5 – Logique des propositions

UE LU2IN005 – Mathématiques discrètes

Mathieu Jaume

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Logique des propositions

- **langage** muni d'une syntaxe formelle permettant de définir un ensemble de formules logiques
  - il existe différents langages logiques (logique des propositions, logique du premier ordre, logiques temporelles, etc.)
- les formules logiques expriment des énoncés qui peuvent être « vrais » ou « faux »
- **formules atomiques** : assertions *a priori* indépendantes

  exemples :
  - *je suis en cours de logique*
  - *je lis mes messages sur mon smartphone*
  - *je comprends la logique*
  - $3 = 2 + 5$

  on peut très bien suivre un cours de logique sans lire ses messages sur son smartphone, comme il n'est pas impossible de comprendre la logique et de lire ses messages sur son smartphone

Logique des propositions : Syntaxe

- **propositions atomiques** : ensemble de **symboles propositionnels** (ou **variables propositionnelles**) $\mathcal{P} = \{p, q, r, \cdots\}$
- ensemble $\mathbb{F}$ des **formules de la logique des propositions**
  - propositions atomiques (assertions *a priori* indépendantes)
  - expression de dépendances à l'aide de connecteurs logiques
    - ★ *Si je ne lis pas mes messages sur mon smartphone et que je suis en cours de logique, alors je comprends la logique*
  - connecteurs logiques :
    - ★ $\neg$: négation
    - ★ $\rightarrow$: implication
    - ★ $\wedge$: conjonction (et)
    - ★ $\vee$: disjonction (ou)

Formules de la logique des propositions

- ensemble $\mathbb{F}$ des formules de la logique des propositions défini inductivement à partir de $\mathcal{P} \cup \{\mathsf{true}, \mathsf{false}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$:
  - toute proposition atomique de $\mathcal{P}$ est une formule de $\mathbb{F}$,
  - les constantes true et false sont des formules de $\mathbb{F}$,
  - si $F \in \mathbb{F}$ alors $\neg F \in \mathbb{F}$ (négation),
  - si $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$ alors $(F_1 \wedge F_2) \in \mathbb{F}$ (conjonction : et),
  - si $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$ alors $(F_1 \vee F_2) \in \mathbb{F}$ (disjonction : ou),
  - si $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$ alors $(F_1 \rightarrow F_2) \in \mathbb{F}$ (implication).

  toutes les formules sont obtenues en appliquant un nombre fini de fois ces règles de construction
- on omet souvent certaines parenthèses « inutiles » ... :
  - **syntaxe concrète** : on utilise des parenthèses pour indiquer sur quelles formules portent les connecteurs logiques
  - arbre de **syntaxe abstraite** : les formules sont représentées par des arbres et ne contiennent pas de parenthèses

Formules de la logique des propositions : Exemple

- propositions atomiques :

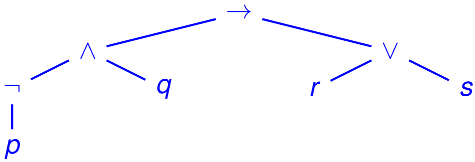
  p : *il pleut* | *q* : *je suis en vacances*
  r : *je vais à la plage* | *s* : *je fais de la logique*

- formule :

  Si il ne pleut pas et que je suis en vacances,
  alors je vais à la plage ou je fais de la logique.

  $$(\neg p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$$

- arbre de syntaxe abstraite (AST : *Abstract Syntax Tree*)



Egalité syntaxique

- les symboles $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$ et $\vee$ désignent des **opérateurs syntaxiques** (appelés connecteurs logiques) permettant de construire des formules à partir d'autres formules (ils n'ont pas encore de signification)
  - connecteur : constructeur de formules
  - syntaxiquement une formule n'a pas de valeur autre qu'elle-même
- **égalité syntaxique** : deux formules sont syntaxiquement égales ssi elles ont été obtenues en appliquant les mêmes connecteurs sur des (sous-)formules syntaxiquement égales.

$\text{true} = \text{true}$	$\text{true} \neq \text{false}$
$p = p$	$p \neq q$
$\neg(p \vee q) = \neg(p \vee q)$	$\neg(p \vee q) \neq \neg p \wedge \neg q$
$p \vee \neg p = p \vee \neg p$	$p \vee \neg p \neq \text{true}$
$p \wedge \neg p = p \wedge \neg p$	$p \wedge \neg p \neq \text{false}$

  - exercice : définir l'égalité syntaxique sur les formules.

Logique des propositions : Sémantique

associer une valeur booléenne appartenant à $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ à une formule $F \in \mathbb{F}$

1. associer un **booléen** (une valeur de $\mathbb{B}$) à (au moins) chaque symbole de proposition de $\mathcal{P}$ apparaissant dans F
   interprétation $\mathbf{I} : \mathcal{P} \to \mathbb{B}$
   - *exemple* : $\mathbf{I}(p) = 0$ et $\mathbf{I}(q) = 1$
2. à partir de $\mathbf{I}$, associer une **expression booléenne**, notée $\mathbf{I}(F)$, à la formule F
   - on prolonge $\mathbf{I}$ aux formules de $\mathbb{F}$
   - *exemple* : $\mathbf{I}(p \vee q) = \mathbf{I}(p) + \mathbf{I}(q)$
     $(= 0 + 1$ si $\mathbf{I}(p) = 0$ et $\mathbf{I}(q) = 1)$
3. **évaluer** l'expression booléenne $\mathbf{I}(F)$ (calculer un booléen)
   - *exemple* : $0 + 1 = 1$

Expressions booléennes : Syntaxe

- $\mathbb{B}$ contient deux éléments distincts : 0 et 1
  - **égalité syntaxique** sur $\mathbb{B}$: $0 = 0$, $1 = 1$ ($0 \neq 1$ et $1 \neq 0$)
- expressions booléennes
  - les booléens 0 et 1 sont des expressions booléennes
  - si e est une expression booléenne, alors $\overline{e}$ est une expression booléenne
  - si e_1 et e_2 sont des expressions booléennes, alors $e_1 + e_2$ et $e_1 \cdot e_2$ sont des expressions booléennes

exercice : définir l'égalité syntaxique sur les expressions booléennes

Interprétation d'une formule logique

- prolongement de $\mathbf{I} : \mathcal{P} \to \mathbb{B}$ aux formules de $\mathbb{F}$

  construction d'une expression booléenne $\mathbf{I}(F)$ à partir d'une interprétation $\mathbf{I}$ et d'une formule F :

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{I}(p) \quad (p \in \mathcal{P}) \\
\mathbf{I}(\text{true}) = 1 \\
\mathbf{I}(\text{false}) = 0 \\
\mathbf{I}(\neg F) = \overline{\mathbf{I}(F)} \\
\mathbf{I}(F_1 \wedge F_2) = \mathbf{I}(F_1) \cdot \mathbf{I}(F_2) \\
\mathbf{I}(F_1 \vee F_2) = \mathbf{I}(F_1) + \mathbf{I}(F_2) \\
\mathbf{I}(F_1 \to F_2) = \overline{\mathbf{I}(F_1)} + \mathbf{I}(F_2)
\end{array}
$$

- *exemple :*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}((\neg p \wedge q) \to (r \vee p)) \quad &= \overline{\mathbf{I}(\neg p \wedge q)} + \mathbf{I}(r \vee p) = \overline{\mathbf{I}(\neg p) \cdot \mathbf{I}(q)} + \mathbf{I}(r) + \mathbf{I}(p) \\
&= \overline{\overline{\mathbf{I}(p)} \cdot \mathbf{I}(q)} + \mathbf{I}(r) + \mathbf{I}(p)
\end{aligned}
$$

Algèbre de Boole minimale $(\mathbb{B}, \cdot, +, \overline{})$

- $\mathbb{B}$ contient uniquement deux éléments distincts 0 et 1 (algèbre *minimale*)
- les deux opérateurs binaires $\cdot$ et $+$ sur $\mathbb{B}$, et l'opérateur unaire $\overline{}$ sur $\mathbb{B}$ vérifient les propriétés suivantes :

  pour tous $a, b \in \mathbb{B}$

Distinction
$0 \not\equiv 1$

Complément	
complément 0	$\overline{0} \equiv 1$
involution	$\overline{\overline{a}} \equiv a$

	Produit	Somme
commutativité	$a \cdot b \equiv b \cdot a$	$a + b \equiv b + a$
élément neutre	$1 \cdot a \equiv a$	$0 + a \equiv a$
élément absorbant	$0 \cdot a \equiv 0$	$1 + a \equiv 1$

- que signifie $e_1 \equiv e_2$?

Expressions booléennes équivalentes

- (Définition) $e_1 \equiv e_2$:
  - le résultat de l'évaluation de e_1 est le booléen b_1
  - le résultat de l'évaluation de e_2 est le booléen b_2
  - les booléens b_1 et b_2 sont syntaxiquement égaux ($b_1 = b_2 = 0$ ou $b_1 = b_2 = 1$)
- (Propriété) $\equiv$ est une relation d'équivalence sur les expressions booléennes
  - réflexivité : $e \equiv e$
  - symétrie : si $e_1 \equiv e_2$ alors $e_2 \equiv e_1$
  - transitivité : si $e_1 \equiv e_2$ et $e_2 \equiv e_3$ alors $e_1 \equiv e_3$
- (Propriété) $\equiv$ est une congruence pour les opérateurs booléens $^-$, $\cdot$ et $+$
  - si $e_1 \equiv e_2$ alors $\overline{e_1} \equiv \overline{e_2}$
  - si $e_1 \equiv e'_1$ et $e_2 \equiv e'_2$ alors $e_1 \cdot e_2 \equiv e'_1 \cdot e'_2$ et $e_1 + e_2 \equiv e'_1 + e'_2$
- on utilise souvent le symbole $=$ à la place du symbole $\equiv$: il s'agit d'une égalité « sémantique »
  - tout comme on écrit $3 + 2 = 1 + 4$ en mathématiques ...

Expressions booléennes équivalentes : Exemples

Pour tous $a, b, c \in \mathbb{B}$:

associativité	
$(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c)$	$(a + b) + c \equiv a + (b + c)$
idempotence	
$a \cdot a \equiv a$	$a + a \equiv a$
élément neutre	
$a \cdot 1 \equiv a$	$a + 0 \equiv a$
élément absorbant	
$a \cdot 0 \equiv 0$	$a + 1 \equiv 1$
distributivité	
$a \cdot (b + c) \equiv a \cdot b + a \cdot c$	$a + (b \cdot c) \equiv (a + b) \cdot (a + c)$
complément	
$a \cdot \overline{a} \equiv 0$	$a + \overline{a} \equiv 1$
lois de Morgan	
$\overline{a \cdot b} \equiv \overline{a} + \overline{b}$	$\overline{a + b} \equiv \overline{a} \cdot \overline{b}$

exercice : montrer ces équivalences

Evaluation d'une expression booléenne

Deux approches pour évaluer l'expression e en un booléen b :

1. approche algébrique : **raisonnement** équationnel utilisant uniquement les **propriétés** de la relation $\equiv$
   - on montre que $e \equiv b$
2. **définition** des opérateurs booléens : application des opérateurs pour **calculer** le résultat

a_1	a_2	$a_1 \cdot a_2$	$a_1 + a_2$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

calcul de b

   - exercice : les opérateurs définis vérifient les propriétés de l'algèbre de Boole minimale

dans la pratique, on « mixe » calcul et raisonnement équationnel

Evaluation d'une expression booléenne : Exemple

- évaluation de $\overline{\overline{a_1} + a_2} + a_1$ lorsque $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$
  - $\overline{\overline{a_1} + a_2} + a_1 = \overline{\overline{1} + 0} + 1 = \overline{0 + 0} + 1 = \overline{0} + 1 = 1 + 1 = 1$
  - ou plus directement $\overline{\overline{a_1} + a_2} + a_1 = \overline{\overline{1} + 0} + 1 = 1$
    (car $a + 1 = 1$ quelle que soit la valeur de a)
  - simplification : on peut même montrer que $\overline{\overline{a_1} + a_2} + a_1$ a toujours la même valeur que a_1 :

    $$\overline{\overline{a_1} + a_2} + a_1 = (\overline{\overline{a_1}} \cdot \overline{a_2}) + a_1 = (a_1 \cdot \overline{a_2}) + (a_1 \cdot 1) = a_1 \cdot (\overline{a_2} + 1) = a_1 \cdot 1 = a_1$$

Formules et fonctions booléennes

représentation d'une formule logique par une fonction booléenne

- $F \in \mathbb{F}$: formule logique dont les symboles propositionnels sont $p_1, \cdots, p_n$
- $f_F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ fonction booléenne (d'arité n) représentant la formule F

  $$f_F(x_1, \cdots, x_n) = \text{expression booléenne dépendant de } x_1, \cdots, x_n$$

  telle que $f_F(\mathbf{I}(p_1), \cdots, \mathbf{I}(p_n)) = \mathbf{I}(F)$ pour toute interprétation $\mathbf{I}$
  - expressions booléennes contenant des symboles de variable booléenne (appartenant à un ensemble X)
- *exemple :*
  - $F = (\neg p \wedge q) \to (r \vee p)$
  - $\mathbf{I}(F) = \overline{\overline{\mathbf{I}(p)} \cdot \mathbf{I}(q)} + \mathbf{I}(r) + \mathbf{I}(p)$
  - $f_F(x_p, x_q, x_r) = \overline{\overline{x_p} \cdot x_q} + x_r + x_p$
- *Toutes les formules de la logique des propositions peuvent être représentées par une fonction booléenne.*

Formules et fonctions booléennes

- *Toutes les formules de la logique des propositions peuvent être représentées par une fonction booléenne.*
- Toutes les fonctions boolénnes représentent-elles une formule de la logique des propositions ?
  - Toutes les fonctions boolénnes peuvent-elles être définies par des expressions booléennes ?
  - Formes normales d'une expression booléenne
    - FNC (forme normale conjonctive)
    - FND (forme normal disjonctive)

Fonctions booléennes

- $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ fonction booléenne d'arité n
  - **Proposition** Soit E et F deux ensembles finis contenant respectivement n et p éléments. Il existe p^n applications distinctes de E vers F.
    PREUVE par récurrence sur n.
    Si $n = 1$ alors il y a $p = p^1$ choix pour l'image de l'unique élément de E
    Si $n = k + 1$ alors, par hypothèse de récurrence, il y a p^k applications distinctes de $E \setminus \{e\}$ dans F (où e est un élément quelconque de E). Pour chacune de ces p^k applications, il y a p choix pour l'image de e, qui permettent d'obtenir $p^k \times p = p^{k+1}$ applications distinctes de E dans F.
  - **Corollaire** Il existe 2^{2^n} fonctions booléennes d'arité n distinctes.
    - *exemple :* 4 fonctions booléennes d'arité $n = 1$

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Fonctions booléennes

- **Théorème** Toute fonction booléenne peut être définie par une expression booléenne.
- **Lemme** Toute fonction booléenne $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ d'arité $n \geq 1$ peut s'écrire : $f(x_1, \cdots, x_n) = x_1 \cdot f(1, x_2, \cdots, x_n) + \overline{x_1} \cdot f(0, x_2, \cdots, x_n)$

  PREUVE Raisonnement par cas sur la valeur de x_1.

  - si $x_1 = 1$ alors :

$$\begin{array}{rl} & x_1 \cdot f(1, x_2, \cdots, x_n) + \overline{x_1} \cdot f(0, x_2, \cdots, x_n) \\ = & 1 \cdot f(1, x_2, \cdots, x_n) + 0 \cdot f(0, x_2, \cdots, x_n) \\ = & f(1, x_2, \cdots, x_n) + 0 = f(1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n) \end{array}$$

  - si $x_1 = 0$ alors :

$$\begin{array}{rl} & x_1 \cdot f(1, x_2, \cdots, x_n) + \overline{x_1} \cdot f(0, x_2, \cdots, x_n) \\ = & 0 \cdot f(1, x_2, \cdots, x_n) + 1 \cdot f(0, x_2, \cdots, x_n) \\ = & 0 + f(0, x_2, \cdots, x_n) = f(0, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n) \end{array}$$

Fonctions booléennes

- **Théorème** Toute fonction booléenne $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ peut être définie par une expression booléenne.

PREUVE Raisonnement par récurrence sur l'arité $n \geq 1$ de f.

Pour $n = 1$, il existe 4 fonctions booléennes qui peuvent toutes être définies par une expression booléenne :

x	$f_1(x) = 0$	$f_2(x) = 1$	$f_3(x) = x$	$f_4(x) = \overline{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Pour $n = k + 1$, posons $g(x_2, \cdots, x_{k+1}) = f(1, x_2, \cdots, x_{k+1})$ et $h(x_2, \cdots, x_{k+1}) = f(0, x_2, \cdots, x_{k+1})$. D'après le lemme précédent :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) = x_1 \cdot f(1, x_2, \cdots, x_{k+1}) + \overline{x_1} \cdot f(0, x_2, \cdots, x_{k+1})$$

et donc : $f(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) = x_1 \cdot g(x_2, \cdots, x_{k+1}) + \overline{x_1} \cdot h(x_2, \cdots, x_{k+1})$

Les fonctions booléennes g et h sont d'arité k et, par hypothèse de récurrence, peuvent être définies par des expressions booléennes e_g et e_h.

$f(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1})$ peut donc être défini par l'expression booléenne $x_1 \cdot e_g + \overline{x_1} \cdot e_h$.

Expressions booléennes en forme normale

- Un **littéral** est soit une variable booléenne x soit le complémentaire $\overline{x}$ d'une variable booléenne.
- Une expression booléenne en **forme normale conjonctive (FNC)** est une expression qui s'écrit comme un produit de sommes de littéraux.
  - *exemple :* $(x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3 + x_4) \cdot x_1$
- Une expression booléenne en **forme normale disjonctive (FND)** est une expression qui s'écrit comme une somme de produits de littéraux.
  - *exemple :* $(x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3 \cdot x_4) + x_1$
- *exemple :* $x + y + z$ est à la fois en FND et en FNC
  - produit qui porte sur un terme unique $x + y + z$
  - somme qui porte sur les 3 termes x, y et z
    - chacun de ces termes est une somme qui porte sur un unique terme

Expressions booléennes en forme normale

- **Proposition** Toute expression booléenne admet une forme normale conjonctive et une forme normale disjonctive qui lui sont équivalentes.
  - une même expression booléenne peut admettre plusieurs FNC (resp. FND) équivalentes distinctes
- preuve constructive de cette proposition : algorithmes de construction d'une FNC/FNC à partir d'une expression booléenne
  - par transformations syntaxiques de l'expression booléenne en utilisant les équivalences booléennes
  - en considérant la fonction booléenne définie par l'expression booléenne

Construction d'une forme normale par transformations syntaxiques

- Transformations
  - **1.** application de l'opérateur de complémentation uniquement sur des variables booléennes
    $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y} \qquad \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y} \qquad \overline{\overline{x}} = x \qquad \overline{0} = 1 \qquad \overline{1} = 0$
  - **2.** distributivité
    - du produit sur la somme pour obtenir une FND :
      $x \cdot (y + z) = (y + z) \cdot x = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
    - de la somme sur le produit pour obtenir une FNC :
      $x + (y \cdot z) = (y \cdot z) + x = (x + y) \cdot (x + z)$
  - (à tout moment) simplifications possibles (*exemple :* $x \cdot x = x$, etc.)
- *exemple :*

$$
\begin{aligned}
& \overline{x + \overline{y} \cdot z} + y \\
(1) =\ & (\overline{x} \cdot \overline{\overline{y} \cdot z}) + y = (\overline{x} \cdot (\overline{\overline{y}} + \overline{z})) + y = \overline{x} \cdot (y + \overline{z}) + y \\
(FND) =\ & \overline{x} \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{z} + y \\
(FNC) =\ & (y + \overline{x}) \cdot (y + y + \overline{z}) = (y + \overline{x}) \cdot (y + \overline{z})
\end{aligned}
$$

Formes normales et fonctions booléennes

- $f(x_1, \cdots, x_n)$: fonction booléenne définie par l'expression booléenne
- $\mathcal{D}_f = \{(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{B}^n \mid f(b_1, \cdots, b_n) = 1\}$
- expression booléenne en FND :

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{(b_1, \cdots, b_n) \in \mathcal{D}_f} x'_1 \cdot \ldots \cdot x'_n \qquad \text{où } x'_i = \begin{cases} x_i & \text{si } b_i = 1 \\ \overline{x_i} & \text{si } b_i = 0 \end{cases}$$

- expression booléenne en FNC :

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{(b_1, \cdots, b_n) \notin \mathcal{D}_f} x'_1 + \ldots + x'_n \qquad \text{où } x'_i = \begin{cases} x_i & \text{si } b_i = 0 \\ \overline{x_i} & \text{si } b_i = 1 \end{cases}$$

- *exemple :* $f(x, y, z) = \overline{x + \overline{y} \cdot z} + y$
  - $\mathcal{D}_f = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 1\} = \left\{ \begin{array}{l} (0,0,0), (0,1,0), (0,1,1), \\ (1,1,0), (1,1,1) \end{array} \right\}$
  - FND $f(x, y, z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z$
  - FNC $(\overline{\mathcal{D}_f} = \{(0,0,1), (1,0,0), (1,0,1), \})$
    $f(x, y, z) = (x + y + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + y + z) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z})$

Formules satisfiables – Formules valides

- Une formule F est **satisfiable** ssi il existe une interprétation $\mathbf{I}$ telle que $\mathbf{I}(F) = 1$.
  - *exemple :* $(\neg p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ est satisfiable puisque $\mathbf{I}((\neg p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)) = \mathbf{I}(p) + \overline{\mathbf{I}(q)} + \mathbf{I}(r) + \mathbf{I}(s) = 1$ pour l'interprétation $\mathbf{I}$ telle que $\mathbf{I}(p) = \mathbf{I}(q) = \mathbf{I}(r) = \mathbf{I}(s) = 0$
- Une formule F est **insatisfiable** ssi il n'existe aucune interprétation $\mathbf{I}$ telle que $\mathbf{I}(F) = 1$.
  - *exemple :* $p \wedge \neg p$ est insatisfiable puisque $\mathbf{I}(p \wedge \neg p) = \mathbf{I}(p) \cdot \overline{\mathbf{I}(p)} = 0$ pour toute interprétation $\mathbf{I}$
- Une formule F est **valide** ssi pour toute interprétation $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}(F) = 1$.
  - *exemple :* $p \vee \neg p$ est valide puisque $\mathbf{I}(p \vee \neg p) = \mathbf{I}(p) + \overline{\mathbf{I}(p)} = 1$ pour toute interprétation $\mathbf{I}$
- Propriétés :
  - F est **valide** ssi $\neg F$ est **insatisfiable**
  - F est **insatisfiable** ssi $\neg F$ est **valide**

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$
  La formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute interprétation $\mathbf{I}$ telle que $\mathbf{I}(F_2) = 1$, on a $\mathbf{I}(F_1) = 1$.
  - *exemple :* $p \models (q \rightarrow p)$ car pour toute interprétation $\mathbf{I}$ telle que $\mathbf{I}(p) = 1$ on a $\mathbf{I}(q \rightarrow p) = \overline{\mathbf{I}(q)} + \mathbf{I}(p) = \overline{\mathbf{I}(q)} + 1 = 1$.

$\mathbf{I}(p)$	$\mathbf{I}(q)$	$\mathbf{I}(q \rightarrow p)$
0	0	1
0	1	0
$\boxed{1} \rightarrow$	0	$\rightarrow \boxed{1}$
$\boxed{1} \rightarrow$	1	$\rightarrow \boxed{1}$

- Propriété : $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \rightarrow F_1$ est valide
  - PREUVE ... à compléter

Conséquence sémantique

- $\mathcal{H} \models F$
  La formule F est **conséquence sémantique** de l'ensemble fini de formules $\mathcal{H} = \{F_1, \cdots, F_n\}$ ssi pour toute interprétation $\mathbf{I}$ telle que $\mathbf{I}(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) = 1$, on a $\mathbf{I}(F) = 1$.
  - *exemple :* $\{p, p \to q\} \models q$
    Soit $\mathbf{I}$ une interprétation telle que $\mathbf{I}(p \wedge (p \to q)) = 1$, on a $\mathbf{I}(p \wedge (p \to q)) = \mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q)$, et donc $\mathbf{I}(q) = 1$.

$\mathbf{I}(p)$	$\mathbf{I}(q)$	$\mathbf{I}(p \to q)$	$\mathbf{I}(p \wedge (p \to q))$	$\mathbf{I}(q)$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
$\boxed{1} \to$	1	$\boxed{1} \to$	$\to \boxed{1} \to$	$\to \boxed{1}$

- Propriétés : $\{F_1, \cdots, F_n\} \cup \{G\} \models F$ ssi $\{F_1, \cdots, F_n\} \models G \to F$
  $\{F_1, \cdots, F_n\} \models F$ ssi $\{F_1, \cdots, F_n\} \cup \{\neg F\}$ est insatisfiable
  $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\} \models F$ ssi $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n) \to F$ est valide
  - PREUVE ... à compléter

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \sim F_2$ ssi pour toute interprétation $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}(F_1) = \mathbf{I}(F_2)$
  - $\sim$ est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive)
  - *exemple :* $\neg(p \vee q) \sim \neg p \wedge \neg q$
    - $\mathbf{I}(\neg(p \vee q)) = \overline{\mathbf{I}(p \vee q)} = \overline{\mathbf{I}(p) + \mathbf{I}(q)} = \overline{\mathbf{I}(p)} \cdot \overline{\mathbf{I}(q)} = \mathbf{I}(\neg p) \cdot \mathbf{I}(\neg q) = \mathbf{I}(\neg p \wedge \neg q)$
    - pour toute interprétation $\mathbf{I}$, les expressions booléennes $\mathbf{I}(\neg(p \vee q))$ et $\mathbf{I}(\neg p \wedge \neg q)$ s'évaluent à la même valeur booléenne
    - les formules $\neg(p \vee q)$ et $\neg p \wedge q$ sont dans la même classe d'équivalence (pour $\sim$)
  - $\sim$ est une congruence pour $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$
    - si $F \sim F'$, alors $\neg F \sim \neg F'$
    - si $F_1 \sim F_1'$ et $F_2 \sim F_2'$, alors $F_1 \rightarrow F_2 \sim F_1' \rightarrow F_2'$
    - si $F_1 \sim F_1'$ et $F_2 \sim F_2'$, alors $F_1 \wedge F_2 \sim F_1' \wedge F_2'$
    - si $F_1 \sim F_1'$ et $F_2 \sim F_2'$, alors $F_1 \vee F_2 \sim F_1' \vee F_2'$
- Propriété : $F_1 \sim F_2$ ssi $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$
  - PREUVE ... à compléter

Fonctions booléennes vs. Formules logiques

- L'ensemble des fonctions booléennes est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{F}_{/\sim}$ (ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{F}$).
  - toute fonction booléenne peut être représentée par au moins une expression booléenne (FNC par exemple)
  - toutes les expressions booléennes équivalentes ($\equiv$) sont associées à des formules logiques équivalentes ($\sim$)