Ensembles, relations, fonctions

Principales définitions et «recettes» pour rédiger des démonstrations correctes

Inclusion

Définition $A \subseteq B$ ssi tous les éléments appartenant à A appartiennent aussi à B

Montrons $A \subseteq B$.
Soit $x \in A$ un élément quelconque de A, montrons $x \in B$.
...

A partir des hypothèses $x \in A$ et $A \subseteq B$ on peut déduire $x \in B$.

Egalité de deux ensembles

Définition $A = B$ ssi $(A \subseteq B$ et $B \subseteq A)$

Montrons $A = B$.
1– Montrons $A \subseteq B$.
...
2– Montrons $B \subseteq A$.
...

A partir de l'hypothèse $A = B$ on peut déduire $A \subseteq B$.

A partir de l'hypothèse $A = B$ on peut déduire $B \subseteq A$.

Union de deux ensembles

Définition $x \in A \cup B$ ssi $(x \in A$ ou $x \in B)$

Montrons $x \in A \cup B$.
Montrons $x \in A$.
...

Montrons $x \in A \cup B$
Montrons $x \in B$.
...

A partir de l'hypothèse $x \in A \cup B$ on peut déduire que $x \in A$ ou $x \in B$ (sans savoir dans lequel de ces deux ensembles x appartient).

Supposons par hypothèse que $x \in A \cup B$ et montrons $P(x)$.
1– Supposons $x \in A$ et montrons $P(x)$.
...
2– Supposons $x \in B$ et montrons $P(x)$.
...

Intersection de deux ensembles

Définition $x \in A \cap B$ ssi $(x \in A$ et $x \in B)$

Montrons $x \in A \cap B$.
1– Montrons $x \in A$.
...
2– Montrons $x \in B$.
...

A partir de l'hypothèse $x \in A \cap B$ on peut déduire $x \in A$.

A partir de l'hypothèse $x \in A \cap B$ on peut déduire $x \in B$.

Différence de deux ensembles

Définition $x \in A \setminus B$ ssi $(x \in A$ et $x \notin B)$

Montrons $x \in A \setminus B$.
1– Montrons $x \in A$.
...
2– Montrons $x \notin B$.
...

A partir de l'hypothèse $x \in A \setminus B$ on peut déduire $x \in A$.

A partir de l'hypothèse $x \in A \setminus B$ on peut déduire $x \notin B$.

Complémentaire d'un ensemble

Définition $x \in \overline{A}$ ssi $x \notin A$

Montrons $x \in \overline{A}$.
Montrons $x \notin A$.
...

A partir de l'hypothèse $x \in \overline{A}$
on peut déduire $x \notin A$.

Produit cartésien de deux ensembles

Définition $(x, y) \in A \times B$ ssi $(x \in A$ et $y \in B)$

Montrons que $x \in A \times B$.
Montrons que x peut s'écrire $x = (x_A, x_B)$
avec $x_A \in A$ et $x_B \in B$.
...

A partir de l'hypothèse $x \in A \times B$
on peut déduire que x s'écrit $x = (x_A, x_B)$
avec $x_A \in A$ et $x_B \in B$.

Parties d'un ensemble

Définition $A \in \wp(E)$ ssi $A \subseteq E$

Montrons que $F \in \wp(E)$.
Montrons que $F \subseteq E$.
...

A partir de l'hypothèse $F \in \wp(E)$
on peut déduire $F \subseteq E$.

Relations réflexives

Définition La relation R sur E est réflexive ssi pour tout $x \in E$, $(x, x) \in R$.

Montrons que R est réflexive.
Soit $x \in E$, montrons que $(x, x) \in R$.
...

A partir des hypothèses «R est réflexive»
et $e \in E$, on peut déduire $(e, e) \in R$.

Relations symétriques

Définition La relation R sur E est symétrique ssi pour tous $x, y \in E$, si $(x, y) \in R$ alors $(y, x) \in R$.

Montrons que R est symétrique.
Soit $x, y \in E$ tels que $(x, y) \in R$,
montrons que $(y, x) \in R$.
...

A partir des hypothèses «R est symétrique» et
$(e_1, e_2) \in R$, on peut déduire $(e_2, e_1) \in R$.

Relations anti-symétriques

Définition La relation R sur E est anti-symétrique ssi pour tous $x, y \in E$, si $(x, y) \in R$ et $(y, x) \in R$, alors $x = y$.

Montrons que R est anti-symétrique.
Soit $x, y \in E$ tels que $(x, y) \in R$ et
$(y, x) \in R$, montrons que $x = y$.
...

A partir des hypothèses «R est anti-symétrique»,
$(e_1, e_2) \in R$ et $(e_2, e_1) \in R$, on peut déduire $e_1 = e_2$.

Relations transitives

Définition La relation R sur E est transitive ssi pour tous $x, y, z \in E$, si $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$ alors $(x, z) \in R$.

Montrons que R est transitive.
Soit $x, y, z \in E$ tels que $(x, y) \in R$
et $(y, z) \in R$, montrons que $(x, z) \in R$.
...

A partir des hypothèses «R est transitive», $(e_1, e_2) \in R$
et $(e_2, e_3) \in R$, on peut déduire $(e_1, e_3) \in R$.

Relations totales

Définition La relation R sur E est totale ssi pour tous $x, y \in E$, $(x, y) \in R$ ou $(y, x) \in R$.

A partir de deux éléments $e_1, e_2 \in E$ et de l'hypothèse «R est totale», on peut déduire $(e_1, e_2) \in R$ ou $(e_2, e_1) \in R$.
(sans savoir laquelle de ces 2 affirmations est vraie).

Montrons que R est totale.
Soit $x, y \in E$, montrons que $(x, y) \in R$ ou $(y, x) \in R$.
...

Supposons par hypothèse que R est totale.
Soit $e_1, e_2 \in E$, montrons une propriété P.
1– Supposons $(e_1, e_2) \in R$ et montrons P.
...

2– Supposons $(e_2, e_1) \in R$ et montrons P.
...

Relations d'équivalence – Classes d'équivalence

Définition La relation R sur E est une relation d'équivalence ssi elle est réflexive, symétrique et transitive.

Montrons que R est une relation d'équivalence.
1– Montrons que R est réflexive.
...

2– Montrons que R est symétrique.
...

3– Montrons que R est transitive.
...

A partir de l'hypothèse «R est une relation d'équivalence», on peut déduire que R est réflexive, symétrique et transitive.

Définition Soit R une relation d'équivalence sur E et $e \in E$. La classe d'équivalence de e est l'ensemble $[e]_R = \{e' \in E \mid (e, e') \in R\}$.

Soit R une relation d'équivalence sur E, montrons que $x \in [e]_R$.
Montrons que $(e, x) \in R$.
...

Soit R une relation d'équivalence sur E, à partir de l'hypothèse $x \in [e]_R$, on peut déduire que $(e, x) \in R$.

Relations d'ordre

Définition La relation R sur E est une relation d'ordre ssi elle est réflexive, anti-symétrique et transitive.

Montrons que R est une relation d'ordre.
1– Montrons que R est réflexive.
...

2– Montrons que R est anti-symétrique.
...

3– Montrons que R est transitive.
...

A partir de l'hypothèse «R est une relation d'ordre», on peut déduire que R est réflexive, anti-symétrique et transitive.

Inverse d'une relation

Définition $(x, y) \in R^{-1}$ ssi $(y, x) \in R$.

Montrons que $(x, y) \in R^{-1}$.
Montrons que $(y, x) \in R$.
...

A partir de l'hypothèse $(x, y) \in R^{-1}$, on peut déduire que $(y, x) \in R$.

Produit de deux relation

Définition $(x,y) \in R_1.R_2$ ssi il existe $z \in F$ tel que $(x,z) \in R_1$ et $(z,y) \in R_2$.

Montrons que $(x,y) \in R_1.R_2$.
Montrons qu'il existe z tel que
$(x,z) \in R_1$ et $(z,y) \in R_2$.
...

A partir de l'hypothèse $(x,y) \in R_1.R_2$
on peut déduire qu'il existe z tel que
$(x,z) \in R_1$ et $(z,y) \in R_2$.

Fermetures

Définition Fermeture transitive : $R^+ = \bigcup_{i \geq 1} R^i$

Montrons que $(x,y) \in R^+$.
Montrons qu'il existe un entier
$n \geq 1$ tel que $(x,y) \in R^n$.
...

A partir de l'hypothèse $(x,y) \in R^+$, on peut déduire qu'il existe $n \geq 1$ tel que $(x,y) \in R^n$.

A partir de l'hypothèse $(x,y) \in R^+$, pour montrer une propriété $P(x,y)$ on peut montrer que pour tout $n \geq 1$ si $(x,y) \in R^n$ alors $P(x,y)$.

Définition Fermeture réflexo-transitive : $R^\star = \bigcup_{i \geq 0} R^i$

Montrons que $(x,y) \in R^\star$.
Montrons qu'il existe un entier
$n \geq 0$ tel que $(x,y) \in R^n$.
...

A partir de l'hypothèse $(x,y) \in R^\star$, on peut déduire qu'il existe $n \geq 0$ tel que $(x,y) \in R^n$.

A partir de l'hypothèse $(x,y) \in R^\star$, pour montrer une propriété $P(x,y)$ on peut montrer que pour tout $n \geq 0$ si $(x,y) \in R^n$ alors $P(x,y)$.

Relations déterministes (fonctionnelles), fonctions

Définition Une relation R de E vers F est déterministe ssi pour tout $e \in E$, pour tous $e_1, e_2 \in F$, si $(e,e_1) \in R$ et $(e,e_2) \in R$ alors $e_1 = e_2$.

Montrons que R est déterministe.
Soit $e \in E$ et $e_1, e_2 \in F$ tels que $(e,e_1) \in R$
et $(e,e_2) \in R$, montrons que $e_1 = e_2$.
...

A partir des hypothèses «R est déterministe»,
$(e,e_1) \in R$ et $(e,e_2) \in R$, on peut déduire
que $e_1 = e_2$.

Définition Une relation $f \subseteq E \times F$ déterministe est une fonction $f : E \to F$. Lorsque $(x,y) \in f$, on note $y = f(x)$ et donc $f = \{(x, f(x))\}$ (y est l'image de x et x est l'antécédent de y). Lorsque $X \subseteq E$, on note aussi $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$. Lorsque f n'est pas définie pour tout élément de E, on dit parfois que f est une fonction partielle.

Relations totales à gauche, applications

Définition Une relation R de E vers F est totale à gauche ssi pour tout $e_1 \in E$, il existe $e_2 \in F$ tel que $(e_1, e_2) \in R$.

Montrons que R est totale à gauche.
Soit $e_1 \in E$, montrons qu'il existe $e_2 \in F$
tel que $(e_1, e_2) \in R$.
...

A partir des hypothèses «R est totale à gauche»
et $e_1 \in E$ on peut déduire qu'il existe
$e_2 \in F$ tel que $(e_1, e_2) \in R$.

Définition Une relation $f \subseteq E \times F$ déterministe et totale à gauche est une application $f : E \to F$. On dit parfois que l'application f est une fonction totale.

Relations, applications injectives

<u>Définition</u> Une relation R de E vers F est injective ssi pour tout $e \in F$, pour tous $e_1, e_2 \in E$, si $(e_1, e) \in R$ et $(e_2, e) \in R$ alors $e_1 = e_2$.

<u>Définition</u> Une relation $f \subseteq E \times F$ injective, déterministe et totale à gauche est une application injective (on dit aussi injection). L'application $f : E \to F$ est injective ssi pour tous $e_1, e_2 \in E$, si $f(e_1) = f(e_2)$ alors $e_1 = e_2$.

> Montrons que f est injective.
> Soit $e_1, e_2 \in E$ tels que $f(e_1) = f(e_2)$,
> montrons que $e_1 = e_2$.
> ...

> A partir des hypothèses «f est injective»
> et $f(e_1) = f(e_2)$ on peut déduire que $e_1 = e_2$.

Relations, applications surjectives

<u>Définition</u> Une relation R de E vers F est surjective ssi pour tout $e_2 \in F$, il existe $e_1 \in E$ tel que $(e_1, e_2) \in R$.

<u>Définition</u> Une relation $f \subseteq E \times F$ surjective, déterministe et totale à gauche est une application surjective (on dit aussi surjection). L'application $f : E \to F$ est surjective ssi pour tout $e_2 \in F$, il existe $e_1 \in E$ tel que $e_2 = f(e_1)$.

> Montrons que f est surjective.
> Soit $e_2 \in F$, montrons qu'il existe
> $e_1 \in E$ tel que $f(e_1) = e_2$
> ...

> A partir des hypothèses «f est surjective»
> et $e_2 \in F$, on peut déduire qu'il existe $e_1 \in E$
> tel que $f(e_1) = e_2$.

Applications bijectives

<u>Définition</u> Une application est bijective ssi elle est injective et surjective.

> Montrons que f est une bijection.
>> 1– Montrons que f est injective.
>> ...
>
>> 2– Montrons que f est surjective.
>> ...

Ensembles dénombrables

<u>Définition</u> Un ensemble E est dénombrable ssi il est fini ou s'il existe une bijection $f : E \to \mathbb{N}$.

> Montrons que E est dénombrable.
> Soit $f : E \to \mathbb{N}$ la fonction définie par
> $f(e) = \boxed{\text{à trouver}}$.
> Montrons que f est bijective.
> ...

> Montrons que E est dénombrable.
> Soit $f : \mathbb{N} \to E$ la fonction définie par
> $f(n) = \boxed{\text{à trouver}}$.
> Montrons que f est bijective.
> ...