

# Statistique et Informatique (3IN005)

2024-2025

Nicolas Baskiotis

Sorbonne Université  
Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique (ISIR)

Cours 5 :

Variable aléatoire réelle continue  
Théorème central limite  
Applications

# Plan

- 1 Variable aléatoire réelle et théorie de la mesure
- 2 Densité de probabilité
- 3 Lois usuelles
- 4 Théorème central limite
- 5 Applications
- 6 Exemples d'applications

# Mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$

## Motivation

Modéliser des résultats d'expériences aléatoires pouvant être des réels quelconques.

Par exemple : mesures de temps, de distances, d'espaces.

## Exemple : Probabilité continue uniforme sur $[0, 1]$

On souhaite créer une mesure telle que chaque valeur est équiprobable.

Plus exactement : si  $0 \leq a < b \leq 1$ ,  $P([a, b]) = b - a$ .

Plus généralement : on souhaite associer une mesure de probabilité aux *intervalles* de  $\mathbb{R}$ .

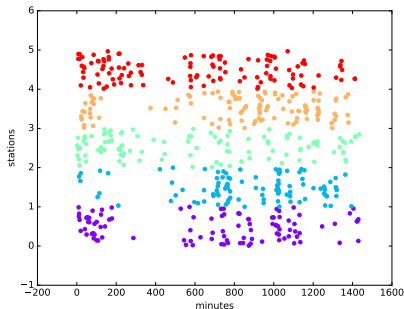
# Mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$

## Motivation

Modéliser des résultats d'expériences aléatoires pouvant être des réels quelconques.

Par exemple : mesures de temps, de distances, d'espaces.

## Exemple : Emprunt de vélib



# Quelques détails techniques...

## Objectif

- Probabilité d'un point : en général, nulle (sinon, probabilité discrète)
- ⇒ définir la probabilité sur un ensemble de points (infini non dénombrable, par exemple des intervalles) et qui respecte les propriétés des probabilités discrètes.

## Problème...

Selon la théorie usuelle (théorie des ensembles + axiome du choix) :  
Il *n'existe pas* de fonction  $P$  telle que :

- 1  $P$  est une mesure de probabilité,
- 2  $P$  peut être calculée pour n'importe quel sous-ensemble de  $[0, 1]$ ,
- 3 pour tout intervalle  $[a, b] \subset [0, 1]$  :  $P([a, b]) = b - a$ .

## Autrement dit :

Il existe des ensembles de  $\mathbb{R}$  qui sont *non mesurables* : ensembles de Vitali par exemple. (Non-mesurable  $\sim$  contradiction s'ils l'étaient).

# Mesures de probabilités : définition générale (1)

**Solution : les Tribus** où comment se débarrasser des sous-ensembles qui nous intéressent pas

Une tribu  $\mathcal{T}$  sur un ensemble  $\Omega$  contient des sous-ensembles de  $\Omega$  et vérifie :

- 1  $\Omega \in \mathcal{T}$ ,
- 2 si  $E \in \mathcal{T}$ , alors  $\Omega \setminus E \in \mathcal{T}$ ,
- 3 si  $(E_i)_{i \geq 1}$  est une suite d'ensembles appartenant à  $\mathcal{T}$ , alors  $\bigcup_{i \geq 1} E_i \in \mathcal{T}$ .

Note : l'ensemble des parties de  $\Omega$  est une tribu.

## Tribu de Borel

- La tribu de Borel sur  $\mathbb{R}$ , notée  $\mathcal{B}$ , est la plus petite tribu contenant tous les intervalles de  $\mathbb{R}$ , par exemple tous les ensembles du type :  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [a_i, b_i[$
- la tribu de Borel sur  $\mathbb{R}^n$ , notée  $\mathcal{B}_n$  est la plus petite tribu contenant les produits cartésiens de  $n$  ensembles de  $\mathcal{B}$  :  
 $\{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \mid \forall k, I_k \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{B}_n$ .

*Les tribus de Borel contiennent les ensembles intéressants du point de vue des probabilités.*

# Mesures de probabilités : définition générale (2)

## Espace mesurable

Un espace mesurable est un couple  $(\Omega, \mathcal{T})$ , où  $\Omega$  est un ensemble et  $\mathcal{T}$  est une tribu sur  $\Omega$ . (Note :  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  est donc un espace mesurable.)

## Mesure de probabilité

Soit  $(\Omega, \mathcal{T})$  un espace mesurable.

Une mesure sur  $(\Omega, \mathcal{T})$  est une fonction  $P : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty[$  telle que :

- 1  $P(\emptyset) = 0$ ,
- 2  $\forall E \in \mathcal{T}, P(E) \geq 0$ ,
- 3 si  $(E_i)_{i \geq 1}$  sont deux à deux disjoints, et  $\forall i, E_i \in \mathcal{T}$ , alors

$$P\left(\bigcup_{i \geq 1} E_i\right) = \sum_{i \geq 1} P(E_i).$$

- 4 Si de plus  $P(\Omega) = 1$ , alors  $P$  est une *mesure de probabilité*.

*Cette définition généralise la définition du cours 1 en prenant  $\mathcal{P}(\Omega)$  comme tribu sur  $\Omega$  lorsque  $\Omega$  est discret.*

# Mesure de Borel

## Fait marquant 2

Il existe une mesure  $\lambda$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , appelée mesure de Borel, telle que :

pour tout intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  ( $a \leq b$ ),  $\lambda([a, b]) = b - a$ .

La mesure de probabilité uniforme sur un intervalle  $[A, B]$ ,  $A < B$  est alors :

$$\forall I \in \mathcal{B}, P(I) = \frac{\lambda(I \cap [A, B])}{B - A}$$

## Mesure de Borel sur $\mathbb{R}^n$

La mesure de Borel sur  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ , notée  $\lambda_n$  est définie par :

$$\forall I_1 \in \mathcal{B}, \dots, I_n \in \mathcal{B}, \lambda_n(I_1 \times \dots \times I_n) = \prod_{k=1}^n \lambda(I_k)$$

Par exemple :  $\lambda_2([0, 1/2] \times [0, 1/2]) = 1/4$ .

$\lambda_2$  correspond à l'aire d'une figure dans le plan,  $\lambda_3$  au volume d'un objet dans l'espace à 3 dimensions.



# Plan

- 1 Variable aléatoire réelle et théorie de la mesure
- 2 Densité de probabilité**
- 3 Lois usuelles
- 4 Théorème central limite
- 5 Applications
- 6 Exemples d'applications

# Densité de probabilité

## Définition

Une mesure de probabilité  $P$  sur  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$  admet une *fonction de densité*  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si : pour tout  $I \subset \mathcal{B}_n$ ,  $P(I) = \int_{x \in I} p(x) d\lambda_n(x)$

## Exemples

- Si  $P$  est une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  qui admet comme fonction de densité  $p$ , alors pour tout  $a < b$ , on a :

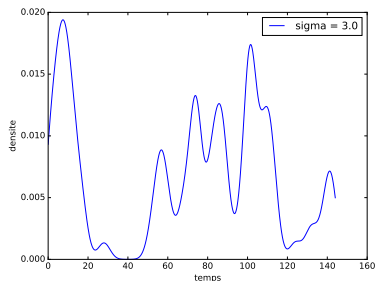
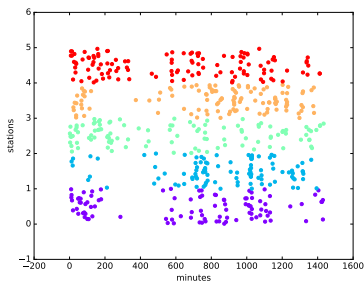
$$P([a, b]) = \int_a^b p(x) dx \quad (\text{avec les notations usuelles de l'intégrale sur } \mathbb{R}).$$

- La loi uniforme sur  $[a, b]$  admet comme fonction de densité :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

- une v.a. réelle à valeurs dans un ensemble discret *n'a pas* de fonction de densité.

# Exemples : emprunt de velib



Densité de la probabilité d'emprunt d'un vélo à une borne donnée durant une journée.

# Variables aléatoires à valeurs réelles

## Variable aléatoire réelle

Soit  $P$  est une mesure de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{T})$ .

Une variable aléatoire réelle est une fonction  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  telle que :

$$\forall I \in \mathcal{B}, X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$$

*$X$  induit une mesure de probabilité  $P_X$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  par :*

$$P_X(I) = P(X \in I) = P(X^{-1}(I)).$$

Note : cette définition généralise notre définition de variable aléatoires à valeurs réelles sur des ensembles discrets.

# Fonctions de répartition et de densité d'une v.a.r.

## Fonction de répartition

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ .

La fonction de répartition de  $X$ , notée  $F_X$ , est définie par :

$$F_X : \left( \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow [0, 1] \\ t & \mapsto P(X \leq t) \end{array} \right)$$

On a alors  $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ .

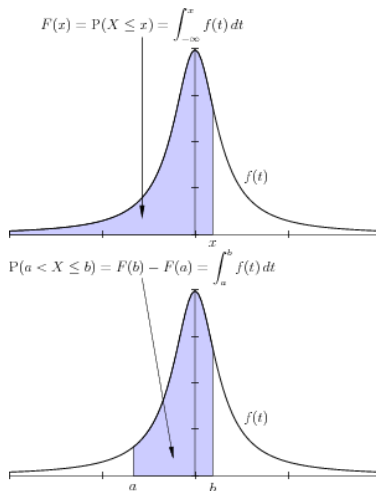
## Fonction de densité

Une v.a. réelle  $X$  admet une *fonction de densité*  $p_X$ , si, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(u) du.$$

- On a alors, pour  $a < b$ ,  $P(a < X \leq b) = \int_a^b p_X(u) du$ .
- Si  $X$  est une v.a.r. telle que sa fonction de répartition est dérivable, alors  $p_X = F'_X$  est une densité de  $X$ .

# Fonctions de répartition et de densité d'une v.a.r.



# Espérance et variance d'une v.a.r. continue

## Définition et propriétés

- Soit  $X$  une v.a.r. sur espace probabilisé  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, P)$  où  $P$  a une fonction de densité  $p$ . L'espérance de  $X$  est alors définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega) d\lambda_n(\omega).$$

- Soit  $X$ , une v.a.r. de densité  $p_X$ . L'espérance de  $X$  est définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} u p_X(u) du.$$

- La variance de  $X$  est définie par :  $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$ .

- Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Alors :  $\mathbb{E}(f(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) p_X(u) du$

Les résultats montrés pour les v.a.r. à valeurs discrètes restent vrais :

- Les propriétés de l'espérance et de la variance,
- les inégalités de Markov et Tchebychev, et la loi des grands nombres.

# Application : Méthodes de Monte-Carlo

## Types d'algorithmes probabilistes

- Algorithmes Las Vegas : renvoient toujours la réponse correcte, mais dans un temps variable,
- algorithmes de Monte-Carlo : les ressources sont limitées a priori, mais le résultat peut ne pas être exact.

## Exemple : approximation de nombres réels

Principe de la méthode (exemples : approximation de  $\ln 2$  et de  $\pi$ ) :

- 1 écrire le nombre comme l'espérance d'une fonction d'une v.a.r. à densité,

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+u} du, \quad \frac{\pi}{4} = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^1 I_{\{u^2+v^2 \leq 1\}} dudv$$

- 2 générer  $n$  valeurs selon la densité, calculer la fonction pour chaque valeur échantillonnée,
- 3 loi des grands nombres : la moyenne des  $n$  valeurs calculées tend vers le nombre qu'on souhaite calculer.



# Plan

- 1 Variable aléatoire réelle et théorie de la mesure
- 2 Densité de probabilité
- 3 Lois usuelles**
- 4 Théorème central limite
- 5 Applications
- 6 Exemples d'applications

# Loi exponentielle

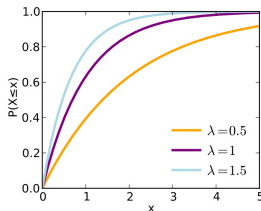
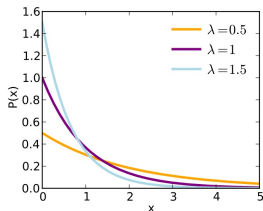
## Définition et propriétés

Une v.a.r.  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$  si elle admet comme densité de probabilité :

$$p_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a alors :

- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ ,  $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ ,  $F_X(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ .
- La loi exponentielle est l'analogue continu de la loi géométrique,
- elle représente le temps d'attente avant la réalisation d'un événement.



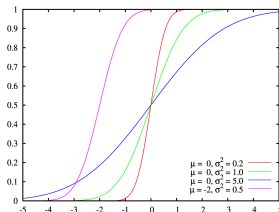
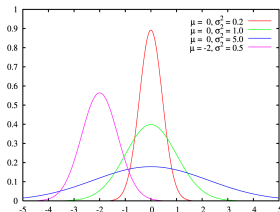
# Loi normale

## Définition et propriétés

Une v.a.r.  $X$  suit une loi normale (ou gaussienne) de paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$  si elle admet comme densité de probabilité :

$$p_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

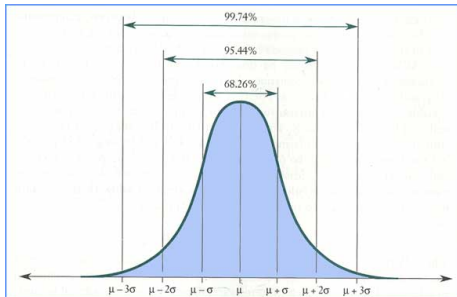
- $\mathbb{E}(X) = \mu$ ,  $V(X) = \sigma^2$  ( $\sigma$  est donc l'écart-type de  $X$ ).
- Si  $\mu = 0$ , on parle de loi *centrée*.
- Si  $\mu = 0$  et  $\sigma = 1$  alors  $X$  suit une loi normale *centrée réduite*.



# Loi normale (2)

## Propriétés additionnelles

- Symétrie :  $F_X(\mu + t) = 1 - F_X(\mu - t)$  ( $\Leftrightarrow P(X \leq \mu - t) = P(X \geq \mu + t)$ ),
- Si  $X$  suit une loi normale de paramètres  $(\mu, \sigma^2)$ , alors  $Y = \alpha X + \beta$  suit une loi normale de paramètres  $\alpha\mu + \beta$  et  $\alpha^2\sigma^2$ .  
*En particulier,  $\frac{X-\mu}{\sigma}$  suit une loi normale centrée réduite.*
- Si  $X$  et  $X'$  sont indépendantes et suivent respectivement une loi normale de paramètres  $(\mu, \sigma^2)$  et  $(\mu', \sigma'^2)$ , alors  $X + X'$  suit une loi normale de paramètres  $\mu + \mu'$  et  $\sigma^2 + \sigma'^2$ .



# Plan

- 1 Variable aléatoire réelle et théorie de la mesure
- 2 Densité de probabilité
- 3 Lois usuelles
- 4 Théorème central limite**
- 5 Applications
- 6 Exemples d'applications

# Théorème central limite

## Énoncé du théorème

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées, d'espérances et de variances finies.

*Les  $X_n$  peuvent suivre n'importe quelle loi dès que ces deux conditions sont respectées.*

On note  $\mu = \mathbb{E}(X_n)$  et  $\sigma = \sqrt{V(X_n)}$  l'espérance et l'écart-type de  $X_n$ .

- En notant  $S_n = \sum_{k \leq n} X_k$ , on a :

$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$  a une espérance de 0 et un écart-type de 1

- De plus, pour tout  $t$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) = \Phi(t)$$

$$\text{où } \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

*$\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.*

# Théorème central limite

## Énoncé du théorème

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées, d'espérances et de variances finies.

*Les  $X_n$  peuvent suivre n'importe quelle loi dès que ces deux conditions sont respectées.*

On note  $\mu = \mathbb{E}(X_n)$  et  $\sigma = \sqrt{V(X_n)}$  l'espérance et l'écart-type de  $X_n$ .

- En notant  $S_n = \sum_{k \leq n} X_k$ , on a :

$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$  a une espérance de 0 et un écart-type de 1

- De plus, pour tout  $t$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) = \Phi(t)$$

$$\text{où } \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

*$\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.*

# Théorème central limite

## interprétation

$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) = P(Y \leq t)$  où  $Y$  suit une loi normale centrée réduite.

Formulation alternative informelle :

lorsque  $n$  est grand :  $P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) \approx P(Y \leq t)$

ou encore (toujours lorsque  $n$  est grand) :

$$P(S_n \leq z) \approx P\left(Y \leq \frac{z - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Exemple :  $X_n$  sont des v.a. de Bernoulli de paramètre  $p$

lorsque  $n$  est grand :

$$P(S_n \leq k) = \sum_{i=0}^k C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx P\left(Y \leq \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$



# Théorème central limite

## interprétation

$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) = P(Y \leq t)$  où  $Y$  suit une loi normale centrée réduite.

Formulation alternative informelle :

lorsque  $n$  est grand :  $P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) \approx P(Y \leq t)$

ou encore (toujours lorsque  $n$  est grand) :

$$P(S_n \leq z) \approx P\left(Y \leq \frac{z - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Exemple :  $X_n$  sont des v.a. de Bernoulli de paramètre  $p$

lorsque  $n$  est grand :

$$P(S_n \leq k) = \sum_{i=0}^k C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx P\left(Y \leq \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

# Théorème central limite

## interprétation

$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) = P(Y \leq t)$  où  $Y$  suit une loi normale centrée réduite.

Formulation alternative informelle :

lorsque  $n$  est grand :  $P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) \approx P(Y \leq t)$

ou encore (toujours lorsque  $n$  est grand) :

$$P(S_n \leq z) \approx P\left(Y \leq \frac{z - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Exemple :  $X_n$  sont des v.a. de Bernoulli de paramètre  $p$

lorsque  $n$  est grand :

$$P(S_n \leq k) = \sum_{i=0}^k C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx P\left(Y \leq \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

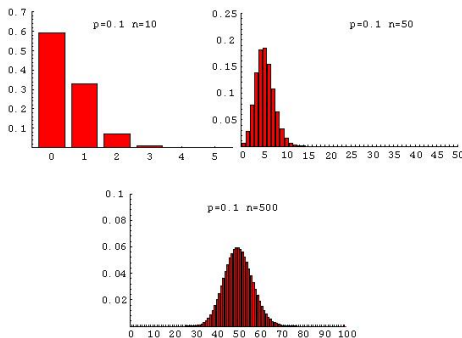
# Théorème central limite

Exemple : les  $X_n$  sont des v.a. de Bernoulli de paramètre  $p$

lorsque  $n$  est grand :

$$P(S_n \leq k) = \sum_{i=0}^k C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx P\left(Y \leq \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

En pratique : une loi binomiale peut être approximée par une loi normale si  $np \geq 10$  et  $n(1-p) \geq 10$



# TCL et loi des grands nombres

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées.  
On note  $\mu$  leur espérance et  $\sigma$  leur écart-type.  
On note  $S_n = \sum_{k \leq n} X_k$ .

- Loi des grands nombres :

$$\forall t > 0, P\left(-t \leq \frac{S_n}{n} - \mu \leq t\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

- Théorème central limite :

$$\forall t > 0, P\left(-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{n} - \mu \leq \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2\Phi(t) - 1$$

# Plan

- 1 Variable aléatoire réelle et théorie de la mesure
- 2 Densité de probabilité
- 3 Lois usuelles
- 4 Théorème central limite
- 5 Applications**
- 6 Exemples d'applications

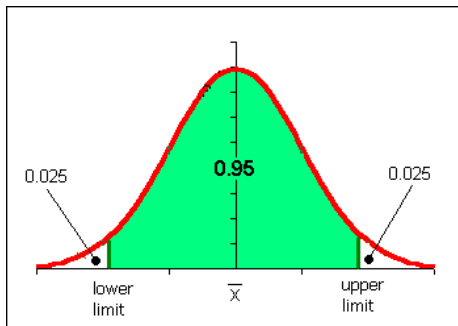
# Intervalle de confiance

## Définition

Soit  $X$ , une variable aléatoire réelle.

Un intervalle de confiance à  $c\%$  pour un paramètre  $p$  est défini par deux fonctions  $u$  et  $v$  telles que :

$$P(u(X) < p < v(X)) \geq c/100$$



# Intervalles de confiance

## Exemple : I.C. pour l'espérance d'une loi normale

Soient  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  v.a.r. indépendantes et suivant une loi normale d'espérance  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ .

L'espérance  $\mu$  est inconnue. On souhaite déterminer un intervalle de valeurs possibles pour  $\mu$ , en supposant que  $\sigma$  est connue.

On note  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ .  $\frac{X - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$  suit une loi normale centrée réduite.

donc  $\forall t, P(-t < \frac{X - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t) = 2\Phi(t) - 1$ . Donc, en fixant :

- $t$  tel que  $2\Phi(t) - 1 = c/100$  (par exemple :  $t = 2$  pour 95%),
- $u(X) = \frac{X}{n} - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$ ,
- $v(X) = \frac{X}{n} + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$ ,

on a  $P(u(X) < \mu < v(X)) \geq c/100$ .

c'est un intervalle de confiance à  $c\%$  pour le paramètre  $\mu$ .

# Plan

- 1 Variable aléatoire réelle et théorie de la mesure
- 2 Densité de probabilité
- 3 Lois usuelles
- 4 Théorème central limite
- 5 Applications
- 6 Exemples d'applications**



# En théorie de l'information

## Entropie : quantité d'information

- Je cherche à deviner un nombre entre 0 et 100 en posant des questions.
- quelle question m'apporte le plus d'information ?
  - le nombre est-il pair ?
  - le nombre finit-il par 12 ?
  - le nombre est-il supérieur à 50 ?
- Notion d'entropie : nombre minimum de question à poser pour trouver le nombre.

## Définition

- Soit  $p$  une v.a.  $X$  à  $n$  valeurs distinctes  $i$ , chacune de probabilité  $p_i$ ,
- la probabilité de  $(x_1, \dots, x_t)$  tend vers  $\prod_{k=1}^n p_k^{tp_k} = (\prod_{k=1}^n p_k^{p_k})^t$ ,
- l'entropie de  $p$  est  $H(p) = -\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i)$

## Utilisations (entre autre)

- Codage de Huffman
- Arbres de décision

# Classification et maximum de vraisemblance

## Maximum de vraisemblance

Soit

- une famille de modèle  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_\theta\}$ , paramétrée par un vecteur réel  $\theta$
- Vraisemblance d'un modèle pour des données  $X$  :  
$$L(X; M_\theta) = p(X|M_\theta) = \prod_{x \in X} p(x|M_\theta)$$
- Maximum de vraisemblance : choix du modèle qui maximise la vraisemblance

## Applications :

- classification d'images par histogramme
- classification de séquences : reconnaissance de la parole
- infection et diffusion dans les graphes
- ...

# Applications : dilemme de l'exploration/exploitation

## Question : problème du bandit-manchot

- soit  $K$  machines à sous disponible, toutes différentes,
- connaissant le résultat de mes  $n$  dernières tentatives,
- quelle machine jouée pour maximiser mes gains ?

## Modélisation :

- chaque machine suit une loi inconnue  $\nu_k$  d'espérance  $\mu_k$ ,
- soit  $\mu^*$  la machine  $i^*$  d'espérance maximale,
- soit  $I_t$  la machine jouée au coup  $t$ ,  $x_{I_t}$  la v.a. du gain associé,
- regret après  $n$  coups :  $R_n = n * \nu_{i^*} - \sum_{t=1}^n x_{I_t}$
- minimiser :  $\mathbb{E}(R_n) = n\mu^* - \mathbb{E} \sum_{i=1}^K T_i(n) \mu_i$   
avec  $T_i(n)$  le nombre de fois ou la machine  $i$  a été joué durant  $n$  coups.

# Applications : dilemne de l'exploration/exploitation

## Politique de sélection

- $\epsilon$ -greedy : jouer avec une certaine probabilité la meilleure machine, au hasard sinon.
- Upper-Confidence Bound : politique optimiste.
  - Inégalité d'Hoeffding : avec une probabilité au moins  $1 - \epsilon$ ,

$$\mathbb{E}X \leq \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m X_s + \sqrt{\frac{\log(\epsilon^{-1})}{2m}}$$

- UCB :

$$\operatorname{argmax} \mu_i + \sqrt{\frac{2\log(t+1)}{T_i(t)}}$$

## Utilisations :

- marketing ciblé/google ads
- approximation de monte-carlo : I.A pour go