TD4 : Induction structurelle

Exercice 1 [Relations définies inductivement]

1. On définit inductivement l'ensemble $\mathrm{Inf}_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par :
   — (R_{11}) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(0, n) \in \mathrm{Inf}_1$
   — (R_{12}) : pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, si $(n_1, n_2) \in \mathrm{Inf}_1$, alors $(n_1 + 1, n_2 + 1) \in \mathrm{Inf}_1$
   (a) Donner quelques éléments de l'ensemble Inf_1 et en déduire une propriété sur n_1 et n_2 lorsque $(n_1, n_2) \in \mathrm{Inf}_1$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n, n) \in \mathrm{Inf}_1$.
   (c) Montrer que pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, si $(n_1, n_2) \in \mathrm{Inf}_1$ alors $(n_1, n_2 + 1) \in \mathrm{Inf}_1$.
2. On définit inductivement l'ensemble $\mathrm{Inf}_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par :
   — (R_{21}) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n, n) \in \mathrm{Inf}_2$
   — (R_{22}) : pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, si $(n_1, n_2) \in \mathrm{Inf}_2$, alors $(n_1, n_2 + 1) \in \mathrm{Inf}_2$
   (a) Donner quelques éléments de l'ensemble Inf_2 et en déduire une propriété sur n_1 et n_2 lorsque $(n_1, n_2) \in \mathrm{Inf}_2$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(0, n) \in \mathrm{Inf}_2$.
   (c) Montrer que pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, si $(n_1, n_2) \in \mathrm{Inf}_2$ alors $(n_1 + 1, n_2 + 1) \in \mathrm{Inf}_2$.

Exercice 2 [Arbres binaires] On considère l'ensemble AB des arbres binaires (0, 1 ou 2 fils par nœud) sur un alphabet A.

1. Donner une définition inductive de la hauteur $h(t)$, du nombre de nœuds $n(t)$, du nombre d'arêtes $ar(t)$ et du nombre de feuilles $f(t)$ d'un arbre binaire.
2. Montrer que pour tout arbre t de AB, $n(t) \leq 2^{h(t)} - 1$, et que $f(t) \leq 2^{h(t)-1}$.
3. Définir le parcours préfixe d'un arbre binaire.

Exercice 3 [Arbres binaires stricts] Soit A un alphabet et t un arbre binaire *strict* sur A, c'est-à-dire que t est non vide et chaque nœud de t a exactement 0 ou 2 fils (il n'y a aucun noeud avec un seul fils non vide).

1. Donner une définition inductive de l'ensemble ABS des arbres stricts et adapter les définitions inductives des fonctions $n(t)$ (nombre de nœuds), $f(t)$ (nombre de feuilles) et $ar(t)$ (nombre d'arêtes).
2. Montrer que si t est un arbre binaire *strict*, alors $n(t) = ar(t) + 1$.
3. Montrer que si t est un arbre binaire *strict*, alors $n(t) = 2f(t) - 1$.

Exercice 4 [Définitions inductives sur A^*] Soit A^* le monoïde libre engendré par l'alphabet A. Donner une définition inductive de A^*.
Le miroir d'un mot $u = a_1 a_2 \ldots a_n$ est le mot $\tilde{u} = a_n \ldots a_2 a_1$. Donner une définition inductive du miroir.

Exercice 5 [Définition inductive sur A^* et définition équivalente] L'ordre préfixe sur A^* peut être défini de deux manières différentes :

1. Pour tous mots $u, v \in A^*$, $u \preceq^1_{pref} v$ s'il existe $w \in A^*$ tel que $v = uw$.
2. Définition inductive :

   (B) pour tout mot $v \in A^*$, $\varepsilon \preceq^2_{pref} v$

   (I) Si $u, v \in A^*$ sont tels que $u \preceq^2_{pref} v$, alors pour toute lettre $a \in A$, $au \preceq^2_{pref} av$

Montrer que ces deux définitions sont équivalentes.

Exercice 6 On définit l'ensemble $\mathcal{L}$ inductif suivant :

(B) $\texttt{nil} \in \mathcal{L}$

(I) pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathcal{L}$, $n|x \in \mathcal{L}$.

1. Montrer par induction structurelle que si $x \in \mathcal{L}$, alors soit $x = \texttt{nil}$, soit il existe $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{N}$ tels que $x = a_k|\cdots|a_1|\texttt{nil}$. On appelle $a_1, \ldots, a_k$ les *élements* de x.
2. Soit la fonction $s : \mathcal{L} \to \mathbb{N}$ définie par $s(\texttt{nil}) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathcal{L}$, $s(n|x) = n + s(x)$.
   Calculer $s(1|2|3|\texttt{nil})$.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{L}$, si $x = \texttt{nil}$ $s(x) = 0$, sinon $s(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i$ où les a_i sont les éléments de x.

Exercice 7

A partir de l'alphabet $A = \{a, b\}$, on définit les deux sous-ensembles de $A^\star$ suivants :

— définition inductive de l'ensemble $E_1 \subseteq A^\star$:

  (B) $\varepsilon \in E_1$

  (I) si $u \in E_1$ et $v \in E_1$, alors $aubv \in E_1$

— ensemble $E_2 \subseteq A^\star$:

$$E_2 = \{w \in A^\star \mid |w|_a = |w|_b \text{ et pour tout préfixe } u \text{ de } w\ |u|_a \geq |u|_b\}$$

où $|w|_x$ désigne le nombre d'occurrences de la lettre x dans le mot w

1. Montrer par induction structurelle que $E_1 \subseteq E_2$.
2. Montrer par induction bien fondée (sur la longeur des mots) que $E_2 \subseteq E_1$.

Exercice 8

Soit A un alphabet. Deux mots u et v de $A^\star$ commutent si et seulement si $uv = vu$.

1. Donner un exemple de deux mots qui commutent.
2. Montrer (par induction bien fondée sur la longueur $|uv|$ du mot uv) que si deux mots u et v commutent, alors ils sont puissance d'un même mot w :

$$\text{pour tout } u, v \in A^\star \text{ si } uv = vu \text{ alors il existe un mot } w \text{ tel que } u = w^k \text{ et } v = w^l$$

pour deux entiers k et l.