MAPSI – Cours 1 : Rappels de probabilités et statistiques

Pierre-Henri Wuillemin & Raphaël Fournier-S'niehotta
(& Nicolas Thome)

LIP6 / ISIR – Sorbonne Université, France

MAPSI : informations pratiques

- **MAPSI :** Méthodes et algorithmes de probabilité et statistique en informatique
  - **Code UE :** MU4IN601
- **Calendrier :** `https://cal.ufr-info-p6.jussieu.fr/master/`
  $\Rightarrow$ Cocher M1-IMA
- **Ressources sur moodle :** `https://moodle-sciences-25.sorbonne-universite.fr`
  - Répartition dans les groupes à venir.
  - Mail & nouvelles fraiches pour les informations de dernière minute
- **Mattermost** : `http://tiny.cc/M1MAPSI`

Règles de notation

Organisation :

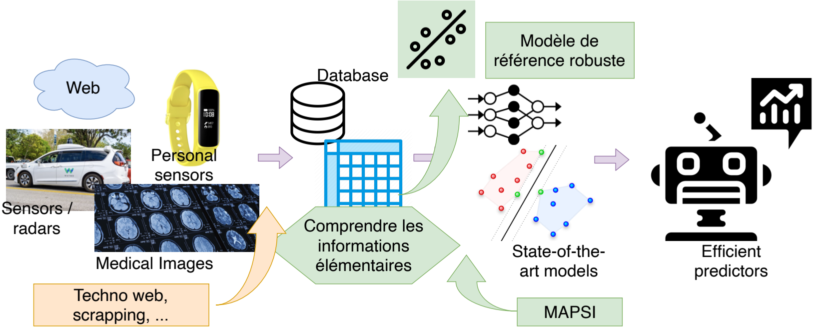
- Cours : théorie & concepts, exemples
- TD : applications & calculs sur feuille
- TME : mise en oeuvre des méthodes sur des exemples concrets

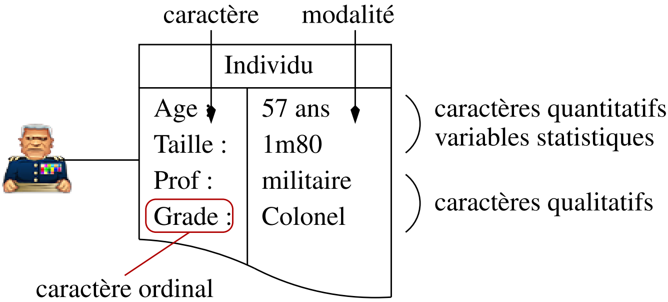
Notation :

- Examen final : 50%
  - Questions sur des formulations analytiques + calcul
  - Questions algo/code
- Partiel : 35%
- Notes de participation (contrôle continu, CC) : 15%
  - Attention : l'essentiel de la note est constitué du travail effectué **durant la séance**
  - **Soumission obligatoire** du code de TME en fin de séance...
  - ... Et **commentaires bienvenus** pour faciliter la correction
- session 2 : max(rattrapage, 15% CC + 85% rattrapage)

Pourquoi faire MAPSI ?

- Parce que c'est obligatoire/fortement préconisée
- Parce que c'est un bon rappel de statistiques pour...
  - Comprendre la littérature scientifique en générale
  - Comprendre comment fonctionne l'analyse de données
- Parce que c'est la porte d'entrée vers les sciences des données !





Définitions

- Caractères : critères d'étude de la population
- Modalités : les valeurs que peuvent prendre les caractères
- Caractère quantitatif ou Variable statistique : ensemble de modalités = des nombres + échelle mathématique
- Caractère qualitatif ou Variable catégorielle : caractère non quantitatif
- Caractère ordinal : les modalités sont ordonnées

Individu	
Age :	57 ans — variable discrète
Taille :	1m80 — variable continue
Prof :	militaire
Grade :	Colonel

Définitions sur les variables statistiques

- Variable discrète : définie sur un espace discret (par exemple des entiers)
- Variable continue : définie sur un continuum (toutes les valeurs numériques d'un intervalle)

Effectifs, fréquences et distributions

Quelques définitions de statistiques

- X : caractère défini sur une population de N individus
- $\{x_1, \dots, x_I\}$ modalités de X
- N_i = effectif de x_i
  = nombre d'individus pour lesquels X a pris la valeur x_i
- fréquence ou effectif relatif : $f_i = \frac{N_i}{N}$
- distribution de X : ensemble des couples $\{(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots\}$

Représentation usuelle sous forme de tableau

Statistiques = description d'un échantillon
Probabilités = description d'une population.

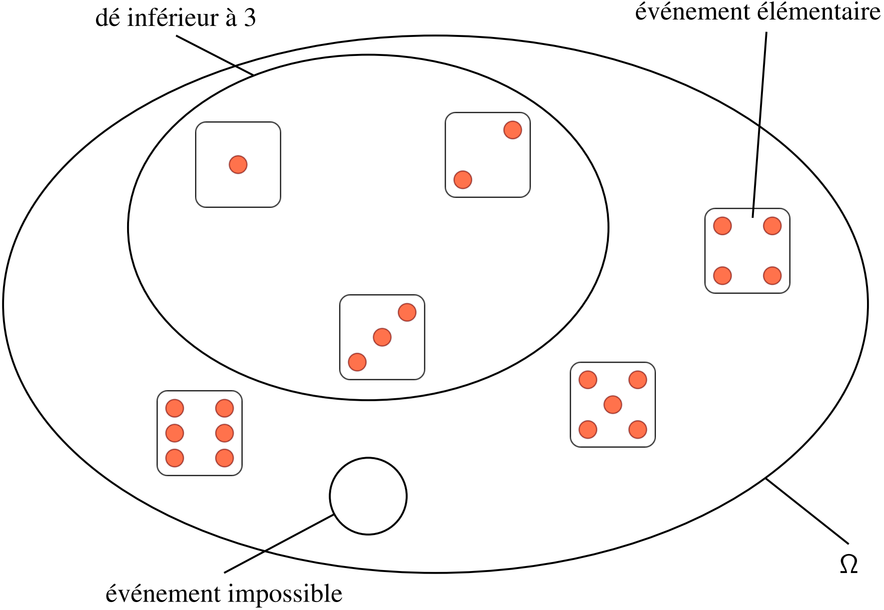
Les événements : approche évènementielles

Notations ensemblistes :

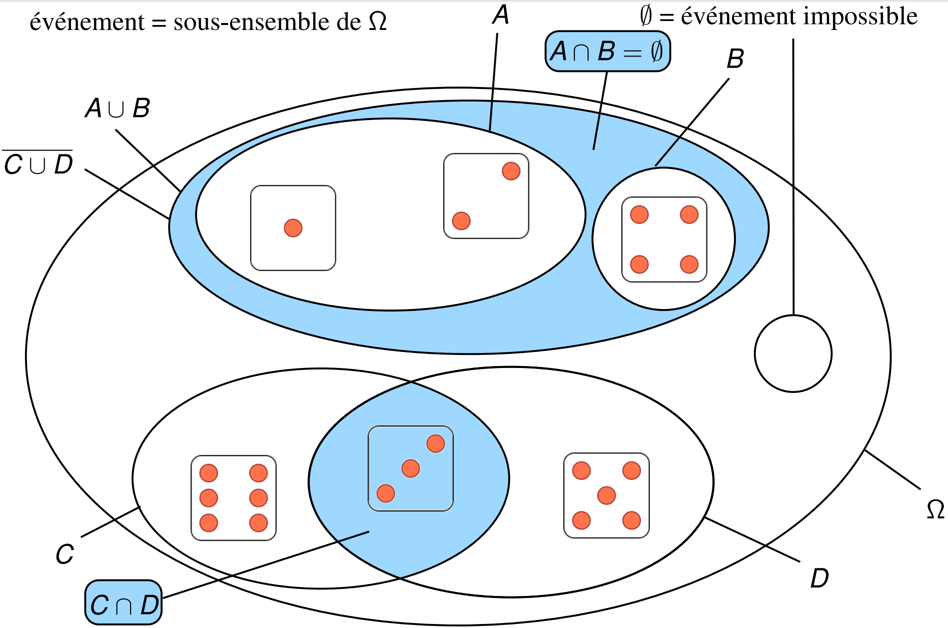
- événements = sous-ensembles de Ω
- $\emptyset$ = événement impossible
- $A \cup B$ = événement qui est réalisé si A ou B est réalisé
- $C \cap D$ = événement qui est réalisé si C et D sont réalisés
- $\overline{C \cup D}$ = complémentaire de $C \cup D$ dans Ω

  = événement qui est réalisé ssi $C \cup D$ ne l'est pas
- $A \cap B = \emptyset$ = 2 événements qui ne peuvent se réaliser simultanément

Probabilités : approche évènementielle

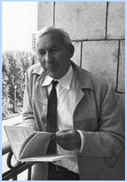


Les événements : approche évènementielle



Définition des probabilités : le cas discret

Définition des probabilités (Kolmogorov)



- Ω = ensemble fini ou dénombrable d'événements élémentaires e_k, $k \in K \subseteq \mathbb{N}$
- $\mathcal{A} = 2^{|\Omega|}$ = ensemble des événements
- Mesure de probabilité : $\forall A \in \mathcal{A}$, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $A = \bigcup_{k \in L} A_k$, avec L ensemble dénombrable et, $\forall j, k \in L$, $j \neq k$, $A_j \cap A_k = \emptyset$,
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k \in L} \mathbb{P}(A_k).$$

$\Longrightarrow$ Les probabilités des événements élémentaires déterminent entièrement $\mathbb{P}$

conséquence : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Variable aléatoire

Lorsqu'on est face à une expérience aléatoire, on s'intéresse plus souvent à une *valeur* attribuée au résultat qu'au résultat lui-même.

Exemples

- Lorsque l'on joue à un jeu de hasard on s'intéresse plus au gain que l'on peut obtenir qu'au résultat du jeu.
- Nombre de pannes dans un ensemble de systèmes plutôt que l'état exact des systèmes

- Solution : "traduire" l'univers en évènements "compréhensibles".

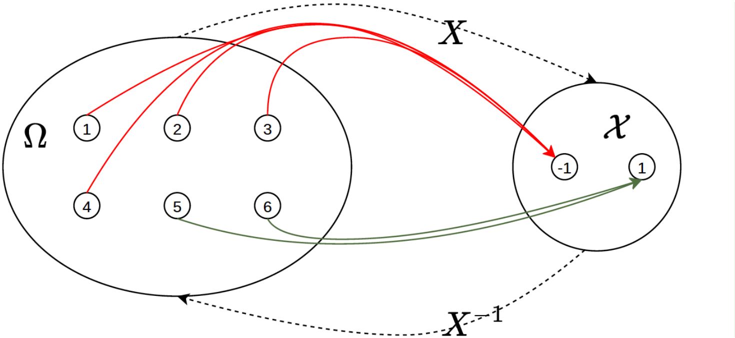
$\Rightarrow$ variable aléatoire : application de l'univers Ω vers un autre ensemble.

Exemple du lancer de dé

On lance un dé après avoir misé 1*EUR*. Si le résultat est un 5 ou un 6 on double la mise, sinon perd la mise. Dans ce cas :

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Card $\Omega = 6$, et $\forall e \in \Omega, \mathbb{P}(e) = \frac{1}{6}$
- Soit X la *v.a.* qui associe à tout résultat du dé un *gain* :
  $X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = -1$ et $X(5) = X(6) = (2 - 1) = 1$
  X est à valeur dans l'ensemble noté $\mathcal{X} = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$,
  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$
- Question :
  Comment calculer la probabilité de gagner 1*EUR* ?
- Réponse : Définir une probabilité sur $\mathcal{X}$, notée $\mathbb{P}$, en retournant dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$
  i.e. utiliser P(*résultat du dé* =5 *ou* 6) pour estimer $\mathbb{P}(\{1\})$.

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, Card $\Omega = 6$, et $\forall e \in \Omega, P(e) = \frac{1}{6}$
- Soit X la *v.a.* qui associe à tout résultat du dé un *gain* :
  $X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = -1$ et $X(5) = X(6) = (2 - 1) = 1$
  X est à valeur dans l'ensemble noté $\mathcal{X} = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$, $X : \Omega \to \mathcal{X}$
- Question : Comment calculer la probabilité de gagner 1*EUR* ?
- Réponse : Définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{X}$, en retournant dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, i.e. utiliser $P($*résultat du dé* =5 *ou* 6$)$ pour estimer $\mathbb{P}(\{1\})$.



Définition Variable aléatoire à valeurs discrètes

Soit Ω un ensemble dénombrable, et P une mesure de probabilité sur Ω.
Soit Ω', un ensemble discret. Une variable aléatoire est une fonction X de Ω muni de la mesure P vers Ω'.

Exemples

- Lancer d'un dé :
  Soit $\Omega = \{1, ..., 6\}$ muni de la probabilité uniforme P.
  $X : i \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
  est une variable aléatoire de (Ω, P) vers $\Omega' = \{0, 1\}$.
- Lancer de deux dés :
  Soit $\Omega = \{1, ..., 6\}^2$ muni de la probabilité uniforme P.
  $X : (i, j) \mapsto i + j$
  est une variable aléatoire de (Ω, P) vers $\Omega' = \{2, ..., 12\}$

Variable aléatoire à valeurs discrètes (5/5)

Définitions : Loi de probabilité

Soit (Ω, P) un espace probabilisé où Ω est dénombrable.
Soit Ω' un ensemble discret, et X une v.a. de (Ω, P) vers Ω'.

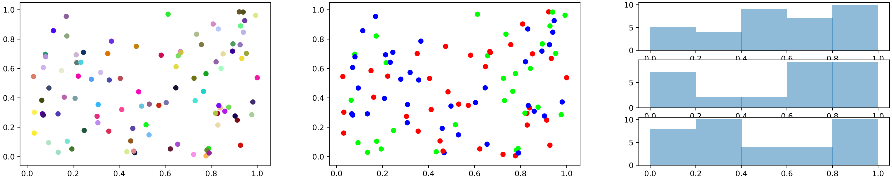
- P_X définit une mesure de probabilité sur Ω' :
$$\forall E' \subset \Omega', \quad P_X(E') = P\big(X^{-1}(E')\big)$$
avec $X^{-1}(E') = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in E'\}$
- L'ensemble des valeurs $P_X\big(\{\omega'\}\big)$ pour $\omega' \in \Omega'$ s'appelle la *loi de probabilité* de X.

Notations

- L'événement $X \in]-\infty, a]$ sera noté par $X \leq a$
- L'événement $X \in]a, b]$ sera noté par $a < X \leq b$
- L'événement $X \in \{a\}$ sera noté par $X = a$
- On a donc $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)$

Description d'une population

- A partir d'un échantillon
- En simplifiant les données continues
- Simplifiant les différentes dimensions, ...

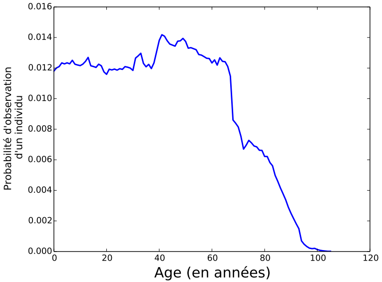


Moyennes : 0.56   0.59   0.47
Ou même une moyenne générale : 0.54

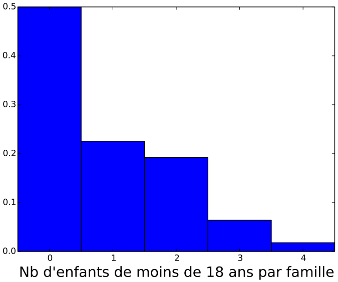
Décrire parfaitement une population = connaitre sa loi de probabilité

Exemples selon la nature des variables :

en continu :



en discret :



Problème général :

Comment déduire la loi sur la population si on ne connait qu'un échantillon ?
Réponse dans les cours suivants...

Propriétés

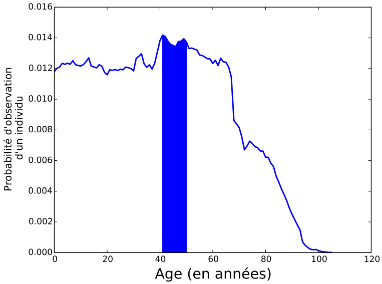
Cas général :

- Une distribution somme à 1
- Une probabilité est toujours ≥ 0

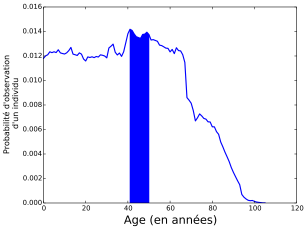
Cas Continu :

- Chaque événement élémentaire a une proba = 0
  (eg : proba d'avoir 40 ans)
- Mais proba d'être dans un intervalle ≥ 0
  (eg : proba d'avoir entre 40 et 50 ans)

$P(A)$ = surface délimitée par la **fonction de densité** dans la zone où les événements sont inclus dans A



Probabilités : les détails dans le cas continu



$$P(X \in I) = \int_I p(x)dx$$

avec P = proba et p = fonction de densité

$\Longrightarrow$ connaître p = connaître P

intervalles $]-\infty, x[$ $\Longrightarrow$ fonction de répartition :

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy$$

Caractéristiques d'une loi de probabilités (1/2)

Caractéristiques

- Espérance mathématique ou moyenne : $E(X)$

  X discrète : $E(X) = \sum x_k p_k$

  X continue : $E(X) = \displaystyle\int x\, p(x) dx$

⚠ l'espérance mathématique n'existe pas toujours

- Mode : Mo de P (pas toujours unique) :

  X discrète : $p(Mo) = \max_k p(x_k)$

  X continue : $p(Mo) = \max_x p(x)$

Propriétés de l'espérance

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $\forall X, Y,\ E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Caractéristiques d'une loi de probabilités (2/2)

- variance : $V(X)$ ou σ^2 :

  X discrète : $\sigma^2 = \sum[x_k - E(X)]^2 p_k$

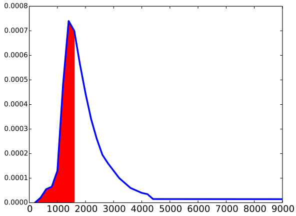
  X continue : $\sigma^2 = \displaystyle\int [x - E(X)]^2 \, p(x) dx$

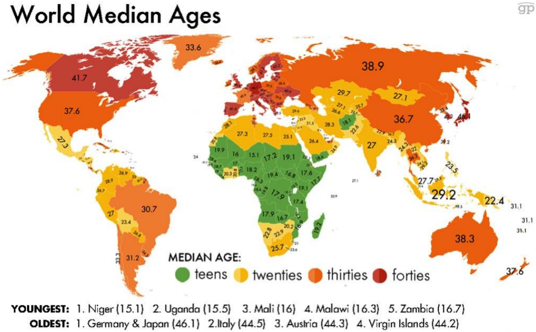
- moyenne des carrés des écarts entre les valeurs prises par X et son espérance $E(X)$
- écart-type : σ = racine carrée de la variance
- variance et donc écart-type n'existent pas toujours
- **Prop :** $Y = aX + b$, où a et b sont des nombres réels
  $V(Y) = a^2 V(X)$
- **Prop :** $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$

Médiane d'une variable statistique continue

- X : variable statistique continue
- Médiane $=$ le nombre δ tel que les aires situées de part et d'autre de ce nombre dans l'histogramme représentant X sont égales

Médiane M : $P(X \leq M) \geq \frac{1}{2}$ et $P(X \geq M) \geq \frac{1}{2}$





Les quantiles

Quantile d'une variable discrète

- X : variable statistique discrète, modalités $\{x_1, \dots, x_I\}$
- population de N individus (N_i = effectif de x_i)
- quantile d'ordre $\alpha = \delta$ tel que :

$$\sum_{i \in \{j : x_j < \delta\}} N_i \leq \alpha N \quad et \quad \sum_{i \in \{j : x_j > \delta\}} N_i \leq (1 - \alpha) N$$

Quantile d'une variable continue

- X : variable statistique continue
- quantile d'ordre α = le nombre δ tel que les aires situées de part et d'autre de ce nombre dans l'histogramme représentant X sont égales respectivement à $\alpha \times$ aire totale et $(1 - \alpha) \times$ aire totale

Exemple : lancer d'un dé à 6 faces

Définition

- événement : tout ce qui peut se réaliser ou pas à la suite d'une expérience
  exemple : « obtenir un 4 », « ne pas obtenir un 4 », « obtenir un chiffre inférieur à 3 »
- événement certain : assuré de se produire
  exemple : « obtenir un chiffre inférieur à 7 »
- événement impossible : ne se produira jamais
  exemple : « obtenir un chiffre supérieur à 7 »
- événement élémentaire : seulement un seul résultat de l'expérience permet de le réaliser
  exemple : « obtenir 4 » mais
  « obtenir un chiffre pair » = pas élémentaire
- univers Ω : ensemble des événements élémentaires

Probabilités conditionnelles (1/5)

Définition

la probabilité d'un événement A conditionnellement à un événement B, que l'on note $P(A|B)$, est la probabilité que A se produise sachant que B s'est ou va se produire.

Rem : $P(A|\Omega) = P(A)$ puisqu'on sait que Ω sera réalisé

Problème : comment calculer $P(A|B)$?

Exemple

- Tirer une carte parmi un jeu de 32 cartes
- $\Omega = \{32 \text{ cartes}\}$
- événements : $A =$ tirer un roi $\qquad B =$ tirer un cœur
- $P(A|B) = ?$

Interprétation de $P(A|B)$

Dans l'univers réduit B ($\Omega' = B$), quelle est la probabilité de A ?

- $\Omega' = B = \textit{coeur}$ (8 cartes)
- $P(A|B) =$ un roi parmi les coeur...

$P(A|B) = \frac{1}{8}$

Théorème des probabilités totales :

En partant de la loi jointe

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \text{ ou } P(A,B) = P(A|B)P(B)$$

Interprétation : l'observation conjointe de A et B ($P(A,B)$) correspond à l'observation de B ET à l'observation de A dans l'univers restreint B.

Exemple : Roi de coeur = Observer un coeur ET observer un roi dans l'univers des coeurs

Probabilités conditionnelles (4/5)

Propriétés

- Réversible : $P(A, B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$
- Théorème de Bayes :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- Intégration des probabilités totales :

$$P(A) = \sum_i P(A, B = b_i) = \sum_i P(A|B = b_i)P(B_i)$$

Tableau de probabilité conditionnelle :

- Sport : $P(S)$ =

Natation	0.32
Jogging	0.47
Tennis	0.21

- Répartition des ages pour chaque sport :
  $P(A|S)$ =

Sport \ Age	< 20	$[20, 30[$	$[30, 40[,$	$[40, 50[$	≥ 50
Natation	0.06	0.16	0.28	0.25	0.25
Jogging	0.21	0.32	0.21	0.15	0.11
Tennis	0.10	0.14	0.29	0.33	0.14

- **Propriété :** chaque ligne somme à 1 (=chaque ligne est un univers à part)
- **Questions :** comment extraire la distribution des ages ? Comment obtenir la distribution jointe ?

Indépendance probabiliste (1/3)

Définition de l'indépendance

deux événements A et B sont indépendants si :

$$P(A, B) = P(A) \times P(B)$$

Corrolaire : deux événements A et B sont indépendants si : $P(A|B) = P(A)$ (avec $P(B) > 0$)

l'indépendance n'est pas une propriété du couple (A, B) mais du couple $(\{A, A^c\}, \{B, B^c\})$:

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\Longrightarrow A \text{ et } B^c \text{ indépendants} \\ &\Longrightarrow A^c \text{ et } B \text{ indépendants} \\ &\Longrightarrow A^c \text{ et } B^c \text{ indépendants} \end{aligned}$$

Indépendance probabiliste (2/3)

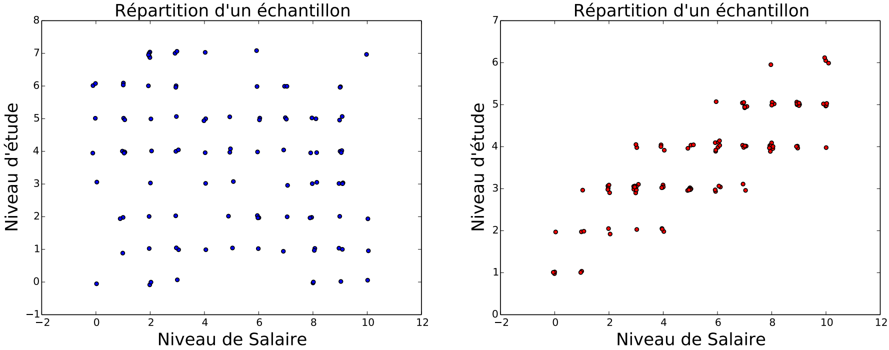
Démonstration :

A et B sont indépendants $\Longrightarrow P(A, B) = P(A) \times P(B)$

$P(A) = P(A, B) + P(A, B^c)$

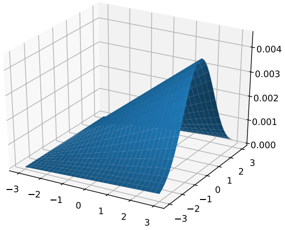
$$\begin{aligned}
\Longrightarrow P(A, B^c) &= P(A) - P(A, B) \\
&= P(A) - P(A) \times P(B) \\
&= P(A) \times [1 - P(B)] \\
&= P(A) \times P(B^c)
\end{aligned}$$

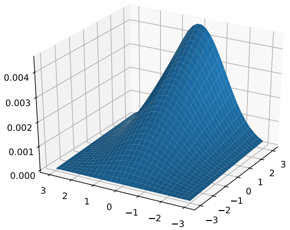
Exemple



Qu'est ce qui est dépendant ou indépendant ?

Représentation d'une loi jointe $P(X_1, X_2)$





Indépendance : pourquoi c'est important

- Combien de variable pour modéliser la probabilité de voir son toit s'envoler ? $12 \times 6 \times 10 = 720$
  - Mois de l'année (12)
  - Catégorie des ouragans (6)
  - Type de construction (10)
- Combien de variable pour modéliser les probabilités de tirage de 3 dés (cumul) ?
  - Indépendance ! Dés identiques = 6 valeurs
  - Dés différents = $3 \times 6 = 18$ valeurs
  - Dés non indépendants (?) $6 \times 6 \times 6 = 216$ valeurs
- Combien de variables pour modéliser les probabilités d'apparition de groupes de 3 mots (tri-grammes) ? -Vocabulaire réduit à 10k mots-
  - $10k^3 = 10^{12}$ valeurs (=4000 Go)

Caractéristiques d'une loi de probabilités

Propriétés de la variance

- $\forall X, Y,\ V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$ où :
  - $cov(X,Y)$ = covariance de X et Y

$$COV(X,Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])\,(Y - \mathrm{E}[Y])]$$

  - si X et Y discrètes

$$COV(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i - \mathrm{E}[X])(y_j - \mathrm{E}[Y])P(X = x_i, \cap Y = y_j)$$

  - si X et Y continues, de densité $p(x,y)$,

$$cov(X,Y) = \int\!\!\int [x - E(X)][y - E(Y)]p(x,y)dxdy$$

Estimateur sur un échantillon : $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k), \ldots, (x_N, y_N)\}$

$$cov(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})$$