Statistique et Informatique (LU3IN005)

2024-2025

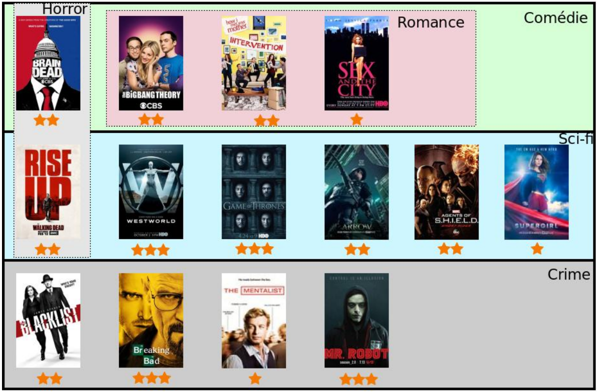
Nicolas Baskiotis

Sorbonne Université
Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique (ISIR)

Cours 3 :

Probabilités conditionnelles
Variables aléatoires
Fonctions de répartition

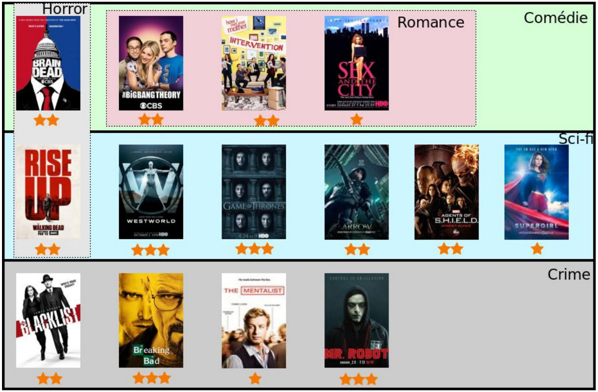
Rappel des cours précédents



Notions fondamentales

- Univers, Événement, Mesure de probabilité, Espace probabilisé
- Incompatibilité, Indépendance, Conditionnement

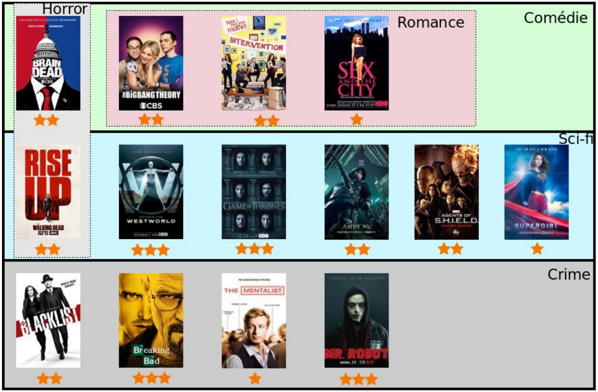
Rappel des cours précédents



Notions fondamentales

- On tire une série au hasard :
  - événement élémentaire ?
  - événements incompatibles ?
  - événements indépendants ?

Rappel des cours précédents



Notions fondamentales

- On tire une série au hasard :
  - événement élémentaire ? une série
  - événements incompatibles ? Comédie et Crime
  - événements indépendants ? Score= 2 (S_2) et Sci-Fi

Plan

Formule de Bayes, théorème des probabilités totales

Formule de Bayes

Soient E et F deux événements de probabilité non nulle. Alors :

$$P(E \cap F) = P(F \mid E) \times P(E) = P(E \mid F) \times P(F), \text{ soit}$$

$$P(E \mid F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)}.$$

Théorème des probabilités totales

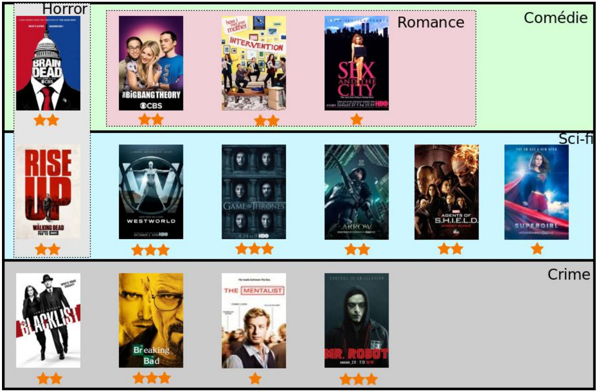
Soit $(F_i)_i$ une partition de Ω (aussi appelé ensemble complet d'événements) :

- si $i \neq j$ alors $F_i \cap F_j = \emptyset$ (F_i et F_j sont incompatibles),
- $\bigcup_i F_i = \Omega$.

Alors $\forall E \subset \Omega, P(E) = \sum_i P(E \cap F_i) = \sum_i P(E|F_i)P(F_i)$.

De plus, pour tout i, $P(F_i|E) = \dfrac{P(E \mid F_i) \times P(F_i)}{\sum_{j=1}^{N} P(E \mid F_j) \times P(F_j)}$.

Formule de Bayès : exemple

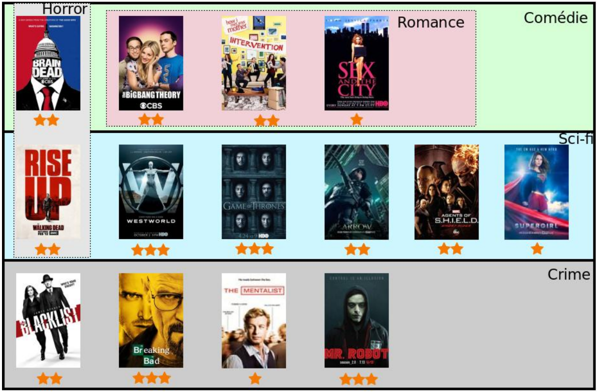


Conditionnement, indépendance

- $P(S_2|\text{Comédie}) = P(S_2 \cap \text{Comédie})/P(\text{Comédie}) = \frac{3}{4}$
- $P(S_2 \cap \text{Comédie}) = P(S_2|\text{Comédie}) \times P(\text{Comédie}) = P(\text{Comedie}|S_2) \times P(S_2)$

$\Rightarrow$ $P(S_2|\text{Comédie}) = P(\text{Comédie}|S_2) \times P(S_2)/P(\text{Comédie})$ (formule de Bayes)

Probabilités totales : exemple



Décomposition de la probabilité de score $= 2$

$$P(S_2) = P(S_2 \cap \text{Comédie}) + P(S_2 \cap \text{SciFi}) + P(S_2 \cap \text{Crime})$$
$$= P(S_2|\text{Comédie})P(\text{Comédie}) + P(S_2|\text{SciFi})P(\text{SciFi}) + P(S_2|\text{Crime})P(\text{Crime})$$

Plan

Probabilités conditionnelles : exemples

Exemple

On tire successivement et sans remise 4 lettres du mot “ATTACHANT” Quelle est la probabilité d’obtenir “CHAT” ?

Rat de laboratoire

Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l’un d’eux se trouve de la nourriture qu’il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience élémentaire est répétée jusqu’à ce que le rat trouve le bon couloir. Sous chacune des hypothèses suivantes, avec quelle probabilité la première tentative réussie est-elle la k-ème ?

- le rat n’a aucun souvenir des expériences précédentes,
- le rat se souvient uniquement de l’expérience précédente,
- le rat se souvient des deux expériences précédentes.

Probabilités conditionnelles : exemples

Exemple

On tire successivement et sans remise 4 lettres du mot "ATTACHANT" Quelle est la probabilité d'obtenir "CHAT" ?

Solution

On veut estimer $P(CHAT)$, on utilise le thérorème de Bayès de manière itérative comme si on faisait la séquence d'expérience (on tire la première lettre, puis a deuxième sachant la première etc) :
$P(CHAT) = P(C)P(HAT|C) = P(C)P(H|C)P(AT|CH) =$
$P(C)P(H|C)P(A|CH)P(T|CHA) = \frac{1*1*3*3}{9*8*7*6}$

Probabilités conditionnelles : exemples

Rat de laboratoire

- le rat n'a aucun souvenir des expériences précédentes,
- le rat se souvient uniquement de l'expérience précédente,
- le rat se souvient des deux expériences précédentes.

Solution

Soit R_i l'événement : "le rat réussit la i-ème tentative" et r_i l'événement "la i-ème tentative est la première réussie". Dans le cas sans mémoire, $P(R_1) = \frac{1}{3}$, $P(R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1) + P(R_2|\overline{R_1})P(\overline{R_1})$. Or $P(R_2|R_1) = P(R_2|\overline{R_1}) = \frac{1}{3}$ car il n'a aucune mémoire. Donc $P(R_2) = \frac{1}{3}$. En généralisant, $P(R_i) = \frac{1}{3}$.
On a donc $P(r_i) = P(R_i\overline{R_{i-1}R_{i-2}\dots\overline{R_1}}) =$
$P(\overline{R_1})P(\overline{R_2}|\overline{R_1})P(\overline{R_3}|\overline{R_2R_1})\dots P(R_i|\overline{R_{i-1}R_{i-2}}\dots\overline{R_1}) = \frac{1*2^{i-1}}{3^i}$.
Dans le 2ème cas, $P(R_2|R_1) = 1$ et $P(R_2|\overline{R_1}) = P(\overline{R_2}|\overline{R_1}) = \frac{1}{2}$ et $P(R_3|R_2R_1) = P(R_3|R_2)$. Donc $P(r_i) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ pour $i \geq 2$

Formule de Bayes : exemple

Exemple

On enlève aléatoirement une carte d'un jeu de 52 cartes, et on ignore laquelle. On tire ensuite au hasard une carte dans ce jeu incomplet et c'est un cœur. Quelle est la probabilité pour que la carte manquante soit un cœur ?

Formule de Bayes : exemple

Exemple

On enlève aléatoirement une carte d'un jeu de 52 cartes, et on ignore laquelle. On tire ensuite au hasard une carte dans ce jeu incomplet et c'est un cœur. Quelle est la probabilité pour que la carte manquante soit un cœur ?
On considère les événements suivants :

- CP : La carte perdue est un cœur
- TC : Tirer un cœur du jeu incomplet

Nous avons alors $P(CP) = \frac{1}{4}$ et $P(TC \mid CP) = \frac{12}{51}$
TC peut s'écrire comme : $TC = (TC \cap CP) \cup (TC \cap \bar{CP})$ et

$$P(CP \mid TC) = \frac{P(TC \mid CP) \times P(CP)}{P(TC \mid CP) \times P(CP) + P(TC \mid \bar{CP}) \times P(\bar{CP})} = \frac{\frac{12}{51} \times \frac{1}{4}}{\frac{12}{51} \times \frac{1}{4} + \frac{13}{51} \times \frac{3}{4}} = \frac{12}{51}$$

Un jeu d'enfants

Paradoxe des deux enfants (M. Gardner, 1959)

1. *M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?*
2. *M. Smith a deux enfants. Au moins un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?*

Un jeu d'enfants

Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  Quelle est la mesure de probabilité considérée ?
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon") :
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F, G), (G, F), (G, G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ($P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \dfrac{P\big((A_2 \cap A_1) \cap A_1\big)}{P(A_1)} = \dfrac{P\big(A_2 \cap A_1\big)}{P(A_1)} = 1/2.$

Un jeu d'enfants

Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  Quelle est la mesure de probabilité considérée ?
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon") :
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F, G), (G, F), (G, G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ($P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \dfrac{P\big((A_2 \cap A_1) \cap A_1\big)}{P(A_1)} = \dfrac{P\big(A_2 \cap A_1\big)}{P(A_1)} = 1/2.$

Un jeu d'enfants

Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  Quelle est la mesure de probabilité considérée ?
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon") :
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F, G), (G, F), (G, G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ($P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \dfrac{P((A_2 \cap A_1) \cap A_1)}{P(A_1)} = \dfrac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = 1/2.$

Un jeu d'enfants

Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  Quelle est la mesure de probabilité considérée ?
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon") :
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F, G), (G, F), (G, G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ($P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \dfrac{P\big((A_2 \cap A_1) \cap A_1\big)}{P(A_1)} = \dfrac{P\big(A_2 \cap A_1\big)}{P(A_1)} = 1/2.$

Un jeu d'enfants

Paradoxe des deux enfants : problème 2

M. Smith a deux enfants. Au moins un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

- Considérons la même mesure de probabilité qu'avant,
- on note : $A = \{(G, G)\}$, $B = \{(G, G), (G, F), (F, G)\}$.
- Alors : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$.

Un jeu d'enfants

Paradoxe des deux enfants : problème 2

M. Smith a deux enfants. Au moins un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

- Considérons la même mesure de probabilité qu'avant,
- on note : $A = \{(G, G)\}$, $B = \{(G, G), (G, F), (F, G)\}$.
- Alors : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$.

Un jeu d'enfants

Paradoxe des deux enfants : problème 2

M. Smith a deux enfants. Au moins un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

- Considérons la même mesure de probabilité qu'avant,
- on note : $A = \{(G, G)\}$, $B = \{(G, G), (G, F), (F, G)\}$.
- Alors : $P(A|B) = \dfrac{P\big(A \cap B\big)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$.

Exemple de Monty Hall - paradoxe des années 70

Let's make a deal

Supposons que vous êtes dans un jeu télévisé ; vous avez le choix entre 3 portes. Derrière une des portes il y a une voiture, derrière les deux autres portes une chèvre. Vous choisissez une des portes, et l'animateur - qui connaît la répartition des lots - ouvre une des deux portes restantes où il sait qu'il y a une chèvre. Il vous demande si vous voulez conserver votre choix. Quelle stratégie est à votre avantage ? Changer ou garder la même porte ?

Calcul des probabilités

B_i : la voiture est derrière la porte i, E : l'animateur a choisi, parmi les portes 1 et 3, d'ouvrir la porte 3

- $\forall i \in \{1,2,3\}, P(B_i) = \frac{1}{3}$
- $P(E|B_1) = 1, P(E \mid B_2) = \frac{1}{2}, P(E \mid B_3) = 0$
- $P(E) = P(E|B_1) \times P(B_1) + P(E|B_2) \times P(B_2) + P(E|B_3) \times P(B_3)$
  $= 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
- $P(B_1 \mid E) = \frac{P(E|B_1) \times P(B_1)}{P(E)} = \frac{2}{3}, \qquad P(B_2 \mid E) = \frac{P(E|B_2) \times P(B_2)}{P(E)} = \frac{1}{3}$

Exemple de Monty Hall - paradoxe des années 70

Let's make a deal

Supposons que vous êtes dans un jeu télévisé ; vous avez le choix entre 3 portes. Derrière une des portes il y a une voiture, derrière les deux autres portes une chèvre. Vous choisissez une des portes, et l'animateur - qui connaît la répartition des lots - ouvre une des deux portes restantes où il sait qu'il y a une chèvre. Il vous demande si vous voulez conserver votre choix. Quelle stratégie est à votre avantage ? Changer ou garder la même porte ?

Calcul des probabilités

B_i : la voiture est derrière la porte i, E : l'animateur a choisi, parmi les portes 1 et 3, d'ouvrir la porte 3

- $\forall i \in \{1, 2, 3\}, P(B_i) = \frac{1}{3}$
- $P(E|B_1) = 1, P(E \mid B_2) = \frac{1}{2}, P(E \mid B_3) = 0$
- $P(E) = P(E|B_1) \times P(B_1) + P(E|B_2) \times P(B_2) + P(E|B_3) \times P(B_3)$
  $= 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
- $P(B_1 \mid E) = \frac{P(E|B_1) \times P(B_1)}{P(E)} = \frac{2}{3}$, $\quad P(B_2 \mid E) = \frac{P(E|B_2) \times P(B_2)}{P(E)} = \frac{1}{3}$

Plan

Variable aléatoire discrète

Intuition

Lorsqu'on est face à une expérience aléatoire, on s'intéresse plus souvent à une *valeur* attribuée au résultat qu'au résultat lui-même.

- problème du dénombrement : trop long à énumerer, peu informatif.
- solution : "traduire" l'univers en évènements "compréhensibles" et ordonnés (avec une valeur pouvant faire sens).

$\Rightarrow$ variable aléatoire discrète : application de l'univers vers un espace discret .

- intérêt : enfin pouvoir "calculer" autre chose que des probabilités.

Exemples

- Lors d'un jeu, on s'intéresse plus au gain que l'on peut obtenir qu'au résultat exact du jeu.
- Lorsqu'on joue au blackjack, on s'intéresse plus à la probabilité de faire un 21 que des configurations élémentaires donnant 21.

Exemple

Exemple du lancer de dé

On lance un dé après avoir misé 1€. Si le résultat est un 5 ou un 6 on double la mise, sinon perd la mise. Dans ce cas :

- $\Omega = \{D1, D2, D3, D4, D5, D6\}$
- Card $\Omega = 6$, Card $\mathcal{P}(\Omega) = 2^6$, et $\forall e \in \Omega, P(e) = \frac{1}{6}$
- Comment calculer la probabilité de gagner 1€ ?

Exemple

Exemple du lancer de dé

On lance un dé après avoir misé 1€. Si le résultat est un 5 ou un 6 on double la mise, sinon perd la mise. Dans ce cas :

- $\Omega = \{D1, D2, D3, D4, D5, D6\}$
- Card $\Omega = 6$, Card $\mathcal{P}(\Omega) = 2^6$, et $\forall e \in \Omega, P(e) = \frac{1}{6}$
- Comment calculer la probabilité de gagner 1€ ?
- Soit X la $v.a.$ qui associe à tout résultat du dé un *gain* :
  $X(D1) = X(D2) = X(D3) = X(D4) = -1$
  $X(D5) = X(D6) = (2 - 1) = 1$
  X est à valeur dans l'ensemble noté $\mathcal{X} = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$
  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$
- $X^{-1}(1)$: l'ensemble des évènements élémentaires correspondant au gain d'1€
- $P(X^{-1}(\{1\})) = P(\textit{Le résultat du dé est } 5 \textit{ ou } 6)$.

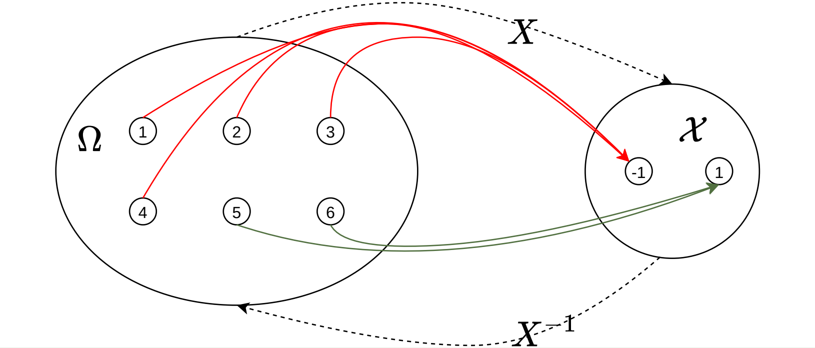
$\Rightarrow$ Définir une probabilité sur $\mathcal{X}$, notée $\mathbb{P}$, en retournant dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$
$\mathbb{P}(\{1\}) = P(X^{-1}(\{1\})) = P(\textit{Le résultat du dé est } 5 \textit{ ou } 6)$.

Exemple

Exemple du lancer de dé

On lance un dé après avoir misé 1€. Si le résultat est un 5 ou un 6 on double la mise, sinon perd la mise. Dans ce cas :

- $\Omega = \{D1, D2, D3, D4, D5, D6\}$
- Card $\Omega = 6$, Card $\mathcal{P}(\Omega) = 2^6$, et $\forall e \in \Omega, P(e) = \frac{1}{6}$
- Comment calculer la probabilité de gagner 1€ ?



Variable aléatoire à valeurs discrètes

Définition

Soit Ω un ensemble dénombrable, et P une mesure de probabilité sur Ω.
Soit Ω', un ensemble discret.
Une variable aléatoire est une fonction X de Ω muni de la mesure P vers Ω'.

Exemples

- Lancer d'un dé :
  Soit $\Omega = \{1, ..., 6\}$ muni de la probabilité uniforme P.
  $X : i \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
  est une variable aléatoire de (Ω, P) vers $\Omega' = \{0, 1\}$.
- Lancer de deux dés :
  Soit $\Omega = \{1, ..., 6\}^2$ muni de la probabilité uniforme P.
  $X : (i, j) \mapsto i + j$
  est une variable aléatoire de (Ω, P) vers $\Omega' = \{2, ..., 12\}$

Loi de probabilité

Définitions

Soit (Ω, P) un espace probabilisé où Ω est dénombrable.
Soit Ω' un ensemble discret, et X une v.a. de (Ω, P) vers Ω'.

- X définit une mesure de probabilité sur Ω', notée P_X, par : pour tout sous-ensemble E' de Ω' :

$$P_X(E') = P\big(X^{-1}(E')\big)$$

  avec $X^{-1}(E') = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in E'\}$
- L'ensemble des valeurs $P_X\big(\{\omega'\}\big)$ pour $\omega' \in \Omega'$ s'appelle la *loi de probabilité* de X.

Notations

- L'événement $X \in]-\infty, a]$ sera noté par $X \leq a$
- L'événement $X \in]a, b]$ sera noté par $a < X \leq b$
- L'événement $X \in \{a\}$ sera noté par $X = a$
- On a donc $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)$

Loi d'une variable aléatoire

Propriété

Une variable aléatoire est totalement définie par sa loi de probabilité, caractérisé par :

- son domaine de définition : l'ensemble des valeur qu'elle peut prendre,
- les probabilités attribuées à chacune de ses valeurs $P(X = x)$.

Questions :

soit Ω un ensemble de cardinal n,

- quel est le plus grand cardinal de l'ensemble des valeurs d'une application de Ω ?
- combien d'applications de Ω vers $\{1, ..., n\}$ différentes existe-t-il ?

Exemple

Jeux de hasard

- On lance un dé après avoir misé 3 euros. Si le résultat est $1, 2, 3$ ou 4, on perd la mise. Sinon, on triple la mise.
  Quelle est la probabilité de gagner 6 euros ? de perdre sa mise ?
- Le joueur décide de jouer deux fois de suite. Quelle est la loi de probabilité du gain sur l'ensemble des deux lancers ?

Exemple

Jeux de hasard

- On lance un dé après avoir misé 3 euros. Si le résultat est $1, 2, 3$ ou 4, on perd la mise. Sinon, on triple la mise.
  Quelle est la probabilité de gagner 6 euros ? de perdre sa mise ?

  $\Omega = \{1, ..., 6\}$ muni de la probabilité uniforme. On note X la v.a. qui représente le gain :
  $$P(X = 6) = P\big(\{5, 6\}\big) = \frac{1}{3}$$
  $$P(X = -3) = \frac{2}{3}$$
- Le joueur décide de jouer deux fois de suite. Quelle est la loi de probabilité du gain sur l'ensemble des deux lancers ?

Exemple

Jeux de hasard

- On lance un dé après avoir misé 3 euros. Si le résultat est $1, 2, 3$ ou 4, on perd la mise. Sinon, on triple la mise.
  Quelle est la probabilité de gagner 6 euros ? de perdre sa mise ?

  $\Omega = \{1, ..., 6\}$ muni de la probabilité uniforme. On note X la v.a. qui représente le gain :
  $$P(X = 6) = P\big(\{5, 6\}\big) = \frac{1}{3}$$
  $$P(X = -3) = \frac{2}{3}$$

- Le joueur décide de jouer deux fois de suite. Quelle est la loi de probabilité du gain sur l'ensemble des deux lancers ?

  L'univers est $\{1, ..., 6\}^2$, muni de la loi de probabilité uniforme.
  Le gain total G suit la loi :

  $$P(G = -6) = P\big(\{1, ..., 4\}^2\big) = \frac{16}{36}, \quad P(G = 3) = ?, \; P(G = 12) = ?$$

Plan

Fonction de répartition

Définition

Soit X une $v.a.$
on appelle **fonction de répartition** de X, notée F la fonction :

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & F(x) = P(X \leq x) \end{array}$$

Propriétés

- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- F est croissante bornée :
  - $F(-\infty) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$
  - $F(+\infty) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1$

Fonction de répartition (suite)

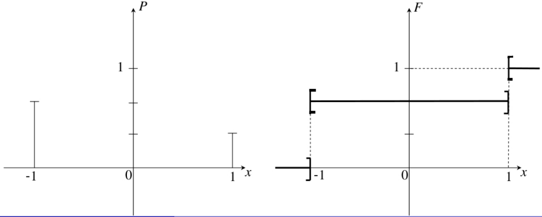
Exemple : Lancer de dé

Avec l'exemple du lancer de dé précédent nous avons $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par :

$$X(e) = -1 \text{ si } e \in \{1, 2, 3, 4\}, \text{ et } X(e) = +1 \text{ si } e \in \{5, 6\}$$

L'ensemble des valeurs possibles est $\mathcal{X} = \{-1, 1\}$. On peut alors caractériser la loi de X par sa fonction de répartition F : $F(x) = P(X \leq x)$

- si $x < -1, \mathcal{X} \cap (]-\infty, x]) = \emptyset \Rightarrow F(x) = 0$
- si $x \in [-1, 1[, \mathcal{X} \cap (]-\infty, x]) = \{-1\} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}$
- si $x \in [1, \infty[, \mathcal{X} \cap (]-\infty, x]) = \{-1, 1\} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$



Variables aléatoires indépendantes

Définitions

Soit (Ω, P) un espace probabilisé.

- Soient X et X' deux v.a. de Ω vers Ω'.
  Les variables X et X' sont indépendantes si :

$$\forall A \subset \Omega', \forall B \subset \Omega', P(X \in A \cap X' \in B) = P(X \in A)P(X' \in B)$$

- Soient X_1, ..., X_n, n v.a. de Ω vers Ω'.
  $X_1, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes si, pour tous sous-ensembles $E_1, ..., E_n$ de Ω', on a :

$$P\left(\bigcap_{i \in \{1, \cdots, n\}} X_i \in E_i\right) = \prod_{i \in I} P(X_i \in E_i)$$

Retour à l'exemple précédent

Si on lance deux fois un dé, avec à chaque fois un gain si le résultat est 5 ou 6, les gains obtenus à chacun des lancers sont indépendants.

Exemple

Résultats de n répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, X une v.a. sur Ω vers Ω'.
On note $\Omega_n = \Omega^n$, et P_n la mesure produit sur Ω_n :

$$\forall \omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega_n, P_n(\{\omega\}) = \prod_{i=1}^{n} P(\omega_i)$$

On note $X_i : \omega \in \Omega_n \mapsto X(\omega_i)$.
Les v.a. X_i sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi que X :

$$\forall i, \forall E' \subset \Omega', P_n(X_i \in E') = P(X \in E')$$

Retour à l'exemple précédent (2)

Si on lance n fois un dé, avec à chaque fois un gain si le résultat est 5 ou 6.
Ω_n est l'ensemble des réalisations possibles des n lancers.
Pour un événement élémentaire $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$:

- ω_i est le résultat du i-ième lancer,
- X_i représente le gain obtenu au i-ième lancer.

Loi conjointe

Definition

Soit (Ω, P) un espace de probabilité, et soient X et Y deux $v.a.$ sur cet espace, à valeur resp. dans F et G. (X, Y) est une $v.a.$, appelée loi conjointe de X et Y ; les valeurs de (X, Y) sont dans $F \times G$.

Propriétés

- la connaissance uniquement de X et de Y ne suffit pas à connaitre la loi jointe, sauf si X est indépendant de Y.
- $\forall x \in F, P(X = x) = \sum_{y \in G} P(X = x, Y = y)$

$\Rightarrow$ la connaisance de la loi jointe permet de déduire la loi de X, appelée dans ce cas *loi marginale*.

Exemple

Soit (X, Y) un couple de $v.a.$ de loi telle que $P((X, Y) = (i, j)) = 1/9$ ssi $0 \leq i \leq 2$ et $-i \leq j \leq i$.

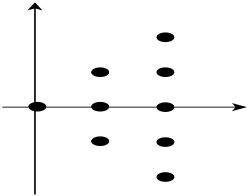
- Quelle est la représentation graphique de la loi ?
- Quelles sont les lois marginales de X et de Y ?

Loi conjointe

Exemple

Soit (X, Y) un couple de *v.a.* de loi telle que $P((X, Y) = (i, j)) = 1/9$ ssi $0 \leq i \leq 2$ et $-i \leq j \leq i$.

- Quelle est la représentation graphique de la loi ?
- Quelles sont les lois marginales de X et de Y ?



$P(X = i) = \sum_{j=-i}^{i} P(X = i, Y = j)$ donc $P(X = 0) = P(X = 0, Y = 0) = 1/9$,
$P(X = 1) = P(X = 1, Y = -1) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = 3/9$ et
$P(X = 2) = 5/9$.
$P(Y = j) = \sum_{i=0}^{2} P(X = i, Y = j)$ donc
$P(Y = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 2, Y = 0) = 3/9$,
$P(Y = \pm 1) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 1) = 2/9$ et $P(Y = \pm 2) = 1/9$.

Deux lois de probabilités discrètes importantes

Loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli est la loi d'une $v.a.$ X à valeur dans $\{0, 1\}$.
$X = 1$ représente le "succès" de l'expérience, et $X = 0$ l'"échec".

$$\forall x \in \{0, 1\}, P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}$$

La probabilité de succès $p = P(X = 1)$ est le paramètre de la loi.

Loi binomiale

Soit X, le nombre de succès d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p, répétée n fois indépendamment. La loi de X est appelée la *loi binomiale* de paramètres n et p :

$$\forall k \in \{0, ..., n\}, P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

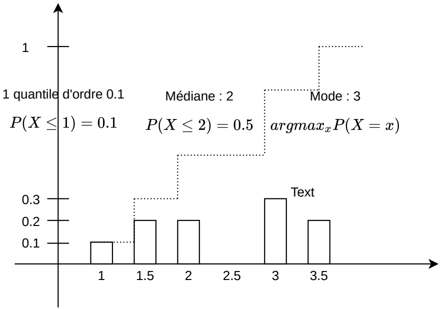
Plan

Caractéristiques d'une v.a.

Définitions

Soit une v.a. X,

- le *quantile* d'ordre α est la valeur x_α telle que $P(X < x_\alpha) = \alpha$.
- la médiane est le quantile d'ordre $\alpha = \frac{1}{2}$
- le *mode* (ou valeur dominante, valeur la plus probable) est la valeur de X associée à la plus grande probabilité.



Espérance d'une v.a. à valeurs réelles

Définition

Soit Ω un ensemble dénombrable, et P une distribution de probabilité sur Ω. Soit X une *v.a.* sur l'espace probabilisé (Ω, P), à valeurs dans $\{x_1, x_2, ...\} \subset \mathbb{R}$. on appelle *espérance* de X, notée $\mathbb{E}(X)$ la quantité :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P\big(\{\omega\}\big)$$

Remarques

- intuition (cf. loi des grands nombres, fin du cours) :

  l'espérance est la limite (quand $n \to \infty$) de la moyenne sur un échantillon de taille n.
- Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\mathbb{E}(X) = p$.

Espérance d'une v.a. à valeurs réelles

Propriétés

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ et tout couple de v.a. (X, Y) valeurs réelles :

- $\mathbb{E}(a) = a$,
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$,
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,
  Plus généralement, si $X_1, ..., X_n$ sont n v.a. réelles :
  $$\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$
- si X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Espérance d'une v.a. à valeurs réelles

Propriétés

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ et tout couple de v.a. (X, Y) valeurs réelles :

- $\mathbb{E}(a) = a$,
  Soit X la fonction constante $X(\omega) = a$,
  $\mathbb{E}(X) = \sum_\omega X(\omega)P(\{\omega\}) = \sum_\omega aP(\{\omega\}) = a\sum_\omega P(\{\omega\}) = a$
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$,
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,
  Plus généralement, si $X_1, ..., X_n$ sont n v.a. réelles :

$$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

- si X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Espérance d'une v.a. à valeurs réelles

Propriétés

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ et tout couple de v.a. (X, Y) valeurs réelles :

- $\mathbb{E}(a) = a$,
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$,
  Soit $Y(\omega) = aX(\omega)$,
  $\mathbb{E}(Y) = \sum_\omega Y(\omega)P(\{\omega\}) = \sum_\omega aX(\omega)P(\{\omega\}) = a\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,
  Plus généralement, si $X_1, ..., X_n$ sont n v.a. réelles :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

- si X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Espérance d'une v.a. à valeurs réelles

Propriétés

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ et tout couple de v.a. (X, Y) valeurs réelles :

- $\mathbb{E}(a) = a$,
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$,
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,
  Soit $Z = X + Y$, $\mathbb{E}(Z) = \sum_{i,j}(x_i + y_j)P(X = x_i, Y = y_j)$
  $= \sum_{i,j} x_i P(X = x_i, Y = y_j) + \sum_{i,j} y_i P(X = x_i, Y = y_j)$
  $= \sum_i x_i(\sum_j P(X = x_i, Y = y_j)) + \sum_j y_j(\sum_i P(X = x_i, Y = y_j)) =$
  $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
  Plus généralement, si $X_1, ..., X_n$ sont n v.a. réelles :
  $$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$
- si X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Espérance d'une v.a. à valeurs réelles

Propriétés

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ et tout couple de v.a. (X, Y) valeurs réelles :

- $\mathbb{E}(a) = a$,
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$,
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,
  Plus généralement, si $X_1, ..., X_n$ sont n v.a. réelles :

$$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

- si X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Soit $Z = XY$, $\mathbb{E}(Z) = \sum_{i,j} x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i,j} x_i y_j P(X = x_i)P(Y = y_j) = (\sum_i x_i P(X = x_i))(\sum_j y_j P(Y = y_j)) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Théorème de transfert

Soit X un v.a. discrète et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, alors $Y = \phi(X)$ est également une v.a. discrète et $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_i \phi(x_i) P(X = x_i)$

Application :

Soit X une v.a. uniforme sur $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, soit $Y = X^2$, alors pour calculer $\mathbb{E}[Y]$ il n'est pas nécessaire de calculer d'abord la loi de Y. On peut écrire :

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{5}\left((-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2\right) = 2$$

Variance et écart-type d'une *v.a.* à valeurs réelles

Définition

Soit X une *v.a.* d'espérance m à valeurs dans $\{x_1, x_2, ...\}$, On appelle variance de X, la quantité :

$$V(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m)^2 P(X = x_i)$$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est appelé *l'écart-type* de X.

Propriétés

- $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$,
- $\forall a \in \mathbb{R}, V(a) = 0$,
- $\forall a \in \mathbb{R}, V(X + a) = V(X)$,
- $\forall a \in \mathbb{R}, V(aX + b) = a^2 V(X)$
- Si $X_1, ..., X_n$ sont n v.a.r. indépendantes : $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$