \cdot (\nabla \bar{\mathbf{Q}}) - \mathbf{P} \cdot \nabla \nabla \bar{\mathbf{Q}}] dV = \oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{p} \times \nabla \bar{\mathbf{Q}}) dS \quad (2.108)$$

另一种表达形式:

$$\iiint_V [(\nabla \bar{\mathbf{Q}})^T \cdot \nabla \mathbf{P} - (\nabla \nabla \bar{\mathbf{Q}})^T \cdot \mathbf{P}] dV = \oint_S (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{P}) \cdot \nabla \bar{\mathbf{Q}} dS = \oint_S (\nabla \bar{\mathbf{Q}})^T \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{P}) dS \quad (2.109)$$

类似地, 由第二矢量 Green 定理, 可以导出第二矢量—并矢 Green 定理. 注意, 为了在 \mathbf{Q}_j 后并置 $\hat{\mathbf{x}}_j$, 我们交换了式 (2.107) 右端第一项的叉乘次序. 于是有

$$\iiint_V [\mathbf{P} \cdot \nabla \nabla \bar{\mathbf{Q}} - (\nabla \nabla \mathbf{P}) \cdot \bar{\mathbf{Q}}] dV = - \oint_S [(\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \mathbf{P}) \cdot \bar{\mathbf{Q}} + (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{P}) \cdot \nabla \bar{\mathbf{Q}}] dS \quad (2.110)$$

利用同样的方法将 \mathbf{P} 升格为并矢, 得到第一并矢—并矢 Green 定理:

$$\iiint_V [(\nabla \bar{\mathbf{Q}})^T \cdot \nabla \bar{\mathbf{P}} - (\nabla \nabla \bar{\mathbf{Q}})^T \cdot \bar{\mathbf{P}}] dV = \oint_S (\nabla \bar{\mathbf{Q}})^T \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{P}}) dS \quad (2.111)$$

第二并矢—并矢 Green 定理:

$$\iiint_V [(\nabla \nabla \bar{\mathbf{Q}})^T \cdot \bar{\mathbf{P}} - (\bar{\mathbf{Q}})^T \cdot \nabla \nabla \bar{\mathbf{P}}] dV = - \oint_S [(\bar{\mathbf{Q}})^T \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \bar{\mathbf{P}}) + (\nabla \bar{\mathbf{Q}})^T \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{P}})] dS \quad (2.112)$$

第3章 电磁场中的若干问题

3.1 电磁位函数

3.1.1 标量电位与矢量磁位

Maxwell 方程组在电荷和电流产生的时谐场中的矢量微分形式为 [29]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (3.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} \quad (3.1b)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon\mathbf{E}) = \rho \quad (3.1c)$$

$$\nabla \cdot (\mu\mathbf{H}) = 0 \quad (3.1d)$$

$$\nabla \times \mathbf{J} = -j\omega\rho \quad (3.1e)$$

由于磁感应强度是无散场, 因此它可以表示为一个矢量的旋度. 定义矢量位函数 \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.2)$$

代入 (3.1a), 有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -j\omega(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

即

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}) = 0$$

此式表明 $\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}$ 是无旋场, 可以用一个标量场的梯度来表示, 则 \mathbf{E} 可表示为

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\psi \quad (3.3)$$

将其代入 Maxwell 方程后并考虑 $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, 整理后可得

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mu\mathbf{J} + k^2\mathbf{A} + -j\omega\mu\varepsilon\nabla\psi \quad (3.4)$$

对上式求散度, 并注意到 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho$, 得到

$$j\omega\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \nabla\psi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3.5)$$

由于此处仅规定了 \mathbf{A} 的旋度, 必须再规定其散度才可唯一确定. 原则上说可任意规定,

在 Lorentz 规范下, 强制

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\mu\epsilon\psi = 0 \quad (3.6)$$

于是式 (3.4) 和 (3.5) 分别可简化为

$$\nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \nabla \psi + k^2 \psi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3.8)$$

于是有

$$\mathbf{E} = -j\omega(\mathbf{A} + \frac{1}{k^2} \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.10)$$

利用标量格林函数表示的式 (3.7) 和式 (3.8) 积分解分别为:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \iiint_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (3.11)$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon} \iiint_{V'} \rho(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (3.12)$$

其中

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (3.13)$$

此处引入的 \mathbf{A} 称为矢量磁位, ψ 称为标量电位. 这样, Maxwell 方程式的求解就归结为求解两个位函数方程. 在某些情况下, 可以化简为求解标量 Helmholtz 方程, 使得 Maxwell 方程的求解更为简单.

3.1.2 标量磁位与矢量电位

相对于电荷及产生的电流产生的电磁场, 磁荷及磁流产生的电磁场方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{H}^m = j\omega \mathbf{D}^m \quad (3.14a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^m = -\mathbf{J}^m - j\omega \mathbf{B}^m \quad (3.14b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^m = \rho^m \quad (3.14c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^m = 0 \quad (3.14d)$$

由此可见, 此时电位移 \mathbf{D}^m 是无散场, 可以表示为矢量的旋度, 令

$$\mathbf{D}^m = -\nabla \cdot \mathbf{A}^m \quad (3.15)$$

代入式(3.14a),有

$$\nabla \times \mathbf{H}^m = -j\omega \nabla \times \mathbf{A}^m \quad (3.16)$$

类似地,可知 $\mathbf{H}^m + j\omega \mathbf{A}^m$ 是无旋场,可以用标量场旋度来表示,故有

$$\mathbf{H}^m = -\nabla \psi^m - j\omega \mathbf{A}^m \quad (3.17)$$

类似地,可以导出矢量电位 \mathbf{A}^m 和标量磁位 ψ^m 各自满足的方程

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^m + k^2 \mathbf{A}^m = -\epsilon \mathbf{J}^m \quad (3.18)$$

$$\nabla \cdot \psi^m + k^2 \psi^m = -\frac{\rho^m}{\epsilon} \quad (3.19)$$

这里假定 \mathbf{A}^m 和 ψ^m 之间满足

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^m = -j\omega \mu \epsilon \psi^m \quad (3.20)$$

此式也称为 Lorentz 规范. 于是, 磁荷和磁流产生的电磁场可以仅用 \mathbf{A}^m 来表示

$$\mathbf{D}^m = -\nabla \times \mathbf{A}^m \quad (3.21)$$

$$\mathbf{H}^m = -j\omega \mathbf{A}^m - j \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}^m}{\omega \mu \epsilon} \quad (3.22)$$

综上,由电流和磁流共同产生的电磁场可以用矢量磁位 \mathbf{A} 和矢量电位 \mathbf{A}^m 共同表出:

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - j \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}^m}{\omega \mu \epsilon} - \frac{\nabla \times \mathbf{A}^m}{\epsilon} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{H} = -j\omega \mathbf{A}^m - j \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}^m}{\omega \mu \epsilon} + \frac{\nabla \times \mathbf{A}}{\mu} \quad (3.24)$$

3.1.3 Coulomb 规范

前两节中引入的标量位和矢量位并不是唯一的. 若规定另一矢量磁位 \mathbf{A}' ,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \varphi \quad (3.25)$$

其中 φ 为任一可微标量函数,则有

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}'$$

$$\mathbf{E} = -\nabla [\psi - j\omega \varphi] - j\omega \mathbf{A}'$$

此时若规定另一标量电位函数

$$\psi' = \psi - j\omega\varphi \quad (3.26)$$

则

$$\mathbf{E} = -\nabla\psi' - j\omega\mathbf{A}'$$

式 (3.25) 和 (3.26) 称为规范变换, 函数 ψ 称为规范函数. 可见, 在上述规范变换下, 电磁场量与位函数之间的关系保持不变. 在电磁场中, 除 Lorentz 规范 (3.20) 外, 另有 Coulomb 规范. 此时规定矢量磁位 \mathbf{A} 散度为 0. 即

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0 \quad (3.27)$$

此时 \mathbf{A} 和 ψ 满足的方程为

$$\nabla\nabla\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} + j\omega\mu\varepsilon\nabla\psi \quad (3.28)$$

$$\nabla\nabla\psi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3.29)$$

上述变换也完全适用于 \mathbf{A}^m 和 ψ^m .

3.1.4 Hertz 位

在求解某些场源激励的电磁场时, 使用 Hertz 位较为方便. Hertz 位分为电 Hertz 位 $\boldsymbol{\Pi}^e$ 和磁 Hertz 位 $\boldsymbol{\Pi}^m$. 电 Hertz 位和矢量磁位 \mathbf{A} 之间的关系为

$$\mathbf{A} = j\omega\varepsilon\mu\boldsymbol{\Pi}^e \quad (3.30)$$

此处的 \mathbf{A} 满足 Lorentz 规范. 因此, 由式 (3.7) 可得 $\boldsymbol{\Pi}^e$ 满足的微分方程

$$\nabla\nabla\boldsymbol{\Pi}^e + \omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{\Pi}^e = -\frac{\mathbf{J}}{j\omega\varepsilon} \quad (3.31)$$

将式 (3.30) 代入式 (3.9) 和 (3.10), 可得 $\boldsymbol{\Pi}^e$ 和场量之间关系

$$\mathbf{H} = j\omega\varepsilon\nabla\boldsymbol{\Pi}^e \quad (3.32)$$

$$\mathbf{E} = \nabla\nabla\boldsymbol{\Pi}^e + k^2\boldsymbol{\Pi}^e \quad (3.33)$$

类似地, 磁 Hertz 位与矢量电位 \mathbf{A}^m 的关系为

$$\mathbf{A}^m = j\omega\varepsilon\mu\boldsymbol{\Pi}^m \quad (3.34)$$

这里 \mathbf{A}^m 也符合 Lorentz 规范. 于是有

$$\nabla \nabla \boldsymbol{\Pi}^m + \omega^2 \mu \varepsilon \boldsymbol{\Pi}^m = -\frac{\mathbf{J}^m}{j\omega \mu} \quad (3.35)$$

\mathbf{A}^m 与场量之间关系为

$$\mathbf{E}^m = -j\omega \mu \nabla \boldsymbol{\Pi}^m \quad (3.36)$$

$$\mathbf{H}^m = \nabla \nabla \boldsymbol{\Pi}^m + \omega^2 \mu \varepsilon \boldsymbol{\Pi}^m \quad (3.37)$$

若引入电极化矢量 \mathbf{P}^e 和磁极化矢量 \mathbf{P}^m

$$\mathbf{P}^e = \frac{\mathbf{J}}{j\omega \varepsilon}, \quad \mathbf{P}^m = \frac{\mathbf{J}^m}{j\omega \mu}$$

则式 (3.31) 和 (3.35) 可分别写为

$$\nabla \nabla \boldsymbol{\Pi}^e + \omega^2 \mu \varepsilon \boldsymbol{\Pi}^e = -\frac{\mathbf{P}^e}{\varepsilon} \quad (3.38)$$

$$\nabla \nabla \boldsymbol{\Pi}^m + \omega^2 \mu \varepsilon \boldsymbol{\Pi}^m = -\frac{\mathbf{P}^m}{\mu} \quad (3.39)$$

综上, 由电流及磁流共同产生的电磁场可由 Hertz 位表示为

$$\mathbf{E} = \nabla \nabla \boldsymbol{\Pi}^e + \omega^2 \mu \varepsilon \boldsymbol{\Pi}^e - j\omega \mu \nabla \boldsymbol{\Pi}^m \quad (3.40)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \nabla \boldsymbol{\Pi}^m + \omega^2 \mu \varepsilon \boldsymbol{\Pi}^m + j\omega \varepsilon \nabla \boldsymbol{\Pi}^e \quad (3.41)$$

对于无源区中的电磁场, 由于两种 Hertz 位均满足齐次 Helmholtz 方程, 即

$$\nabla \nabla \boldsymbol{\Pi} + \omega^2 \mu \varepsilon \boldsymbol{\Pi} = 0 \quad (3.42)$$

并利用矢量恒等式 $\nabla \nabla = \nabla \nabla - \nabla \nabla$, 代入式 (3.40) 及 (3.41), 则无源区的电磁场用 Hertz 位表示为

$$\mathbf{E} = \nabla \nabla \boldsymbol{\Pi}^e - j\omega \mu \nabla \boldsymbol{\Pi}^m \quad (3.43)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \nabla \boldsymbol{\Pi}^m + j\omega \varepsilon \nabla \boldsymbol{\Pi}^e \quad (3.44)$$

当介质发生极化和磁化时, 可以认为上述电极化矢量和磁极化矢量分别是极化强度和磁化强度. 由此, 已知极化强度和磁化强度分布时, 利用 Hertz 位计算电磁场是很方便的.

3.1.5 Debye 位

若媒质是线性、均匀、各向同性的静止媒质, 在无源区中, \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 均满足矢量齐次 Helmholtz 方程。在直角坐标系下, $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ 均为常矢量, \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 各分栏均满足标量齐次 Helmholtz 方程, 可以将 E_x, E_y 及 H_x, H_y 用 E_z 和 H_z 表示出来:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{k^2 - k_z^2} \left(-jk_z \frac{\partial E_z}{\partial x} - j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\ E_y &= \frac{1}{k^2 - k_z^2} \left(-jk_z \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ H_x &= \frac{1}{k^2 - k_z^2} \left(j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - jk_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ H_y &= \frac{1}{k^2 - k_z^2} \left(-j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - jk_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

其中 k_z 是 \mathbf{k} 的 z 方向分量。在圆柱坐标系下, 虽然 $\hat{\rho}$ 和 $\hat{\varphi}$ 是变矢量, 但 \hat{z} 是常矢量, E_z 和 H_z 仍然满足标量齐次 Helmholtz 方程, 可将 E_ρ, E_φ 及 H_ρ, H_φ 用 E_z 和 H_z 表示出来。

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{1}{k_\rho^2} \left(jk_z \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + j\frac{\omega\mu}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) \\ E_\varphi &= \frac{1}{k_\rho^2} \left(-j\frac{k_z}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \\ H_\rho &= \frac{1}{k_\rho^2} \left(j\frac{\omega\epsilon}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - jk_z \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \\ H_\varphi &= -\frac{1}{k_\rho^2} \left(j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + j\frac{k_z}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) \end{aligned}$$

这样在圆柱坐标系中, 矢量齐次 Helmholtz 方程的求解也归结为求解标量齐次 Helmholtz 方程。上述方法在求解无限长导波系统中的场分布时是非常有效的。通常取 z 轴为导播方向, E_z 和 H_z 称为纵向分量, 因此上述方法称为纵向场法。

在球坐标系中, 由于 $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ 均为变矢量, 必须引入 Debye 位, 才可将矢量齐次 Helmholtz 方程的求解也归结为标量齐次 Helmholtz 方程的求解。

在球坐标系中, 任何电磁场均可分解为对于 \hat{r} 方向的 TM 和 TE 波两部分, 两者之和构成球坐标系中的完备解。由上一节 (3.43) 和 (3.44) 可知, $\mathbf{E} \perp \boldsymbol{\Pi}^m, \mathbf{H} \perp \boldsymbol{\Pi}^e$, 若令 $\boldsymbol{\Pi}^m$ 及 $\boldsymbol{\Pi}^e$ 方向均为 \hat{r} 即

$$\boldsymbol{\Pi}^m = \boldsymbol{\Pi}_r^m = \hat{r} \boldsymbol{\Pi}_r^m \quad (3.45)$$

$$\boldsymbol{\Pi}^e = \boldsymbol{\Pi}_r^e = \hat{r} \boldsymbol{\Pi}_r^e \quad (3.46)$$

则这样的径向磁 Hertz 位 $\boldsymbol{\Pi}_r^m$ 可以代表 TE 波, 而径向电 Hertz 位 $\boldsymbol{\Pi}_r^e$ 可以代表 TM 波。将上

二式代入 (3.40) 和 (3.41), 有

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\partial^2 \Pi_r^m}{\partial r^2} + k^2 \Pi_r^e \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_r^e}{\partial r \partial \theta} - \frac{j\omega \mu}{r \sin \theta} \frac{\partial \Pi_r^m}{\partial \theta} \\ E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \Pi_r^e}{\partial r \partial \varphi} + \frac{j\omega \mu}{r} \frac{\partial \Pi_r^m}{\partial \theta} \\ H_r &= \frac{\partial^2 \Pi_r^e}{\partial r^2} + k^2 \Pi_r^m \\ H_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_r^m}{\partial r \partial \theta} + \frac{j\omega \varepsilon}{r \sin \theta} \frac{\partial \Pi_r^e}{\partial \theta} \\ H_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \Pi_r^m}{\partial r \partial \varphi} - \frac{j\omega \varepsilon}{r} \frac{\partial \Pi_r^e}{\partial \theta} \end{aligned}$$

换言之, 上述 TE 及 TM 波可用 Π_r^m 和 Π_r^e 分别表示为

$$\text{TE} \begin{cases} \mathbf{E} = \hat{\theta} \left(-\frac{j\omega \mu}{r \sin \theta} \frac{\partial \Pi_r^m}{\partial \varphi} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{j\omega \mu}{r} \frac{\partial \Pi_r^m}{\partial \theta} \right) \\ \mathbf{H} = \hat{r} \left(\frac{\partial^2 \Pi_r^m}{\partial r^2} + k^2 \Pi_r^m \right) + \hat{\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_r^m}{\partial r \partial \theta} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \Pi_r^m}{\partial r \partial \varphi} \right) \end{cases} \quad (3.47)$$

以及

$$\text{TM} \begin{cases} \mathbf{E} = \hat{r} \left(\frac{\partial^2 \Pi_r^e}{\partial r^2} + k^2 \Pi_r^e \right) + \hat{\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_r^e}{\partial r \partial \theta} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \Pi_r^e}{\partial r \partial \varphi} \right) \\ \mathbf{H} = \hat{\theta} \left(\frac{j\omega \varepsilon}{r \sin \theta} \frac{\partial \Pi_r^e}{\partial \varphi} \right) + \hat{\phi} \left(-\frac{j\omega \varepsilon}{r} \frac{\partial \Pi_r^e}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (3.48)$$

代入无源区域的 Maxwell 方程, 可以验证, 有下述方程成立

$$\nabla \nabla \left(\frac{\Pi_r^e}{r} \right) + k^2 \left(\frac{\Pi_r^e}{r} \right) = 0 \quad (3.49)$$

$$\nabla \nabla \left(\frac{\Pi_r^m}{r} \right) + k^2 \left(\frac{\Pi_r^m}{r} \right) = 0 \quad (3.50)$$

由此可见, 若令

$$u = \frac{\Pi_r^e}{r}, \quad v = \frac{\Pi_r^m}{r} \quad (3.51)$$

则标量函数 u 和 v 均满足标量齐次 Helmholtz 方程, 称为 Debye 位. 求出 Debye 位后, 分别乘以 r , 即可得相应 Hertz 位 Π_r^e 和 Π_r^m , 进而可得到 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 在球坐标下的各个分量.

3.2 矢量波函数

3.2.1 矢量波函数的引入

我们知道, 通过复介电常数 $\hat{\epsilon} = \epsilon - j\sigma/\omega$, 其中 σ 是介质的导电率. 可以得到矢量 Helmholtz 方程:

$$\nabla \nabla \mathbf{E} - \omega^2 \mu \hat{\epsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (3.52a)$$

$$\nabla \nabla \mathbf{H} - \omega^2 \mu \hat{\epsilon} \mathbf{H} = 0 \quad (3.52b)$$

这两个方程完全对称且独立. 求解特定边界条件和辐射条件下的矢量 Helmholtz 方程, 可以描述电磁波的传播特性. 然而, 通常来讲这些方程不易求解. 但是, 求解标量 Helmholtz 方程的方法非常成熟, 在介质中, 有

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + k^2 \psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.53)$$

在一般正交曲线坐标系中, $\psi(\mathbf{r}, t)$ 可以通过分离变量求得. 我们假使已经获得了一组完备的标量解 $\{\psi\}$, 引入衍射方程

$$\nabla \nabla \mathbf{G} - \nabla \nabla \mathbf{G} + k^2 \mathbf{G} = 0 \quad (3.54)$$

其中 $k^2 = \omega^2 \mu \hat{\epsilon}$. \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 都满足此衍射方程, 故式 (3.54) 是满足 Maxwell 方程的. 定义一个矢量函数, 是函数 ψ 的梯度:

$$\mathbf{L} = \nabla \psi \quad (3.55)$$

若 ψ 是式 (3.53) 的解, \mathbf{L} 满足式 (3.54):

$$\begin{aligned} & \nabla \nabla \mathbf{L} - \nabla \nabla \mathbf{L} + k^2 \mathbf{L} \\ &= \nabla (\nabla \nabla \psi) - \nabla \nabla \nabla \psi + k^2 \nabla \psi \\ &= \nabla (\nabla^2 \psi + k^2 \psi) \quad (\text{由于 } \nabla \nabla \psi = 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

另设有矢量函数 \mathbf{M} , 具有零散度, $\nabla \mathbf{M} = 0$, 且是 (3.54) 的解. 又设 $\mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \mathbf{M}$. 设在均匀介质中, k 为常数, 于是有

$$\begin{aligned} & \nabla \nabla \mathbf{N} - \nabla \nabla \mathbf{N} + k^2 \mathbf{N} \\ &= \frac{1}{k} [\nabla (\nabla \nabla \mathbf{M}) - \nabla \nabla \nabla \mathbf{M} + k^2 \nabla \mathbf{M}] \\ &= \nabla (-\nabla \nabla \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M}) \\ &= \nabla (\nabla \nabla \mathbf{M} - \nabla \nabla \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

由此证明了 \mathbf{N} 同样满足衍射方程, 且有 $\nabla \cdot \mathbf{N} = 0$. 由 $\mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}$, 两边取旋度, 代入式 (3.54), 可以证明 $\mathbf{M} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{N}$. 显然, 一般来说 \mathbf{L} 的旋度不为零, 故 \mathbf{L} 与 $\{\mathbf{M}, \mathbf{N}\}$ 线性无关. 于是, 我们可以构造多组 $\{\mathbf{M}, \mathbf{N}\}$.

譬如, 我们考虑 $\mathbf{M} = \nabla \mathbf{a} \psi$, 其中 ψ 是给定标量解, \mathbf{a} 称为领示矢量. 又有 $\mathbf{L} = \nabla \psi$, 故 $\mathbf{M} \cdot \mathbf{L} = 0$, 即 \mathbf{L} 与 \mathbf{M} 正交. 故给定式 (3.53) 的可数无穷多解系 $\{\psi_n\}$, 并具有连续偏导数, 就可得到对应的一组三个互相不共面的满足式 (3.54) 的矢量解 $\{\mathbf{L}_n, \mathbf{M}_n, \mathbf{N}_n\}$. 可以证明 $\{\mathbf{L}_n, \mathbf{M}_n, \mathbf{N}_n\}$ 是完备的.

3.2.2 矢量波函数基

$\{\mathbf{L}_n, \mathbf{M}_n, \mathbf{N}_n\}$ 的完备性保证了对波矢量展开时具有唯一确定系数. 例如, 在球极坐标系中, 标量 Helmholtz 方程的解为^[43]

$$\psi_{mn}(r, \theta, \varphi) \sim z_n(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{-jm\varphi} \quad (3.56)$$

其中, z_n 代表球 Bessel 函数 $j_n(kr)$ 或第一类球 Hankel 函数 $h_n^{(1)}(kr)$. 由于球 Hankel 函数在原点处发散, 故包含原点的区域仅可用球 Bessel 函数来表征场, 不包含原点的区域则可以有两种函数构成. 我们可以得到 $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ 函数的解析表示:

$$\mathbf{L}_{mn} = \nabla \psi_{mn} = k \left\{ \frac{d z_n(kr)}{d(kr)} P_n^m(\cos \theta) e^{-jm\varphi} \hat{\mathbf{r}} + \frac{z_n(kr)}{kr} \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \times e^{-jm\varphi} \hat{\boldsymbol{\theta}} - jm \frac{z_n(kr)}{kr} \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} e^{-jm\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right\} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{M}_{mn} = -jm z_n(kr) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} e^{-jm\varphi} \hat{\boldsymbol{\theta}} - z_n(kr) \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d\theta} e^{-jm\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{mn} = n(n+1) \frac{z_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos \theta) e^{-jm\varphi} \hat{\mathbf{r}} &+ \frac{1}{kr} \frac{dr z_n(kr)}{dr} \frac{d P_n^m(\cos \theta)}{d\theta} e^{-jm\varphi} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &- jm \frac{1}{kr} \frac{dr z_n(kr)}{dr} \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} e^{-jm\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (3.59)$$

3.3 并矢格林函数

3.3.1 并矢格林函数的引出

利用标量格林函数可以简化标量位的表示, 也可以局部地表示矢量位的每一个直角分量. 然而矢量场比矢量位出现更多分量, 用标量格林函数难以简洁地表出. 如果仅仅引入格林函数的矢量形式, 在矢量格林函数与矢量源相乘时会出现困难, 不能符合物理实际. 于是提出了并矢格林函数及其运算规则^[60].

考虑 Maxwell 方程组式 (3.1a)~(3.1e), 将它们分别加上下标 j , ($j = 1, 2, 3$), 考虑它们为三个不同的电流分布产生的三组时谐场. 在上式两端分别后置单位矢量 $\hat{\mathbf{x}}_j$, 并将三个方程叠加, 就可以得到 Maxwell 方程的并矢形式:

$$\nabla \bar{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \bar{\mathbf{H}} \quad (3.60a)$$

$$\nabla \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} + j\omega\epsilon \bar{\mathbf{E}} \quad (3.60b)$$

$$\nabla(\epsilon \bar{\mathbf{E}}) = \rho \quad (3.60c)$$

$$\nabla(\mu \bar{\mathbf{H}}) = 0 \quad (3.60d)$$

$$\nabla \bar{\mathbf{J}} = -j\omega\rho \quad (3.60e)$$

注意电荷密度函数 ρ 含有三个不同的标量电荷分布.

消去 Maxwell 方程中的 \mathbf{H} 或 \mathbf{E} 可以得到的 Helmholtz 方程:

$$\nabla\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (3.61a)$$

$$\nabla\nabla \mathbf{H}(\mathbf{r}) - k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (3.61b)$$

其中, $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$. 且场必须满足这些问题所要求的边界条件. 一般情况下, 我们用 $\bar{\mathbf{G}}_e$ 和 $\bar{\mathbf{G}}_m$ 分别表示电并矢格林函数和磁并矢格林函数, 它们分别是下列微分方程的解:

$$\nabla\nabla \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k^2 \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.62a)$$

$$\nabla\nabla \bar{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k^2 \bar{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla [\bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (3.62b)$$

令

$$\mathbf{J}_j = \frac{1}{-j\omega\mu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\mathbf{x}}_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.63)$$

并有

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \iiint_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \bar{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad (3.64)$$

于是

$$\nabla \bar{\mathbf{G}}_e = \bar{\mathbf{G}}_m \quad (3.65)$$

$$\nabla \bar{\mathbf{G}}_m = \bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + k^2 \bar{\mathbf{G}}_e \quad (3.66)$$

$$\nabla \bar{\mathbf{G}}_e = -\frac{1}{k^2} \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.67)$$

$$\nabla \bar{\mathbf{G}}_m = 0 \quad (3.68)$$

3.3.2 并矢格林函数的解

I. Helmholtz 方程的解

考虑方程 (3.61a) 的积分解. 利用第二矢量—并矢 Green 定理 (式 (2.110)), 令 $\mathbf{P} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, 有

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \nabla \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - [\nabla \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dV \\ &= - \oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \nabla \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + [\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r})] \times \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dS \quad (3.69) \end{aligned}$$

代入式 (3.61a) 和式 (3.62a), 并注意到

$$\iiint_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad (3.70)$$

再用 $-j\omega\mu\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 替换 $\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r})$, 可以得到两种面积分形式:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\mathbf{r}') + j\omega\mu \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{R}) \cdot \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \\ &= - \oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \nabla \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + [\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r})] \times \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dS \quad (3.71) \\ &= \oint_S \left\{ [-j\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r})] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] - [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \nabla \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dS \end{aligned}$$

对偶地, 可以得到 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 的表达式, 并注意到式 (3.65), 有

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}(\mathbf{r}') + j\omega\mu \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{R}) \cdot \nabla \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \\ &= \oint_S \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] + j\omega\varepsilon[\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \bar{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} dS \quad (3.72) \end{aligned}$$

这里, \mathbf{r} 是源点矢量, \mathbf{r}' 是场点矢量.

II. 边界条件

电并矢格林函数和磁并矢格林函数不是独立的, 只要求解一个即可. 根据边界条件不同, 电并矢格林函数可以分为以下几类:

- 无界空间电并矢格林函数, 记为 $\bar{\mathbf{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. 由于格林函数是点源产生的场, 考虑无限大球面 S_∞ 所界定的区域, 由 $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{1}{-j\omega\mu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\mathbf{x}}_1$ 产生的矢量位:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{-j\omega} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{x}}_1 \quad (3.73)$$

于是由式(??)

$$\mathbf{E}_{01}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{G}}_{e01}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla\right) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{x}_1 \quad (3.74)$$

将 \hat{x}_1 分别替换为 \hat{x}_2 和 \hat{x}_3 , 将三式后分别并置 \hat{x}_i 后相加

$$\bar{\mathbf{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_i \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla\right) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{x}_i \hat{x}_i \quad (3.75)$$

又注意到

$$\nabla [G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bar{\mathbf{I}}] = \nabla G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.76)$$

于是得到

$$\bar{\mathbf{G}}_{e0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\bar{\mathbf{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla\right) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.77)$$

2. 第一类 (Dirichlet) 并矢边界条件, 记为 $\bar{\mathbf{G}}_{e1}$. 满足

$$\hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{S_d} = 0 \quad (3.78)$$

此时式(3.71) 简化为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') + j\omega\mu \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV = - \iint_{S_d} [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \nabla \bar{\mathbf{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS \quad (3.79)$$

若 S_d 是一理想电壁, 则上式中 $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$, 面积分为零, 即得到

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = -j\omega\mu \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \quad (3.80)$$

若 S_d 是一个开孔的导电面, 体外无电流源, 在求解导体面外问题时, 式(3.71)就简化为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = - \iint_{S_A} [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \nabla \bar{\mathbf{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS \quad (3.81)$$

其中 S_A 是柱上的口径面, 即理想磁壁. 给定口径场分布, 利用 $\nabla \bar{\mathbf{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 就可以计算柱外场分布.

3. 第二类 (Neumann) 边界并矢边界条件, 记为 $\bar{\mathbf{G}}_{e2}$. 满足

$$\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \bar{\mathbf{G}}_{e2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{S_d} = 0 \quad (3.82)$$

代入 (3.72) 中, 可简化得到

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') - \iiint_V \mathbf{J}\mathbf{r} \cdot \nabla \bar{\mathbf{G}}_{\text{e}2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV = +j\omega\epsilon \iint_{S_d} [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \bar{\mathbf{G}}_{\text{e}2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS \quad (3.83)$$

若 S_d 为理想电壁, 有

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \bar{\mathbf{G}}_{\text{e}2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \quad (3.84)$$

若 S_d 为开孔导体面, 且体外无电流源, 则

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = +j\omega\epsilon \iint_{S_A} [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \bar{\mathbf{G}}_{\text{e}2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS \quad (3.85)$$

若使用第二类磁并矢格林函数 $\bar{\mathbf{G}}_{\text{m}2}$, 则边界条件即为 Dirichlet 形式:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \bar{\mathbf{G}}_{\text{m}2} \Big|_{S_d} = 0 \quad (3.86)$$

且 $\bar{\mathbf{G}}_{\text{m}2} = \nabla \bar{\mathbf{G}}_{\text{e}1}$ 是一个有旋并矢函数, $\nabla \bar{\mathbf{G}}_{\text{m}2} = 0$. 可以较方便求得 $\bar{\mathbf{G}}_{\text{e}1}$.

3.3.3 并矢格林函数的对称性

可以导出并矢格林函数具有如下对称性关系:

$$[\bar{\mathbf{G}}_{\text{e}0}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \bar{\mathbf{G}}_{\text{e}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \bar{\mathbf{G}}_{\text{e}0}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (3.87a)$$

$$[\bar{\mathbf{G}}_{\text{m}0}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \bar{\mathbf{G}}_{\text{m}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\bar{\mathbf{G}}_{\text{m}0}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (3.87b)$$

$$[\bar{\mathbf{G}}_{\text{e}1}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \bar{\mathbf{G}}_{\text{e}1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.87c)$$

$$[\bar{\mathbf{G}}_{\text{e}2}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \bar{\mathbf{G}}_{\text{e}2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.87d)$$

$$[\bar{\mathbf{G}}_{\text{m}1}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \bar{\mathbf{G}}_{\text{m}2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.87e)$$

$$[\bar{\mathbf{G}}_{\text{m}2}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \bar{\mathbf{G}}_{\text{m}1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.87f)$$

$$[\nabla' \bar{\mathbf{G}}_{\text{e}0}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \nabla \bar{\mathbf{G}}_{\text{e}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.87g)$$

$$[\nabla' \bar{\mathbf{G}}_{\text{m}0}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \nabla \bar{\mathbf{G}}_{\text{m}0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.87h)$$

$$[\nabla' \bar{\mathbf{G}}_{\text{e}1}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \nabla \bar{\mathbf{G}}_{\text{e}2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.87i)$$

$$[\nabla' \bar{\mathbf{G}}_{\text{e}2}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \nabla \bar{\mathbf{G}}_{\text{e}1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.87j)$$

$$[\nabla' \bar{\mathbf{G}}_{\text{m}1}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \nabla \bar{\mathbf{G}}_{\text{m}1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.87k)$$

$$[\nabla' \bar{\mathbf{G}}_{\text{m}2}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T = \nabla \bar{\mathbf{G}}_{\text{m}2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.87l)$$

有了上述对称关系, 就可以将 I 的方程中的 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 互换, 用 \mathbf{r} 作为场点位置矢量, 用 \mathbf{r}' 作为

源点位置矢量, 将公式变为如下形式:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) + j\omega\mu \iiint_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\mathbf{G}}_{e1}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dV' = - \oint_{S_d} [\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \nabla' \bar{\mathbf{G}}_{e1}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dS' \quad (3.88)$$

于是公式可写成

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iiint_{V'} \bar{\mathbf{G}}_{e1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' - \oint_{S_d} [\nabla' \bar{\mathbf{G}}_{e2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot [\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] dS' \quad (3.89)$$

3.4 积分方程

3.4.1 标量方程

格林函数就是一个点源的响应, 在静电问题中, 就是点源产生的电位^[10,24]. 按照线性叠加原理, 一个金属导体表面电荷引起的总电势应为:

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{S'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') dS' \quad (3.90)$$

其中 $\sigma(\mathbf{r}')$ 是金属表面的电荷密度.

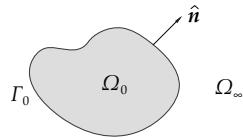


图 3.1 二维物体 Ω_0 , 具有边界 Γ_0 , 无限介质 Ω_∞

考虑嵌在无限大介质中, 源 $f(\rho)$ 产生的标量波, 介质中还嵌有某一形状的物体. 如图 3.1 所示. 假设源和物体沿 z 轴都不变, 这样我们仅需要考虑垂直于 z 轴的平面. 波函数 $\psi(\rho)$ 满足非齐次 Helmholtz 方程:

$$\nabla \nabla \psi(\rho) + k^2 \psi(\rho) = -f(\rho), \quad \rho \in \Omega_\infty \quad (3.91)$$

其中, k 为波数, Ω_∞ 是外边界. 同时波函数应当满足辐射条件, 表示波向外传播而不受到反射:

$$\sqrt{\rho} \left[\frac{\partial \psi(\rho)}{\partial \rho} + jk \psi(\rho) \right] = 0, \quad \rho \rightarrow \infty \quad (3.92)$$

为了求得此问题的积分方程解, 我们引入满足非齐次 Helmholtz 方程的格林函数

$$\nabla \nabla G_0(\rho, \rho') + k_0^2 G_0(\rho, \rho') = -\delta(\rho - \rho') \quad (3.93)$$

此方程的解为熟知的 无界空间的标量格林函数 G_0

$$G_0(\rho, \rho') = \frac{1}{4\pi} H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) \quad (3.94)$$

将式 (3.91) 乘以 G_0 , 式 (3.93) 乘以 ψ , 求差后在整个外域上积分, 得到

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_\infty} [G_0(\rho, \rho') \nabla^2 \psi(\rho) - \psi(\rho) \nabla^2 G_0(\rho, \rho')] d\Omega \\ = \iint_{\Omega_s} G_0(\rho, \rho') f(\rho) d\Omega + \iint_{\Omega_\infty} \psi(\rho) \delta(\rho - \rho') d\Omega \end{aligned} \quad (3.95)$$

其中 Ω_s 表示 $f(\rho)$ 的源区. 应用第二标量格林定理

$$\iint_{\Omega} (a \nabla^2 b - b \nabla^2 a) d\Omega = \oint_{\Gamma} \left(a \frac{\partial b}{\partial n} - b \frac{\partial a}{\partial n} \right) d\Gamma$$

其中 Γ 代表包含 Ω 的边界, 我们有

$$\int_{\Gamma_0 + \Gamma_\infty} \left[\psi(\rho) \frac{\partial G_0(\rho, \rho')}{\partial n} - G_0(\rho, \rho') \frac{\partial \psi(\rho)}{\partial n} \right] d\Gamma - \iint_{\Omega_s} G_0(\rho, \rho') f(\rho) d\Omega = \iint_{\Omega_\infty} \psi(\rho) \delta(\rho - \rho') d\Omega \quad (3.96)$$

Γ_0 代表目标的表面, Γ_∞ 代表半径趋于无穷大的圆. 由于 G_0 和 ψ 都满足辐射条件, 沿 Γ_∞ 的边界积分为 0. 利用 Dirac 函数的定义, 我们得到

$$\oint_{\Gamma_0} \left[\psi(\rho) \frac{\partial G_0(\rho, \rho')}{\partial n} - G_0(\rho, \rho') \frac{\partial \psi(\rho)}{\partial n} \right] d\Gamma - \iint_{\Omega_s} G_0(\rho, \rho') f(\rho) d\Omega = \begin{cases} \psi(\rho'), & \rho' \in \Omega_\infty \\ 0, & \rho \in \Omega_0 \end{cases} \quad (3.97)$$

Ω_0 代表物体的内部区域. 利用 G_0 的对称性将 ρ 和 ρ' 互换, 我们得到

$$\oint_{\Gamma_0} \left[\psi(\rho') \frac{\partial G_0(\rho, \rho')}{\partial n'} - G_0(\rho, \rho') \frac{\partial \psi(\rho')}{\partial n'} \right] d\Gamma' - \iint_{\Omega_s} G_0(\rho, \rho') f(\rho') d\Omega' = \begin{cases} \psi(\rho), & \rho \in \Omega_\infty \\ 0, & \rho \in \Omega_0 \end{cases} \quad (3.98)$$

若考虑散射问题, 在自由空间中, 没有物体, 则沿边界的积分为零. 于是

$$\psi(\rho) = - \iint_{\Omega_s} G_0(\rho, \rho') f(\rho') d\Omega'$$

我们称之为入射波, 记为 $\psi^{\text{inc}}(\rho)$. 于是可得到任意位置波函数的积分表示:

$$\psi^{\text{inc}}(\rho) + \int_{\Gamma_0} \left[\psi(\rho') \frac{\partial G_0(\rho, \rho')}{\partial n'} - G_0(\rho, \rho') \frac{\partial \psi(\rho')}{\partial n'} \right] d\Gamma' = \begin{cases} \psi(\rho), & \rho \in \Omega_\infty \\ 0 & \rho \in \Omega_0 \end{cases} \quad (3.99)$$

式 (3.99) 是在物体表面建立关于 ψ 和 $\partial\psi/\partial n$ 的积分方程的基础, 下面我们讨论五种情况:

I. 不可穿透的硬表面

所谓不可穿透的硬表面即 ψ 满足 Dirichlet 条件:

$$\psi(\rho) = 0, \quad \rho \in \Gamma_0 \quad (3.100)$$

于是式 (3.99) 化为

$$\psi^{\text{inc}}(\rho) - \oint_{\Gamma_0} G_0(\rho, \rho') \frac{\partial \psi(\rho')}{\partial n'} d\Gamma' = \begin{cases} \psi(\rho), & \rho \in \Omega_\infty \\ 0 & \rho \in \Omega_0 \end{cases} \quad (3.101)$$

对 Γ_0 应用此方程, 得到:

$$\oint_{\Gamma_0} G_0(\rho, \rho') \frac{\partial \psi(\rho')}{\partial n'} d\Gamma' = \psi^{\text{inc}}(\rho), \quad \rho \in \Gamma_0 \quad (3.102)$$

即在 Γ_0 上对 $\partial\psi/\partial n$ 的积分方程.

II. 不可穿透的软表面

所谓不可穿透的软表面即 ψ 满足 Neumann 条件:

$$\frac{\partial \psi(\rho)}{\partial n} = 0, \quad \rho \in \Gamma_0 \quad (3.103)$$

式 (3.99) 化为

$$\psi^{\text{inc}}(\rho) + \oint_{\Gamma_0} \psi(\rho') \frac{\partial G_0(\rho, \rho')}{\partial n'} d\Gamma' = \begin{cases} \psi(\rho), & \rho \in \Omega_\infty \\ 0 & \rho \in \Omega_0 \end{cases} \quad (3.104)$$

对 Γ_0 应用此方程, 得到:

$$\frac{1}{2} \psi(\rho) - \oint_{\Gamma_0} \psi(\rho') \frac{\partial G_0(\rho, \rho')}{\partial n'} d\Gamma' = \psi^{\text{inc}}(\rho), \quad \rho \in \Gamma_0 \quad (3.105)$$

其中 f 代表除去奇点 $\rho = \rho'$ 的积分, 称为主值积分¹. 这一结果表明, 式 (3.103) 围绕 Γ_0 的积分可以分解为围绕 ρ_0 的小半圆积分与剩余部分积分之和. 若 ρ 从外部逼近 Γ_0 , 在趋于零的小半圆上的积分可以求得为 $\psi(\rho)/2$. 若 ρ 从内部逼近 Γ_0 , 积分为 $-\psi(\rho)/2$. 无论何种情况, 都可表示为式 (3.105).

III. 不可穿透的混合边界

物体表面满足边界条件:

$$\frac{\partial \psi(\rho)}{\partial n} + \gamma \psi(\rho) = 0, \quad \rho \in \Gamma_0 \quad (3.106)$$

方程 (3.99) 化为:

$$\psi^{\text{inc}}(\rho) + \oint_{\Gamma_0} \psi(\rho') \left[\gamma G_0(\rho, \rho') + \frac{\partial G_0(\rho, \rho')}{\partial n'} \right] d\Gamma' = \begin{cases} \psi(\rho), & \rho \in \Omega_\infty \\ 0 & \rho \in \Omega_0 \end{cases} \quad (3.107)$$

对 Γ_0 应用上式, 得到

$$\frac{1}{2} \psi(\rho) - \oint_{\Gamma_0} \psi(\rho') \left[\gamma G_0(\rho, \rho') + \frac{\partial G_0(\rho, \rho')}{\partial n'} \right] d\Gamma' = \psi^{\text{inc}}(\rho), \quad \rho \in \Gamma_0 \quad (3.108)$$

IV. 可穿透的均匀物体

如果物体是可穿透且均匀的, 我们对 Γ_0 应用式 (3.99), 得到

$$\frac{1}{2} \psi(\rho) - \oint_{\Gamma_0} \left[\psi(\rho') \frac{\partial G_0(\rho, \rho')}{\partial n'} - G_0(\rho, \rho') \frac{\partial \psi(\rho')}{\partial n'} \right] d\Gamma' = \psi^{\text{inc}}(\rho), \quad \rho \in \Gamma_0 \quad (3.109)$$

为了在 Γ_0 上求解 ψ 和 $\partial \psi / \partial n$, 我们需要考虑物体内部, 并得到另一个方程:

$$\frac{1}{2} \psi(\rho) - \oint_{\Gamma_0} \left[G_0^*(\rho, \rho') \frac{\partial \psi(\rho')}{\partial n'} - \psi(\rho') \frac{\partial G_0^*(\rho, \rho')}{\partial n'} \right] d\Gamma' = 0, \quad \rho \in \Gamma_0 \quad (3.110)$$

其中

$$G_0^*(\rho, \rho') = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k^* |\rho - \rho'|) \quad (3.111)$$

k^* 是物体内部的波数.

¹ 主值积分 (Cauchy Principal Value Integral), 定义为

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right] \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &\equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx \end{aligned}$$

V. 可穿透的非均匀物体

首先我们考虑 Γ_0 外的区域得到式 3.98, 随后考虑物体内部的波动方程, 满足 Helmholtz 方程

$$\nabla[u(\rho)\nabla\psi(\rho)] + k_0^2 v(\rho)\psi(\rho) = 0 \quad (3.112)$$

其中 $u(\rho)$ 和 $v(\rho)$ 表征了内部节制的特性. 为了求得 ψ 的积分方程, 将式 (3.112) 乘上 G_0 并在 Ω_0 上积分

$$\iint_{\Omega_0} \{G_0(\rho, \rho')\nabla[u(\rho)\nabla\psi(\rho)] + k_0^2 v(\rho)G_0(\rho, \rho')\psi(\rho)\} d\Omega = 0 \quad (3.113)$$

然后利用矢量运算性质

$$\nabla(G_0 u \nabla \psi) = G_0 \nabla(u \nabla \psi) + u \nabla \psi \cdot \nabla G_0$$

以及二维散度定理, 式 3.113 可以写为

$$\iint_{\Omega_0} [k_0^2 v(\rho)G_0(\rho, \rho')\psi(\rho) - u(\rho)\nabla\psi(\rho) \cdot \nabla G_0(\rho, \rho')] d\Omega + \oint_{\Gamma_0} G_0(\rho, \rho')u(\rho) \frac{\partial\psi(\rho)}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.114)$$

代入矢量运算性质

$$\nabla(u\psi\nabla G_0) = u\psi\nabla^2 G_0 + u\nabla\psi \cdot \nabla G_0 + \nabla u \cdot (\psi\nabla G_0)$$

并应用二维散度定理, 式 3.114 化为

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_0} \{k_0^2 v(\rho)G_0(\rho, \rho')\psi(\rho) + u(\rho)\psi(\rho)\nabla^2 G_0(\rho, \rho') + \nabla u(\rho) \cdot [\psi(\rho)\nabla G_0(\rho, \rho')]\} d\Omega \\ & + \oint_{\Gamma_0} \left[u(\rho)G_0(\rho, \rho') \frac{\partial\psi(\rho)}{\partial n} - u(\rho)\psi(\rho) \frac{\partial G_0(\rho, \rho')}{\partial n} \right] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.115)$$

将式 3.93 代入上式得到

$$\begin{aligned} & k_0^2 \iint_{\Omega_0} [v(\rho) - u(\rho)]\psi(\rho)G_0(\rho, \rho') d\Omega + \iint_{\Omega_0} \nabla u(\rho) \cdot [\psi(\rho)\nabla G_0(\rho, \rho')] d\Omega \\ & + \oint_{\Gamma_0} \left[u(\rho)G_0(\rho, \rho') \frac{\partial\psi(\rho)}{\partial n} - u(\rho)\psi(\rho) \frac{\partial G_0(\rho, \rho')}{\partial n} \right] d\Gamma = \begin{cases} u(\rho')\psi(\rho') & \rho' \in \Omega_0 \\ 0 & \rho' \in \Omega_\infty \end{cases} \end{aligned} \quad (3.116)$$

利用格林函数对称性将 ρ 和 ρ' 互换, 得

$$k_0^2 \iint_{\Omega_0} [v(\rho') - u(\rho')] \psi(\rho') G_0(\rho, \rho') d\Omega' + \iint_{\Omega_0} \nabla' u(\rho') \cdot [\psi(\rho') \nabla' G_0(\rho, \rho')] d\Omega' \\ + \oint_{\Gamma_0} \left[u(\rho') G_0(\rho, \rho') \frac{\partial \psi(\rho')}{\partial n'} - u(\rho') \psi(\rho') \frac{\partial G_0(\rho, \rho')}{\partial n'} \right] d\Gamma' = \begin{cases} u(\rho) \psi(\rho) & \rho \in \Omega_0 \\ 0 & \rho \in \Omega_\infty \end{cases} \quad (3.117)$$

由于边界条件要求场 ψ 和 $u(\partial\psi/\partial n)$ 在 Γ_0 连续, 我们可以结合式 (3.98) 和式 3.117, 得到不含场的法向导数的积分方程

$$\psi^{\text{inc}}(\rho) + k_0^2 \iint_{\Omega_0} [v(\rho') - u(\rho')] \psi(\rho') G_0(\rho, \rho') d\Omega' + \iint_{\Omega_0} \nabla' u(\rho') \cdot [\psi(\rho') \nabla' G_0(\rho, \rho')] d\Omega' \\ + \oint_{\Gamma_0} [1 - u(\rho')] \psi(\rho') \frac{\partial G_0(\rho, \rho')}{\partial n'} d\Gamma' = \begin{cases} u(\rho) \psi(\rho) & \rho \in \Omega_0 \\ 0 & \rho \in \Omega_\infty \end{cases} \quad (3.118)$$

称为体 - 面积分方程 (VSIE). 式 (3.118) 可处理 $u(\rho)$ 在 Ω_0 中连续的问题. 对于 Ω_0 包含两种或更多非均匀媒质, 并在界面 Γ_d 处 $u(\rho)$ 存在不连续的情况, 式 (3.118) 左端须包含线积分

$$\int_{\Gamma_d} [u(\rho_+) - u(\rho_-)] \psi(\rho') \frac{\partial G_0(\rho, \rho')}{\partial n'_d} d\Gamma'$$

其中 \hat{n}_d 从 “-” 指向 “+”. 若 Γ_0 包含 Ω_c 不可穿透区域, 则应包含线积分项

$$\oint_{\Gamma_c} \left[\delta_e u(\rho') G_0(\rho, \rho') \frac{\partial \psi(\rho')}{\partial n'_c} - \delta_h u(\rho') \psi(\rho') \frac{\partial G_0(\rho, \rho')}{\partial n'_c} \right] d\Gamma'$$

其中 \hat{n}_c 指向 Ω_c 内部, 且 δ_e 和 δ_h 分别定义为

$$\delta_e = \begin{cases} 0 & \text{软边界} \\ 1 & \text{硬边界} \end{cases}, \quad \delta_h = \begin{cases} 0 & \text{硬边界} \\ 1 & \text{软边界} \end{cases}$$

3.4.2 矢量方程

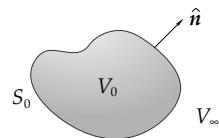


图 3.2 在无限空间 V_∞ 中的三维物体 V_0 , 边界 S_0

考虑具有一个确定形状物体的无限大各向同性空间中电流密度 \mathbf{J}_i 产生的电磁场 \mathbf{E}, \mathbf{H} . 如

图 3.2 所示. \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 满足矢量波动方程:

$$\nabla \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \mathbf{J}_i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_\infty \quad (3.119)$$

$$\nabla \nabla \mathbf{H}(\mathbf{r}) - k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \mathbf{J}_i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_\infty \quad (3.120)$$

式中 V_∞ 指外域. 利用第二矢量格林定理

$$\iiint_V (\mathbf{b} \cdot \nabla \nabla \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \nabla \mathbf{b}) dV = \oint_S (\mathbf{a} \times \nabla \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \nabla \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

若令 $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}b$, 其中 $\hat{\mathbf{b}}$ 是单位矢量, 通过推导可以得到

$$\iiint_V [b \nabla \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a} \nabla^2 b + (\nabla \mathbf{a}) \nabla b] dV = \oint_S [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a}) \nabla b + (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a}) \times \nabla b + (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \mathbf{a}) b] dS \quad (3.121)$$

此式可称为标量 – 矢量格林定理. 令 $V = V_\infty$, $\mathbf{a} = \mathbf{E}$ 或 \mathbf{H} , $b = G_0$, 代入式 (3.121), 并利用式 (3.119) 和式 (3.120), 可导出以下积分表示:

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - \oint_{S_0} [(\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{E}) \nabla G_0 + (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}) \times \nabla G_0 + j\omega\mu(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H})G_0] dS' = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in V_\infty \\ 0, & \mathbf{r} \in V_0 \end{cases} \quad (3.122)$$

$$\mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - \oint_{S_0} [(\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{H}) \nabla G_0 + (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}) \times \nabla G_0 - j\omega\epsilon(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H})G_0] dS' = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in V_\infty \\ 0, & \mathbf{r} \in V_0 \end{cases} \quad (3.123)$$

其中

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

\mathbf{E}^{inc} 和 \mathbf{H}^{inc} 代表 \mathbf{J}_i 在无界空间中产生的电场和磁场.

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0 \iiint_{V_s} \left(\mathbf{J}_i G_0 + \frac{1}{k_0^2} \nabla' \mathbf{J}_i \nabla G_0 \right) dV' \quad (3.124)$$

$$\mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = - \iiint_{V_s} \mathbf{J}_i \times \nabla G_0 dV' \quad (3.125)$$

为了方便表达, 我们定义算子

$$\mathbf{L}(X) = jk \oint_{S_0} \left(X G_0 + \frac{1}{k_0^2} \nabla' X \nabla G_0 \right) dS' \quad (3.126a)$$

$$\mathbf{K}(X) = \iint_{S_0} X \times \nabla G_0 \, dS' \quad (3.126b)$$

并引入等效表面电流和磁流:

$$\bar{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{H}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{M}_s = \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (3.127)$$

于是式 (3.122) 和式 (3.123) 可写为

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - \mathbf{L}(\bar{\mathbf{J}}_s) + \mathbf{K}(\mathbf{M}_s) = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in V_\infty \\ 0, & \mathbf{r} \in V_0 \end{cases} \quad (3.128)$$

$$\bar{\mathbf{H}}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{J}}_s) - \mathbf{L}(\mathbf{M}_s) = \begin{cases} \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in V_\infty \\ 0, & \mathbf{r} \in V_0 \end{cases} \quad (3.129)$$

式 (3.128) 和 (3.129) 是推导 \mathbf{J}_s 和 \mathbf{M}_s 积分方程的基础. 将此二式与 $\hat{\mathbf{n}}$ 叉乘, 并让 \mathbf{r} 趋近 S_0 , 我们有

$$\frac{1}{2} \mathbf{M}_s(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}(\bar{\mathbf{J}}_s) + \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{M}_s) = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_0 \quad (3.130)$$

$$\frac{1}{2} \bar{\mathbf{J}}_s(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{J}}_s) + \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}(\mathbf{M}_s) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_0 \quad (3.131)$$

其中 $\tilde{\mathbf{K}}$ 即 (3.126b) 中定义的 \mathbf{K} , 仅通过主值积分去除了 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 的奇点. 式 (3.130) 称为 **电场积分方程** (EFIE), 式 (3.131) 称为 **磁场积分方程** (MFIE).

我们将二式结合, 整理得到 **混合积分方程** (CFIE). 结合因子 α 一般为 $0 \sim 1$.

$$(1 - \alpha) \left[\frac{1}{2} \bar{\mathbf{J}}_s(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{J}}_s) + \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}(\mathbf{M}_s) \right] + \alpha \hat{\mathbf{n}} \times \left[\frac{1}{2} \mathbf{M}_s(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}(\bar{\mathbf{J}}_s) + \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{M}_s) \right] = (1 - \alpha) \hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{H}}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - \alpha \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{\text{inc}} \quad (3.132)$$

I. 理想导体

若物体为理想导体, \mathbf{E} 满足边界条件 $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = 0, \mathbf{r} \in S_0$, 故 $\mathbf{M}_s = 0$, 于是式 (3.130) 和式 (3.131) 简化为

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}(\bar{\mathbf{J}}_s) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_0 \quad (3.133)$$

$$\frac{1}{2} \bar{\mathbf{J}}_s(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{J}}_s) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_0 \quad (3.134)$$

二式均可用来求解 $\bar{\mathbf{J}}_s$. 然而, 对给定 S_0 , 当外部介质无耗时, \mathbf{L} 可能在某些频率上出现奇点,

利用 (3.133) 求解可能在这些频率上得到错误结果. 这称为**内谐振问题**, 奇异频率对应将区域 S_0 用外部介质填充后形成的谐振腔. 同样的问题也可能出现在 (3.134) 式中. 为了消除这一问题, 可采用混合积分方程

$$\alpha \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}(\bar{\mathbf{J}}_s) + (1 - \alpha) \left[\frac{1}{2} \bar{\mathbf{J}}_s(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{J}}_s) \right] = \alpha \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + (1 - \alpha) \hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{H}}^{\text{inc}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_0 \quad (3.135)$$

这一结合产生了一个对应于具有阻抗壁和复数谐振频率腔体的积分算子. 故对于实数频率, 算子不会出现奇点.

II. 不可穿透物体具有阻抗边界

若物体为阻抗体, $\bar{\mathbf{J}}_s$ 和 \mathbf{M}_s 之间就存在一个**阻抗边界条件**.

$$\mathbf{E} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) \hat{\mathbf{n}} = \eta Z_0 \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} \quad (3.136)$$

或

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \eta Z_0 [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}) \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{H}] \quad (3.137)$$

对于电流和磁流, 也即

$$\mathbf{M}_s = -\eta \hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{J}}_s, \quad \eta \bar{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{M}_s \quad (3.138)$$

将条件代入 (3.130) 和 (3.131), 即可得到只含有一个未知数的积分方程, 即可求得 $\bar{\mathbf{J}}_s$ 或 \mathbf{M}_s

$$\frac{1}{2} \eta \hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{J}}_s(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}(\bar{\mathbf{J}}_s) + \eta \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{J}}_s) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_0 \quad (3.139)$$

$$\frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} \mathbf{M}_s(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{M}_s) + \eta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}(\mathbf{M}_s) = \eta \hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{H}}^{\text{inc}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_0 \quad (3.140)$$

III. 可穿透的均匀物体

若物体是均匀的, 我们可以对物体内部应用标量 – 矢量格林定理, 得到另外两个方程

$$\eta \mathbf{L}_i(\bar{\mathbf{J}}_s) - \mathbf{K}_i(\mathbf{M}_s) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \in V_\infty \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V_0 \end{cases} \quad (3.141)$$

以及

$$\eta \mathbf{K}_i(\bar{\mathbf{J}}_s) + \mathbf{L}_i(\mathbf{M}_s) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \in V_\infty \\ \eta \mathbf{H}(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V_0 \end{cases} \quad (3.142)$$

其中 $\eta = \sqrt{\mu_r/\varepsilon_r}$ 且

$$\mathbf{L}_i(\mathbf{X}) = jk \oint_{S_0} \left(\mathbf{X} G_0 + \frac{1}{k^2} \nabla' \mathbf{X} \nabla G_0 \right) dS' \quad (3.143a)$$

$$\mathbf{K}_i(\mathbf{X}) = \oint_{S_0} \mathbf{X} \times \nabla G_0 dS' \quad (3.143b)$$

其中 k 代表物体内波数. 将上式与 $\hat{\mathbf{n}}$ 叉乘并让 \mathbf{r} 趋近 S_0 于是有

$$\frac{1}{2} \mathbf{M}_s(\mathbf{r}) + \eta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}_i(\bar{\mathbf{J}}_s) - \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}_i(\mathbf{M}_s) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_0 \quad (3.144)$$

$$\frac{1}{2} \eta \bar{\mathbf{J}}_s - \eta \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}_i(\bar{\mathbf{J}}_s) - \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}_i(\mathbf{M}_s) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_0 \quad (3.145)$$

将上式与 (3.130) 或 (3.131) 联立即可解得 $\bar{\mathbf{J}}_s$ 和 \mathbf{M}_s . 类似地, 为了避免内谐振问题, 可以联立为混合积分方程:

$$(1-\alpha) \left[\frac{1}{2} \mathbf{M}_s(\mathbf{r}) + \eta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}_i(\bar{\mathbf{J}}_s) - \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}_i(\mathbf{M}_s) \right] + \alpha \hat{\mathbf{n}} \times \left[\frac{1}{2} \eta \bar{\mathbf{J}}_s - \eta \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{K}}_i(\bar{\mathbf{J}}_s) - \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}_i(\mathbf{M}_s) \right] = 0 \quad (3.146)$$

仅在内部介质无耗时才需要. 此 CFIE 也可与外域 CFIE 联立以获得完整的方程. 更好的方法是将内域和外域的 EFIE 结合起来得到新的积分方程

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{L} + \eta \mathbf{L}_i) \bar{\mathbf{J}}_s - \hat{\mathbf{n}} \times (\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}}_i) \mathbf{M}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_0 \quad (3.147)$$

并与内外域结合得到的 MFIE 联立使用

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}}_i) \bar{\mathbf{J}}_s + \hat{\mathbf{n}} \times \left(\mathbf{L} + \frac{1}{\eta} \mathbf{L}_i \right) \mathbf{M}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{H}}^{\text{inc}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_0 \quad (3.148)$$

这一方法是由 Poggio and Miller, Chang and Harrington, Wu and Tsai 提出的, 可以获得无内谐振的精确稳定解. 常被称为 PMCHWT 方法.

IV. 非均匀介质体

若物体为非均匀, 介电常数为 ε , 电导率为 μ , 则可将 Maxwell 方程改写为

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H} - \mathbf{M}_{\text{eq}} \\ \nabla \mathbf{H} = j\omega \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{eq}} + \mathbf{J}_i \end{cases} \quad \text{其中} \quad \begin{cases} \mathbf{M}_{\text{eq}} = j\omega(\mu - \mu_0) \mathbf{H} \\ \mathbf{J}_{\text{eq}} = j\omega(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} \end{cases} \quad (3.149)$$

易见我们可以将问题等效为自由空间中, ε_0 和 μ_0 条件下电流 \mathbf{J}_i 、 \mathbf{J}_{eq} 和 \mathbf{M}_{eq} 的辐射. \mathbf{J}_i 的辐射场可由 (3.124) 和 (3.125) 式得出. 类似地, 可以得出 \mathbf{J}_{eq} 的辐射场 $\mathbf{E}_1(\mathbf{J}_{\text{eq}})$ 和 $\mathbf{H}_1(\mathbf{J}_{\text{eq}})$. 由对

偶原理, 可以得出 \mathbf{M}_{eq} 的辐射场

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{M}_{\text{eq}}) = \iiint_{V_0} \mathbf{M}_{\text{eq}} \times \nabla G_0 \, dV' \quad (3.150)$$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{M}_{\text{eq}}) = -j\omega\epsilon_0 \iiint_{V_0} \left(\mathbf{M}_{\text{eq}} G_0 + \frac{1}{k_0^2} \nabla' \mathbf{M}_{\text{eq}} \nabla G_0 \right) dV' \quad (3.151)$$

于是总场就是这三者之和

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{J}_i) + \mathbf{E}_1(\mathbf{J}_{\text{eq}}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{M}_{\text{eq}}) \quad (3.152)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{J}_i) + \mathbf{H}_1(\mathbf{J}_{\text{eq}}) + \mathbf{H}_2(\mathbf{M}_{\text{eq}}) \quad (3.153)$$

以上诸式通常称为体积分方程 (VIEs).

第4章 变分问题

4.1 变分和变分方程

简单泛函是简单函数 $U(x)$ 的函数形式之函数, 是函数空间到数值空间的映射.

$$J\{U(x)\} = \int_{x_1}^{x_2} F[x, U(x)] dx \quad (4.1)$$

其定义域是在 $[x_1, x_2]$ 上有定义的可取函数集(可测函数集) M , 泛函式中 $F[x, U(x)]$ 是以 x 为积分变量的被积函数, 是同时取决于自变量 x 与可取函数 U 的双变量函数.

函数的变分: $\delta U = \varepsilon \eta(x)$, $\varepsilon \ll 1$ 是任意给定的常数, $\eta \in M$ 是可取函数. δU 引起的泛函式(4.1)值的微小变化

$$\begin{aligned} J\{U + \delta U\} - J\{U\} &= \int_{x_1}^{x_2} F[x, U + \delta U] dx - \int_{x_1}^{x_2} F[x, U] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \{F[x, U + \delta U] - F[x, U]\} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial U} \delta U \right) dx + \frac{1}{2!} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial U^2} \delta U^2 \right) dx + \dots \\ &= \delta J\{U(x)\} + \frac{1}{2!} \delta^2 J\{U(x)\} + \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

从而可定义泛函的一阶变分

$$\delta J\{U(x)\} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial U} \delta U \right) dx \quad (4.3)$$

和泛函的 n 阶变分

$$\delta^n J\{U(x)\} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^n F}{\partial U^n} \delta U^n \right) dx \quad (4.4)$$

泛函取极值的条件是一阶变分为 0, 即变分方程

由于函数变分 $\delta U = \varepsilon \eta(x)$ 的任意性, 可知上述变分方程等价为 Euler(微分) 方程:

$$\frac{\partial F}{\partial U} = 0, \quad x \in [x_1, x_2] \quad (4.5)$$

变分与微分概念完全不同, 但运算规则上有许多相似之处, 如

$$\delta(xU) = x\delta U \quad (4.6a)$$

$$\delta(UV) = U\delta V + V\delta U \quad (4.6b)$$

$$\delta(U') = (\delta U)' \quad (4.6c)$$

$$\delta U^{(n)} = nU^{n-1}\delta U \quad (4.6d)$$

$$\delta \int F dx = \int \delta F dx \quad (4.6e)$$

4.2 变分问题及 Euler 边值问题

微分方程 + 边界条件: 边值问题

变分方程 + 边界条件: 变分问题

变分方程的求解和某种具有 Euler 方程形式的微分方程的求解可以互相转换, 但变分方程与所附边界条件构成的变分问题和对应的 Euler 边值问题未必完全等价.

泛函取极值又称泛函驻定.

4.2.1 简单泛函

即 (4.1) 式. 对应 Euler 方程 (4.5) 式. 其边界条件

$$U(x_1) = a, U(x_2) = b$$

在变分问题中, 该端点条件表示 $U(x)$ 曲线族汇交于端点 (x_1, a) 和 (x_2, b) , 称作固定端点的变分问题.

4.2.2 含一阶导函数的泛函

设泛函

$$J\{U(x)\} = \int_{x_1}^{x_2} F[x, U, U'] dx \quad (4.7)$$

其函数变分为 $\delta U = \varepsilon\eta(x)$, 其导数的变分为 $\delta U' = \varepsilon\eta'(x)$, 则被积函数的变化

$$\begin{aligned} \delta F &= F[x, U + \delta U, U' + \delta U'] - F[x, U, U'] \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial U} \delta U + \frac{\partial F}{\partial U'} \delta U' \right] + \frac{\partial^2 F}{\partial U \partial U'} \delta U \delta U' + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial U^2} \delta U^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial U'^2} \delta U'^2 \right] + \dots \\ &= \varepsilon \left[\frac{\partial F}{\partial U} \eta + \frac{\partial F}{\partial U'} \eta' \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} [\dots] \end{aligned} \quad (4.8)$$

而泛函的一阶变分

$$\begin{aligned} \delta J\{U(x)\} &= \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon \left[\frac{\partial F}{\partial U} \eta + \frac{\partial F}{\partial U'} \eta' \right] dx \\ &\text{分部积分} = \varepsilon \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial U'} \right] dx + \left[\eta \frac{\partial F}{\partial U'} \right]_{x=x_1}^{x=x_2} \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

由于 ε 是常数, $\eta(x)$ 的选择具有随意性, 变分方程 $\delta J\{U(x)\} = 0$ 等价于

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F[x, U, U']}{\partial U} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F[x, U, U']}{\partial U'} \\ \eta(x) \frac{\partial F[x, U, U']}{\partial U'} \Big|_{x=x_2} = 0, \eta(x) \frac{\partial F[x, U, U']}{\partial U'} \Big|_{x=x_2} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Euler 方程} \\ \text{附加条件} \end{array} \quad (4.10)$$

若 $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, 即 $U(x_1) = a$ 和 $U(x_2) = b$ 是定值, 属第一类边界条件, 则固定端点的变分问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta J\{U(x)\} = \delta \int_{x_1}^{x_2} F[x, U, U'] dx = 0 \\ U(x_1) = a, U(x_2) = b \end{array} \right. \quad (4.11a)$$

等价于第一类 Euler 边值问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F[x, U, U']}{\partial U} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F[x, U, U']}{\partial U'} \right) \\ U(x_1) = a, U(x_2) = b \end{array} \right. \quad (4.11b)$$

若 $\eta(x_1) \neq 0, \eta(x_2) \neq 0$, 即 $U(x_1)$ 和 $U(x_2)$ 不是定值, 属第二类或第三类边界条件, 则自由端点的变分问题

$$\delta J\{U(x)\} = \delta \int_{x_1}^{x_2} F[x, U, U'] dx = 0 \quad (4.12a)$$

等价于 Euler 边值问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F[x, U, U']}{\partial U} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F[x, U, U']}{\partial U'} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial U'} \Big|_{x=x_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial U'} \Big|_{x=x_2} = 0 \end{array} \right. \quad (4.12b)$$

其中对应于第二类和第三类边界条件的定解条件在对应的变分问题中并无要求, 仿佛自然满足, 故称为自然边界条件.

4.2.3 含一阶偏导数的泛函

设多变量函数 $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$, 定义泛函

$$J\{U(\mathbf{r})\} = \iiint_V F[\mathbf{r}, U, U'_x, U'_y, U'_z] dv \quad (4.13)$$

记函数的变分 $\delta U = \varepsilon \eta(\mathbf{r})$, 则该泛函的一阶变分

$$\begin{aligned}\delta J\{U(\mathbf{r})\} &= \iiint_V \left[\frac{\partial F}{\partial U} \varepsilon \eta + \frac{\partial F}{\partial U'_x} \varepsilon \eta'_x + \frac{\partial F}{\partial U'_y} \varepsilon \eta'_y + \frac{\partial F}{\partial U'_z} \varepsilon \eta'_z \right] dv \\ &= \varepsilon \iiint_V \left[\frac{\partial F}{\partial U} \eta + \left(\hat{x} \frac{\partial F}{\partial U'_x} + \hat{y} \frac{\partial F}{\partial U'_y} + \hat{z} \frac{\partial F}{\partial U'_z} \right) \cdot \nabla \eta \right] dv\end{aligned}\quad (4.14)$$

利用 $\mathbf{A} \cdot \nabla \Phi = \nabla(\Phi \mathbf{A}) - \Phi \nabla \mathbf{A}$ 及 Gauss 散度定理, 可得

$$\begin{aligned}\delta J\{U(\mathbf{r})\} &= \varepsilon \iiint_V \eta \left[\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U'_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial U'_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial U'_z} \right) \right] dv \\ &\quad + \varepsilon \iint_{S[V]} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial U'_x} (\hat{n} \cdot \hat{x}) + \frac{\partial F}{\partial U'_y} (\hat{n} \cdot \hat{y}) + \frac{\partial F}{\partial U'_z} (\hat{n} \cdot \hat{z}) \right] ds\end{aligned}\quad (4.15)$$

由 $\eta(\mathbf{r})$ 的随意性, 变分方程 $\delta J\{U(\mathbf{r})\} = 0$ 等价于定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial U'_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial U'_z} \right) & \text{Euler 方程} \\ \left\{ \eta \left[\frac{\partial F}{\partial U'_x} (\hat{n} \cdot \hat{x}) + \frac{\partial F}{\partial U'_y} (\hat{n} \cdot \hat{y}) + \frac{\partial F}{\partial U'_z} (\hat{n} \cdot \hat{z}) \right] \right\}_{\mathbf{r} \in S[V]} = 0 & \text{附加条件} \end{cases}\quad (4.16)$$

类似上节的分析, 固定边界值的变分问题

$$\begin{cases} \delta J\{U(\mathbf{r})\} = \delta \iiint_V F[\mathbf{r}, U, U'_x, U'_y, U'_z] dv = 0 \\ U|_{\mathbf{r} \in S[V]} = \text{const}, \text{ 即 } \delta U|_{\mathbf{r} \in S[V]} = 0, \text{ 即 } \eta|_{\mathbf{r} \in S[V]} = 0 \end{cases}\quad (4.17a)$$

等价于第一类 Euler 边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial U'_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial U'_z} \right) = 0 \\ U|_{\mathbf{r} \in S[V]} = \text{const} \end{cases}\quad (4.17b)$$

而自由边界值的变分问题

$$\delta J\{U(\mathbf{r})\} = \delta \iiint_V F[\mathbf{r}, U, U'_x, U'_y, U'_z] dv = 0 \quad (\text{无边界条件})\quad (4.18a)$$

等价于自然条件的边值问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial U'_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial U'_z} \right) \\ \left[\frac{\partial F}{\partial U'_x} (\hat{n} \cdot \hat{x}) + \frac{\partial F}{\partial U'_y} (\hat{n} \cdot \hat{y}) + \frac{\partial F}{\partial U'_z} (\hat{n} \cdot \hat{z}) \right]_{r \in S[V]} = 0 \end{array} \right. \quad (4.18b)$$

4.2.4 含二阶偏导数(不含一阶偏导)的泛函

设多变量函数 $U(\mathbf{r})$ 的泛函

$$J\{U(\mathbf{r})\} = \iiint_V F[\mathbf{r}, U, U''_{xx}, U''_{yy}, U''_{zz}] dv \quad (4.19)$$

其变分方程 $\delta J\{U(\mathbf{r})\} = 0$ 等价于 Euler 定解问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial U} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial U''_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial U''_{yy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial F}{\partial U''_{zz}} \right) = 0 \\ \hat{n} \cdot \left\{ \hat{x} \left[\eta'_x \frac{\partial F}{\partial U''_{xx}} - \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U''_{xx}} \right) \right] \right. \\ \left. + \hat{y} \left[\eta'_y \frac{\partial F}{\partial U''_{yy}} - \eta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial U''_{yy}} \right) \right] + \hat{z} \left[\eta'_z \frac{\partial F}{\partial U''_{zz}} - \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial U''_{zz}} \right) \right] \right\}_{r \in S[v]} = 0 \end{array} \right. \quad (4.20)$$

例 设已知含二阶偏导数的泛函

$$J\{U(\mathbf{r})\} = \langle -\nabla \nabla U, U \rangle - 2\langle U, f \rangle \quad (4.21)$$

其中 $U(\mathbf{r})$ 为未知实函数, $f(\mathbf{r})$ 为已知实函数.

按内积定义, 将该泛函展开成

$$J\{U(\mathbf{r})\} = \iiint_V -U(\nabla \nabla U + 2f) dv \quad (4.22)$$

其被积函数为

$$F[\mathbf{r}, U, U''_{xx}, U''_{yy}, U''_{zz}] = -U(U''_{xx} + U''_{yy} + U''_{zz} + 2f)$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial U} = -(\nabla \nabla U + 2f), \quad \frac{\partial F}{\partial U''_{xx}} = \frac{\partial F}{\partial U''_{yy}} = \frac{\partial F}{\partial U''_{zz}} = -U$$

代入式(4.20)得

$$\begin{cases} -(\nabla \nabla U + 2f) - \nabla \nabla U = 0 \rightarrow \nabla \nabla U = -f \\ \left[\eta \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial \eta}{\partial n} \right]_{r \in S[V]} = 0 \end{cases}$$

4.2.5 约束条件下的变分问题

从可取函数集中符合某些约束条件的子集中寻求使泛函驻定的极值函数, 称为约束条件下的变分问题, 也叫泛函条件极值问题, 类似于多元函数的条件极值问题, 可用 Lagrange 乘子法求解. 以含一阶导函数泛函为例.

4.2.6 微分方程形式的约束条件

变分问题

$$\begin{cases} \delta J\{U(x)\} = \delta \int_{x_1}^{x_2} F[x, U, U'] dx = 0 \\ \text{第一类或无边界条件} \end{cases} \quad (4.23)$$

附有微分方程形式的约束条件组:

$$\begin{cases} \Phi_i[x, U, U'] = 0 \\ i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (4.24)$$

设新泛函

$$\tilde{J}\{U(x)\} = \int_{x_1}^{x_2} \tilde{F}[x, U, U'] dx$$

其中新的被积函数为

$$\tilde{F}[x, U, U'] = F[x, U, U'] + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \Phi_i[x, U, U']$$

式中 $\lambda_i(x)$ 为待求的 Lagrange 乘子. 于是原变分问题转化为新变分问题:

$$\begin{cases} \delta \tilde{J}\{U(x)\} = \delta \int_{x_1}^{x_2} \tilde{F}[x, U, U'] dx = 0 \\ \text{第一类或无边界条件} \end{cases} \quad (4.25)$$

对应的 Euler 方程可类似地写出为

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial U} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial U'} \right) = 0 \\ \text{1st, 2nd or 3rd B.C} \end{cases} \quad (4.26)$$

将 \tilde{F} 代入上式, 得 $m + 1$ 个方程, 从而解出 $\lambda_i(x)$ 及条件极值函数 $U(x)$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial U'} \right) + \sum_{i=1}^m \left\{ \lambda_i \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial U} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial U'} \right) \right] - \lambda'_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial U'} \right\} = 0 \\ \Phi_i[x, U, U'] = 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (4.27)$$

4.2.7 泛函方程形式的约束条件

设

$$\delta J\{U(x)\} = \delta \int_{x_1}^{x_2} F[x, U, U'] dx = 0$$

附有泛函方程形式的约束条件组

$$\begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} \Phi_i[x, U, U'] dx = C_i \quad (\text{常数}) \\ i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (4.28)$$

构造新泛函

$$\begin{aligned} \tilde{J}\{U(x)\} &= \int_{x_1}^{x_2} \tilde{F}[x, U, U'] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ F[x, U, U'] + \sum_{i=1}^m \lambda_i \Phi_i[x, U, U'] \right\} dx - \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i \end{aligned} \quad (4.29)$$

对于满足约束条件组的 $U(x)$, $\tilde{J}\{U(x)\} = J\{U(x)\}$, 两者驻定条件也相同. 从新泛函的 Euler 边值问题可写出联立方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial U'} \right) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial U} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi_i}{\partial U'} \right] = 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} \Phi_i[x, U, U'] dx = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (4.30)$$

解出 λ_i 和约束条件下的解 $U(x)$. 其中积分常数由 $U(x)$ 的边界条件确定.

4.3 线性算子方程化为变分方程

如前所述, 变分方程导出等价 Euler 微分方程及附加的定解条件. 反之, 从微分方程也应导出其等价的变分方程. 更进一步, 从已知线性算子方程也可能导出等价的变分方程, 从而可以利用变分方程的直接解法求得算子方程的近似解.

4.3.1 正算子的确定性方程

定理 设正算子 \mathbf{A} (当然也是自伴算子) 的定义域、值域分别为 D_A 和 D'_A , D_b 是符合所给边界条件的函数集. 则由已知函数 $f \in D'_A \subset H$ 和未知函数 $U \in (D_A \cap D_b) \subset H$ 构成的确定性算子方程

$$\mathbf{A}U = f \quad (4.31a)$$

等价于下列泛函为极小值的变分方程

$$J\{U\} = \langle \mathbf{A}U, U \rangle - \langle U, f \rangle - \langle f, U \rangle = \min \quad (4.31b)$$

即它们的解完全一样.

证明 取任意已知函数 $\eta \in (D_A \cap D_b) \subset H$.

首先证明凡式 (4.31a) 的解都满足式 (4.31b). 根据算子 \mathbf{A} 和内积的线性性质展开

$$\begin{aligned} J\{U + \eta\} &= \langle \mathbf{A}(U + \eta), U + \eta \rangle - \langle U + \eta, f \rangle - \langle f, U + \eta \rangle \\ &= \{\langle \mathbf{A}U, U \rangle - \langle U, f \rangle - \langle f, U \rangle\} + \langle \mathbf{A}\eta, \eta \rangle \\ &\quad + \{\langle \mathbf{A}U, \eta \rangle - \langle f, \eta \rangle\} + \{\langle \mathbf{A}\eta, U \rangle - \langle \eta, f \rangle\} \\ \therefore J\{U + \eta\} - J\{U\} &= \langle \eta, \eta \rangle + \langle U - f, \eta \rangle + \{\langle \eta, U \rangle - \langle \eta, f \rangle\}. \end{aligned}$$

由于 \mathbf{A} 是正算子, 从而也是对称算子, 故 $\langle \mathbf{A}\eta, \eta \rangle > 0$, $\langle \mathbf{A}\eta, U \rangle = \langle \eta, \mathbf{A}U \rangle$, 所以

$$J\{U + \eta\} - J\{U\} = \langle \mathbf{A}\eta, \eta \rangle + \langle \mathbf{A}U - f, \eta \rangle + \langle \eta, \mathbf{A}U - f \rangle$$

显然, 若 $\mathbf{A}U = f$, 则 $J\{U + \eta\} - J\{U\} > 0$. 根据 η 的任意性, 可知 $J\{U\}$ 最小, 式 (4.31b) 成立.

证明的第二步是证明凡式 (4.31b) 的解必满足式 (4.31a).

作 $V = U + \alpha\eta$, (α 是复数, $\eta \in (D_A \cap D_b)$, 为任意已知函数) 的泛函, 则

$$\begin{cases} I = J\{V\} - J\{U\} = \langle \mathbf{A}\alpha\eta, \alpha\eta \rangle + \langle \mathbf{A}U - f, \alpha\eta \rangle + \langle \alpha\eta, \mathbf{A}U - f \rangle \geqslant 0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} I = \min. \end{cases}$$

若 $\alpha = b$ 为实数, 则根据内积性质, $\langle bf, g \rangle = b\langle f, g \rangle$, 有

$$\begin{aligned} I &= b^2 \langle \mathbf{A}\eta, \eta \rangle + b \langle \mathbf{A}U - f, \eta \rangle + b \langle \eta, \mathbf{A}U - f \rangle \\ &= b^2 \langle \mathbf{A}\eta, \eta \rangle + 2b\Re \langle \mathbf{A}U - f, \eta \rangle \end{aligned}$$

若 $\alpha = jb$ 为虚数, 则

$$\begin{aligned} I &= b^2 \langle \eta, \eta \rangle - jb \langle \mathbf{A}U - f, \eta \rangle + jb \langle \eta, \mathbf{A}U - f \rangle \\ &= b^2 \langle \mathbf{A}\eta, \eta \rangle + 2b\Im \langle \mathbf{A}U - f, \eta \rangle \end{aligned}$$

由 $\lim_{b \rightarrow 0} I = \min$, 即 $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\partial I}{\partial b} = 0$, 只要 \mathbf{A} 是下有界算子, 就有

$$\begin{cases} \Re \langle \mathbf{A}U - f, \eta \rangle = 0 \\ \Im \langle \mathbf{A}U - f, \eta \rangle = 0 \end{cases} \longrightarrow \langle \mathbf{A}U - f, \eta \rangle = 0 \longrightarrow \mathbf{A}U = f$$

且此时 $I = b^2 \langle \mathbf{A}\eta, \eta \rangle \geq 0$ 故 \mathbf{A} 必须是正算子. ■

4.3.2 下有界算子的本征值方程

设本征值方程

$$\mathbf{A}U = \lambda U \quad (4.32a)$$

其中 \mathbf{A} 为下有界算子, $U \in (D_A \cap D_b) \subset H$, 且值域 $D'_A = D_A$. 该方程取本征值 $\lambda_k (k = 1, 2, \dots)$ 时才有对应的本征函数解

$$\mathbf{A}U_k = \lambda_k U_k \quad (4.32b)$$

定理一 下有界算子本征值方程的所有本征值都是实数; 且任何两个不同本征值所对应的本征函数之内积为 0, 即互相正交. 特别地, 对于本征值重根的情况, 对应的本征函数未必正交, 但按照后序本征值定理的正交化步骤构成的不同本征函数仍相互正交.

证明 (1) \mathbf{A} 也是对称算子, 故

$$\langle \mathbf{A}U_k, U_k \rangle = \langle U_k, \mathbf{A}U_k \rangle = \langle U_k, U_k \rangle^*$$

(2) 将 $\mathbf{A}U_k = \lambda_k U_k$ 代入, 注意到 $\langle f, f \rangle \geq 0$, 得

$$\lambda_k \langle U_k, U_k \rangle = \lambda_k^* \langle U_k, U_k \rangle (k = 1, 2, \dots)$$

故对于非零本征函数 U_k , $\langle U_k, U_k \rangle = \|U_k\|^2 \neq 0$, 有

$$\lambda_k = \lambda_k^* = \text{实数}, k = 1, 2, \dots \quad (4.33)$$

又有 $\langle \mathbf{A}U_i, U_j \rangle = \langle U_i, \mathbf{A}U_j \rangle$, ($i, j = 1, 2, \dots$), 将式 (4.32b) 代入, 且知 λ_k 是实数, 故

$$\lambda_i \langle U_i, U_j \rangle = \lambda_j \langle U_i, U_j \rangle$$

所以, 若 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 必有 $\langle U_i, U_j \rangle = 0$. 或

$$\langle U_i, U_j \rangle = \delta_{ij} \|U_i\|^2 (i, j = 1, 2, \dots) \quad \blacksquare \quad (4.34)$$

定理二 (最小本征值定理) 设 $\mathbf{A}U = \lambda U$ 的最小本征值为 λ_1 , 对应的本征函数为 U_1 , 满足算子方程

$$\begin{cases} \mathbf{A}U_1 = \lambda_1 U_1 \\ \lambda_1 = \min\{\lambda_k | k = 1, 2, \dots\} \end{cases} \quad (4.35)$$

则 λ_1 等于算子 \mathbf{A} 的下界值 (注意下界算子的定义), 即下列泛函 (Rayleigh 商) 的极小值:

$$J\{U\} = \frac{\langle \mathbf{A}U, U \rangle}{\langle U, U \rangle} \quad (4.36)$$

而 U_1 是变分方程 $\delta J\{U\} = 0$, 且 $\delta^2 J\{U\} > 0$ 的解, 满足

$$\begin{cases} J\{U_1\} = \frac{\langle \mathbf{A}U_1, U_1 \rangle}{\langle U_1, U_1 \rangle} = \lambda_1 \\ \lambda_1 = \min[J\{U\}] = \min \left[\frac{\langle \mathbf{A}U, U \rangle}{\langle U, U \rangle} \right] \end{cases} \quad (4.37)$$

推论 正算子的本征值 $\{\lambda_k\}$ 都是正值. 因为最小的 $\lambda_1 > 0$.

定理三 (后序本征值定理) 设 $\mathbf{A}U = \lambda U$ 的本征值序列 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \leq \dots$, 若前 n 个本征值对应的 n 个彼此正交的本征函数为 $\{U_1, U_2, \dots, U_n | \langle U_i, U_j \rangle = \delta_{ij} \|U_i\|^2\}$, 则后序本征值 λ_{n+1} 是泛函式 (4.37) 在约束条件 $\{\langle U, U_k \rangle = 0 | k = 1, 2, \dots, n\}$ 下的极小值, 其对应的本征函数是变分方程 $\delta J\{U\} = 0$ 且 $\delta^2 J\{U\} > 0$ 的条件解, 满足:

$$\begin{cases} J\{U_{n+1}\} = \frac{\langle \mathbf{A}U_{n+1}, U_{n+1} \rangle}{\langle U_{n+1}, U_{n+1} \rangle} = \lambda_{n+1} \\ \langle U_{n+1}, U_k \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4.38)$$

4.3.3 正定算子的广义本征值方程

线性下有界算子 \mathbf{A} 、线性正定算子 \mathbf{B} (当然也是自伴算子) 构成广义本征值方程

$$\mathbf{A}U = \lambda \mathbf{B}U \quad (4.39a)$$

仅当待定常数 λ 取广义本征值 $\{\lambda_k | k = 1, 2, \dots\}$ 时才有特定解 $\{U_k | k = 1, 2, \dots\}$, 称为广义本征函数解:

$$\mathbf{A}U_k = \lambda_k \mathbf{B}U_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.39b)$$

在电磁场的 Helmholtz 或 Fredholm (广义) 本征值问题中, 有无穷多本征值, 最大本征值无确定意义. 故最小 (广义) 本征值定理和后序 (广义) 本征值定理提供了逐个求解 (广义) 本征值和 (广义) 本征函数的唯一途径.

最大广义本征值定理将最小 (广义) 本征值定理的“下界”改为“上界”, “min”改为“max”, “小”改为“大”, $\delta^2 J > 0$ 改为 $\delta^2 J < 0$.

4.3.4 非自伴算子的确定性方程

电磁场边值问题一般属于自伴边值问题, 其算子是正 (定) 算子, 故可以转化为等价的变分方程. 但在特殊场合 (如有耗媒质中时谐场问题, 即 Helmholtz 方程中的 k^2 为复数, 算子 $\nabla \nabla + k^2$ 不再自伴), 算子是非自伴的, 但非自伴算子方程也可能转化成变分方程.

定理 设未知场函数 U , 已知源函数 f 和非自伴线性算子 \mathbf{A} 构成非自伴线性算子方程

$$\mathbf{A}U = f \quad (4.40a)$$

又由独立于 U 的未知伴随场函数 W , 任意指定辅助源函数 g , 构成辅助的伴随算子方程

$$\mathbf{A}^\dagger W = g \quad (4.40b)$$

则算子方程组 (4.40a)、(4.40b) 式等价为泛函

$$J\{U, W\} = \langle \mathbf{A}U, W \rangle - \langle U, g \rangle - \langle f, W \rangle \quad (4.41a)$$

的驻定公式, 即变分方程

$$\delta J\{U, W\} = 0 \quad (4.41b)$$

证明 作变分

$$\begin{aligned}
 \delta J\{U, W\} &= \langle \mathbf{A}\delta U, W \rangle + \langle \mathbf{A}U, \delta W \rangle - \langle \delta U, g \rangle - \langle f, \delta W \rangle \\
 &= [\langle \delta U, \mathbf{A}^\dagger W \rangle - \langle \delta U, g \rangle] + [\langle \mathbf{A}U, \delta W \rangle - \langle f, \delta W \rangle] \\
 &= \langle \delta U, \mathbf{A}^\dagger W - g \rangle + \langle \mathbf{A}U - f, \delta W \rangle
 \end{aligned}$$

于是, 若 U, W 使式 (4.40a)、(4.40b) 成立, 则式 (4.40b) 成立; 反之若 (4.41b) 成立, 由于 $\delta U, \delta W$ 的随意性, 式 (4.40a)、(4.40b) 必须成立.

另一方面

$$\begin{aligned}
 I &= J\{U + \alpha\eta, W + \beta\xi\} - J\{U, W\} \\
 &= \alpha\beta^* \langle \mathbf{A}\eta, \xi \rangle + \alpha \langle \eta, \mathbf{A}^\dagger W - g \rangle + \beta^* \langle \mathbf{A}U - f, \xi \rangle
 \end{aligned}$$

α, β 为常数, η, ξ 为可取函数, 即使式 (4.40a)、(4.40b) 成立, $I = \alpha\beta^* \langle \mathbf{A}\eta, \xi \rangle$, 仍不能判断 I 为正、为零或为负, 即只能证明泛函驻定 ($\delta J = 0$), 不能判断是极小、极大值或拐点. 对于边值问题, 设边界条件算子方程 $\mathbf{b}U = 0$, 辅助方程为 $\mathbf{b}^\dagger W = 0$, 则等价变分问题也应附有上列边界值的约束条件(自然条件除外).

综上, 求解非自伴算子的确定性边值问题, 必须同时求解其伴随边值问题.

第 5 章 各种泛函解法

5.1 概述

同一电磁场问题可以从微分方程、积分方程、变分方程三类不同的方程形式着手求解，结果是等价的。但微分方程和积分方程较难求解，只能依靠泛函方法求得近似解或函数的完备序列：（若泛函的每个可取函数都可以用某个函数序列的线性组合任意地逼近，则该序列为完备序列。通常，本征函数系都是正交函数的完备序列。）

泛函解法的基本思想

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} c_{\nu} \varphi_{\nu}(\mathbf{r}), \quad (5.1)$$

式中 $\{\varphi_{\nu}(\mathbf{r})|_{\nu=1,2,\dots}\}$ 是某线性无关函数的完备序列，该函数序列的函数当作函数空间的基或坐标，称为基函数或坐标函数，则展开项 $\{c_{\nu} \varphi_{\nu}\}$ 为 U 在函数空间的坐标分量。若选取正交函数基序列时， c_k 是函数空间中的点 U 对基 φ_k 投影的意义。 $(\mathbf{r} = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z})$ 。一般情况下只能求 n 级近似解

$$U^{[n]} = \sum_{\nu=1}^n c_{\nu} \varphi_{\nu} \quad (5.2)$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} U^{[n]} = U$ ，所以基函数选取是关键，影响收敛速度及求解繁简程度。

泛函解法分为变分法和加权余量法两大类。总是将未知函数的变分方程或线性算子方程转化为展开系数序列的线性代数方程组。

5.2 Rayleigh-Ritz 法

简称 Ritz 法，为变分法的一种。设泛函 $J\{U(\mathbf{r})\}$ 变分问题¹

$$\begin{cases} \delta J\{U(\mathbf{r})\} = 0 \\ U(\mathbf{r}_b)|_{\mathbf{r}_b \in S[V]} = 0 \quad (\text{或无边界条件}) \end{cases} \quad (5.3)$$

选取满足所给边界条件的线性无关完备函数序列 $\{\varphi_{\nu}(\mathbf{r})\}$ 为基，构作 n 级近似解 $U^{[n]}$ ，则变分方程 (5.3) 可写成近似变分方程

$$\delta J\left\{U^{[n]}(\mathbf{r})\right\} = \delta J\left\{\sum_{\nu=1}^n c_{\nu} \varphi_{\nu}(\mathbf{r})\right\} = 0 \quad (5.4)$$

注意 $\varphi_{\nu}(\mathbf{r})$ 是已知函数，所以泛函 $J\left\{U^{[n]}(\mathbf{r})\right\}$ 仅是 c_{ν} 及 $c_{\nu}^*(\nu = 1, 2, \dots, n)$ 的函数，故 (5.4)

¹若边界条件为 $U(\mathbf{r}_b)|_{\mathbf{r}_b \in S[V]} = const \neq 0$ ，则可通过转换化为 $U(\mathbf{r}_b)|_{\mathbf{r}_b \in S[V]} = 0$

等价于偏微分方程组 (5.3) (多元函数的极值条件):

$$\frac{\partial J\{U^{[n]}\}}{\partial c_\nu} = 0, \quad \text{且} \quad \frac{\partial J\{U^{[n]}\}}{\partial c_\nu^*} = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad (5.5)$$

下面分别讨论不同类型泛函的变分解法.

5.2.1 根据物理原理的直接变分解

设物理原理 (如电磁场原理) 导出的变分方程, 其泛函式为

$$J\{U(\mathbf{r})\} = \iiint_V F[\mathbf{r}, U, U'_x, U'_y, U''_{xx}, \dots] dv$$

则 (5.5) 式简化为

$$\frac{\partial F}{\partial c_\nu} = \frac{\partial F}{\partial U} \varphi_\nu + \frac{\partial F}{\partial U'_x} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial U'_y} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y} + \dots + \frac{\partial F}{\partial U''_{xx}} \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x^2} + \dots = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_\nu^*} = \frac{\partial F}{\partial U} \varphi_\nu + \frac{\partial F}{\partial U'_x} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial U'_y} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y} + \dots + \frac{\partial F}{\partial U''_{xx}} \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x^2} + \dots = 0$$

5.2.2 确定性算子方程的变分解

设由线性正算子 \mathbf{A} 的确定性方程 $\mathbf{A}U = f$ 导出的变分方程:

$$\delta J\{U\} = \delta [\langle \mathbf{A}U, U \rangle - \langle U, f \rangle - \langle f, U \rangle] = 0 \quad (5.7)$$

将近似解 $U^{[n]}$ 代入其泛函式 $J\{U\}$, 得

$$\begin{aligned} J\{U^{[n]}\} &= \left\langle \mathbf{A} \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu, \sum_{\mu=1}^n c_\mu \varphi_\mu \right\rangle - \left\langle \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu, f \right\rangle - \left\langle f, \sum_{\mu=1}^n c_\mu \varphi_\mu \right\rangle \\ &= \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_\nu c_\mu^* \langle \mathbf{A} \varphi_\nu, \varphi_\mu \rangle - \sum_{\nu=1}^n c_\nu \langle \varphi_\nu, f \rangle - \sum_{\mu=1}^n c_\mu^* \langle f, \varphi_\mu \rangle \end{aligned} \quad (5.8)$$

注意到 $\frac{\partial J\{U^{[n]}\}}{\partial c_\mu^*} = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n$, 从而由式 (5.8) 可得

$$\sum_{\nu=1}^n c_\nu \langle \mathbf{A} \varphi_\nu, \varphi_\mu \rangle = \langle f, \varphi_\mu \rangle, \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (5.9)$$

记内积值: $a_{\mu\nu} = \langle \varphi_\mu, \mathbf{A} \varphi_\nu \rangle, f_\mu = \langle \varphi_\mu, f \rangle$, 得矩阵 $[c_\nu]_{n \times 1}, [f_\mu]_{n \times 1}, [a_{\mu\nu}]_{n \times n}, [\varphi_\nu]_{n \times 1}$, 则可

将 (5.9) 式写成矩阵

$$[a_{\mu\nu}^*] [c_v] = [f_\mu^*] \quad (5.10)$$

于是可得到 n 级近似解

$$[c_v] = [a_{\mu\nu}^*]^{-1} [f_\mu^*], \quad U^{[n]}(\mathbf{r}) = [\varphi_v(\mathbf{r})]^T [c_v] \quad (5.11)$$

5.2.3 广义本征值算子方程的变分解

已知广义本征值算子方程的等价变分方程

$$J\{U\} = \frac{\langle \mathbf{A}U, U \rangle}{\langle \mathbf{B}U, U \rangle} = \lambda = \min \quad (5.12)$$

将 n 级近似解 (5.2) 式代入, 得

$$J\{U^{[n]}\} = \frac{\left\langle \mathbf{A} \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v, \sum_{\mu=1}^n c_\mu \varphi_\mu \right\rangle}{\left\langle \mathbf{B} \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v, \sum_{\mu=1}^n c_\mu \varphi_\mu \right\rangle} = \lambda^{[n]},$$

从而得

$$\sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_v c_\mu^* \langle \mathbf{A} \varphi_v, \varphi_\mu \rangle - \lambda^{[n]} \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_v c_\mu^* \langle \mathbf{B} \varphi_v, \varphi_\mu \rangle = 0 \quad (5.13)$$

(5.13) 式两边对 c_μ^* 求偏导, 得

$$\sum_{v=1}^n c_v \left[\langle \mathbf{A} \varphi_v, \varphi_\mu \rangle - \lambda^{[n]} \langle \mathbf{B} \varphi_v, \varphi_\mu \rangle \right] = 0 \quad (5.14)$$

记内积值 $a_{\mu\nu} = \langle \varphi_\mu, \mathbf{A} \varphi_\nu \rangle, b_{\mu\nu} = \langle \varphi_\mu, \mathbf{B} \varphi_\nu \rangle$, 得矩阵: $[c_v]_{n \times 1}, [a_{\mu\nu}]_{n \times n}, [b_{\mu\nu}]_{n \times n}, [\varphi_v]_{n \times 1}$, 则可将 (5.14) 式写成矩阵方程

$$\left([a_{\mu\nu}^*] - \lambda^{[n]} [b_{\mu\nu}^*] \right) [c_v] = 0 \quad (5.15)$$

该方程有非零解的条件是系数行列式值为零: (由于 λ 为实数, 故所有 “*” 可略去)

$$P_n(\lambda^{[n]}) = \det ([a_{\mu\nu}^*] - \lambda^{[n]} [b_{\mu\nu}^*]) = \det [a_{\mu\nu} - \lambda^{[n]} b_{\mu\nu}] = 0 \quad (5.16)$$

这是一个关于 $\lambda^{[n]}$ 的 n 次多项式, 可解出 n 个 n 级近似的广义本征值:

$$\{\lambda_v^{[n]}\}_{v=1,2,\dots,n}; \quad \lambda_v^{[n]} \leq \lambda_{v+1}^{[n]}$$

这些解中最小广义本征值 $\lambda_1^{[n]}$ 的准确度较高, 而后序本征值 $\lambda_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ 宜利用的后序本征值定理逐个解出.

每得到一个广义本征值 $\lambda_k^{[n]} (k = 1, 2, \dots)$, 代入 (5.16) 式即可求出一个对应的广义本征矢量

$$[c_{v(k)}] = [c_{1(k)}, \dots, c_{n(k)}]^T$$

并构成广义本征函数的 n 级近似解:

$$U_k^{[n]}(\mathbf{r}) = [\varphi_v(\mathbf{r})]^T [c_{v(k)}] \quad (5.17)$$

5.2.4 基函数序列的选择

首先其必须是线性无关的完备序列, 但基函数的选取并没有其他明确的限制, 可以根据问题本身的特点灵活应用, 可以说合适的基函数的选取可以反映数值模型的价值, **运用之妙, 存乎一心.**

最简单实用的是幂函数序列和三角函数序列, 既易于作微积分运算, 又便于适应规则形状边界的第一类齐次边界条件, 如

1. 一维函数 $U(x)$ 若在 $[x_1, x_2]$ 端点满足齐次条件 $U(x_1) = U(x_2) = 0$, 可选取

$$\begin{aligned} \varphi_v(x) &= (x - x_1)^i (x_2 - x)^{v-i} [0 \leq i \leq v], \quad v = 1, 2, \dots, n \\ \text{或} \quad \varphi_v(x) &= \sin\left(v\pi \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right), v = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

2. 二维函数 $U(x, y)$ 在闭域 S 的周界 ∂S 上 $U(x, y)|_{\partial S} = 0$, 则设 $w(x, y)|_{\partial S} = 0$, 可取:

$$\begin{cases} \varphi_1 = w(x, y) \\ \varphi_2 = xw(x, y), \quad \varphi_3 = yw(x, y) \\ \varphi_4 = x^2w(x, y), \quad \varphi_5 = xyw(x, y), \quad \varphi_6 = y^2w(x, y) \\ \dots \end{cases}$$

其中 $w(x, y)$ 根据 S 的形状选择. 对矩形域 $(|x| \leq a, |y| \leq b)$, 可选:

$$w(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$$

对圆形域 $(x^2 + y^2 \leq R^2)$, 可选:

$$w(x, y) = R^2 - (x^2 + y^2)$$

对光滑回线 $(F(x, y) = 0)$ 内域, 可选:

$$w(x, y) = \pm F(x, y)$$

对凸 m 边形域 $(a_i x + b_i y + c_i = 0, i = 1, 2, \dots, m)$, 可选:

$$w(x, y) = \pm \prod_{i=1}^m (a_i x + b_i y + c_i)$$

虽然第二类、第三类的自然边界条件对基函数并无要求, 通常可以选取简单的幂函数序列, 如:

3. 一维函数 $U(x)$ 可选取

$$\varphi_v(x) = x^{v-1}, v = 1, 2, \dots, n$$

4. 二维函数 $U(x, y)$ 可选取

$$\begin{cases} \varphi_1 = 1 \\ \varphi_2 = x, \quad \varphi_3 = y \\ \varphi_4 = x^2, \quad \varphi_5 = xy, \quad \varphi_6 = y^2 \\ \dots \end{cases}$$

另外, 若取满足边界条件的基函数, 近似解序列收敛得较快, 如:

5. 若 $U(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 端点上满足齐次边界条件 $U'(x_1) = U'(x_2) = 0$, 可选:

$$\varphi_v(x) = \cos\left(v\pi \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right), \quad v = 1, 2, \dots, n$$

6. 若 $U(r)$ 在边界上满足非齐次第一类边条 $U(r_b) = g(r_b)$, 则设

$$U^{[n]} = \varphi_0 + \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v$$

其中 $\varphi_0(\mathbf{r}_b) = g(\mathbf{r}_b)$, 于是 $(U^{[n]} - \varphi_0) = \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v$ 满足齐次条件 $[U^{[n]}(\mathbf{r}_b) - \varphi_0(\mathbf{r}_b)] = 0$, 可按前述一维二维函数情形选取 φ 和 v .

对复杂场域或填充不同媒质的场域, 可划分子域. 若子域数很多, 子域内可取较低级 (n 小) 的近似解, 求解程序将演变为有限元法. 基函数另一种选择方案是取原算子方程不受边界条件限制时的本征函数 (即原算子方程不受边界条件限制的通解), 如: Trefftz 法.

Rayleigh-Ritz 法简单归纳

- Ritz 法是在给定泛函的前提下, 在全域内选择试探函数 (基函数), 然后求变分极值的方法;
- 试探函数只需要满足强加边界条件 (第一类), 第二、三类自动满足无须考虑, 但若满足有助于近似解的收敛速度的提高;
- Ritz 法最后归结为线性代数方程的求解, 而且系数矩阵一定对称正定;
- 其最大缺点是试探函数 (基函数) 必须满足整个区域, 有限元法就克服了这一缺点, 同时继承了优点.

5.3 近似变分解的改进

5.3.1 Ritz 法的误差估值

显然 n 越大, $U^{[n]}$ 误差越小. 但尚缺乏估计其误差的理论方法. 一般用 $J\{U^{[n-1]}\} - J\{U^{[n]}\}$ 粗略估计 Ritz 法 n 级近似解的误差. 另一方面, 近似解的泛函必大于精确解 U 的泛函值 (极小值), 从而可作为估计精确解泛函的上限. 如果又能找出其下界, 则上、下界之差就是近似解泛函的最大误差. 可用不同方法估计下限.

5.3.2 直接变分问题中泛函极值的上、下界

若可能分别建立欲求物理量 P 及其倒数量 P^{-1} 的泛函极小值问题:

$$P = J_1\{U\} = \min, \quad \frac{1}{P} = J_2\{U\} = \min,$$

并各自用 Ritz 法求出近似解 $U^{[n]}$ 和 $V^{[m]}$, 对应

$$P^{[n]} = J\{U^{[n]}\}, \quad \left(\frac{1}{P}\right)^{[m]} = J\{U^{[m]}\},$$

则

$$\frac{1}{(\frac{1}{P})^{[m]}} \leq \frac{1}{(\frac{1}{P})} = P \leq P^{[n]}$$

所以 $P^{[n]}, \left[\left(\frac{1}{P} \right)^{[m]} \right]^{-1}$ 可分别视为准确解泛函的上、下限, 它们的差就是近似解泛函的最大误差. 静电问题中的电容量 C , 波导接头问题中的输入阻抗 Z_{in} 等物理量都属这类泛函.

5.3.3 Trefftz 法

静电场 Laplace 边界问题 (齐次方程, 非齐次边界条件):

$$\begin{cases} -\nabla^2 U(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in V \\ \left(\alpha \frac{\partial}{\partial n} + \beta \right) U(\mathbf{r}_b) = g, & \mathbf{r}_b \in \partial V \end{cases} \quad (5.18)$$

直接用 Ritz 法或转化成齐次边界条件非齐次方程, 都不理想. 另外找到了 $U^{[n]}$ 使 $J\{U^{[n]}\} > J\{U\}$, 还须找 $V^{[m]}$ 使 $J\{V^{[m]}\} < J\{U\}$. Trefftz 法能实现这两项要求 (即不受边界条件限制就找到 $V^{[m]}$).

定理 对 Laplace 问题(5.18), 若选满足方程而不受边界条件限制的基函数序列 $\{\psi_\mu(\mathbf{r}) |_{\mu=1,2,\dots}\}$; 则 Laplace 方程等价于变分方程 $J\{U\} = \iiint_V |\nabla U|^2 dv = \max$, 且其 m 级近似解可构成 $V^{[m]}(\mathbf{r}) = \sum_{\mu=1}^m c_\mu \psi_\mu(\mathbf{r})$, 其展开系数得自线性方程组:

$$\sum_{\mu=1}^m c_\mu \iint_{S[V]} \psi_\mu \frac{\partial \psi_\mu}{\partial n} dS = \iint_{S[V]} g \frac{\partial \psi_\mu}{\partial n} dS, \quad \mu = 1, 2, \dots, m \quad (5.19)$$

显然 $J\{V^{[m]}\} < J\{U\}$, 是 $J\{U\}$ 的下限.

5.3.4 Weinstein 法

设广义本征值算子方程 $\mathbf{A}U = \lambda \mathbf{B}U$, 最小本征值 $\lambda_1 = \min \left[\frac{\langle \mathbf{A}U, U \rangle}{\langle \mathbf{B}U, U \rangle} \right]$, 已知 Ritz 法的最小变分解

$$\lambda_1^{[n]} = \min \left[\frac{\langle \mathbf{A}U^{[n]}, U^{[n]} \rangle}{\langle \mathbf{B}U^{[n]}, U^{[n]} \rangle} \right] > \lambda_1 \quad (5.20)$$

可作为估计 λ_1 的上限, 那么对于正算子 \mathbf{B} 退化为函数 $h(\mathbf{r}) \neq 0$, Weinstein 指出了两种估计 λ_1 下限的方法.

定理一 线性下有界算子的本征值方程

$$\mathbf{A}U(\mathbf{r}) = \lambda h(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \quad (5.21)$$

其最小本征值 λ_1 的上限

$$\lambda_1^{[n]} = \min \left[\frac{\langle \mathbf{A}U^{[n]}, U^{[n]}\rangle}{\langle hU^{[n]}, U^{[n]}\rangle} \right] = \left[\frac{\langle \mathbf{A}U_1^{[n]}, U_1^{[n]}\rangle}{\langle hU_1^{[n]}, U_1^{[n]}\rangle} \right] > \lambda_1 \quad (5.22)$$

再计算泛函值:

$$\gamma^{[n]} = \frac{\left\langle \frac{1}{h}U_1^{[n]}, U_1^{[n]}\right\rangle}{\langle hU_1^{[n]}, U_1^{[n]}\rangle}$$

则

$$\left[\lambda_1^{[n]} - \sqrt{r^{[n]} - (\lambda_1^{[n]})^2} \right] < \lambda_1 \quad (5.23)$$

可作为估计 λ_1 准确值的下限(效果不稳定). $U_1^{[n]}$ 为 Ritz 法求得的对应 $\lambda_1^{[n]}$ 的本征函数.

定理二 对式 (5.21) 及 $\lambda_1^{[n]}, \lambda_2^{[n]}$ 为用 Ritz 法求出的 λ_2 的近似值, 则

$$\left[\lambda_1^{[n]} - \frac{\gamma^{[n]} - (\lambda_1^{[n]})^2}{\lambda_2^{[n]} - \lambda_1^{[n]}} \right] < \lambda_1 \quad (5.24)$$

可作为估计 λ_1 准确值的下限.

5.3.5 调节边界法

设变分方程及边界条件

$$\begin{cases} J\{U(\mathbf{r})\} = \min = \Lambda \\ U(\mathbf{r}_b) = 0, \mathbf{r}_b \in S[v] \end{cases} \quad (5.25)$$

式中 Λ 或是本征值问题的最小本征值, 或是变分问题的泛函极小值(电容量、输入阻抗). 该泛函 $J\{U\}$ 的可取函数集 \mathcal{D} 受边界条件限制, 且

$$\Lambda = \min_{U \in \mathcal{D}} [J\{U\}]$$

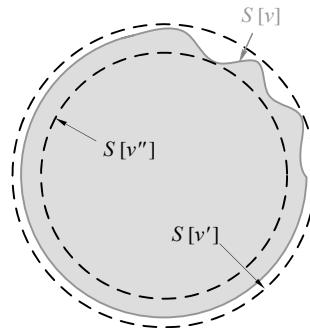
若将可取函数集扩大为 $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$, 则

$$\Lambda = \min_{U \in \mathcal{D}} [J\{U\}] \leq \Lambda' \quad (5.26)$$

可以作为估计 Λ 准确值的下限. 显然 $(\mathcal{D}' - \mathcal{D})$ 越小, 则 $(\Lambda - \Lambda')$ 也越小, 该下限的作用愈有效. 放松边界条件也可以扩大可取函数集(如固定边界条件放松为自然边条). 扩大场域(在新边界上满足条件, 在原有边界上则不必满足)亦然.

如图 5.1 所示, 若边界是某种简单几何的微扰结果, 则作出内接、外接简单形状的新边界 $S[v'']$ 和 $S[v']$: $v'' \subset v \subset v'$, 使可取函数集 $\mathcal{D}'' \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$, 分别用 Ritz 法求解

$$\begin{cases} \Lambda'' = \min_{U \in \mathcal{D}''} [J\{U\}] \\ \Lambda' = \min_{U \in \mathcal{D}'} [J\{U\}] \end{cases}$$



即确定了原问题中待求泛函值 Λ 的上、下限: $\Lambda' \leq \Lambda \leq \Lambda''$, 这种只要求基函数在简单形状新边界上满足

$$\Psi(\mathbf{r}_b) |_{\mathbf{r}_b \in S[v'']} = 0 \quad \text{或} \quad \Psi(\mathbf{r}_b) |_{\mathbf{r}_b \in S[v']} = 0$$

而不需要在原来复杂形状边界上 $S[v]$ 上等于 0, 求解过程比较简单.

5.4 变分法在电磁场问题中的计算实例

5.4.1 波导管传播常数的变分解

均匀截面的柱形波导管以理想导体为管壁, 内部填充各向同性、横向非匀质的无耗介质, 其内电磁场由轴向分量 $E_z(\mathbf{r}, t), H_z(\mathbf{r}, t)$ 完全确定:

$$\left. \begin{array}{l} E_z(\mathbf{r}, t) \\ H_z(\mathbf{r}, t) \end{array} \right\} = \psi(\mathbf{r}) e^{-rz} e^{-j\omega t} \quad (5.27)$$

I. Helmholtz 本征值问题的变分原理

由分离变量法知 $\psi(\mathbf{r})$ 的二维 Helmholtz 方程的齐次边界条件问题为:

$$\begin{cases} (\nabla_{\perp}^2 + \omega^2 \epsilon \mu + \gamma^2) \psi(\mathbf{R}) = 0 & (\mathbf{R} \in S) \\ \psi(\mathbf{R}_b) = 0 (E_z) \quad \text{或} \quad \frac{\partial \psi(\mathbf{R}_b)}{\partial n_c} = 0 (H_z) & (\mathbf{R}_b \in C[S]) \end{cases} \quad (5.28)$$

式中 S 为波导管的横截面域, ∇_{\perp}^2 是 S 上的二维 Laplacian 算符, $C[S]$ 为 S 的边界回线, \hat{n}_c 是 $C[S]$ 法向单位矢量.

记线性下有界算子 $\mathbf{A} = -(\nabla_{\perp}^2 + \omega^2 \epsilon \mu)$ 及待定本征值 $\lambda = \gamma^2$, 则 (5.28) 式方程可写为算子方程

$$\mathbf{A}\psi = \lambda\psi$$

使得该方程有解的本征值序列 $\{\lambda_i\}$ 代表了波导管内电磁场的模式序列; 本征值对应的本征函数 $\{\psi_i(\mathbf{R})\}$ 就是描述波导管横截面中场分布的模式函数. 在实际应用中, 首先要求得的是最

小本征值 λ_1 对应的最低模式.

Rayleigh 商的变分方程 根据最小本征值定理, 直接建立 Rayleigh 商的变分方程

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{A}\psi, \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} = \min \quad \text{或} \quad \delta\lambda = 0$$

将 \mathbf{A} 和 λ 代入, 并按内积展开后写成泛函:

$$\begin{aligned} \lambda = \gamma^2 &= \frac{-\iint_S \psi^* \nabla_{\perp}^2 \psi \, ds - \omega^2 \iint_S \varepsilon\mu |\psi|^2 \, ds}{\iint_S |\psi|^2 \, ds} \\ (\text{根据 Green 定理}) &= \frac{\iint_S |\nabla_{\perp}^2 \psi|^2 \, ds - \omega^2 \iint_S \varepsilon\mu |\psi|^2 \, ds - \oint_{C[S]} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} \, dl}{\iint_S |\psi|^2 \, ds} \end{aligned} \quad (5.29)$$

其变分为

$$\delta\gamma^2 = \frac{\oint_{C[S]} \left[\delta\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n_c} - \psi^* \frac{\partial \delta\psi}{\partial n_c} \right] \, dl}{\iint_S |\psi|^2 \, ds} \quad (5.30)$$

从式 (5.30) 可知, 只有在变分 $\delta\psi(\mathbf{r})$ 及近似解 $\psi^{[n]} = \psi + \delta\psi$ 同准确解 ψ 一样满足齐次边界条件 (E_z —1st B.C., H_z —2nd B.C.) 时, 变分 $\delta\gamma^2$ 才等于 0 (因为 $\delta\psi$ 的任意性), 这要求近似解的基函数都满足同类齐次边界条件, 这对于截面较为复杂的波导管, 一般很难实现.

扩展泛函的变分方程 为了解除边界条件对基函数选择的限制, 将上述 Rayleigh 商的泛函作适当的扩展, 构成修正的变分方程. 为抵消式 (5.30) 分子中第一项或第二项的回线积分, 对 E_z (1st B.C.) 和 H_z (2nd B.C.), 可在式 (5.29) 中分别添加回线积分²

$$-\oint_{C[S]} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n_c} \, dl \quad \text{或} \quad \oint_{C[S]} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} \, dl$$

对满足相应齐次边界条件的 ψ , 增加的这两项取零值, 并不影响其最小泛函值的驻定性质.

²添加项的变分分别为

$$-\oint_{C[S]} \left[\delta\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n_c} + \psi \frac{\partial \delta\psi^*}{\partial n_c} \right] \, dl = -\oint_{C[S]} \delta\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n_c} \, dl \quad (1\text{st B.C.})$$

$$\oint_{C[S]} \left[\delta\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} + \psi^* \frac{\partial \delta\psi}{\partial n_c} \right] \, dl = \oint_{C[S]} \delta\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} \, dl \quad (2\text{nd B.C.})$$

从而 TM 模 E_z 的扩展泛函的变分方程为:

$$\gamma^2 = \frac{\iint_S \left[|\nabla_{\perp}^2 \psi|^2 - \omega^2 \varepsilon \mu |\psi|^2 \right] ds - \oint_{C[S]} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n_c} \right] dl}{\iint_S |\psi|^2 ds} = \min \quad (5.31a)$$

$$\delta \gamma^2 = \frac{-\oint_{C[S]} \left[\psi^* \frac{\partial \delta \psi}{\partial n_c} + \psi \frac{\partial \delta \psi^*}{\partial n_c} \right] dl}{\iint_S |\psi|^2 ds} = 0 \quad (5.31b)$$

与直接 Ritz 法比, 扩展泛函的好处是免去了对基函数满足边界条件的要求.

同样地, H_z 的扩展泛函变分为

$$\gamma^2 = \frac{\iint_S \left[|\nabla_{\perp}^2 \psi|^2 - \omega^2 \varepsilon \mu |\psi|^2 \right] ds}{\iint_S |\psi|^2 ds} = \min \quad (5.32a)$$

$$\delta \gamma^2 = \frac{\oint_{C[S]} \left[\delta \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n_c} + \delta \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} \right] dl}{\iint_S |\psi|^2 ds} = 0 \quad (5.32b)$$

此条件下对 $\frac{\partial \delta \psi}{\partial n_c}$ 无边界条件限制. 注意对 2nd B.C. 的 (5.32a) 式是自然成立的, “扩展”是相应 1st B.C. 而言.

II. 几种特殊情况的变分原理

截止角频率的变分方程 截止角频率 ω_c 是区分传播模 ($\omega > \omega_c$, γ 为纯虚数) 与衰减模 ($\omega < \omega_c$, γ 为纯实数) 的临界角频率:

$$\omega = \omega_c \text{ 时 } \gamma = 0$$

故 (5.28) 式中的方程改写成:

$$[\nabla_{\perp}^2 + \omega_c^2 \varepsilon \mu] \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (\mathbf{R} \in S) \quad (5.33)$$

改记线性正算子 $\mathbf{A} = -\nabla_{\perp}^2$, 正定算子 $\mathbf{B} = \varepsilon \mu \mathbf{I}$, 本征值 $\lambda = \omega_c^2$, 则上式为 $\mathbf{A}\psi = \lambda \mathbf{B}\psi$, 其广义 Rayleigh 商变分方程为

$$\omega_c^2 = \frac{\iint_S |\nabla_{\perp} \psi|^2 ds - \oint_{C[S]} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} dl}{\iint_S \varepsilon \mu |\psi|^2 ds} = \min \quad (5.34)$$

其扩展泛函变分方程为:

$$E_z : \quad \omega_c^2 = \frac{\iint_S |\nabla_{\perp} \psi|^2 ds - \oint_{C[S]} \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n_c} + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n_c} \right] dl}{\iint_S \epsilon \mu |\psi|^2 ds} = \min \quad (5.35a)$$

$$H_z : \quad \omega_c^2 = \frac{\iint_S |\nabla_{\perp} \psi|^2 ds}{\iint_S \epsilon \mu |\psi|^2 ds} = \min \quad (5.35b)$$

(5.35a), (5.35b) 式对构成近似解的基函数序列无边界条件的限制.

对均匀媒质的简单情况下, 有

$$\gamma^2 = (\omega_c^2 - \omega^2) \epsilon \mu \quad (5.36)$$

5.4.2 细天线输入阻抗的变分解

任意形状的点馈细天线如图 5.2 所示, 取其轴线作为弯曲柱面坐系 (ρ, ψ, l) 的主轴, 主轴在直角坐标系中的曲线方程为:

$$L : \begin{cases} x = x_L(l) \\ y = y_L(l) \quad l \in [-l_1, l_2] \\ z = z_L(l) \end{cases} \quad (5.37)$$

馈点 $O_L(x_L(0), y_L(0), z_L(0))$ 处有空隙 Δ : $l \in [-\delta/2, \delta/2]$, 末端坐标 $l = -l_1$ 和 $l = l_2$, 或是振子天线的开路点, 或是环形天线的连续点 ($-l_1 = l_2$).

细天线模型的条件是 $a \ll l_1, l_2, \lambda$, 从而电流在横截面上均匀分布, 且沿轴线 \hat{l} 方向: $\mathbf{J}(a, \psi, l) = \hat{l} J(l)$, 辐射特性在平均意义上等价于集中在轴线 L 上的电流: $\mathbf{I}(l) = 2\pi a \hat{l} J(l)$. 点馈的条件是空隙远小于所有的几何线度 $\delta \ll a$.

记天线轴 L 上源点坐标 $\mathbf{r}'(x'_L, y'_L, z'_L)$, 对应曲柱坐标为 $(0, 0, l')$, 天线表面 S 上场点矢量 $\mathbf{r}_s(x_s, y_s, z_s)$, 对应曲柱坐标为 (a, ψ, l) . 与源场点间距为

$$R = |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x_s - x'_L)^2 + (y_s - y'_L)^2 + (z_s - z'_L)^2} \quad (5.38)$$

根据天线的源分布

$$\begin{cases} \text{电流强度} & \mathbf{I}(l') = \hat{l}' I(l') \\ \text{线电荷密度} & \sigma(l') = \frac{-1}{j\omega} \frac{dI(l')}{dl'} \end{cases} \quad (5.39)$$

通过位函数的 Helmholtz 辐射积分公式

$$\begin{cases} \text{矢量磁位} & \mathbf{A}(\mathbf{r}_s) = \mu \int_L \mathbf{I}(l') G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') dl' \\ \text{标量磁位} & \Phi(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{\epsilon} \int_L \sigma(l') G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') dl' \end{cases} \quad (5.40)$$

其中 Green 函数具有对称性

$$G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi R} e^{-jkR} = G(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s) \quad (5.41)$$

在 Lorentz (洛伦兹) 规范 $\Phi(\mathbf{r}_s) = \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_s)$ 下, 电磁场强为

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}_s) = -j\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}_s) - \nabla \Phi(\mathbf{r}_s) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_s) \end{cases} \quad (5.42)$$

以上各式中 \mathbf{r}_s 若换成空间中任意场点 \mathbf{r} , 则由 $\mathbf{I}(l')$ 可直接计算辐射场. 若 $\mathbf{I}(l')$ 未知, 可根据表面边界条件:

$$\begin{cases} [\mathbf{E}(\mathbf{r}_s) + \mathbf{E}^{\text{in}}(\mathbf{r}_s)] \cdot \hat{l} = 0 \\ \hat{\rho} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}_s) = \mathbf{J}(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{2\pi a} \hat{l} I(l) \end{cases} \quad (5.43)$$

建立 $\mathbf{I}(l')$ 的积分方程, 结合式 (5.38)~(5.43) 作为计算该天线辐射的起点. (5.43) 式中外加激励场由点馈条件确定:

$$\mathbf{E}_l^{\text{in}}(\mathbf{r}_s) \cdot \hat{l} = E_l^{\text{in}}(\mathbf{r}_s) = \begin{cases} V_{\text{in}}/\delta & (l \in \Delta) \\ 0 & (l \in L - \Delta) \end{cases} \quad (5.44)$$

$E_l^{\text{in}}(\mathbf{r}_s)$ 表示激励处 (\mathbf{r}_s) 表面激励场强在 \hat{l} 方向的分量. 式 V_{in} 为馈点输入电压. 当 $\Delta \rightarrow 0$ 时,

$$E_l^{\text{in}}(\mathbf{r}_s) = V_{\text{in}} \delta(l) = \begin{cases} V_{\text{in}} & (l = 0) \\ 0 & (l \neq 0) \end{cases} \quad (5.45)$$

微分—积分方程和变分原理 将 (5.40) 代入 (5.42) 得未知电流 $\mathbf{I}(l')$ 的微分—积分方程

$$E_l^{\text{in}}(\mathbf{r}_s) = j\omega\mu \left[\left(1 + \frac{1}{k^2} \right) \nabla \nabla \int_L \mathbf{I}(l') G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') dl' \right] \cdot \hat{\mathbf{l}} \quad (5.46)$$

式中 ∇ 对场点运算, \int_L 是对源点标量 l' , 故利用性质

$$\nabla [\mathbf{I}(l') G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}')] = G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') \nabla \mathbf{I}(l') + \mathbf{I}(l') \nabla G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}')$$

注意到 $\nabla \mathbf{I}(l') \equiv 0$, 并记自由空间电场并矢格林函数

$$\bar{\mathbf{G}}_{e0}(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') = j\omega\mu \left[\bar{\mathbf{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] G(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') = \bar{\mathbf{G}}_{e0}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s) \quad (5.47)$$

则上式可改写为第一类 Fredholm 积分方程

$$E_l^{\text{in}}(\mathbf{r}_s) = \int_L I(l') \left[\hat{\mathbf{l}}' \cdot \bar{\mathbf{G}}_{e0}(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{l}} \right] dl' \quad (5.48)$$

式中方括号里的算子只具有对称性而无共轭对称, 不是线性正算子, 从而不能用线性正算子的确定性方程方法建立对应的变分方程. 但可改用 $I(l)$ 作对称内积

$$\int_{\Delta} I(l) E_l^{\text{in}}(\mathbf{r}_s) dl = \int_{L-\Delta} \int_{L-\Delta} \mathbf{I}(l') \cdot \bar{\mathbf{G}}_{e0}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{I}(l) dl' dl$$

在理想点馈 ($\Delta \rightarrow 0$) 时

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{\Delta} I(l) E_l^{\text{in}}(\mathbf{r}_s) dl = V_{\text{in}} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{\Delta} I(l) \delta(l) dl = V_{\text{in}} I(0) = Z_{\text{in}} [I(0)]^2$$

故输入阻抗的泛函式为

$$Z_{\text{in}} = \frac{1}{[I(0)]^2} \int_L \int_L \mathbf{I}(l') \cdot \bar{\mathbf{G}}_{e0}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{I}(l) dl' dl \quad (5.49)$$

可证明

$$\delta Z_{\text{in}} \{I(l)\} = 0 \quad (5.50)$$

从而用 Ritz 可求出电流分布 $I(l)$ 及输入阻抗 $Z_{\text{in}}(0)$.

5.5 加权余量法

算子方程边值问题可概括为:

$$\begin{cases} \mathbf{A}U(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = 0 & \mathbf{r} \in v \\ \mathbf{b}_i U(\mathbf{r}_{b_i}) - g_i(\mathbf{r}_{b_i}) = 0 & \mathbf{r}_{b_i} \in S_i \\ i = 1, 2, \dots, \quad \sum_i S_i = S[v] \end{cases} \quad (5.51)$$

当 $f(\mathbf{r})$ 是已知函数时为确定性问题, $f(\mathbf{r}) = \lambda \mathbf{B}U(\mathbf{r})$ 是广义本征值问题. \mathbf{b}_i 表示第 i 类的边界条件算子.

定义 定义方程和边界条件的余量为

$$\begin{cases} R_e(\mathbf{r}) = \mathbf{A}U^{[n]}(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \\ R_{b_i}(\mathbf{r}_{b_i}) = \mathbf{b}_i U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_i}) - g_i(\mathbf{r}_{b_i}) \end{cases} \quad (5.52)$$

准确解的所有余量恒等于 0. 近似解的余量应在平均意义上为零. 但在大范围取平均不足以限制实际的最大误差, 于是提出加权平均余量. 其基本公式为:

$$\langle R_e, w_\mu \rangle_v + \sum_i \langle R_{b_i}, \mathbf{P}_i w_\mu \rangle_{S_i} = 0 \quad (5.53)$$

式中 $\{w_\mu(\mathbf{r})\}$ ($\mu = 1, 2, \dots$) 为算子的值域 D'_A 中选取的线性无关函数的完备序列, 又称权函数序列, \mathbf{P}_i 为 w_μ 边界值的变换算子.

若近似解满足边界条件而不满足方程, 即 $\{R_{b_i} \equiv 0; R_e \neq 0\}$, 则式 (5.53) 化为

$$\langle \mathbf{A}U^{[n]}, w_\mu \rangle_v = \langle f, w_\mu \rangle_v \quad (5.54)$$

这是内域积分形式的加权余量法, 又称矩量法.

若近似解满足方程而不满足边界条件, 即 $\{R_e \equiv 0; R_{b_i} \neq 0\}$, 则式 (5.53) 化为

$$\sum_i \langle \mathbf{b}_i U^{[n]}, \mathbf{P}_i w_\mu \rangle_{S_i} = \sum_i \langle g_i, \mathbf{P}_i w_\mu \rangle_{S_i} \quad (5.55)$$

这是边界积分形式的加权余量法, 简称边界积分法.

例 以 Laplace 边值问题为例,

设近似解 $U^{[n]}(\mathbf{r})$ 和权函数 $w(\mathbf{r})$.

1) 先考虑 Neumann 问题:

$$\begin{cases} -\nabla \nabla U(\mathbf{r}) = 0 & \mathbf{r} \in V \\ \frac{\partial}{\partial n} U(\mathbf{r}_b) = g_2(\mathbf{r}_b) & \mathbf{r}_b \in S[v] \end{cases} \quad (5.56)$$

将近似解 $U^{[n]}$ 代入后写出余量

$$\begin{cases} R_e(\mathbf{r}) = -\nabla \nabla U^{[n]}(\mathbf{r}) \\ R_{b_2}(\mathbf{r}_b) = \frac{\partial}{\partial n} U^{[n]}(\mathbf{r}_b) - g_2(\mathbf{r}_b) \end{cases}$$

令 $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, 考虑到 Laplace 问题中的量都是实的, 可省去复共轭号 *, 因此用权函数作内积:

$$\begin{cases} \langle R_e, w \rangle_v = - \iiint_V w \nabla \nabla U^{[n]} dv \\ \langle R_{b_2}, w \rangle_{S[v]} = \iint_{S[V]} w \left(\frac{\partial U^{[n]}}{\partial n} - g_2 \right) ds \end{cases}$$

根据加权余量法的基本公式 (5.53), 可得

$$\iiint_V w \nabla \nabla U^{[n]} dv = \iint_{S[v]} w \left(\frac{\partial U^{[n]}}{\partial n} - g_2 \right) ds \quad (5.57)$$

设 $U^{[n]} = \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v(\mathbf{r})$, φ_v 是 $\mathbf{A} = -\nabla \nabla$ 定义域中线性无关的完备序列函数 (基函数), 且权函数取 n 个不同的函数 (\mathbf{A} 的值域), 则展开系数 $\{c_v\}$ 可由下列线性代数方程组解得:

$$\sum_{v=1}^n c_v \left[\iiint_V w_\mu \nabla \nabla \varphi_v dv - \iint_{S[v]} w_\mu \frac{\partial \varphi_v}{\partial n} ds \right] = - \iint_{S[v]} w_\mu g_2 ds, \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (5.58)$$

2) 再考虑边界上分片满足第一类和第二类条件的 Robin 问题:

$$\begin{cases} -\nabla \nabla U(\mathbf{r}) = 0 & \mathbf{r} \in v \\ U(\mathbf{r}_{b_1}) = g_1(\mathbf{r}_{b_1}) & \mathbf{r}_{b_1} \in S_1 \\ \frac{\partial}{\partial n} U(\mathbf{r}_{b_2}) = g_2(\mathbf{r}_{b_2}) & \mathbf{r}_{b_2} \in S_2 \end{cases} \quad S_1 + S_2 = S[v] \quad (5.59)$$

令 $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}_1 = -\partial/\partial n = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla$, 则式 (5.59) 的加权余量法公式为

$$\langle R_e, w \rangle_v + \langle R_{b_2}, w \rangle_{S_2} - \left\langle R_{b_1}, \frac{\partial w}{\partial n} \right\rangle_{S_1} = 0$$

即

$$\iiint_v w \left(\nabla \cdot \nabla U^{[n]} \right) dv = \iint_{S_2} w \left(\frac{\partial U^{[n]}}{\partial n} - g_2 \right) ds - \iint_{S_1} \frac{\partial w}{\partial n} \left(U^{[n]} - g_1 \right) ds \quad (5.60)$$

若代入 $U^{[n]} = \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v$ 及取 n 个不同的 $w = w_\mu, \mu = 1, 2, \dots, n$ 则可得求解 c_v 的线性代数方程组:

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^n c_v & \left[\iiint_V w_\mu \nabla \cdot \nabla \varphi_v dv + \iint_{S_1} \frac{\partial w_\mu}{\partial n} \varphi_v ds - \iint_{S_2} w_\mu \frac{\partial \varphi_v}{\partial n} ds \right] \\ & = \left[\iint_{S_1} \frac{\partial w_\mu}{\partial n} g_1 ds - \iint_{S_2} w_\mu g_2 ds \right], \quad \mu = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.61)$$

上述 Laplace 边值问题的加权余量法公式可推广到同时含三类边界条件的一般情况, 也可推广到 Poisson 问题和 Helmholtz 本征值问题等, 且对算子无苛刻限制 (即不要一定是自伴的).

如果余量在每个以权函数为基函数的坐标上的投影都为 0, 则该余量肯定为 0. 但我们的加权余量法是只保证在 n 个基函数 (权函数) 上的投影为 0, 因此所及的解是 n 级近似解 $U^{[n]}(\mathbf{r})$.

5.6 矩量法

即内域积分形式的加权余量法, 要求近似解 $U^{[n]}(\mathbf{r})$ 满足边界条件. 对式 (5.51) 的一般边值问题, 应构作 n 级近似解

$$U^{[n]}(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v(\mathbf{r}) \quad (5.62)$$

式中 $\varphi_0(\mathbf{r})$ 应满足边界条件:

$$\mathbf{b}_i \varphi_0(\mathbf{r}_{b_i}) = g_i(\mathbf{r}_{b_i}), \quad \mathbf{r}_{b_i} \in S_i \subset S[v], \quad i = 1, 2, \dots$$

基函数是 D_A 中线性无关的完备序列, 满足

$$\varphi_v(\mathbf{r}_{b_i}) \equiv 0, \quad \mathbf{r}_{b_i} \in S_i \subset S[v], \quad i = 1, 2, \dots$$

但当边界条件形状复杂时, 这样的 $\{\varphi_0\}$ 很难找到, 解决办法有三条:

1. 一般加权余量法式 (5.53) 或边界积分法式 (5.55);
2. Ritz 变分法;
3. 矩量法的变种 – 有限元法.

而本节的矩量法是假设可以找到满足所需边界条件的 φ_0, φ_v , 即近似解满足各项边界条件,

则由 $\langle \mathbf{A}U^{[n]}, w_\mu \rangle_v = \langle f, w_\mu \rangle_v$ 得矩量法的线性代数方程组 (令 $c_0 = 1$) :

$$\begin{cases} \text{确定性方程 } \mathbf{A}U = f & \sum_{v=0}^n c_v \langle \mathbf{A}\varphi_v, w_\mu \rangle = \langle f, w_\mu \rangle \\ \text{广义本征方程 } \mathbf{A}U = \lambda \mathbf{B}U & \sum_{v=0}^n c_v \left[\langle \mathbf{A}\varphi_v, w_\mu \rangle - \lambda^{[n]} \langle \mathbf{B}\varphi_v, w_\mu \rangle \right] = 0 \end{cases} \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (5.63)$$

5.7 边界积分法

边界积分形式的加权余量法, 要求近似解 $U^{[n]}(\mathbf{r})$ 满足算子方程. 但基函数序列的选择存在困难, 故利用方程余量的内积展开式

$$\langle R_e, w \rangle_U = \langle \mathbf{A}U^{[n]}, w \rangle_U - \langle f, w \rangle_U = \langle U^{[n]}, \mathbf{A}^\dagger w \rangle_U - \langle f, w \rangle_U$$

使 $\{\varphi_v | \mathbf{A}\varphi_v = f\}$ 转化为对权函数序列的要求: $\{w_\mu | \mathbf{A}^\dagger w_\mu = 0\}$. 但 \mathbf{A}^\dagger 不知道. 即使是 Lagrange 意义下的自伴算子, 但对并不满足边界条件的 $U^{[n]}$ 和 w (即 $U^{[n]}, w \notin D_b$), 并不具备自伴性 ($\mathbf{A}^\dagger \neq \mathbf{A}$). 解决办法是利用类似证明自伴边值问题的自伴性质时, 用 $U^{[n]}$ 和 w 代替 U 和 W ,

$$\mathbf{A} \langle U^{[n]}, w \rangle_v - \langle U^{[n]}, \mathbf{A}w \rangle_v = \langle \mathbf{b}_1 U^{[n]}, \mathbf{b}_2 w \rangle_{S[v]} - \langle \mathbf{b}_2 U^{[n]}, \mathbf{b}_1 w \rangle_{S[v]}$$

由于对 $U^{[n]}, w$ 非自伴, 等式右边二项之差不为 0, 但可保留在边界积分的加权余量法公式中.

5.7.1 内域基的边界积分法

Poisson 边值问题

$$\begin{cases} -\nabla \nabla U(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in v \\ U(\mathbf{r}_{b_1}) = g_1(\mathbf{r}_{b_1}) & \mathbf{r}_{b_1} \in S_1 \\ \frac{\partial}{\partial n} U(\mathbf{r}_{b_2}) = g_2(\mathbf{r}_{b_2}) & \mathbf{r}_{b_2} \in S_2 \end{cases} \quad S_1 + S_2 = S[v] \quad (5.64)$$

可得类似 (5.60) 的加权余量法公式

$$\iiint_v w (\nabla \nabla U^{[n]}) dv + \iiint_v wf dv = \iint_{S_2} w \left(\frac{\partial U^{[n]}}{\partial n} - g_2 \right) ds - \iint_{S_1} \frac{\partial w}{\partial n} (U^{[n]} - g_1) ds \quad (5.65)$$

利用格林第二定理:

$$\iiint_V \left[w (\nabla \cdot \nabla U^{[n]}) - U^{[n]} (\nabla \cdot \nabla w) \right] dv = \oint_{S[v]} \left[w \frac{\partial U^{[n]}}{\partial n} - U^{[n]} \frac{\partial w}{\partial n} \right] ds$$

可得:

$$\begin{aligned} \iiint_V U^{[n]} (\nabla \cdot \nabla w) dv + \iiint_V wf dv + \iint_{S_1} W \frac{\partial U^{[n]}}{\partial n} ds + \iint_{S_2} wg_2 ds = \\ \iint_{S_1} \frac{\partial w}{\partial n} g_1 ds + \iint_{S_2} \frac{\partial w}{\partial n} U^{[n]} ds \end{aligned} \quad (5.66)$$

在 \mathbf{A} 的定义域内选 φ_v , 使 $U^{[n]}(\mathbf{r}) = \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v$; 又选满足 \mathbf{A} 的齐次方程的权函数序列 $w_\mu(\mathbf{r})$, 即 $\mathbf{A}w_\mu = -\nabla \cdot \nabla w_\mu = 0$, 则由式 (5.66) 可得边界积分形式的加权余量法公式:

$$\sum_{v=1}^n c_v \left[\iint_{S_2} \frac{\partial w_\mu}{\partial n} \varphi_v ds - \iint_{S_1} w_\mu \frac{\partial \varphi_v}{\partial n} ds \right] = \iiint_V w_\mu f dv + \iint_{S_2} w_\mu g_2 ds - \iint_{S_1} \frac{\partial w_\mu}{\partial n} g_1 ds \quad (5.67)$$

Laplace 边值问题 即 Poisson 边值问题式 (5.64) 中 $f(\mathbf{r}) \equiv 0$, 为齐次方程, 其加权余量法公式同式 (5.67), 但体积分项消失. 若 $S_1 = S[v], g_1 = g, S_2 = 0$, 取 $w_\mu = \varphi_\mu$, 则式 (5.67) 转化为 Trefftz 法的 (5.19) 式.

Helmholtz 确定性问题 即式 (5.64) 中 $(f(\mathbf{r}) \equiv \lambda U(\mathbf{r}))$, λ 为已知常数. 加权余量法公式为:

$$\sum_{v=1}^n c_v \left\{ \left[\iint_{S_2} \frac{\partial w_\mu^*}{\partial n} \varphi_v ds - \iint_{S_1} w_\mu^* \frac{\partial \varphi_v}{\partial n} ds \right] - \lambda \iiint_V w_\mu^* \varphi_v dv \right\} = \iint_{S_2} w_\mu^* g_2 ds - \iint_{S_1} \frac{\partial w_\mu^*}{\partial n} g_1 ds \quad (5.68)$$

式中 “*” 是因为 Helmholtz 问题中的量为复数.

Helmholtz 本征值问题 即式 (5.64) 中 $f(\mathbf{r}) \equiv \lambda U(\mathbf{r})$, 具有齐次边界条件: $g_1 = g_2 = 0, \lambda$ 为待定本征值, 从而式 (5.68) 为代数本征值方程

$$\sum_{v=1}^n c_v \left\{ \left[\iint_{S_2} \frac{\partial w_\mu^*}{\partial n} \varphi_v ds - \iint_{S_1} w_\mu^* \frac{\partial \varphi_v}{\partial n} ds \right] - \lambda^{[n]} \iiint_V w_\mu^* \varphi_v dv \right\} = 0, \quad \mu = 1, \dots, n \quad (5.69)$$

以上各式中只有含 f 的体积分项, 其余积分都在边界上, 故叫边界积分法. 基函数 $\{\varphi_v(\mathbf{r})\}$ 定义在内域 v 上, 故叫内域基的边界积分法.

5.7.2 Green 函数法的应用

Poisson 方程 $-\nabla \nabla U(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$ 在自由空间中对应的格林函数满足

$$\begin{cases} -\nabla \nabla G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \\ \frac{\partial G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i)}{\partial n} = \frac{-\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \end{cases} \quad (5.70)$$

选权函数 $w(\mathbf{r}) = G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i)$, 代入式 (5.66), 并利用 δ - 函数的取样性质³, 得

$$\begin{aligned} U^{[n]}(\mathbf{r}_i) &= \iiint_V f(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i) d\mathbf{v} \\ &\quad + \iint_{S_2} U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_i)}{\partial n} d\mathbf{s} + \iint_{S_1} g_1(\mathbf{r}_{b_1}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_i)}{\partial n} d\mathbf{s} \\ &= \iint_{S_1} \frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n} G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_i) d\mathbf{s} + \iint_{S_2} g_2(\mathbf{r}_{b_2}) G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_i) d\mathbf{s}, \quad \mathbf{r}_i \in v \end{aligned} \quad (5.71a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_\mu}) &- \iiint_v f(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_{b_\mu}) d\mathbf{v} \\ &\quad + \iint_{S_2} U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_{b_\mu})}{\partial n} d\mathbf{s} + \iint_{S_1} g_1(\mathbf{r}_{b_1}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_{b_\mu})}{\partial n} d\mathbf{s} \\ &= \iint_{S_1} \frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n} G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_{b_\mu}) d\mathbf{s} + \iint_{S_2} g_2(\mathbf{r}_{b_2}) G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_{b_\mu}) d\mathbf{s}, \quad \mathbf{r}_{b_\mu} \in S[v] \end{aligned} \quad (5.71b)$$

$$\begin{aligned} 0 &- \iiint_v f(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) d\mathbf{v} \\ &\quad + \iint_{S_2} U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_0)}{\partial n} d\mathbf{s} + \iint_{S_1} g_1(\mathbf{r}_{b_1}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_0)}{\partial n} d\mathbf{s} \\ &= \iint_{S_1} \frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n} G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_0) d\mathbf{s} + \iint_{S_2} g_2(\mathbf{r}_{b_2}) G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_0) d\mathbf{s}, \quad \mathbf{r}_0 \notin v + S[v] \end{aligned} \quad (5.71c)$$

注意式 (5.71a)~(5.71c) 中出现了 $U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2})$ 及 $\frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n}$, 但边界条件给出的是 $U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})$ 及 $\frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2})}{\partial n}$, 因此应根据 (5.71b), (5.71c) 利用下边的边界基积分方程的加权余量法将它们解出, 再带回 (5.71a) 可得 $U^{[n]}(\mathbf{r}_i), \mathbf{r}_i \in v$.

³

$$\iiint_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) d\mathbf{v} = \begin{cases} 1 & \mathbf{r}_i \in v \\ \frac{1}{2} & \mathbf{r}_i \in S[v] \\ 0 & \mathbf{r}_i \notin v + S[v] \end{cases}$$

对于 Helmholtz 确定性方程 $-(\nabla \cdot + k^2) U(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$, 其自由空间中的 Green 函数满足

$$\begin{cases} -(\nabla^2 + k^2) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \\ \frac{\partial G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i)}{\partial n} = \frac{-\hat{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (1 + jk |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \end{cases} \quad (5.72)$$

可推出类似于式 (5.71a)~(5.71c) 的积分表达式.

5.7.3 边界基的边界积分法

为了求解 $U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2})$ 及 $\frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n}$, 选取边界基函数序列 $\{\psi_v(\mathbf{r}_{b_1}) | v = 1, 2, \dots, \mathbf{r}_{b_1} \in S_1\}$ 及 $\{\varphi_v(\mathbf{r}_{b_2}) | v = 1, 2, \dots, \mathbf{r}_{b_2} \in S_2\}$, 构作近似解:

$$\begin{cases} U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2}) = \sum_{v=1}^{n_2} c_v \varphi_v(\mathbf{r}_{b_2}) & \mathbf{r}_{b_2} \in S_2 \\ \frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n} = \sum_{v=1}^{n_1} c'_v \psi_v(\mathbf{r}_{b_1}) & \mathbf{r}_{b_1} \in S_1 \end{cases}, \quad \begin{array}{l} n_1 + n_2 = n \\ S_1 + S_2 = S[v] \end{array} \quad (5.73)$$

代入积分方程 (5.71b) 式, 并在边界上取 n 个样点 $\{\mathbf{r}_{b_\mu} | \mu = 1, 2, \dots, n\}$, 得线性代数方程组:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_\mu}) + \sum_{v=1}^{n_2} c_v \iint_{S_2} \varphi_v(\mathbf{r}_{b_2}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_{b_\mu})}{\partial n} d\mathbf{s} - \sum_{v=1}^{n_1} c'_v \iint_{S_1} \psi_v(\mathbf{r}_{b_1}) G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_{b_\mu}) d\mathbf{s} \\ &= \iiint_v f(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_{b_\mu}) dv + \iint_{S_2} g_2(\mathbf{r}_{b_2}) G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_{b_\mu}) d\mathbf{s} - \iint_{S_1} g_1(\mathbf{r}_{b_1}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_{b_\mu})}{\partial n} d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (5.74)$$

式中

$$U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_\mu}) = \begin{cases} g_1(\mathbf{r}_{b_\mu}) & \mathbf{r}_{b_\mu} \in S_1 \\ \sum_{v=1}^{n_2} c_v \varphi_v(\mathbf{r}_{b_\mu}) & \mathbf{r}_{b_\mu} \in S_2 \end{cases}$$

解出 $\{c_v\}$ 和 $\{c'_v\}$ 后代入 (5.73) 及 $U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_2})$ 和 $\frac{\partial U^{[n]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n}$, 再代入 (5.71a) 式, 即可算

出 $\mathbf{r}_i \in v$ 点的近似解

$$\begin{aligned} U^{[n]}(\mathbf{r}_i) = & \iiint_v f(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_i) dv + \iint_{S_2} g_2(\mathbf{r}_{b_2}) G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_i) ds - \iint_{S_1} g_1(\mathbf{r}_{b_1}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_i)}{\partial n} ds \\ & - \sum_{v=1}^{n_2} c_v \iint_{S_2} \varphi_v(\mathbf{r}_{b_2}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_i)}{\partial n} ds + \sum_{v=1}^{n_1} c'_v \iint_{S_1} \psi_v(\mathbf{r}_{b_1}) G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_i) ds \end{aligned} \quad (5.75)$$

注意要避免 Green 函数在 \mathbf{r}_{b_μ} 处的奇异性. 若采用 (5.71c) 式代替 (5.71b) 式, 则由于 $\mathbf{r}_0 \notin v + S[v]$, 可使 $G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ 不存在奇异性.

显然上述边界基的边界积分法只能逐点计算内域点的近似解, 无法得出近似解的显式, 但较内域基降低一维(即 $\sum_{v=1}$ 中只有面积分).

5.8 有限元和边界元法

用变分法或矩量法求解具有复杂边界形状的边值问题, 会遇到选取符合第一类齐次边界条件基函数的困难; 在场域内含有非均匀媒质时, 难以写出全域基函数的表达式, 此时宜采用分域基的矩量法或边界积分法. 当各子域节点上的近似解作为线性代数方程组的待求量时(而不是展开系数 c_v), 分域基的矩量法和边界积分法转化为有限元法和边界元法.

5.8.1 有限元法

可认为是有限差分法与 Ritz 法的结合. 与有限差分法相比, 它的单元划分有很大的随意性, 能较好地适应边界形状; 不仅能得到单元节点上的离散近似解, 还可以写出各单元内的连续近似解. 它与 Ritz 法的主要区别在于: 整个场域内的泛函被分解成各子域内的泛函之和, 泛函驻定的条件直接给出近似解在节点上的取样值而不是展开系数. 这里只简述有限元法的加权余量原理.

划分单元 场域 Ω 划分为 M 个几何结构相同(但尺寸可以不同)的单元, 其棱边应尽量贴合实际边界, 在场分布急剧变化处可加密单元. 各单元应小到内含均匀媒质. 每个单元上确定 S 个节点, 编号为 $\{e_v | v = 1, 2, \dots, s\}$. 可只取单元几何结构的顶点(简单模型), 也可再加上单元棱边上的若干插值点, 甚至个别内点. 节点总数 $N \ll S \times M$. 设内结点 P 个, 编号 $p = 1, 2, \dots, P$. 边界节点 $(N - P)$ 个.

近似解的构成 记未知函数 $U(\mathbf{r})$ 在节点 p (也是单元 e 的第 v 个节点) 上的取样值为 U_p , 也可记为

$$U_{e_v} \in \{U_p | p = 1, 2, \dots, P, \dots, N\}, \quad e = 1, 2, \dots, M; \quad v = 1, 2, \dots, S$$

在单元 e 上用简单函数(线性插值函数或多项式)构成近似解:

$$U_e(\mathbf{r}) = \sum_{\mu=1}^S c_{e\mu} \varphi_{e\mu}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega_e \quad (5.76)$$

并扩展到整个场域 Ω , 作为近似解 $U^{[N]}(\mathbf{r})$ 的脉冲分域基函数:

$$U_e(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sum_{\mu=1}^S c_{e\mu} \varphi_{e\mu}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Omega_e \\ 0 & \mathbf{r} \in \Omega - \Omega_e \end{cases} \quad (5.77)$$

在单元 e 的结点 e_v 上, 代入 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{e_v}$, 得:

$$U_e(\mathbf{r}) = \sum_{\mu=1}^S c_{e\mu} \varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v}), \quad v = 1, 2, \dots, S,$$

记矩阵 $[U_{e_v}]_{S \times 1}, [C_{e\mu}]_{S \times 1}, [\varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v})]_{S \times S}$, 则上式改写为矩阵方程:

$$[U_{e_v}] = [\varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v})] [C_{e\mu}], \quad [C_{e\mu}] = [\varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v})]^{-1} [U_{e_v}]$$

写出 Ω_e 的取样矩阵 $[Q_e]_{S \times N}$, 使

$$[U_{e_v}] = [Q_e] [U_p], \quad e = 1, 2, \dots, M$$

$$\text{则 } [C_{e\mu}] = [\varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v})]^{-1} [Q_e] [U_p]$$

代回 (5.77) 式, 并记列矩阵 $[\varphi_{e\mu}(\mathbf{r})]_{S \times 1}$, 得

$$U_e(\mathbf{r}) = \begin{cases} \left([\varphi_{e\mu}(\mathbf{r})]^T [\varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v})]^{-1} [Q_e] \right) [U_p] & \mathbf{r} \in \Omega_e \\ 0 & \mathbf{r} \in \Omega - \Omega_e \end{cases} \quad (5.78)$$

该分域基函数序列合成 Ω 上的 n 级近似解:

$$U^{[n]}(\mathbf{r}) = \sum_{e=1}^M U_e(\mathbf{r}) = [\Phi_p(\mathbf{r})] [U_p], \quad \text{其中} \quad (5.79)$$

$$[\Phi_p(\mathbf{r})]_{1 \times N} = \sum_{e=1}^M [\varphi_{e\mu}(\mathbf{r})]^T [\varphi_{e\mu}(\mathbf{r}_{e_v})]^{-1} [Q_e]$$

比较 (5.79) 和 (5.2) 式 (即 $U^{[n]} = \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v(\mathbf{r})$) , 若将 $\{\Phi_P(\mathbf{r}) | P = 1, 2, \dots, N\}$ 看作全域基序列, 则 $\{U_p | p = 1, 2, \dots, N\}$ 就是展开系数序列, 于是以前的各种泛函解法 (Ritz 法、Галёркин 法、点配置法等) 都可在 (5.79) 上进行.

5.8.2 矩量法

对一般的权函数 $\Phi : \{R_e, w\}_\Omega = 0$, 由 (5.79) 得

$$\mathbf{A}U = f : \sum_{p=1}^N U_p \langle \mathbf{A}\Phi_p, w_q \rangle = \langle f, w_q \rangle, \quad q = 1, 2, \dots \quad (5.80a)$$

$$\text{或 } \mathbf{A}U = \lambda \mathbf{B}U : \sum_{p=1}^N \left[\mathbf{A}U_p \langle \Phi_p, w_q \rangle - \lambda^{[N]} \langle \mathbf{B}\Phi_p, w_q \rangle \right] = 0, \quad q = 1, 2, \dots, N \quad (5.80b)$$

对第一类齐次边界条件, 已知边界节点上的零解 $\{U_p \equiv 0 | p = P + 1, \dots, N\}$, 因此近似解 (5.79) 式中只有 P 项, 基 $\{\Phi_p\}$ 、权 $\{W_q\}$ 也只需 P 项, 构成 P 级近似解 $U^{[P]}(\mathbf{r})$.

对于第二类齐次边界条件, 边界上的节点可选为内域节点法向外延的节点, 则这两点应有相等的取样值 ($\because \partial U / \partial n = 0$), 于是未知量 $\{U_p\}$ 也只有 P 项, 构成 P 级近似解. 但 Галёркин 法与变分法等价, 自然边界条件无需满足.

对其他各类边界条件可类似确定未知量 $\{U_p\}$ 及方程 (5.80a), (5.80b) 的独立数. 若各单元有不同媒质, 从而有不同算子, 则 (5.80a), (5.80b) 中的内积 $\langle \mathbf{A}U^{[N]}, w_q \rangle_\Omega$ 宜按单元展开成 $\sum_{e=1}^M \langle \mathbf{A}_e U_e, W_q \rangle_{\Omega_e}$, 未知量 U_p 隐含在 $U_e(\mathbf{r})$ 中, 如 (5.78) 式所示.

作为分域基矩量法的变种, 有限元法对复杂边界形状及非均匀媒质适应性强, 在内场问题中广为应用. 但对无界场域的电磁场外场问题, 节点数无穷多, 上述加权余量法无法求解, 可用单矩法.

5.8.3 单矩法(单边矩量法)

单矩法为有限元法与经典方法的结合, 适于求解无限空间的散射、辐射问题. 在离散射体足够远处散射场分布具有球面波(三维问题)或柱面波(二维问题)的特点. 作半径为 a 的球面或柱面将场域分为内区和外区. 以二维极坐标 (R, φ) 为例, 在外区, 总场

$$U_{\text{outer}}(\mathbf{R}) = U_{\text{in}}(\mathbf{R}) + U_{\text{sc}}(\mathbf{R}), \quad R \geq a \quad (5.81a)$$

式中 $U_{\text{in}}(\mathbf{R})$ 是外加入射场, 若场源在 (\mathbf{R}', φ') , 则

$$U_{\text{in}}(\mathbf{R}) = \frac{-j}{4} H_0^{[2]}(k |\mathbf{R} - \mathbf{R}'|), \quad (\text{柱面入射波}) \quad (5.81b)$$

U_{sc} 是散射场, 用柱函数系展开:

$$U_{sc}(\mathbf{R}) = c_0 H_0^{[2]}(kR) + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] H_n^{[2]}(kR)$$

取其截项构作 $N = 2k + 1$ 级近似解:

$$U_{sc}^{[N]}(\mathbf{R}) = c_0 H_0^{[2]}(kR) + \sum_{n=1}^k [c_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] H_n^{[2]}(kR) \quad (5.81c)$$

其中含有 N 个待定系数: $\{c_0, c_n, b_n | n = 1, 2, \dots, k\}$, 在内区, 引用有限元法的近似解表达式:

$$U_{inner}(\mathbf{r}) = \sum_{p=1}^N U_p \Phi_p(\mathbf{R}), \quad R \leq a, \quad (5.82)$$

式中 $\{U_p | p = 1, 2, \dots, N\}$ 是近似解在 n 个节点上的取样值, $\{\Phi_p(\mathbf{R}) | p = 1, 2, \dots, N\}$ 是分单元构造(定义)的全域基序列. 在分界面 ($R = a$) 上应有:

$$\begin{cases} U_{outer}(a, \varphi) = U_{inner}(a, \varphi), \\ \frac{\partial}{\partial R} U_{inner}(a, \varphi) = \frac{\partial}{\partial R} U_{outer}(a, \varphi) \end{cases}$$

可在分界面上定义近似解的余量:

$$\begin{cases} R_U(\varphi) = U_{outer}^{[N]}(a, \varphi) - U_{inner}^{[N]}(a, \varphi) \\ R_{dU}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial R} U_{outer}^{[N]}(a, \varphi) - \frac{\partial}{\partial R} U_{inner}^{[N]}(a, \varphi) \end{cases} \quad (5.83)$$

选取正交权函数

$$\{w_m(\varphi) | m = 1, 2, \dots, N\} = \{1; \cos m\varphi, \sin m\varphi | m = 1, 2, \dots, k\}$$

采用加权余量法

$$\begin{cases} \langle R_U, w_m \rangle_{\varphi=0,2\pi} = 0 \\ \langle R_{dU}, W_m \rangle_{\varphi=0,2\pi} = 0 \end{cases}, \quad m = 1, 2, \dots, N$$

共 $2N$ 个方程, 可解出 c_0, c_n, b_n 和 U_p , 及出内、外区的 n 级近似解.

含介质散射体内区可作为非均匀媒质的有限元处理(因为内区至少含介质及空气), 在介质表面上应有足够的节点. 含理想导体的内域应挖除导体所占的区域(因为导体内部场强为零), 且由于导体表面为齐次边界条件, 内区(即内、外区界面与导体表面之间的空间)仅 P 个待求

量 U_p , 则外区也应改取 P 级近似解, 且 $P = 2k + 1$, 为奇数.

由于在几何球面或柱面的单侧(内区)采用了类似矩量法的加权余量处理, 因此上述方法称为单矩法.

5.8.4 边界元法

为采用边界分域基的边界积分法, 也是内域有限元法用于边界的一种特殊形式.

一般分析 考虑式(5.64)的Poisson边值问题. m_1 个单元在边界 S_1 上, $m_2 = m - m_1$ 个单元在 S_2 上, 记为 $S_{(e)}$, e 为单元编号. 三维问题取三边形或四边形为边界单元, 二维问题以线段为边界单元. 在每个单元中指定 S 个结点: $\{e_\nu | \nu = 1, 2, \dots, s\}$, 按整个边界统一编号为 $p = 1, \dots, P_1, P_1 + 1, \dots, N$, 其中 P_1 个在 S_1 上, $P_2 = N - P_1$ 个在 S_2 上. 记 $U(\mathbf{r})$ 和 $\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial n}$ 在节点 p 上的取样值为 U_p 和 U'_p , 又记节点 (e_ν) 上取样值为 U_{e_ν} 及 U'_{e_ν} . 写出取样矩阵 $[Q_e]_{S \times P_2}$ 及 $[Q'_e]_{S \times P_1}$, 使

$$\begin{aligned}[U'_{e_\nu}]_{S \times 1} &= [Q'_e]_{S \times P_1} [U'_p]_{P_1 \times 1}, \quad e = 1, 2, \dots, m_1 \\ [U_{e_\nu}]_{S \times 1} &= [Q_e]_{S \times P_2} [U_p]_{P_2 \times 1}, \quad e = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m\end{aligned}$$

选取边界分域基函数:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_e(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n} &= \begin{cases} \sum_{\mu=1}^S c'_{e_\mu} \psi_{e_\mu}(\mathbf{r}_{b_1}), & \mathbf{r}_{b_1} \in S_{(e)} \\ 0, & \mathbf{r}_{b_1} \in S_1 - S_{(e)} \end{cases}, \quad e = 1, 2, \dots, m_1 \\ \text{及 } U_e(\mathbf{r}_{b_2}) &= \begin{cases} \sum_{\mu=1}^S c_{e_\mu} \varphi_{e_\mu}(\mathbf{r}_{b_2}), & \mathbf{r}_{b_2} \in S_{(e)} \\ 0, & \mathbf{r}_{b_2} \in S_2 - S_{(e)} \end{cases}, \quad e = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m\end{aligned}$$

可仿照内域有限元法写出边界上的 N 级近似解:

$$\begin{cases} \frac{\partial U^{[N]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n} = \sum_{p=1}^{P_1} U'_p \Psi_p(\mathbf{r}_{b_1}) = [\Psi_p(\mathbf{r}_{b_1})] [U'_p], & \mathbf{r}_{b_1} \in S_1 \\ U^{[N]}(\mathbf{r}_{b_2}) = \sum_{p=P_1+1}^N U_p \Phi_p(\mathbf{r}_{b_2}) = [\Phi_p(\mathbf{r}_{b_2})] [U_p], & \mathbf{r}_{b_2} \in S_2 \end{cases} \quad (5.84)$$

式中

$$\begin{cases} [\Psi_p(\mathbf{r}_{b_1})]_{1 \times P_1} = \sum_{e=1}^{m_1} [\psi_{e_\mu}(\mathbf{r}_{b_1})]^T [\psi_{e_\mu}(\mathbf{r}_{e_v})]^{-1} [Q'_e] \\ [\Phi_p(\mathbf{r}_{b_2})]_{1 \times P_2} = \sum_{e=m_1+1}^m [\varphi_{e_\mu}(\mathbf{r}_{b_2})]^T [\varphi_{e_\mu}(\mathbf{r}_{e_v})]^{-1} [Q_e] \end{cases} \quad (5.85)$$

将式(5.84)的 N 级近似解代入一般(内域基)边界积分法的(5.71b)式, 并令取样点 (\mathbf{r}_{b_μ}) 选在节点 $\{\mathbf{r}_q | q = 1, 2, \dots, N\}$ 上, 经整理及代数线性方程组($q = 1, 2, \dots, N$):

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{P_1} U'_p \iint_{S_1} \psi_p(\mathbf{r}_{b_1}) G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_q) ds - \sum_{p=P_1+1}^N U_p \left[\frac{1}{2} \delta_{pq} + \iint_{S_2} \Phi_p(\mathbf{r}_{b_2}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_q)}{\partial n} ds \right] \\ &= \iint_{S_1} g_1(\mathbf{r}_{b_1}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_{b_1}|\mathbf{r}_q)}{\partial n} ds - \iint_{S_2} g_2(\mathbf{r}_{b_2}) G_0(\mathbf{r}_{b_2}|\mathbf{r}_q) ds - \iiint_v f(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_q) dv \end{aligned} \quad (5.86)$$

据此解出 U'_p 和 U_p , 代入(5.84)即得边界近似解 $\frac{\partial U^{[N]}(\mathbf{r}_{b_1})}{\partial n}$ 和 $U^{[N]}(\mathbf{r}_{b_2})$, 再将其代入边界积分法的(5.71a)式可计算出内域中任意点($\mathbf{r}_i \in U$)的 n 级近似解.

5.9 各种泛函解法的关系

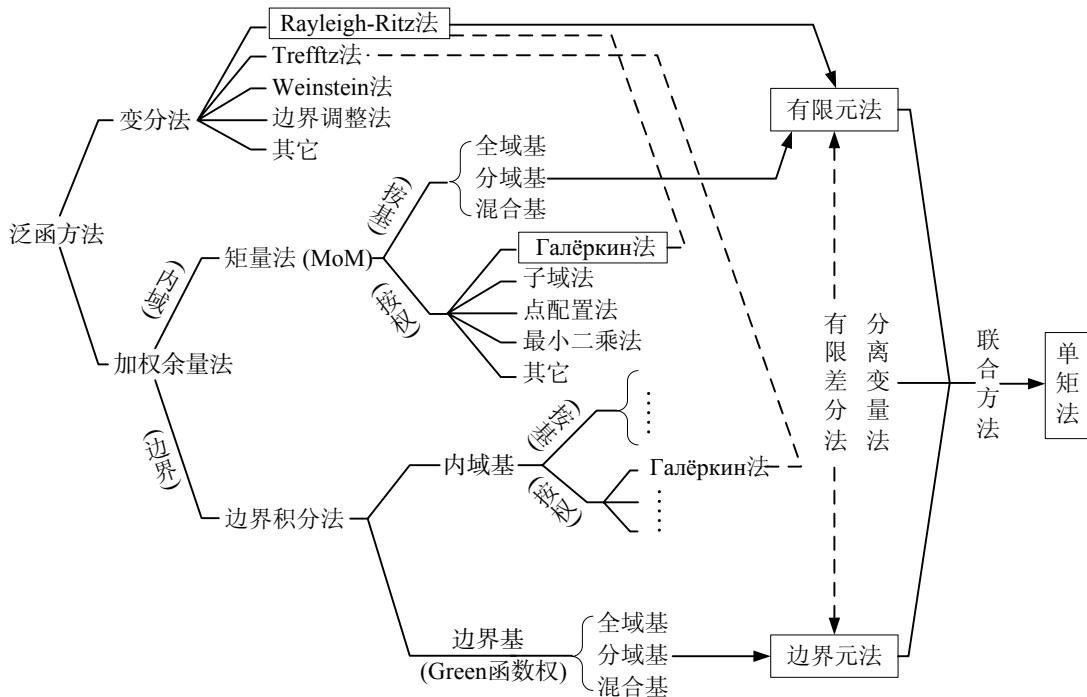


图 5.3 各种泛函解法的关系

第 6 章 矩量法

6.1 矩量法的基本原理

矩量法是一种将线性泛函方程离散化为线性矩阵方程的数值技术, 它的基本概念在上世纪初就已经被揭示, 如 1915 年俄国的机械工程师 Галёркин 创立了 Галёркин 法. 但它的正式命名只是在 60 年代末 R.F.Harrington 教授完成的, 它具有基本概念清晰、明了, 处理方法灵活、简易, 适用范围广泛等优点, 倍受电磁领域各国研究人员、学者的青睐, 在这三十多年的历史中已经得到了广泛的应用和长足的进步.

矩量法可以认为是加权余量法的一种特许形式, 即内域积分形式的加权余量法, 要求近似解 $U^{[n]}(\mathbf{r})$ 满足边界条件. 从加权余量法的角度, 可以解释如下: 对一般边值问题

$$\begin{cases} \mathbf{A}U(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in v \\ \mathbf{b}_i U(\mathbf{r}_{b_i}) - g_i(\mathbf{r}_{b_i}) = 0, & \mathbf{r}_{b_i} \in S_i \subset S[v] \end{cases} \quad (6.1)$$

应构作 n 级近似解

$$U^{[n]}(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v(\mathbf{r}) \quad (6.2)$$

式中 $\varphi_0(\mathbf{r})$ 应满足边界条件: $\mathbf{b}_i \varphi_0(\mathbf{r}_{b_i}) = g_i(\mathbf{r}_{b_i}), \mathbf{r}_{b_i} \in S_i \subset S[v], i = 1, 2, \dots$

基函数则满足: $\varphi_v(\mathbf{r}_{b_i}) \equiv 0, \mathbf{r}_{b_i} \in S_i \subset S[v], i = 1, 2, \dots$

但当边界条件形状复杂时, 这样的 φ_0 和 φ_v 很难找到, 解决办法有三条:

1. 一般加权余量法或边界积分法;
2. Ritz 变分法;
3. 矩量法的变种 — 有限元法.

具体地, 矩量法的求解可以分为三个过程:

1. 离散化过程

这一过程的目的是将算子方程化为代数方程, 具体步骤为:

- (a) 在算子的定义域内选择一组基函数, $\{\varphi_v | v = 1, 2, \dots, N\}$ 要求: 线性无关、完备;
- (b) 将未知函数 $U(x)$ 表示为该函数的线性组合, 即:

$$U(x) \approx U^{[N]}(x) = \sum_{v=1}^N C_v \varphi_v$$

(c) 将 $U^{[N]}(x)$ 的展开式代入算子方程, 利用算子的线性性质, 将算子方程化为代数方程.

$$\text{对于确定性问题 } \mathbf{L}U = f \rightarrow \sum_{v=1}^N C_v \mathbf{L}\varphi_v = f \quad (6.3)$$

$$\text{对于本征值问题 } \mathbf{A}U = \lambda \mathbf{B}U \rightarrow \sum_{v=1}^N C_v \mathbf{A}\varphi_v = \lambda \sum_{v=1}^N C_v \mathbf{B}\varphi_v \quad (6.4)$$

注意: 前提是 $U^{[N]}(x)$ 满足各项边界条件.

2. 取样检验过程

取样检验的目的是为了使近似解 $U^{[N]}(x)$ 与准确解 $U(x)$ 之间的误差 (在某种意义上) 极小化, 具体步骤为:

- (a) 在算子 \mathbf{L} 的值域内选择一组权函数 (又称检验函数) $\{w_u | u = 1, 2, \dots, N\}$, 它们也应该是彼此线性无关的、完备的;
- (b) 将权函数 w_u 与离散化的算子方程求内积进行抽样检验, 因为要确定 n 个未知数, 需要进行 n 次抽样检验;
- (c) 利用算子的线性和内积的性质, 将上述内积检验方程化为矩阵方程, 即

$$\mathbf{L}U = f \rightarrow \sum_{v=1}^N C_v \mathbf{L}\varphi_v = f \rightarrow \begin{cases} \sum_{v=1}^N C_v \langle \mathbf{L}\varphi_v, w_u \rangle = \langle f, w_u \rangle, \\ \text{or} \quad \sum_{v=1}^N C_v \langle w_u, \mathbf{L}\varphi_v \rangle = \langle w_u, f \rangle \end{cases}, \quad u = 1, 2, \dots, N$$

令 $\langle w_u, \mathbf{L}\varphi_v \rangle = Z_{uv}$, $\langle w_u, f \rangle = V_u$, 则有 $[Z_{uv}] [C_v] = [V_u]$

更一般地, 可表示为:

$$[Z_{uv}] [I_v] = [V_u] \quad (6.5)$$

式中, $[Z_{uv}]$ 称为广义阻抗矩阵; $[I_v]$ 称为广义电流矩阵; $[V_u]$ 称为广义电压矩阵.

3. 矩阵求解过程

一旦得到矩阵方程, 就可以通过常规的线性方程求解方法得到展开函数的系数, 即:

$$[C_v] \& [I_v] = [Z_{uv}]^{-1} [V_u]$$

则

$$U^{[N]} = [\varphi]^T [C_v]$$

将这一步单独列出的原因在于在矩量法的应用过程中代数方程的求解越来越重要, 它涉及到计算量、解的收敛性、稳定性等众多至关重要的方面, 电磁领域的学者对此越来越关注并作出了重要贡献, 稍后再作解释.

矩量法的具体求解与权函数、基函数的选择密切相关。

6.1.1 权函数的选择

根据权函数的不同选择, 可以将矩量法分为几种不同的解法。

I. 伽辽金法

令权函数与基函数相同, 即:

$$\{w_u |_{u=1,2,\dots,N}\} = \{\varphi_v |_{v=1,2,\dots,N}\}$$

$$\text{则 } \mathbf{L}U = f \rightarrow \begin{cases} \sum_{v=1}^N I_v \langle \varphi_u, \mathbf{L} \varphi_v \rangle = \langle \varphi_u, f \rangle \\ u = 1, 2, \dots, N \end{cases} \rightarrow [Z_{uv}] [I_v] = [V_u]$$

Галёркин 法与 Rayleigh-Ritz 变分法等效;

Галёркин 法适用范围更宽, 直接从算子方程出发, 概念明确, 不需要写出泛函式, 尤其是适用于不能直接建立变分原理的问题;

业已证明, Галёркин 法在全域权中是收敛最快、稳定性最好的方法。

例 解方程

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}u(x) = 1 + 4x^2 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{解 } u^{[N]}(x) = \sum_{v=1}^N C_v u_v = \sum_{v=1}^N C_v (x - x^{v+1})$$

注意到 $u_v = x - x^{v+1}$ 满足 B.C.

$$\mathbf{L}U = f \rightarrow \sum_{v=1}^N C_v \mathbf{L}u_v = f \rightarrow w_u = x - x^{u+1}$$

$$Z_{uv} = \langle w_u, \mathbf{L}u_v \rangle = \int_0^1 (x - x^{u+1}) \left[-\frac{d^2}{dx^2}(x - x^{v+1}) \right] dx = \frac{uv}{u+v+1}$$

$$V_u = \langle w_u, f \rangle = \int_0^1 (x - x^{u+1})(1 + 4x^2) dx = \frac{u(3u+8)}{2(u+2)(u+4)}$$

代入 $[Z_{uv}] [C_v] = [V_u]$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{N}{N+2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \cdots & \frac{2N}{N+3} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & \cdots & \frac{2N}{N+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N}{N+2} & \frac{2N}{N+3} & \cdots & \frac{N^2}{2N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \\ \vdots \\ \frac{N(3N+8)}{2(N+2)(N+4)} \end{bmatrix}$$

$$N = 1, \quad u \approx \frac{11}{10}(x - x^2)$$

$$N = 2, \quad u \approx \frac{23}{30}x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

$$N = 3, \quad u = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4$$

$N \geq 4, \quad u$ 同上

II. 点配置法 (Point-matching method)

将权函数取为指定点 $\{\mathbf{r}_u |_{u=1,2,\dots,N}\}$ 处的冲激函数: $w_\mu(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\mu), \quad \mu = 1, 2, \dots, n$, 则对于确定性边值问题: $\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{f} : \rightarrow \sum_{v=0}^n c_v \varphi_v(\mathbf{r}_\mu) = f(\mathbf{r}_\mu), \quad \mu = 1, 2, \dots, n$

$$Z_{uv} = \mathbf{L}\varphi_v(\mathbf{r}_u), \quad V_u = f(\mathbf{r}_u)$$

其意义是余量 $\text{res}(\mathbf{r})$ 在 n 个离散点上等于零: $\text{res}(\mathbf{r}_\mu) = 0, \mu = 1, 2, \dots, n$ (即 $\sum_{v=0}^n [c_v \varphi_v(\mathbf{r}_\mu)] - f(\mathbf{r}_\mu) = 0$), 近似解在这些点上严格地满足方程 (及边界条件), 其他点或区域的误差取决于 N 的大小及点的分布情况, 无法直接控制.

点配置法免除了繁复的内积运算, 简单明了, 可以选取较多的点获得较高的精度;

一般情况下, 取样点在区域内等间隔选取;

显然点配置法不宜用于未知函数有锐变点的问题.

对广义本征值问题, 则为

$$U = \lambda U : \quad \sum_{v=0}^n c_v [\varphi_v(\mathbf{r}_\mu) - \lambda^{[n]} \varphi_v(\mathbf{r}_\mu)] = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (6.6)$$

例 求解金属圆柱体上的电荷分布, 如图 6.1 所示. 假设 $a \ll \lambda$; 电荷周向均匀分布, 导体有稳恒电位 V_0 .

noindent 解 电位与电荷的关系:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{v'} \frac{\rho \mathrm{d}v'}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s \mathrm{d}s'}{r} \quad (6.7)$$

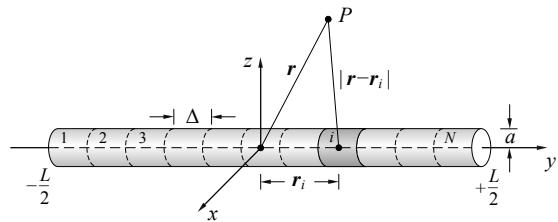


图 6.1 带电金属圆柱体

导体是等位体, 导体表面为等位面, 上式中场点在导体表面时:

$$4\pi\epsilon_0 V_0 = \int_L \frac{\rho(y')}{|y_i - y'|} dy' \quad (6.8)$$

上式可以看作为关于电荷的算子方程, $\mathbf{L}\rho(y') = 4\pi\epsilon_0 V_0$. 将整个圆柱体分为 N 段, 分别为 $\Delta_i, i = 1, 2, \dots, N$, 选取矩形基函数

$$\varphi_i = \begin{cases} 1 & y \in \Delta_i \\ 0 & y \notin \Delta_i \end{cases}$$

则 $\rho \approx \sum_{i=1}^N \rho_i \varphi_i \rightarrow \sum_i \rho_i \mathbf{L}\varphi_i = 4\pi\epsilon_0 V_0$,

$$\mathbf{L}\varphi_i = \int_0^{\Delta_i} \frac{dy'}{r} = \frac{\Delta}{|y - y'_i|} \rightarrow \sum_{v=1}^N \frac{\rho_i \Delta}{|y - y'_i|} = 4\pi\epsilon_0 V_0$$

取 $w_i = \delta(y - y_i)$, 于是有

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 V_0 &= \frac{\rho_1 \Delta}{|y_1 - y'_1|} + \frac{\rho_2 \Delta}{|y_1 - y'_2|} + \cdots + \frac{\rho_N \Delta}{|y_1 - y'_N|} \\ 4\pi\epsilon_0 V_0 &= \frac{\rho_1 \Delta}{|y_2 - y'_1|} + \frac{\rho_2 \Delta}{|y_2 - y'_2|} + \cdots + \frac{\rho_N \Delta}{|y_2 - y'_N|} \\ &\vdots \\ 4\pi\epsilon_0 V_0 &= \frac{\rho_1 \Delta}{|y_N - y'_1|} + \frac{\rho_2 \Delta}{|y_N - y'_2|} + \cdots + \frac{\rho_N \Delta}{|y_N - y'_N|} \end{aligned}$$

或写为广义电压电流矩阵形式

$$[Z_{ij}] [\rho_j] = [V_j], Z_{ij} = \frac{\Delta}{|y_i - y_j|}, \quad V_j = 4\pi\epsilon_0 V_0$$

但是 $i = j$ 时广义阻抗矩阵元素趋向于无穷大, 不能用上式. 必须单独处理, 即处理每节上自身电荷的影响. 先求第 j 段上电荷均匀分布在表面时中心点的电位:

$$4\pi\epsilon_0 V_0 = \iint_{\Delta s'} \frac{\rho_s ds'}{\sqrt{a^2 + y'^2}} = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{\rho_s 2\pi a dy'}{\sqrt{a^2 + y'^2}} = 2\rho_j \ln \frac{\Delta}{a}$$

式中 $\rho_j = 2\pi a \rho_s$, 因此 $Z_{jj} = 2 \ln \frac{\Delta}{a}$. 于是矩阵变为

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 \ln \frac{\Delta}{a} & \frac{\Delta}{|y_1 - y_2|} & \cdots & \frac{\Delta}{|y_1 - y_N|} \\ \frac{\Delta}{|y_2 - y_1|} & 2 \ln \frac{\Delta}{a} & \cdots & \frac{\Delta}{|y_2 - y_N|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta}{|y_N - y_1|} & \frac{\Delta}{|y_N - y_2|} & \cdots & 2 \ln \frac{\Delta}{a} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_N \end{bmatrix} = 4\pi\epsilon_0 V_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

取 $L = 1\text{m}$, $a = 1\text{mm}$, $V_0 = 1\text{V}$, $N = 25$, 电荷分布如图 6.2 所示. 若取 $a = 10\text{mm}$, 矩阵变得病态, 解不稳定.

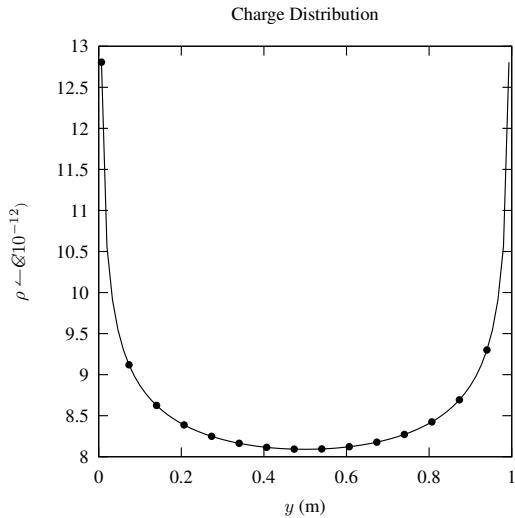


图 6.2 均匀细棒上的电荷分布

III. 子域法 (Sub-Domain Method)

令权函数为作用于不同子域的矩形脉冲函数序列:

$$w_\mu(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{r} \in \Delta V_\mu \\ 0 & \mathbf{r} \notin \Delta V_\mu \end{cases}, \quad \sum_{\mu=1}^n \Delta V_\mu = V, \quad \mu = 1, 2, \dots, n$$

则确定性算子方程:

$$\mathbf{L}U = f : \sum_{v=0}^n c_v \iiint_{\Delta V_\mu} \mathbf{L}\varphi_v dv = \iiint_{\Delta V_\mu} f dv, \quad \mu = 1, 2, \dots, N$$

广义本征值方程:

$$\mathbf{A}U = \lambda \mathbf{B}U : \sum_{v=0}^n c_v \left[\iiint_{\Delta V_\mu} \mathbf{A}\varphi_v dv - \lambda^{[n]} \iiint_{\Delta V_\mu} \mathbf{B}\varphi_v dv \right] = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, N$$

1. 子域法使得原算子方程的余量 $\text{res}(\mathbf{r})$ 在每个子域 V_μ 内的算术平均值等于零. 因而必然在每个子域内部余量正负交差, 未必比选点法好;
2. 将内积范围缩小在每个子域内, 而且在子域内权函数为 1, 简化了内积求解过程.

IV. 最小二乘法

根据方程的余量随展开系数的变化率选取权函数序列:

$$w_\mu(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) \frac{\partial \text{res}(\mathbf{r})}{\partial C_\mu}, \quad p(\mathbf{r}) > 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (6.9)$$

则加权余量法公式:

$$\langle \text{res}, w_\mu \rangle = \iiint_V p \text{res} \left[\frac{\partial \text{res}}{\partial C_\mu} \right]^* dv = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (6.10)$$

由于 $J \{U^{[n]}\}$ 只是 c_μ 的函数, 上式等价于变分方程

$$\delta J \{U^{[n]}\} = \delta \iiint_V p |\text{res}|^2 dv = 0 \quad (6.11)$$

说明余量绝对值平方在 V 内按 $p(\mathbf{r})$ 的加权积分为最小值, 是控制误差的最有效方法, 称为最小二乘法. 一般取 $p(\mathbf{r}) = 1$.

将 res 的表达式 (如 $\sum_{v=0}^n c_v \varphi_v - f$) 及 $U^{[n]}$ 代入, 得:

$$\mathbf{A}U = f : \sum_{v=0}^n c_v \langle \mathbf{A}\varphi_v, p\mathbf{A}\varphi_\mu \rangle = \langle f, p\mathbf{A}\varphi_\mu \rangle, \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}U = \lambda \mathbf{B}U : \sum_{v=0}^n c_v & \left[\langle \mathbf{A}\varphi_v, p\mathbf{A}\varphi_\mu \rangle - \lambda^{[n]} \langle \mathbf{A}\varphi_v, p\mathbf{B}\varphi_\mu \rangle - \lambda^{[n]} \langle \mathbf{B}\varphi_v, p\mathbf{A}\varphi_\mu \rangle \right. \\ & \left. + \left(\lambda^{[n]} \right)^2 \langle \mathbf{B}\varphi_v, p\mathbf{B}\varphi_\mu \rangle \right] = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (6.13)$$

最小二乘法是控制误差的最有效方法; 这种方法虽然精度高, 但计算复杂, 较少采用.

6.1.2 基函数的选择

矩量法的概念思路非常简单明了,但要用好矩量法并不容易,关键之一就是基函数的选择.理论上说,可以存在无穷多种基函数,但在实际应用中往往只有少数几组基函数适用于给定问题.同时某些基函数比其他形式的基函数对于给定问题而言收敛更快,也就是说在给定精度下需要的计算量更少.一般来说,基函数越接近待求函数,收敛越快,而且往往随之阻抗矩阵的稳定性也越好.

矩量法的基函数在满足线性无关、完备的条件下,还必须满足与未知函数相同类型的齐次边界条件:

$$\mathbf{b}_i \varphi_v(\mathbf{r}_{b_i}) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \mathbf{r}_{b_i} \in S_i \subset S[v]$$

此外当然还应符合算子、内积所要求的可微性和可积性条件.一般来说,矩量法的基函数可以分为全域基和分域基两大类,与上述权函数结合可以有各种不同的方法.

I. 全域基函数

全域基是指在算子的定义域内的全域上非零的一组基函数.

如果事先能够了解待求函数的特性,选择符合这种特性的基函数,解的收敛性将会很好.如对称振子天线上的电流分布接近正弦分布,就可以选择正弦函数为基函数.

全域基函数的最大优点是收敛快.

缺点是需要有关未知函数的先验知识,而未知函数的特性是很难事先了解的,而且有时即使知道也很难用一个函数在整个域上进行描述,或者数学形式过于复杂,增加了计算量,这就限制了全域基函数的应用.

几种常用的全域基函数为:

1. Fourier 级数

$$I(x) = I_1 \cos \frac{\pi}{2}x + I_2 \cos \frac{3\pi}{2}x + \cdots + I_N \cos \frac{2N-1}{2}\pi x$$

2. Чебышёв 多项式

$$I(x) = I_1 T_1(x) + I_2 T_3(x) + \cdots + I_N T_{2N-1}(x)$$

3. Maclaurin 级数

$$I(x) = I_1 + I_2 x^2 + I_3 x^4 \cdots + I_N x^{2(N-1)}$$

4. Legendre 多项式

$$I(x) = I_1 P_0(x) + I_2 P_2(x) + \cdots + I_N P_{2(N-1)}(x)$$

II. 分域基函数

分域基函数是定义在算子定义域内, 但只在各个子域内不为零, 区域的其余部分其值为零的一组线性无关完备序列.

选择分域基函数本质是一种区域离散化过程, 未知函数展开成只在各子域存在的分域基函数的线性组合. 如前述求解金属圆柱体上电荷分布的例子就是选择了矩形脉冲分域基函数.

即选取脉冲函数序列作为分域基函数序列, 其元素 $\varphi_v(\mathbf{r})$ 仅在子域 ΔV_v 上取值. 与有限元方法类似, 也可以选用高阶基函数, 如二次或三次插值基函数, 可以在不增加未知数数目的情况下提高精度. 例如一维边值问题中常用的分域基函数形式有:

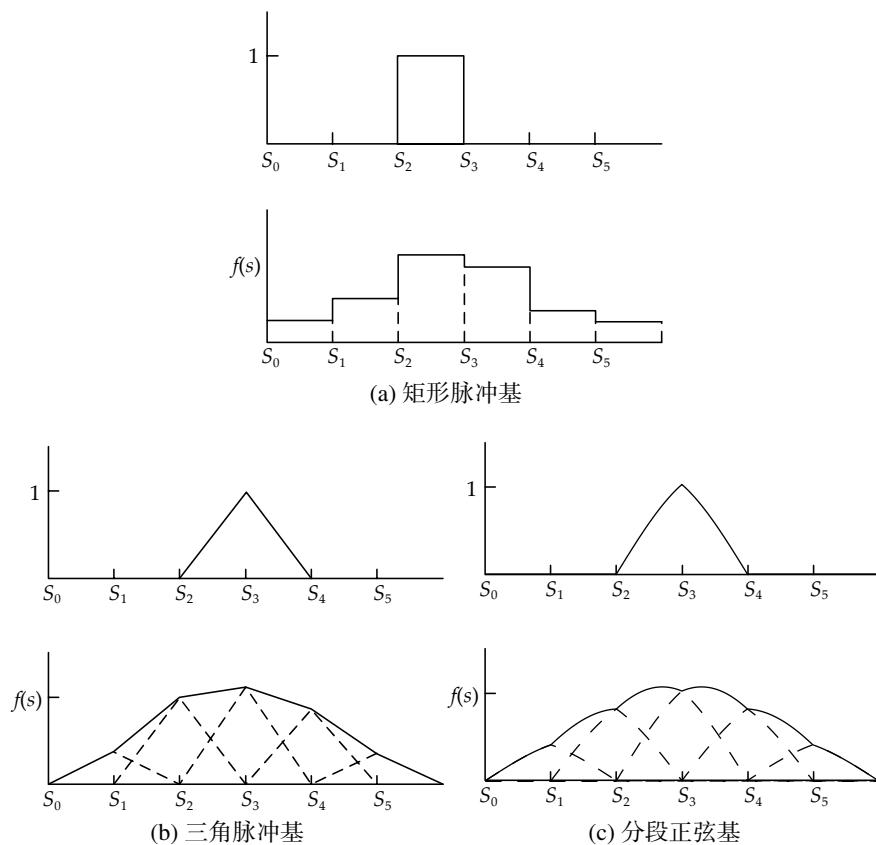


图 6.3 常见一维基函数

1. 矩形脉冲基:

$$P_v(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Delta x_v \\ 0 & x \notin \Delta x_v \end{cases}$$

2. 分段线性基(或三角脉冲基):

$$\Lambda_v(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{v-1}}{x_v - x_{v-1}} & x \in [x_{v-1}, x_v] \\ \frac{x_{v+1} - x}{x_{v+1} - x_v} & x \in [x_v, x_{v+1}] \\ 0 & x \notin [x_{v-1}, x_{v+1}] \end{cases}$$

3. 分段正弦基:

$$S_v(x) = \begin{cases} \frac{\sin[k(x - x_{v-1})]}{\sin[k(x_v - x_{v-1})]} & x \in [x_{v-1}, x_v] \\ \frac{\sin[k(x_{v+1} - x)]}{\sin[k(x_{v+1} - x_v)]} & x \in [x_v, x_{v+1}] \\ 0 & x \notin [x_{v-1}, x_{v+1}] \end{cases}$$

4. 二次插值基:

$$\varphi_v(x) = \begin{cases} A_v + B_v(x - x_v) + C_v(x - x_v)^2 & x \in \Delta x_v \\ 0 & x \notin \Delta x_v \end{cases}$$

5. 正弦插值基:

$$\psi_v(x) = \begin{cases} A_v + B_v \sin k(x - x_v) + C_v \cos k(x - x_v)^2 & x \in \Delta x_v \\ 0 & x \notin \Delta x_v \end{cases}$$

这几类基函数都有各自的特点,如矩形基:

$$U^{[n]}(x) = \sum_{v=1}^n c_v P_v(x_0) = \begin{cases} c_v & (x = x_v^-) \\ c_{v+1} & (x = x_v^+) \end{cases}$$

近似解在子域邻接点处不连续,微商有奇异性.而对于三角脉冲基、分段正弦基和二次插值基:构成的近似解在全域上连续,但其微商在子域的端点不连续,二阶微商有奇异性.如在 x_{v-1}^- 处微商小于零,而在 x_{v-1}^+ 处微商大于零(正弦基时为 1).

优点:简单、灵活、不受未知函数特性的约束;

缺点:收敛慢、欲得到全域基一样的精度,需要更多的分段数目,使得矩阵阶数增大.

近几年分域基函数得到了进一步的发展,出现了收敛速度快、适应性强的分域基函数形式,如多路分支结构等.

III. 二维基函数

一阶基函数 若求解区域是一个表面, 它可以被划分为小的三角形区域. 在某些特殊情况下也可划分为小矩形区域. 然而, 普遍来说, 三角形网格划分在表示特定表面形状时, 具有更高的灵活性和精度. 与脉冲基类似, 可以得到表面上的一阶基函数, 即在节点处为 1, 并线性地在相邻节点处下降到 0. 如图 6.4 所示.

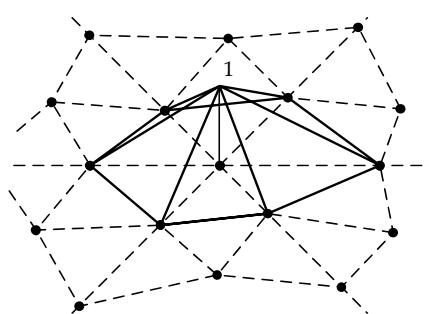


图 6.4 表面上的一阶基函数

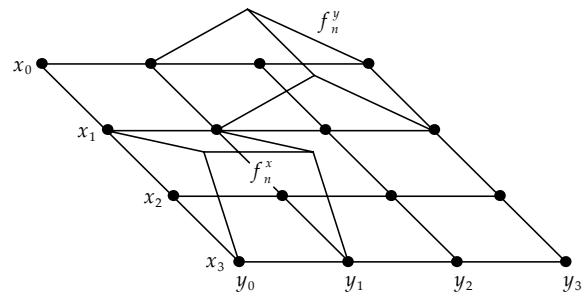


图 6.5 屋顶基函数

屋顶基函数 在多数三维问题中, 积分方程的未知函数是表面电流密度, 是一个矢量. 对于这样的未知数, 基函数选择必须根据电流密度的性质加以选择. 一种常用的基函数被称为**屋顶基函数**. 对于 $x - y$ 平面上的一个矩形网格, 对于表面电流的 x 和 y 分量的基函数分别定义为

$$f_n^x = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_{j-1} \leq y \leq y_j \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (6.14a)$$

$$f_n^y = \begin{cases} \frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j \\ \frac{y_{i+1} - y}{y_{i+1} - y_i}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_j \leq y \leq y_{j+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (6.14b)$$

易见屋顶函数实际上是一个脉冲基函数和三角基函数的乘积: $f_n^x = \Lambda_i(x)P_j(y)$, $f_n^y = P_i(x)\Lambda_j(y)$. 屋顶基函数如图 6.5 所示. 它可以保证电流的连续性, 并保证边界条件近似满足.

RWG 屋顶基函数 若表面划分为三角形网格, 可以使用 RWG 屋顶基函数^[42] 来展开表面电流. 此函数定义为具有公共边 l_n 的相连的两个三角形:

$$f_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{2A_n^+} \rho_n^+ & \mathbf{r} \in T_n^+ \\ \frac{l_n}{2A_n^-} \rho_n^- & \mathbf{r} \in T_n^- \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (6.15)$$

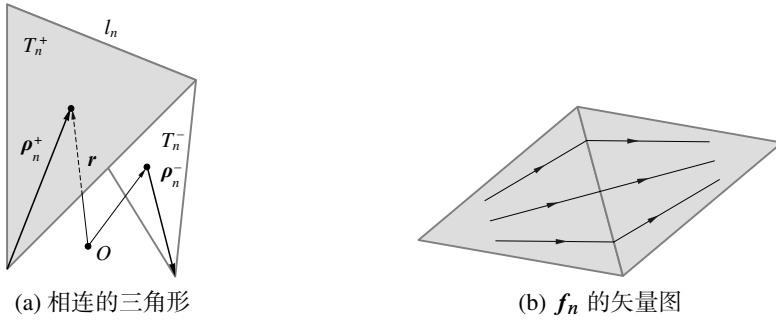


图 6.6 RWG 矢量基

其中, T_n^\pm 代表与第 n 号边相连的两个三角形, A_n^\pm 是三角形 T_n^\pm 的面积, l_n 是第 n 条边的长度, ρ_n^\pm 是如图 6.6a 所示的由 T_n^+ 自由顶点指向 \mathbf{r} , 或由 \mathbf{r} 指向 T_n^- 自由顶点的矢量. $f_n(\mathbf{r})$ 的矢量图如图 6.6b 所示.

RWG 矢量基使用时需要注意的最重要的特性是, 其边 l_n 的法向分量是常数(被归一化), 而其它边的法向分量都为 0. 这一特性保证在所有边上, 电流都连续分布.

6.1.3 矩量法中的若干问题

计算时间 t

$$t = AN^2 + BN^3 + CN^2 N_i + DNN_i N_a \quad (6.16)$$

其中 N 为未知量数目; N_a 为观察点(场点)数目. N_i 是依赖于待求物体几何形状、激励源数目的常数. A, B, C, D 是取决于计算方法、计算机类型的常数.

可见, 为了节省计算时间, 最有效的途径是减少 N (实际上就是矩阵的大小).

解的收敛性 与基函数、权函数的选择有关, 选择合适, 可以用较少的展开项数得到较高的精度.

解的稳定性 对于矩阵方程: $[C_v] \& [I_v] = [Z_{uv}]^{-1} [V_u]$,

当 $[Z]$ 为奇异矩阵时, $[Z]^{-1}$ 不存在, 因而解也不存在.

但当 $[Z]$ 接近奇异矩阵时, 解不稳定, 这种矩阵称为病态矩阵.

在二维的情况下:

奇异矩阵: 意味着两条线平行, 因而无解;

病态矩阵: 意味着两条线夹角接近零, 不大的舍入误差会引起解的大范围变动, 解不稳定, 结果不可信;

良态矩阵: 意味着两条线正交或大夹角, 解对舍入误差不敏感, 解稳定.

例 良态矩阵

$$\begin{cases} 300x + 400y = 700 \\ 100x + 100y = 200 \end{cases} \xrightarrow{\text{微扰}} \begin{cases} 303x + 400y = 700 \\ 101x + 100y = 200 \end{cases}$$

解为: $x = 1, y = 1$ 解为: $x = 0.99, y = 1$

病态矩阵

$$\begin{cases} 300x + 400y = 700 \\ 100x + 133y = 233 \end{cases} \xrightarrow{\text{微扰}} \begin{cases} 300x + 400y = 700 \\ 100x + 133y = 232 \end{cases}$$

解为: $x = 1, y = 1$ 解为: $x = -3, y = 4$

6.2 近似算子和扩展算子

在矩量法的实际应用中, 有时算子很复杂, 对于所选择的基函数 φ_v 和权函数 w_u , 内积运算十分复杂, 而且对于复杂算子, 在其定义域内有时很难找到合适的基函数.

解决途径: 通过改变算子, 即采用近似算子、扩展算子代替原来的算子, 从而简化计算, 并且同样能够得到原来算子方程的矩量法解.

6.2.1 近似算子

没有一个统一的方法, 只是根据算子的具体情况进行近似, 目的是简化. 比较常规的方法有:

微分: 有限差分

积分: 有限求和或近似积分核代替实际积分核

例

$$\begin{cases} -\frac{d^2U}{dx^2} = 1 + 4x^2 \\ U(0) = U(1) = 0 \end{cases}$$

将区域 $[0, 1]$ 分为 $N + 1$ 段, 除了区域端点外, 有 N 个段点.

a) 选择分域基、子域权, 即

三角基:

$$T(x) = \begin{cases} 1 - |x|(N+1) & |x| < \frac{1}{N+1} \\ 0 & |x| > \frac{1}{N+1} \end{cases}$$

脉冲权:

$$w_u = \begin{cases} 1 & |x - x_u| \leq \frac{1}{2(N+1)} \\ 0 & |x - x_u| > \frac{1}{2(N+1)} \end{cases}$$

则 $[Z_{uv}] [I_v] = [V_u]$ 中

$$Z_{uv} = \begin{cases} 2(N+1) & u = v \\ -(N+1) & |u - v| = 1 \\ 0 & |u - v| > 1 \end{cases}, \quad V_u = \frac{1}{N+1} \left[1 + \frac{4u^2 + \frac{1}{3}}{(N+1)^2} \right]$$

但此时不能用脉冲基, 因为它不在算子 $\mathbf{L} = -d^2/dx^2$ 的定义域内, 选用三角基后也不能用点选配, 因为 $\mathbf{LT}(x)$ 中出现符号函数 $\delta(x)$.

b) 用近似算子的方法

有限差分代替微分:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[u(x + \frac{\Delta x}{2}) - u(x - \frac{\Delta x}{2}) \right] \quad (6.17)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} \{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)\} \quad (6.18)$$

其中 $\Delta x = 1/(N+1)$, 原来的算子方程就成为

$$\mathbf{L}^d u(x) = (N+1)^2 [-u(x + \Delta x) + 2u(x) + u(x - \Delta x)] = 1 + 4x^2 \quad (6.19)$$

选取脉冲基函数和冲激函数权(点选配), 即:

$$\varphi_v = \begin{cases} 1 & |x - x_v| \leq \frac{1}{2(N+1)} \\ 0 & |x - x_v| > \frac{1}{2(N+1)} \end{cases}, \quad w_u(x) = \delta(x - x_u), \quad x_u = \frac{u}{N+1}$$

则: $[Z_{uv}] [I_v] = [V_u]$ 中

$$Z_{uv} = \langle \mathbf{L}^d \varphi_v, w_u \rangle = \begin{cases} 2(N+1)^2 & u = v \\ -(N+1)^2 & |u - v| = 1 \\ 0 & |u - v| > 1 \end{cases}, \quad V_u = 1 + 4 \left(\frac{u}{N+1} \right)^2$$

结论:

1. 原来不能用的脉冲基和点选配, 可以用了, 扩大了基函数和权函数选择范围, 对于复杂问题十分重要;
2. 与前面的分域基比较, Z_{uv} 完全相同 (方程左右同时扩大了 $(N + 1)$ 倍, V_u 有微小的差别, 但当 N 很大时, 也非常接近.)

6.2.2 扩展算子

一个算子是由一种运算加上一个定义域来确定的, 对于复杂算子, 除了上面所说的近似算子外, 还可以用扩展算子来处理.

在原来的算子的基础上, 构造一种新的运算, 对原来的算子加以扩展, 使得不在原来算子定义域的某些函数在新的算子的定义域内, 从而使原来不能成为基函数的某些函数对于新的算子可以作为基函数. 这种重新构造的运算及其定义域称为原来算子的扩展算子.

★ 注意:

- 1) 扩展算子不得改变原来算子在其定义域内的运算;
- 2) 原来算子是自伴的, 扩展算子也必须是自伴的.

构造扩展算子有二种常用的方式:

- 1) 将原来的算子的定义域加以扩展而不改变未知函数的边界条件. 基函数的选择可以在扩展算子的定义域中进行且满足边界条件;
- 2) 将原来算子作用下未知函数的边界条件加以扩展, 扩展为扩展算子作用下的未知函数的边界条件. 基函数的选择可以不必满足原来算子作用下的未知函数的边界条件而满足扩展算子作用下未知函数的边界条件.

下面以实例予以说明.

例 1 对于算子 $\mathbf{L} = -\frac{d^2}{dx^2}, [0, 1]$

$$\langle \mathbf{L}f, U \rangle = \int_0^1 -U(x) \frac{d^2 f}{dx^2} dx = \int_0^1 \frac{dU}{dx} \cdot \frac{df}{dx} dx - U(x) \frac{df}{dx} \Big|_0^1$$

对于选择 $U(0) = U(1) = 0$ 的函数, 则可以定义扩展算子 \mathbf{L}^e 为:

$$\langle \mathbf{L}^e f, U(x) \rangle = \int_0^1 \frac{dU}{dx} \cdot \frac{df}{dx} dx$$

显然

- 1) \mathbf{L}^e 没有改变 \mathbf{L} 在定义域中的运算;
- 2) \mathbf{L} 要求二阶导函数存在, 而 \mathbf{L}^e 只需要一阶导函数存在. 放宽了对基函数选择的限制, 如此

时可以选择脉冲函数为基函数.

$$\varphi_v = P(x - x_v) = \begin{cases} 1 & |x - x_v| \leq \frac{1}{2(N+1)} \\ 0 & |x - x_v| > \frac{1}{2(N+1)} \end{cases}$$

$$w_u = T(x - x_u) = \begin{cases} 1 - (N+1)|x - x_u| & |x - x_u| \leq \frac{1}{(N+1)} \\ 0 & |x - x_u| > \frac{1}{(N+1)} \end{cases}$$

得到

$$Z_{uv} = \begin{cases} 2(N+1) & u = v \\ -(N+1) & |u - v| = 1, \\ 0 & |u - v| > 1 \end{cases}, \quad V_u = \frac{1}{N+1} \left[1 + \frac{4u^2 + \frac{2}{3}}{(N+1)^2} \right]$$

可见与原来的结论 Z 矩阵完全相同, V 向量有微小的差别, 但当 N 趋向于无穷时也趋向于一致.

例 2 在前述 $\langle \mathbf{L}f, U \rangle$ 中, 如不满足边界条件, 将出现边界项, 可以定义 \mathbf{L}^e 为:

$$\langle \mathbf{L}^e f(x), U(x) \rangle = \int_0^1 U(x) \mathbf{L}f(x) dx - \left[f(x) \frac{dU(x)}{dx} \right]_0^1$$

注意: 此时即使不满足边界条件, \mathbf{L}^e 也时自伴的, 即 $\langle \mathbf{L}^e f, U \rangle = \langle f, \mathbf{L}^e U \rangle$.

此时基函数不必满足边界条件, 如全域基、Галёркин 法: $\varphi_v(x) = x^v, w_u(x) = x^u$, 则:

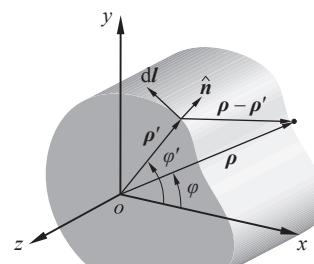
$$Z_{uv} = \int_0^1 x^u \left[-\frac{d^2(x^v)}{dx^2} \right] dx - \left[x^v \frac{d(x^u)}{dx} \right]_0^1 = \frac{u+v-uv-u^2v^2}{u+v+1}$$

$$V_u = \langle 1 + 4x^2, w_u \rangle = \int_0^1 (4x^2 + 1)x^u dx = \frac{5u+7}{(u+1)(u+3)}$$

当 $N \geq 4$ 时, 同样得到精确解: $U(x) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4$.

6.3 二维散射场的矩量法解

考虑一任意截面的无限长柱形导体, 当外界电磁波照射该导体时, 在导体表面会激励起感应电流, 该感应电流又会产生散射场. 当外界入射场只有轴向电场时, 产生 TM 场, 反之, 只有轴向磁场时产生 TE 场, 任何电磁场可以表示为一个 TM 场和一个 TE 场之和, 即:



<http://www.jlao.net/emnotes>

1) 对 TM 场: E_z, H_ρ, H_φ

2) 对 TE 场: H_z, E_ρ, E_φ

6.3.1 二维电磁场的 Green 函数

无源区域的 Maxwell 方程为:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \end{cases}$$

对于 TM 场:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\varphi}{\partial\varphi} = j\omega\epsilon E_z \\ -j\omega\mu H_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial\varphi} \\ -j\omega\mu H_\varphi = -\frac{\partial E_z}{\partial\rho} \end{cases}$$

设 TM 场是由放置在原点的沿 z 向的轴向线电流产生的, 强度为 I , 由于对称性, $\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$, 所以:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\varphi) = j\omega\epsilon E_z \\ j\omega\mu H_\varphi = \frac{\partial E_z}{\partial\rho} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial E_z}{\partial\rho} \right) + (k\rho)^2 E_z = 0 \quad (6.20)$$

上式为零阶 Bessel 方程, 其解为 Bessel 函数、Neumann 函数或者 Hankel 函数, 由辐射条件

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial E_z}{\partial\rho} + jk E_z \right) = 0$$

其解应该为第二类 Hankel 函数, 即 $E_z = C H_0^{(2)}(k\rho)$, 式中 C 待定常数. 又注意到 $H_0^{(2)'}(x) = -H_1^{(2)}(x)$, 于是

$$H_\varphi = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial\rho} = \frac{C}{j\omega\mu_0} \frac{H_0^{(2)}(k\rho)}{\partial\rho} = -\frac{Ck}{j\omega\mu_0} H_1^{(2)}(k\rho)$$

由安培环路定律,

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

于是

$$H_\varphi = \frac{1}{2\pi\rho} I \quad (6.21)$$

当 $k\rho \ll 1$ 时, 由 Hankel 函数的小宗量近似,

$$H_1^{(2)}(k\rho) \approx j \frac{2}{\pi k\rho}$$

式 (6.21) 变为

$$-\frac{Ck}{j\omega\mu_0} j \frac{2}{\pi k\rho} = \frac{1}{2\pi\rho} I$$

故

$$C = -\frac{I}{4}\omega\mu_0 = -\frac{k\eta I}{4}$$

于是

$$E_z = -\frac{k\eta}{4} I H_0^{(2)}(k\rho) \quad (6.22)$$

对于放在空间任意位置的单位源, 有:

$$G_e = -\frac{k\eta}{4} H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|)$$

有了 Green 函数, 就可以写出 TM 场的一般表达式

$$E_z = -\frac{k\eta}{4} \int_{l'} J_{sz}(\rho') H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dl' \quad (6.23)$$

或

$$E_z = -\frac{k\eta}{4} \iint_{S'} J_{vz}(\rho') H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) ds' \quad (6.24)$$

对于二维 TE 场, 同样可以导出 Green 函数为:

$$G_m = -\frac{k}{4\eta} H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) \quad (6.25)$$

与 TM 场不同, 此时源分布是等效磁流源 M_Z .

6.3.2 导体柱体 TM 场的矩量法解

现在考虑一种外加电场 E_z^i 照射柱体的情况.

I. 等效原理

由等效原理, 一激励源附近存在一个理想导体时空间总的电磁场等于导体不存在时的激励场加上感应电流产生的散射场, 即:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s$$

而且总的电磁场满足 Maxwell 方程及各类边界条件.

II. 电积分方程 (EFIE)

对于 TM 场而言, 在导体表面 $E_z|_C = (E_z^i + E_z^s)|_C = 0$. 对于 J_z 而言, 有:

$$E_z^s|_c = -\frac{k\eta}{4} \int_c J_z(\rho') H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dl', \quad \rho' \in C, \rho \in C$$

所以

$$E_z^i|_c = \frac{k\eta}{4} \int_c J_z(\rho') H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dl', \quad \rho' \in C, \rho \in C \quad (6.26)$$

这就是关于 J_z 的积分方程, 写成算子方程的形式为:

$$\mathbf{L}J_z = E_z^i$$

其中

$$\mathbf{L} = \frac{k\eta}{4} \int_c H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dl'$$

III. 矩量法解

令 $J_z = \sum_{n=1}^N C_n J_n$, 将导体分成 n 段, 选取脉冲基函数:

$$J_n = \begin{cases} 1, & \rho \in \Delta C_n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

采用点配置法, 即 $w_m = \delta(x - x_m, y - y_m)$

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \langle w_m, \mathbf{L}J_n \rangle = \int_C \delta(x - x_m, y - y_m) dl \left\{ \frac{k\eta}{4} \int_{\Delta C_n} H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) dl' \right\} \\ &= \frac{k\eta}{4} \int_{\Delta C_n} H_0^{(2)} \left[k \sqrt{(x_m - x')^2 + (y_m - y')^2} \right] dl' \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$V_m = \langle w_m, E_z^i \rangle = E_z^i(x_m, y_m) \quad (6.28)$$

形式解

$$J_z = [J_n]^T [C_n] = [J_n]^T [Z_{mn}]^{-1} [V_m] \quad (6.29)$$

在广义阻抗矩阵元素的积分中, 由于 Hankel 函数的存在而不存在解析解, 最粗糙但最直接的近似认为每一个分段很小, 而且在分段上均匀分布, 即:

$$m \neq n \text{ 时}, \quad Z_{mn} = \frac{k\eta}{4} \Delta C_n H_0^{(2)} \left[k \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} \right]$$

但 $m = n$ 时, Hankel 函数有一个可去奇点, 因此必须以解析近似来计算积分.

首先将每一个分段以一段直线代替, 其次同样地认为分段很小, 则:

$$x \ll 1 \text{ 时}, \quad H_0^{(2)}(x) \approx 1 - j \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{\gamma x}{2} \right), \quad \gamma = 1.781078 \dots \quad (\text{Euler Number})$$

于是

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \frac{k\eta}{4} \int_{\Delta C_n} \left\{ 1 - j \frac{2}{\pi} \ln \left[\frac{\gamma k}{2} \sqrt{(x_n - x')^2 + (y_n - y')^2} \right] \right\} dl' \\ &\approx \frac{k\eta}{4} \int_{\Delta C_n} \left\{ 1 - j \frac{2}{\pi} \ln \left[\frac{\gamma k}{2} |\alpha| \right] \right\} d\alpha \\ &\approx \frac{k\eta}{4} \Delta C_n \left\{ 1 - j \frac{2}{\pi} \ln \left[\frac{\gamma k}{4e} \Delta C_n \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.30)$$

上述积分中计及了:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0, \quad \int \ln x dx = x \ln x - x$$

在上述系数矩阵 Z_{mn} 的积分中, 更精确的措施是: Z_{mn} ($m \neq n$) 中被积函数泰勒展开, 取主项积分, 或将矩形脉冲改为分段线性基等.

IV. 散射场计算

在计算得出电流分布后即可计算散射场

$$\begin{aligned} E_z^s &\approx -\frac{k\eta}{4} \sum_n C_n \int_{\Delta C_n} H_0^{(2)} \left[k \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \right] dl' \\ &\approx -\frac{k\eta}{4} \sum_n C_n \Delta C_n H_0^{(2)} \left[k \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} \right] \\ &= -\frac{k\eta}{4} \sum_n C_n \Delta C_n H_0^{(2)}(k |\rho - \rho_n|) \end{aligned} \quad (6.31)$$

上式适用于近区场和远区场, (x, y) 或 ρ 是场点坐标.

对于远区场, $x \gg 1$,

$$H_0^{(2)'}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-jx + j\frac{\pi}{4}}$$

故

$$H_0^{(2)}(k |\rho - \rho_n|) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k |\rho - \rho_n|}} e^{-jk|\rho - \rho_n| + j\frac{\pi}{4}}$$

在远区场的振幅中, $|\rho - \rho_n| \approx \rho$. 在远区场的相位中, $|\rho - \rho_n| \approx \rho - \rho_n \cdot \hat{\rho}$. 所以

$$H_0^{(2)}(k |\rho - \rho_n|) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-jk\rho} e^{jk(x_n \cos \varphi + y_n \sin \varphi)} \quad (6.32)$$

$$E_z^s \approx k\eta \sqrt{\frac{1}{8\pi k\rho}} e^{-j(k\rho + \frac{3\pi}{4})} \sum_n C_n \Delta C_n e^{jk(x_n \cos \varphi + y_n \sin \varphi)} \quad (6.33)$$

令

$$\begin{bmatrix} V_n^s \\ \vdots \\ V_N^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta C_1 e^{jk(x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi)} \\ \vdots \\ \Delta C_N e^{jk(x_N \cos \varphi + y_N \sin \varphi)} \end{bmatrix}$$

于是有近似

$$E_z^s \approx k\eta \sqrt{\frac{1}{8\pi k\rho}} e^{-j(k\rho + \frac{3\pi}{4})} [V_n^s]^T [Y_{mn}] [V_m^i] \quad (6.34)$$

式中, $[V_n^s]$ 为测量矩阵或接收矩阵. $[V_m^i]$ 为激励矩阵, $[Y_{mn}] = [Z_{mn}]^{-1}$ 为广义导纳矩阵.

6.3.3 应用实例

I. 平面波照射时的散射截面

当入射波为 z 向极化的均匀平面波时, 入射场为:

$$E^i = E_z^i \hat{a}_z = \hat{a}_z e^{-jk \cdot \rho}$$

式中, $\mathbf{k} = -k \cos \varphi^i \hat{a}_x - k \sin \varphi^i \hat{a}_y$, $\rho = x \hat{a}_x + y \hat{a}_y$, 故

$$E_z^i = e^{-jk(x \cos \varphi^i + y \sin \varphi^i)}$$

定义散射截面 σ , 为这样一个宽度(在三维问题中为面积), 当它上面的入射波携带的功率再全向辐射时, 足以在给定方向产生相同的散射功率密度, 即:

$$\sigma(\varphi) = 2\pi\rho \left| \frac{E^s(\varphi)}{E^i} \right|^2 \rightarrow |E^s(\varphi)|^2 = \frac{|E^i|^2}{2\pi\rho} \sigma(\varphi)$$

$E^s(\varphi)$ 为 J_z 产生的远区场.

设入射场振幅为 1, 即 $|E_z^i|^2 = E_z^i \cdot E_z^{i*} = 1$, 有

$$\sigma(\varphi^i, \varphi^s) = 2\pi\rho |E^s(\varphi^s)|^2 = \frac{k\eta^2}{4} |[V_m^s] [Y_{mn}] [V_m^i]|^2 \quad (6.35)$$

其中 φ^i 为入射角, φ^s 为散射角.

当 $\varphi^i = \varphi^s$ 时, σ 表示发射与接收在同一方向上的散射截面, 称为后向散射截面;

当 $\varphi^i \neq \varphi^s$ 时, σ 表示发射与接收在不同方向上的散射截面, 称为前向散射截面.

图 6.8 显示了平面 TM 波照射在半径 $r = \frac{\lambda}{2}$ 的导电圆柱体上时的表面电流分布的幅度和相位.

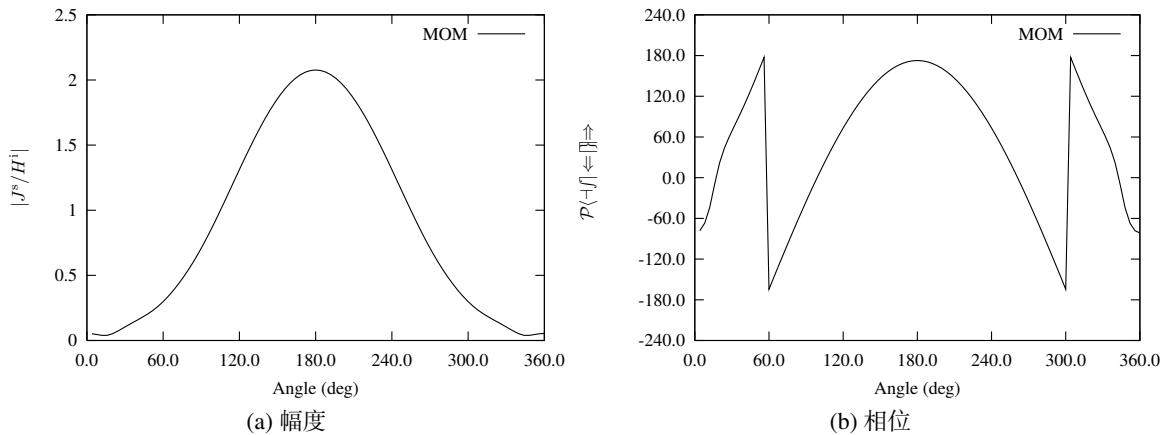


图 6.8 表面电流分布

II. 缝隙辐射

设在一无限长均匀截面的理想导体柱壁上有一个纵向缝隙，则在导体表面电场切向分量为零而磁场切向分量不为零，存在有面电流分布；而在缝隙开口同时存在电、磁场切向分量，存在等效面电流和等效面磁流，故问题可等效为存在面电流的封闭导体和一片存在于缝隙位置的等效面磁流，缝隙的辐射场可以看作是由等效面磁流激励时导体的散射场，即：

$$\mathbf{M}^s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}$$

假设已知口面的 z 向极化电场分布为：

$$E_z^i = \cos(ks)$$

s 是从开口中心处逆时针度量的口面轮廓长度，则：

$$V_m^i = \begin{cases} \cos(ks_m) & s_m \in \text{Slot} \\ 0 & \text{others} \end{cases} \quad (6.36)$$

辐射场为：

$$E_z^s = -\frac{j\omega\mu e^{-jk\rho}}{\sqrt{8\pi jk\rho}} [V_n^s]^T [Y_{mn}] [V_m^i] \quad (6.37)$$

6.4 线形天线中的矩量法解

6.4.1 线天线的积分方程

I. Pocklington 方程

线天线长度为 L , 半径为 a , 且 $L \gg a, a \ll \lambda$, 在柱坐标下略去径向电流和周向电流, 且轴向电流随周向也无变化, 故可以用轴线上电流 I 来代替 z 方向的电流, 即: $\mathbf{J} \rightarrow J_z, I(z) = 2\pi a J_z$, 即 \mathbf{J} 只有 J_z 分量, \mathbf{A} 只有 A_z 分量, 仅仅考虑导体表面上切向电场时也只需要考虑 E_z 分量, 故:

$$\begin{cases} E_z^s = -j\omega A_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial z} = -j\omega \mu \epsilon \varphi \end{cases} \quad (6.38)$$

于是有

$$E_z^s = \frac{1}{j\omega \mu \epsilon} \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right] \quad (6.39)$$

将滞后位表达式代入上式, 得:

$$E_z^s = \frac{1}{j\omega \epsilon} \iiint_{v'} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + k^2 G \right) J_z dv' \quad (6.40)$$

因为电流位于轴线上, E_z 在圆柱表面, 所以 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$, 则

$$G(z, z') = \frac{e^{-jk\sqrt{a^2 + (z - z')^2}}}{4\pi \sqrt{a^2 + (z - z')^2}} \quad (6.41)$$

$$E_z^s = \frac{1}{j\omega \epsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z^2} + k^2 G(z, z') \right] I(z') dz' \quad (6.42)$$

在导体表面, 边界条件为: $(E_z^i + E_z^s) = 0$, 于是得到 Pocklington 方程:

$$E_z^i = \frac{j}{\omega \epsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z^2} + k^2 G(z, z') \right] I(z') dz' \quad (6.43)$$

写成算子方程形式则为:

$$\mathbf{L}[I(z')] = E_z^i, \quad \text{其中} \quad \mathbf{L} = \frac{j}{\omega \epsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z^2} + k^2 G(z, z') \right] dz' \quad (6.44)$$

Pocklington 方程的优点在于不受 E_z^i 形式的限制 (相对于 Hällén 方程而言).

II. Hällén 方程

在导体表面

$$\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z = -j\omega\mu\varepsilon E_z^i \quad (6.45)$$

若在馈电处接入一个冲激电压(理想情况, 为极薄片电压的理想化), 即

$$E_z^i = V\delta(z) = \begin{cases} V & z = 0 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

则

$$\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z = -j\omega\mu\varepsilon V\delta(z)$$

其解为齐次方程通解与非齐次方程特解之和

$$\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z = 0 \rightarrow A'_z = B \cos kz \quad (6.46)$$

$$\frac{d^2 G}{dz^2} + k^2 G = -4\pi V\delta(z) \rightarrow G = -\frac{2\pi j}{k} e^{-jk|z|} \quad (6.47)$$

所以 A_z 的特解为

$$A'' = \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{V}{2} e^{-jk|z|} \quad (6.48)$$

则通解为

$$A = \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{V}{2} e^{-jk|z|} + B \cos kz$$

于是得到于 Hällén 方程:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' = \frac{1}{\eta} \frac{V}{2} e^{-jk|z|} + C \cos kz \quad (6.49a)$$

或

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' = -\frac{j}{\eta} \frac{V}{2} \sin k|z| + C' \cos kz \quad (6.49b)$$

式中 $R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$.

Hällén 方程用途较窄, 因为它限定了入射场是与冲激电压成正比.

6.4.2 矩量法解

I. Pocklington 方程

令 $r = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$, 则有

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{e^{-jk r}}{4\pi r^5} [(1 + jkr)(2r^2 - 3a^2) - k^2 r^2 (z - z')^2] \quad (6.50)$$

Pocklington 方程化为

$$E_z^i = \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I(z') G_1(z, z') dz' \quad (6.51)$$

式中,

$$G_1(z, z') = \frac{e^{-jk r}}{r^5} [(1 + jkr)(2r^2 - 3a^2) + k^2 a^2 r^2]$$

在 Pocklington 方程的求解中, 充分体现了矩量法解中基函数与权函数选择的重要性, 事实上, 如用脉冲函数和点选配很难获得正确解 (主要是积分核函数随 z' 变化太快: $\sim r^{-5}$). 一般地, 可用整域余弦函数展开, 收敛较快, 即:

$$\tilde{I}(z') = \sum_{n=1}^N I_n \cos \frac{(2n-1)\pi z'}{2}, \quad -\frac{L}{2} \leq z' \leq \frac{L}{2} \quad (6.52)$$

注意, $\tilde{I}(z')$ 满足端点边界条件, 若用点选配, 则:

$$w_m(z) = \delta(z - z_m) \quad (6.53a)$$

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \langle w_m, \mathbf{L}\varphi_n \rangle = \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \delta(z - z_m) dz \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} G_1(z, z') \cos \frac{(2n-1)\pi z'}{L} dz' \\ &= \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} G_1(z_m, z') \cos \frac{(2n-1)\pi z'}{L} dz' \end{aligned} \quad (6.53b)$$

$$V_m = \langle w_m, E_z^i \rangle = E_z^i(z_m) \quad (6.53c)$$

形式解为

$$[I_n] = [Z_{mn}]^{-1} [V_m]$$

由于考虑了振子的半径, Z_{mn} 的积分中不存在奇点.

II. Hällén 方程

Hällén 方程的矩量法解可以用分域基也可以用全域基, 但必须注意, 等式右边包含了一个未知量, 权函数必须比基函数数目多一个.

假设 $V = 1$, Hällén 方程重写为:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I(z') G(z, z') dz' = -\frac{j}{2\eta} \sin k|z| + C \cos kz \quad (6.54)$$

其中

$$G(z, z') = \frac{e^{-jk|z-z'|}}{4\pi r}, \quad r = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}, \quad C \text{ 未知}$$

1. 采用脉冲基、点选配

$$\varphi_n(z') = \begin{cases} 1 & z' \in \Delta z_n \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

则 $I(z') \approx \sum_{n=1}^N C_n \varphi_n(z')$, N 为分段单元数.

权函数: $w_m(z) = \delta(z - z_m)$, $m = 1, 2, \dots, (N+1)$, 则

$$Z_{mn} = \langle w_m, \mathbf{L}\varphi_n \rangle = \int_{\Delta z_n} G(z_m, z') dz' \quad (6.55a)$$

$$V_m = \langle w_m, f(z) \rangle = f(z_m) = C \cos kz_m - \frac{j}{2\eta} \sin kz_m \quad (6.55b)$$

可得矩阵方程为:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{1N} & \cdots & \cos kz_1 \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{2N} & \cdots & \cos kz_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{NN} & \cdots & \cos kz_N \\ Z_{(N+1)1} & Z_{(N+1)2} & Z_{(N+1)N} & \cdots & \cos kz_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \\ C_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ \vdots \\ V'_N \\ V'_{N+1} \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

式中 $V'_m = -j\frac{1}{2\eta} \sin kz_m$.

匹配点可选在每一段的中点, 并在合适的地方增加一点, 如整个天线的中点. 则

$$z = -\frac{l}{2}, -\frac{l}{2} + \Delta z, \dots, 0, \dots, \frac{l}{2} - \Delta z, \frac{l}{2}$$

求 Z_{mn} 的积分可以用解析方法加以近似. 由于

$$\frac{e^{-jk|z-z'|}}{r_m} = \Re + j\Im = \frac{\cos kr_m}{r_m} - j \frac{\sin kr_m}{r_m}$$

其中虚部是 z' 的光滑函数, 直接利用矩形积分近似, 有

$$\int_{z_n-\frac{\Delta z}{2}}^{z_n+\frac{\Delta z}{2}} \Im(z') dz' \approx -\frac{\Delta z \sin k [a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}}}{[a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (6.57)$$

这一近似在 $\Delta z < 0.05\lambda$ 时都是比较准确的. 而实部在 $z' \rightarrow z_m$ 时变化较大, 所以

$$\begin{aligned} \int_{z_n-\frac{\Delta z}{2}}^{z_n+\frac{\Delta z}{2}} \Re(z') dz' &= \int_{z_n-\frac{\Delta z}{2}}^{z_n+\frac{\Delta z}{2}} \frac{\cos k [a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}}}{[a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}}} dz' \\ &\approx \cos k [a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}} \int_{z_n-\frac{\Delta z}{2}}^{z_n+\frac{\Delta z}{2}} \frac{dz'}{[a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \cos k [a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}} \ln \left[\frac{z_m + \Delta z/2 - z_n + [a^2 + (z_m - z_n + \Delta z/2)^2]^{\frac{1}{2}}}{z_m - \Delta z/2 - z_n + [a^2 + (z_m - z_n - \Delta z/2)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (6.58)$$

故

$$\begin{aligned} Z_{mn} \approx \frac{1}{4\pi} \cos k [a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}} \ln \left[\frac{z_m + \Delta z/2 - z_n + [a^2 + (z_m - z_n + \Delta z/2)^2]^{\frac{1}{2}}}{z_m - \Delta z/2 - z_n + [a^2 + (z_m - z_n - \Delta z/2)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \\ - j \frac{\Delta z \sin k [a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}}}{4\pi [a^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (6.59)$$

图 6.9 是利用上述分域基方法计算半波振子和全波振子电流分布的算例.

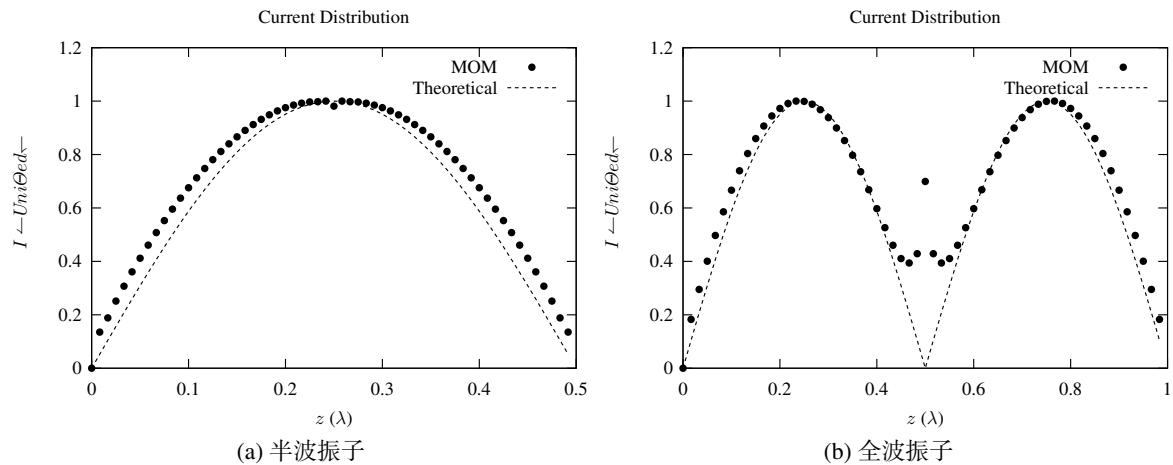


图 6.9 对称振子的矩量法解

2. 采用全域基、点选配

$$\varphi_n(z') = \sin\left[\frac{n\pi}{2L}(L - z')\right], \quad w_m(z) = \delta(z - z_m)$$

z_m 可选为均匀分布, 注意比基函数多一个, 如 $z_m = \frac{2m-1}{2N+1}L, m = 1, 2, \dots, N, N+1$. 则

$$Z_{mn} = \langle w_m, \mathbf{L}\varphi_n \rangle = \int_0^L G(z_m, z') \sin \frac{(L-z')n\pi}{2L} dz' \quad (6.60)$$

所得矩阵方程形式与前面相同.

两种方法的比较

分域基: 每一个积分形式简单, 只需要在每一个分段上进行, 但项数多;

全域基: 收敛快, 所需要的展开项数少, 但每一个积分都必须在整个区间进行.

一般全域基只需要 2 ~ 3 项就可以, 而分域基 20 ~ 30 段也很正常, 视 L 的大小而定.

6.4.3 线形天线阵列的矩量法解

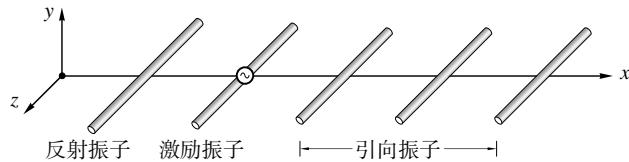


图 6.10 八木天线

以八木天线为例, 如图 6.10 所示, 由一根反射振子、一根有源振子和若干根引向振子组成, 此时在所有这些导体表面, Pocklington 方程仍然有效, 对于整个阵列是分域基对于每一个振子是全域基

$$I = \sum_{q=1}^{D+2} \sum_{n=1}^N I_{nq} \cos(2n-1) \frac{\pi z'}{L}$$

设在每一个单元上电流都用 n 个基函数展开, 则矩阵方程形式为:

$$\sum_{q=1}^{D+2} \sum_{n=1}^N Z_{mn} I_{nq} = E_{z_m}^i |_t, \quad m = 1, 2, \dots, N(D+2)$$

式中 Z_{mn} 与前面相同, 即:

$$Z_{mn} = \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} G_1(z_m, z') \cos \frac{\pi z'}{L} (2n-1) dz'$$

其中 m 应在所有单元上, z_m 为匹配点坐标, z' 表示电流元(源点)坐标, 两者可以在同一振子上. 在不同的振子上时, 可简单地认为电流源与匹配点(场点)都在振子轴线上.

在不同的振子上, 代数方程组分别为:

引向振子:

$$\sum_{q=1}^{D+2} \sum_{n=1}^N Z_{mn} I_{nq} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N \times D$$

反射振子:

$$\sum_{q=1}^{D+2} \sum_{n=1}^N Z_{mn} I_{nq} = 0, \quad m = N \times D + 1, \dots, N \times (D + 1)$$

有源振子:

$$\sum_{q=1}^{D+2} \sum_{n=1}^N Z_{mn} I_{nq} = \begin{cases} \frac{V_0}{\Delta l}, & m = N \times (D + 1) + 1 \\ 0, & m \neq N \times (D + 1) + 1 \end{cases}, \quad m = N \times (D + 1) + 1, \dots, N \times (D + 2)$$

电流分布也可以用分段正弦基, 具体解法见《电磁场数值分析方法》, 刘圣民著.

6.5 任意弯曲细线天线的矩量法解

6.5.1 电流分布的近似算子方程

对于任意形状的细线振子天线, 由于 $a \ll \lambda, a \ll l$, 可以假设:

1. 电流沿导线轴线流动, 体电流密度 \mathbf{J} 可用线电流 I 近似;
2. 只存在沿导线轴向方向流动的电流 I_l , 可忽略导线周向 I_φ 和径向 I_ρ 分量;
3. 线上电流仅为长度 l 的函数, 与 φ, ρ 无关, 即: $\mathbf{I} = I(l)\hat{\mathbf{l}}$.

于是得到散射场(在导体表面)

$$\mathbf{E}^s \cdot \hat{\mathbf{l}} = -j\omega \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{l}} - \nabla \varphi \cdot \hat{\mathbf{l}}$$

由导体表面边界条件可得

$$\mathbf{E}^i \cdot \hat{\mathbf{l}} = j\omega \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{l}} + \nabla \varphi \cdot \hat{\mathbf{l}}$$

由假设 1、2,

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mu \iiint_{v'} \mathbf{J} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dv' \rightarrow \mathbf{A} = \mu \int_l \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \mathbf{I}(l') dl' \\ \varphi = \frac{1}{\epsilon} \iiint_{v'} \rho \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dv' \rightarrow \varphi = \frac{-1}{j\omega \epsilon} \int_l \nabla' \cdot \mathbf{I}(l') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl' \end{cases}$$

由假设 3,

$$\nabla \varphi \cdot \hat{\mathbf{l}} = \frac{\partial \varphi}{\partial l}, \quad \nabla' \cdot \mathbf{I}(l') = \frac{\partial I(l')}{\partial l'}$$

将上述诸式代入边界条件式可得电流分布的算子方程:

$$\mathbf{L}(\mathbf{I}) = \mathbf{E}^i(l) \quad (6.61)$$

其中

$$\mathbf{L} = j\omega\mu \int_l \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl' \hat{\mathbf{l}} \cdot - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial}{\partial l} \int_l \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl' \hat{\mathbf{l}} \cdot \frac{\partial}{\partial l'}$$

这是一个微分—积分方程, 对于直线振子

$$\hat{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial l'} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

则上式可以化为 Pocklington 方程.

为了简化计算, 采用近似算子, 将其中的微分用有限差分代替, 则方程为:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i \cdot \hat{\mathbf{l}} &= j\omega\mu \int_l G \hat{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{I}(l') dl' - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{\Delta l} \left\{ \int_l \frac{1}{\Delta l'} \left[I\left(l' + \frac{\Delta l'}{2}\right) - I\left(l' - \frac{\Delta l'}{2}\right) \right] G dl' \right\}_{l+\frac{\Delta l}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{\Delta l} \left\{ \int_l \frac{1}{\Delta l'} \left[I\left(l' + \frac{\Delta l'}{2}\right) - I\left(l' - \frac{\Delta l'}{2}\right) \right] G dl' \right\}_{l-\frac{\Delta l}{2}} \end{aligned} \quad (6.62)$$

6.5.2 电流分布的矩量法解

采用分域基、点选配求解上述近似算子方程. 将弯曲振子分成 $N + 1$ 段, 每段长度为 Δl_n , 主要是考虑天线末端边界条件(电流为零), 在两端各留出两个半段. 设分段标点为 $1^+ = 2^-, 2^+ = 3^-, \dots$, 如图 6.11 所示, 则整个区间:

$$l = \sum_{n=1}^{N+1} \Delta l_n^-$$

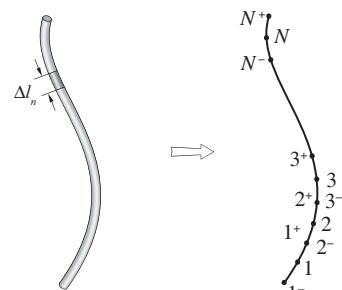


图 6.11 导线的离散

Δl_n^- 是 Δl_n 沿导线负方向移动半个区间的长度, 在近似算子中, $\Delta l_n^- \sim \Delta l'_n$, 所以

$$I_n \sim I\left(l' + \frac{\Delta l'}{2}\right); \quad I_{n-1} \sim I\left(l' - \frac{\Delta l'}{2}\right)$$

基函数为矩形脉冲,

$$\varphi_n(z') = \begin{cases} 1 & z' \in \Delta l_n \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则

$$I(l') = \sum_{n=1}^N I_n \varphi_n \Delta \hat{l}_n$$

式中 $\Delta \hat{l}_n$ 是 Δl_n 的单位矢量,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i \cdot \hat{l} &= j\omega\mu \int_l G \hat{l} \cdot \mathbf{I}(l') dl' - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{\Delta l} \left[\sum_{n=1}^{N+1} \int_{\Delta l_n^-} \frac{1}{\Delta l_n^-} (I_n - I_{n-1}) G dl' \right]_{l+\frac{\Delta l}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{\Delta l} \left[\sum_{n=1}^{N+1} \int_{\Delta l_n^-} \frac{1}{\Delta l_n^-} (I_n - I_{n-1}) G dl' \right]_{l-\frac{\Delta l}{2}} \end{aligned} \quad (6.63)$$

将 Δl_n 沿轴向正向移动半个分区间的子区间, 记为 Δl_n^+ , 记及 n^- 与 $(n-1)^+$ 重合, 则有:
 $\Delta l_n^- = \Delta l_{n-1}^+$, 计及 $I_0 = I_{N+1} = 0$, 可得:

$$\sum_{n=1}^{N+1} \int_{\Delta l_n^-} \frac{1}{\Delta l_n^-} [I_n - I_{n-1}] G dl' = \sum_{n=1}^N I_n \left[\int_{\Delta l_n^+} \frac{-1}{\Delta l_n^+} G dl' + \int_{\Delta l_n^-} \frac{1}{\Delta l_n^-} G dl' \right] \quad (6.64)$$

近似算子方程化为:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i \cdot \hat{l} &= \sum_{n=1}^N I_n \left\{ j\omega\mu \int_{\Delta l_n} \Delta \hat{l}_n \cdot \hat{l} G dl' + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{\Delta l} \left[\left(\frac{1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} G dl' - \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} G dl' \right)_{l+\frac{\Delta l}{2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{-1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} G dl' + \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} G dl' \right)_{l-\frac{\Delta l}{2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.65)$$

上式中 I_n 之后相当于矩量法中 $\mathbf{L}\varphi_n$.

点选配, 取权函数 $w_m(z) = \delta(z-z_m)$, 计及 $l_m + \frac{\Delta l_m}{2} = \Delta l_m^+, l_m - \frac{\Delta l_m}{2} = \Delta l_m^-$, 有 $\hat{l}_m = \Delta \hat{l}_m$,
 则:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i \cdot \Delta \hat{l}_m &= \sum_{n=1}^N I_n \left\{ j\omega\mu \int_{\Delta l_n} \Delta \hat{l}_n \cdot \Delta \hat{l}_m G(m) dl' + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{\Delta l_m} \left[\frac{1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} G(m^+) dl' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} G(m^+) dl' - \frac{1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} G(m^-) dl' + \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} G(m^-) dl' \right] \right\}, \quad m = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (6.66)$$

式中 $G(m)$, $G(m^+)$, $G(m^-)$ 分别为场源 dl' 在 m, m^+, m^- 处产生的格林函数. 以 Δl_m 乘以上式左右, 则有:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i \cdot \Delta l_m = & \sum_{n=1}^N I_n \left\{ j\omega\mu \frac{\Delta l_n \cdot \Delta l_m}{\Delta l_n} \int_{\Delta l_n} G(m) dl' + \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\frac{1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} G(m^+) dl' \right. \right. \\ & - \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} G(m^+) dl' - \frac{1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} G(m^-) dl' + \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} G(m^-) dl' \left. \right] \right\} \quad m = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (6.67)$$

写成矩阵形式

$$[Z_{mn}] [I_n] = [V_m]$$

其中

$$V_m = \mathbf{E}^i \cdot \Delta l_m$$

$$Z_{mn} = j\omega\mu\Delta l_n \cdot \Delta l_m \Psi(m, n) + \frac{1}{j\omega\epsilon} [\Psi(m^+, n^+) - \Psi(m^+, n^-) - \Psi(m^-, n^+) + \Psi(m^-, n^-)]$$

如图 6.12 所示, 式中:

$$\begin{aligned} \Psi(m, n) &= \frac{1}{\Delta l_n} \int_{\Delta l_n} \frac{e^{-jk r_{mn}}}{4\pi r_{mn}} dl' \\ \Psi(m^+, n^+) &= \frac{1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} \frac{e^{-jk r_{m^+n^+}}}{4\pi r_{m^+n^+}} dl' \\ \Psi(m^+, n^-) &= \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} \frac{e^{-jk r_{m^+n^-}}}{4\pi r_{m^+n^-}} dl' \\ \Psi(m^-, n^+) &= \frac{1}{\Delta l_n^+} \int_{\Delta l_n^+} \frac{e^{-jk r_{m^-n^+}}}{4\pi r_{m^-n^+}} dl' \\ \Psi(m^-, n^-) &= \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{\Delta l_n^-} \frac{e^{-jk r_{m^-n^-}}}{4\pi r_{m^-n^-}} dl' \end{aligned}$$

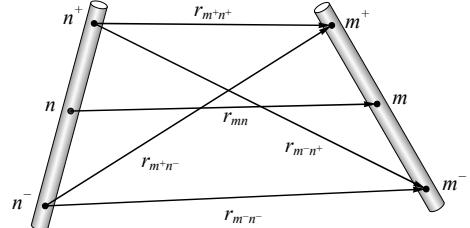


图 6.12 导线的两段

两点说明: (1) 若是直天线, 各区间平行, $\Delta l_m \cdot \Delta l_n = \Delta l_m \Delta l_n$. (2) 上述诸式理论上说对任意形状天线都成立, 但如果弯曲太厉害, 则略去横电流、径向电流及 J_z 沿周向均匀的假设都不成立, 此时上述细线近似就无法适用. 就工程应用而言, 上述诸式及相应的假设在两导线间相距 $3 \sim 4$ 倍半径时才成立.

Z_{mn} 的计算归结为 $\Psi(m, n)$ 等的计算

$$\Psi(m, n) = \frac{1}{4\pi\Delta l_n} \int_{n^-}^{n^+} \frac{e^{-jk r_{mn}}}{r_{mn}} dl' \quad (6.68)$$

它表示第 n 段上的电流在 m 点产生的位, $\Psi(m^+, n^+)$ 等类推. 当分段足够多时, 每一段可以认为是一段直线, 而且 $m \neq n$ 时, $r_{mn} \approx r$, 即 Δl_n 中点至 m 点的距离. $m = n$ 时, 必须将指数项展开为 Maclaurin 级数, 取前二项近似, 可得:

$$\Psi(m, n) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi r} e^{-jk r} \\ \frac{1}{4\pi\alpha} \ln\left(\frac{2\alpha}{a}\right) - j\frac{k}{4\pi} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi r} e^{-jk r}, & m \neq n \\ \frac{1}{2\pi\Delta l_n} \ln\left(\frac{\Delta l_n}{a}\right) - j\frac{k}{4\pi} & m = n \end{cases} \quad (6.69)$$

更精确的计算请见: Pro.IEEE, Vol.55, No.2, Feb.1967, p136

6.5.3 天线参数的计算

I. 输入阻抗

$$[I_n] = [Z_{mn}]^{-1}[V_m] = [Y_{mn}][V_m]$$

故

$$I_i = Y_{ii} V_i$$

其中, I_i 为输入端口分段电流, V_i 为输入端口分段电压, 即激励电压, Y_{ii} 为输入导纳, 于是

$$Y_{ii} = \frac{V_i}{I_i}, \quad Z_{ii} = \frac{1}{Y_{ii}}$$

若激励电压在第 i 段, 输入导纳就是 $[Y_{mn}]$ 的第 i 个对角元.

II. 天线辐射场

$$\mathbf{E}^s = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \varphi$$

对于远区场, 有 $A \propto \frac{1}{r}$, $\varphi \propto \frac{1}{r}$, $\nabla \varphi \propto \frac{1}{r^2}$, 故

$$\mathbf{E}^s \approx -j\omega \mathbf{A}$$

又有

$$\mathbf{A} = \mu \int_{l'} \frac{\mathbf{I} e^{-jk r}}{4\pi r} dl' \approx \frac{\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^N I_n \Delta l_n \frac{e^{-jk |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_n|}}{4\pi |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_n|}$$

对于远场:

$$\mathbf{A} \approx \mu \frac{e^{-jk r_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N I_n \Delta l_n e^{jk \cdot \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_n}$$

$$\mathbf{E} \approx -j\omega\mu \frac{e^{-jk r_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N I_n \Delta l_n e^{jk \cdot \mathbf{r}_n}$$

对于 E 面有 $E_\theta = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\theta = -j\omega A \cdot \hat{\mathbf{a}}_\theta$,

对于 H 面有 $E_\varphi = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi = -j\omega A \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi$.

令 $\hat{\mathbf{a}}_p = \hat{\mathbf{a}}_\theta$ 或 $\hat{\mathbf{a}}_\varphi$, 有

$$E_p \approx -j\omega\mu \frac{e^{-jk r_0}}{4\pi r_0} [V_n^p]^T [Y_{mn}] [V_m]$$

于是 V_n^p 类似于平面波的激励电压矩阵,

$$V_n^p = \hat{\mathbf{a}}_p \cdot \Delta l_n e^{jk \cdot \mathbf{r}_n}$$

III. 输入功率

$$P_{in} = \Re \left\{ [V_m]^T [I_n]^* \right\} = \Re \left\{ [V_m]^T [Y_{mn}^*] [V_m^*] \right\}$$

IV. 方向性增益

平均功率流密度为 $\frac{1}{\eta} |E_p(\theta, \varphi)|^2$, $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, 则

$$D = \frac{\frac{1}{\eta} |E_p|^2}{\frac{P_{in}}{4\pi r_0^2}} = \frac{4\pi r_0^2}{\eta} \cdot \frac{|E_p|^2}{P_{in}} = \frac{k^2}{4\pi} \eta \frac{\left| [V_n^p]^T [Y_{mn}] [V_m] \right|^2}{\Re \left\{ [V_m]^T [Y_{mn}^*] [V_m^*] \right\}}$$

6.5.4 应用实例

曲线振子八木天线的最大方向性优化设计 (IEEE Trans. On AP, Vol.31, No.3, May 1983, pp522~525)

讨论三单元曲线振子八木天线, 三根振子的长度相等, 均为波长的 1.5 倍, $L = 1.5\lambda$.

曲线方程为:

$$y = A(1 - \frac{1}{1 + Bx^2}) + C$$

A, B, C 为确定振子形状的参数, 且:

$$\begin{aligned} A &= 0.5A_1(\epsilon - 2)(\epsilon - 3) - A_2(\epsilon - 1)(\epsilon - 3) + 0.5A_3(\epsilon - 1)(\epsilon - 2) \\ B &= 0.5B_1(\epsilon - 2)(\epsilon - 3) - B_2(\epsilon - 1)(\epsilon - 3) + 0.5B_3(\epsilon - 1)(\epsilon - 2) \\ C &= 0.5C_1(\epsilon - 2)(\epsilon - 3) - C_2(\epsilon - 1)(\epsilon - 3) + 0.5C_3(\epsilon - 1)(\epsilon - 2) \end{aligned}$$

$\epsilon = 1, 2, 3$ 分别对应反射振子、有源振子和引向振子.

将原点固定在有源振子中心点上, 相应有: $C_2=0$, 故有八个独立参量. 在前述积分—微分方程中, 积分范围 l 应该包括三根振子, 并对他们统一分段、编号, 如 $3N+3$ 段, 同样可得:

$$[I_n] = [Z_{mn}]^{-1}[V_m] = [Y_{mn}][V_m], \quad n = 1, 2, \dots, 3N + 3$$

其中

$$I_n : \begin{cases} n = 1, 2, \dots, N + 1 & \rightarrow \text{反射振子} \\ n = N + 2, N + 3 \dots, 2N + 2 & \rightarrow \text{激励振子} \\ n = 2N + 3, 2N + 4 \dots, 3N + 3 & \rightarrow \text{引向振子} \end{cases}$$

方向性系数是 A, B, C 的函数

$$D = \frac{\pi}{\lambda^2 \eta} \frac{\left| [V_n^p]^T [Y_{mn}] [V_m] \right|^2}{\Re \left\{ [V_m]^T [Y_{mn}^*] [V_m^*] \right\}}$$

通过改变这些系数, 优化得到 D_{\max} , 是一个多维参量的优化. 每一次优化迭代、搜索, 对应了一次矩量法的求解过程, 工作量十分巨大. 如每一根振子分为 31 段, 对应两端各半段电流为 0, 展开系数为 30 个, 三根共 90 个. 但是注意, 振子形状关于 y 轴对称, 故可以减少一半, 每一次矩量法求解为 $[45 \times 45]$ 阶矩阵, 优化方法也很重要, 可以用可变多面体法或可变容差法, 现在也可用遗传算法.

数值结果:

		$D = 15.103$ (11.8dB)
$L = 1.5\lambda$,	$a = 0.01\lambda$	$Z_{in} = 14.24 + j32.77$
$A_1 = 0.38$,	$B_1 = 20.774$,	$C_1 = -0.162$
$A_2 = 0.395$,	$B_2 = 53.014$,	$C_2 = 0$
$A_3 = 0.364$,	$B_3 = 204.532$,	$C_3 = 0.151$
		3dB-Beamwidth : E -Plane H -Plane
		32° 62°
		Maximum sidelobe: -19.35 dB -14.41 dB
		The Ratio of front - end: -14.67 dB -14.67 dB

6.6 本征值问题的矩量法解

本征值问题的重要性在于:

1. 本征函数可以作为基函数, 使类似问题的矩量法求解中广义阻抗矩阵为对角矩阵;
2. 物理问题的特性参数往往对应于本征值方程的本征值, 如传输线的传播常数、微带天线的谐振频率等.

广义本征方程为 $\mathbf{A}U = \lambda\mathbf{B}U$, 在算子 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的定义域内选择一组基函数 $\{\varphi_n | n = 1, 2, \dots, N\}$, 且令

$$U = \sum_n C_n \varphi_n$$

则算子方程成为

$$\sum_n C_n \mathbf{A} \varphi_n = \lambda \sum_n C_n \mathbf{B} \varphi_n$$

在算子 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的值域内选择一组权函数 $\{w_m | m = 1, 2, \dots, N\}$, 则

$$\sum_n C_n \langle w_m, \mathbf{A} \varphi_n \rangle = \lambda \sum_n C_n \langle w_m, \mathbf{B} \varphi_n \rangle, \quad m = 1, 2, \dots, N$$

写成矩阵形式则有:

$$[a_{mn}][C_n] = \lambda [b_{mn}][C_n]$$

上式为矩阵本征方程, 仅当 $\det |a_{mn} - \lambda b_{mn}| = 0$ 时才有非零解. 上式是关于 λ 的多项式, 其根为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$:

- 1) λ_i 是矩阵方程的本征值, 它逼近算子方程的本征值;
- 2) $[C_n]_1, [C_n]_2, \dots$ 是矩阵方程的本征矢量, 也是本征函数的系数, 即: $\varphi_i^a = [\varphi_n]^T [C_n]_i$, 它逼近算子方程的本征函数.

在矩阵本征方程中,

$$[b_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, \mathbf{B} \varphi_1 \rangle & \langle w_1, \mathbf{B} \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle w_1, \mathbf{B} \varphi_N \rangle \\ \langle w_2, \mathbf{B} \varphi_1 \rangle & \langle w_2, \mathbf{B} \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle w_2, \mathbf{B} \varphi_N \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_N, \mathbf{B} \varphi_1 \rangle & \langle w_N, \mathbf{B} \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle w_N, \mathbf{B} \varphi_N \rangle \end{bmatrix}$$

一般的本征方程为: $\mathbf{A}U = \lambda U$, 相对于广义本征方程中 \mathbf{B} 算子为恒等算子.

1. 即使 \mathbf{B} 为恒等算子, $[b_{mn}]$ 也不是单位矩阵;
2. 大多数求解矩阵算子方程的程序是针对 $[a_{mn}][C_n] = \lambda[C_n]$ 的, 应用他们求解上述本征值问题时必须先处理为 $[b_{mn}]^{-1}[a_{mn}][C_n] = \lambda[C_n]$.

例 本征值问题

$$\begin{cases} -\frac{d^2f}{dx^2} = \lambda f \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

此问题的解析解为:

$$\text{本征值: } \lambda_i = (i\pi)^2, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\text{本征函数: } f_i = \sqrt{2} \sin(i\pi x), \quad i = 1, 2, \dots$$

上述本征函数解中, 已关于 $\langle f, g \rangle = 1$ 归一化. (即求解 $\int_0^1 C^2 \sin^2(i\pi x) dx = 1$, 得 $C = \sqrt{2}$)

矩量法解, 选取基函数和权函数:

$$\varphi_n = x - x^{n+1}, \quad w_n = \varphi_n = x - x^{n+1}$$

则

$$a_{mn} = \langle w_m, \mathbf{L}\varphi_n \rangle = \frac{mn}{m+n+1}$$

$$b_{mn} = \langle w_m, \varphi_n \rangle = \frac{mn(m+n+6)}{3(m+3)(n+3)(m+n+3)}$$

解为:

$$N=1 \quad \lambda_1^{(1)} = 10 \quad f_1^{(1)} = \sqrt{30}(x - x^2)$$

$$N=2 \quad \lambda_1^{(2)} = 10 \quad f_1^{(2)} = f_1^{(1)}$$

$$\lambda_2^{(2)} = 42 \quad f_2^{(2)} = 3\sqrt{210}(x - x^2)$$

...

本征值:

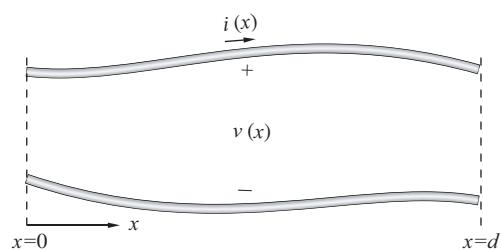
N	$\lambda_1^{(N)}$	$\lambda_2^{(N)}$	$\lambda_3^{(N)}$	$\lambda_4^{(N)}$
1	10.000			
2	10.000	42.000		
3	9.8697	42.000	102.133	
4	9.8697	39.497	102.133	200.583
精确值	9.8696	39.478	88.826	157.914

6.7 非均匀传输线本征值问题

考虑无损耗非均匀传输线如图 6.13, 其单位长度串联电感 $l(x)$, 单位长度并联电容 $c(x)$, 对于时谐问题有:

$$v(x, t) = \Re[V(x)e^{j\omega t}]$$

$$i(x, t) = \Re[I(x)e^{j\omega t}]$$



传输线方程:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} = -j\omega l(x)I \\ \frac{dI}{dx} = -j\omega c(x)V \end{cases}$$

假定 $x = 0, x = d$ 时开路, 边界条件为: $I(0) = I(d) = 0$, 如此即构成本征值问题, 目的是确定传输线上的自然谐振频率 ω_i .

定义矩阵:

$$U = \begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} c(x) & 0 \\ 0 & -l(x) \end{bmatrix}$$

则广义本征值算子方程为: $\mathbf{AU} = j\omega \mathbf{BU}$, 它与边界条件构成本征值问题.

上述算子方程也可以化为二阶微分算子方程, 即传输线电报方程为:

$$\begin{cases} -\frac{d^2I}{dx^2} + \frac{1}{c} \frac{dc}{dx} \frac{dI}{dx} = \omega^2 lc I \\ -\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{1}{l} \frac{dl}{dx} \frac{dv}{dx} = \omega^2 lc V \end{cases}$$

定义: $\mathbf{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{c} \frac{dc}{dx} \frac{d}{dx}$, $\mathbf{B} = l(x)c(x)$, 则广义本征值算子方程为:

$$\mathbf{AI} = \omega^2 \mathbf{BI}$$

此方程的本征值为 ω^2 , 与边界条件构成本征值问题.

6.7.1 二阶微分算子的矩量法解

二阶微分算子: $\mathbf{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{c} \frac{dc}{dx} \frac{d}{dx}$, 对于内积: $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^d f_1(x)f_2(x) dx$, 算子 \mathbf{A} 不是自伴算子, 此时 \mathbf{A} 的伴随算子为

$$\mathbf{A}_a f = -\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left[\frac{f}{c} \frac{dc}{dx} \right]$$

对于 Sturm-Liouville 问题:

$$-\frac{1}{\omega} \frac{d}{dx} \left(p \frac{df}{dx} \right) - qf = \lambda rf$$

定义加权内积

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^d w(x) f_1(x) f_2(x) dx$$

则算子 $\mathbf{A} = -\frac{1}{\omega} \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) - q$ 为自伴算子. 算子 \mathbf{A} 可化为:

$$\mathbf{A}I = -e^{\ln C} \frac{d}{dx} \left(e^{\ln C} \frac{dI}{dx} \right)$$

所以, 在内积定义为

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^d e^{-\ln C(x)} f_1(x) f_2(x) dx$$

时, 算子 \mathbf{A} 为自伴算子. 故矩量法解应该在此内积定义下进行.

例 l 和 c 为常数, 二阶微分本征算子方程为:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 I}{dx^2} = \lambda I, & \lambda = \omega^2 l c \\ I(0) = I(1) = 0 \end{cases}$$

此方程前面解过, 在此以三角形函数为基函数的 Галёркин 法求解.

$$\varphi_n = w_n = \begin{cases} 1 - |x|(N+1), & |x| < \frac{1}{(N+1)} \\ 0 & |x| > \frac{1}{(N+1)} \end{cases}$$

$$a_{mn} = \begin{cases} 2(N+1), & m = n \\ -(N+1), & |m-n| = 1 \\ 0, & |m-n| > 1 \end{cases}$$

$$b_{mn} = \begin{cases} \frac{2}{3(N+1)}, & m = n \\ \frac{1}{6(N+1)}, & |m-n| = 1 \\ 0, & |m-n| > 1 \end{cases}$$

解为

N	$\lambda_1^{(N)}$	$\lambda_2^{(N)}$	$\lambda_3^{(N)}$	$\lambda_4^{(N)}$
1	12.000			
2	10.800	54.000		
3	10.386	48.000	128.868	
4	10.198	44.903	116.118	227.838
精确值	9.870	39.478	88.826	157.914

可以看出, 收敛速度比前面幂级数基函数的 Галёркин 法慢得多, 原因在于幂级数比分段线性函数(三角形函数)性能好.

6.7.2 一阶微分算子的矩量法解

将传输线以 $x_n, (n = 1, 2, \dots, N)$ 等分为 n 段, x_n 向原点方向移动半个区间为 x'_n , 则 V_n 为 x_n 点的线间电压, I_n 为 x_n 点的线上电流. 不失一般性, 令 $d = 1$, 则

$$x_n = \frac{n}{N}, \quad x'_n = \frac{n - \frac{1}{2}}{N}$$

定义脉冲函数:

$$p(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{1}{2}N \\ 0 & |x| > \frac{1}{2}n \end{cases}$$

采用脉冲基函数的 Галёркин 法, 即:

$$\varphi_n^V = w_n^V = \begin{bmatrix} p(x - x_n) \\ 0 \end{bmatrix} \sim atx_n$$

$$\varphi_n^I = w_n^I = \begin{bmatrix} 0 \\ p(x - x'_n) \end{bmatrix} \sim atx'_n$$

定义内积为

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \int_0^1 u_1^\top u_2 \, dx = \int_0^1 [V_1(x)V_2(x) + I_1(x)I_2(x)] \, dx$$

不难验证, 上述定义满足内积定义的要求, 在此内积定义下, 一阶矩阵算子是自伴的.

待求函数 u 展开为:

$$U = \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \alpha_n \varphi_n^V \\ \sum \beta_n \varphi_n^I \end{bmatrix}$$

算子方程为:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum \alpha_n \varphi_n^V \\ \sum \beta_n \varphi_n^I \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} c(x) & 0 \\ 0 & -l(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum \alpha_n \varphi_n^V \\ \sum \beta_n \varphi_n^I \end{bmatrix}$$

用 w_n^V 和 w_n^I 分别对上式求加权内积, 得矩阵形式方程为:

$$[a_{mn}] [e_n] = j\omega [b_{mn}] [e_n] \quad (6.70)$$

$$[e_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N+1}]^T$$

$$[b_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_m^V, \mathbf{B} \varphi_n^V \rangle & \langle w_m^V, \mathbf{B} \varphi_n^I \rangle \\ \langle w_m^I, \mathbf{B} \varphi_n^V \rangle & \langle w_m^I, \mathbf{B} \varphi_n^I \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & 0 \\ 0 & -[L] \end{bmatrix}$$

$$[a_{mn}] = \begin{bmatrix} 0 & \Delta_I \\ -\Delta_V & 0 \end{bmatrix}$$

式中:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_N \end{bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_N \end{bmatrix}$$

且

$$L_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} l(x) dx, \quad C_n = \int_{x'_n}^{x'_{n+1}} c(x) dx$$

注意, C_0 和 C_N 只在半个区间上积分. 又

$$\Delta_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times N}, \quad \Delta_V = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}_{N \times (N+1)}$$

代数方程还可以写为:

$$\begin{bmatrix} 0 & \Delta_I \\ -\Delta_V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} [C] & 0 \\ 0 & [L] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}$$

数值结果为:

N	$\lambda_1^{(N)}$	$\lambda_2^{(N)}$	$\lambda_3^{(N)}$	$\lambda_4^{(N)}$
1	4.000			
2	7.000	16.000		
3	9.000	27.000	36.000	
4	9.373	29.614	54.627	64.000
精确值	9.870	39.478	88.826	157.914

我们还可以用分段线性(三角形)函数为基函数的 Галёркин 法, 结果比脉冲基 Галёркин 法收敛快。所以有如下结论:

1. 一阶微分方程的脉冲基比二阶微分方程的分段线性基收敛慢, 但一阶微分方程的分段线性基比二阶微分方程的分段线性基收敛快, 说明展开函数的性能直接影响了解的收敛性;
2. 一阶微分方程的解总小于精确解, 而二阶微分方程的解总大于精确解, 前者给出了解的下限, 后者给出了解的上限;
3. 对于任意 $l(x), c(x)$ 的传输线, 一阶微分方程的矩量法解更容易得到通用程序.

6.8 柱形波导本征值问题的矩量法解

对于一均匀截面的波导, 场分量满足下列 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + k_c^2 \Psi = 0$$

对于 TM 模式, $\Psi = E_z$, 满足第一类边界条件, 即 $\Psi|_C = 0$.

对于 TE 模式, $\Psi = H_z$, 满足第二类边界条件, 即 $\frac{\partial \Psi}{\partial n}|_C = 0$

$k_z = 2\pi/\lambda_c$, λ_c 是截止波长, k_c 是截止波数. 令

$$\mathbf{A} = -\nabla_{xy}^2 = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad k_c^2 = \lambda$$

则 $\mathbf{A}\Psi = \lambda\Psi$ 本征值算子方程.

将波导截面划分为间距 h 的网格, 网格的交点确定了一组相距 h 的点, 如图 6.14 所示, 令基函数和权函数分别为

$$f_n = w_n = T(x - x_n)T(y - y_n)$$

x_n, y_n 为网格点, 则

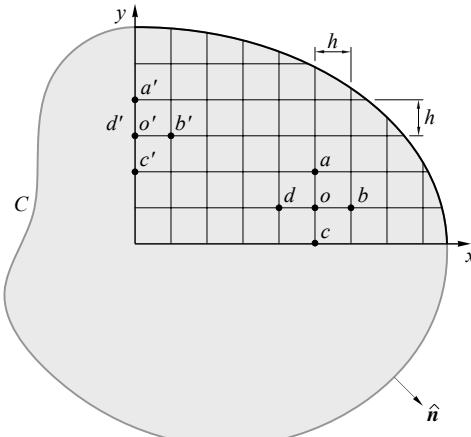
$$T(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{h} & |x| < h \\ 0 & |x| > h \end{cases}$$

$$[a_{mn}] [C_n] = \lambda [b_{mn}] [C_n]$$

定义 $d(m, n) = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}$, 当基函数全部在波导截面内时, 有

$$a_{mn} = \begin{cases} \frac{8}{3} & d(m, n) = 0 \\ -\frac{1}{3} & d(m, n) = h \& \sqrt{2}h \\ 0 & d(m, n) > \sqrt{2}h \end{cases} \quad b_{mn} = \begin{cases} \frac{9}{4}h^2 & d(m, n) = 0 \\ \frac{1}{9}h^2 & d(m, n) = h \\ \frac{1}{36}h^2 & d(m, n) = \sqrt{2}h \\ 0 & d(m, n) > \sqrt{2}h \end{cases}$$

图 6.14 波导的网格划分



对于 TM Mode: 在边界上, $\Psi = 0$, 故在边界上的网格点无展开函数, 所有其他点的展开函数完全在 C 内, 因而所有矩阵元素由上式给出.

对于 TE Mode: 在 C 上 $\partial\Psi/\partial n|_C = 0$, 网格内点有展开函数, 它在边界为 0, 为了满足边界条件, 1) 在边界上增加展开函数; 2) 在接近边界的点处修改展开函数, 使 C 上 $\Psi \neq 0$. 第一种途径要增大矩阵, 第二种途径保持了 TM 模和 TE 模矩阵大小相同, 应该说后者优于前者.

6.9 矩量法求解中的一些关键技术

设有算子方程 $\mathbf{L}U = f$, 基函数为 $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]^T$, 则 $U = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{C}$, 式中 $\mathbf{C} = [C_1, C_2, \dots, C_N]^T$ 为展开系数, 权函数为 $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T$, 则算子方程化为矩阵方程

$$[Z][C] = [V]$$

其中 $Z_{mn} = \langle w_m, L\varphi_n \rangle, m = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N, V_m = \langle w_m, f \rangle, m = 1, 2, \dots, M$, 则数值解为

$$U = \boldsymbol{\varphi}^T [Z]^\dagger \mathbf{V}$$

式中 $[Z]^\dagger$ 是阻抗矩阵的广义逆矩阵, 即

$$[Z]^\dagger = \begin{cases} [Z]^{-1}, & M = N \\ ([Z^*]^T [Z])^{-1} [Z^*]^T, & M \neq N \end{cases}$$

矩量法的几大不足

1. 对分析对象为电大尺寸的物体时,为了满足计算精度的要求,必须增加展开函数的数量 N,导致阻抗矩阵的阶数增大,计算机内存和 CPU 耗时也增加;
2. 基函数矢量和权函数矢量的选择凭经验,带有较大的盲目性;
3. 矩量法是一种“边界型”数值方法,虽然较之有限元法、有限差分法等场域型方法而言,占用的计算机内存、CPU 时间较少,但用来处理带有非均匀介质的电磁场问题却很不方便;这里的边界型主要是在算子方程的建立和内积过程中体现,但要用到关于处理场域的格林函数,不均匀介质区域很不方便;
4. 较之有限元法、有限差分法等局域型方法而言,矩量法在广义阻抗矩阵元素的计算上所费时间要多得多,有时是主要的.

矩量法的发展主要是针对这几个方面的. 这里涉要介绍一些.

6.9.1 迭代技术

若 $[Z]$ 为 n 阶非奇异矩阵, 可将其拆为两部分,

$$[Z] = [P] + [Q]$$

则可用如下迭代形式求解矩阵方程:

$$\mathbf{C}^{(k+1)} = -[P]^{-1}[Q]\mathbf{C}^{(k)} + [P]^{-1}\mathbf{V}$$

该迭代收敛的充要条件是矩阵 $([P]^{-1}[Q])$ 的谱半径 (即该矩阵本征值绝对值的最大值) 小于 1, 而不论该迭代的初试解取什么样的矢量.

这一充要条件的意义是: 矩阵 $[P]$ 应将矩阵 $[Z]$ 的充分多的大绝对值元素包括在内, 迭代才收敛.

经典的迭代技术有: Guass-Seidel 迭代、Jacobi 迭代、松弛迭代等, 这里介绍一些结合矩量法发展的迭代方法, 他们在许多大尺寸电磁问题中获得了很大的成功.

I. 条带矩阵迭代法 (Banded Matrix Iteration: BMI)

由 T.R.Ferguson 等提出^[17].

将 $[Z]$ 拆为三部分:

$$[Z] = [H] + [L] + [U]$$

其中 $[H]$ 表示 $[Z]$ 中以主对角线元素为中心的条带; $[L]$ 、 $[U]$ 分别表示 $[Z]$ 中处于 $[H]$ 下、上方的下三角矩阵和上三角矩阵, 在将物体分块并采用分域基函数矢量对算子方程离散化的过程中, 对不同的分块适当编号, 以使得比较相邻的分块有相近的编号, 只有条带矩阵不太窄, 就可以保证 $[Z]$ 中的绝大多数绝对值较大的元素在矩阵 $[H]$ 中, 而迭代的形式为:

$$\mathbf{C}^{(k+1)} = -[H]^{-1}([L] + [U])\mathbf{C}^{(k)} + [H]^{-1}\mathbf{V}$$

II. 算子修正迭代法 (Operator Corrector Iteration: OCI)

由 Demarest 和 Kalbasi 两人于 1989 年提出 [4], 大大地简化了迭代计算.

定义一个 n 阶对角方阵 $[D^{(k)}]$, 使得

$$[D^{(k)}] \mathbf{C}^{(k)} = [Q] \mathbf{C}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

即 $d_{ii}^{(k)} = \frac{1}{c_i^{(k)}} \sum_{j=1}^N q_{ij} c_j^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots, N$, $d_{ii}^{(k)}$ 为 $[D^{(k)}]$ 的对角线元素. 近似可以认为

$$\frac{c_j^{(k)}}{c_i^{(k+1)}} \approx \frac{c_j^{(k)}}{c_i^{(k)}}$$

即 $[D^{(k)}] \mathbf{C}^{(k+1)} \approx [Q] \mathbf{C}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, 则可得迭代形式为

$$\mathbf{C}^{(k+1)} = ([P] + [D^{(k)}])^{-1} \mathbf{V}$$

式中 $[D^{(k)}]^{-1}$ 就是修正算子, 且有:

$$[D^{(k)}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}^{(k)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}^{(k)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_{NN}^{(k)}} \end{bmatrix}$$

注意 $d_{ii}^{(k)}$ 仍然由前式决定.

III. 影响区域迭代法 (Sphere of Influence Techniques: SOI)

由 V.P.Cable 提出 [4], 对前述矩阵方程. 假设如下迭代求解程式:

$$\mathbf{C}^{(k+1)} = \mathbf{C}^{(k)} + \mathbf{M}^{(k)}$$

$\mathbf{M}^{(k)}$ 代表第 k 次迭代时的修正矢量. 在第 k 次迭代后, 误差矢量 $\mathbf{R}^{(k)}$ 为

$$\mathbf{R}^{(k)} = \mathbf{V} - [Z] \mathbf{C}^{(k)}$$

考虑矩阵方程及上述两式, 显然有:

$$[Z] \mathbf{M}^{(k)} = \mathbf{R}^{(k)}$$

问题归结为如何由上式求 $\mathbf{M}^{(k)}$, 直接求解失去了迭代法的意义. 于是事先给定一个小于 1 的正数 g , 我们按照下面方式定义 n 个 $[S]$ 的子方阵 $\{\tilde{S}(i)\}, i = 1, 2, \dots, N\}$. 在矩阵 $[S]$ 的第 i 行中, 以满足条件 $(|S_{ij}| / |S_{ii}|) > g, i = 1, 2, \dots, N$ 的所有元素为基础, 由相关行、列组成子方阵, 即为 $\{\tilde{S}(i)\}, i = 1, 2, \dots, N\}$, 并相应地定义 $\mathbf{M}^{(k)}$ 为 n 个子矢量 $\tilde{M}^{(k)}(i)$ 和 $\mathbf{R}^{(k)}$ 的 n 个子矢量 $\tilde{R}^{(k)}(i)$, 得

$$[\tilde{S}(i)] \tilde{M}^{(k)}(i) = \tilde{R}^{(k)}(i)$$

例 以 $i = 3, g = 0.8$ 为例, 设在 $[Z]$ 的第 3 行中, 仅有元素 Z_{32} 和 Z_{36} 对的绝对值超过 Z_{33} 的 80%, 则,

$$[\tilde{Z}(3)] = \begin{bmatrix} Z_{22} & Z_{23} & Z_{26} \\ Z_{32} & Z_{33} & Z_{36} \\ Z_{62} & Z_{63} & Z_{66} \end{bmatrix}$$

相应地, $\tilde{M}^{(k)}(3) = [M_2^{(k)}, M_3^{(k)}, M_6^{(k)}]^T$, $\tilde{R}^{(k)}(3) = [R_2^{(k)}, R_3^{(k)}, R_6^{(k)}]^T$. 直接求解上述方程得到 $\tilde{M}^{(k)}(i)$, 则

$$C_i^{(k+1)} = C_i^{(k)} + M_i^{(k)}$$

对 $i = 1, 2, \dots, N$ 重复上述过程, 就完成了第 k 次迭代, 由于 $\tilde{Z}^{(k)}(i)$ 的阶数通常较小, 当 $[Z]$ 的阶数较大时, 这一算法是十分经济的.

IV. 共轭梯度法 (Conjugate Gradient Method:CGM)

由 T. K. Sarkar 等人提出^[45], 另外, AP1990 年有四篇争论文章)

求解矩阵方程的共轭梯度法已经十分成熟, 但 Sarkar 等人发展了这一方法: 使 CGM 不仅能求解矩阵方程, 还可以直接用来求解算子方程, 省去了求解系数矩阵各元素的过程; 较之经典的矩量法, 在求解电大尺寸问题的电磁场模型时有明显的优势; 理论上讲, 如果不存在计算机的舍入误差和截断误差, 在 n 维空间的 CGM 迭代, 仅仅需要最多 n 步迭代即可收敛到精确解. CGM 具体的迭代形式有许多种, 这儿介绍一种比较简单而有效的方法.

对算子方程 $\mathbf{A}\mathbf{U} = f$, 取定迭代程式为:

$$\mathbf{U}^{(k+1)} = \mathbf{U}^{(k)} + t_k \mathbf{P}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

初始解 $\mathbf{U}^{(0)}$ 可以任意选取, t_k 为第 k 次迭代的最优化步长, \mathbf{P}_k 为第 k 次迭代的搜索方向, 对应上述迭代程式, 残差为:

$$\mathbf{R}^{(k+1)} = f - \mathbf{A}\mathbf{U}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{(k)} - t_k \mathbf{A}\mathbf{P}_k$$

则

$$t_k = \frac{\|\mathbf{A}^a R^{(k)}\|^2}{\|\mathbf{A} P_k\|^2}, \quad P_{k+1} = \mathbf{A}^a R^{(k+1)} + \beta_k P_k, \quad P_0 = \mathbf{A}^a R^{(0)}, \quad \beta_k = \frac{\|\mathbf{A}^a R^{(k+1)}\|^2}{\|\mathbf{A}^a R^{(k)}\|^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

式中 \mathbf{A}^a 是 \mathbf{A} 的伴随算子, 它由 Hilbert 空间上的内积定义. 可以证明

1) 搜索方向的映射函数集合 $\{tP_k\}$ 为正交函数组, 即

$$\langle \mathbf{A} P_i, \mathbf{A} P_j \rangle = \|\mathbf{A} P_i\|^2 \delta_{ij}$$

2) 残差的范数随着迭代次数的增加而单调下降, 即

$$\|R^{(k)}\|^2 - \|R^{(k+1)}\|^2 > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

还可以将快速 Fourier 变换与 CGM 结合运用, 进一步提高该迭代技术的效率^[44].

6.9.2 空间分解技术

基本思路是: 对于被研究的物体, 电气尺寸较大时, 可以将该物体分解为若干个电气尺寸较小的物体, 然后对各小物体进行矩量法分析, 再将各小物体之间的耦合作用通过适当的方式考虑进去, 这是一种“化整为零”的策略, 可以省去计算机内存和计算时间, 并拓展矩量法的应用领域.

I. 空间分解技术 (Spatial Decomposition Technique)

由 Umashankar 等人提出^[49, 50]. 假设待研究的电磁物体为自由空间中的一介质散射体. 首先将该介质体分割为 M 个小的介质体, 接着对每一个小的介质体分别进行矩量法分析, 在每一个子域的表面分别获得等效电流和等效磁流分布. 具体步骤为:

1. 第一个子域上的激励电磁场由两部分组成 (1) 原来的入射场; (2) 其余各子域的等效电流和等效磁流向自由空间的辐射场. 由于这些等效电磁流向未知量, 最初可以用物理光学原理所建立的电磁流来近似它们;
2. 第二个子域上的激励由三部分组成: (1) 原来的入射场; (2) 第一个子域由矩量法求解得到的等效电磁流向自由空间辐射的电磁场; (3) 其余各子域上由物理光学建立的电磁流的辐射场;
3. 第三个子域上的激励求法与第二个子域相同, 仅仅时第二个子域的影响由刚求出的场代替. 余类推.

上述为由零阶电磁流分布求得的一阶电磁流分布.

这样的迭代计算过程可以类似地进行下去, 以求得各子域高阶等效面电磁流分布. 可以想象, 等效电磁流的阶数越高, 则相邻两子域界面上的等效面电流和等效面磁流应当越接近 (大小

相等、方向相反), 当接近程度达到我们所需精度, 所有子域中与自由空间界面上的等效电磁流就构成了该介质散射体上待求的等效面电流和面磁流.

II. 破折技术 (Diakoptic Theory: DT)

破折理论 [18, 47] 也属于空间分解技术的一种形式, 即“化整为零”. 如对于线天线, “破折”为若干个子线段, 每一段破折口处构成了一对端口, 然后用网格分析的观点进行研究. 详细的概念上的描述较为复杂, 但数学结论很简单:

找出一个基底转换矩阵 $[T]$, 将矩阵方程中 N 维矢量 \mathbf{C} 降为 L 维矢量 \mathbf{C}' , 即: $\mathbf{C} = [T]\mathbf{C}'$, 其中

$$[T] : N \times L; \quad \mathbf{C} : N \times 1; \quad \mathbf{C}' : L \times 1; \quad L < N$$

则

$$[Z]\mathbf{C} = \mathbf{V} \rightarrow [Z][T]\mathbf{C}' = \mathbf{V} \rightarrow [T]^T[Z][T]\mathbf{C}' = [T]^T\mathbf{V}$$

显然已经将一个 $N \times N$ 阶线性系统简化为 $L \times L$ 阶线性系统. 问题的关键是要找到合适的基底转换矩阵 $[T]$.

III. 阻抗矩阵局部化技术 (Impedance Matrix Localization: IML)

由 Canning^[7] 提出. 为了说明问题方便, 以总长度为 L 的弯曲导线散射为例

1. 首先将导线按“空间分解”原则分为 M 个子段: $\{\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_M\}$;
2. 在第 n 个子段 Δl_n 上, 选择下列形式的 N_n 个“全域”基函数

$$\varphi_{pn}(l) = \exp(j2\pi pl/\Delta l_n), \quad l \in \Delta l_n, \quad n = 1, 2, \dots, M; \quad P = 0, 1, 2, \dots, N_{n-1}$$

由天线理论不难得出, 在子段 Δl_n 上基函数电流 $\varphi_{pn}(l)$ 所建立的最大辐射方向 θ_p 为

$$\sin \theta_p = \frac{2\pi p}{k_0 L}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, N_{n-1}$$

式中 θ_p 为最大辐射方向与子段 Δl_n 法线方向的夹角, k_0 为自由空间波数. 注意, 在最初的剖分中, 每一个子段要充分小, 使每一个子段有确定的法线方向.

3. 用 Галёркин 法选取权函数, 则 Δl_m 段的 N_m 个权函数与 Δl_n 段上的 N_n 个基函数构成阻抗矩阵中的 $N_m \times N_n$ 分快矩阵. 在这一分快矩阵中, 当 Δl_n 的最大辐射方向与 Δl_m 的最大接收方向比较接近时, 元素数值很大, 而那些两种方向偏离较大的元素值就会很小. 从而使阻抗矩阵元素集中化, “局部化”的意义是将数值很小的元素近似用零替代, 则阻抗矩阵大大地稀疏化, 节约了计算机的内存和 CPU 时间.

为了进一步提高局部化的效果,“全域基”还可以选择使幅度也变化,如:

$$f_{pn}(l) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{\pi(l - l_n)}{\Delta l_n} \right] \exp \left(\frac{j2\pi pl}{\Delta l_n} \right), & n = 1, 2, \dots, M, P = 0, 1, 2, \dots, N_{n-1}; \quad |l - l_n| \leq \Delta l_n \\ f_{pn}(l) = 0, & |l - l_n| > \Delta l_n \end{cases}$$

值得一提的是,IML技术不需要另外编制计算机程序,经典的矩量法程序做一些简单的变化就可以使用.

6.9.3 对角化技术

假如选取基函数 $\{\varphi_n\}$ 与权函数 $\{w_m\}$,使他们构成 L 正交,即

$$Z_{mn} = \langle w_m, \mathbf{A}\varphi_n \rangle \delta_{mn}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, N$$

则 $[Z]$ 就被对角化了,其逆矩阵也是对角矩阵,而且元素就是 $\{\langle w_m, \mathbf{A}\varphi_n \rangle \delta_{mn}\}^{-1}$. 算子方程的解就可以直接写成

$$U = \sum_{n=1}^N \langle w_m, f \rangle \langle w_m, \mathbf{A}\varphi_n \rangle^{-1} \varphi_n$$

问题的关键是找到满足这一条件的基函数 $\{\varphi_n\}$ 和权函数 $\{w_m\}$.

I. 奇异值分解技术 (Singular Value Decomposition: SVD)

在矩阵方程中, $[Z]$ 为 n 阶方阵. 设 $[U]$ 和 $[w]$ 也为 n 阶方阵,且他们的列矢量满足联立方程 [6]:

$$\begin{cases} [Z]\mathbf{U}_i = \sigma_i \mathbf{W}_i \\ [Z^*]^T \mathbf{W}_i = \sigma_i \mathbf{U}_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

式中 $[Z^*]^T$ 是 $[Z]$ 的共轭转置矩阵,而 $\mathbf{U}_i, \mathbf{W}_i$ 分别为:

$$[U] = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_N], \quad [w] = [\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_N]$$

由上述联立方程可得:

$$\begin{cases} [Z^*]^T [Z] \mathbf{U}_i = \sigma_i^2 \mathbf{U}_i \\ [Z][Z^*]^T \mathbf{W}_i = \sigma_i^2 \mathbf{W}_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$[Z][Z^*]^T$ 和 $[Z^*]^T[Z]$ 均为 Hermite 矩阵而且正定,所以矩阵 $[U]$ 和 $[W]$ 必为 Unitary 矩阵,即:

$$[U^*]^T = [U]^{-1}, \quad [w^*]^T = [w]^{-1}$$

矩阵 $[Z]$ 奇异值 σ_i 必为实数. 所以,

$$\begin{aligned}[W^*]^T [Z][U] &= [W^*]^T \left(\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^T \\ W_2^T \\ \vdots \\ W_n^T \end{bmatrix} \right)^T \\ &= [W^*]^T [W] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \end{bmatrix}\end{aligned}$$

这就是奇异值分解定理, 它将矩阵 $[Z]$ 对角化了. 则矩阵方程的解为

$$C = \sum_{n=1}^N \langle w_n, V \rangle \sigma_n^{-1} U_n$$

II. 特征模技术 (Characteristic Modes: CM)

由 Garbarg 和 Harrington 分别提出 [19].

对于算子方程: $\mathbf{A}U = f$, 令基函数等于权函数 $\varphi_n = w_n$, 且为下列本征值问题的本征函数: $\mathbf{A}_x \varphi_n = \lambda_n \mathbf{A}_r \varphi_n$, 其中 $\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_x$ 分别为算子 \mathbf{A} 的实部算子和虚部算子. 显然他们均为自伴算子. 且 \mathbf{A}_r 为正定算子. 依据数学理论, 所有本征值为实数, 本征函数必满足下列正交特性:

$$\langle \varphi_m, \mathbf{A}_r \varphi_n \rangle = \delta_{mn}, \quad \langle \varphi_m, \mathbf{A}_x \varphi_n \rangle = \lambda_n \delta_{mn}$$

即

$$\langle \varphi_m, \mathbf{A} \varphi_n \rangle = (1 + j\lambda_n) \delta_{mn}$$

可见, 广义阻抗矩阵被对角化了, 方程的解为

$$U = \sum_{n=1}^N \langle \varphi_n, f \rangle (1 + j\lambda_n)^{-1} \varphi_n$$

III. 正交模技术 (Orthogonal Modes: OM)

正交模技术 [21] 较特征模技术而言, 正交特性更普遍, 但计算的工作量要大一些. 这种方法既可用于求解矩阵方程, 也可用于直接求解算子方程. 取全域展开基函数为下列本征值问题的本征函数 (即正交模)

$$\mathbf{A}^a \mathbf{A} \varphi_n = \lambda_n \varphi_n$$

\mathbf{A}^a 为 \mathbf{A} 的伴随算子, $\mathbf{A}^a \mathbf{A}$ 是一个自伴而且正定的算子, 其本征值必为大于零的实数, 而本征模必正交, 即:

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \delta_{mn}$$

取权函数 $w_n = \mathbf{A}\varphi_n$, 则 $[Z]$ 的元素为:

$$Z_{mn} = \langle w_m, \mathbf{A}\varphi_n \rangle = \lambda_n \delta_{mn}$$

可见, $[Z]$ 被对角化了. 算子方程的解为:

$$U = \sum_{n=1}^N \langle \mathbf{A}\varphi_n, f \rangle \lambda_n^{-1} \varphi_n$$

IV. 双正交模技术 (Biorthogonal Modes: BOM)

BOM^[8] 较 CM 和 OM 而言, 在计算方法上要简便一些. 取基函数 $\{\varphi_n\}$ 与权函数 $\{w_m\}$ 分别为下列本征值问题中的本征函数

$$\begin{cases} \mathbf{A}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \\ \mathbf{A}^a w_n = \mu_n w_n \end{cases}$$

由数学理论, 他们的本征值应互为共轭, 而本征函数应有双正交关系 (即双正交模), 即:

$$\begin{cases} \lambda_n = \mu_n^* \\ \langle w_m, \varphi_n \rangle = \delta_{mn} \end{cases}$$

$[Z]$ 的元素被对角化:

$$Z_{mn} = \langle w_m, \mathbf{A}\varphi_n \rangle = \mu_n \delta_{mn}$$

故算子方程的解为:

$$U = \sum_{n=1}^N \langle w_n, f \rangle \mu_n^{-1} \varphi_n$$

第 7 章 测度不变方程法

MEI(Measured Equation of Invariance) 方法是近年来在电磁场数值计算领域出现的一种新方法. 它最早是为解决无限区域电磁散射问题的边界截断而出现的, 首先由梅冠香 (MEI, Kenneth Kwai-Hsiang) 于 1992 年提出 [32]. MEI 方法显著降低了运算量, 使得原先需要超级计算机解决的电大尺寸问题, 在恰当应用 MEI 方法后可以用个人计算机加以解决.

7.1 基本思想

我们已经知道, 频域下电磁场问题可以通过积分方程或微分方程手段来求解. 积分方程法可以将求解域限制在物体表面, 但它的求解矩阵是满阵. 相反地, 差分方程或有限元方法可以得到一个稀疏矩阵, 但其网格数目远大于物体体积以便应用吸收边界条件 (ABC). 结合二者的优势, 理想的情况是将有限差分方法的网格边界限制在目标表面. MEI 方法即是一种趋近于这种理想情况的概念.

V. 差分方程

考虑如图 7.1 的简单二维散射问题. 入射场可以是 TE 波或 TM 波. 待求解的微分方程是

$$(\nabla^2 + k^2) \varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad (7.1)$$

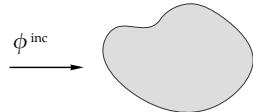


图 7.1 二维散射体

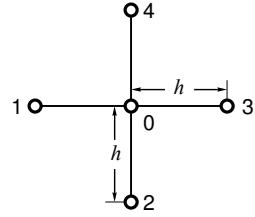


图 7.2 有限差分格式

其中 $\varphi(\mathbf{r})$ 是散射场. 式 (7.1) 的解可以通过求解有限差分或有限元方法求解. 利用图 7.2 所示的典型五点差分格式, 若 h 足够小, 可建立有限差分方程

$$\varphi_1 + \varphi_2 - (4 - k^2 h^2) \varphi_0 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0 \quad (7.2)$$

若以下表述成立, 我们可以用有限差分来近似表示微分方程:

每个有限差分方程代表了某节点与其临近节点之间的线性方程, 其关系为

1. 与节点位置无关;
2. 与散射体几何形状无关;
3. 与激励场无关.

以上特征同样适用于有限元方程.

VI. 三点假设

Mei 提出了关于节点处的场与其 $n - 1$ 个直接相邻节点处的场存在的线性关系的假设:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi_i = 0 \quad (7.3)$$

式中 φ_0 表示要研究的节点 0 处的场, $\varphi_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$ 表示其第 i 个相邻节点处的场. a_i 是待定系数, 称为 MEI 系数.

虽然此方程与离散的微分方程具有相同的解, 但却

1. 与节点位置有关;
2. 与特定几何形状有关;
3. 与激励场无关.

其中第 1 和第 2 点假设与有限差分或有限元方程不同. 第 3 点保证了所有 MEI 系数可以从 $n - 1$ 个线性无关的解中得出. 第 2 点假设同时表明, 用于求解系数的解应与特定几何形状相关. 如果节点 0 位于截断边界上, 一旦系数 a_i 得以确定, 方程 (7.3) 就是一种局部化的截断边界条件.

如果把 MEI 方程看成是网格截断边界上散射场所要满足的边界条件, 并结合网格的差分方程, 就能求解整个网格区域内的散射场问题. 由于 MEI 方程只考虑了边界节点与其周围节点之间的关系, 仍是局部代数方程. 因此 FD-MEI 方程仍保持了很好的稀疏性.

VII. 测度

为了求解 MEI 系数, 需要假设一些特定解, 称为“测度函数”, 通过将测度函数代入 (7.3) 得到的方程称为测度. 获得 n 个节点的测度方程, 至少需要 $n - 1$ 个测度.

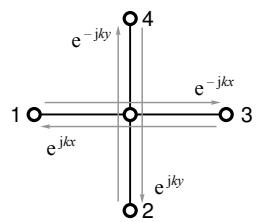


图 7.3 正交反向平面波作为测度函数

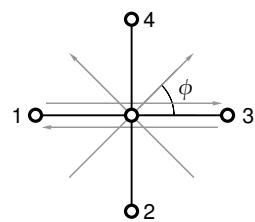


图 7.4 四个向上方向的平面波作为测度函数

在五点格式上使用四个平面波作为测度函数, 如图 7.3 所示. 测度为

$$\begin{cases} a_1 e^{jkx} + a_2 + a_0 + a_3 + a_4 e^{-jkx} = 0 \\ a_1 e^{-jkx} + a_2 + a_0 + a_3 + a_4 e^{jkx} = 0 \\ a_1 + a_2 e^{-jkx} + a_0 + a_3 e^{jkx} + a_4 = 0 \\ a_1 + a_2 e^{jkx} + a_0 + a_3 e^{-jkx} + a_4 = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

由对称性可知, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, 不妨假定 $a_1 = 1$, 于是得到

$$a_0 = -2 - (e^{jkh} + e^{-jkh}) \quad (7.5)$$

a_0 的二阶近似即得到与式 (7.2) 相同的有限差分方程. 这一点很容易理解, 原因是这样的测度方程既与位置无关也与几何形状无关.

若仅采用向上的平面波作为测度函数, 如图 7.4 所示, 则可得到测度:

$$\begin{cases} a_1 e^{jkh} + a_2 + a_0 + a_3 + a_4 e^{-jkh} = 0 \\ a_1 e^{-jkh} + a_2 + a_0 + a_3 + a_4 e^{jkh} = 0 \\ a_1 e^{jkh/\sqrt{2}} + a_2 e^{jkh/\sqrt{2}} + a_0 + a_3 e^{-jkh/\sqrt{2}} + a_4 e^{-jkh/\sqrt{2}} = 0 \\ a_1 e^{-jkh/\sqrt{2}} + a_2 e^{jkh/\sqrt{2}} + a_0 + a_3 e^{jkh/\sqrt{2}} + a_4 e^{-jkh/\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

假定 $a_1 = a_4 = 1$, 可得到系数

$$\begin{cases} a_0 = -2 \cos kh = (k^2 h^2 - 2) + O(h^4) \\ a_2 = -a_3 = \frac{\cos \frac{kh}{\sqrt{2}} - \cos kh}{j \sin \frac{kh}{\sqrt{2}}} = \frac{kh}{j2\sqrt{2}} + O(h^3) \end{cases} \quad (7.7)$$

图 7.5 表现了代入不同方向入射的平面波时, 本测度方程的余量. 很明显, 对于向上方向的入射波余量较小, 计算精度较高.

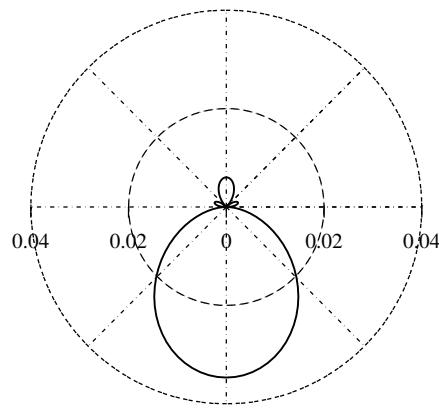


图 7.5 图 7.4 的平面波作为测度函数时, 测度方程对不同角度入射波产生的余量

VIII. 测度子

要在物体表面选择一些可能的电流分布 $J_k(\mathbf{r}'), k = 1, 2, \dots, M$, 即测度子 (metron). 通过这些测度子的积分可以得到由它们所产生的散射场, 称为测度函数:

$$\varphi^k(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') J_k(\mathbf{r}') d\Gamma' \quad (7.8)$$

其中 \mathbf{r} 为节点的位置矢量, \mathbf{r}' 为测度子的位置矢量, Γ 是环绕散射体表面的曲线. 注意到测度子并非基函数. 其唯一作用就是用来生成测度方程, 故对于测度子或其组合与实际电流密度是否相似并无要求. $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -j/4 H_0^{(2)}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ 为二维空间格林函数. 若假设 3 成立, 则几乎可在任意位置截断有限差分网格. 将这 M 个 metron 得到的测度函数分别代入式 (7.3) 式中, 就能得到 M 个关于 MEI 系数的方程:

$$\sum_{i=0}^N a_i \varphi^k(\mathbf{r}_i) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad M \leq N \quad (7.9)$$

在 $N + 1$ 个 MEI 系数中只有 N 个是独立的, 剩下的一个可任意取值, 不妨令 $a_0 = -1$, (7.9) 式就能写成一个关于 MEI 系数的线性方程组, 可以表示为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \cdots & \varphi_{1,N} \\ \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & \cdots & \varphi_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{M,1} & \varphi_{M,2} & \cdots & \varphi_{M,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{1,0} \\ \varphi_{2,0} \\ \vdots \\ \varphi_{M,0} \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

求解上述矩阵. 可以得到该节点对应的一组 MEI 系数.

在式 (7.9) 中, 测度子的数目可以大于 MEI 系数的数目 (即 $M > N$), 此时可以用常规的最小二乘法确定一组最佳的 MEI 系数. 在实际的计算过程中, 通常取 $M \approx 2N$ 进行计算. 确定 MEI 系数之后. 对于网格最外层上的节点就可以列出 MEI 方程. MEI 方程一旦建立, 截断边界上的边界条件就已经确立, 在截断边界和物体表面之间填充有限差分网格, 就可以建立一个求解散射场的稀疏矩阵方程, 称之为 FD-MEI 方程.

以二维散射体为例, 对于网格内部的节点列出经典的差分方程, 而对于物体表面的节点则运用理想导体表面边界条件, 即可建立所有网格节点散射场的 FD-MEI 方程组, 并利用某种稀疏算法快速求解.

选择测度子时, 首先不能选择那些明显不能产生所求场的源分布, 其次源分布间不能近似线性相关. 一般为了方便起见, 可以选择正弦函数, 但这种选择并非对于任何问题都是最好的.

7.2 理论证明

自最开始提出这一理论起时, MEI 方程对入射场的不变性只是作为一种假设被提出来, 因此也有学者对此表示怀疑, 引起了相当大的争议. 但是这一假设得到了理论上的证明 [54], 即 MEI 方程对于入射场确实具有不变性, 但其精确成立的条件是方程中的节点数目 N 须趋向于无穷大. 证明过程如下

以 TM 波入射时理想导体圆柱的散射为例, 如图 7.6 所示, 散射场的纵向电场分量 φ 为

$$\varphi = -j\omega\mu_0 \int_{\Gamma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J_z(\mathbf{r}') d\Gamma' \quad (7.11)$$

为了在网格截断边界上, 节点 0 处导出上式的离散形式, 将 J_z 用定义在柱体表面上的一系列完备基函数 ($f_n(\mathbf{r}')$, $n = 1, 2, \dots$) 展开:

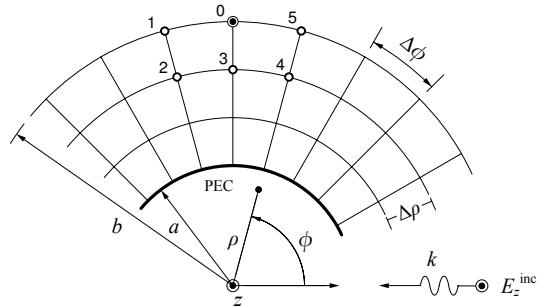


图 7.6 MEI 方法分析圆柱导体散射

$$J_z(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^N c_n f_n(\mathbf{r}') \quad (7.12)$$

其中 c_n 是电流展开系数. 在 N 为无穷大时, 此表达式为精确. 将式 (7.12) 代入 (7.11), 于是有

$$\varphi = -j\omega\mu_0 \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_n(\mathbf{r}') d\Gamma' \quad (7.13)$$

于是我们得到节点 0 出的方程

$$\varphi_0 = [\mathbf{b}_0]^T [\mathbf{c}] \quad (7.14)$$

其中 $[\mathbf{b}_0]$ 和 $[\mathbf{c}]$ 分别是列向量

$$[\mathbf{b}_0] = [b_{1,0}, b_{2,0}, \dots, b_{N,0}]^T, \quad [\mathbf{c}] = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T$$

其中 $b_{n,0}$ 为

$$b_{n,0} = -j\omega\mu_0 \int_{\Gamma} G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) f_n(\mathbf{r}') d\Gamma' \quad (7.15)$$

其中 \mathbf{r}_0 是节点 0 的位置矢量. 式 (7.13) 和 (7.14) 中的 c_n 可以用 N 个节点处的 φ 值来线性表示, 这些节点编号为 1 至 N 并直接与 0 节点相邻. 节点 0 处式 (7.11) 的离散形式也可以如此导出, 再次在 N 个节点处应用式 (7.13) 得到

$$\varphi_m = \sum_{n=1}^N b_{n,m} c_n, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (7.16)$$

其中 φ_m 是节点 m 处 φ 的值, $b_{n,m}$ 定义如式 (7.15), 只是 \mathbf{r}_0 被替换为 \mathbf{r}_m , 即节点 m 处的位置矢量. 用矩阵形式表示 (7.16) 为

$$[\varphi] = [B]^T[c] \quad (7.17)$$

其中 $[\varphi]$ 为列向量 $[\varphi] = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]^T$, $[B]$ 为 N 阶方阵 ($b_{n,m}, n, m = 1, 2, \dots, N$). 由式 (7.17) 可以得到 $[c] = \{[B]^T\}^{-1}[\varphi]$, 代入式 (7.14) 可以得到节点 0 处式 (7.11) 的离散形式

$$\varphi_0 = [b_0]^T \{[B]^T\}^{-1}[\varphi] = \{[B]^{-1}[b_0]\}^T[\varphi] \quad (7.18)$$

由于不同的入射场只影响到不同的展开系数集 $\{c_n\}$ 的不同, 而式 (7.18) 所表示的 φ_0 与 $\varphi_1 \sim \varphi_N$ 的线性关系是与 c_n 无关的, 因此可以证明 MEI 方程确实是对入射场具有不变性. 同时可以看出: 只有当 $N = \infty$ 时, 等式才精确成立; 当 N 为任何有限值时, 都存在残留误差. 然而, 只要 N 足够大, 就能保证 MEI 方程在近似意义上成立, 从而得到满足精度要求的解. 以往的研究多数是采用六点的 MEI 方程 (对应于 $N = 5$), 然而当需要求解电大尺寸或不规则形状物体的散射问题时, 无论网格划分有多细, 仅用 $N = 5$ 是不能达到精度要求的^[23].

7.3 时域 MEI 方法

在频域 MEI 方法得到广泛应用和研究的同时, 时域 MEI 方法的研究却因为其固有的难度而进展缓慢. 目前对它的研究还处于起步阶段. 根据 MEI 的基本原理, 把截断边界上任一节点的场 (散射场) 表示为其邻近空间节点上的场在不同时间步的线性组合, 写出与频域 MEI 方法的形式类似的时域测试方程, 通过选择合适的测试子完成对时域 MEI 方程的测试, 建立起时域 MEI 方法 (吸收边界条件)^[56].

常用的 FDTD 方法在分析辐射问题时, 往往需要将吸收边界条件设置得远离天线以获得较好的吸收性能, 而这将带来较大的内存开销和较长的计算时间. 传统 MEI 方法求解问题多在频域内, 最近 MEI 方法应用在时域中和 FDTD 结合起来形成了 TDMEI 方法^[53].

7.3.1 基本原理

考察 Mur 一阶吸收边界条件 (Mur-ABC), 它在二维情形下于 $+x$ 方向边界上的形式为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \varphi = 0 \quad (7.19)$$

其中 φ 为波函数, $\tau = vt$, $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$.

在如图 7.7 所示节点分布中, 点 0 为边界节点, 点 1 为紧邻边界的内部节点. 我们在点 0 和点 1 的中心点 A , 时刻 $(n + \frac{1}{2})\Delta T$, 以中心差分方式离散 Mur-ABC 式 (7.19), 有

$$\varphi_0^{n+1} = a_1 \varphi_1^{n+1} + a_2 \varphi_0^n + a_3 \varphi_1^n \quad (7.20)$$

其中

$$a_1 = -\frac{\Delta x - \Delta\tau}{\Delta x + \Delta\tau}, \quad a_2 = \frac{\Delta x - \Delta\tau}{\Delta x + \Delta\tau}, \quad a_3 = 1$$

Δx 为空间步长, $\Delta\tau$ 为归一化时间步长, 波函数 φ 上标表示时间步, 下标表示空间位置节点.

显然不论边界条件式 (7.19) 或者其离散形式 (7.20) 都是全域性的. 不论在哪个边界网格都是成立的并且与散射体的具体形状无关也与激励无关.

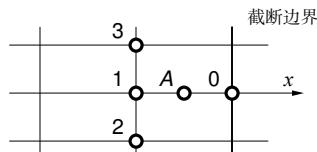


图 7.7 二维截断边界

根据 MEI 的基本原理, 在任一截断边界节点上的场(散射场)均可表示为其邻近节点上的场的线性组合. 那么, 在时域情况下, 这种线性组合显然还应包括时间信息, 即对图 7.7 中的任一截断边界节点(此时并不限于 $+x$ 轴方向的边界节点), 比如点 0, 我们可以写出其类似如下形式的测试方程:

$$\varphi_0^{n+1} = a_1\varphi_1^{n+1} + a_2\varphi_0^n + a_3\varphi_1^n + a_5\varphi_2^n + a_6\varphi_3^{n+1} + a_7\varphi_3^n \quad (7.21)$$

显然上式写法不是唯一的. 仿照 Mur 吸收边界条件的一阶形式可以假定时域一阶 MEI 吸收边界条件具有一种较简单的形式

$$\varphi_0^{n+1} = a_1\varphi_1^{n+1} + a_2\varphi_0^n + a_3\varphi_1^n \quad (7.22)$$

即它只与该节点本身上个时刻的值及其相紧邻的空间内格点的这两个时刻的值有关.

虽然在形式上一阶 MEI 吸收边界条件 (7.22) 式与 Mur 一阶吸收边界条件 (7.19) 是一样的, 但本质上是截然不同的. 根据 MEI 的基本原理 (2), MEI 吸收边界条件式 (7.23) 系数 a_i , ($i = 1, 2, 3$) 是局域性的; 其次 a_i , ($i = 1, 2, 3$) 与具体的散射体几何形状有关, 即针对不同的散射体的不同的边界格点 a_i 具有不同的值. 同时根据 MEI 的基本原理 (3) 可知 a_i 与具体的激励无关. 这样通过 MEI 测试, 就可给出数值解.

7.3.2 MEI 系数的测试

在二维情形中, 要完成对方程 (7.22) 的测试, 我们可以根据具体问题设置一组测试子, 即线电流源 $I_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, N$), 对某截断边界点的测试即是在不同时刻(或时刻段)求出由这组线电流源在该点所产生的辐射场, 并将之代入式 (7.22), 形成线性方程组, 解出该点的 MEI 系数 a_i , ($i = 1, 2, 3$). 在某个空间位置放置激励源后, 可以针对图 7.7 的边界节点 0, 求出四个时刻

的辐射场, 代入到式(7.22)中, 得到如下的三个线性方程:

$$\begin{cases} a_1\varphi_1^{m+1} + a_2\varphi_0^m + a_3\varphi_1^m = \varphi_0^{m+1} \\ a_1\varphi_1^{m+2} + a_2\varphi_0^{m+1} + a_3\varphi_1^{m+1} = \varphi_0^{m+2} \\ a_1\varphi_1^{m+3} + a_2\varphi_0^{m+2} + a_3\varphi_1^{m+2} = \varphi_0^{m+3} \end{cases} \quad (7.23)$$

解出上式中的未知量 a_i , 即是测试出了 MEI 系数, 将它们反代回式 (7.22), 就是关于点 0 的 MEI 吸收边界条件. 对于其它边界点, 可以用同样的求解过程获得其 MEI 系数.

当然, 由三个方程 (7.22) 是可以得到三个未知量的唯一解. 但这种 MEI 系数代入到具体的电
磁边值问题中并不能得到理想的场解, 其精度常常很低甚至是发散的. 这说明方程组 (7.22) 所
求出的 MEI 系数精度是不够的, 或者说其包含的时间信息量是不够的. 那么就应该计算更多时
刻的场值 (比如说 $M + 1$ 个时刻), 从而得到 M 个线性方程. 时域内的 MEI 测度方程通常可以
表示为

$$\sum_{j \in S} \sum_{m \in T_j} a_{j,m} \varphi_j^m = 0 \quad (7.24)$$

其中 $T(j)$ 是一系列时间步 $\{n + 1, n, n - 1, n - 2, \dots\}$, S 是一组靠近截断边界的场点, φ_j^m 为
场值, $a_{j,m}$ 为一系列测度函数 $\{\varphi_j^m\}$ 得到的 MEI 系数.

在某种节点方式下, 写为矩阵形式, 有

$$[\varphi][a] = 0 \quad (7.25)$$

其中,

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi_i^{n_1+1} & \varphi_{i-1}^{n_1+1} & \varphi_i^{n_1} & \varphi_{i-1}^{n_1} & \varphi_i^{n_1-1} & \varphi_{i-1}^{n_1-1} \\ \varphi_i^{n_2+1} & \varphi_{i-1}^{n_2+1} & \varphi_i^{n_2} & \varphi_{i-1}^{n_2} & \varphi_i^{n_2-1} & \varphi_{i-1}^{n_2-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_i^{n_M+1} & \varphi_{i-1}^{n_M+1} & \varphi_i^{n_M} & \varphi_{i-1}^{n_M} & \varphi_i^{n_M-1} & \varphi_{i-1}^{n_M-1} \end{bmatrix}, \quad [a] = \begin{bmatrix} -1 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}$$

由这 M 个测试方程组成的方程组可以运用最小二乘法来求得 MEI 系数 $[a]$. 采用奇异值分
解方法可以完成对相关性较强的线性方程组的求解.

通过以上的处理过程, 我们就完成了对任意截断边界格点的一阶 MEI-ABC 的测试过程. 更
一般地, 我们可以把时域 MEI-ABC 的确立和求解过程总结为:

- (1) 写出截断边界格点的 MEI 方程 (例如式 (7.22));
- (2) 确定测试子并尽可能给出解析表达式;

(3) 计算步骤 (1), 所涉及的空间格点在不同时间步的测试函数, 将它回代到式 (7.19) 得到关于 MEI 系数的线性方程组;

(4) 利用最小二乘法结合奇异值分解技术求出 MEI 系数.

其中只有步骤 (3) 和 (4) 是随具体的散射 (辐射) 问题不同而需重新计算, 步骤 (1) 和 (2) 一般可以不变.

7.4 表面 MEI 方法

1998 年, 一种直接离散标量波方程, 以直接在物体表面上获得测度不变方程的方法被提出, 称为 On-surface MEI (OSMEI) 方法 [30]. 相对于传统方法, OSMEI 可以获得与矩量法相同的最少未知数数量, 而其矩阵是一个循环稀疏矩阵, 所以 OSMEI 是一种非常有效的快速算法, 其缺陷在于精度较低.

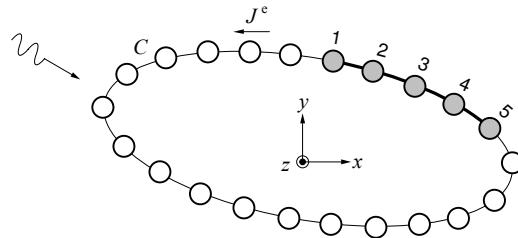


图 7.8 OSMEI 方法计算理想导体散射的网格

考虑理想导体的圆柱散射体, 如图 7.8 所示. 圆柱体沿 z 轴放置, $x - y$ 平面内截面边界为 C . 入射波为 TM 或 TE 波, 用 E_z 或 H_z 表示. 首先将散射场的下列标量波方程离散化:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{\partial^2}{\partial l^2} + k^2 \right) \begin{Bmatrix} E_z^s \\ H_z^s \end{Bmatrix} = 0 \quad (7.26)$$

其中 n 为表面法向, l 为表面切向. 对式 (7.26) 中的二阶切向微分可以离散为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial l^2} + k^2 \right) \begin{Bmatrix} E_z^s \\ H_z^s \end{Bmatrix} \approx \sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} b_i^e E_{zi}^s \\ a_i^m H_{zi}^s \end{Bmatrix}, \quad N \geq 3. \quad (7.27)$$

式 (7.26) 中的二阶法向微分可以离散为

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2} \begin{Bmatrix} E_z^s \\ H_z^s \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial n} \begin{Bmatrix} \partial E_z^s / \partial n \\ \partial H_z^s / \partial n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -j/(k\eta) \\ j\eta/k \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial n} \begin{Bmatrix} E_l^s \\ H_l^s \end{Bmatrix} \approx \sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} a_i^e H_{li}^s \\ b_i^m E_{li}^s \end{Bmatrix} \quad (7.28)$$

在 (7.28) 中, 我们将 $H_l^s(E_l^s)$ 的 $\partial/\partial n$ 由 $H_l^s(E_l^s)$ 及近场来近似. 将式 (7.27) 和 (7.28) 代入式 (7.26) 中, 可得

入(7.26), 我们得到 on-surface 测度不变方程:

$$\sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} a_i^e H_{li}^s \\ a_i^m H_{zi}^s \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} b_i^e E_{zi}^s \\ b_i^m E_{li}^s \end{Bmatrix} = 0 \quad (7.29)$$

式(7.29)称为MEI方程. 其中TM系数 $\{a_i^e\}$ 和 $\{b_i^e\}$ 和TE系数 $\{a_i^m\}$ 和 $\{b_i^m\}$ 统称为MEI系数. 其中仅有 $(2N-1)$ 个系数是独立的. 通过 E_z^s, H_l^s, H_z^s 和 E_l^s , 可以数值求解上述MEI系数.

对于TM情况,

$$E_z^s(\mathbf{r}) = -\frac{k\eta}{4} \int_C J_z(\mathbf{r}') H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) dl' \quad (7.30)$$

$$H_l^s(\mathbf{r}) = -j\frac{\omega\mu}{k^2} \frac{\partial E_z^s}{\partial n} = -\frac{1}{4j} \int_C J_z(\mathbf{r}') \frac{\partial H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial n} dl' \quad (7.31)$$

对于TE情况,

$$\begin{aligned} H_z^s(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4j} \int_C [i_z \cdot \nabla' \mathbf{J}(\mathbf{r}')] H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) dl' \\ &= \frac{1}{4j} \int_C \frac{\partial J_l(\mathbf{r}')}{\partial n'} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) dl' = \frac{1}{4j} \int_C J_{eq} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) dl' \end{aligned} \quad (7.32)$$

$$E_l^s(\mathbf{r}) = \frac{\omega\mu}{k^2} \frac{\partial H_z^s}{\partial n} = \frac{\eta}{4k} \int_C J_{eq}(\mathbf{r}') \frac{\partial H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial n} dl' \quad (7.33)$$

其中 k 为波数, $J_z(\mathbf{r}')$ 是TM波激励的表面电流, $J_{eq}(\mathbf{r}') = \partial J_l(\mathbf{r}')/\partial n'$ 是TE激励的等效磁流. J_z 和 J_{eq} 都称为测度子, 一般取作

$$J(l') = \exp(j2\pi nl'/L), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.34)$$

其中 L 是散射体的周长, l' 是 C 上的源点.

将式(7.30)~(7.33)代入(7.29), 可以证明TM波和TE波激励下的MEI方程是相同的, 也即 $\{a_i^e\} = \{a_i^m\}$, $\{b_i^e\} = \{b_i^m\}$. 故我们只需求取一套MEI系数 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$. 利用式(7.29)以及每个节点上的边界条件, 我们最后可以得到矩阵方程:

$$[A]\mathbf{H}_l^s = [B]\mathbf{E}_z^{\text{in}}, \quad \text{for TM} \quad (7.35)$$

$$[A]\mathbf{H}_z^s = [B](j\eta/k)\partial\mathbf{H}_z^{\text{in}}/\partial n, \quad \text{for TE} \quad (7.36)$$

其中 $[A]$ 和 $[B]$ 是循环条带矩阵, 带宽为 N , \mathbf{E}_z^{in} 和 \mathbf{H}_z^{in} 是实际入射波, \mathbf{H}_l^s 和 \mathbf{H}_z^s 分别是未知的磁场分量.

7.5 MEI 方法的一些新发展

测度不变方程的用途很广, 可用于有限差分法和有限元法适用的所有场合. K. K. Mei 等用 MEI 法进行了传输线特性阻抗的提取, 二维导体柱和介质柱体的散射分析, 波导不连续性分析, 微带天线和平板的散射分析和简单三维导体的散射分析^[32]. 根据假设 3) 和等效原理, 洪伟等更在其基础上发展了所谓 “GIMEI”^[20], 即用一 “measureloop” 将所有导体包围起来, 同时也作为介质分界面的截断边界. 网格边界截断于 measure loop 外 2、3 层网格处, 并假设 loop 外为自由空间. 测度子取在 measure loop 上而不是导体表面, 这样就在一定程度上摆脱了对几何结构的依赖. 他们用这种方法计算了多层介质多导体互连线的分布电容矩阵和简单三维导体的电容. 作者还对散射问题提出了迭代 MEI (iterative MEI) 方法^[25, 26], 即为了在网格边界取得较近 (导体外 2 层网格) 时还能较精确求解, 将前次以传统 MEI 方法求得的场值用边界条件转换成表面电流再作为下次求解的测度子. 这样的迭代能很快收敛.

第8章 谱域方法

8.1 基本概念及其应用简介

谱域方法在电磁理论中有十分广泛的应用. 这种方法最早是在 Fourier 分析的基础上发展起来的. 例如, 对于一个周期的时间信号, 可以把它展开成包含不同频率的 Fourier 级数, 不同的频率分量对应于不同的幅度, 这就构成了周期函数的频谱; 对于非周期信号, Fourier 级数可以推广为 Fourier 积分相应的谱也就变成了连续谱. 这种做法也可以用到空域中. 对一个空间函数进行 Fourier 分析, 其物理概念可以理解为用频率相同而振幅和相位不同的平面波来叠加出一个给定的空间分布. 每一个平面波叫做平面波谱, 一般情况下这是一个复谱. 这种平面波的叠加, 数学上相当于 Fourier 变换. 柱面波也可以用来叠加出一个给定的空间分布, 这在数学上相当于 Hankel 变换. 平面波、柱面波和球面波是可以互相表示的, 这样做就给处理各种不同的边值问题带来不少简化和灵活性, 这可以用平面边界为例来说明这一点. 例如在求解位于平面边界上的偶极子的辐射场时, 由于点源辐射的是球面波, 而边界是平面, 这样的边值问题难以求解, 但是如果把球面波展开成平面波或者展开成柱面波, 这时由于在同一平面上, 不论平面波或是柱面波都有相同的反射系数, 因而在由这些波谱所构成的谱域中, 匹配边界条件就要容易得多. 所付出的代价是, 回到空域时, 要做反变换, 或者做谱域积分. 谱域量和空域量之间的转换可以通过 Parseval 定理来进行. 根据具体问题, 有些计算可在谱域中进行, 也有一些可以在空域中进行, 这也是谱域方法所具有的一种灵活性.

上面所说的谱域方法是一种积分变换的方法, 这实际上是一种线性的谱分解, 这是因为积分变换中都是线性运算. 近来, 又发展起来了非线性谱分解(在信号处理领域中是根据实际测量值确定信号的数量特性. 因而常用的术语是谱估计), 与线性谱分解相比较, 非线性谱分解有许多优点. 考察一个 Fourier 级数, 它的谱也就是各次谐振频率, 它们都是所截断的最高谐振频率的谐频. 但是, 实际上叠加出一个波形的谱并不一定是这样一种谐频相关的关系, 这就存在着实际谐振频率和 Fourier 谐振频率之间的失配. 如果不用 Fourier 级数, 而用另外一个级数采取非线性方法, 例如非线性优化的方法去逼近一个给定的函数, 就可以避免这种失配. 这也就是非线性谱分解的概念. 我们应注意, 在电磁理论和信号处理理论中, 都会遇到谱分解的问题, 它们的数学模型非常相似, 因而有关的技术可以相互借用.

谱域方法应用的范围很广, 它可以用来解决电磁场边值问题, 也可以用在天线的近场测量和诊断等场合, 或是分层介质问题的处理, 以及求解散射问题或 Weiner-Hopf 几何结构的某些问题.

将谱域法应用于天线问题分析, 由天线的口径场分布, 通过 Fourier 变换, 可得到它的平面波谱, 而平面波谱包含有远场信息, 从而可求得天线的远区辐射方向图; 或通过其反变换, 由远区辐射方向图反演近场信息, 为微波天线问题的计算提供了极大的方便^[58].

8.2 频率选择表面的分析

8.2.1 频率选择表面

频率选择表面 (FSS) 最初的应用是在抛物面天线上, 随着隐身技术发展的要求, FSS 被引入吸波材料中. 吸波材料是一种重要的军事隐身功能材料, 其作用是减少或消除雷达、红外线等对目标探测的可能性, 是实现武器装备隐身的重要手段之一, 其开发和应用在隐身技术发展中占有重要的地位.

吸波材料的基本原理是通过某些物理作用机制将电磁波能量转化为其它形式运动的能量, 并通过该运动的耗散作用转化为热能. 电磁波可能激发的一切形式的有耗运动皆可成为吸波机制. 常见的作用机制有电感应、磁感应、电磁感应、电磁散射等. 实际应用的材料中常常可能有多种机制起作用.

当频率选择表面 (FSS-Frequency Selective Surface) 覆盖于介电或金属物体表面时, 会对入射到其上的电磁波产生频率上的特殊效应. 这种特殊的平面电磁材料, 是一种对频率反应作过特殊设计和精密分析的电磁复合材料. 通常的作法是由大量导体贴片单元 (带阻型) 或导体屏周期性开孔单元 (带通型) 组成的二维周期性阵列结构当入射电磁波频率在单元的谐振频率上时, FSS 呈现出全反射 (带阻型) 或全透射 (带通型), 其它频率的电磁波可透过 FSS (带阻型) 或被全反射 (带通型). FSS 通常需要由衬底支撑, 构成金属 - 介质光子带隙材料. 通过合理设计, 如将多屏 FSS 级联可实现精确控制电磁波的反射与传输. FSS 也可应用于如人工介质、光学和准光器件, 天线反射器的双色面和天线罩等.

对这一类结构散射特性的分析, 以往是采用模匹配法, 即首先对导电板建立积分方程, 然后将未知电流展开成正交模函数的完备集, 再用矩量法决定模系数. 对口径问题, 则是将口径场用正交模展开. 这个方法在频率较低的情况下是很有效的. 但是在带条或孔径的尺寸比较大的情况下, 例如大于两个波长, 则如果要得到精确解, 矩阵的阶数就很高, 数值计算十分费时. 即使改用高频技术, 例如几何绕射理论, 对于这样复杂的几何结构也难以对付. 但用谱域迭代法, 可以较容易地解决这一问题. 这种方法把卷积形式的积分方程变成了代数方程, 并且由于结构是周期性的, 因而变换就成为离散 Fourier 变换 (DFT). 这种变换可以用有效的快速算法即快速 Fourier 变换 (FFT) 来完成. 积分方程经过变换后所得到的代数方程, 可以用迭代法求解, 最后就可以同时解出口径场和金属片上的感应电流. 这种方法避免了计算矩阵元素和矩阵求逆, 并且迭代过程中还可以检验边界条件满足的程度. 此外, 结合变分法还可以加快迭代过程的收敛速度.

8.2.2 FSS 散射问题的建立

I. 入射场

建立 FSS 电磁散射问题的第一步是将 FSS 的散射场与 FSS 上感应的表面电流联系起来. 我们假设 FSS 无限薄, 且为孤立理想导体片. 坐标系如图 8.1a 所示, FSS 几何分布如图 8.1b 所示

[12, 35].

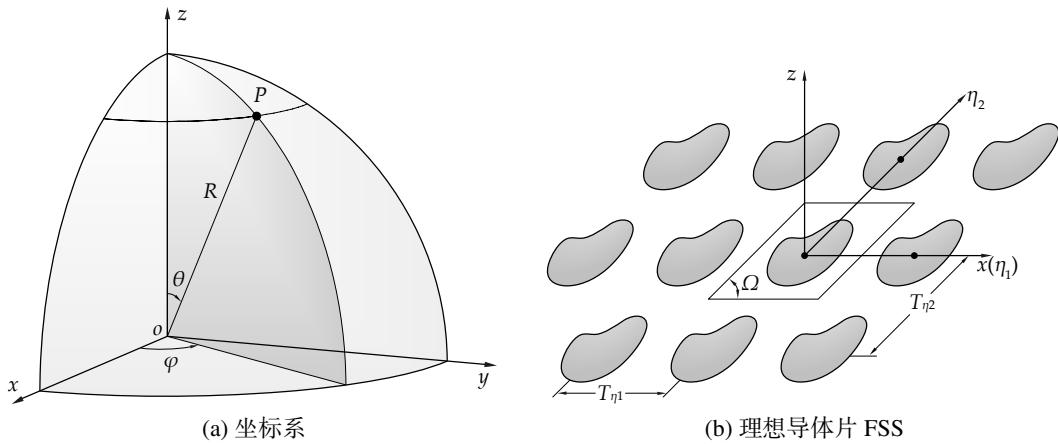


图 8.1 频率选择表面

考虑具有恒定幅度和线性相位的激励场, 其它激励场可以分解为其线性叠加. 时谐平面波激励的矢量位为

$$\mathbf{A}^i(\rho, z) = \hat{\mathbf{z}} a^i e^{j(\mathbf{k}_0^i \cdot \rho + \omega t)} e^{jkz \cos \theta} \quad (8.1)$$

其中

$$\mathbf{k}_0^i = \hat{\mathbf{x}} k_{x_0} + \hat{\mathbf{y}} k_{y_0} = \hat{\mathbf{x}} k \sin \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} k \sin \theta \sin \varphi$$

其中 k 是介质中波数, a^i 是幅度.

II. 散射场的 Floquet 表示

设 \mathbf{J} 是 FSS 上的感应表面电流密度, \mathbf{A} 是此电流产生的磁矢量位. 一般地, 由于 FSS 的平面结构, 产生的表面电流 \mathbf{J} 仅有横向分量. 设时间参量是 $e^{j\omega t}$, 可以得到 z 坐标下 \mathbf{A} 的横向分量与 \mathbf{J} 的表出关系:

$$\mathbf{A}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}(\rho, z) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\rho' \quad (8.2)$$

或写作

$$\begin{bmatrix} A_x(x, y) \\ A_y(x, y) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{G}}(x, y) * \begin{bmatrix} J_x(x, y) \\ J_y(x, y) \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

其中, $\bar{\mathbf{G}} = \frac{\exp(-jk_0\rho)}{\rho} \bar{\mathbf{I}}$, $\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$. k_0 是自由空间波数. $*$ 表示卷积.

第二步是用矢量位 \mathbf{A} 的横向分量来表示 $z = 0$, 即 FSS 所在平面内的散射电场 \mathbf{E}^s 的横向分量, 根据

$$\mathbf{E}^s(\rho, z) = \frac{j\omega \epsilon}{\nabla \nabla + k^2 \bar{\mathbf{I}}} \mathbf{A}(\rho, z) \quad (8.4)$$

得到横向场分量关系为:

$$\begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

根据 Floquet 条件, 整个 $z' = 0$ 平面上的电流的支撑可以压缩至一个单元上, 即

$$\mathbf{J}(\rho) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_{mn} \Psi_{mn}(\rho) \quad (8.6a)$$

其中

$$\tilde{J}_{mn} = \int_{\partial^s} \mathbf{J}(\rho') \Psi_{mn}^*(\rho') d\rho' \quad (8.6b)$$

若 FSS 单元为矩形 ($\Omega = 90^\circ$), 则式 (8.6a) 中 m, n 次 Floquet 谐波为

$$\Psi_{mn}(\rho) = \frac{1}{(T_{\eta_1} T_{\eta_2})^{1/2}} e^{jk_{mn} \cdot \rho} \quad (8.7)$$

对应的传播常数

$$\mathbf{k}_{mn} = \hat{x}k_{x_m} + \hat{y}k_{y_n},$$

其中

$$k_{x_m} = \frac{2\pi}{T_{\eta_1}} m + k_{x_0}, \quad k_{y_n} = \frac{2\pi}{T_{\eta_2}} n + k_{y_0}$$

则传播矢量的 z 分量为

$$k_{z_{mn}} = (k^2 - k_{x_m}^2 - k_{y_n}^2)^{1/2}$$

其中若 $k_{x_m}^2 + k_{y_n}^2 > k^2$, 应取负虚部.

利用变换对

$$\frac{e^{-jkR}}{4\pi R} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm jk_z z}}{2jk_z} e^{jk \cdot (\rho - \rho')} d\mathbf{k} \quad (8.8)$$

其中传输矢量是连续值, \pm 分别对应 $z \leq 0$. 再利用变换对

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\mathbf{k}_{mn} - \mathbf{k}) \cdot \rho} d\rho = \delta(\mathbf{k}_{mn} - \mathbf{k})$$

交换积分和求和次序, 代入式 (8.6a) 及式 (8.2), 得到

$$\mathbf{A}(\rho, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_{mn} \frac{e^{\pm jk_{z_{mn}} z}}{2jk_{z_{mn}}} \Psi_{mn}(\rho) \quad (8.9)$$

再根据 (8.4), 得到散射电场

$$\mathbf{E}^s(\rho, z) = \frac{1}{2\omega\epsilon} \sum_m \sum_n \frac{1}{2jk_{zmn}} \begin{bmatrix} k^2 - k_{x_m}^2 & -k_{x_m}k_{y_n} \\ -k_{x_m}k_{y_n} & k^2 - k_{y_n}^2 \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{mn} \Psi_{mn}(\rho) e^{\pm jk_{zmn}z} \quad (8.10)$$

散射磁场也可类似求得

$$\mathbf{H}^s(\rho, z) = \nabla A(\rho, z) \quad (8.11)$$

对于一般性的 Ω , 有

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_x^s(\alpha, \beta) \\ \tilde{E}_y^s(\alpha, \beta) \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \begin{bmatrix} k_0 - \alpha^2 & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & k_0 - \beta^2 \end{bmatrix} \tilde{\bar{\mathbf{G}}}(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} \tilde{J}_x^s(\alpha, \beta) \\ \tilde{J}_y^s(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

其中

$$\tilde{\bar{\mathbf{G}}}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{-j}{2(k_0^2 - \alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \bar{\mathbf{I}}, & k_0^2 > \alpha^2 + \beta^2 \\ \frac{1}{2(\alpha^2 + \beta^2 - k_0^2)^{\frac{1}{2}}} \bar{\mathbf{I}}, & \text{其它} \end{cases}$$

α, β 分别是 x, y 经过 Fourier 变换后的变量. 当 FSS 是严格双周期 (无限大), 则感应电流 \mathbf{J} 的 Fourier 变换为离散值, 记为一系列谱域参量 Floquet 模式 α_{mn} 和 β_{mn} , 其精确表达式为:

$$\alpha_{mn} = \frac{2\pi m}{T_{\eta_1}} + k_0 \sin \theta \cos \varphi \quad (8.13)$$

$$\beta_{mn} = \frac{2\pi n}{T_{\eta_2} \sin \Omega} - \frac{2\pi m}{T_{\eta_1}} \cot \Omega + k_0 \sin \theta \sin \varphi \quad (8.14)$$

对式 (8.12) 做 Fourier 反变换, 并强制边界条件, 在 FSS 的导电表面处令 $\mathbf{E}^s = -\mathbf{E}^i$, 于是得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} k_0^2 - \alpha_{mn}^2 & -\alpha_{mn}\beta_{mn} \\ -\alpha_{mn}\beta_{mn} & k_0^2 - \beta_{mn}^2 \end{bmatrix} \cdot \tilde{\bar{\mathbf{G}}}(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \begin{bmatrix} \tilde{J}_x^s(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \\ \tilde{J}_y^s(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix} e^{j(\alpha_{mn}x + \beta_{mn}y)} \\ &= \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx} & \tilde{G}_{xy} \\ \tilde{G}_{yx} & \tilde{G}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_x^s(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \\ \tilde{J}_y^s(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix} e^{j(\alpha_{mn}x + \beta_{mn}y)} = - \begin{bmatrix} E_x^i(x, y) \\ E_y^i(x, y) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.15)$$

其中为了简化表达, $\bar{\mathbf{G}}$ 的分量中已经包含了前面的系数等. 一旦通过解上述方程确定了感应电流, 其它我们关心的物理量, 比如反射和传输系数, 以及 FSS 的散射矩阵等都可以求出.

对于孔状的 FSS (电感性), 我们可以应用对偶原理, 用 \mathbf{H} 替换 \mathbf{E} , 并且利用 FSS 几何上的对称性, 可利用孔径上的电场 \mathbf{E}^a 定义磁流密度 \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}^a \times \hat{\mathbf{z}} \quad (8.16)$$

可以得到关于 E^a 的横向分量的下列方程:

$$-\frac{2}{j\omega\mu_0} \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} \alpha_{mn}\beta_{mn} & k_0^2 - \alpha_{mn}^2 \\ -k_0^2 + \beta_{mn}^2 & -\alpha_{mn}\beta_{mn} \end{bmatrix} \tilde{\bar{G}}(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \cdot \begin{bmatrix} E_x^a(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \\ E_y^a(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix} e^{j(\alpha_{mn}x + \beta_{mn}y)} = \begin{bmatrix} H_x^i \\ H_y^i \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

必须指出的是, 上式仅限于理想导体 FSS. 如果 FSS 具有有限的导电率, 我们就必须采用求解 FSS 导电部分电流的方法, 而不能直接求解孔径内的场.

III. 带有介质层的 FSS

实际应用中, FSS 结构可能是 i) 嵌入在有限厚度的介质层中, ii) 印制在基片上, iii) 夹在两层介质中间. 如图 8.2 所示.

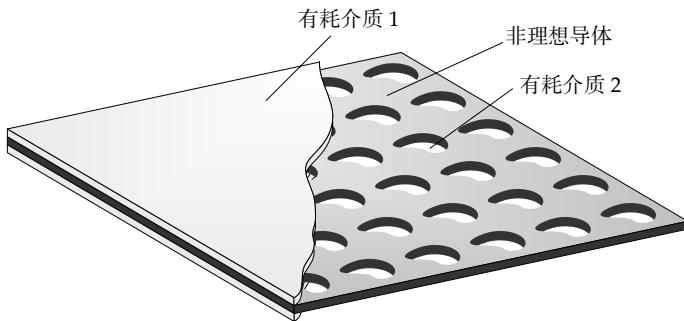


图 8.2 夹介质层的 FSS

考虑带有一层基板和一层覆盖层的情况. 为了修正前述孤立 FSS 的感应电流的算子方程, 我们简单地把 (8.15) 式中的谱域并矢格林函数用新的考虑了基板和覆盖层的格林函数替换掉. 多层介质的谱域并矢格林函数可以方便地用谱域导抗法求得.

仍然用 J_x 和 J_y 来表示表面电流, 入射场产生的表面电流方程可以表示为

$$-\begin{bmatrix} E_x^i(x, y) \\ E_y^i(x, y) \end{bmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx}^e & \tilde{G}_{xy}^e \\ \tilde{G}_{yx}^e & \tilde{G}_{yy}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_x(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \\ \tilde{J}_y(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix} e^{j(\alpha_{mn}x + \beta_{mn}y)} \quad (8.18)$$

其中

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx}^e & \tilde{G}_{xy}^e \\ \tilde{G}_{yx}^e & \tilde{G}_{yy}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}^e \cos^2 \theta + \tilde{Z}^h \sin^2 \theta & (\tilde{Z}^e - \tilde{Z}^h) \sin \theta \cos \theta \\ (\tilde{Z}^e - \tilde{Z}^h) \sin \theta \cos \theta & \tilde{Z}^e \sin^2 \theta + \tilde{Z}^h \cos^2 \theta \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

而

$$\tilde{Z}^{e,h} = \frac{1}{Y^{+e,h} + Y^{-e,h}}, \quad Y^{+e,h} = Y_1^{e,h} \frac{Y_1^{e,h} + Y_0^{e,h} \coth \gamma_1 t_1}{Y_1^{e,h} \coth \gamma_1 t_1 + Y_0^{e,h}}, \quad Y^{-e,h} = Y_2^{e,h} \frac{Y_2^{e,h} + Y_0^{e,h} \coth \gamma_2 t_2}{Y_2^{e,h} \coth \gamma_2 t_2 + Y_0^{e,h}},$$

$$Y_i^e = j\omega \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r i}{\gamma_i}, \quad Y_i^h = -\frac{\gamma_i}{j\omega\mu_0}, \quad \gamma_i = (\alpha_{mn}^2 + \beta_{mn}^2 - \varepsilon_r i k_0^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctan \frac{\beta_{mn}}{\alpha_{mn}}$$

入射场在导电表面的横向分量是通过在每个介质层中建立 z 方向矢量势来得到的。在每个界面处应用适合的连续性边界条件，就可以得到以下两个表达式，分别代表 TE 模和 TM 模：

$$\text{TE: } \begin{bmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{bmatrix} = j(R_1 + R_2) e^{j(\alpha x + \beta y)} \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

$$\text{TM: } \begin{bmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{bmatrix} = \frac{\gamma_1}{\omega \epsilon_r \epsilon_0} (R_1 - R_2) e^{j(\alpha x + \beta y)} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

其中

$$R_1 = \frac{\gamma_0}{D \sinh \gamma_1 t_1} [\bar{\gamma}_2^2 + \gamma_0 \bar{\gamma}_1 + (\gamma_0 + \bar{\gamma}_1) \bar{\gamma}_2 \coth \gamma_2 t_2], \quad \bar{\gamma}_i = \begin{cases} \gamma_i, & \text{TE} \\ \gamma_i / \epsilon_{ri}, & \text{TM} \end{cases}$$

$$R_2 = -\frac{\gamma_0}{D \sinh \gamma_1 t_1} [\bar{\gamma}_2^2 - \gamma_0 \bar{\gamma}_1 + (\gamma_0 - \bar{\gamma}_1) \bar{\gamma}_2 \coth \gamma_2 t_2]$$

$$D = (\gamma_0 + \bar{\gamma}_1^2) \bar{\gamma}_2 \coth \gamma_2 t_2 + (\gamma_0 + \bar{\gamma}_2^2) \bar{\gamma}_1 \cdot \coth \gamma_1 t_1 + (\bar{\gamma}_1^2 + \bar{\gamma}_2^2) \gamma_0 + 2\gamma_0 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \coth \gamma_2 t_2 \coth \gamma_1 t_1,$$

当金属具有有限电导率时，屏表面的总电场不再为 0，需要对式 (8.15) 和式 (8.18) 作出修正。对于薄导体层来说，表面的总电场即等于表面阻抗与表面电流密度之积，即

$$\begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{bmatrix} - Z_s \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} = 0 \quad (8.22)$$

其中 Z_s 是无限大薄导体层的阻抗。将式 (8.22) 代入式 (8.15) 和式 (8.18) 等即可得到处理有限电导率金属层 FSS 的方程。对于孤立 FSS：

$$-\begin{bmatrix} E_x^i(x, y) \\ E_y^i(x, y) \end{bmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx} & \tilde{G}_{xy} \\ \tilde{G}_{xy} & \tilde{G}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_x(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \\ \tilde{J}_y(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix} \cdot e^{j(\alpha_{mn}x + \beta_{mn}y)} - Z_s \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

对于介质层中的 FSS：

$$-\begin{bmatrix} E_x^i(x, y) \\ E_y^i(x, y) \end{bmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx}^e & \tilde{G}_{xy}^e \\ \tilde{G}_{xy}^e & \tilde{G}_{yy}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_x(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \\ \tilde{J}_y(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix} \cdot e^{j(\alpha_{mn}x + \beta_{mn}y)} - Z_s \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

8.2.3 矩量法解算子方程

首先将式 (8.23) 和 (8.24) 改写为符号形式

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (8.25)$$

其中 \mathbf{u} 或代表未知感应电流 \mathbf{J} 或孔径场 \mathbf{E}^a (取决于我们是求解贴片或孔径型 FSS), \mathbf{g} 对应已知的入射 \mathbf{E}^i 或 \mathbf{H}^i 场, \mathbf{L} 是算子. 首先将 \mathbf{u} 表示为一系列基函数 $\{\mathbf{f}_i\}$

$$\mathbf{u} = \sum_i C_i \mathbf{f}_i \quad (8.26)$$

其中 $\{C_i\}$ 是待求系数. 将 (8.26) 代入 (8.25), 并按 Галёркин 法, 选 \mathbf{f} 为检验函数, 则 (8.25) 转化为下列矩阵方程

$$\left[f_j, \sum_i C_i \mathbf{L} \mathbf{f}_i \right] = [f_j, \mathbf{g}], \quad j = 1, 2, \dots \quad (8.27)$$

其中标量积 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ 定义为

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{cases} \int_{\text{plate}} \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} \, ds & \text{贴片} \\ \int_{\text{aperture}} \mathbf{a}^* \times \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{z}} \, ds & \text{孔径} \end{cases}$$

其中 \mathbf{a}^* 是 \mathbf{a} 的复共轭.

求解的效率与基函数的选择有很大关系. 选择时应当考虑以下几个方面. 第一, 为了使用以表示未知电流的基函数数目最少, 使矩阵尺寸最小, 这些基函数应当满足合适的边界条件. 第二, 选择可以进行解析 Fourier 变换的基函数脚腕方便, 这样在变换域下使用算子方程 (8.23) 和 (8.24) 时就无需数值求解. 第三, 为了不用花费大量的时间来计算矩阵元素中的标量积, 基函数的变换应对较大的 α 和 β 可以较快收敛. 第四的考虑的因素是, 若精确表示未知表面电流密度或孔径场所需的基函数数目太大, 就应使用迭代而不是 Gauss 消去类的方法.

I. 全域基函数

总体来说有两类方法, 全域基和分域基. 首先考虑全域基. 一般来说, 全域基函数支撑在整个待求 FSS 单元域上, 并针对区域的特定几何形状加以定制. 例如, 对于类似偶极子、方形贴片、圆形贴片、十字、耶路撒冷十字等单元, 都已经成功地求得全域基函数. 圆环和方环也得到了深入的研究. 这些花样如图 8.3 所示.

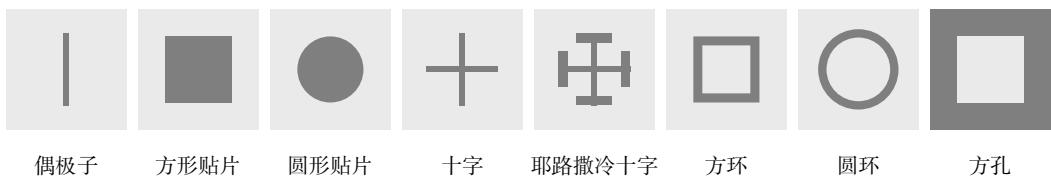


图 8.3 FSS 常见花样

采用 Галёркин 法, 对 (8.27) 采用合适的基函数和测试函数, 可得到求解未知系数 C_j 的矩阵

方程

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \int J_{xi}^* E_x^i ds \\ \int J_{yi}^* E_y^i ds \end{bmatrix} &= \sum_i \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} \tilde{J}_{xi}^* & 0 \\ 0 & \tilde{J}_{yi}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx} & \tilde{G}_{xy} \\ \tilde{G}_{xy} & \tilde{G}_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{J}_{xj}(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) & 0 \\ 0 & \tilde{J}_{yj}(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{xj} \\ C_{yj} \end{bmatrix} \\ &\quad - Z_s \begin{bmatrix} C_{xj} \int J_{xi}^* J_{xj} ds \\ C_{yj} \int J_{yi}^* J_{yj} ds \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (8.28) \end{aligned}$$

一些典型的 FSS 花样的的全域基函数如下:

1. 长方形孔径或贴片

$$\begin{aligned} E_{xpq}^a &= \hat{x} \frac{T_p\left(\frac{2}{b}x\right)}{\left[1 - \left(\frac{2}{b}x\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin\left[\frac{q\pi}{d}\left(y + \frac{d}{2}\right)\right], & E_{yrs}^a &= \hat{y} \frac{T_s\left(\frac{2}{d}y\right)}{\left[1 - \left(\frac{2}{d}y\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin\left[\frac{r\pi}{b}\left(x + \frac{b}{2}\right)\right] \\ J_{xpq} &= \hat{x} \frac{T_p\left(\frac{2}{d}y\right)}{\left[1 - \left(\frac{2}{d}y\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin\left[\frac{r\pi}{b}\left(x + \frac{b}{2}\right)\right], & J_{yrs}^a &= \hat{y} \frac{T_s\left(\frac{2}{b}x\right)}{\left[1 - \left(\frac{2}{b}x\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin\left[\frac{q\pi}{d}\left(y + \frac{d}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

其中 $p, s = 0, 1, \dots, q, r = 1, 2, \dots, T_i$ 是 i 阶第一类 Чебышев 函数.

2. 圆形孔径或贴片

$$\begin{aligned} E_{\rho pq}(\rho, \varphi) &= \hat{\rho} \frac{T_p\left(\frac{2}{d}\rho\right)}{\left[1 - \left(\frac{2}{d}\rho\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} e^{jq\varphi}, & E_{\varphi rs}(\rho, \varphi) &= \hat{\varphi} \left[1 - \left(\frac{2}{d}\rho\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} U_r\left(\frac{2}{d}\rho\right) e^{js\varphi} \\ J_{\varphi pq}(\rho, \varphi) &= \hat{\varphi} \frac{T_p\left(\frac{2}{d}\rho\right)}{\left[1 - \left(\frac{2}{d}\rho\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} e^{jq\varphi}, & J_{\rho rs}(\rho, \varphi) &= \hat{\rho} \left[1 - \left(\frac{2}{d}\rho\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} U_r\left(\frac{2}{d}\rho\right) e^{js\varphi} \end{aligned}$$

其中, $\rho = 0, 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots, q, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, U_r$ 是 r 阶第二类 Чебышев 函数.

3. 细线振子或开槽

$$J_{yp} = \hat{y} \sin \left[\frac{p\pi}{L} \left(y + \frac{L}{2} \right) \right] P_x(0, W) P_y(0, L), \quad J_x = 0$$

$$E_{yp}^a = \hat{y} \sin \left[\frac{q\pi}{L} \left(y + \frac{L}{2} \right) \right] P_x(0, W) P_y(0, L), \quad E_x^a = 0$$

其中 $p = 1, 2, \dots, q = 0, 1, 2, \dots$, 而

$$P_x(x_0, D) = \begin{cases} 1, & |x - x_0| \leq \frac{D}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad P_y(y_0, D) = \begin{cases} 1, & |y - y_0| \leq \frac{D}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

II. 分域基函数

一般来讲, 采用全域基时, 对应于 (8.28) 的矩阵尺寸不会超过 20×20 . 而精确表示电流或孔径场所需的分域基函数数目则要大出一个数量级. 此外, 除非 α_{mn} 和 β_{mn} 中的 m 和 n 很大, 分域基的 Fourier 变换收敛不是很快, 这样就需要更多的 Floquet 谐波项使之收敛. 然而, 可以通过快速 Fourier 变换方法 (FFT) 来加速收敛. 若发现式 (8.28) 的矩阵尺寸太大, 无法用传统消去法求解, 可能就需要使用迭代方法来求解^[9].

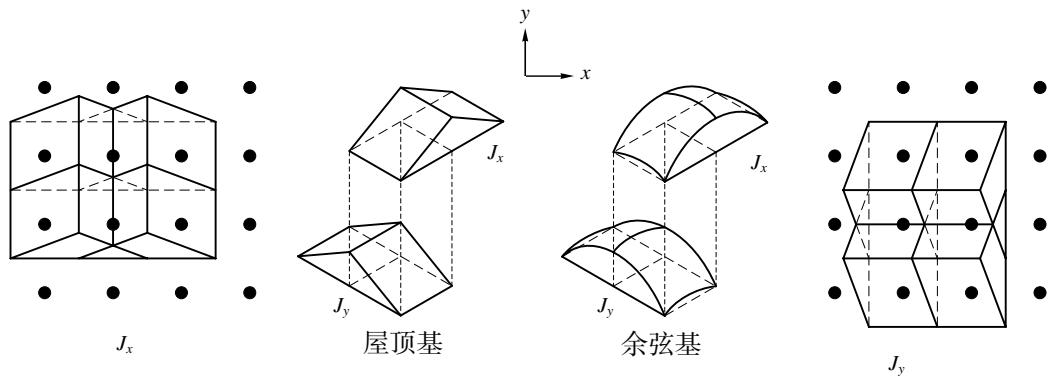


图 8.4 用以表示电流的屋顶基和余弦基函数

最常用的分域基是屋顶函数, 使得散射场可以用一个收敛的级数来表示. 如图 8.4 所示, 在垂直网格边界的方向上电流趋近于零, 而在平行网格方向上不为零. 电流的每个分段都横跨两个网格, 每个网格上至少有一个 \hat{x} 方向和一个 \hat{y} 方向的屋顶基叠加. 坐标系选择时, 采样点处在每个网格的中央.

对于孔径表面, 或在周期性单元边界上有金属跨接的结构, 可在单元边界上设置屋顶基函数, 使得电流可以跨过边界流入相邻单元. 相对边界的电流可用 Floquet 条件来约束, 所以仅取一侧即可. 考虑如式 (8.24) 中关于电流密度分布的一般问题. 若网格划分为 $M \times N$ 个节点, J_x 和 J_y

可用如下形式表示

$$J_x = \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} I_x(m, n) B_x(m, n) \quad (8.29)$$

$$J_y = \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} I_y(m, n) B_y(m, n) \quad (8.30)$$

其中 B_x 和 B_y 是分域基函数, I_x 和 I_y 是应分段对应电流元的未知幅度. 很明显, 位于贴片外的分域权重应为零.

电流基函数可以用下列方程来描述:

$$B_x(m, n) = \Lambda\left(m + \frac{1}{2}\right) \Pi(n) \quad (8.31)$$

$$B_y(m, n) = \Lambda(m) \Pi\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (8.32)$$

其中对于采用屋顶基的离散方式, 有

$$\Pi(n) = \begin{cases} 1, & |y - n\Delta y| < \frac{\Delta y}{2}, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \Lambda(m) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - m\Delta x|}{\Delta x}, & |x - m\Delta x| < \Delta x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对于余弦基离散, 则有

$$\Pi(n) = \begin{cases} \cos k_0 y, & |y - n\Delta y| < \frac{\Delta y}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \Lambda(m) = \begin{cases} \frac{\sin k_0(\Delta x - |x|)}{\Delta x \Delta y \sin k_0 \Delta x}, & |x - m\Delta x| < \Delta x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

此处 $\Delta x = t_x/M$, $\Delta y = t_y/N$.

一种较好的划分是将单元划分为 $N \times N$ 个节点, 采用等尺寸屋顶基函数. 这样的离散化就可以对算子方程中的二重积分进行 FFT.

III. 边界条件

共轭梯度法的收敛速度与方程算子的条件数直接相关. 而该条件数与施加边界条件的方式有密切关系. 此处应用电场边界条件, 该阻抗边界条件可表示为

$$\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i - Z_s \mathbf{J}_s = 0 \quad (8.33)$$

其中 Z_s 是无限大薄阻片的波阻抗. 通过用测试函数求积分来进行检验, 式中 S 是测试函数的支撑集:

$$\int_S \mathbf{T} \cdot (\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i - Z_s \mathbf{J}_s) ds = 0 \quad (8.34)$$

分别用 T 和 B 来代表式(8.24)中的测试函数和基函数,对于屋顶基和余弦基函数,改变积分顺序,对应的算子方程可以改写为

$$\begin{aligned}
 -\begin{bmatrix} E_{x0} \tilde{T}_x^*(0,0) P^*(p + \frac{1}{2}, q) \\ E_{y0} \tilde{T}_y^*(0,0) P^*(p, q + \frac{1}{2}) \end{bmatrix} &= \left\{ \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx}(m,n) & \tilde{G}_{xy}(m,n) \\ \tilde{G}_{yx}(m,n) & \tilde{G}_{yy}(m,n) \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. \left\{ \sum_{t=-N/2}^{N/2-1} \sum_{s=-M/2}^{M/2-1} e^{-j(k_{xs}m\Delta x + k_{yt}n\Delta y)} \begin{bmatrix} I_x(s,t) \\ I_y(s,t) \end{bmatrix} \right\} \cdot e^{j(k_{xm}p\Delta x + k_{yn}q\Delta y)} \right\} \\
 &\quad + Z_s \begin{bmatrix} F_x(p,q) & 0 \\ 0 & F_y(p,q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x(p,q) \\ I_y(p,q) \end{bmatrix} \quad (8.35)
 \end{aligned}$$

其中

$$P(m,n) = e^{-j(k_{xi}m\Delta x + k_{yi}n\Delta y)}$$

或写作

$$\begin{aligned}
 -\begin{bmatrix} E_{x0} \tilde{T}_x^*(0,0) P^*(p + \frac{1}{2}, q) \\ E_{y0} \tilde{T}_y^*(0,0) P^*(p, q + \frac{1}{2}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P^*(p,q) & 0 \\ 0 & P^*(p,q) \end{bmatrix} \text{FFT}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx}(m,n) & \tilde{G}_{xy}(m,n) \\ \tilde{G}_{yx}(m,n) & \tilde{G}_{yy}(m,n) \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. \text{FFT} \left\{ \begin{bmatrix} P(s,t) & 0 \\ 0 & P(s,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x(s,t) \\ I_y(s,t) \end{bmatrix} \right\} \right\} + Z_s \begin{bmatrix} F_x(p,q) & 0 \\ 0 & F_y(p,q) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_x(p,q) \\ I_y(p,q) \end{bmatrix} \quad (8.36)
 \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{G}'_{xx} = -A \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{k_0^2 - k_{x'm'}^2}{k_{z_{n'm'}}} \tilde{B}_x(m', n') \tilde{T}_x^*(m', n') \quad (8.37a)$$

$$\tilde{G}'_{xy} = A \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{k_{x'm'} k_{y'n'}}{k_{z_{n'm'}}} \tilde{B}_y(m', n') \tilde{T}_x^*(m', n') \cdot e^{j[k_{x'm'}(\Delta x/2) - k_{y'n'}(\Delta y/2)]} \quad (8.37b)$$

$$\tilde{G}'_{yx} = A \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{k_{x'm'} k_{y'n'}}{k_{z_{n'm'}}} \tilde{B}_x(m', n') \tilde{T}_y^*(m', n') \cdot e^{-j[k_{x'm'}(\Delta x/2) - k_{y'n'}(\Delta y/2)]} \quad (8.37c)$$

$$\tilde{G}'_{yy} = -A \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{k_0^2 - k_{y'n'}^2}{k_{z_{n'm'}}} \tilde{B}_y(m', n') \tilde{T}_y^*(m', n') \quad (8.37d)$$

其中

$$A = \frac{\eta_0}{2k_0} \frac{\Delta x \Delta y}{t_x t_y}$$

\tilde{B} 和 \tilde{T} 分别是基函数和测试函数的 Fourier 变换. 使用 $M \times N$ FFT 时, $m' = m + rM$, $n' = n + sN$, $-N/2 \leq n \leq N/2 - 1$, $-M/2 \leq m \leq M/2 - 1$.

若定义 $\alpha = k_{x_n} \Delta x, \beta = k_{y_m} \Delta y$, 则对于屋顶基函数:

$$\tilde{B}_x(m, n) = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\tilde{B}_y(m, n) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

对于余弦基函数:

$$\tilde{B}_x(m, n) = \frac{k_0}{\Delta x} \frac{1}{k_0^2 - \left(\frac{\alpha}{\Delta x}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sin k_0 \Delta x} (\cos \alpha - \cos k_0 \Delta x) \cdot \left(\operatorname{sinc} \frac{k_0 \Delta y - \beta}{2} + \operatorname{sinc} \frac{k_0 \Delta y + \beta}{2} \right)$$

$$\tilde{B}_y(m, n) = \frac{k_0}{\Delta y} \frac{1}{k_0^2 - \left(\frac{\beta}{\Delta y}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sin k_0 \Delta x} (\cos \alpha - \cos k_0 \Delta y) \cdot \left(\operatorname{sinc} \frac{k_0 \Delta x - \alpha}{2} + \operatorname{sinc} \frac{k_0 \Delta x + \alpha}{2} \right)$$

阻抗项 F_s 是基函数和测试函数的标量积, 可以较为简便得由解析计算求得, 定义为

$$F_x(m, n) = C_1 \delta(m-1, n) + C_2 \delta(m, n) + C_3 \delta(m+1, n) \quad (8.40a)$$

$$F_y(m, n) = D_1 \delta(m-1, n) + D_2 \delta(m, n) + D_3 \delta(m+1, n) \quad (8.40b)$$

其中 Kronecker 函数 δ 定义为

$$\delta(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{当 } m = r, n = s \text{ 时} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

s 和 r 是电流元的标号. 另外, 对于边界元素, 即 $m, n = -N/2$ 或 $N/2 - 1$, δ 函数需要作如下修正:

$$m = -\frac{M}{2} \quad \delta(m-1, n) \longrightarrow e^{jk_{x_i} t_x} \delta\left(\frac{M}{2} - 1, n\right) \quad (8.41a)$$

$$m = \frac{M}{2} - 1 \quad \delta(m+1, n) \longrightarrow e^{-jk_{x_i} t_x} \delta\left(-\frac{M}{2}, n\right) \quad (8.41b)$$

$$n = -\frac{N}{2} \quad \delta(m, n-1) \longrightarrow e^{jk_{y_i} t_y} \delta\left(m, \frac{N}{2} - 1\right) \quad (8.41c)$$

$$n = \frac{N}{2} - 1 \quad \delta(m, n+1) \longrightarrow e^{-jk_{y_i} t_y} \delta\left(m, -\frac{N}{2}\right) \quad (8.41d)$$

对于屋顶基函数和线积分测试函数, 有

$$C_1 = D_1 = \frac{1}{8} \Delta x \Delta y, \quad C_2 = D_2 = \frac{3}{4} \Delta x \Delta y \quad (8.42)$$

而对于屋顶基函数和屋顶基测试函数, 有

$$C_1 = D_1 = \frac{1}{6} \Delta x \Delta y, \quad C_2 = D_2 = \frac{2}{3} \Delta x \Delta y \quad (8.43)$$

对于屋顶基函数和余弦基函数, 计算 \tilde{G} 的无穷级数和可以进行截断. 在 $n, m \rightarrow \infty$ 时, 求和项的幅度按照下式衰减:

$$\frac{1}{mn(m^2 + n^2)^{1/2}} \quad (8.44)$$

若采用 Галёркин 方法, 该无穷级数收敛将大大加快, 其渐进形式为

$$\frac{1}{(mn)^2(m^2 + n^2)^{1/2}} \quad (8.45)$$

选用不同的基函数, 不但可以在求和时带来不同的收敛速度, 在迭代求解时也可以获得不同的收敛性.

8.2.4 场分解以及传输系数的计算

对于孤立导体单元, 可按下述方法计算传输系数. 对于介质中的 FSS, 其计算方法可参考有关文献^[35].

I. 矩形周期单元

由于表面是平面的, 我们很自然想到将场分解为 \hat{z} 向的 TE 和 TM 场, 其电势形式为

$$A_p^\pm(\rho, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{pmn}^\pm \Psi_{mn}(\rho) e^{\pm jk_{zmn} z}, \quad z \leq 0 \quad (8.46)$$

其中下标 p 代表极化. 散射常可以分解为两种极化场

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{TM}} + \mathbf{E}_{\text{TE}} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (\nabla \nabla + k^2 \bar{\mathbf{I}} \cdot) \mathbf{A}_{\text{TM}} - \nabla \mathbf{A}_{\text{TE}} \quad (8.47a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{TM}} + \mathbf{H}_{\text{TE}} = \frac{1}{j\omega\mu} (\nabla \nabla + k^2 \bar{\mathbf{I}} \cdot) \mathbf{A}_{\text{TE}} + \nabla \mathbf{A}_{\text{TM}} \quad (8.47b)$$

由于 TE 场仅由磁场的 z 分量确定, TE 势系数 $a_{\text{TE},mn}^\pm$ 可以利用式 (8.11) 和 (8.9) 求得, 或利用 (8.47b) 代入 (8.46), 并令 $\mathbf{A}_{\text{TM}} = 0$. 类似也可得到 TM 势系数 $a_{\text{TM},mn}^\pm$. 结果为

$$a_{\text{TE},mn}^+ = \frac{-j\omega\mu}{2k_{zmn}(k_{x_m}^2 + k_{y_n}^2)} (k_{y_n} \tilde{J}_{x_mn} - k_{x_m} \tilde{J}_{y_mn}), \quad a_{\text{TE},mn}^- = a_{\text{TE},mn}^+ \quad (8.48a)$$

$$a_{\text{TM},mn}^- = \frac{-1}{2j(k_{x_m}^2 + k_{y_n}^2)} (k_{y_n} \tilde{J}_{x_mn} + k_{x_m} \tilde{J}_{y_mn}), \quad a_{\text{TM},mn}^+ = -a_{\text{TM},mn}^- \quad (8.48b)$$

通过分离表面 $z = 0$ 处的切向传输和反射电场, 可以得到传输和反射系数. 由于二维表面可

能使一种极化的能量同时散射为 TE 或 TM 极化, 同时定义同向极化和交叉极化.

同向极化:

$$T_{p,00}^{p,00} = 1 + \frac{a_{p,00}^+}{a_{p,00}^i}, \quad R_{p,00}^{p,00} = \frac{a_{p,00}^-}{a_{p,00}^i}, \quad (8.49)$$

交叉极化, 下标表示入射场, 上标表示散射场:

$$T_{TE,00}^{TM,00} = \frac{a_{TE,00}^+}{a_{TE,00}^i} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad T_{TM,00}^{TE,00} = \frac{a_{TM,00}^+}{a_{TM,00}^i} \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8.50a)$$

$$R_{TE,00}^{TM,00} = \frac{a_{TM,00}^-}{a_{TE,00}^i} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad R_{TM,00}^{TE,00} = \frac{a_{TE,00}^-}{a_{TM,00}^i} \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8.50b)$$

II. 一般情况

求出散射电场之后, 可以按下式求得传输系数:

$$T_{TM} = \frac{j\omega\varepsilon_0 E_z^t}{(k_0^2 + \gamma_{mn}^2)} \sqrt{\frac{\gamma_{mn}(k_0^2 + \gamma_{mn}^2)}{\gamma_{kl}(k_0^2 + \gamma_{kl}^2)}} N_{TM} \quad (8.51)$$

$$T_{TE} = \frac{j}{\beta_{mn}} (E_x^s + j\alpha_{mn}\gamma_{mn}E_z^s) \sqrt{\frac{\gamma_{mn}(k_0^2 + \gamma_{mn}^2)}{\gamma_{kl}(k_0^2 + \gamma_{kl}^2)}} N_{TE} \quad (8.52)$$

其中

$$E_z^t = j \frac{(\alpha_{mn}E_x^s + \beta_{mn}E_y^s)}{\gamma_{mn}}, \quad \gamma_{mn} = -j\sqrt{k_0^2 - \alpha_{mn}^2 - \beta_{mn}^2} \quad \text{或} \quad -\sqrt{\alpha_{mn}^2 + \beta_{mn}^2 - k_0^2}$$

$$N_{TM} = \begin{cases} 1 & \text{TM 波入射} \\ \eta_0 & \text{TE 波入射} \end{cases}, \quad N_{TE} = \begin{cases} 1 & \text{TE 波入射} \\ 1/\eta_0 & \text{TM 波入射} \end{cases},$$

8.3 多层介质问题

在微带电路、地质探测、遥感、电波传播、埋地天线等研究领域需要计算平面分层介质中的电磁场. 随着现代民用和军用电子设备迅速向小型化、轻量化、高可靠、多功能和低成本方向发展, 多层微波集成电路技术越来越受到重视. 于是, 多层微波结构的精确电磁仿真与设计变得越来越重要. 分层介质问题长期以来都是电磁场研究中的一个热点. 其中较重要的谱域方法包括伊藤龙男提出的谱域导抗法 [22] 和方大纲等提出的离散复镜像法 (DCIM)^[11, 16, 52] 等等. 图 8.5 所示是部分分层介质传输线的例子. 图中金色部分表示导体, 灰色和天蓝色分别表示不同的介质.

下面我们首先通过合适的电磁矢量位来导出一种通用的谱域格林函数, 将复杂的分层介质问题转化成谱域传输线模型.

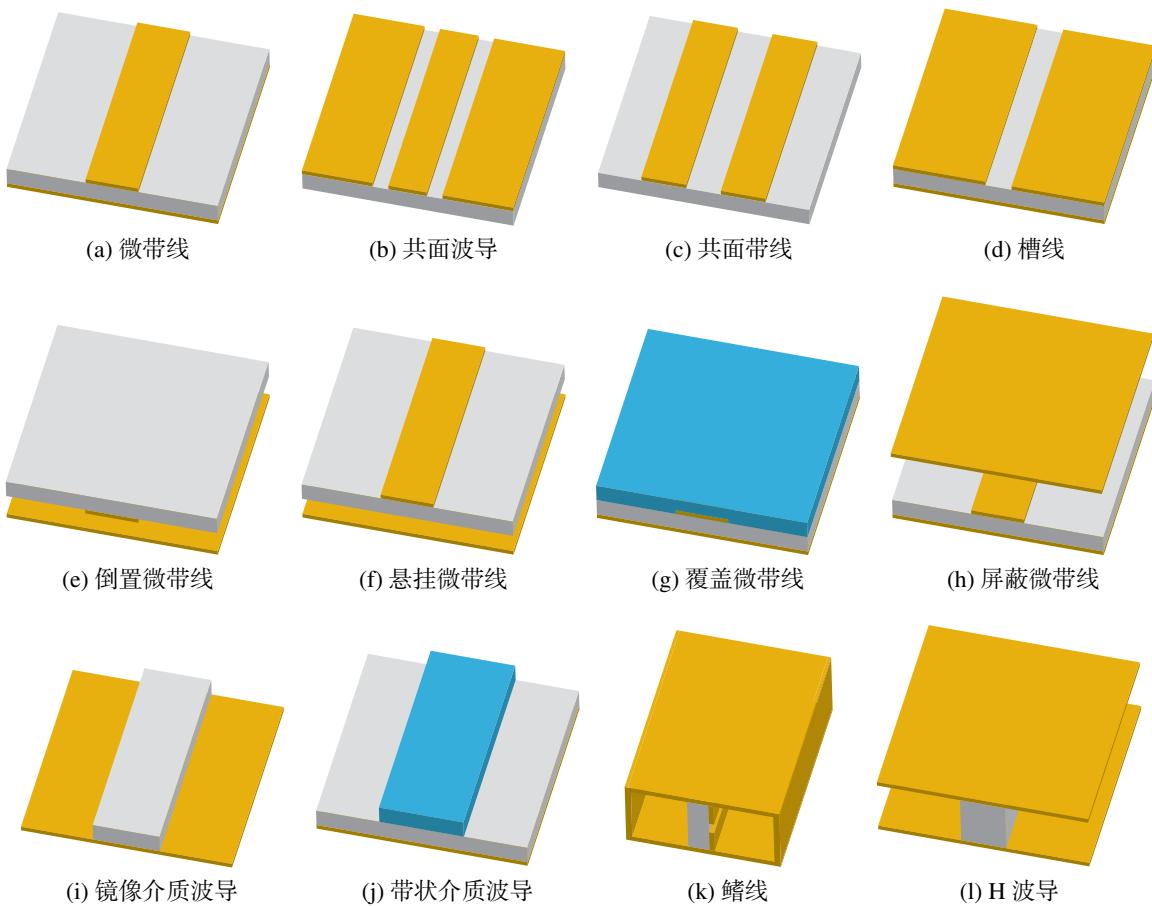


图 8.5 部分分层传输线的例子

8.3.1 多层介质的一般谱域格林函数

I. 利用电磁矢量位进行场分解

任何区域内的场都可以用电矢量位 \mathbf{F} 和磁矢量位 \mathbf{A} 完全表示^[13]. 实际上, $\{A_x, A_y, A_z, F_x, F_y, F_z\}$ 中的任意两个已经可以表示任意空间内的任意场. 对于分析如图 8.6 所示坐标系下的多层介质, 我们选用 (A_z, F_z) 来分解场. 矢量位选择为

$$\mathbf{A} = A_z(x, y, z)\hat{z} \quad (8.53)$$

$$\mathbf{F} = F_z(x, y, z)\hat{z} \quad (8.54)$$

同时设在 11 和 21 层之间, $x - y$ 平面内有任意表面电流分布, 设为

$$\mathbf{J}_s(x, y) = J_x(x, y)\hat{x} + J_y(x, y)\hat{y} \quad (8.55)$$

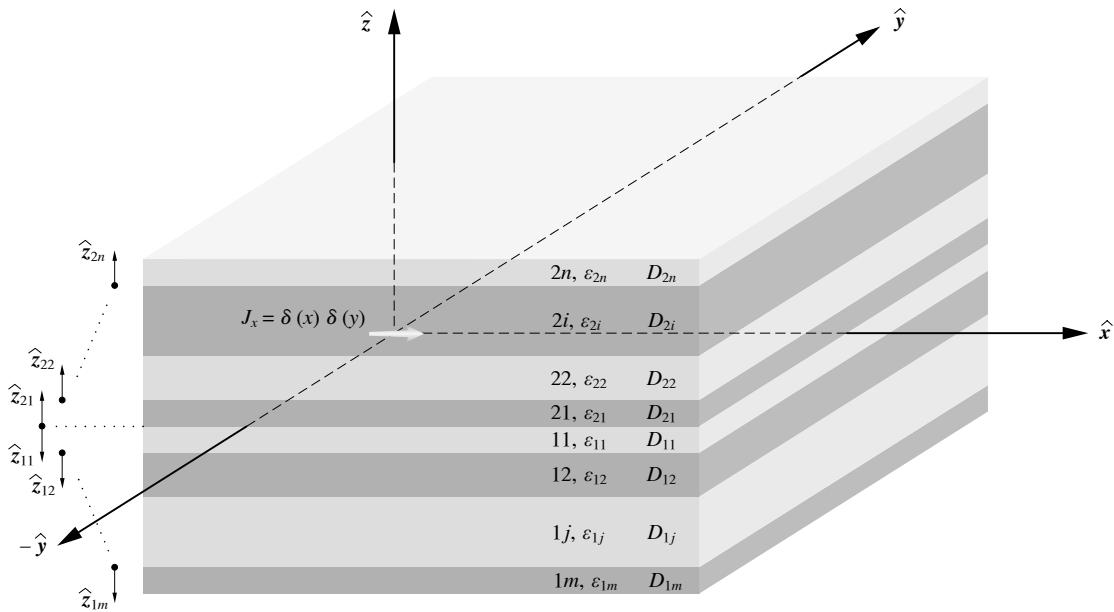


图 8.6 一般性多层介质示意图

利用相应的格林函数, 可以写出 A_z , F_z 或 \mathbf{E} , \mathbf{H} 的任意分量. 例如

$$A_z(x, y, z) = \iint_{\text{source}} [G_{A_z J_x}(x, y, z | x_0, y_0) J_x(x_0, y_0) + G_{A_z J_y}(x, y, z | x_0, y_0) J_y(x_0, y_0)] dx_0 dy_0 \quad (8.56)$$

其中格林函数可以用求解单位表面电流 $\mathbf{J}_s = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\hat{x}$ 或 $\mathbf{J}_s = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\hat{y}$ 激励下对应的场分量或矢量位来得到.

定义变换对

$$\tilde{A}_z(k_x, k_y, k_z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A_z(x, y, z) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} dx dy \quad (8.57)$$

$$A_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}_z(k_x, k_y, k_z) e^{jk_x x} e^{jk_y y} dk_x dk_y \quad (8.58)$$

对 (8.56) 式作谱域变换并代入式 (8.58), 可得

$$A_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} [\tilde{G}_{A_z J_x}(k_x, k_y, z | 0, 0) \tilde{J}_x(k_x, k_y) + \tilde{G}_{A_z J_y}(k_y, -k_x, z | 0, 0) \tilde{J}_y(k_x, k_y)] \cdot e^{jk_x x} e^{jk_y y} dk_x dk_y \quad (8.59)$$

于是针对 \tilde{A}_z 的格林函数可以写为矢量形式

$$\tilde{G}_{A_z J}(k_x, k_y, z) = [\tilde{G}_{A_z J_x}(k_x, k_y, z | 0, 0) \tilde{J}_x(k_x, k_y) + \tilde{G}_{A_z J_y}(k_y, -k_x, z | 0, 0) \tilde{J}_y(k_x, k_y)] \quad (8.60)$$

\mathbf{J}_s 的方向可以任取, 简便起见, 我们取

$$\mathbf{J}_s = \delta(x)\delta(y)\hat{\mathbf{x}} \quad (8.61)$$

II. 求解谱域格林函数

根据变换关系以及 \mathbf{J}_s , 在无源区域的 $\tilde{\mathbf{E}}$ 和 $\tilde{\mathbf{H}}$ 场量可以用 \tilde{A}_z 和 \tilde{F}_z 表示:

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = \frac{k_x}{\omega\epsilon} \cdot \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial z} - jk_x \tilde{F}_z \\ \tilde{E}_y = \frac{k_y}{\omega\epsilon} \cdot \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial z} + jk_y \tilde{F}_z \\ \tilde{E}_z = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \tilde{A}_z}{\partial z^2} + k^2 \tilde{A}_z \right) \end{cases}, \quad \begin{cases} \tilde{H}_x = jk_y \tilde{A}_z + \frac{k_x}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial \tilde{F}_z}{\partial z} \\ \tilde{H}_y = -jk_x \tilde{A}_z + \frac{k_y}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial \tilde{F}_z}{\partial z} \\ \tilde{H}_z = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{F}_z}{\partial z^2} + k^2 \tilde{F}_z \right) \end{cases} \quad (8.62)$$

于是空域的波方程

$$\nabla \nabla A_z + k^2 A_z = 0 \quad (8.63a)$$

$$\nabla \nabla F_z + k^2 F_z = 0 \quad (8.63b)$$

变换为

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}_z}{\partial z^2} + \beta^2 \tilde{A}_z = 0 \quad (8.64a)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}_z}{\partial z^2} + \beta^2 \tilde{F}_z = 0 \quad (8.64b)$$

其中 $\beta^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2$, $k = k_0 \sqrt{\epsilon_r}$, $\Im(\beta) < 0$.

对于空域中的脉冲激励, 变换到谱域后相当于平面波. 在分层介质界面上可以看成平面波入射和反射问题. 于是, 对于式 (8.64a) 和 (8.64b) 有形式解

$$\tilde{A}_{zij} = \left(e^{-j\beta_{ij} z_{ij}} + \Gamma_{Aij} e^{j\beta_{ij} z_{ij}} \right) a_{ij}(k_x, k_y) \quad (8.65a)$$

$$\tilde{F}_{zij} = \left(e^{-j\beta_{ij} z_{ij}} + \Gamma_{Fij} e^{j\beta_{ij} z_{ij}} \right) f_{ij}(k_x, k_y) \quad (8.65b)$$

注意到其与传输线上的电压电流方程类似. 其中, 对于不同的边界条件可以确定 Γ_A 、 Γ_F 、 a 和 f .

首先考虑仅存在两层介质 11 和 21 的简单情况. 于是, 式 (8.65a) 和 (8.65b) 变为

$$\tilde{A}_{z11} = \left(e^{j\beta_{11} z} + \Gamma_{A11} e^{-j\beta_{11} z} \right) a_{11} \quad (8.66a)$$

$$\tilde{A}_{z21} = \left(e^{-j\beta_{21} z} + \Gamma_{A21} e^{j\beta_{21} z} \right) a_{21} \quad (8.66b)$$

$$\tilde{F}_{z11} = \left(e^{j\beta_{11} z} + \Gamma_{F11} e^{-j\beta_{11} z} \right) f_{11} \quad (8.66c)$$

$$\tilde{F}_{z21} = \left(e^{-j\beta_{21}z} + \Gamma_{F21} e^{j\beta_{21}z} \right) f_{21} \quad (8.66d)$$

根据切向边界条件

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (8.67a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (8.67b)$$

对其作 Fourier 变换, 由于 \mathbf{J}_s 沿 x 方向, 所以在谱域中边界条件应为: $\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{H}_x$ 均在层间边界上连续, 而

$$\tilde{H}_{y21} - \tilde{H}_{y11} \Big|_{z=0} = 1 \quad (8.68)$$

根据谱域表达式 (8.62) 和上述边界条件, 可以得到 a 和 f , 结果如下

$$f_{21} = \frac{k_y \omega \mu_0 (1 + \Gamma_{F11})}{T_e (k_x^2 + k_y^2)} \quad (8.69a)$$

$$a_{21} = \frac{k_x (1 - \Gamma_{A11}) \beta_{11}}{T_m (k_x^2 + k_y^2) \varepsilon_{11}} \quad (8.69b)$$

$$f_{11} = \frac{k_y \omega \mu_0 (1 + \Gamma_{F21})}{T_e (k_x^2 + k_y^2)} \quad (8.69c)$$

$$a_{11} = -\frac{k_x (1 - \Gamma_{A21}) \beta_{21}}{T_m (k_x^2 + k_y^2) \varepsilon_{21}} \quad (8.69d)$$

其中

$$T_m = j \left[\frac{\beta_{11}}{\varepsilon_{11}} (1 + \Gamma_{A21}) (1 - \Gamma_{A11}) + \frac{\beta_{21}}{\varepsilon_{21}} (1 + \Gamma_{A11}) (1 - \Gamma_{A21}) \right]$$

$$T_e = j [\beta_{11} (1 - \Gamma_{F11}) (1 + \Gamma_{F21}) + \beta_{21} (1 - \Gamma_{F21}) (1 + \Gamma_{F11})]$$

对于多于两层的介质, 利用类似的方法, \tilde{A}_z 和 \tilde{F}_z 可以分别求出. 表达式中的 Γ 可以等效为级联传输线来进行计算. 对于磁矢量位, 等效的传输线阻抗是 (β/ε) , 也即对于 TM 波的波阻抗; 对于电矢量位, 等效传输线导纳为 (β/μ) , 与 TE 波的波导纳相同. 同时, 对于 \tilde{A}_z 的反射系数等于传输线上电流波的反射系数, 而 \tilde{F}_z 的反射系数则等于传输线上电压波的反射系数. 上述关系可写为下列形式:

$$\Gamma'_{A_{ij}} = \frac{Z_{A_{ij}} - Z_{A_{ij+1}}}{Z_{A_{ij}} + Z_{A_{ij+1}}} = \frac{\beta_{ij}/\varepsilon_{ij} - \beta_{ij+1}/\varepsilon_{ij+1}}{\beta_{ij}/\varepsilon_{ij} + \beta_{ij+1}/\varepsilon_{ij+1}} \quad (8.70)$$

$$\Gamma'_{F_{ij}} = \frac{Y_{F_{ij}} - Y_{F_{ij+1}}}{Y_{F_{ij}} + Y_{F_{ij+1}}} = \frac{\beta_{ij} - \beta_{ij+1}}{\beta_{ij} + \beta_{ij+1}} \quad (8.71)$$

其中

$$Z_{A_{ij}} = \beta_{ij}/\varepsilon_{ij}, \quad Y_{F_{ij}} = \beta_{ij}/\mu_{ij} = \beta_{ij}/\mu_0 \quad (8.72)$$

若其中第二层介质是理想导体层, 则有

$$\Gamma'_{A_{\text{pec}}} = 1, \quad Z_{A_{\text{pec}}} = 0; \quad \Gamma'_{F_{\text{pec}}} = -1, \quad Y_{F_{\text{pec}}} = \infty$$

以上公式是针对第二层介质无限厚的情况来建立的. 若其为有限厚, 或有多层介质覆盖, 则可以利用传输线关系, 迭代求解其格林函数 [13], 或采用渐近方法, 忽略某些层的影响, 在此不再赘述.

III. 在平面传输线上的应用

对于求取多层介质中无厚度、无耗的平面传输线问题, 本方法是比较方便的. 假设在 11 和 21 层之间有一宽度为 w 的导体沿 $\hat{\mathbf{y}}$ 方向延伸, 则其表面电流分布可写为

$$\mathbf{J}_s(x, y) = e^{jk_e x} f(y) \hat{\mathbf{x}} \quad (8.73)$$

其中 $k_e (= k_0 \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}})$ 是有效传播常数, $f(y)$ 是沿导体的横向电流分布. 采用类似于式 (8.60) 的方程, 用 $\tilde{G}_{E_x J_x}$ 代替 $\tilde{G}_{A_z J_x}$, 可得

$$\int_{-w/2}^{w/2} J_x(x, y) E_x(x, y, 0) dy = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{E_x J_x}(-k_e, k_y, 0 | 0, 0) F(k_y)^2 dk_y \quad (8.74)$$

其中

$$F(k_y) = \int_{-w/2}^{w/2} f(y) e^{-jk_y y} dy \quad (8.75)$$

令式 (8.74) 左端为零, 则通过解下式方程可以求得 ϵ_{eff}

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{E_x J_x}(-k_e, k_y, 0 | 0, 0) F(k_y)^2 dk_y = 0 \quad (8.76)$$

特性阻抗由下式求出

$$\begin{aligned} Z_c &= -\frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{\text{gp}}^{z=0} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{E_z J_x}(-k_e, k_y, z) F(k_y)^2 dk_y dz \right] \Bigg/ \left[\int_{-w/2}^{w/2} f(y) dy \right] \\ &= \left[\int_{\text{gp}}^{z=0} \int_{-w/2}^{w/2} E_z(x, y, z) J_x^*(x, y, z) dy dz \right] \Bigg/ \left[\int_{-w/2}^{w/2} f(y) dy \right] = \frac{V_{\text{av}}}{I} \end{aligned} \quad (8.77)$$

其中 gp 代表地平面.

8.3.2 有厚度有耗传输线的谱域解法

对于有耗有厚度的传输线, 可以采用修正的谱域解法, 分析二维平面内的场分布 [27]. 以共面波导为例, 具有厚度和损耗的共面波导截面图如图 8.7a 所示.

图中, t 是导体的厚度, σ_1 是中心导体的电导率, σ_0 是接地板的电导率. 中心导体宽度为 $2a$,

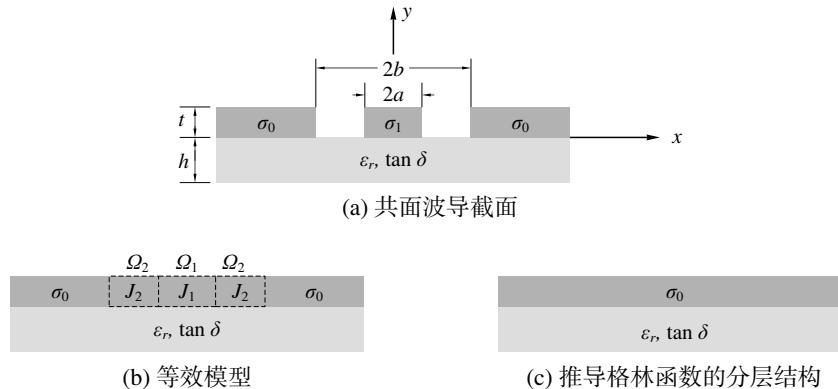


图 8.7 有耗共面波导

两接地板之间距离为 $2b$; 介质的厚度为 h , 介电常数为 ϵ_r , 损耗角正切为 $\tan \delta$.

求解时, 建立如图 8.7b 的等效模型. 其中, 中心导带和间隙均用电导率为 σ_0 的导体取代, 并分别在 Ω_1 和 Ω_2 区域添加等效电流 $\mathbf{J}_1 = (y_1 - y_0)\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{J}_2 = (y_2 - y_0)\mathbf{E}$, 其中 $y_1 = j\omega\epsilon_0 + \sigma_1$, $y_2 = j\omega\epsilon_0$, $y_0 = j\omega\epsilon_0 + \sigma_0$. 于是, 电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 和导带和间隙处等效电流 $\mathbf{J}_i(\mathbf{r})$ 之间有关系

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^2 (y_i - y_0) \int_{\Omega_i} \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (8.78)$$

其中, $\bar{\mathbf{G}}$ 是针对如图 8.7c 所示分层结构的并矢格林函数. 应当注意, 该格林函数也反映了中心导带和接地板的有耗特性.

若有 $\sigma_1 = \sigma_0$, 即中心导带和接地板具有相同的电导率, 则导带区域 Ω_1 内的等效电流 \mathbf{J}_1 为零. 于是, 仅需要对于间隙区域 Ω_2 内求解积分方程 (8.78).

所有场量均假定具有 $\exp[j(\omega t - k_z z)]$ 形式, 则 Fourier 变换对为

$$\tilde{A}(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) e^{-jk_x x} dx \quad (8.79)$$

$$A(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(k_x) e^{jk_x x} dk_x \quad (8.80)$$

在式 (8.78) 式两端加任意权函数 $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ 并积分, 可以得到积分方程

$$\int_{-b}^b \int_0^t \mathbf{w}(x, y) \cdot \left\{ \sum_{i=1}^2 (y_i - y_0) \int_{-b}^b \int_0^t \bar{\mathbf{G}}(x, y, x', y', k_z) \cdot \mathbf{J}_i(x', y') dy' dx' - \mathbf{E}(x, y) \right\} dy dx = 0 \quad (8.81)$$

利用与上节类似的方法, 可以发现这一谱域格林函数的 y 相关项可以写为 $\exp(j\beta y)$ 和 $\exp(j\beta y')$ 的线性组合, 于是, 在合适选择 $\mathbf{E}(x, y)$ 的基函数的条件下, 可以大大简化积分方

程 (8.81). 电场可以表示为

$$E_p(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_p^{ij} \psi_p^i(x) \varphi_p^j(y), \quad p = x, y, z \quad (8.82)$$

在有关文献^[27] 中, 作者选用的基函数 $\psi_p^l(x)$ 为 Legendre 多项式, $\varphi_p^l(y)$ 为分段线性函数. 通过 Галёркин 法可以求得电场分布, 进而求取其它参数.

第 9 章 直线法

直线法 (Method of Lines) 最初是从六十年代起提出的主要用来求解线性偏微分方法的一种半离散半解析的数值方法, 在前苏联数学界得到了广泛的研究^[55]. 在八十年代, Schulz 和 Pregla 首次将直线法用于微波平面导波结构色散特性的分析^[46]. 经过国内外学者十多年来深入研究, 目前这种方法已成为分析电磁场与电磁波问题的最流行的方法之一. MOL 的主要优势之一就是通过离散化选定的空间坐标之一, 而将偏微分方程的其它部分仍保留为连续形式来可以降低问题的维数. 对于分层介质问题, 在分层介质平面内进行有限差分离散, 而在法向保持解析形式. 所以直线法结合了解析方法和数值方法的优点, 物理概念清晰, 程序设计简单, 计算效率高. 同时, 直线法还没有谱域方法或模匹配方法中常见的相对收敛问题出现, 而计算精度却与之相当. 例如直线法可以很方便地求解准平面波导结构的传输特性, 如常见的微带线、槽线、鳍线等等. 此外, 用直线法求解还可以很有效地分析在传播方向上规则变化的三维结构, 诸如周期结构, 谐振器等等. 但是, 相当长的时间里, 直线法一直都是用来分析无限薄金属结构问题. 后来, 许多研究者们针对有限导体厚度问题又展开了研究, 并因此诞生了直线法的多种改进方法. 例如有的方法将金属导体层当作一种特殊的介质层来处理, 有的方法则针对槽线等结构采用分区等效磁流的方法来处理等等.

9.1 基本概念

直线法的基本思想是, 对一个 n 维的偏微分方程, 将其中 $(n - 1)$ 维变量离散化, 用差分算子近似取代微分算子, 使原偏微分方程转变为一组常微分方程, 最后利用解析方法求出其通解. 因此, 直线法是一种半解析、半数值的近似方法.

电磁场可以用两个标量位 ψ^e 和 ψ^m 来表示, 满足二维 Helmholtz 方程:

$$\frac{\partial^2 \psi^{e,m}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{e,m}}{\partial y^2} + (k^2 + \beta^2) \psi^{e,m} = 0 \quad (9.1)$$

其中 β 是沿场传播方向的相位常数. 首先将 (9.1) 式中的 x 变量离散, 于是在截面上划出了 N 条平行于 y 轴的直线. 相邻直线间距为 h , 于是 ψ 可以被 $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \dots, N$ 处的一组 $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$ 替代, 而其对 x 的微分也用有限差分代替. 经过这一过程可以得到 N 个相互耦合的常微分方程

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} + \frac{1}{h^2} [\psi_{i-1}(y) - 2\psi_i(y) + \psi_{i+1}(y)] + (k^2 + \beta^2) \psi_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9.2)$$

若引入向量

$$\boldsymbol{\psi} = [\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y)]^T$$

以及二阶差分矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & p_2 \end{bmatrix}$$

则 (9.2) 式可改写为

$$h^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \{\mathbf{P} - h^2(k^2 - \beta^2) \mathbf{I}\} \psi = 0 \quad (9.3)$$

其中 \mathbf{I} 是单位矩阵, p_1 和 p_2 取决于边界条件. 由于 \mathbf{P} 是实对称矩阵, 存在正交阵 \mathbf{T} 可将 \mathbf{P} 对角化:

$$\mathbf{T}^T \mathbf{P} \mathbf{T} = \text{diag}(\lambda) \quad (9.4)$$

于是 λ 即为 \mathbf{P} 的特征值. 引入矢量 \mathbf{U} ,

$$\mathbf{T}^T \psi(y) = \mathbf{U}(y) \quad (9.5)$$

则由 (9.3) 式, 可以得到 N 个独立的常微分方程:

$$h^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2} - [\lambda_i - h^2(k^2 - \beta^2)] U_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9.6)$$

显然 (9.6) 式在均匀同性区域可以解析求解. 其通解形式为

$$\begin{bmatrix} U_i(y_1) \\ h \frac{\partial U_i}{\partial y}(y_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \frac{\kappa_i(y_1 - y_2)}{h} & \frac{1}{\kappa_i} \sinh \frac{\kappa_i(y_1 - y_2)}{h} \\ \kappa_i \sinh \frac{\kappa_i(y_1 - y_2)}{h} & \cosh \frac{\kappa_i(y_1 - y_2)}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i(y_2) \\ h \frac{\partial U_i}{\partial y}(y_2) \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

其中 $\kappa_i = \sqrt{\lambda_i - h^2(k^2 - \beta^2)}$. 于是边值问题就转化为线性代数方程.

\mathbf{P} 矩阵包含了横向的边界条件, 其中左边界条件确定 p_1 , 右边界条件确定 p_2 . 例如, 若左边界满足 Neumann 条件 ($\partial \psi / \partial x = 0$), 则要求 $\psi_0 = \psi_1$, 代入 (9.2) 式则得到 $p_1 = 1$. 同理, 若右边界满足 Dirichlet 条件 ($\psi = 0$), 则要求 $\psi_{N+1} = 0$, 需要 $p_2 = 2$ 满足. 将耦合微分-差分方程转化为非耦合方程组的变换矩阵和本征值如表 9.1 所示.

9.2 应用实例

9.2.1 带调谐片的微带线结构

带调谐片的微带线如图 9.1 所示. 根据对称结构, 图中所示仅为截面的一半, 左侧边界为理想磁壁.

表 9.1 不同边界条件下的变换矩阵和本征值

左边界	右边界	变换矩阵 $[T]_{ij}$	本征值 λ_j
Dirichlet	Dirichlet	$\sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{ij\pi}{N+1}$	$4 \sin^2 \frac{j\pi}{2(N+1)}$
Dirichlet	Neumann	$\sqrt{\frac{2}{N+0.5}} \sin \frac{i(j-0.5)\pi}{N+0.5}$	$4 \sin^2 \frac{(j-0.5)\pi}{2N+1}$
Neumann	Dirichlet	$\sqrt{\frac{2}{N+0.5}} \cos \frac{(i-0.5)(j-0.5)\pi}{N+0.5}$	$4 \sin^2 \frac{(j-0.5)\pi}{2N+1}$
Neumann	Neumann	$\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{(i-0.5)(j-1)\pi}{N}, & j > 1 \\ 1/\sqrt{N}, & j = 1 \end{cases}$	$4 \sin^2 \frac{(j-1)\pi}{2N}$

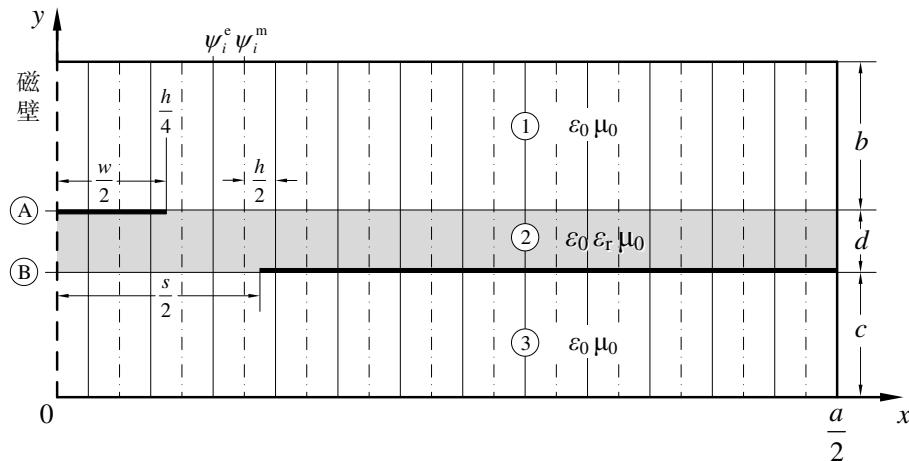


图 9.1 带调谐片的微带线半截面示意图

完整的电磁场可用 TE 场和 TM 场的叠加来表示, 即可从标量位导出

$$\psi^e = [j\omega\epsilon/(k^2 - \beta^2)]E_z \quad (9.8)$$

$$\psi^m = [j\omega\epsilon/(k^2 - \beta^2)]H_z \quad (9.9)$$

理论上讲, ψ^e 和 ψ^m 的离散直线可以重叠, 但由于电场和磁场边界条件互补, 将 ψ^e 和 ψ^m 按照 $h/2$ 间隔交替划分更为方便, 同时保证了横向边界条件易被满足.

在上述模型中导体条带边缘的场呈现奇异性, 在奇异性附近区域, 应用差分法分析时很难估计计算误差) 前面利用含有金属条带的界面上的连续性条件建立特征方程时, 所用到的连续

性条件仅是该交接面上若干离散点上的条件, 而对 2 根离散直线之间导体条带边缘的实际位置完全没有加以考虑. 因此, 要减小边缘附近的离散误差, 使之限定在允许范围内, 必须合理安排离散直线. 设导带边缘位于相邻离散直线之间的某一确定位置, 由分析^[46]可知, 使边缘离散误差最小时, 导体条带的边缘位于直线之间最佳的位置为位于导体条带上的最后一根 ψ^e 线与边缘的距离应为 $\frac{1}{4}h$, 最后一根 ψ^m 线与边缘的距离应为 $\frac{3}{4}h$. 可以看出, 电线与磁线的位置必须相互平移错开, 这样的划线方式是使近似场解满足边缘条件所要求的方式, 使得离散误差得到良好补偿.

考虑图 9.1 所示结构, 在 A 和 B 分界面上分别列出切向场分量匹配方程:

$$\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi_{1,3}^e - \frac{1}{\epsilon_r} \psi_2^e \right) = \frac{\partial \psi_2^m}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{1,3}^m}{\partial y} \quad (9.10)$$

$$(k_0^2 - \beta^2) \psi_{1,3}^e = \frac{1}{\epsilon_r} (\epsilon_r k_0^2 - \beta^2) \psi_2^e \quad (9.11)$$

$$\frac{\partial \psi_{1,3}^e}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2^e}{\partial y} = \frac{\beta}{\omega\mu} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_{1,3}^m - \psi_2^m) - J_z \quad (9.12)$$

$$(k_0^2 - \beta^2) \psi_{1,3}^m = (\epsilon_r k_0^2 - \beta^2) \psi_2^m + j\omega\mu J_x \quad (9.13)$$

其中下标数字表示图中 1, 2, 3 区域, J_x 和 J_z 是分界面 A 和 B 上电流密度分布. 于是, 微分算子 $\partial/\partial x$ 可以用下列差分算子代替:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

而

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial x} = \frac{1}{h} \mathbf{D} \boldsymbol{\psi}^e$$

$$\frac{\partial \psi^m}{\partial x} = -\frac{1}{h} \mathbf{D}^T \boldsymbol{\psi}^m$$

其中仅仅取了相邻项的差分, 这也正是交替直线的一个有时. 在 x 方向上离散后, 式 (9.10)~(9.13) 可以分别用 \mathbf{T}_e 和 \mathbf{T}_m 变换, 得到

$$\frac{\beta}{\omega\epsilon_0} \underbrace{\mathbf{T}_m^T \mathbf{D} \mathbf{T}_e}_{[\delta]} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{U}_{1,3}^e - \frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{U}_2^e \right) = \frac{\partial \mathbf{U}_2^m}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{U}_{1,3}^m}{\partial y} \quad (9.15)$$

$$(k_0^2 - \beta^2) \mathbf{U}_{1,3}^e = \frac{1}{\epsilon_r} (\epsilon_r k_0^2 - \beta^2) \mathbf{U}_2^e \quad (9.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{1,3}^e}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{U}_2^e}{\partial y} = \frac{\beta}{\omega\mu} \underbrace{\mathbf{T}_e^T \mathbf{D} \mathbf{T}_m}_{[\delta]^T} \cdot (\mathbf{U}_{1,3}^m - \mathbf{U}_2^m) - \mathbf{T}_e^T \mathbf{J}_z \quad (9.17)$$

$$(k_0^2 - \beta^2) \mathbf{U}_{1,3}^m = (\epsilon_r k_0^2 - \beta^2) \mathbf{U}_2^m + j\omega\mu \mathbf{T}_m^T \mathbf{J}_x \quad (9.18)$$

其中, \mathbf{U}^e 和 \mathbf{U}^m 是经过变换的电位矢量. 从表 9.1 中可以得到 \mathbf{T}^e 和 \mathbf{T}^m , 易知变换后的矩阵 $[\delta]$ 是对角阵:

$$[\delta] = -\text{diag}(\sqrt{\lambda^m}) \quad (9.19)$$

根据式 (9.7), $\partial\mathbf{U}/\partial y$ 可以用变换后的电位自身来表示. 于是, 方程就只包含离散的变换后电位矢量 $\mathbf{U}^{e,h}$ 和 A、B 分界面处的离散的电流密度分布 $\mathbf{J}_{x,y}$. 在金属处有 $\mathbf{E}_t^{(A,B)} = 0$, 通过变换可以得到特征方程, 进而得到本征值解.

例 求解如图 9.2a 所示的屏蔽微带线. 参数为 $\epsilon_r = 9$, $w/d = 2$, $a/d = 7$, $b/d = 3$, $d = 1\text{mm}$.

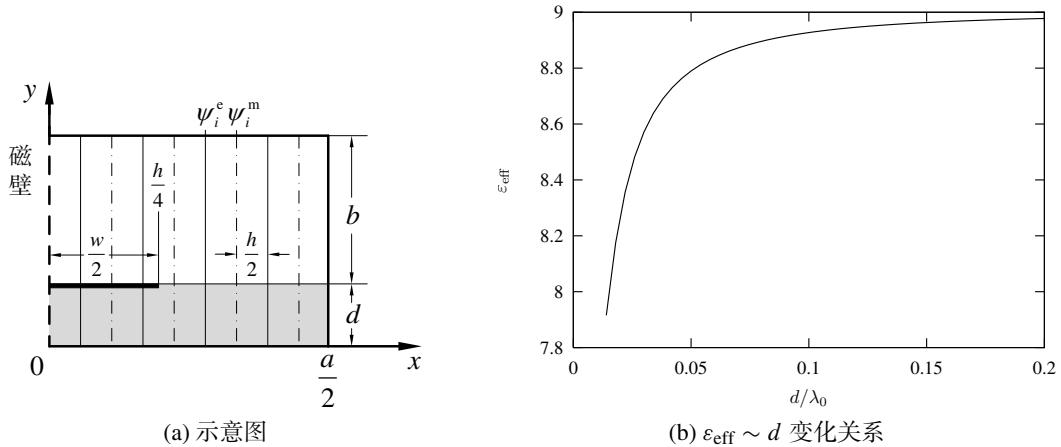


图 9.2 屏蔽微带线

9.2.2 平面谐振腔的分析

以简单的矩形谐振腔为例, 如图 9.3 所示, 其中 \times 代表电离散线, \circ 代表磁离散线 [51]. 矩形谐振腔为对称结构. 类似上节的分析, 可以用标量位 ψ^e 和 ψ^m 来得到场分量

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \nabla (\psi^e \hat{z}) - \nabla (\psi^m \hat{z}) \quad (9.20)$$

$$\mathbf{H} = \nabla (\psi^e \hat{z}) + \frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla \nabla (\psi^m \hat{z}) \quad (9.21)$$

其中时谐因子选为 $e^{j\omega t}$. 在空气和介质的界面, 根据电场和磁场的切向边界条件, 可得

$$E_{xA} - E_{xB} = \frac{1}{j\omega\epsilon_r\epsilon_0} \frac{\partial^2 \psi_A^e}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_A^m}{\partial y} - \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \frac{\partial^2 \psi_B^e}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \psi_B^m}{\partial y} = 0 \quad (9.22a)$$

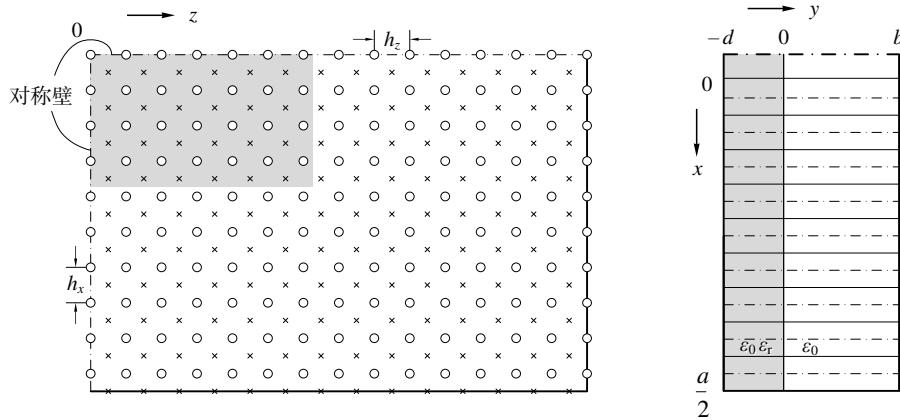


图 9.3 矩形微带谐振腔的离散

$$E_{zA} - E_{zB} = \frac{1}{j\omega\epsilon_r\epsilon_0} \left(\frac{\partial^2 \psi_A^e}{\partial z^2} + \epsilon_r k_0^2 \psi_A^e \right) - \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \left(\frac{\partial^2 \psi_B^e}{\partial z^2} + k_0^2 \psi_B^e \right) = 0 \quad (9.22b)$$

$$H_{xA} - H_{xB} = \frac{\partial \psi_A^e}{\partial y} + \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial^2 \psi_A^m}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi_B^e}{\partial y} - \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial^2 \psi_B^m}{\partial x \partial z} = -J_z \quad (9.22c)$$

$$H_{zA} - H_{zB} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \left(\frac{\partial^2 \psi_A^m}{\partial z^2} + \epsilon_r k_0^2 \psi_A^m - \frac{\partial^2 \psi_B^m}{\partial z^2} - k_0^2 \psi_B^m \right) = J_x \quad (9.22d)$$

其中 $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$.

求解时, 在 x 和 z 方向上离散选定区域, ψ^m 和 ψ^e 线按 $h_x/2$ 和 $h_z/2$ 交替. 在图 9.3 中, 位于坐标 $x = (i - 0.5)h_x$ 和 $z = (k - 0.5)h_z$ 的 ψ^e 线用 ψ_{ik}^e 来表示, 并写为矩阵 $[\psi^e]$. 则对于 ψ^e 的一阶偏导数可以离散为

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial x} \Big|_{z=(k-0.5)h_z} = \frac{\psi_{i+1,k}^e - \psi_{i,k}^e}{h_x} + O(h_x^2) \quad (9.23)$$

或写为矩阵形式

$$h_x \frac{\partial \psi^e}{\partial x} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{1,1}^e & \cdots & \psi_{1,N_z}^e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N_x,1}^e & \cdots & \psi_{N_x,N_z}^e \end{bmatrix} = [D_x][\psi^e] \quad (9.24)$$

差分矩阵 $[D_x]$ 的形式也取决于 ψ^e 的横向边界条件. 类似地, 可以对 ψ^m 的偏导作差分离散

$$h_x \frac{\partial \psi^m}{\partial x} \rightarrow -[D_x]^T [\psi^m] \quad (9.25)$$

结合式(9.24)和(9.25),可得二阶偏导的差分近似

$$h_x^2 \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial x^2} \rightarrow -[D_x]^T [D_x] [\psi^e] = [D_{xx}^e] [\psi^e] \quad (9.26)$$

$$h_x^2 \frac{\partial^2 \psi^m}{\partial x^2} \rightarrow -[D_x] [D_x]^T [\psi^m] = [D_{xx}^m] [\psi^m] \quad (9.27)$$

同理可以得到关于 z 方向的差分算子

$$h_z^2 \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial z^2} \rightarrow [\psi^e] [D_z] [D_z]^T = [\psi^e] [D_{zz}^e]^T \quad (9.28)$$

以及关于 x 和 z 方向的二阶差分算子

$$h_x h_z \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial x \partial z} \rightarrow [D_x] [\psi^e] [D_z]^T \quad (9.29)$$

于是

$$h_x h_z \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial x \partial z} \Big|_{\substack{x=i h_x \\ z=k h_z}} \approx \psi_{i,k}^e - \psi_{i,k+1}^e + \psi_{i+1,k+1}^e - \psi_{i+1,k}^e \quad (9.30)$$

$[D_{xx}^e]$ 和 $[D_{zz}^e]$ 都是三对角结构,则离散后的Helmholtz方程

$$\frac{d^2[\psi^e]}{dy^2} + \frac{[D_{xx}^e][\psi^e]}{h_x^2} + \frac{[\psi^e][D_{zz}^e]^T}{h_z^2} + \varepsilon_r k_0^2 [\psi^e] = 0 \quad (9.31)$$

代表了 $N_x N_z$ 个相互耦合的差分方程.利用与上节类似的方法,选定正交变换阵 $[T_x^e]$ 和 $[T_z^e]$,则差分矩阵可变换为对角阵

$$[T_x^e]^T [D_{xx}^e] [T_x^e] = \text{diag}[d_{xx}^e] \quad (9.32)$$

$$[T_z^e]^T [D_{zz}^e] [T_z^e] = \text{diag}[d_{zz}^e] \quad (9.33)$$

于是,对于

$$[U] = [T_x^e]^T [\psi^e] [T_z^e] \quad (9.34)$$

有

$$\frac{d^2[U]_{ik}}{dy^2} - \kappa_{ik}^2 [U]_{ik} = 0 \quad (9.35)$$

其中

$$\kappa_{ik}^2 = - \left(\frac{[d_{xx}^e]_{ii}}{h_x^2} + \frac{[d_{zz}^e]_{kk}}{h_z^2} + \varepsilon_r k_0^2 \right) \quad (9.36)$$

则方程 (9.22a)~(9.22d) 可以变换到谱域求解, 得到的方程形式如下

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_z \\ \tilde{E}_x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [\tilde{Z}_{11}] & [\tilde{Z}_{12}] \\ [\tilde{Z}_{21}] & [\tilde{Z}_{22}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_z \\ \tilde{J}_x \end{pmatrix} \quad (9.37)$$

其中 $[\tilde{Z}_{nm}]$ 是对角阵.

将式 (9.37) 反变换回空域, 这时可以仅在金属贴片的较小区域内进行, 得到降阶的方程

$$\begin{pmatrix} E_z \\ E_x \end{pmatrix}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} [Z_{11}] & [Z_{12}] \\ [Z_{21}] & [Z_{22}] \end{bmatrix}_{\text{red}} \begin{pmatrix} J_z \\ J_x \end{pmatrix}_{\text{red}} = 0 \quad (9.38)$$

现在 $[Z_{nm}]$ 即为满阵, 且仅对谐振频率有非平凡解. 通过求解本征值即可解得所有谐振频率和相应场分布.

9.2.3 误差分析及精度改进

直线法的误差包括模型误差和计算误差两部分, 其中计算误差主要源于计算机字长有限而引入的舍入误差, 关于其分析在大部分有关数值计算方面的著作中都可找到. 模型误差是直线法的主要误差来源, 具体地又可分为方程的离散化误差和边界的离散化误差. 方程的离散化误差也就是将方程中的某些偏导数用差商近似时引入的误差. 在确定直线法解的过程中仅用到了直线与边界交点上的边界条件, 或者说仅用到了边界上一些离散点上的位函数或其导数值. 因此, 必将遗漏各交点之间边界条件变化和边界形状变化的信息, 从而导致边界的离散化误差. 在上述直线法的求解过程中, 第一步引入的显然是方程的离散化误差; 第二步的通解是通过严格的解析方法得到的, 因而不引入任何误差; 第三步中前一部分将引入边界的离散化误差而后一部分将引入计算误差. 边界误差除了边界条件的离散化误差外, 对于曲边界问题还存在边界形状的离散化误差. 当边界比较光滑而且各点的曲率半径都比较大时, 边界形状的离散化误差很小.

提高直线法的精度最直接的方法就是通过增加线数, 这样可将直线法的误差缩至任意小. 但是, 一方面随着线数的增加所需计算机存储空间和计算时间迅速增加; 另一方面随着线数的增加计算机舍入误差的影响越来越严重, 其结果将导致直线法解的精度下降. 因此, 在进行直线法的计算过程中要主要线数的选取. 文献对直线法线数的选择原则作了一定的介绍. 提高直线法的精度除了通过增加线数外, 另一种方法是加快收敛速度, 或者说采用高精度的离散化格式. 还有一种方法是通过对已有直线法解进行最小二乘逼近也可以提高直线法的精度. 对此的详细介绍可以参考相关文献, 在此不在赘述.

9.3 直线法新进展

由于与谱域法相比, 它没有选取基函数的问题, 因而又很大的灵活性, 同时具有谱域对抗法的某些优点, 因此直线法的发展很快, 应用领域也在不断地扩大.

1990 年 Wu 等把 Fourier 变换和直线法变换结合起来, 提出了一种新的方法. 这种新的方法除了分界面的法线方向外, 另外两个方向上一个作 Fourier 变换, 另一个作直线法变换. 相对与直线法而言, 这种方法也可以说成是平面法, 它在处理有些问题时特别有效. 而将广义谱域导抗之间引入到直线法, 可使直线法推广到分析具有分层介质的复杂的不等高波导结构. Pregla 在直线法中引入吸收边界条件, 可使研究范围从闭域扩展到开域. 最近又出现一种直线法与周期边界条件相结合分析开域平面结构的方法. 与前者相比, 虽然求解区域增大, 但保持了各层介质差分矩阵具有相同解析形式的特征值和特征矢的优点, 并能利用 FFT 快速算法计算阻抗元素, 因而计算效率大大高于前者. 采用共形映射技术将无限开域结构转换成有限的闭域结构, 也可使直线法扩展到处理开域问题. 这一方法不存在人工引入的边界与实际边界的差别, 已成功地用来分析开域微带、耦合微带特性. 将直线法引入到圆柱形结构, 分析了圆柱形微带衬底结构的传输特性; 并利用无限大圆柱形微带线结构来模拟开域微带, 也取得了较好的结果.

在直线法中引入新的本征方法后, 既不要求求根, 也不需要求电流分布, 就可分析和提取微带不连续参数. 此外, 直线法还可以用于包括不连续介质结构、含各向异性介质和有耗平面分层介质结构问题. 总之, 可用直线法处理的问题越来越多, 处理的结构也更加复杂, 还提出了时域直线法等新方法.

第 10 章 几何绕射理论

几何绕射理论 (Geometrical Theory of Diffraction, GTD) 是几何光学的推广. 几何绕射理论是以尖劈这个典型绕射问题的精确解为基础的, 绕射场通过绕射系数和入射场线性相关, 它对多种散射问题可给出相当好的回答. 由于几何绕射理论沿用了几何光学中射线的概念, 其物理图象清晰, 计算相对简单. 在阴影边界和反射边界, 几何光学的绕射系数结合过渡函数能消除奇异性, 这通常也叫做一致绕射理论. GTD 能为一些无法求得严格解的问题提供有效的高频近似解. 例如, 飞机、导弹和舰艇上天线这一类复杂辐射系统可以用由一些简单几何形状构成的数学模型来模拟, 然后用 GTD 求得其电磁场.

10.1 基本概念

10.1.1 高频的几何光学近似

几何光学法 (Geometrical Optics, GO) 是一种射线追踪方法, 波长被认为是无限小, 能量沿着细长管 (射线管) 传播. 在高频, 波长很短时, 若

1. 波长远小于所讨论物体的几何尺寸,
2. 媒质的空间变化相对与波长而言是慢变化,

则可假设局部区域的电磁波的性质与在均匀媒质相同, 即局部可把 EM 波的波阵面看作与平面波的波阵面一样. 即

$$\begin{cases} \mathbf{E} = E_0 e^{-jk_0\varphi} \\ \mathbf{H} = H_0 e^{-jk_0\varphi} \end{cases} \quad (10.1)$$

其中 k_0 是自由空间中波数. $\varphi = \varphi(x, y, z)$ 称为程函或波程函数, 是实函数. 此时无源区域的 Maxwell 方程为:

$$\begin{cases} \nabla \varphi \times \mathbf{H}_0 + c\varepsilon \mathbf{E}_0 = \frac{1}{jk_0} (\nabla \mathbf{H}_0) \\ \nabla \varphi \times \mathbf{E}_0 - c\mu \mathbf{H}_0 = \frac{1}{jk_0} (\nabla \mathbf{E}_0) \\ \mathbf{E}_0 \cdot \nabla \varphi = \frac{1}{jk_0} \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_0 + \nabla \mathbf{E}_0 \right) \\ \mathbf{H}_0 \cdot \nabla \varphi = \frac{1}{jk_0} \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} \cdot \mathbf{H}_0 + \nabla \mathbf{H}_0 \right) \end{cases} \quad (10.2)$$

几何光学近似为 $\lambda_0 \rightarrow 0, k_0 \rightarrow \infty$, 再由慢变化假设 $\nabla \mathbf{E}_0, \nabla \mathbf{H}_0, \nabla \mathbf{E}_0, \nabla \mathbf{H}_0$ 均为有限值, 媒质变化慢说明 ε, μ 在一个波长内变化很小, 即

$$\frac{1}{\varepsilon} |\nabla \varepsilon| \lambda_0 \ll 1, \quad \frac{1}{\mu} |\nabla \mu| \lambda_0 \ll 1 \quad (10.3)$$

故上述(10.2)中四式右边均为零, 所以几何光学近似下的场方程为:

$$\begin{cases} \nabla\varphi \times \mathbf{H}_0 + c\varepsilon\mathbf{E}_0 = 0 \\ \nabla\varphi \times \mathbf{E}_0 - c\mu\mathbf{H}_0 = 0 \\ \mathbf{E}_0 \cdot \nabla\varphi = 0 \\ \mathbf{H}_0 \cdot \nabla\varphi = 0 \end{cases} \quad (10.4)$$

其中 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ 为自由空间中的光速. 对于非铁磁媒质 ($\mu = \mu_0$), 则上式中前二式可化为:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0 = z_0\mathbf{H}_0 \times \frac{\nabla\varphi}{n} \\ z_0\mathbf{H}_0 = \frac{\nabla\varphi}{n} \times \mathbf{E}_0 \end{cases} \quad (10.5)$$

其中 $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0} = c/v$ 是媒质的折射率 (refraction index), $z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ 是媒质的特性阻抗. 可见, \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 和 $\nabla\varphi$ 是互相正交的矢量, 即几何光学场在局部是一平面波.

式(10.4)中第二式代入第一式可得:

$$\nabla\varphi \times (\nabla\varphi \times \mathbf{E}_0) + n^2\mathbf{E}_0 = 0 \quad (10.6)$$

注意到

$$\nabla\varphi \times (\nabla\varphi \times \mathbf{E}_0) = (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla\varphi) \nabla\varphi - (\nabla\varphi)^2 \mathbf{E}_0$$

则式(10.6)化为

$$[n^2 - (\nabla\varphi)^2] \mathbf{E}_0 = 0$$

欲使 \mathbf{E}_0 有非零解, 则

$$(\nabla\varphi)^2 = n^2$$

或

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z) \quad (10.7)$$

(10.7)式称为程函方程 (the wave route function's equation). 程函 φ 包含了媒质电参数的变化, 是确定等相位面的特征函数. 程函方程是几何光学的一个基础方程.

10.1.2 几何光学的强度定律

平均坡印亭矢量

$$\begin{aligned}\langle s \rangle &= \frac{1}{2} \Re (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*) \\ &= \frac{1}{2} \Re \left[\mathbf{E}_0 \times \left(\frac{1}{c\mu} \nabla \varphi \times \mathbf{E}_0 \right)^* \right] \\ &= \frac{1}{2c\mu} \Re (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) \nabla \varphi \\ &= \frac{2}{c\mu\varepsilon} \langle w_e \rangle \nabla \varphi = \frac{c}{n^2} \langle w \rangle \nabla \varphi\end{aligned}$$

其中, 平均电能量密度 $\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*)$, 平均能量密度 $\langle w \rangle = 2 \langle w_e \rangle$.

令 \hat{t} 为 $\nabla \varphi$ 的单位矢量, 即

$$\hat{t} = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} = \frac{\nabla \varphi}{n}$$

则

$$\langle s \rangle = \frac{c}{n} \langle w \rangle \hat{t} = v \langle w \rangle \hat{t}$$

上式说明, 场沿射线运动, 射线方向即为垂直波前的方向. 能量以速度 $v = c/n$ 沿射线方向流动, \hat{t} 与等相位面垂直.

综合以上各点, 在几何光学条件下, 电磁能量, 波速与能流之间的关系都与均匀媒质中的平面波 (TEM) 相似, 能量传播的速度为 v . 结合前面的结论, 可以认为, 在几何光学条件下, 各点的电磁波在局部是平面

电磁波.

由能量守恒定律, 在非导电媒质及无外界功率的区域:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{s} = 0$$

对于时谐场, 前面项时间平均后为零, 即

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{s} \rangle = 0$$

考虑一个射线管 (ray tube), 如图 10.1 所示. 上式说明, 射线管内能量是守恒的, 即穿过射线管任一横截面的能量是常数, 即

$$\langle s_1 \rangle \cdot dA_1 = \langle s_2 \rangle \cdot dA_2 \quad (10.8)$$

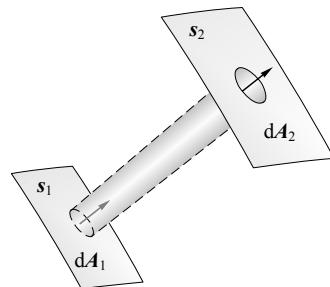


图 10.1 射线管

(10.8) 式称为几何光学的强度定律 (the strength law of GO).

10.1.3 均匀媒质中射线场的基本表达式

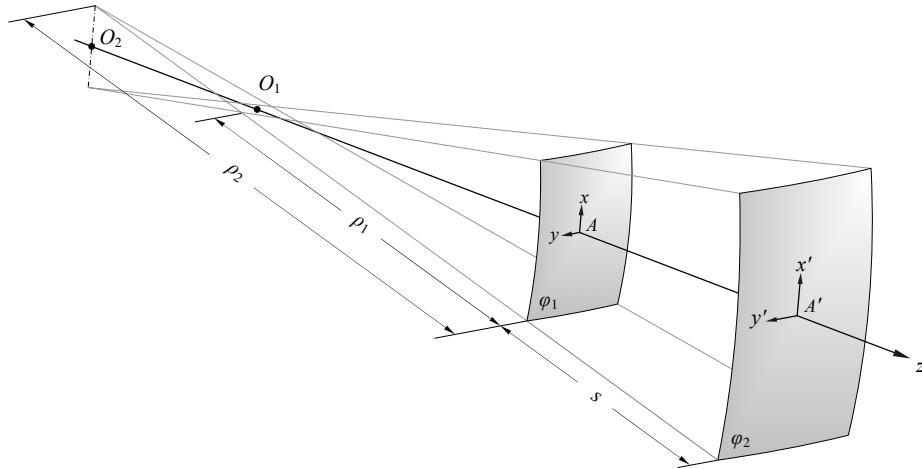


图 10.2 射线管的几何关系

如果媒质是均匀的, 则射线是直线. 由强度定律可求得传播路径上场强振幅的相对关系. 如图 10.2, 在波面 φ_1 上, A 点的两个主曲率半径分别为 ρ_1 和 ρ_2 , 也称为射线焦散距离 (caustics). x 和 y 分别是两个主方向. 由于这些射线同时与波面 φ_2 正交, 故在 φ_2 上, A' 点主曲率半径分别为 $\rho_1 + s$ 和 $\rho_2 + s$. 设 A 点的平面元为 dA , 对应的 A' 点的面元为 dA' , 这两个面元的关系为:

$$x' = \left| \frac{\rho_1 + s}{\rho_1} \right| x, \quad y' = \left| \frac{\rho_2 + s}{\rho_2} \right| y, \quad dA' = \left| \frac{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}{\rho_1 \rho_2} \right| dA$$

由强度定律, 可得

$$|E_2| = |E_1| \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} \quad (10.9)$$

其中,

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho_2 < \infty, & \text{球面波}, \quad |E_2| = |E_1| \frac{\rho}{\rho + s} \\ \rho_1 < \infty, \rho_2 \rightarrow \infty, & \text{柱面波}, \quad |E_2| = |E_1| \frac{\rho_1}{\rho_1 + s} \\ \rho_1, \rho_2 \rightarrow \infty, & \text{平面波}, \quad |E_2| = |E_1| \\ \rho_1 \neq \rho_2 < \infty, & \text{象散波}, \quad E_2 = E_1 \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} e^{-jks} \end{cases}$$

1. 上式可用来由 φ 内一点的场强求另一点的场强, 精度较高, 但只在 GO 假定下成立.
2. $s = -\rho_1$ 或 $-\rho_2$ 时, 上式不能用, 称为散焦区, 几何绕射理论在散焦区无效.
3. 由 Keller 的假设, 绕射线上的场也适用此式.

10.1.4 Fermat 原理

光程: 沿曲线 C 从 P_0 到 P 点之间的积分

$$\int n \, ds$$

其中 $n(x, y, z)$ 是媒质的折射率. 光程一般与所选的路程 C 有关.

如 C 是一条射线, 则 $n = |\nabla \varphi|$, 所以

$$\int_C n \, ds = \varphi(P) - \varphi(P_0)$$

在两个波面之间沿任何一条射线的光程都是相等的.

费马原理: P_0 与 P 两点间射线的实际轨迹就是使光程 $\int_C n \, ds$ 取极值的曲线, 而极值一般为极小值, 但有时也有可能取极大值.

在均匀媒质中, 光程与几何路径成正比, 而两点间最短路程是直线, 故此时光程必定由直线组成. 即在均匀媒质中电磁波沿直线传播.

由费马原理可以很简单地证明两种媒质分界面上的发射定律和折射定律.

10.1.5 几何绕射理论的基本概念

几何光学只研究直射、反射和折射问题, 不能解释绕射和散射现象. 当几何光学射线遇到物体的不连续性, 如边缘, 尖顶和其它不连续性时, 将产生它所不能进入的阴影区, 按几何光学理论, 阴影区的场应等于零, 但实际上阴影区的场并不等于零, 这是由绕射现象造成的, 而 GO 却不能解释.

几何绕射理论 (GTD) 是 1957 年由 J.B. Keller 提出的一种近似计算高频电磁场的新方法. 它克服了几何光学产生的阴影区, 它的基本概念为:

1. 绕射场是沿绕射线传播的, 这种射线的轨迹可以用广义费马原理确定. 广义费马原理就是把费马原理推广到包含物体边缘上的点.
2. 局部性原理: 绕射只决定于散射体上绕射点邻域内的特性和几何特性, 也就是说绕射场只由绕射点的入射场与散射表面的局部性质决定.
3. 离开绕射点后的绕射线仍遵循几何光学定律, 即绕射线管内能量守恒, 设路程的相位延迟等于媒质的波数和距离的乘积.

在边界面上入射的几何光学不连续的那些点, 就是产生绕射的点, 对于确定的源点和场点, 绕射点可由广义费马原理确定, 即源点到绕射点到场点的光程取极值. 下面就三种不同的典型情况讨论在均匀媒质中的绕射原理及绕射线.

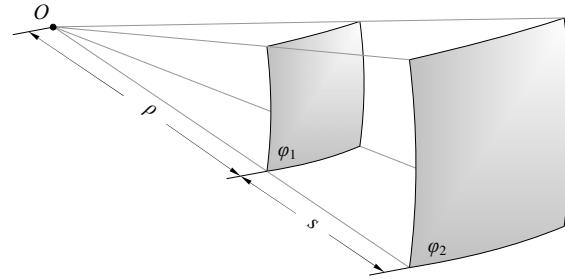


图 10.3 球面波射线管

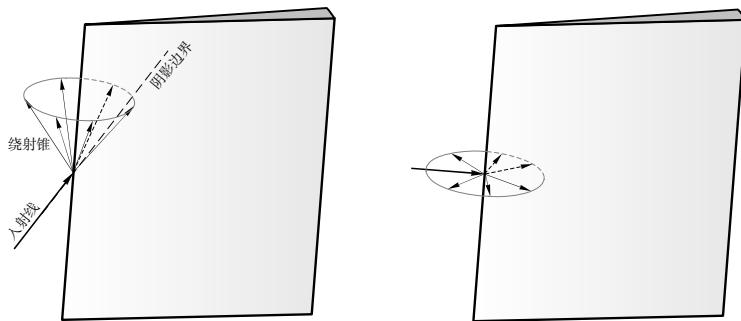


图 10.4 边缘绕射场

I. 边缘绕射场

边缘绕射线与边缘的夹角等于相应的入射线与边缘的夹角. 入射线与绕射线分别在绕射点与边缘垂直的平面的两侧或同在该平面上. 一条入射线激起无数条绕射线, 它们都位于一个以绕射点为顶点的圆锥面上. 圆锥轴就绕射点边缘的切线, 圆锥的半顶角等于入射线与边缘切线的夹角. 当入射线与边缘垂直时, 圆锥面就退化为与边缘垂直的平面圆盘, 如图 10.4 所示.

II. 尖顶绕射线

尖顶可以是圆锥的顶点, 也可以是 90° 拐角的顶点. 一根入射线可以激起无穷多根尖顶绕射射线, 由尖顶发出的绕射线可以是任意方向的, 它们将以尖顶为中心沿径向向四面八方发出. 所以相应的绕射波阵面是以尖顶为中心的球面. 可见尖顶绕射场的幅度必定和距离的两次方成反比. 所以尖顶绕射场比边缘绕射场衰减得更快. 如图 10.5 所示.

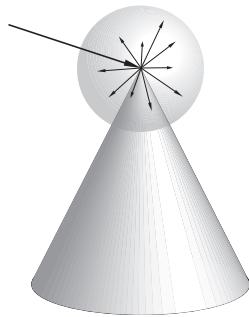


图 10.5 圆锥尖顶绕射

至今尚未求得尖顶绕射场的绕射系数, 但大多数情况下它可忽略不计.

III. 表面绕射射线

当有射线向光滑的理想导电曲面入射时, 即沿其阴影边界入射时, 它将分为两部分: 一部分入射能量将按几何光学定律继续照直前进, 另一部分入射能量则沿物体的表面传播, 成为表面射线. 表面射线在传播时将不断沿切向发出绕射线. 如图 10.6 所示. 对于阴影区域的场点 P , 入射线与绕射线分别和表面上 Q_1 和 Q_2 点相切, 与边缘绕射线和尖顶绕射线不同的是, 在曲面上一定区域内, 两点之间只要一条曲线能使两点间的光程最小.

表面射线又称爬行波, 理论上说它要环绕封闭曲面爬行无穷多次, 实际上它的能量衰减很快, 因此环绕封闭曲面一周以上即可不必考虑.

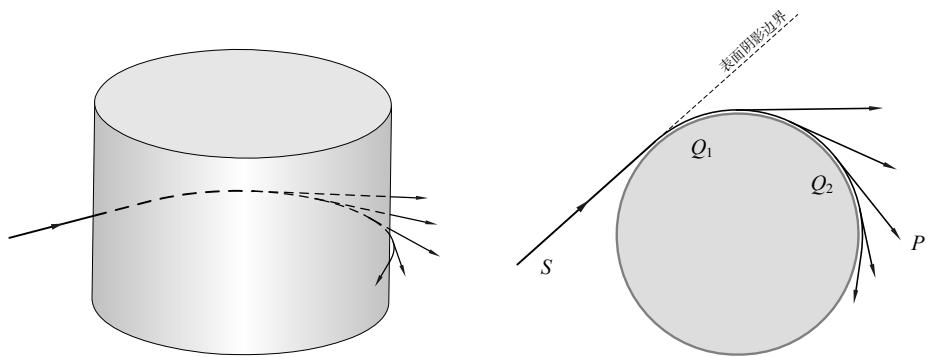


图 10.6 表面绕射射线

IV. 绕射射线上场的基本表达式

若给定向射线上某点的场强 E_0 , 则射线上任意一点 P (除散焦线上的点以外) 的场强可表达为:

$$E(P) = E_0 A(s) e^{-jks}, \quad A(s) = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}}$$

A 称为扩散因子, 它表示由于传播时能量扩散而产生的场强幅度的衰减.

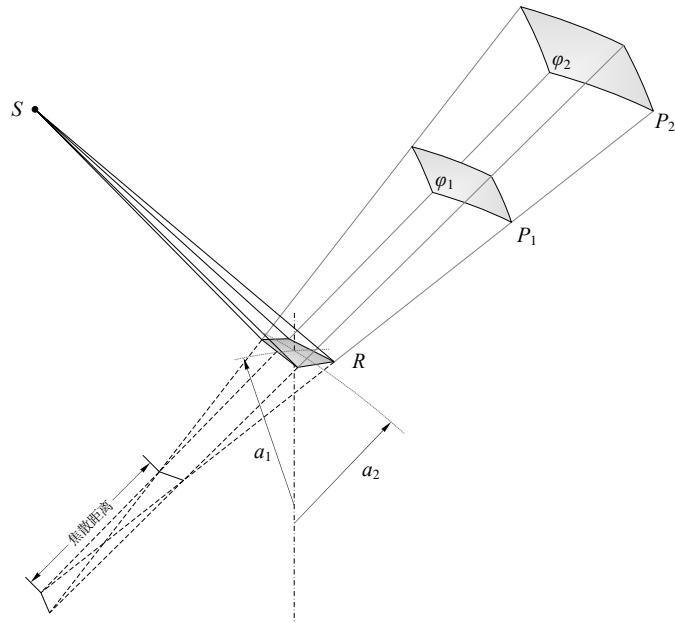


图 10.7 曲面的几何光学反射

如果射线在传播时遇到了反射物体, 则反射场与入射场一起构成几何光学场, 如图 10.7 所示 [28]. 其中 P 是点源, a_1 和 a_2 分别是反射面的两个主曲率半径. 在 R 点的反射场与入射场的关

系可以用下式表示

$$\mathbf{E}^r(P) = \mathbf{E}^i(R) \bar{\mathbf{R}} \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s_1^r)(\rho_2^r + s_2^r)}} e^{-jks^r} \quad (10.10)$$

其中 $\sqrt{\dots}$ 为扩散因子, ρ_1^r 和 ρ_2^r 为反射场波面的主曲率半径, e^{-jks^r} 为 R 到 P 的相位延迟, s^r 为 R 到 P 的几何距离.

类似地, 绕射场可以按上述方式表达, 设一条边缘绕射线从源点 S 经绕射点 Q 到达场点 P , 则 Q 点的绕射过程可用下式表达:

$$\mathbf{F}^d(Q) = \mathbf{E}^i(Q) \cdot \bar{\mathbf{D}} \quad (10.11)$$

其中, $\mathbf{E}^i(Q)$ 为 Q 点的入射场, $\mathbf{F}^d(Q)$ 为 Q 点的激励系数, $\bar{\mathbf{D}}$ 为并矢绕射系数, 一般为 3×3 矩阵, 经变换可为 2×2 矩阵. 绕射线离开绕射点 Q 后仍服从几何光学定律, 故 P 点的绕射场表示为:

$$\mathbf{E}^d(P) = \mathbf{F}^d(Q) A_d(s^d) e^{-jks^d} = \mathbf{E}^i(Q) \bar{\mathbf{D}} \sqrt{\frac{\rho_1^d \rho_2^d}{(\rho_1^d + s_1^d)(\rho_2^d + s_2^d)}} e^{-jks^d}$$

其中 s^d 为绕射线从 Q 到 P 的几何距离, ρ_1^d , ρ_2^d 为绕射场波阵面的两个主曲率半径.

已知入射场及边缘的几何形状、物理特性, 绕射点 Q 可由广义费马原理确定, 求绕射场的问题可归结为求 Q 点的并矢绕射系数 $\bar{\mathbf{D}}$ 的问题.

V. 关于GTD的应用

辐射与散射问题的高频近似解就是直射、反射和绕射场的总贡献, 求解各种射线的场可分为二步:

1. 射线求迹

首先求出对给定场点的场有贡献的所有射线的轨迹, 为此需用广义费马原理确定反射点和绕射点, 并求出能使从源点经反射点或绕射点到场点的光程取极值的路程. 这是一个纯几何问题.

2. 求并矢绕射系数

假设射线求迹问题已经解决, 则下一步就是场的计算问题. 当物体的电尺寸比波长大得多时, 根据局部原理总可以把物体分解为若干典型的几何构形. 分别求出这些典型的几何构形的反射场和绕射场并把它们叠加起来就得总场, 典型几何构形的绕射系数一般是通过把渐近计算结果与典型几何构形绕射场的严格解对比而求得的.

GTD 的优缺点:

- + 计算方法简单明确, 易于应用
- + 只要散射体的电尺寸远大于波长, GTD 的计算结果是很精确的

- + 它为辐射和散射的理论机制提供了明确的物理概念
- + 它可以用来求解还没有严格解的一些复杂的辐射和散射问题
- + 它易于和象矩量法之类的数值分析方法结合起来解决一些复杂问题
- 有用的典型解太少, 因而它的应用范围受到限制
- 它不能用来计算散焦区的场
- 当物体的几何形状复杂时, 射线的数量很多, 此时不仅需计算一次绕射, 还要计算多次绕射, 此时不仅射线轨迹的确定和绕射场的计算很困难, 而且计算量也很大

但不管如何, GTD 工程意义很大, 在某些领域是无可替代的.

10.2 理想导电劈

几何绕射理论求解问题的基本思路就是先研究一些基本几何构形(又称典型问题)的解, 再应用局部性原理将这些解推广, 近似得到一些实际问题的解. 所以 GTD 的应用范围取决于已知解的典型问题的多少. 本节所讨论的理想导电劈就是边缘绕射场的一个典型问题.

考虑一个二维理想导电劈, 内角为 $(2 - n)\pi$, 在如图 10.8 所示圆柱坐标中, 先考虑单位强度的线源照射劈时的散射场, 再得线源退至无穷远处, 即得单位强度平面波照射导电劈时的散射场.

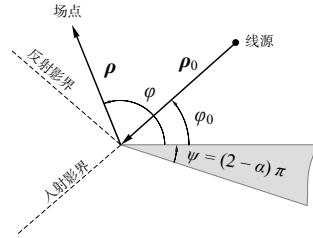


图 10.8 理想导电劈

10.2.1 理想导电劈的本征函数解

入射场总可以分解为电极化和磁极化两部分, 总的散射场就是它们分别产生的场的叠加. 一种是电极化波, 入射电场垂直于入射面(平行于劈边缘), 对应于线电流源照射的情况; 令一种是磁极化波: 入射磁场垂直于入射面, 对应于线磁流源照射的情况, 分别讨论.

当入射场为电极化波:

$$\nabla \nabla E_z + k^2 E_z = j\omega\mu\delta(\rho - \rho_0)$$

$(\nabla \nabla A_z + k^2 A_z = -\delta(\rho - \rho_0)$, 在辐射区 $E_z = -j\omega\mu A_z$, 二维问题中 $\nabla\varphi$ 不包含 z 分量).

源点坐标 $\rho_0 (\rho_0, \varphi_0)$; 场点坐标 $\rho (\rho, \varphi)$, 在柱坐标下, 上式展开为:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right] E_z = j\omega\mu \frac{\delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0)}{\rho}$$

同时场点应满足下列条件:

1. 辐射条件 $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \rho} + jk E_z \right) = 0$.
2. 近区条件 $\rho \rightarrow 0$ 时场为有限值, 在源点 ($\rho = \rho_0$) 时场连续
3. 导体边界条件 $\varphi = 0, \varphi = 2\pi - n$ 面上, 对电极化波 $E_z|_s = 0$, 对磁极化波 $\frac{\partial H_z}{\partial n}|_s = 0$.

4. 边缘条件: 对于有边缘的导体的电磁散射问题而言满足上述条件的解还不是唯一的, 还必须规定在尖锐边缘附近场的性态, 即: 在边缘附近所储存的能量是有限的. 对于二维导电劈, 这一条件意味着:

$$\rho \rightarrow 0 \quad \begin{cases} E_z, H_z = O(\rho^{\xi+1}) \\ H_\rho, H_\varphi, E_\rho, E_\varphi = O(\rho^\xi) \end{cases} \quad \text{其中, } \xi = \frac{\pi}{2\pi - \psi_0} - 1$$

上述问题的解为

$$E_z = \begin{cases} -\frac{kZ_0}{2n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_\nu J_\nu(k\rho) H_\nu^{(2)}(k\rho_0) \sin(\nu\varphi) \sin(\nu\varphi_0) & \rho < \rho_0 \\ -\frac{kZ_0}{2n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_\nu J_\nu(k\rho_0) H_\nu^{(2)}(k\rho) \sin(\nu\varphi) \sin(\nu\varphi_0) & \rho > \rho_0 \end{cases}$$

其中, $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ 为媒质的波阻抗, $\varepsilon_\nu = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 2 & m > 0 \end{cases}$ 称为诺伊曼数 (Neumann Number).

$$\nu = \frac{m}{n}.$$

同样地对于磁极化波入射时, 本征函数解为

$$H_z = \begin{cases} -\frac{k}{2nZ_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_\nu J_\nu(k\rho) H_\nu^{(2)}(k\rho_0) \cos(\nu\varphi) \cos(\nu\varphi_0) & \rho < \rho_0 \\ -\frac{k}{2nZ_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_\nu J_\nu(k\rho_0) H_\nu^{(2)}(k\rho) \cos(\nu\varphi) \cos(\nu\varphi_0) & \rho > \rho_0 \end{cases}$$

可以看出场与源是互易的.

要求单位强度平面波入射时导电劈的散射场时, 可得上述解中 $\rho_0 \rightarrow \infty$, 并关于单位强度产生的辐射场进行归一化, 可得平面波入射时导电劈的本征函数解.

已知 (ρ', φ') 处的二维单位源在 (ρ_0, φ_0) 处的辐射场为:

$$E_z = -\frac{kZ_0}{4} H_0^{(2)}(k|\rho_0 - \rho|) \quad (10.12)$$

将线源退至无穷远处, 即 $\rho_0 \rightarrow \infty$, 则上述解中 $\rho > \rho_0$ 部分失效, 且由 Hankel 函数的大宗量近似

$$\rho_0 \rightarrow \infty : \quad H_0^{(2)}(k\rho_0) \approx \sqrt{\frac{2j}{\pi k\rho_0}} j^\nu e^{-jk\rho_0} \quad (10.13)$$

则二维单位源

$$E_z = -\frac{kZ_0}{4} H_0^{(2)}(k\rho_0) \approx -\frac{kZ_0}{4} \sqrt{\frac{2j}{\pi k\rho_0}} e^{-jk\rho_0} \quad (10.14)$$

将(10.13)式代入前述本征函数的解,再除以(10.14)式,得单位幅度平面波入射时,电极化条件下,导电劈散射场的本征函数解为:

$$E_z = \frac{2}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_v j^v J_v(k\rho) \sin(v\varphi) \sin(v\varphi_0) \quad (10.15)$$

磁极化时,要关于二维单位磁流源在自由空间的辐射场转为单位幅度平面波时的因子归一化,即

$$H_z = -\frac{k}{4Z_0} H_0^{(2)}(k\rho_0) \approx -\frac{k}{4Z_0} \sqrt{\frac{2j}{\pi k\rho_0}} e^{-jk\rho_0} \quad (10.16)$$

于是本征函数解为

$$H_z = \frac{2}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_v j^v J_v(k\rho) \cos(v\varphi) \cos(v\varphi_0) \quad (10.17)$$

一般地,上述本征函数解可改写为:

$$E_z = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_v j^v J_v(k\rho) [\cos v(\varphi - \varphi_0) - \cos v(\varphi + \varphi_0)] \quad (10.18a)$$

$$H_z = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_v j^v J_v(k\rho) [\cos v(\varphi - \varphi_0) + \cos v(\varphi + \varphi_0)] \quad (10.18b)$$

上述结果分属电极化与磁极化两种情况,一般为两者之和。上述结果是总场,包括入射场、反射场和绕射场。为保证精度,一般要求最后几项 $v \gg k\rho$,当 $k\rho$ 较大时,收敛很慢。

10.2.2 绕射场的分离

上述结果中都包含了 $\cos(\varphi - \varphi_0)$ 和 $\cos(\varphi + \varphi_0)$ 项,且形式相同,故可仅取其中一项讨论,令 $\beta^\mp = \varphi \mp \varphi_0$,于是

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_v j^v J_v(k\rho) \cos(v\beta) \quad v = \frac{m}{n}$$

利用恒等式:

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_v j^v f(v) = -j \oint_P \frac{\exp\{j\alpha(\frac{\pi}{2} - n\pi)\} f(\alpha)}{\sin(\alpha n\pi)} d\alpha \quad (10.19a)$$

$$\text{以及 } J_\alpha(k\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_c e^{-j(k\rho \sin\theta - \alpha\theta)} d\theta \quad (10.19b)$$

上式可化为

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int_C e^{-jk\rho \sin \theta} G(\theta) d\theta, \text{ 其中 } G(\theta) = -j \oint_P \frac{e^{j\alpha} (\frac{\pi}{2} - n\pi)}{\sin(\alpha n\pi)} \cos \alpha \beta e^{j\alpha \theta} d\alpha$$

上式中积分路径 C 和 P 分别为再利用恒等式 (10.19a) 将 $G(\theta)$ 变为级数形式, 并令 $\xi = \frac{\pi}{2} + \theta$, 则

$$G(\theta) \rightarrow G(\xi) = \frac{j}{n} \frac{\sin \frac{\xi}{n}}{\cos \frac{\beta}{n} - \cos \frac{\xi}{n}}$$

而解为

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int_C e^{jk\rho \cos \xi} G(\xi) d\xi \quad (10.20)$$

第 11 章 分数阶 Fourier 分析

自从法国科学家 Fourier 在 1807 年为了得到热传导方程简便解法首次提出 Fourier 分析技术以来, Fourier 变换迅速得到了广泛应用, 在科学研究与工程技术的几乎所有领域发挥着重要的作用。但随着研究对象和研究范围的不断扩展, 也逐步暴露了 Fourier 变换在研究某些问题的局限性。这种局限性主要体现在: 它是一种全局性变换, 得到的是信号的整体频谱, 因而无法表述信号的时频局部特性, 而这种特性正是非平稳信号的最根本和最关键的性质。为了分析和处理非平稳信号, 人们提出并发展了一系列新的信号分析理论: 分数阶 Fourier 变换、短时 Fourier 变换、Wigner 分布、Gabor 变换、小波变换、循环统计量理论和调幅 - 调频信号分析等。而分数阶 Fourier 变换作为一种新的信号分析理论与方法引起了广泛关注^[61]。

分数阶 Fourier 变换 (FRFT, Fractional Fourier Transformation) 的概念很早就被导出, 直到 1980 年 Namias^[36] 把 FRFT 定义为传统 Fourier 变换的分数幂的形式, 并揭示了 FRFT 的几个特性, 开始了 FRFT 严格的数学定义。他将是分数阶 Fourier 变换作为 Fourier 变换算子的非整数次幂运算结果来引进的。基本的想法是把经典 Fourier 变换的全部特征值作为一般的复数进行幂次运算, 将所得结果作为一个新变换的特征值并利用 Fourier 变换的特征函数二者合一, 从而构造得到与前述幂次相同的分数阶 Fourier 变换。因此, V. Namias 研究的分数阶 Fourier 变换是经典 Fourier 变换在分数级次上的推广。

1987 年, A. C. McBride 和 F. H. Kerr 用积分形式从数学上严格定义了分数阶 Fourier 变换^[31]。1993 年 Mendlovic、Ozaktas 和 Lohamann 给出了分数阶 Fourier 变换的光学实现^[33, 38], 并将之应用于光学信息处理。由于采用光学设备很容易实现分数阶 Fourier 变换, 所以分数阶 Fourier 变换首先在光信号处理中得到了广泛的应用。然而, 由于一直没有找到分数阶 Fourier 变换的快速算法, 使得其在电信号处理应用领域中一直没有能占据其应有的位置。

1994 年, Almeida^[1] 指出分数阶 Fourier 变换可以理解为时频平面的旋转。20 世纪 90 年代中期, 人们提出了几种 FRFT 的离散化方法^[5, 40, 41]。其中以 Ozaktas^[39] 提出的分解型的快速算法最具应用价值。Ozaktas 将分数阶 Fourier 变换的离散化过程分解为离散卷积的运算, 并借助与 FFT 来实现, 从而使离散 FRFT 的计算具有可以和 DFT 的计算相比拟的运算量。

1995 年, 施纯青 (C. C. Shih)^[48] 首先提出了复数阶 Fourier 变换 – 态函数叠加的方法, 利用经典 Fourier 变换整数幂运算的 4 周期性质将新的分数阶 Fourier 变换定义成四个态函数的线性组合, 其组合系数是分数阶 Fourier 变换幂次的函数。分数阶 Fourier 变换的理论和方法近年来已经成为国内外的一个研究热点。

11.1 分数阶微积分

分数阶微积分是一个研究任意阶次的微分、积分算子特性及应用的数学问题, 其发展几乎与整数阶微积分同步。分数阶导数的设想最早由 L'Hopital 和 Leibniz 于 1695 年提出。随后, Laplace、Fourier、Abel 等数学家都曾提出过关于分数阶微分的定义。1823 年 Liouville 给出了第

一个广为接受的分数阶导数的定义; 1847 年, Riemann 在此基础上又作了进一步的补充, 从而形成了较为完备的 Riemann-Liouville 分数阶微积分定义. 此后, Grünwald 和 Letnikov 联合提出使用更为广泛的 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义. 其中不仅微分、积分算子有统一的表达式, 而且更易于数字实现. 近 20 年来, 分数阶微积分开始较多地用于实际工程.

11.1.1 定义的引入

I. Riemann-Liouville 分数阶微积分

考虑一个积分下限为 c 的 n 重积分式^[34]

$${}_c D_x^{-n} f(x) = \int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} dx_2 \int_c^{x_2} dx_3 \cdots \int_c^{x_{n-1}} f(t) dt \quad (11.1)$$

其中 f 在积分界 $[c, b]$ 内连续, $b > x$. 考虑另一函数 $G(x, t)$ 在 $[c, b] \times [c, b]$ 上连续, 则可以交换积分次序

$$\int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} G(x_1, t) dt = \int_c^x dt \int_t^x G(x_1, t) dx_1 \quad (11.2)$$

特别地, 若 $G(x, t)$ 仅是 t 的函数,

$$G(x_1, t) \equiv f(t)$$

则式 (11.2) 可写为

$$\int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} f(t) dt = \int_c^x f(t) dt \int_t^x dx_1 = \int_c^x (x-t) f(t) dt \quad (11.3)$$

于是将二重积分化简为一重. 反复迭代这一过程至 n 次, 式 (11.1) 化为

$${}_c D_x^{-n} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_c^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (11.4)$$

显然, 式 (11.4) 的右端对任何实部大于 0 的 n 都有意义, 于是将

$$\frac{d^{-v} f}{[d(x-c)]^{-v}} = {}_c D_x^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt, \quad \Re(v) > 0 \quad (11.5)$$

称为 f 的 v 阶 Riemann 分数阶积分. 一般地, 称

$${}_{-\infty} D_x^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{v-1} f(t) dt \quad (11.6)$$

为 Liouville 分数阶积分. 称 $c = 0$ 的特例

$${}_0D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \quad (11.7)$$

为 Riemann-Liouville 分数阶积分.

到此我们已经为 $D^{-\nu}, \Re(\nu) > 0$ 给出了分数阶积分的意义. 与之相对地, 设 $\Re(\mu) > 0, n$ 是大于 $\Re(\mu)$ 的最小整数, 令 $\nu = n - \mu$, 则

$$0 < \Re(\nu) \leq 1$$

设 $f \in C$, 定义 $f(x)$ 的 μ 阶分数阶微分为

$${}_cD_x^\mu f(x) = {}_cD_x^n [{}_cD_x^{-\nu} f(x)] \quad (11.8)$$

II. Grünwald 的分数阶微积分

Grünwald 给出了另一种分数阶微积分的定义 [37]. 考虑熟知的一阶微分的后向差分近似:

$$\frac{d^1 f}{dx^1} \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv \lim_{\delta x \rightarrow 0} \{[\delta x]^{-1} [f(x) - f(x - \delta x)]\} \quad (11.9)$$

类似地

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \equiv \lim_{\delta x \rightarrow 0} \{[\delta x]^{-2} [f(x) - 2f(x - \delta x) + f(x - 2\delta x)]\} \quad (11.10)$$

从上述二式中可以看出, 我们可以用二项式系数和交替变换的符号来构造这一差分格式, 这样, 对于正整数 n , 有如下的一般表达式:

$$\frac{d^n f}{dx^n} \equiv \lim_{\delta x \rightarrow 0} [\delta x]^{-n} \sum_{j=0}^n [-1]^j \binom{n}{j} f(x - j\delta x) \quad (11.11)$$

为了确定 $\delta x \rightarrow 0$ 的形式, 也为了便于与积分形式统一, 这里使 δx 以离散方式趋于 0, 选择 $\delta_N x \equiv [x - c]/N, N = 1, 2, \dots$, 其中 c 是比 x 小的数值, 则 n 阶导数可定义为

$$\frac{d^n f}{dx^n} \equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} [\delta_N x]^{-n} \sum_{j=0}^n [-1]^j \binom{n}{j} f(x - j\delta_N x) \quad (11.12)$$

注意到 $j > n$, n 为整数时, $\binom{n}{j} = 0$, 于是上式可改写为

$$\begin{aligned}\frac{d^n f}{dx^n} &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} [\delta_N x]^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} [-1]^j \binom{n}{j} f(x - j \delta_N x) \\ &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left[\frac{x-c}{N} \right]^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} [-1]^j \binom{n}{j} f\left(x - j \left[\frac{x-c}{N} \right]\right)\end{aligned}\quad (11.13)$$

再来看积分的情况. 首先用 Riemann 和的极限来表示积分, 有

$$\begin{aligned}\frac{d^{-1} f}{[d(x-c)]^{-1}} &\equiv \int_c^x f(y) dy \\ &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ \delta_N x [f(x) + f(x - \delta_N x) + f(x - 2\delta_N x) + \dots + f(c + \delta_N x)] \right\} \\ &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \delta_N x \sum_{j=0}^{N-1} f(x - j \delta_N x)\end{aligned}\quad (11.14)$$

其中 $\delta_N x$ 定义同前, 若类似地做二重积分, 有

$$\begin{aligned}\frac{d^{-2} f}{[d(x-c)]^{-2}} &\equiv \int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} f(x_0) dx_0 \\ &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ [\delta_N x]^2 [f(x) + 2f(x - \delta_N x) + 3f(x - 2\delta_N x) + \dots + Nf(c + \delta_N x)] \right\} \\ &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} [\delta_N x]^2 \sum_{j=0}^{N-1} (j+1) f(x - j \delta_N x)\end{aligned}\quad (11.15)$$

类似地, 若做 n 重迭代之后, 可以找出系数的规律

$$\begin{aligned}\frac{d^{-n} f}{[d(x-c)]^{-n}} &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} [\delta_N x]^n \sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+n-1}{j} f(x - j \delta_N x) \\ &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left[\frac{x-c}{N} \right]^n \sum_{j=0}^N \binom{j+n-1}{j} f\left(x - j \left[\frac{x-c}{N} \right]\right)\end{aligned}\quad (11.16)$$

比较式 (11.16) 和 (11.13), 注意到二项式系数的性质

$$[-1]^j \binom{n}{j} = \binom{j-n-1}{j} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)} \quad (11.17)$$

可以得出一个微积分的统一表达式

$$\frac{d^v f}{[d(x-c)]^v} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(-v)} \left[\frac{x-c}{N} \right]^{-v} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-v)}{\Gamma(j+1)} f \left(x - j \left[\frac{x-c}{N} \right] \right) \quad (11.18)$$

$c = 0$ 时, 也写作

$$D^v f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(-v)} \left(\frac{x}{n} \right)^{-v} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(j-v)}{\Gamma(j+1)} f \left(x - j \frac{x}{N} \right) \quad (11.19)$$

Grünwald 的定义是比较基础的, 计算时并不一定要直接求取极限, 只需取 n 为较大值即可获得渐近结果.

11.1.2 分数阶微积分的性质

分数阶微积分具有一系列有趣的数学性质, 其中一些主要性质如下^[15]:

1. 分数阶微积分算子是线性算子, 故满足一般的线性、齐次和尺度关系:

$$\frac{d^\alpha [f_1(x) + f_2(x)]}{dx^\alpha} = \frac{d^\alpha f_1(x)}{dx^\alpha} + \frac{d^\alpha f_2(x)}{dx^\alpha} \quad (11.20)$$

$$\frac{d^\alpha A f(x)}{dx^\alpha} = A \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \quad (11.21)$$

$$\text{对于积分下界 } c = 0, \quad \frac{d^\alpha f(Cx)}{dx^\alpha} = C^\alpha \frac{d^\alpha f(Cx)}{d(Cx)^\alpha} \quad (11.22)$$

2. 分数阶微积分具有半群的特征

$${}_0 D_c^\alpha {}_0 D_c^\beta f(x) = {}_0 D_c^\beta {}_0 D_c^\alpha f(x) = {}_0 D_c^{\alpha+\beta} f(x) \quad (11.23)$$

3. 分数阶微积分和传统微积分的一个显著区别就是, 连续函数在某点上的分数阶微分并不是在该点处求极限, 而是与初始时刻至该点以前所有时刻的函数值有关, 因此它具有“记忆”特性.

4. 下面我们观察对于常数函数 $f(x) = A$ 的分数阶微分. 对于下界为 c 的 α 次微分而言

$${}_c D_x^\alpha f(x) = \frac{d^\alpha f(x)}{d(x-c)^\alpha} = \frac{d^\alpha A}{d(x-c)^\alpha} = \frac{A}{\Gamma(1-\alpha)} (x-c)^{-\alpha}, \quad \text{对于 } x > c. \quad (11.24)$$

可以发现, 对于常数的 α 阶分数阶微分不为零.

5. 对于 Dirac δ 函数和阶跃函数的分数阶微积分也较为特殊. 对于 $\alpha < 0$,

$$cD_x^\alpha \delta(x-d) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}(x-d)^{-\alpha-1}, \quad \text{对于 } c < d < x. \quad (11.25)$$

对于 $\alpha > 0$ 的情况可以用式 (11.8) 求解. 对于阶跃函数,

$$cD_x^\alpha U(x-d) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-d)^{-\alpha}, \quad \text{对于 } c < d < x. \quad (11.26)$$

6. 分数阶微积分也可以用于描述很多特殊函数, 例如, Bessel 函数 $J_\nu(x)$ (ν 可以是非整数) 可以表示为

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(2x)^{-\nu}} D_{x^2}^{-\nu-\frac{1}{2}} \frac{\cos x}{x} \quad (11.27)$$

7. 分数阶微分的 Fourier 变换. 我们熟知的整数阶 Fourier 变换公式

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (j\omega)^n F(\omega) \quad (11.28)$$

显然, 若将其中的 n 加以推广, 到任意实数或复数 ν , 再进行 Fourier 反变换, 就可以得到分数阶微分结果. 若 $\nu < 0$, 则可以得到分数阶积分结果. 如图 11.1 是对高斯脉冲作不同阶数微分后的结果.

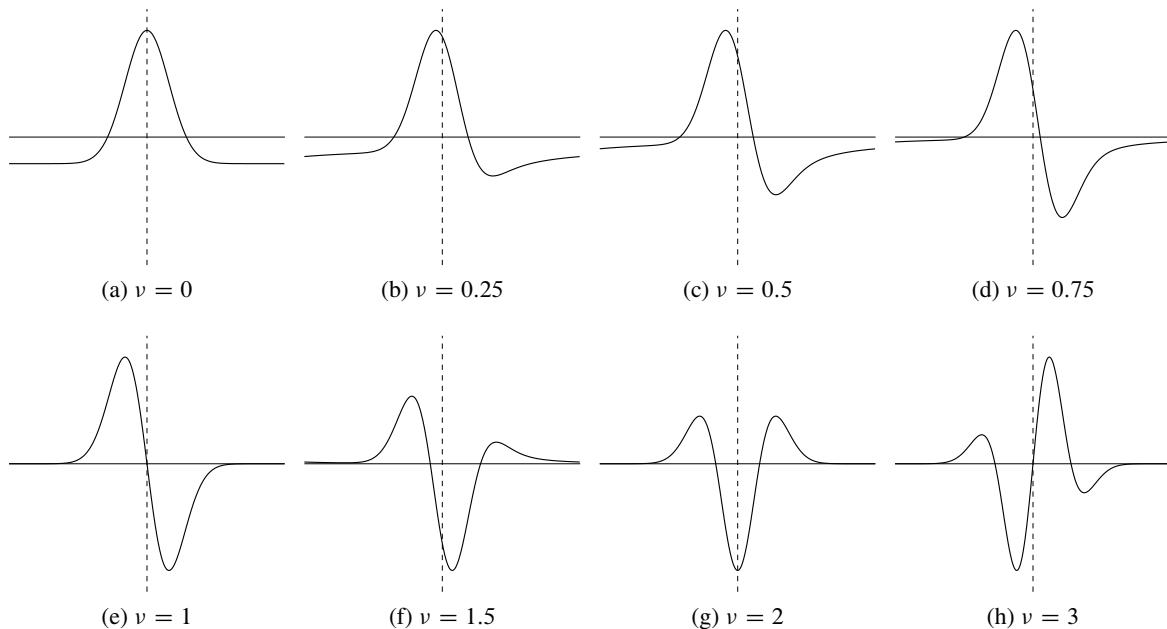


图 11.1 对高斯脉冲作分数阶微分

11.2 分数阶 Fourier 变换

Fourier 变换将相对独立的时域和频域联系起来, 从整体上展示信号曾经出现过的频率成分, 适于分析确定性信号和平稳信号. 对频率成分随时间变化的非平稳信号提出了时频分析, 它将一维的时域信号映射为二维的时频平面, 全面反映信号随时间变化的频率分布特征. Fourier 变换是一种线性算子, 在时频平面, 若将其看作从时间轴逆时针旋转 $\pi/2$ 到频率轴, 则分数阶 Fourier 变换算子就是可旋转任意角度 α 的算子, 可以认为分数阶 Fourier 变换是 Fourier 变换的一种推广.

11.2.1 FRFT 的定义

分数阶 Fourier 变换的变换核 K_α 定义为^[2]

$$K_\alpha(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} e^{j\frac{1}{2}(t^2 + u^2) \cot \alpha - jut \csc \alpha} & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t - u) & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t + u) & \alpha = (2n + 1)\pi \end{cases} \quad (11.29)$$

一种较为方便的算法中可以预先作变换

$$\sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} = \sqrt{\frac{-je^{j\alpha}}{2\pi \sin \alpha}} \quad (11.30)$$

于是 $x(t)$ 的 α 次 FRFT 就可表示为

$$X_\alpha(u) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K_\alpha(t, u) dt$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\frac{t^2}{2} \cot \alpha - jut \csc \alpha} dt & \alpha \neq n\pi \\ x(t) & \alpha = 2n\pi \\ x(-t) & \alpha = (2n + 1)\pi \end{cases} \quad (11.31)$$

由此可以看出, FRFT 的运算可以分为如下四步:

1. 乘以 chirp 信号, chirp 信号即频率随时间线性增加的信号;
2. 作 Fourier 变换, 其中自变量有尺度变换 $\csc \alpha$;
3. 再乘以 chirp 信号;
4. 再乘以复常数.

图 11.2 给出了一个宽度为 2, 幅度为 1 的脉冲信号, 在不同 α 角度下得出的 FRFT 变换结果. 其中实线为实部, 虚线为虚部.

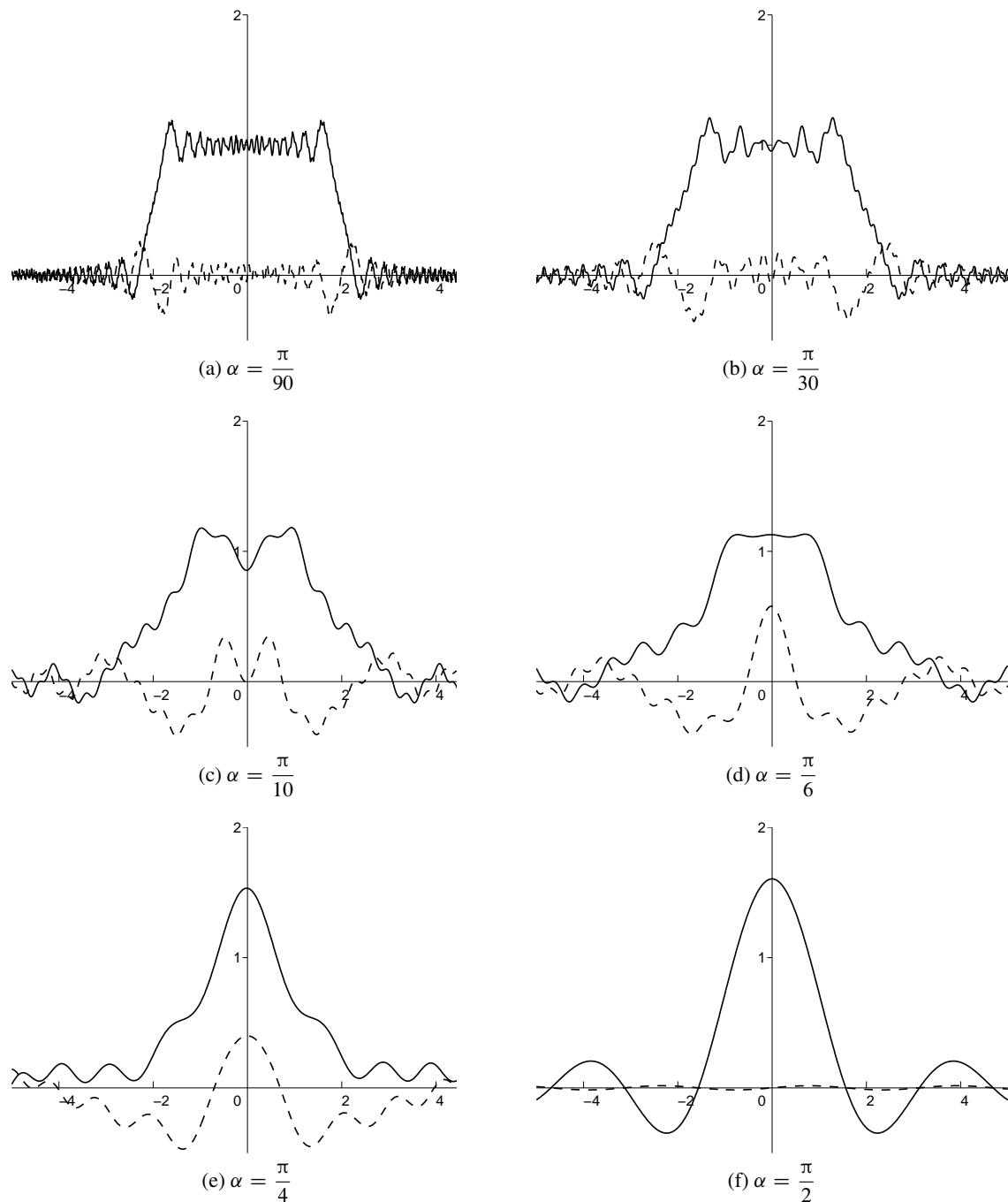


图 11.2 脉冲信号的 FRFT 变换

11.2.2 FRFT 的性质

令 \mathcal{F}_α 代表旋转 α 角度的 FRFT 变换. 其一些重要性质如下:

1. \mathcal{F}_0 为单位算子. $\mathcal{F}_{2\pi}$ 对应做 4 次普通 Fourier 变换, 故也为单位算子. $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{2\pi} = I$.

2. $\mathcal{F}_{\pi/2}$ 为普通 Fourier 变换.
3. 线性特性. $\mathcal{F}_\alpha [ax(t) + by(t)] = aX_\alpha(u) + bY_\alpha(u).$
4. 旋转叠加. $\mathcal{F}_\alpha \mathcal{F}_\beta = \mathcal{F}_{\alpha+\beta}.$
5. 时间反转. $\mathcal{F}_\alpha [x(-t)] = X_\alpha(-u).$
6. 反变换. $-\alpha$ 阶 FRFT 是 α 阶 FRFT 的反变换. $\mathcal{F}_{-\alpha} \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_{\alpha-\alpha} = \mathcal{F}_0 = I.$
7. Parseval 定理. Parseval 定理也可以推广到 FRFT.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_\alpha(u)Y_\alpha^*(u) du \quad (11.32)$$

以及功率保持特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_\alpha(u)|^2 du \quad (11.33)$$

8. 时移特性

$$\mathcal{F}_\alpha [x(t - \tau)] = e^{j\frac{\tau^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - j\mu \tau \sin \alpha} X_\alpha(u - \tau \cos \alpha) \quad (11.34)$$

9. 频移特性

$$\mathcal{F}_\alpha [x(t) e^{jvt}] = e^{-j\frac{v^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha + j\mu v \cos \alpha} X_\alpha(u - v \sin \alpha) \quad (11.35)$$

10. 尺度特性

$$\mathcal{F}_\alpha [x(ct)] = \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{c^2 - j \cot \alpha}} \exp \left[j \frac{u^2}{2} \cot \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \right) \right] X_\beta \left(\frac{u \sin \beta}{c \sin \alpha} \right), \quad \text{其中 } \cot \beta = \frac{\cot \alpha}{c^2} \quad (11.36)$$

11. 微分特性

$$\mathcal{F}_\alpha (x'(t)) = X'_\alpha(u) \cos \alpha + j u \sin \alpha X_\alpha(u) \quad (11.37)$$

12. 积分特性

$$\mathcal{F}_\alpha \left(\int_a^t x(t') dt' \right) = \sec \alpha e^{-j\frac{u^2}{2} \tan \alpha} \int_a^u X_\alpha(z) e^{j\frac{z^2}{2} \tan \alpha} dz, \quad \text{其中 } \alpha \neq \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (11.38)$$

13. 倍乘特性

$$\mathcal{F}_\alpha [tx(t)] = u \cos \alpha X_\alpha(u) + j \sin \alpha X'_\alpha(u) \quad (11.39)$$

14. 倍除特性

$$\mathcal{F}_\alpha \left[\frac{x(t)}{t} \right] = j \sec \alpha e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \int_{-\infty}^u x(z) e^{-j\frac{z^2}{2} \cot \alpha} dz, \quad \text{其中 } a \neq n\pi \quad (11.40)$$

15. 对于实信号 $x(t)$, 有对称特性

$$\begin{aligned} X_{\alpha}^*(u) &= \left(\sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} \right)^* \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j \frac{u^2 + t^2}{2} \cot \alpha + j u t \csc \alpha} dt \\ &= \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j \frac{u^2 + t^2}{2} \cot(-\alpha) - j u t \csc(-\alpha)} dt \\ &= X_{-\alpha}(u) \end{aligned} \quad (11.41)$$

11.2.3 FRFT 与时频分析

分数阶 Fourier 变换是角度为 α 的时频面旋转. 这个性质建立起分数阶 Fourier 变换与时频分布间的直接联系, 并且为分数阶 Fourier 域理解为一种统一的时频变换域奠定了理论基础, 同时也为分数阶 Fourier 变换在信号处理领域中的应用提供了有利条件. 以 Wigner 分布 (WD) 为例, 信号 x 的 WD 定义为

$$\bar{X}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (11.42)$$

通过适当代换积分变量, 也可以化为

$$\bar{X}(t, \omega) = 2e^{2j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x^*(2t - \tau) e^{-2j\omega\tau} d\tau \quad (11.43)$$

利用式 (11.34) FRFT 的时移特性, 可将 $x^*(2t - \tau)$ 表示为

$$x^*(2t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X_{\alpha}^*(-z + 2t \cos \alpha) e^{-2jt^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2jzt \sin \alpha} K_{\alpha}(\tau, z) dz \quad (11.44)$$

于是

$$\begin{aligned} \bar{X}(t, \omega) &= 2e^{2j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} X_{\alpha}^*(-z + 2t \cos \alpha) e^{-2jt^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2jzt \sin \alpha} K_{\alpha}(\tau, z) e^{-2j\omega\tau} d\tau dz \\ &= 2e^{2j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\alpha}^*(-z + 2t \cos \alpha) e^{-2jt^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2jzt \sin \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-2j\omega K_{\alpha}(\tau, z)\tau} d\tau dz \end{aligned} \quad (11.45)$$

利用式 (11.35) 的频移特性, 计算里面一重积分, 有

$$\begin{aligned} \bar{X}(t, \omega) &= 2e^{2j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\alpha}(z + 2\omega \sin \alpha) X_{\alpha}^*(-z + 2t \cos \alpha) \cdot \\ &\quad e^{-2j(t^2 + \omega^2) \sin \alpha \cos \alpha + 2jzt \sin \alpha - 2jz\omega \cos \alpha} dz \end{aligned} \quad (11.46)$$

作变量代换 $\varepsilon = z + \omega \sin \alpha$, 可得

$$\begin{aligned} \bar{X}(t, \omega) &= 2e^{2j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\alpha}(\varepsilon) X_{\alpha}^*(-\varepsilon + 2t \cos \alpha + 2\omega \sin \alpha) \cdot \\ &\quad e^{2j(\omega^2 - t^2) \sin \alpha \cos \alpha + 2j\varepsilon(t \sin \alpha - \omega \cos \alpha - 4j\omega t \sin^2 \alpha)} d\varepsilon \quad (11.47) \end{aligned}$$

如果我们作变量代换

$$\begin{cases} u = t \cos \alpha + \omega \sin \alpha \\ v = -t \sin \alpha + \omega \cos \alpha \end{cases} \quad (11.48)$$

化简后可以得到

$$\bar{X}(t, \omega) = 2e^{2juv} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\alpha}(\varepsilon) X_{\alpha}^*(2u - \varepsilon) e^{-2jv\varepsilon} d\varepsilon \quad (11.49)$$

这正是采用 (u, v) 坐标系计算的 WD. 此式证明了 X_{α} 的 WD 就是 x 的 WD 坐标轴旋转 α . 如图 11.3 所示. 类似的关系对于模糊函数修正的短时 Fourier 变换和谱图依然成立. 分数阶 Fourier 变换提供了信号从时域到频域全过程的综合描述, 随着阶数从 0 连续增长到 1, 分数阶 Fourier 变换展示出信号从时域逐步变化到频域的所有变化特征. 可见, 分数阶 Fourier 变换实际上体现了一种统一的时频观, 是介于时域和频域之间的信号时频分析方法, 可以为信号的时频分析提供更大的选择余地.

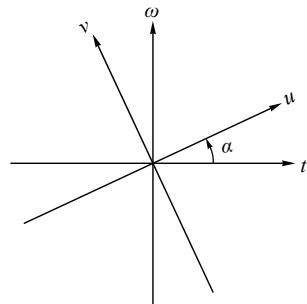
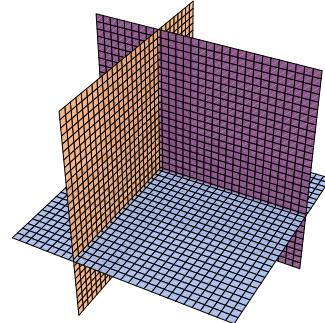


图 11.3 时频平面逆时针旋转 α

附录 A 常用广义正交曲线坐标系

笛卡尔直角坐标系

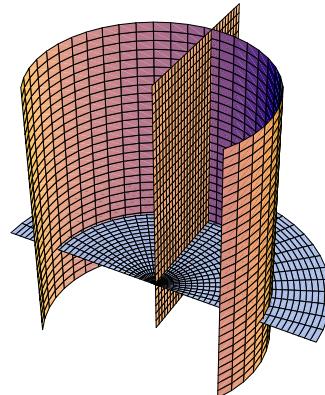
$$(x, y, z) \quad \begin{cases} h_x = 1 \\ h_y = 1 \\ h_z = 1 \end{cases}$$



圆柱坐标系

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta & \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases} \\ y = \rho \sin \theta & \\ z = z & \begin{cases} h_\rho = 1 \\ h_\theta = \rho \\ h_z = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\theta} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

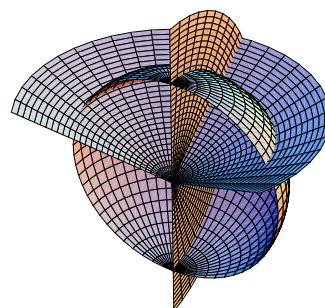


球坐标系

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \cos^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_\rho = 1 \\ h_\theta = \rho \\ h_\varphi = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

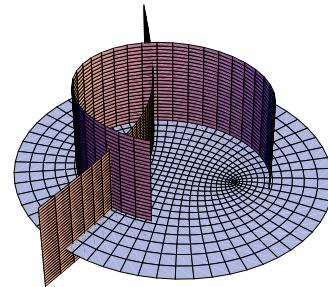


椭圆柱坐标系

$$\begin{cases} x = a \cos v \cosh u \\ y = a \sin v \sinh u \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} u = \Re \left(\cosh^{-1} \left(\frac{x + iy}{a} \right) \right) \\ v = \Im \left(\cosh^{-1} \left(\frac{x + iy}{a} \right) \right) \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_u = a \sqrt{\sin^2 v + \sinh^2 u} \\ h_v = a \sqrt{\sin^2 v + \sinh^2 u} \\ h_z = 1 \end{cases}$$

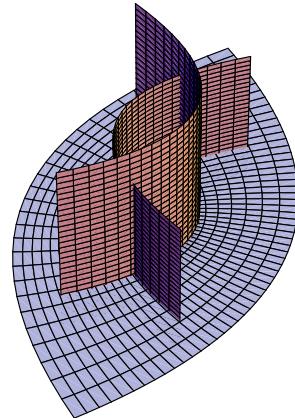
$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos v \sinh u & -a \cosh u \sin v & 0 \\ a \cosh u \sin v & a \cos v \sinh u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$



抛物柱坐标系

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} (u^2 - v^2) \\ y = uv \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} u = \frac{y}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}} \\ v = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} h_u = \sqrt{u^2 + v^2} \\ h_v = \sqrt{u^2 + v^2} \\ h_z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v & 0 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

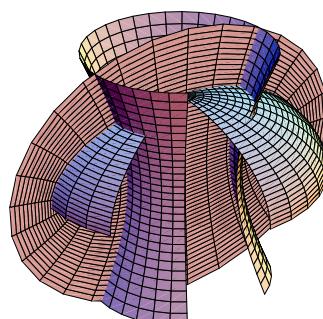


扁椭球坐标系

$$\begin{cases} x = a \cos \xi \cos \varphi \cosh \eta \\ y = a \cos \xi \cosh \eta \sin \varphi \\ z = a \sin \xi \sinh \eta \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = \Im \left(\cosh^{-1} \left(\frac{iz + \sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right) \right) \\ \eta = \Re \left(\cosh^{-1} \left(\frac{iz + \sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right) \right) \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_\xi = a \sqrt{\sin^2 \xi + \sinh^2 \eta} \\ h_\eta = a \sqrt{\sin^2 \xi + \sinh^2 \eta} \\ h_\varphi = a \cos \xi \cosh \eta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \cos \varphi \cosh \eta \sin \xi & a \cos \xi \cos \varphi \sinh \eta & -a \cos \xi \cosh \eta \sin \varphi \\ -a \cosh \eta \sin \xi \sin \varphi & a \cos \xi \sin \varphi \sinh \eta & a \cos \xi \cos \varphi \cosh \eta \\ a \cos \xi \sinh \eta & a \cosh \eta \sin \xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$



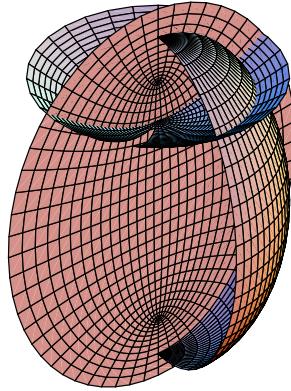
长椭球坐标系

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \sin \eta \sinh \xi \\ y = a \sin \eta \sin \varphi \sinh \xi \\ z = a \cos \eta \cosh \xi \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_\xi = a \sqrt{\sin^2 \eta + \sinh^2 \xi} \\ h_\eta = a \sqrt{\sin^2 \eta + \sinh^2 \xi} \\ h_\varphi = a \sin \eta \sinh \xi \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \cosh \xi \sin \eta & a \cos \eta \cos \varphi \sinh \xi & -a \sin \eta \sin \varphi \sinh \xi \\ a \cosh \xi \sin \eta \sin \varphi & a \cos \eta \sin \varphi \sinh \xi & a \cos \varphi \sin \eta \sinh \xi \\ a \cos \eta \sinh \xi & -a \cosh \xi \sin \eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \xi = \Re \left(\cosh^{-1} \left(\frac{z + i\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right) \right) \\ \eta = \Im \left(\cosh^{-1} \left(\frac{z + i\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right) \right) \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$



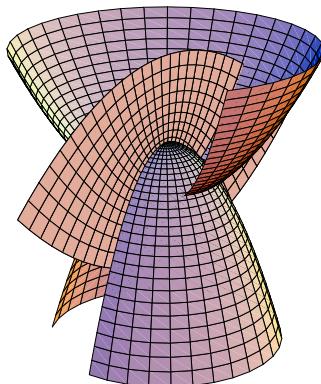
旋转抛物面坐标系

$$\begin{cases} x = uv \cos \varphi \\ y = uv \sin \varphi \\ z = \frac{1}{2} (u^2 - v^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_u = \sqrt{u^2 + v^2} \\ h_v = \sqrt{u^2 + v^2} \\ h_\varphi = uv \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos \varphi & u \cos \varphi & -uv \sin \varphi \\ v \sin \varphi & u \sin \varphi & uv \cos \varphi \\ u & -v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

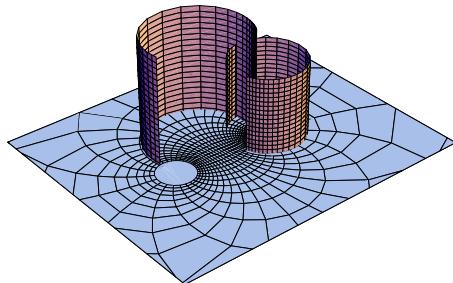
$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z}} \\ v = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$



双极坐标系

$$\begin{cases} x = \frac{a \sinh v}{\cosh v - \cos u} \\ y = \frac{a \sin u}{\cosh v - \cos u} \\ z = z \\ h_u = \frac{a}{\cosh v - \cos u} \\ h_v = \frac{a}{\cosh v - \cos u} \\ h_z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = -2\Im \left(\coth^{-1} \left(\frac{x + iy}{a} \right) \right) \\ v = 2\Re \left(\coth^{-1} \left(\frac{x + iy}{a} \right) \right) \\ z = z \end{cases}$$

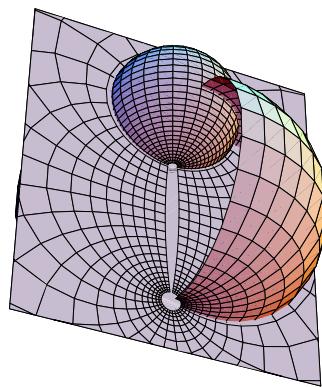


$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a \sin u \sinh v}{(\cosh v - \cos u)^2} & \frac{a \cosh v}{\cosh v - \cos u} - \frac{a \sinh^2 v}{(\cosh v - \cos u)^2} & 0 \\ \frac{a \cos u}{\cosh v - \cos u} - \frac{a \sin^2 u}{(\cosh v - \cos u)^2} & -\frac{a \sin u \sinh v}{(\cosh v - \cos u)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

双球坐标系

$$\begin{cases} x = \frac{a \cos \varphi \sin u}{\cosh v - \cos u} \\ y = \frac{a \sin u \sin \varphi}{\cosh v - \cos u} \\ z = \frac{a \sinh v}{\cosh v - \cos u} \\ u = -2\Im \left(\coth^{-1} \left(\frac{z + i\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right) \right) \\ v = 2\Re \left(\coth^{-1} \left(\frac{z + i\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right) \right) \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_u = \frac{a}{\cosh v - \cos u} \\ h_v = \frac{a}{\cosh v - \cos u} \\ h_\varphi = \frac{a}{\cosh v - \cos u} \end{cases}$$



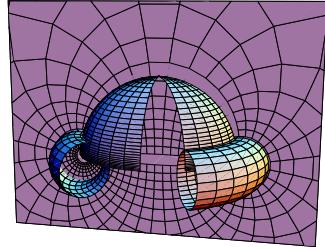
$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a \cos u \cos \varphi}{\cosh v - \cos u} - \frac{a \cos \varphi \sin^2 u}{(\cosh v - \cos u)^2} & -\frac{a \cos \varphi \sin u \sinh v}{(\cosh v - \cos u)^2} & -\frac{a \sin u \sin \varphi}{\cosh v - \cos u} \\ \frac{a \cos u \sin \varphi}{\cosh v - \cos u} - \frac{a \sin^2 u \sin \varphi}{(\cosh v - \cos u)^2} & -\frac{a \sin u \sin \varphi \sinh v}{(\cosh v - \cos u)^2} & \frac{a \cos \varphi \sin u}{\cosh v - \cos u} \\ -\frac{a \sin u \sinh v}{(\cosh v - \cos u)^2} & \frac{a \cosh v}{\cosh v - \cos u} - \frac{a \sinh^2 v}{(\cosh v - \cos u)^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

环坐标系

$$\begin{cases} x = \frac{a \cos \varphi \sinh u}{\cosh u - \cos v} \\ y = \frac{a \sin \varphi \sinh u}{\cosh u - \cos v} \\ z = \frac{a \sinh u}{\cosh u - \cos v} \end{cases} \quad \begin{cases} u = 2\Re \left(\coth^{-1} \left(\frac{iz + \sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right) \right) \\ v = -2\Im \left(\coth^{-1} \left(\frac{iz + \sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right) \right) \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_u = \frac{a}{\cosh u - \cos v} \\ h_v = \frac{a}{\cosh u - \cos v} \\ h_\varphi = \frac{a \sinh u}{\cosh u - \cos v} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a \cos \varphi \cosh u}{\cosh u - \cos v} - \frac{a \cos \varphi \sinh^2 u}{(\cosh u - \cos v)^2} & -\frac{a \cos \varphi \sin v \sinh u}{(\cosh u - \cos v)^2} & -\frac{a \sin \varphi \sinh u}{\cosh u - \cos v} \\ \frac{a \cosh u \sin \varphi}{\cosh u - \cos v} - \frac{a \sin \varphi \sinh^2 u}{(\cosh u - \cos v)^2} & -\frac{a \sin v \sin \varphi \sinh u}{(\cosh u - \cos v)^2} & \frac{a \cos \varphi \sinh u}{\cosh u - \cos v} \\ -\frac{a \sin v \sinh u}{(\cosh u - \cos v)^2} & \frac{a \cos v}{\cosh u - \cos v} - \frac{a \sin^2 v}{(\cosh u - \cos v)^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

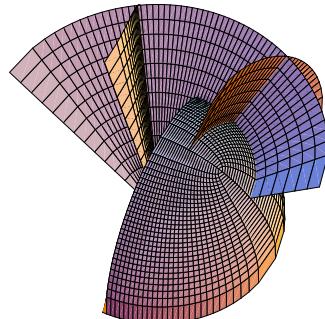


圆锥坐标系

参数 $\{0 < a < b < \infty\}$ $\begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ -\infty < \lambda < \infty & a^2 < \mu^2 < b^2 & \nu^2 < a^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda |\mu\nu|}{ab} \\ y = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{a^2 - b^2}} |\lambda| \operatorname{sgn}(\mu) \\ z = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{a^2 - b^2}} |\lambda| \operatorname{sgn}(\nu) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_\lambda = 1 \\ h_\mu = \frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2} |\lambda|}{\sqrt{b^2 - \mu^2} \sqrt{\mu^2 - a^2}} \\ h_\nu = \frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2} |\lambda|}{\sqrt{\nu^2 - a^2} \sqrt{\nu^2 - b^2}} \end{cases}$$

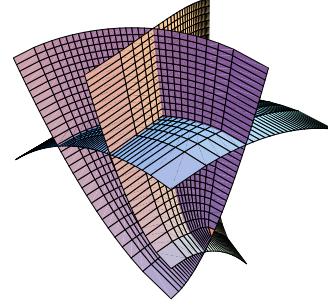


$$\begin{cases} \lambda = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \operatorname{sgn}(x) \\ \mu = \frac{\operatorname{sgn}(y)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a^2 x^2 + b^2 x^2 + b^2 y^2 + a^2 z^2 + \sqrt{(-a^2 x^2 - b^2 x^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2)^2 - 4a^2 b^2 x^2 (x^2 + y^2 + z^2)}}{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \nu = \frac{\operatorname{sgn}(z)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a^2 x^2 + b^2 x^2 + b^2 y^2 + a^2 z^2 - \sqrt{(-a^2 x^2 - b^2 x^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2)^2 - 4a^2 b^2 x^2 (x^2 + y^2 + z^2)}}{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

共焦抛物面坐标系

参数 $\{0 < b < a < \infty\}$ $\left(\begin{array}{ccc} \lambda & \mu & \nu \\ -\infty < \lambda < b^2 & b^2 < \mu < a^2 & a^2 < \nu < \infty \end{array} \right)$

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{(a^2 - \lambda)(a^2 - \mu)(a^2 - \nu)}{b^2 - a^2}} \\ y = \sqrt{\frac{(b^2 - \lambda)(b^2 - \mu)(b^2 - \nu)}{a^2 - b^2}} \\ z = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - \lambda - \mu - \nu) \end{cases} \quad \begin{cases} h_\lambda = \frac{\sqrt{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}}{2\sqrt{(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)}} \\ h_\mu = \frac{\sqrt{(\lambda - \mu)(\nu - \mu)}}{2\sqrt{(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)}} \\ h_\nu = \frac{\sqrt{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)}}{2\sqrt{(a^2 - \nu)(b^2 - \nu)}} \end{cases}$$

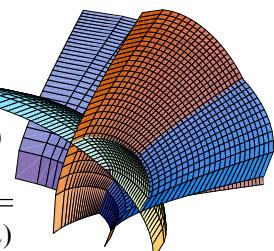


$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\mu} \\ \hat{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{(a^2 - \lambda)(a^2 - \mu)(a^2 - \nu)}}{2(a^2 - \lambda)} & -\frac{\sqrt{(a^2 - \lambda)(a^2 - \mu)(a^2 - \nu)}}{2(a^2 - \mu)} & -\frac{\sqrt{(a^2 - \lambda)(a^2 - \mu)(a^2 - \nu)}}{2(a^2 - \nu)} \\ -\frac{\sqrt{(b^2 - \lambda)(b^2 - \mu)(b^2 - \nu)}}{2(b^2 - \lambda)} & -\frac{\sqrt{(b^2 - \lambda)(b^2 - \mu)(b^2 - \nu)}}{2(b^2 - \mu)} & -\frac{\sqrt{(b^2 - \lambda)(b^2 - \mu)(b^2 - \nu)}}{2(b^2 - \nu)} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

共焦椭球面坐标系

参数 $\{0 < c < b < a < \infty\}$ $\left(\begin{array}{ccc} \lambda & \mu & \nu \\ -\infty < \lambda < c^2 & c^2 < \mu < b^2 & b^2 < \nu < a^2 \end{array} \right)$

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{(a^2 - \lambda)(a^2 - \mu)(a^2 - \nu)}{b^2 - a^2}} \\ y = \sqrt{\frac{(b^2 - \lambda)(b^2 - \mu)(b^2 - \nu)}{a^2 - b^2}} \\ z = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - \lambda - \mu - \nu) \end{cases} \quad \begin{cases} h_\lambda = \frac{\sqrt{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}}{2\sqrt{(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)(c^2 - \lambda)}} \\ h_\mu = \frac{\sqrt{(\lambda - \mu)(\nu - \mu)}}{2\sqrt{(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)(c^2 - \mu)}} \\ h_\nu = \frac{\sqrt{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)}}{2\sqrt{(a^2 - \nu)(b^2 - \nu)(c^2 - \nu)}} \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\mu} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-v)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}} & -\sqrt{\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-v)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}} & -\sqrt{\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-v)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}} \\ -\sqrt{\frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-v)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}} & -\sqrt{\frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-v)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}} & -\sqrt{\frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-v)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}} \\ -\sqrt{\frac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-v)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}} & -\sqrt{\frac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-v)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}} & -\sqrt{\frac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-v)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

附录 B 泛函基础

电磁场边值问题含电磁源分布、媒质及边界条件、电磁场分布三要素。电磁场求解主要包含三类任务：

1. 媒质和边界条件 → 求可能存在的场分布模式；
2. 媒质和边条以及源分布 → 实际场分布；
3. 媒质和边条及实际场分布 → 源分布。

所有这些问题仅在某些极少数的情况（简单媒质和边界条件）下才有解析形式的严格解。在大多数的实际问题中必须用数字解法求解近似解，如变分法、矩量法、有限元法、边界元法、几何绕射法、有限差分法、直线法、小波法、传输线矩阵法（TLM）等。这一部分要介绍的泛函方法，可以包容与阐述一大类上述数字近似方法。

B.1 集合、映射与 Hilbert 空间

B.1.1 集合

I. 集合、元素的定义

集合 符合一定条件的单件事物所组成的整体。其中的单件事物即元素。含无穷多个元素的集合称为无穷集合。

函数理论中的集合分：

数（组）集（即变量（组）所取值的集合）

函数集（即函数所取形式的集合）。如边值问题的本征函数是（无穷）函数集。

例 几何学中，直线、曲线、曲面为点的集合。

数学分析中，实数集，连续函数集 …

II. 数值空间和函数空间（集合的拓扑表示）

点表示元素，空间表示集合（形式集合）。

1. 数值空间：数集的拓扑表示。

n 变量组 (x_1, x_2, \dots, x_n) — n 维抽象空间 \mathbb{R}^n 的点集。类似三维空间，可定义：

距离 点 $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与点 $Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 之间的距离

$$P(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (\text{B.1})$$

体积开区间 $\Omega(x) = \{x_i \in (a_i, b_i) | i=1, 2, \dots, n\}$ 的体积为

$$|\Omega(x)| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad (\text{B.2})$$

可测数集 对应的数值空间具有确定的体积值的数集, 记作 $E(X)$.

2. 函数空间: 函数集的拓扑表示. 每个点都表示不同形式的函数.

可测函数 可测数集 $E(X)$ 上的实函数 $f(x)$, 其函数值的任何范围所对应的自变量 x 的数集是可测数集, 则称为可测函数. 定义在同一可测数集 $E(X)$ 上的不同可测函数组成的函数集为可测函数集.

L^p 可积函数

1. $f(x)$ 在可测数集 $E(X)$ 上可测, 即 $f(x) \in E(X)$;
2. 其 p 次幂绝对值的 Lebesgue 积分存在. 记为 $L^p(E)$ 函数. 所有 $L^p(E)$ 的集合对应 L^p 空间. 当 $p = 2$ 时称为平方可积函数, 对应 L^2 空间.

B.1.2 映射——运算规则的拓扑表示

定义 设 A, B 是两个集合, 若 A 中每个元素 a 根据某种运算规则 f 逐个与 B 中元素一一对应, 则这种对应规则 f 称为从 A 到 B 的映射.

三种基本映射关系: 函数、泛函、算子.

函数 数值空间 (X) 到数值空间 (Y) 的映射;

泛函 函数形式 $U(x)$ 与数值之间的对应关系, 即函数空间到数值空间的映射, 可写成:

$$u = J\{U(x)\}$$

如简单泛函、多元函数的泛函、含多个函数的泛函、泛函组.

例

1) 所有矢量 f 在一个恒定矢量 C 上的投影

$$\rho = \langle C, f \rangle = cf \cos(C, f)$$

2) 导体的电容量: 电容 C 是面电荷分布函数的函数.

泛函总具有定积分的形式. 当 X 为 n 维数组时, 泛函为 n 重积分.

算子 又称变换, 表示函数形式 $\Phi(x)$ 与函数形式 $\Psi(x)$ 之间的对应关系, 即函数空间到函数空间的映射. 写成

$$\Psi(x) = A\Phi(x)$$

例 静电问题, 如图 B.1 所示. 分离导体间的电容可作为电位函数 $\Phi(\mathbf{r})$ 或电荷面密度 $\sigma_s(\mathbf{r})$ 的泛函:

$$C = \frac{2W_E}{\Phi_0^2} = \frac{\epsilon \iiint_V |\nabla \Phi(\mathbf{r})|^2 dv}{\left[\int_a^b \nabla \Phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \right]^2} \quad (\text{B.3})$$

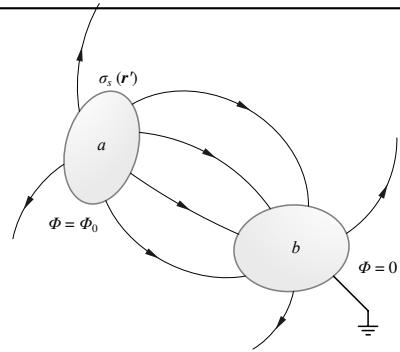


图 B.1 导体间的电容

$$\frac{1}{C} = \frac{2W_E}{Q_0^2} = \frac{\iint_{S[V]} \iint_{S'[V]} \sigma_s(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \sigma_s(\mathbf{r}') ds' ds}{\left[\iint_{S_a} \sigma_s(\mathbf{r}) ds \right]^2} \quad (\text{B.4})$$

例 (时谐电磁场问题): Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}_s(\mathbf{r}) + j\omega \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{i}_s^m(\mathbf{r}) - j\omega \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{i}_s(\mathbf{r}) = -j[\omega \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \nabla \bar{\mathbf{I}} \cdot j\mathbf{H}(\mathbf{r})] \\ j\mathbf{i}_s^m(\mathbf{r}) = -j[\nabla \bar{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \omega \bar{\mu} \cdot j\mathbf{H}(\mathbf{r})] \end{cases}$$

式中 $\bar{\mathbf{I}}$ 为单位并矢, \mathbf{i}_s^m 为磁流源. 记

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ j\mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s(\mathbf{r}) \\ j\mathbf{i}_s^m(\mathbf{r}) \end{bmatrix}$$

及矩阵形式的算子

$$\mathbf{M} = -j \begin{bmatrix} \omega \bar{\epsilon} & \nabla \bar{\mathbf{I}} \\ \nabla \bar{\mathbf{I}} & -\omega \bar{\mu} \end{bmatrix}$$

则麦氏方程可写成算子方程:

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}) = \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r})$$

B.1.3 Hilbert 空间

I. 线性空间

$D(E)$ 为定义在 $E(X)$ 上的函数集, 在 $D(E)$ 中任取三个元素 $f(x), g(x), h(x)$, α 和 β 为任意实数, 若下列性质成立, 则 $D(E)$ 的拓扑表示属于线性空间:

1. $(\alpha f + \beta g) \in D$;
2. 加法的分配律、交换律: $f + g = g + f, (f + g) + h = f + (g + h)$.
3. 乘法的分配律、交换律: $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f, (\alpha + \beta)(f + g) = \alpha f + \beta f + \alpha g + \beta g$;
4. $1 \cdot f = f$.

II. 按内积赋范(线性)空间

范数 函数 $f(x)$ 的范数 $\|f\|$ 是符合以下性质的 **实数** (g, f 属同一线性空间):

1. $\|f\| \geq 0$, 当且仅当 $f(x) \equiv 0$ 时 $\|f\| = 0$;
2. $\|-f\| = \|f\|$;
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$;
4. $\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \|\alpha_n f\| = 0$, 其中 $\{\alpha_n\} \in K$ 常数域.

但能符合上述性质的运算规则并非唯一, 因此范数可有不同的定义.

内积 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的内积 $\langle f, g \rangle$ 是满足下列运算性质的复数 (g, f 属同一线性空间):

1. $\langle f, f \rangle \geq 0$, 当且仅当 $f(x) \equiv 0$ 时, $\langle f, f \rangle = 0$;
2. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$, ($*$ 表示复共轭);
3. $\langle f + h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle$; (f, h, g 属于同一线性空间)
4. $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$, α 是常数.

同样内积也可以有不同的定义.

按内积赋范 即定义范数 $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, 此时范数运算规则取决于内积定义.

赋范(线性)空间 若线性函数集 $D(E)$ 中的每一元素 $f(x)$ 都有范数, 则 $D(E)$ 的拓扑表示称之为**赋范(线性)空间**.

内积(线性)空间 若线性函数集 $D(E)$ 中的每一个元素 $f(x), g(x)$ 都存在内积, 则 $D(E)$ 的拓扑表示称之为**内积(线性)空间**.

III. Hilbert 空间

完备空间 设 $D(E)$ 是线性函数集合, 若其中每一个收敛的元素序列 $\{f_n(x)\}$ 都以同一集合中的某元素 $f(x)$ 为极限, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in D(E)$, 则 $D(E)$ 的拓扑表示称之为**完备空间**.

(Banach) 空间 完备的赋范空间, 简称 \mathbb{B} 空间.

Hilber 空间 完备的内积赋范空间, 简称 \mathbb{H} 空间.

\mathbb{B} 空间包含了按照不同规则赋范的完备空间, 故 \mathbb{H} 空间是其子空间, 表示为 $\mathbb{H} \subset \mathbb{B}$ 或 $\mathbb{B} \supset \mathbb{H}$.

每种按确定内积定义赋范的完备空间都是 \mathbb{H} 空间的子空间, 例如平方可积空间 $L^2(E)$ 、加权平方可积空间 $L^2(E, \sigma(x))$ 及矢量平方可积空间 $\overline{L^2}(E)$. 都是 \mathbb{H} 空间的子空间.

B.2 算子

B.2.1 线性算子

I. 线性算子的定义

设 D_A, D'_A 都是线性函数集, $D_A, D'_A \subset \mathbb{H}$, 由 $\Phi \in D_A, \Psi \in D'_A$, 它们之间的映射关系由 $\Psi = \mathbf{A}\Phi$ 唯一确定, 且满足线性运算规则 (α, β 是任意常数): $\mathbf{A}(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2) = \alpha\mathbf{A}\Phi_1 + \beta\mathbf{A}\Phi_2$. 相应地, D_A 是 \mathbf{A} 的定义域, D'_A 是 \mathbf{A} 的值域.

线性连续算子 若线性算子 \mathbf{A} 对于任意 $\Phi \in D_A$ 都有 $\lim_{\Phi \rightarrow \Phi_1} \mathbf{A}\Phi = \mathbf{A}\Phi_1$, 则 \mathbf{A} 称为线性连续算子.

线性有界算子 若线性算子对于任意 $\Phi \in D_A$ 都有 $\|\mathbf{A}\Phi\| \leq C \|\Phi\|$, 其中 C 为有限常数, 则称 \mathbf{A} 为线性有界算子.

定理 线性算子的连续性和有界性互为充要条件.

II. 运算性质

设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 分别是定义在 D_A 和 D_B 上的线性算子, 则满足下列运算性质:

1. 算子的和: 若 $\Phi \in D_A \cap D_B$, 则 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\Phi = \mathbf{A}\Phi + \mathbf{B}\Phi = (\mathbf{B} + \mathbf{A})\Phi$.
2. 算子的积: 若 $\Phi \in D_B$ 而 $(\mathbf{B}\Phi) \in D_A$, 则 $(\mathbf{AB})\Phi = \mathbf{A}(\mathbf{B}\Phi) \neq (\mathbf{BA})\Phi$.
3. 算子的逆: 若 $(\mathbf{AB})\Phi = \Phi$, 则记 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$, 称 \mathbf{A}, \mathbf{B} 互为逆算子.

恒等算子 线性算子 \mathbf{I} 对任意函数 Φ 都有 $\mathbf{I}\Phi = \Phi$, 则 \mathbf{I} 为恒等算子. 且

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$$

III. 线性算子方程

设 \mathbf{A} 是已知的线性算子, 若值域中的已知点 $\Psi \in D'_A$ 由定义域中的未知点 $\Phi \in D_A$ 映射而得, 即有确定性算子方程

$$\mathbf{A}\Phi = \Psi \tag{B.5}$$

(B.5) 式的形式解可写为

$$\Phi = \mathbf{I}\Phi = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\Phi = \mathbf{A}^{-1}\Psi$$

因此, 关键是算子的求逆运算.

定理 对于确定性算子方程 (B.5), 若 \mathbf{A}^{-1} 存在, 则解存在且唯一, 若 \mathbf{A}^{-1} 连续, 即 $\lim_{\Psi \rightarrow \Psi_1} \Phi = \Phi_1$, 则解稳定.

对于确定性算子方程,

- 已知 \mathbf{A}, Ψ , 求 Φ , \rightarrow 问题的分析过程
- 已知 Φ, Ψ , 求 \mathbf{A} , \rightarrow 问题的综合/设计过程.

本征值算子方程

$$\mathbf{A}\Phi = \lambda\Phi \quad (\text{B.6})$$

其中 λ 是待定常数, 且仅当 λ 取某些特定的本征值 $\{\lambda_n | n = 1, 2, \dots\}$ 时才存在解 Φ_n (本征函数).

B.2.2 对称算子、正定算子和自伴算子

I. 对称算子

含算子的内积: 设 $U(x) \in D'_A \subset L^2(E)$, $V(x) \in D \subset L^2(E)$, 则交集 $D'_A \cap D$ 上的线性泛函

$$\langle \mathbf{A}U, V \rangle = \int_{E(x)} (\mathbf{A}U)V^* dx$$

称为含算子的内积.

对称算子 函数集 $D \subset L^2$ 中任何两个元素 U 和 V 构成的含算子内积都满足

$$\langle \mathbf{A}U, V \rangle = \langle U, \mathbf{A}V \rangle$$

则称 \mathbf{A} 为 D 上的对称算子. 显然, 若 \mathbf{A} 是 D 上的对称算子, $U \in D$, 则由内积性质, 有

$$\langle \mathbf{A}U, U \rangle = \langle U, \mathbf{A}U \rangle^* = \langle U, \mathbf{A}U \rangle$$

说明 $\langle \mathbf{A}U, U \rangle$ 为实数. 这也可视为对称算子的另一种定义.

II. 正定算子

下有界算子 若对于任何 $U \in D \subset L^2$, 都有 $\langle \mathbf{A}U, U \rangle \geq a \|U\|^2$, 则称 \mathbf{A} 为 D 上的下有界算子. 若 $a = 0$, 则称 \mathbf{A} 为 D 上的非负算子.

正算子 若对于任何 $U \in D \subset L^2$, 都有 $\langle \mathbf{A}U, U \rangle > 0$, 则称 \mathbf{A} 为 D 上的正算子.

正定算子 若对于任何 $U \in D \subset L^2$, 都有 $\langle \mathbf{A}U, U \rangle > k \|U\|^2$, $k > 0$, 则称 \mathbf{A} 为 D 上的正定算子.

显然有: 正定算子 \subset 正算子 \subset 非负算子 \subset 下有界算子 \subset 对称算子.

III. 自伴算子

伴随算子

设 \mathbf{A} 是 \mathbb{H} 空间的线性连续算子, 若存在算子 \mathbf{B} 使任何 $U, V \in \mathbb{H}$ 都有 $\langle \mathbf{A}U, V \rangle = \langle U, \mathbf{B}V \rangle$, 则称 \mathbf{B} 为算子 \mathbf{A} 的伴随算子, 记为 $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{B}$. 显然有 $(\mathbf{A}^\dagger)^\dagger = \mathbf{A}$, 因为

$$\langle \mathbf{A}^\dagger U, V \rangle = \langle V, \mathbf{A}^\dagger U \rangle^* = \langle \mathbf{A}V, U \rangle^* = \langle U, \mathbf{A}V \rangle.$$

自伴算子 设是 \mathbb{H} 空间的线性连续算子, 若凡是 $U, V \in \mathbb{H}$ 都有 $\langle \mathbf{A}U, V \rangle = \langle U, \mathbf{A}V \rangle$, 即 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$, 则称 \mathbf{A} 为 **自伴算子**, 又称为 Hermite 算子. 显然: 自伴算子都是 \mathbb{H} 上的对称算子.

定理 凡自伴算子都能求逆, 且其逆算子也是自伴算子. 所以确定性自伴算子方程必存在稳定的唯一解. (显然不适于本征值方程)

例 给定

$$\mathbf{A}f(x) = \int f(x)k(x, x') dx'$$

则

$$\langle Af, g \rangle = \int g(x) \int f(x)k(x, x') dx' dx$$

$k(x, x')$ 为核函数, 若核函数对称, 即 $k(x, x') = k(x', x)$, 则 $\langle \mathbf{A}f, g \rangle = \langle f, \mathbf{A}g \rangle$.

所以具有对称核函数的积分算子是自伴算子, 如电磁场问题中空域标量格林函数具有对称性, 因而算子

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad \text{为自伴算子.}$$

IV. Lagrange 意义下的自伴算子

定义在 $D_b \subset \mathbf{H}$ 上的线性连续对称算子称为 Lagrange 意义下的自伴算子. D_b 为满足某边界条件的函数集, 则该边界条件称为**自伴边界条件**. 由自伴算子方程和自伴边界条件构成的定解问题称为**自伴边值问题**.

在电磁场边值问题中, 所求场函数既要满足算子方程、又要满足边界条件, 但相应地方程中的算子并不要求在整个 \mathbb{H} 空间具有自伴性质, 只要在符合边界条件的函数集 D_b 上是线性对称算子, 就足以保证方程解存在而且稳定、唯一.

小结

- 只要我们建立的算子方程具有自伴意义, 解存在、稳定、唯一.
- 是数值分析方法的数学依据
- 帮助我们理解新方法并验证其实用性. 更进一步, 也是我们提出新的方法的数学依据

B.3 自伴边值问题

B.3.1 Sturm-Liouville (S-L) 边值问题

S-L 边值问题 特殊的二阶线性常微分方程, 一阶项的系数是二阶项系数的导数, 如: Bessel 方程, Legendre 方程, Mathieu 方程等. 形如

$$\begin{cases} \left\{ \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] - q(x) \right\} U(x) + f(x) = 0, & x \in [x_1, x_2] \\ \text{B.C.} \quad \left[\alpha_1 \frac{d}{dx} - \beta_1 \right] U(x_1) = 0 \\ \quad \left[\alpha_2 \frac{d}{dx} - \beta_2 \right] U(x_2) = 0 \end{cases}$$

显然, 一阶项的系数是二阶项系数的导数, $p(x), q(x), p'(x)$ 连续, 实常数 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ 都不同时为零.

当 $f(x)$ 为已知函数时称为确定性边值问题, $f(x) = \lambda r(x)U(x)$ ($r(x)$ 为已知函数, λ 为待定常数) 时称为广义本征值边值问题; 当 $r(x) \equiv 1$ 即 $f(x) = \lambda U(x)$ 时即为(一般)本征值边值问题.

当 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 时为第一类边界条件;

当 $\beta_1 = \beta_2 = 0$ 时为第二类边界条件;

当 $\alpha_1\beta_1 \neq 0$ 或 $\alpha_2\beta_2 \neq 0$ 时为第三类边界条件.

记微分算子 $\mathbf{A} = -\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x)$ 定义在符合所给边界条件函数集 $D_b \subset \mathbb{H}$ 上, 则 S-L 方

程可写为:

$$\mathbf{A}U(x) = f(x) \tag{B.7}$$

对以上三类边界条件, 都有

$$\left[U \frac{dV}{dx} - V \frac{dU}{dx} \right]_{x_1}^{x_2} = 0, \quad U, V \in D_b$$

算子 \mathbf{A} 的性质:

1. 线性连续算子;

2. 注意到 \mathbf{A} 是实算子, 利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{A}U, V \rangle - \langle U, \mathbf{A}V \rangle \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} (V^* \mathbf{A}U - U \mathbf{A}V^*) dx \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \left[U \frac{d}{dx} \left(P \frac{dV^*}{dx} \right) - V^* \frac{d}{dx} \left(P \frac{dU}{dx} \right) \right] dx \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{d}{dx} \left(Up \frac{dV^*}{dx} \right) - p \frac{dV^*}{dx} \frac{dU}{dx} \right] - \left[\frac{d}{dx} \left(V^* p \frac{dU}{dx} \right) - p \frac{dU}{dx} \frac{dV^*}{dx} \right] \right\} dx \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(Up \frac{dV^*}{dx} - V^* p \frac{dU}{dx} \right) dx = p \left[U \frac{dV^*}{dx} - V^* p \frac{dU}{dx} \right]_{x_1}^{x_2} = 0
 \end{aligned}$$

所以 \mathbf{A} 是 D_b 上的对称算子, 从而就是 (Lagrange) 自伴算子; 所以 S-L 边值问题就是 (Lagrange 意义下) 自伴边值问题.

3. 特定条件下为正定算子.

B.3.2 Poisson 边值问题

静电场问题的基本方程是描述电位与电荷之间关系的 Poisson 方程 (Poisson 边值问题, 二阶椭圆型偏微分方程):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \nabla U(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in V, U(\mathbf{r}), f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} \\ \alpha \frac{\partial U(\mathbf{r}_b)}{\partial n} + \beta U(\mathbf{r}_b) = 0, & \mathbf{r}_b \in S[V], \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha\beta \neq 0 \end{cases}$$

记 $\mathbf{A} = -\nabla^2 = -\nabla \cdot \nabla$ 定义在符合上述边界条件的函数集 $D_b \subset \mathbb{H}$ 上, 则 Poisson 方程可写成确定性算子方程:

$$\mathbf{A}U(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad (\text{B.8})$$

设 $U, V \in D_b$, 则

$$1\text{st B.C.: } \alpha = 0, U(\mathbf{r}_b) = V(\mathbf{r}_b) = 0;$$

$$2\text{nd B.C.: } \beta = 0, \frac{\partial U(\mathbf{r}_b)}{\partial n} = \frac{\partial V(\mathbf{r}_b)}{\partial n} = 0;$$

$$3\text{rd B.C.: } \alpha\beta \neq 0, \frac{\partial U(\mathbf{r}_b)}{\partial n} \cdot \frac{1}{U(\mathbf{r}_b)} = \frac{\partial V(\mathbf{r}_b)}{\partial n} \cdot \frac{1}{V(\mathbf{r}_b)} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

即对三类边界条件, 都有 $\left[U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right]_{\mathbf{r} \in S[V]} = 0$

\mathbf{A} 的性质:

1. 线性连续;

2. 由第二格林定理

$$\langle \mathbf{A}U, V \rangle - \langle U, \mathbf{A}V \rangle = \iiint_V (U \nabla \nabla V - V \nabla \nabla U) dV = \oint_{S[V]} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0$$

故 \mathbf{A} 是 D_b 上的对称算子, 从而也是 (Lagrange 意义) 自伴算子, Poisson 边值问题属于自伴边值问题.

3. 由第一格林定理

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}U, U \rangle &= - \iiint_V (U \nabla \nabla U) dV \\ &= \iiint_V \nabla U \cdot \nabla U dV - \oint_{S[V]} U \frac{\partial U}{\partial n} dS = \iiint_V |\nabla U|^2 dV + \begin{cases} 0, & 1st, 2nd B.C. \\ \frac{\beta}{\alpha} \oint_{S[V]} |U|^2 dS, & 3rd B.C. \end{cases} \end{aligned}$$

所以当 $\alpha\beta \geq 0$ 时 \mathbf{A} 是正算子, 且是正定算子.

B.3.3 Helmholtz 边值问题

I. 标量场

时谐电磁场边值问题分为确定性和本征值问题两类. 确定性问题 (源区非齐次 Helmholtz 方程)

$$\begin{cases} (\nabla \nabla + k^2)U(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in V, k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \\ \alpha \frac{\partial U(\mathbf{r}_b)}{\partial n} + \beta U(\mathbf{r}_b) = 0, & \mathbf{r}_b \in S[V], \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha\beta \neq 0 \end{cases}$$

因为描述写时谐场, 这里 $U(\mathbf{r}), f(\mathbf{r})$ 可以是复函数. 令算子 $\mathbf{A} = -(\nabla \nabla + k^2)$, 它也是 D_b 上的线性连续对称算子, 且 $k^2 > 0$ 时是下有界算子 \subset 对称算子, 故上述边值问题属于自伴边值问题.

本征值问题 (非源区齐次 Helmholtz 方程)

$$\begin{cases} (\nabla \nabla + k^2)U(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in V, k^2 \text{ 为待定常数} \\ \alpha \frac{\partial U(\mathbf{r}_b)}{\partial n} + \beta U(\mathbf{r}_b) = 0, & \mathbf{r}_b \in S[V], \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha\beta \neq 0 \end{cases}$$

记 $\lambda = k^2$, $\mathbf{A} = -\nabla \nabla$, 则方程为 $\mathbf{A}U(\mathbf{r}) = \lambda U(\mathbf{r})$, 也是属于自伴边值问题.

II. 矢量场

矢量场函数本征值问题

$$\begin{cases} \mathbf{A}U(\mathbf{r}) = \lambda U(\mathbf{r}), & \mathbf{A} = \nabla \nabla, \lambda = k^2 \text{ 为待定常数} \\ \alpha [\hat{\mathbf{n}} \times \nabla U(\mathbf{r}_b)] + j\beta [\hat{\mathbf{n}} \times U(\mathbf{r}_b)] = 0, & \mathbf{r}_b \in S[V], \alpha\beta \neq 0 \end{cases}$$

对于理想导体, $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ 表示电场时为 1st B.C. ($\alpha \neq 0$), 表示磁场时为 2nd B.C. ($\beta = 0$) .

对于电抗性边界, 电抗为切向电场与切向磁场之比, 为 3rd B.C. ($\alpha\beta \neq 0$).

\mathbf{A} 也是 $D_b \subset \mathbb{H}$ 上 (Lagrange 意义下) 的自伴算子, 故上述边值问题也属自伴本征值边值问题. 对任何 α, β , \mathbf{A} 一定是正 (定) 算子, 其证明用到矢量形式格林定理.

B.3.4 Fredholm 边值问题

求电磁源的分布需求解 Fredholm 积分方程. 也分确定性、本征值问题.

I. 确定性问题 (第一类 Fredholm 积分方程)

$$\begin{cases} \iiint_V G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') U(\mathbf{r}') dV' = f(\mathbf{r}), & \mathbf{r}' \in V \\ G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \sum_m g_m(\mathbf{r}) g_m^*(\mathbf{r}') = G^*(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

其中 $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ 为该问题的 Green 函数, 各类边条的约束已作用于确定 Green 函数的过程, 即 $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \in D_b$. $U(\mathbf{r})$ 是未知的电荷 (静电场问题) 或电流 (时谐场) 源函数. 已知函数 $f(\mathbf{r})$ 是指定边界上的电位或电场函数.

上述第一类 Fredholm 积分方程可写成确定性算子方程: $\mathbf{A}U(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r})$, 算子 $\mathbf{A} = \iiint_V G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') dV'$ 也归属于 (Lagrange 意义下) 自伴算子 (\mathbf{A} 的值域满足 $f(\mathbf{r})$ 的约束边界条件), (B.9) 也是自伴边值问题. \mathbf{A} 也一定是正 (定) 算子.

注意由于 $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ 是复函数

$$\langle \mathbf{A}U, V \rangle - \langle U, \mathbf{A}V \rangle = \iiint_V [V^*(\mathbf{A}U) - U(\mathbf{A}V)^*] dV,$$

电磁场边界条件针对 $f(\mathbf{r})$, 而不是 $U(\mathbf{r})$, 故此时算子是定义在值域的.

II. 标量场本征值问题

第二类 Fredholm 积分方程构成本征值问题:

$$\begin{cases} \iiint_V G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') U(\mathbf{r}') dV' = \lambda U(\mathbf{r}), & \mathbf{r}' \in V, \lambda \text{ 是待定常数} \\ G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \sum_m g_m(\mathbf{r}) g_m^*(\mathbf{r}') = G^*(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

也可改写成本征值算子方程 $\mathbf{A}U(\mathbf{r}) = \lambda U(\mathbf{r})$. 由于未知函数也出现于积分号外, 要受边界条件 $U(\mathbf{r}) \in D_b$ 约束, 故 $\mathbf{A} = \iiint_V G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') dV'$ 是 $D_b \subset \mathbb{H}$ 上的 Lagrange 意义下的自伴算子, 且是正 (定) 算子, (B.10) 是自伴边值问题.

III. 矢量场本征值问题

$$\begin{cases} \iiint_V \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{U}(\mathbf{r}') dV' = \lambda \mathbf{U}(\mathbf{r}), & \mathbf{r}' \in V, \quad \lambda \text{ 是待定常数} \\ \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \sum_m g_m(\mathbf{r}) g_m^*(\mathbf{r}') = \bar{\mathbf{G}}^*(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

式中积分核 $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ 是并矢 Green 函数. 记 $D_b \subset \mathbb{H}$ 上的线性连续算子 $\mathbf{A} = \iiint_V [\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot] dV'$, 则 B.11 为: $\mathbf{A}\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \lambda \mathbf{U}(\mathbf{r})$.

以上在 Poisson、Helmholtz、Fredholm 问题中定义的三维偏微分算子或积分算子, 对各种二维的偏微分或积分算子仍同样适用, 即能确保自伴性质和正(定)性质, 可用统一的观点讨论其求解方法.

Bibliography

- [1] L. B. Almeida. The fractional Fourier transform and time-frequency representations. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 42(11):3084–3091, 1994.
- [2] V. Ashok Narayanan and K. M. M. Prabhu. The fractional fourier transform: theory, implementation and error analysis. *Microprocessors and Microsystems*, 27(10):511–521, 2003.
- [3] A.I. Borisenko and I.E. Tarapov. *Vector and Tensor Analysis with Applications*. Dover Publications, Inc., New York, 1968.
- [4] V. P. Cable, L. A. S. Co, and C. A. Burbank. Iteration, multiple scattering and the sphere of influencetechnique. In *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1990. AP-S.*, pages 68–71, Dallas, USA, 1990.
- [5] C. Candan, M. A. Kutay, and H. M. Ozaktas. The discrete fractional Fourier transform. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 48(5):1329–1337, 2000.
- [6] F. X. Canning. Singular value decomposition of integral equations of em and applications to the cavity resonance problem. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 37(9):1156–1163, 1989.
- [7] F. X. Canning. The impedance matrix localization (iml) method for moment-method calculations. *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, 32(5):18–30, 1990.
- [8] Wei Cao, X. H. Yan, and X. J. Zhu. A new modal formalism in analysis of radiation and scattering problems. In *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1989. AP-S.*, pages 734–737 vol.2, San Jose, CA, USA, 1989.
- [9] C. H. Chan and R. Mittra. On the analysis of frequency-selective surfaces using subdomain basis functions. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 38(1):40–50, 1990.
- [10] Wai-Kai Chen, editor. *The Electrical Engineering Handbook*. Elsevier Academic Press, 2004.
- [11] Y. L. Chow, J. J. Yang, D. G. Fang, and G. E. Howard. A closed-form spatial green's function for the thick microstrip substrate. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 39(3):588–592, 1991.
- [12] T. A. Cwik and R. Mittra. Scattering from a periodic array of free-standing arbitrarily shaped perfectly conducting or resistive patches. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 35:1226–1234, November 1987.

- [13] N. K. Das and D. M. Pozar. A generalized spectral-domain green's function for multilayer dielectric substrates with application to multilayer transmission lines. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 35(3):326–335, 1987.
- [14] K. R. Demarest and K. Kalbasi. Efficient iterative technique for large electromagnetic problems. *Electronic Letters*, 25:1408–1410, 1989.
- [15] N. Engheta. On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 44(4):554–566, 1996.
- [16] D. G. Fang, J. J. Yang, and G. Y. Delisle. Discrete image theory for horizontal electric dipole in a multilayer medium. In *Proc. Inst. Elect. Eng*, volume 135, pages 297–303, 1988.
- [17] T. R. Ferguson, T. H. Lehman, and R. J. Balestri. Efficient solution of large moments problems - Theory and small problem results. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 24:230–235, March 1976.
- [18] G. Goubau, N. N. Puri, and F. K. Schwering. Diakoptic theory for multielement antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 30:15–26, January 1982.
- [19] R. Harrington and J. Mautz. Computation of characteristic modes for conducting bodies. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on [legacy, pre - 1988]*, 19(5):629–639, 1971.
- [20] W. Hong, W. Sun, and W. Dai. Fast parameters extraction of multilayer multiconductor interconnects using geometry independent measured equation of invariance,. In *IEEE MCM Conference*, volume 5, pages 105–110, Santa Cruz, USA, 1996.
- [21] N. Inagaki and R. Garbacz. Eigenfunctions of composite hermitian operators with application to discrete and continuous radiating systems. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on [legacy, pre - 1988]*, 30(4):571–575, 1982.
- [22] T. Itoh. Spectral domain imittance approach for dispersion characteristics of generalized printed transmission lines. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 28(7):733–736, 1980.
- [23] J. O. Jevtić and R. Lee. An analytical characterization of the error in the measured equation of invariance. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 43(10):1109–1115, 1995.
- [24] Jianming Jin. *The Finite Element Method in Electromagnetics*. John Wiley & Sons, Inc., 2nd edition, 2002.

- [25] Chen Jun and Hong Wei. An iterative algorithm based on the measured equation of invariance for the scattering analysis of arbitrary multicylinders. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 47(9):1463–1469, 1999.
- [26] Chen Jun, Hong Wei, and Jin Jian-Ming. An iterative measured equation technique for electromagnetic problems. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 46(1):25–30, 1998.
- [27] J. Y. Ke and C. H. Chen. Dispersion and attenuation characteristics of coplanar waveguides with finite metallization thickness and conductivity, 1995.
- [28] E. F. Knott. A progression of high-frequency rcs prediction techniques. *Proceedings of the IEEE*, 73(2):252–264, 1985.
- [29] J. A. Kong. *Electromagnetic Waves Theory*. EMW Publishing, 2nd edition, 2000.
- [30] Y. W. Liu, K. K. Mei, and K. N. Yung. Differential formulation of on-surface measured equation of invariance for 2-d conducting scatterings. *Microwave and Guided Wave Letters, IEEE [see also IEEE Microwave and Wireless Components Letters]*, 8(2):99–101, 1998.
- [31] A. C. McBride and F. H. Kerr. On Namias's fractional Fourier transforms. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 39(2):159, 1987.
- [32] K. K. Mei, R. Pous, Chen Zhaoqing, Liu Yao-Wu, and M. D. Prouty. Measured equation of invariance: a new concept in field computations. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 42(3):320–328, 1994.
- [33] D. Mendlovic and H. M. Ozaktas. Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I. *Journal of the Optical Society of America A*, 10(9):1875–1881, 1993.
- [34] K. S. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- [35] R. Mittra, C.H. Chan, and T. Cwik. Techniques for analyzing frequency selective surfaces - a review. *Proceedings of the IEEE*, 76(12):1593–1615, 1988.
- [36] V. Namias. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 25(3):241, 1980.
- [37] K. B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, 1974.

- [38] H. Ozaktas and D. Mendlovic. Fractional Fourier transforms and their optical implementation: II. *Journal of the Optical Society of America A*, 10(12):2522–2531, 1993.
- [39] H. M. Ozaktas, O. Arikan, M. A. Kutay, and G. Bozdagt. Digital computation of the fractional Fourier transform. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 44(9):2141–2150, 1996.
- [40] S. C. Pei and M. H. Yeh. Improved discrete fractional Fourier transform. *Optics Letters*, 22(14):1047–1049, 1997.
- [41] S. C. Pei, M. H. Yeh, and C. C. Tseng. Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 47(5):1335–1348, 1999.
- [42] S. Rao, D. Wilton, and A. Glisson. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on [legacy, pre - 1988]*, 30(3):409–418, 1982.
- [43] Dipankar Sarkar and N. J. Halas. General vector basis function solution of maxwell's equations. *Physical Review E*, 56(1):1102–1112, 7 1997.
- [44] T. Sarkar, E. Arvas, and S. Rao. Application of FFT and the conjugate gradient method for the solution of electromagnetic radiation from electrically large and small conducting bodies. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on [legacy, pre - 1988]*, 34(5):635–640, 1986.
- [45] T. K. Sarkar and E. Arvas. On a class of finite step iterative methods (conjugate directions) for the solution of an operator equation arising in electromagnetics. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 33:1058–1066, October 1985.
- [46] U. Schulz and R. Pregla. A new technique for the analysis of the dispersion characteristics of planar waveguides and its application to microstrips with tuning septums. *Radio Science*, 16(6):1173–1178, 1981.
- [47] F. Schwering, N. N. Puri, and C. M. Butler. Modified diakoptic theory of antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 34:1273–1281, November 1986.
- [48] C. C. Shih. Optical interpretation of a complex-order Fourier transform. *Optics Letters*, 20(10):1178–1180, 1995.
- [49] K. Umashankar, S. Nimmagadda, and A. Taflove. Application of integral equation and method of moments forelectrically very large scatterers using spatial decomposition technique. In *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1990. AP-S.*, pages 76–79, Dallas, USA, 1990.

- [50] K. R. Umashankar, S. Nimmagadda, and A. Taflove. Numerical analysis of electromagnetic scattering by electrically large objects using spatial decomposition technique. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 40(8):867–877, 1992.
- [51] S. B. Worm and R. Pregla. Hybrid-mode analysis of arbitrarily shaped planar microwave structures by the method of lines. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 32(2):191–196, 1984.
- [52] J. J. Yang, Y. L. Chow, G. E. Howard, and D. G. Fang. Complex images of an electric dipole in homogeneous and layered dielectrics between two ground planes. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 40(3):595–600, 1992.
- [53] Liu Yaowu, Lan Kang, Liao Cheng, and K. K. Mei. Time-domain mei method for radiation of line source. *Electronics Letters*, 35(4):284–285, 1999.
- [54] Xu Yun-Sheng and Chen Hong-Ming. Validity of the measured equation of invariance. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 47(12):1814–1819, 1999.
- [55] Лисковец О.А. Метод прямых. *Дифференциальные уравнения*, 1(12):1662–1678, 1965.
(Liskovets, O.A., The method of lines (Review), *Differential Equations*.).
- [56] 廖成. 时域 MEI 方法初探. 电波科学学报, 15(3):323–327, 2000 年 9 月.
- [57] 戴振铎, 鲁述. 电磁理论中的并矢格林函数. 武汉大学出版社, 1995.
- [58] 方大纲. 电磁理论中的谱域方法. 安徽教育出版社, 1995.
- [59] 杨儒贵. 电磁理论中的辅助函数. 高等教育出版社, 1992.
- [60] 符果行. 电磁场中的格林函数法. 高等教育出版社, 1993.
- [61] 陶然, 邓兵, 王越. 分数阶 Fourier 变换在信号处理领域的研究进展. 中国科学 E 辑, 36(2):113–136, 2006.