TD1 : Ensembles, Relations, Fonctions

Exercice 1 [Ensembles]

1. Calculer $S_1 \times S_1$ pour $S_1 = \{0, 1, 2\}$.
2. Calculer l'ensemble $\wp(S)$ des parties de S pour $S = S_1$ puis pour $S = S_2 = \{1, \{1, 4\}\}$ et enfin pour $S = S_3 = \wp(\{1\})$.
3. Donner toutes les partitions possibles de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 2 [Raisonnement sur les ensembles]

1. Soient A, B deux parties de E. Montrer que $A \cap \overline{A \cap B} = A \cap \overline{B}$.
2. Soient A, B, C trois parties de E. Montrer que si $A \cap B = A \cap C$ alors $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.
3. En déduire que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$ si et seulement si $A \cap B = A \cap C$.
4. Soient A, B, C trois parties de E. Montrer que si $\big(A \cup B \subseteq A \cup C$ et $A \cap B \subseteq A \cap C\big)$ alors $B \subseteq C$. Dans quel cas a-t-on l'égalité $B = C$?
5. Montrer que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
6. A-t-on $\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$? $\wp(A \cup B) = \wp(A) \cup \wp(B)$?
7. Soit E un sous-ensemble d'un ensemble F et x un élément de F qui n'appartient pas à E. Montrer que $\wp(E \cup \{x\}) = \wp(E) \cup \{\{x\} \cup A \mid A \in \wp(E)\}$.

Exercice 3 [Ensembles et Relations]

On considère la relation (ternaire) S définie sur $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ par $S(a, b, c)$ ssi $c = a + b$. Décrire S sous la forme d'un sous-ensemble de D^3.

Exercice 4 [Propriétés de base des relations binaires]

1. On considère la relation $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ définie sur $E = \{1, 2, 3\}$. Déterminer si R est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.
2. La relation R définie sur $\mathbb{N}$ par $(n, m) \in R$ si et seulement si n et m ont un diviseur commun différent de 1 est-elle transitive ?
3. On définit la relation R sur l'ensemble $\wp(E)$ des parties de E par $(x, y) \in R$ si et seulement si $x \cap y \neq \emptyset$. La relation R est-elle réflexive, symétrique, transitive ?
4. La relation $\preceq$, définie sur $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ par $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)$ si et seulement si $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$, est-elle une relation d'ordre ? est-elle totale ?
5. On définit une relation R, permettant d'exprimer que deux nombres réels $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sont « équivalents » à ε près, par $(x_1, x_2) \in R$ si et seulement si $|x_1 - x_2| \leq \varepsilon$. La relation R est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 5 [Produit/composition et inverse de relations]

1. Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ et $R \subseteq A \times B$ la relation définie par $(a, b) \in R$ ssi $a < b$.
   (a) Écrire la relation R comme un ensemble de paires ordonnées.
   (b) Calculer les relations $R^{-1}.R$ et $R.R^{-1}$.

2. Montrer que pour deux relations quelconques $R \subseteq X \times Y$ et $S \subseteq Y \times Z$, on a l'égalité $(R.S)^{-1} = S^{-1}.R^{-1}$.
3. On considère la relation $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $(x, y) \in R$ si et seulement si $y = 2x$. Quels sont les éléments de R^+ ?

Exercice 6 [Composition et implications ensemblistes des propriétés des relations]
Soit R une relation sur E. Montrer que :

1. R est réflexive si et seulement si $\mathrm{Id}_E \subseteq R$.
2. R est symétrique si et seulement si $R = R^{-1}$.
3. R est antisymétrique si et seulement si $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{Id}_E$.
4. R est transitive si et seulement si $R.R \subseteq R$.
5. si R est réflexive, alors $R \subseteq R.R$ et $R.R$ est aussi réflexive.
6. si R est symétrique, alors $R^{-1}.R = R.R^{-1}$.
7. si R est transitive, alors $R.R$ transitive.

Exercice 7 [Relation d'équivalence sur les couples d'entiers]
On considère l'ensemble $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, c'est-à-dire l'ensemble des couples d'entiers naturels dont le deuxième élément est non nul. Soit R définie sur cet ensemble par :

$$(a, b)R(c, d) \text{ ssi } ad = bc$$

Démontrer que R est une relation d'équivalence.

Exercice 8 [Partition engendrée par une relation d'équivalence]
Soit R une relation d'équivalence dans A et soit $[a]$ la classe d'équivalence de $a \in A$. Montrer que :

1. pour chaque $a \in A$, $a \in [a]$
2. $[a] = [b]$ ssi $(a, b) \in R$
3. si $[a] \neq [b]$ alors $[a]$ et $[b]$ sont disjointes
4. l'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de A

Exercice 9 [Applications injectives, surjectives, bijectives : exemples]

1. Trouver un exemple d'application qui n'est ni injective, ni surjective.
2. Les applications suivantes sont-elles injectives ? sont-elles surjectives ? sont-elles bijectives ?
   (a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f_1(x) = 3x + 1$ et $f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que $f_2(x) = 3x + 1$
   (b) $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2\}$ telle que $f(x) = x \bmod 3$.
   (c) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ telle que $f(x, y) = x + y$.
   (d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n) = n + 1$ si n est pair et $f(n) = n - 1$ si n est impair.
   (e) $f : A^* \to A^*$ telle que $f(u) = u.b$ où $A = \{a, b\}$
3. Combien existe-t-il d'applications de $\{a, b, c\}$ dans $\{1, 2\}$? Combien sont des applications injectives ? des applications surjectives ? des applications bijectives ?

Exercice 10 [Produit cartésien, parties d'un ensemble, bijections]
Soient A et B deux parties disjointes d'un ensemble E. Réaliser une bijection entre $\wp(A) \times \wp(B)$ et $\wp(A \cup B)$.

Exercice 11 [Relations d'équivalence, bijections]

1. Soit F un ensemble et E un sous-ensemble de $\wp(F)$. On définit sur E la relation $\sim$ par : $A \sim B$ s'il existe une bijection $f : A \to B$. Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence. En se restreignant à un sous-ensemble de $\wp_f(F)$, l'ensemble des parties finies de F, la relation $|A| = |B|$ est une relation d'équivalence.
2. Soit E un ensemble et $\equiv$ une relation d'équivalence sur E.
   (a) On considère l'application $f : E \to E_{/\equiv}$ qui à tout $x \in E$ associe $f(x) = [x]_\equiv$. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
   (b) Soient F un ensemble et $g : E_{/\equiv} \to F$ et $h : E \to F$ deux applications telles que pour tout $x \in E$, $h(x) = g([x]_\equiv)$. Montrer que g est injective si et seulement si pour tous $x, x' \in E$, $h(x) = h(x')$ implique $x \equiv x'$.

Exercice 12 [Applications entre ensembles finis]
Soient E et F deux ensembles finis non vides contenant respectivement p et n éléments.

1. Montrer que le nombre d'applications de E vers F est n^p.
2. Combien d'applications de $\{0, 1\}$ vers $\{0, 1\}$ peut-on construire ? Montrer que pour toute application de $\{0, 1\}$ vers $\{0, 1\}$, $f(f(f(x))) = f(x)$.

Exercice 13 [Principe des tiroirs]
Si $n < m$, il n'existe pas d'injection d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments. Une formulation plus imagée de ce résultat est le *principe des tiroirs* (ou encore *pigeon-hole principle*), à savoir : si $n < m$ et que l'on veut placer m chemises dans n tiroirs alors un tiroir au moins contiendra plusieurs chemises. Plus précisément, montrer qu'un tiroir contiendra au moins un nombre entier $p \geq \frac{m}{n}$ chemises.

Exercice 14 [Applications injectives]
Soit $f\colon A \to B$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si pour tous sous-ensembles X, Y de A, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Exercice 15 [Involutions]
On dit qu'une application $f : E \to E$ est une involution si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(f(x)) = x$. Montrer que si f est une involution alors f est bijective.

Exercice 16 [Composition d'applications]
Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Exercice 17 [Bijection réciproque]
On rappelle que pour une application $f : E \to F$, une partie A de E et une partie B de F, on définit : $f(A) = \{y \in F \mid \text{il existe } x \in A, y = f(x)\}$ et $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

1. Montrer que pour toute partie A de E, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que si f est injective, alors pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.
3. Pour $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{a, b\}$, $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$, $A = \{1\}$, donner $f(A)$ et $f^{-1}(f(A))$.

Exercice 18 [Bijection réciproque]
Soit $f\colon E \to F$ une application. Montrer que :

1. Si $E \neq \emptyset$ alors f est injective si et seulement si f a un inverse à gauche, c'est-à-dire il existe une application $r\colon F \to E$ telle que $r \circ f = id_E$. L'application r est surjective et s'appelle une rétraction de f.
2. f est surjective si et seulement si f a un inverse à droite, c'est-à-dire il existe une application $s\colon F \to E$ telle que $f \circ s = id_F$. L'application s est injective et s'appelle une section de f.
3. f est bijective si et seulement si f a un inverse, c'est-à-dire il existe une application $f^{-1}\colon F \to E$ telle que $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$. L'application f^{-1} est une bijection et s'appelle la bijection réciproque de f.

Exercice 19 [Ensembles dénombrables]
On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une bijection entre cet ensemble et $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. On pourra montrer que les fonctions f et g suivantes sont des bijections de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$: $f(x, y) = y + (0 + 1 + 2 + \cdots + (x + y))$ et $g(x, y) = 2^y(2x + 1) - 1$.

Exercice 20 [Ensembles dénombrables]
Montrer que l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable.

Exercice 21 [Cantor]
Montrer qu'il n'existe pas de bijection entre un ensemble et l'ensemble de ses parties.

Exercice 22 [Relations d'équivalence, applications]
Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application. On définit la relation $\mathcal{R}_f \subseteq E \times E$ par $x \mathcal{R}_f y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}_f$ est une relation d'équivalence.
2. Donner la définition de la classe d'équivalence de x par la relation $\mathcal{R}_f$.
3. Pour tout $x \in E$, on note $[x]_{\mathcal{R}_f}$ la classe d'équivalence de x. Montrer que, pour tous $x, y \in E$, si $x \in [y]_{\mathcal{R}_f}$, alors $[x]_{\mathcal{R}_f} = [y]_{\mathcal{R}_f}$.

On suppose, pour toute la suite de l'exercice, que l'application f n'est ni injective, ni surjective. On définit l'application $\mathcal{S} : E \to E_{/\mathcal{R}_f}$ par $\mathcal{S}(x) = [x]_{\mathcal{R}_f}$. On rappelle que $E_{/\mathcal{R}_f}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de E par la relation $\mathcal{R}_f$.

4. $\mathcal{S}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier chacune des réponses.

On définit la relation $\overline{f} \subseteq E_{/\mathcal{R}_f} \times F$ par $(X, y) \in \overline{f}$ si et seulement si il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$.

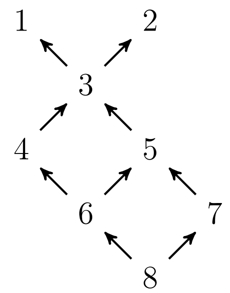
5. Montrer que $\overline{f}$ est une application.
6. Est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier chacune des réponses.

Exercice 23 [Monoïdes]

1. Montrer que $(\mathbb{N}, +, 0)$ et $(\wp(E), \cup, \emptyset)$ sont des monoïdes commutatifs.
2. Soit A un alphabet. L'ensemble des mots de A^* de longueur paire est-il un monoïde pour la concaténation ? Même question pour l'ensemble des mots de A^* de longueur impaire.

TD2 : Ensembles ordonnés, Relations d'ordre

Exercice 1 [Majorants, minorants, borne supérieure, borne inférieure]
Soit $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ un ensemble ordonné selon le diagramme suivant :



On considère le sous-ensemble $V = \{4, 5, 6\}$ de W.

1. Trouver l'ensemble des majorants de V.
2. Trouver l'ensemble des minorants de V.
3. Est-ce que $\sup(V)$ existe ?
4. Est-ce que $\inf(V)$ existe ?

Exercice 2
Soit R la relation définie sur l'ensemble $E = \{(1, 3), (3, 1), (3, 5), (5, 3), (5, 7), (7, 5), (7, 7)\}$ par :

$$(m_1, m_2)\, R\, (n_1, n_2) \text{ si et seulement si } m_1 \leq n_1 \text{ et } m_2 \leq n_2$$

Pour l'ensemble $A = \{(3, 5), (5, 3), (5, 7), (7, 5)\}$ donner, s'ils existent, les éléments maximaux, les éléments minimaux, les majorants, les minorants, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne inférieure et la borne supérieure.

Exercice 3
On définit la relation $\preceq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $(a, b) \preceq (c, d)$ ssi $a + b < c + d$ ou $(a, b) = (c, d)$.

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.
2. Cet ordre est-il total ? bien fondé ? Justifier les réponses.
3. Soit l'ensemble $A = \{(0, 2), (2, 1), (1, 2), (2, 2)\}$. Déterminer, s'ils existent, les minorants, les majorants, les éléments minimaux, les éléments maximaux, la borne inférieure, la borne supérieure, le minimum, le maximum de A.
4. Même question pour $B = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$.

Exercice 4
Soit $E = \{2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, ordonné par la relation «x divise y».

1. Vérifier que cette relation est une relation d'ordre.
2. Déterminer les éléments minimaux de E
3. Déterminer les éléments maximaux de E.

Exercice 5
On se place dans $F = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ordonné par la relation «x divise y».

1. Existe-t-il une borne supérieure et une borne inférieure pour tout sous-ensemble de 2 éléments ?
2. Soient les ensembles $A = \{6, 15, 21\}$ et $B = \{1, 6, 14, 21\}$. Donner les minorants et majorants de A (resp. B). A (resp. B) possède-t-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?
3. Soit $A = \{3, 6, 12, 15\}$. Donner les majorants, minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus petit et le plus grand élément, les éléments maximaux, minimaux s'ils existent. Discuter.

Exercice 6
Donner un exemple d'ensemble ordonné qui a exactement un élément maximal mais qui n'a pas de plus grand élément.

Exercice 7
Soit $A = \{a, b, c\}$ un ensemble ordonné comme l'indique le diagramme suivant :

$$b \longrightarrow a \longleftarrow c$$

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles non-vides et totalement ordonnés de A ; $\mathcal{A}$ est partiellement ordonné par inclusion. Représenter graphiquement l'ordre de $\mathcal{A}$.

Exercice 8

1. Définir la relation "est un préfixe de" sur A^*. S'agit-il d'une relation d'ordre ? si oui, s'agit-il d'un ordre total ou d'un ordre partiel ?
2. En supposant que A est muni d'un ordre total $\preceq_A$, définir l'ordre lexicographique sur A^*. S'agit-il d'un ordre total ou d'un ordre partiel ?
3. Soit $A = \{a, b\}$ tel que $a \preceq_A b$. Montrer que l'ordre lexicographique défini à la question précédente n'est pas un ordre bien fondé.

Exercice 9 Les ordres suivants sont-ils bien fondés ?

1. sur A^2, l'ordre lexicographique (A alphabet totalement ordonné).
2. sur $\mathbb{N}$ $m \leq n$ ssi m divise n.
3. sur l'ensemble des diviseurs d'un entier donné, la relation du 2.
4. sur A^*, l'ordre préfixe.
5. sur A^*, l'ordre $u \leq v$ ssi u est un sous-mot de v.
6. sur A^*, l'ordre lexicographique (A alphabet totalement ordonné).
7. sur $A^*/\equiv$, l'ordre des longueurs $u \leq v$ ssi $|u| \leq |v|$ (où $\equiv$ est défini par $u \equiv v$ si et seulement si $|u| = |v|$).

Exercice 10
Montrer que les ensembles ordonnés $\wp(\{a, b, c\})$ muni de la relation d'inclusion et $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ muni de la relation de division (dans $\mathbb{N}$) sont isomorphes.

Exercice 11
Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\preceq$ et soit A une partie de E.

1. Montrer que si A admet un plus grand élément alors cet élément est l'unique élément maximal. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.
2. On suppose que la relation d'ordre $\preceq$ est *totale*. Montrer qu'alors, si A admet un élément maximal, cet élément est unique. Montrer de plus que dans ce cas, cet élément maximal est le plus grand élément de A.

Exercice 12
Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$. Montrer que si cette relation est totale, alors pour tout $x, y \in E$: ($x \leq y$ et $x \neq y$) ssi $y \not\leq x$.

Exercice 13
On considère un ensemble E muni d'une opération binaire notée $\sqcup$ telle que $\sqcup$ est commutative, associative et idempotente (c'est-à-dire pour tout $x \in E$, $x \sqcup x = x$). On définit la relation $\preceq$ sur E par : $x \preceq y$ ssi $x \sqcup y = y$.

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.
2. Montrer que toute paire d'éléments admet une borne supérieure.

Exercice 14
Soit E un ensemble. On considère l'ensemble $\wp(E)$ des parties de E, muni de la relation d'ordre partiel $\subseteq$. Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$\inf(\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}) = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ et } \sup(\{A_1, \cdots, A_n\}) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Exercice 15
Soit E un ensemble. On considère l'ensemble $\wp(E)$ des parties de E et X un sous-ensemble de E.

1. La relation $\leq_X$ définie sur $\wp(E)$ par :

$$A_1 \leq_X A_2 \text{ ssi } A_1 \cap X \subseteq A_2 \cap X$$

   est-elle une relation d'ordre ? Pourquoi ?
2. Montrer que la relation $\equiv_X$ définie sur $\wp(E)$ par :

$$A_1 \equiv_X A_2 \text{ ssi } A_1 \cap X = A_2 \cap X$$

   est une relation d'équivalence.
3. On considère l'ensemble des classes d'équivalence de $\wp(E)$ pour la relation $\equiv_X$ et on définit sur cet ensemble la relation $\preceq_X$ par :

$$[A_1]_{\equiv_X} \preceq_X [A_2]_{\equiv_X} \text{ ssi } A_1 \leq_X A_2$$

   Montrer que $\preceq_X$ est une relation d'ordre.

Exercice 16

1. On note $\wp(\mathbb{N})$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$. On considère les deux ensembles ordonnés $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ et $(\mathbb{N}, \leq)$, où $\subseteq$ est la relation d'inclusion d'ensembles, et $\leq$ est la relation d'ordre usuelle sur les entiers naturels. On définit une application $f : \wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ par $f(X) = \sum_{x \in X} x$, pour tout $X \in \wp(\mathbb{N})$. L'application f est-elle monotone ?
2. Soit le sous-ensemble $E = \wp(\{1, 2, 3\})$ de $\wp(\mathbb{N})$, ordonné par la relation d'inclusion d'ensembles.
   (a) Représenter la relation d'ordre par un graphe (sans les arcs de réflexivité ni de transitivité).
   (b) Pour la partie $A = E \setminus \{1, 2, 3\}$, donner l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants. Donner, lorsqu'ils existent, la borne inférieure, la borne supérieure, le plus petit élément et le plus grand élément. S'ils n'existent pas, indiquer « n'existe pas ». Donner les éléments minimaux et les éléments maximaux.
3. Soient $(E, \preceq_1)$ et $(F, \preceq_2)$ deux ensembles ordonnés, et soit $f : E \to F$ une application monotone. Soit A une partie de E. On note $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.
   (a) Montrer que si A admet un plus grand élément M, alors $f(M)$ est le plus grand élément de $f(A)$.
   (b) Peut-on affirmer que si A admet une borne supérieure B, alors $f(B)$ est la borne supérieure de $f(A)$? On pourra s'inspirer de l'application f définie à la question 1, et de la partie A définie à la question 2.

TD3 : Induction sur $\mathbb{N}$

Exercice 1 Montrer que, pour $n \geq 2$,

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$$
$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$$

(Lois de de Morgan généralisées)

Exercice 2 Soit a un entier. Soit $P_a(n)$ la propriété “$9 \mid (10^n + a)$”. Montrer que, pour tout entier a et tout $n \in \mathbb{N}$, $P_a(n)$ implique $P_a(n+1)$. A-t-on $P_a(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 3 La suite harmonique est définie par $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que $H_{2^n} \geq 1 + n/2$.
2. Montrer par induction que $H_n = p_n/q_n$ avec p_n entier positif impair et q_n entier positif pair pour $n \geq 2$. En déduire que H_n n'est pas entier pour $n \geq 2$.

Exercice 4 On rappelle que les nombres de Fibonacci sont définis par $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n > 1$ et $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

Montrer que pour tout $n > 0$:

1. $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.
2. $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
3. $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
4. F_{3n} est pair.
5. $\varphi^{n-2} \leq F_n \leq \varphi^{n-1}$, où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est la solution positive de $r^2 - r - 1 = 0$.

Exercice 5 Donner une définition inductive de $f(n) = a^{2^n}$.

Indication : On pourra remarquer que $a^{2^{n+1}} = \left(a^{2^n}\right)^2$.

Exercice 6 On considère le polynôme à coefficients réels $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$.

1. Trouver a et b pour que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) - P(x) = x^2$. On suppose dans la suite que cette propriété est vérifiée.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est un entier.
3. Pour tout $n \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$. Montrer que

$$\forall n \geq 0, S_n = P(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 7

1. On suppose qu'une propriété P définie sur $\mathbb{N}$ vérifie :
   (a) $P(1)$ est vraie
   (b) si $P(n)$ est vraie alors $P(2n)$ est vraie (pour $n \geq 1$)

(c) si $P(n)$ est vraie alors $P(n-1)$ est vraie (pour $n \geq 2$).

Montrer par récurrence sur n que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

2. On veut montrer que la moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique. Soient $a_1, \ldots, a_n$ n nombres réels positifs, avec $n \geq 1$; on pose $A = (a_1 + \cdots + a_n)/n$ et $G = (a_1 \ldots a_n)^{1/n}$, montrer que $A \geq G$.

Exercice 8

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = 4$.
2. En déduire que tout entier m peut s'écrire comme somme et différence des carrés $1^2, 2^2, \ldots, n^2$ pour un certain n, c'est-à-dire que pour tout m :
   $P(m)$: il existe $n \in \mathbb{N}$, et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, tels que $m = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \cdots + \varepsilon_n n^2$.
   Indication : montrer d'abord le résultat pour $m \in \{0, 1, 2, 3\}$.

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

TD4 : Induction structurelle

Exercice 1 [Relations définies inductivement]

1. On définit inductivement l'ensemble $\mathrm{Inf}_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par :
   — (R_{11}) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(0, n) \in \mathrm{Inf}_1$
   — (R_{12}) : pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, si $(n_1, n_2) \in \mathrm{Inf}_1$, alors $(n_1+1, n_2+1) \in \mathrm{Inf}_1$
   (a) Donner quelques éléments de l'ensemble Inf_1 et en déduire une propriété sur n_1 et n_2 lorsque $(n_1, n_2) \in \mathrm{Inf}_1$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n, n) \in \mathrm{Inf}_1$.
   (c) Montrer que pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, si $(n_1, n_2) \in \mathrm{Inf}_1$ alors $(n_1, n_2+1) \in \mathrm{Inf}_1$.
2. On définit inductivement l'ensemble $\mathrm{Inf}_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par :
   — (R_{21}) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n, n) \in \mathrm{Inf}_2$
   — (R_{22}) : pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, si $(n_1, n_2) \in \mathrm{Inf}_2$, alors $(n_1, n_2+1) \in \mathrm{Inf}_2$
   (a) Donner quelques éléments de l'ensemble Inf_2 et en déduire une propriété sur n_1 et n_2 lorsque $(n_1, n_2) \in \mathrm{Inf}_2$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(0, n) \in \mathrm{Inf}_2$.
   (c) Montrer que pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, si $(n_1, n_2) \in \mathrm{Inf}_2$ alors $(n_1+1, n_2+1) \in \mathrm{Inf}_2$.

Exercice 2 [Arbres binaires] On considère l'ensemble AB des arbres binaires (0, 1 ou 2 fils par nœud) sur un alphabet A.

1. Donner une définition inductive de la hauteur $h(t)$, du nombre de nœuds $n(t)$, du nombre d'arêtes $ar(t)$ et du nombre de feuilles $f(t)$ d'un arbre binaire.
2. Montrer que pour tout arbre t de AB, $n(t) \leq 2^{h(t)} - 1$, et que $f(t) \leq 2^{h(t)-1}$.
3. Définir le parcours préfixe d'un arbre binaire.

Exercice 3 [Arbres binaires stricts] Soit A un alphabet et t un arbre binaire *strict* sur A, c'est-à-dire que t est non vide et chaque nœud de t a exactement 0 ou 2 fils (il n'y a aucun noeud avec un seul fils non vide).

1. Donner une définition inductive de l'ensemble ABS des arbres stricts et adapter les définitions inductives des fonctions $n(t)$ (nombre de nœuds), $f(t)$ (nombre de feuilles) et $ar(t)$ (nombre d'arêtes).
2. Montrer que si t est un arbre binaire *strict*, alors $n(t) = ar(t) + 1$.
3. Montrer que si t est un arbre binaire *strict*, alors $n(t) = 2f(t) - 1$.

Exercice 4 [Définitions inductives sur A^*] Soit A^* le monoïde libre engendré par l'alphabet A. Donner une définition inductive de A^*.
Le miroir d'un mot $u = a_1 a_2 \ldots a_n$ est le mot $\tilde{u} = a_n \ldots a_2 a_1$. Donner une définition inductive du miroir.

Exercice 5 [Définition inductive sur A^* et définition équivalente] L'ordre préfixe sur A^* peut être défini de deux manières différentes :

1. Pour tous mots $u, v \in A^*$, $u \preceq^1_{pref} v$ s'il existe $w \in A^*$ tel que $v = uw$.
2. Définition inductive :
   (B) pour tout mot $v \in A^*$, $\varepsilon \preceq^2_{pref} v$
   (I) Si $u, v \in A^*$ sont tels que $u \preceq^2_{pref} v$, alors pour toute lettre $a \in A$, $au \preceq^2_{pref} av$

Montrer que ces deux définitions sont équivalentes.

Exercice 6 On définit l'ensemble $\mathcal{L}$ inductif suivant :
(B) $\texttt{nil} \in \mathcal{L}$
(I) pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathcal{L}$, $n|x \in \mathcal{L}$.

1. Montrer par induction structurelle que si $x \in \mathcal{L}$, alors soit $x = \texttt{nil}$, soit il existe $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{N}$ tels que $x = a_k|\cdots|a_1|\texttt{nil}$. On appelle $a_1, \ldots, a_k$ les *élements* de x.
2. Soit la fonction $s : \mathcal{L} \to \mathbb{N}$ définie par $s(\texttt{nil}) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathcal{L}$, $s(n|x) = n + s(x)$.
   Calculer $s(1|2|3|\texttt{nil})$.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{L}$, si $x = \texttt{nil}$ $s(x) = 0$, sinon $s(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i$ où les a_i sont les éléments de x.

Exercice 7
A partir de l'alphabet $A = \{a, b\}$, on définit les deux sous-ensembles de $A^\star$ suivants :
— définition inductive de l'ensemble $E_1 \subseteq A^\star$:
  (B) $\varepsilon \in E_1$
  (I) si $u \in E_1$ et $v \in E_1$, alors $aubv \in E_1$
— ensemble $E_2 \subseteq A^\star$:

$$E_2 = \{w \in A^\star \mid |w|_a = |w|_b \text{ et pour tout préfixe } u \text{ de } w\ |u|_a \geq |u|_b\}$$

où $|w|_x$ désigne le nombre d'occurrences de la lettre x dans le mot w

1. Montrer par induction structurelle que $E_1 \subseteq E_2$.
2. Montrer par induction bien fondée (sur la longeur des mots) que $E_2 \subseteq E_1$.

Exercice 8
Soit A un alphabet. Deux mots u et v de $A^\star$ commutent si et seulement si $uv = vu$.

1. Donner un exemple de deux mots qui commutent.
2. Montrer (par induction bien fondée sur la longueur $|uv|$ du mot uv) que si deux mots u et v commutent, alors ils sont puissance d'un même mot w :

$$\text{pour tout } u, v \in A^\star \text{ si } uv = vu \text{ alors il existe un mot } w \text{ tel que } u = w^k \text{ et } v = w^l$$

pour deux entiers k et l.

TD5 : Langages et Automates

1 Langages

Exercice 1

1. Soit A un alphabet. Montrer que $(\mathcal{P}(A^*), \cdot, \{\varepsilon\})$ est un monoïde.
2. Montrer que si $(L_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de langages, alors

$$(\bigcup_{i\in I} L_i) \cdot L = \bigcup_{i\in I}(L_i \cdot L)$$

3. Montrer que $L^* = (L + \{\varepsilon\})^*$ et que $L^* = \{\varepsilon\} + L \cdot L^*$.
4. Montrer que $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$.

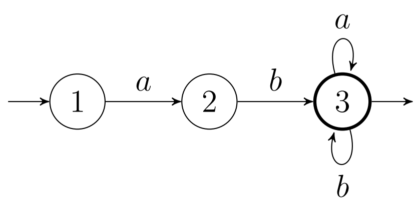
Exercice 2

Soit A un alphabet contenant la lettre b. Soit $X = \{b\}$ et $Y = (A \setminus \{b\}) \cdot \{b\}^*$.

1. Décrire informellement les éléments de X^*, Y et Y^*.
2. Montrer que tout mot de A^* commençant par une lettre distincte de b appartient à Y^*.
3. Montrer que tout mot u de A^* s'écrit de façon unique sous la forme $u = vw$, où $v \in X^*$ et $w \in Y^*$.

2 Automates complets/déterministes

Exercice 3 Expliquez pourquoi l'automate suivant sur $\{a, b\}$ n'est pas complet. Quel langage reconnait-il ? Donnez un automate complet équivalent.



Exercice 4 Représenter l'automate $\mathcal{A}$ sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ d'états $0, 1, 2, 3$, d'état initial 0, d'état terminal 3 et de transitions $(0, a, 0)$, $(0, a, 1)$, $(0, b, 0)$, $(0, c, 0)$, $(1, a, 2)$, $(1, b, 2)$, $(1, c, 2)$, $(2, a, 3)$, $(2, b, 3)$, $(2, c, 3)$.

1. Cet automate est-il complet ? déterministe ? justifier.
2. Les mots *baba* et *cabcb* sont-ils reconnus par $\mathcal{A}$?
3. Décrire $L(\mathcal{A})$ en langage ordinaire.

3 Construction d'automates

Exercice 5 Construire un automate déterministe reconnaissant le langage fini : $\{a, ba, aba, bab, bbba\}$.

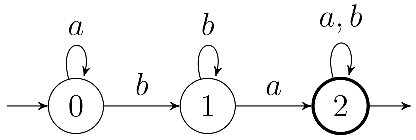
Exercice 6 Soit $A = \{a, b, c\}$. Donner des automates finis reconnaissant les langages suivants.

1. L'ensemble des mots de longueur paire.
2. L'ensemble des mots où le nombre d'occurrences de "b" est divisible par 3.
3. L'ensemble des mots se terminant par "b".
4. L'ensemble des mots non vides ne se terminant pas par "b".
5. L'ensemble des mots contenant au moins un "b".
6. L'ensemble des mots contenant au plus un "b".
7. L'ensemble des mots contenant exactement un "b".
8. L'ensemble des mots ne contenant aucun "b".
9. L'ensemble des mots contenant au moins un "a" et dont la première occurrence de "a" n'est pas suivie par un "c".

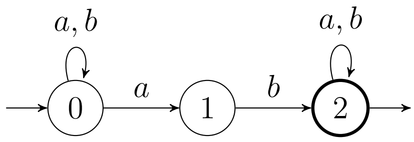
4 Opérations

Exercice 7 [Intersection et déterminisation] On considère les automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ suivants sur l'alphabet $\{a, b\}$.

L'automate $\mathcal{A}_1$



L'automate $\mathcal{A}_2$



1. Construire à partir de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ un automate acceptant l'intersection $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$.
2. Les automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont-ils déterministes ? Expliquez pourquoi et si ce n'est pas le cas, déterminisez-les.
3. Les automates $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et les automates déterministes construits sont-ils complets ? Que remarquez-vous ?

Exercice 8 [Intersection et concaténation] Sur $A = \{a, b\}$, soient L_1 le langage comprenant tous les mots contenant un nombre pair de b et L_2 le langage comprenant tous les mots contenant un nombre impair de a.

1. Donner pour chaque L_i un automate $\mathcal{A}_i$ reconnaissant L_i.

2. Calculer à partir des $\mathcal{A}_i$ un automate reconnaissant $L_1 \cap L_2$.
3. Construire à partir des $\mathcal{A}_i$ un automate reconnaissant $L_1.L_2$.

Exercice 9 Soit $A = \{a, b\}$ et soit L le langage comprenant tous les mots ayant trois occurrences successives de "a". Donner un automate non déterministe reconnaissant L et construire un automate déterministe acceptant L.

Exercice 10 [Complémentaire et différence]

1. Soient L_1 et L_2 des langages sur un alphabet A. Montrer que si L_1 et L_2 sont respectivement reconnaissables par des automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ alors le langage $L_1 \setminus L_2$ est reconnaissable par un automate.
2. Construire un automate déterministe sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ pour l'ensemble des mots non vides ne se terminant pas par "b". Cette construction sera faite de deux façons.
   (a) En utilisant le résultat ci-dessus à partir d'un automate $\mathcal{A}_1$ acceptant les mots non vides et de l'automate non déterministe (qu'on appellera $\mathcal{A}_2$) de l'exercice 3.3.
   (b) En déterminisant l'automate (qu'on appellera $\mathcal{A}_4$) de l'exercice 3.4.

5 Systèmes d'équations et expressions rationnelles

Exercice 11 [Lemme d'Arden] On rappelle ici l'énoncé : *Soient K et M deux langages de A^* tels que $\varepsilon \notin K$, alors l'équation $X = K.X + M$ (qui s'écrit aussi $X = K.X \cup M$, la notation $+$ représentant l'union) admet pour unique solution le langage $K^*.M$.* Démontrez-le.

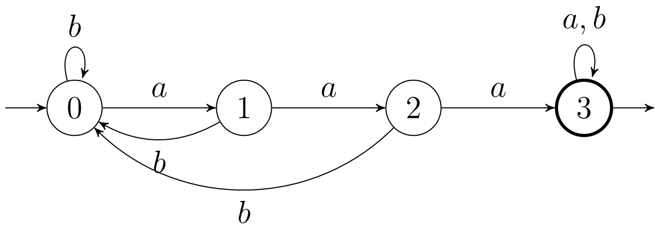
Exercice 12

1. Soit l'automate $\mathcal{A}$ d'états 0, 1, d'état initial 0, d'état terminal 1 et de transitions $(0, a, 0)$, $(0, b, 1)$, $(1, a, 0)$ et $(1, b, 1)$. Dessiner l'automate $\mathcal{A}$. Soit L le langage reconnu par $\mathcal{A}$. Donner le système d'équations associé à $\mathcal{A}$ et en déduire une expression rationnelle pour L.
2. Mêmes questions avec $\mathcal{B}$ d'états 0, 1, 2 d'état initial 0, d'état terminal 0 et de transitions $(0, a, 1)$, $(0, b, 0)$, $(0, c, 0)$, $(1, b, 1)$, $(1, c, 2)$, $(2, a, 2)$, $(2, b, 0)$, $(2, c, 1)$.

Exercice 13 Soit L l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ où le nombre d'occurrences de "b" est divisible par 3. Il y a un automate $\mathcal{A}$ à trois états tel que $L = L(\mathcal{A})$ (cf. exercice 3.2). Donner le système d'équations associé à l'automate, et résoudre ce système, pour donner une expression rationnelle dénotant L.

Exercice 14 Soit $A = \{a, b\}$ et L le langage comprenant tous les mots ayant trois occurrences successives de "a".

1. Donner une expression rationnelle pour L associée à l'automate non déterministe obtenu à l'exercice 4.
2. On admet que l'automate minimal $\mathcal{M}$ de L est le suivant :



Calculer une autre expression rationnelle pour L à partir de $\mathcal{M}$.

3. Donner un automate déterministe pour le complémentaire de L, c'est-à-dire l'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ qui n'ont pas trois occurrences successives de "a". En déduire une expression rationnelle pour le complémentaire de L.

6 Langages reconnaissables

Exercice 15 [Préfixe] Soit L un langage et $\mathrm{Pref}\,(L) = \{u \in A^* \mid \exists v \in A^* : uv \in L\}$ l'ensemble des préfixes des mots de ce langage L. Montrer que si un langage L est reconnaissable l'ensemble $\mathrm{Pref}\,(L)$ est aussi reconnaissable.

Exercice 16 Montrer que le langage $L = \{a^n b^n, n \geq 0\}$ sur l'alphabet $\{a, b\}$ ne peut pas être reconnu par un automate fini.

Exercice 17 [Lemme de l'étoile] Soit L un langage reconnaissable par un automate fini. Montrer qu'il existe un entier N_0 tel que pour tout mot $w \in L$ vérifiant $|w| \geq N_0$ (où $|w|$ est la longueur de w), on a $w = w_1 u w_2$ avec

1. $u \neq \varepsilon$,
2. $|u| < N_0$,
3. $w_1 u^* w_2 \subseteq L$.

Exercice 18 Montrer, en utilisant le lemme de l'étoile, que les langages suivants sur l'alphabet $\{a, b\}$ ne peuvent pas être reconnus par un automate fini.

1. $L_1 = \{a^n b^n, n \geq 0\}$
2. $L_2 = \{a^p, p \text{ premier}\}$.

Exercice 19 Les langages ci-dessous sont-ils reconnaissables ?

1. $L = \{a^n b^p \mid n, p \geq 0, n = p \bmod 3\}$
2. $L' = \{a^m b^n \mid n \geq 1, n \geq 1, m \neq n\}$

7 Automates minimaux

Rappelons que la minimisation part d'un automate déterministe complet dont tous les états sont accessibles depuis l'état initial.

Exercice 20 Soit l'automate $\mathcal{A}$ d'états 0, 1, 2, 3, 4, 5 d'état initial 0, d'état terminal 5 et de transitions :
$(0,a,1),(1,a,2),(2,a,2),(3,a,4),(4,a,4),(5,a,5),(0,b,3),(1,b,5),(2,b,5),(3,b,5),(4,b,5),(5,b,5)$.
Dessiner l'automate $\mathcal{A}$. Minimiser $\mathcal{A}$.

Exercice 21 Soit l'alphabet $A=\{a,b\}$. On veut calculer l'automate minimal du langage L comprenant tous les mots contenant "aa" mais ne contenant pas "bb". Pour cela, on va calculer L comme intersection des langages suivants : L_1 l'ensemble des mots contenant "aa" et L_2 l'ensemble des mots ne contenant pas "bb".

1. Construire d'abord un automate déterministe $\mathcal{D}_i$ acceptant L_i, $i=1,2$.
2. Construire à partir des $\mathcal{D}_i$ un automate déterministe et complet $\mathcal{A}$ reconnaissant $L_1 \cap L_2$.
3. $\mathcal{A}$ est-il minimal ? Justifiez votre réponse et si non, construisez un automate minimal $\mathcal{B}$ reconnaissant $L = L_1 \cap L_2$.

8 Construction d'automates plus difficiles

Exercice 22 Soit $A=\{a,b,c\}$. Construire un automate déterministe complet qui reconnaît l'ensemble des mots de longueur paire qui se terminent par ab.

Exercice 23 Construire un automate déterministe complet minimal reconnaissant l'ensemble des mots sur $\{a,b,c\}$ comportant au moins trois lettres et dont la troisième lettre à partir de la fin est un "a" ou un "c".

Exercice 24 Donner les automates déterministes complets minimaux reconnaissant les langages sur l'alphabet $A=\{a,b\}$ donnés par les expressions rationnelles suivantes

1. $(a+b)^*b(a+b)^*$.
2. $\big((a+b)^2\big)^* + \big((a+b)^3\big)^*$.
3. $ba^* + ab + (a+bb)ab^*$.

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

TD5 : Logique

Exercice 1 [Fonctions booléennes]

1. Construire la table de vérité de la fonction booléenne correspondant à l'opérateur booléen "ou exclusif", noté XOR, et donner une expression booléenne associée. Donner des formes normales disjonctives et conjonctives pour cette fonction.
2. Donner une expression booléenne pour la fonction f définie par :

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

3. Donner une expression booléenne pour la fonction g définie par :

x_1	x_2	x_3	$g(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

   et en donner une forme normale conjonctive.
4. Donner une forme normale conjonctive pour la fonction $h(x,y,z) = xy + yz + xz$.

Exercice 2 [Formules logiques et fonctions booléennes]
On considère la formule F suivante :

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

1. Les formules F et $\neg F$ sont-elles satisfaisables ? Sont-elles valides (des tautologies) ? Donner des formes normales conjonctives et disjonctives pour les fonctions booléennes représentant ces formules.
2. Déterminer une formule G telle que $(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$ soit une formule valide (i.e. une tautologie).

Exercice 3 [Enigme]
Anna et Mathias sont accusés d'un crime. Il font les déclarations suivantes :

Anna :	Mathias est coupable.
Mathias :	Nous sommes tous les deux innocents.

1. On suppose que tous les deux ont menti. Peut-on déterminer qui est coupable, qui ne l'est pas ?

2. On suppose maintenant que les coupables mentent et que les innocents disent la vérité. Peut-on déterminer qui est coupable, qui ne l'est pas ?

Exercice 4 [Conséquence sémantique]
Les conséquences sémantiques suivantes sont-elles vérifiées ?

1. $p \to q \models \neg q \to \neg p$
2. $p \to q \models q \to p$
3. $p \to q \models \neg p \to \neg q$
4. $\{p \vee q, \neg p\} \models q$
5. $\{p \vee q, p \to r, q \to r\} \models r$
6. $\{\neg(p \vee q), r \to q\} \models \neg(p \vee r)$

Exercice 5 [Formules valides, conséquence sémantique]
Soit φ et ψ deux formules de la logique des propositions. Montrer que $\varphi \models \psi$ si et seulement si $\varphi \to \psi$ est valide.

Exercice 6 [Formules valides, formules satisfiables]
Les formules suivantes sont-elles satisfaisables ? sont-elles valides (des tautologies) ?

(1) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	(2) $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$
(3) $(p \to q) \to (q \to p)$	(4) $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$
(5) $(p \to q) \to p$	(6) $p \to (q \to p)$

Exercice 7
Un logicien dit à son fils : "si tu ne ranges pas ta chambre, tu n'iras pas au cours de logique" ; le fils range sa chambre, et est envoyé au cours de gymnastique tout de suite après. Quelle erreur avait-il faite en pensant aller au cours de logique ?

Exercice 8 [Enigme]
Anissa, Antoine et Jennifer ont un examen de logique à passer. On suppose que :

A : L'un des trois au moins révisera pour l'examen.
B : Si Anissa ne révise pas, alors Antoine non plus.
C : Si Anissa révise, alors Jennifer aussi.

Formaliser ces trois hypothèses. Peut-on dire qui révisera ? qui ne révisera pas ?

Exercice 9 [Enigme]

1. Soit f la fonction booléenne à 3 variables définie par :
   $f(x,y,z) = (\overline{x}.z + \overline{y})(\overline{x} + \overline{y}.\overline{z})(xy + yz + xz)$.
   (a) La fonction f est-elle sous forme normale conjonctive ? disjonctive ?
   (b) Donner une forme normale disjonctive pour f et en déduire une forme normale conjonctive.

2. Le lendemain de Noël, on retrouve une boîte de chocolats totalement vide. Pour trouver les coupables qui ont mangé des chocolats, on interroge les trois enfants qui font les déclarations suivantes :

   Anissa : (A) Si Boris est coupable alors Charlotte aussi et je suis innocente.
   Boris : (B) au moins deux d'entre nous ont mangé des chocolats.
   Charlotte : (C) Si Anissa est coupable alors Boris et moi sommes innocents.

   (a) Exprimer chacune des trois déclarations A, B et C comme une formule, à l'aide des propositions p : *Anissa a mangé des chocolats*, q : *Boris a mangé des chocolats*, r : *Charlotte a mangé des chocolats.*

   (b) Pour une interprétation $\mathbf{I}$, calculer les interprétations de ces trois formules $\mathbf{I}(A)$, $\mathbf{I}(B)$ et $\mathbf{I}(C)$, en fonction de $\mathbf{I}(p)$, $\mathbf{I}(q)$, $\mathbf{I}(r)$.

   (c) On suppose que les trois enfants disent la vérité. Que peut-on en déduire sur la réponse à la question : qui a mangé des chocolats ?

   (d) Après une enquête plus approfondie, il s'avère que Boris et Anissa sont coupables et Charlotte innocente. En utilisant (b), dire qui a menti et qui a dit la vérité.

Exercice 10 [Enigme]

1. Soit f la fonction booléenne à 5 variables définie par :
   $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$
   $x_1.(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_3 + x_4)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_4})(x_2 + x_3 + \overline{x_4} + x_5)$.

   (a) La fonction f est-elle sous forme normale conjonctive ? disjonctive ?

   (b) Montrer que pour deux éléments quelconques a et b de $\mathbb{B}$, $(a + b)(a + \overline{b}) = a$.

   (c) En déduire que $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1.\overline{x_3}.x_4.(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_4})(x_2 + x_3 + \overline{x_4} + x_5)$, puis en déduire une forme normale à la fois disjonctive et conjonctive pour f.

2. Des étudiants sont invités à une fête de nouvel an. On sait que :
   1. Abdel vient.
   2. Si Abdel vient mais pas Brigitte alors Carl ne vient pas.
   3. Si Brigitte et Carl viennent alors Abdel ne vient pas.
   4. Si Abdel vient alors Dina ou Carl aussi.
   5. Si Dina vient alors Abdel ne vient pas ou Brigitte ne vient pas.
   5. Si Dina vient mais pas Brigitte ni Carl alors Elie vient.

   (a) Exprimer chacune de ces informations comme une formule, à l'aide des propositions a : *Abdel vient*, b : *Brigitte vient*, c : *Carl vient*, d : *Dina vient*, e : *Elie vient.*

   (b) Pour une interprétation $\mathbf{I}$, calculer les interprétations de ces formules en fonction de $\mathbf{I}(a)$, $\mathbf{I}(b)$, $\mathbf{I}(c)$, $\mathbf{I}(d)$ et $\mathbf{I}(e)$.

   (c) Qui vient à la fête ? (Justifier la réponse).

TME : Langages et Automates

9 Présentation du logiciel JFLAP

Le logiciel JFLAP, sous Linux, vous permet de manipuler des automates.

Vous pouvez télécharger le logiciel JFLAP à l'adresse :

`http://www.cs.duke.edu/csed/jflap/`

où il y a des versions pour Unix, Windows et MacOS.

Depuis les machines de l'ARI où le logiciel JFLAP est installé, ouvrir un *Terminal* en allant dans le menu *Applications*, sous-menu *Accessoires* en tapant la commande suivante

```
java -jar /usr/local/jflap/JFLAP.jar
```

en respectant les espaces !

10 Création d'automates

Choisir **Finite Automaton**. Il apparaît alors une fenêtre d'édition, dans laquelle on peut dessiner un automate. La barre d'outils située sous l'onglet **Editor** contient quatre boutons ; de gauche à droite :

- Attribute Tool que l'on nommera ici bouton A
- State Tool (bouton S)
- Transition Tool (bouton T)
- Deleter (bouton D).

Exercice 1 Soit l'automate $\mathcal{A}$ défini sur l'alphabet $\{a, b\}$, d'états $0, 1, 2$, d'état initial 0, d'état final 2 et de transitions $0.a = 0$, $0.b = 1$, $1.a = 2$, $1.b = 2$, $2.a = 0$ et $2.b = 1$.

Création de l'automate $\mathcal{A}$

Pour dessiner l'automate $\mathcal{A}$:

- créer les états : cliquer sur le bouton S ; cliquer en trois endroits différents de la fenêtre d'édition, les états apparaissent avec les noms q_0, q_1, q_2
- choisir la nature des états (initial, final) : cliquer sur le bouton A ; faire un clic droit sur l'état q_0 et choisir *Initial* ; faire un clic droit sur l'état q_2 et choisir *Final*
- créer les transitions : cliquer sur le bouton T
  - transition $0.a = 0$: cliquer sur l'état q_0 et taper a dans le cadre qui apparaît
  - transition $0.b = 1$: promener la souris, bouton gauche enfoncé, de l'état q_0 à l'état q_1, lâcher le bouton et taper b dans le cadre qui apparaît
  - autres transitions : sur le modèle de $0.b = 1$
  - attention : il faut créer deux transitions pour $1.a = 2$ et $1.b = 2$ (ne pas taper les deux étiquettes a et b dans le même cadre).
- sauver le fichier en le nommant exo1−tme.

Vous découvrirez tout seul les autres utilisations du bouton A et l'utilisation du bouton D.

Reconnaissance de mots par $\mathcal{A}$

Pour vérifier si des mots sont acceptés, on utilise l'un des menus Input/Step by State ou Input/Fast Run ou
Input/Multiple Run.

— Menu Input/Step by State : sous la fenêtre contenant l'automate apparaissent une fenêtre montrant les différentes configurations et une barre contenant six boutons.
En cliquant sur le bouton Step, le mot est lu lettre à lettre, la progression dans le mot est visible dans la fenêtre des configurations et la progression dans l'automate est visible dans la fenêtre de l'automate.
Après le dernier Step, la configuration est soit verte (le mot est accepté) soit rouge (le mot est rejeté).
En cliquant sur une configuration puis sur le bouton Trace, on voit apparaître, dans une autre fenêtre, la suite des transitions qui ont amené à cette configuration.

— Menus Input/Fast Run et Input/Multiple Run : utilisation évidente.
Remarque : il y a aussi un menu Input/Step by Closure mais il n'a d'intérêt que pour les automates avec λ-transitions (transitions étiquetées par le mot vide).

1. En utilisant chacun des trois menus précédents, vérifier si les mots suivants sont acceptés ou non par l'automate $\mathcal{A}$: *ba*, *babb*, *aaabab*, *aaababa*, *abaabb*, *abaabaaab*.

Exercice 2 On considère l'automate $\mathcal{B}$ obtenu en ajoutant la transition $2.b = 2$ à l'automate $\mathcal{A}$ défini dans l'exercice 1.

1. Dessiner l'automate $\mathcal{B}$ et sauver le fichier en le nommant exo2−tme.
2. Choisir le menu Test/Compare Equivalence et tester si les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalents.
3. Utiliser le menu Test/Highlight Nondeterminism pour vérifier que l'automate $\mathcal{B}$ n'est pas déterministe.
4. Utiliser le menu Input/Step by State pour vérifier que le mot *ababbba* est accepté.
   Dans la fenêtre des configurations, il apparaît cinq configurations correspondant aux cinq lectures possibles du mot *ababbba* ; on remarque que certaines configurations sont acceptées et d'autres pas. Faire afficher la trace de chacune des cinq configurations.
5. Tester d'autres mots, en utilisant Input/Step by State ou Input/Fast Run.

Exercice 3 Soit $A = \{a, b, c\}$. Dessiner des automates, non nécessairement déterministes, reconnaissant les langages suivants :

1. $\{a, ab, ca, cab, acc\}$
2. $[a(b+c)^*abc]^*$ qui est l'expression rationnelle pour le langage $(\{a\}.\{b,c\}^*.\{abc\})^*$
3. l'ensemble des mots contenant un nombre impair de a
4. l'ensemble des mots contenant le facteur ab
5. l'ensemble des mots contenant le facteur ab et se terminant par b

11 Déterminisation d'automates

Exercice 4 Dessiner l'automate $\mathcal{A}$ sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ d'états 0, 1, 2, 3, d'état initial 0, d'état terminal 3 et de transitions $0.a = 1$, $0.a = 0$, $0.b = 0$, $0.c = 0$, $1.a = 2$, $1.b = 2$, $1.c = 2$, $2.a = 3$, $2.b = 3$, $2.c = 3$ (*cf.* ex. 4 du TD), en faisant en sorte que l'état i soit nommé q_i dans le dessin. Vérifier que $\mathcal{A}$ n'est pas déterministe.

Pour déterminiser l'automate $\mathcal{A}$, on choisit le menu
`Convert/Convert to DFA`.
La fenêtre se partage en deux :

- la partie gauche contient l'automate $\mathcal{A}$
- la partie droite est une sous-fenêtre de travail, dans laquelle on construit le déterminisé $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$, et dont la barre d'outils contient cinq boutons ; de gauche à droite :
  - Attribute Editor (bouton A)
  - Expand Group on Terminal (bouton T)
  - State Expander (bouton S)
  - Complete
  - Done?.

Initialement, la sous-fenêtre de travail contient un seul état, l'état initial, nommé q_0, auquel est attaché un petit cadre contenant tous les indices des états initiaux de $\mathcal{A}$ (ici, le cadre contient 0). Il faut construire toutes les transitions de $\mathcal{A}'$, c'est-à-dire les transitions : $\{0\}.a = \{0,1\}$, $\{0\}.b = \{0\}$, $\{0\}.c = \{0\}$, $\{0,1\}.a = \{0,1,2\}$, $\{0,1\}.b = \{0,2\}$, etc...
Il y a plusieurs façons de construire les transitions :

- on peut les construire une à une : cliquer sur le bouton T
  - transition $\{0\}.a = \{0,1\}$: promener la souris, bouton gauche enfoncé, de l'état q_0 de $\mathcal{A}'$ vers un endroit quelconque de la sous-fenêtre de travail ; lâcher le bouton ; une boîte de dialogue apparaît, demandant l'étiquette de la transition que l'on veut construire ("Expand on what terminal ?") ; taper a ; une nouvelle boîte de dialogue apparaît, demandant l'état but de la transition que l'on veut construire ; taper 0 et 1 en les séparant par un espace ; apparaissent alors l'état q_1 avec un petit cadre contenant 0,1 et la transition d'étiquette a qui va de q_0 à q_1.
    - si l'état but de la transition existe déjà dans $\mathcal{A}'$, procéder comme dans la création d'automates ; par exemple, pour construire la transition $\{0\}.b = \{0\}$: cliquer sur l'état q_0 de $\mathcal{A}'$ puis taper b dans la boîte de dialogue
  - on peut construire en une seule fois toutes les transitions issues d'un état q de $\mathcal{A}'$: cliquer sur le bouton S puis sur l'état q
  - on peut construire toutes les transitions en une seule fois : cliquer sur le bouton Complete.

1. Construire l'automate $\mathcal{A}'$, déterminisé de $\mathcal{A}$, en utilisant uniquement le bouton T.

Exercice 5 Déterminiser l'automate $\mathcal{B}$ défini dans l'exercice 2 (sans utiliser le bouton Complete).

Exercice 6 Tester si les automates construits dans l'exercice 3 sont déterministes et déterminiser ceux qui ne le sont pas (sans utiliser le bouton Complete).

12 Minimisation d'automates

Pour minimiser un automate $\mathcal{A}$, on utilise l'algorithme suivant :

- initialement l'ensemble des états est partagé en deux sous-ensembles : l'ensemble des états terminaux et l'ensemble des états non terminaux
- on réitère le processus suivant :
  - parmi les ensembles d'états déjà construits Q_1, Q_2 ... Q_m, on choisit un ensemble Q_i
  - on choisit une lettre x

  - on partage l'ensemble Q_i en plusieurs sous-ensembles : deux états p et q de Q_i appartiennent au même sous-ensemble ssi les états $p.x$ et $q.x$ de $\mathcal{A}$ appartiennent à un même ensemble Q_j
- et ce jusqu'à ce qu'aucune lettre ne puisse plus partager l'un des ensembles d'états.

Exercice 7 Soit l'automate $\mathcal{A}$ défini sur l'alphabet $\{a, b\}$, d'états 0, 1, 2, 3, 4, 5, d'état initial 0, d'état final 4 et de transitions $0.a = 1$, $0.b = 2$, $1.a = 3$, $1.b = 3$, $2.a = 3$, $2.b = 3$, $3.a = 4$, $3.b = 5$, $4.a = 4$, $4.b = 4$, $5.a = 5$ et $5.b = 4$.
Pour minimiser l'automate $\mathcal{A}$, on peut dérouler l'algorithme de plusieurs manières.
Une première manière :

- initialement : $\{0, 1, 2, 3, 5\}$ et $\{4\}$
- on partage $\{0, 1, 2, 3, 5\}$ en utilisant a : $\{0, 1, 2, 5\}$, $\{3\}$ et $\{4\}$
- on partage $\{0, 1, 2, 5\}$ en utilisant b : $\{0\}$, $\{1, 2\}$, $\{5\}$ et $\{3\}$, $\{4\}$
- on ne peut pas partager $\{1, 2\}$ (ni en utilisant a, ni en utilisant b).

Une deuxième manière :

- initialement : $\{0, 1, 2, 3, 5\}$ et $\{4\}$
- on partage $\{0, 1, 2, 3, 5\}$ en utilisant a : $\{0, 1, 2, 5\}$, $\{3\}$ et $\{4\}$
- on partage $\{0, 1, 2, 5\}$ en utilisant a : $\{0, 5\}$, $\{1, 2\}$ et $\{3\}$, $\{4\}$
- on partage $\{0, 5\}$ en utilisant a : $\{0\}$, $\{5\}$ et $\{1, 2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$
- on ne peut pas partager $\{1, 2\}$ (ni en utilisant a, ni en utilisant b).

Et il y a encore d'autres manières...

Minimisation de l'automate $\mathcal{A}$

Dessiner l'automate $\mathcal{A}$, en faisant en sorte que l'état i soit nommé q_i dans le dessin.

Pour construire l'automate $\mathcal{A}'$, minimisé de l'automate $\mathcal{A}$, on choisit le menu Convert/Minimize DFA.
La fenêtre se partage en deux :

- la partie gauche contient l'automate $\mathcal{A}$ (ou le complété de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{A}$ n'est pas complet)
- la partie droite est une sous-fenêtre de travail qui contient un arbre dont les feuilles représentent des ensembles d'états.

Initialement, l'arbre a seulement deux feuilles : l'une représente les états non terminaux (ici 0, 1, 2, 3, 5) et l'autre les états terminaux (ici 4). Pour compléter cet arbre, on partage les ensembles d'états comme il est dit dans l'algorithme de minimisation.
En suivant la première manière :

- pour partager $\{0, 1, 2, 3, 5\}$ en utilisant a : cliquer sur le cadre contenant 0, 1, 2, 3, 5 puis cliquer sur le bouton Set Terminal ; taper a dans la boîte de dialogue ; sous le cadre contenant 0, 1, 2, 3, 5, apparaissent deux sous-arbres, dont les feuilles sont vides ; on remplit l'une des deux feuilles avec 0, 1, 2, 5 et l'autre feuille avec 3 ; pour cela, cliquer sur l'une des deux feuilles puis, successivement, sur les états q_0, q_1, q_2, q_5 de $\mathcal{A}$; ensuite, cliquer sur l'autre feuille puis sur l'état q_3 de $\mathcal{A}$.
  Remarque : la même démarche (cliquer sur la feuille de l'arbre puis sur l'état de l'automate $\mathcal{A}$) permet d'enlever un état déjà présent dans une feuille ; cliquer sur le bouton Check Node pour soumettre la partition ;
- pour partager $\{0, 1, 2, 5\}$ en utilisant b : cliquer sur le cadre contenant 0, 1, 2, 5 puis cliquer sur le bouton Set Terminal ; taper b dans la boîte de dialogue ; sous le cadre contenant 0, 1, 2, 5, apparaissent deux sous-arbres ; comme la lettre b partage $\{0, 1, 2, 5\}$ en trois sous-ensembles ($\{0\}$, $\{1, 2\}$ et $\{5\}$), il faut ajouter un sous-arbre (bouton Add Child) ; remplir les trois feuilles ; cliquer sur le bouton Check Node pour soumettre la partition ; si elle n'est pas correcte, un message d'erreur s'affiche et il faut alors modifier la composition des feuilles ; si

elle est correcte, le message “The expansion is correct !” s’affiche

— comme il n’y a plus d’ensemble d’états à partager, le seul bouton accessible est le bouton Finish ; cliquer dessus ; dans la sous-fenêtre de travail, l’arbre est remplacé par l’ensemble des états de l’automate minimal ; construire les transitions de l’automate minimal

— cliquer sur le bouton Done? ; s’il manque des transitions, un message le signale.

Refaire la minimisation de l’automate $\mathcal{A}$ en suivant la deuxième manière de dérouler l’algorithme.

Exercice 8 Soit l’automate $\mathcal{A}$ d’états 0, 1, 2, 3, 4, 5, d’état initial 0, d’état terminal 5 et de transitions : $0.a = 1$, $1.a = 2.a = 2$, $3.a = 4.a = 4$, $5.a = 5$, $0.b = 3$, $1.b = 2.b = 3.b = 4.b = 5.b = 5$. Dessiner l’automate $\mathcal{A}$. Minimiser $\mathcal{A}$.

Exercice 9

1. Soit l’automate $\mathcal{A}$ d’états 0, 1, 2, 3, 4, 5, d’état initial 0, d’état terminal 3 et de transitions : $0.a = 1$, $1.a = 1$, $2.a = 4$, $3.a = 5$, $4.a = 4$, $5.a = 5$, $0.b = 2$, $1.b = 3$, $2.b = 2$, $3.b = 3$, $4.b = 5$, $5.b = 5$. Dessiner l’automate $\mathcal{A}$. Minimiser $\mathcal{A}$.
2. Soit l’automate $\mathcal{B}$ d’états 0, 1, 2, 3, 4, 5 d’état initial 0, d’états terminaux 3, 4, 5 et de même transitions que $\mathcal{A}$. Dessiner l’automate $\mathcal{B}$. Minimiser $\mathcal{B}$.

Exercice 10

1. Soit l’automate $\mathcal{A}$ d’états 0, 1, 2, 3 d’état initial 0, d’état terminal 2 et de transitions : $0.a = 0$, $0.a = 1$, $1.a = 1$, $3.a = 0$, $1.b = 1$, $1.b = 2$, $3.b = 0$, $3.b = 2$, $1.c = 1$, $1.c = 3$,$3.c = 0$.
2. Dessiner l’automate $\mathcal{A}$.
3. Déterminiser $\mathcal{A}$.
4. Minimiser $\mathcal{A}$.

13 À découvrir seul

1. Le menu Convert/Convert FA to RE de la fenêtre Editor permet de calculer une expression rationnelle pour le langage reconnu par un automate.

   Pour chacun des exercices 22, 24, 25, 26 de la feuille de TD, on pourra comparer l’expression rationnelle calculée par le logiciel JFLAP à l’expression rationnelle calculée en TD. On pourra au préalable traiter l’exercice suivant :

   Exercice 11 Soient X et Y des langages sur un alphabet A. Montrer que

   $$(X + Y)^* = (X^*Y)^*X^* = X^*(YX^*)^*$$

2. Le bouton Regular Expression de la fenêtre New Document. Il permet de dessiner l’automate reconnaissant un langage donné par une expression rationnelle (ne contenant que des $+$, . et *). Pour chacune des expressions rationnelles de l’exercice 21 de la feuille de TD, on pourra comparer l’automate construit par le logiciel JFLAP à l’automate construit en TD.