

Série 1 : Autour de l'algorithme de Gale-Shapley

Exercice 1: Algorithme de Gale-Shapley

On considère quatre femmes (A, B, C, D) et quatre hommes (a, b, c, d). La liste de préférences des femmes est :

A	c	b	d	a
B	b	a	c	d
C	b	d	a	c
D	c	a	d	b

et celle des hommes :

a	A	B	D	C
b	C	A	D	B
c	C	B	D	A
d	B	A	C	D

Q1. Appliquer l'algorithme de Gale-Shapley "côté homme" (avec l'ordre a, b, c, d), puis "côté femme" (avec l'ordre A, B, C, D).

Q2. Existe-t-il d'autres mariages stables ?

Q3. Quelqu'un vous propose un procédé qui consiste à choisir des divorces successifs : on commence par un mariage quelconque, par exemple $\{(A - a), (B - b), (C - c), (D - d)\}$. S'il s'agit d'un mariage instable, comme c'est le cas dans le mariage choisi dans l'exemple, on détermine un couple formant une instabilité, ici A et b qui se préfèrent mutuellement, et on fait divorcer $A - a$ et $B - b$. Ensuite, on remarie A avec b et B avec a . On obtient ainsi un nouveau mariage $\{(A - b), (B - a), (C - c), (D - d)\}$. On continue de la même manière jusqu'à l'obtention d'un mariage stable.

- (i) Donner une séquence d'étapes conduisant à un mariage stable pour l'exemple ci-dessus.
- (ii) Le procédé qui consiste à choisir des divorces successifs de la façon indiquée plus haut conduit nécessairement à un mariage stable. *Vrai ou faux ?* Si c'est vrai le prouver, sinon donner un contre-exemple.

Exercice 2: Propriétés des mariages stables

Q1. Dans chaque instance du problème du mariage stable, il existe un mariage stable contenant un couple (h, f) tel que h est le premier dans la liste de préférence de f et f est la première dans la liste de préférence de h . *Vrai ou faux ?* Si c'est vrai donner une preuve, sinon donner un contre-exemple.

Q2. Considérons une instance du problème du mariage stable dans laquelle il existe un homme h et une femme f tels que h est le premier dans la liste de préférence de f et f est la première dans la liste de préférence de h . Dans ce cas, dans tout mariage stable S , le couple (h, f) appartient à S . *Vrai ou faux ?*

Q3. Dans tout mariage stable, au moins une femme ou un homme est marié avec son meilleur partenaire (le premier de sa liste de préférence). *Vrai ou faux ?*

Exercice 3: Nombre de mariages stables

L'algorithme de Gale-Shapley garantit l'existence de mariage stable. On se demande ici s'il peut y avoir beaucoup de mariages stables.

Q1. S'il y a n hommes et n femmes, combien y a-t-il de mariages (parfaits) possibles ?

Q2. Construire une instance avec 2 hommes et 2 femmes avec 2 mariages stables.

Q3. Soit k le nombre de mariages stables d'une instance avec n hommes et n femmes. Construire une instance avec $2n$ hommes et $2n$ femmes où il y a (au moins) k^2 mariages stables.

Q4. Dédurre des questions 2 et 3 que le nombre de mariages stables peut être exponentiel en n .