Série 3 : Programmation linéaire et Manipulabilité

Exercice 1: Questions de cours

Q1. Donner un programme linéaire (en nombres entiers) permettant de déterminer un mariage parfait efficace pour le problème suivant :

	A	B	C
X	3	6	1
Y	0	3	7
Z	3	4	3

(a) Utilités de X, Y et Z (hommes)

	X	Y	Z
A	4	6	0
B	8	1	1
C	1	4	5

(b) Utilités de A, B et C (femmes)

Q2. Donner un programme linéaire (en nombres entiers) permettant de déterminer un mariage parfait équitable pour ce même problème.

Q3. Quelles contraintes faudrait-il ajouter pour se restreindre aux mariages stables ?

Exercice 2: PL et résolution graphique

Une entreprise fabrique deux types de ceintures A et B. Le type A est de meilleure qualité que le type B. Le bénéfice net est 2 euros pour le type A et 1,5 euros pour le type B. Le temps de fabrication pour le type A est 2 fois le temps de fabrication pour le type B ; si toutes les ceintures étaient du type B, l'entreprise pourrait en fabriquer 1000 par jour. L'approvisionnement en cuir est suffisant pour 800 ceintures par jour (type A ou B). Enfin, 400 boucles de type A et 700 boucles de type B sont disponibles chaque jour. Le but est de maximiser le bénéfice total de l'entreprise.

1. Formuler le problème en un programme linéaire.
2. Résoudre le PL graphiquement.

Exercice 3: Véracité et efficacité

On considère les préférences suivantes :

A	b	c	a	d
B	a	b	c	d
C	c	b	d	a
D	d	a	b	c

a	A	B	C	D
b	B	A	D	C
c	C	B	D	A
d	D	A	B	C

.

Q1. Quelle est la solution maximisant l'efficacité totale ?

Q2. Vous êtes l'agent a et avez connaissance du tableau précédent : que faites-vous ?

Q3. Qu'en conclut-on quant à la véracité de la procédure consistant à retourner une solution maximisant l'efficacité totale ?

Exercice 4: Une stratégie pour un interne

Vous êtes interne et vous êtes classé(e) premier(ère) dans l'hôpital h. L'algorithme de Gale-Shapley côté hôpitaux est utilisé. Vous avez vu en cours que cet algorithme n'est pas à véracité garantie. L'hôpital h n'est pas votre premier choix mais de peur de perdre le bénéfice de cette place, vous décidez de placer h en premier, de manière à être sûr(e) d'avoir ce poste. Bon ou mauvais calcul ?

Exercice 5: Enchère et véracité

Un ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$ de n personnes participe à une vente aux enchères d'un objet. Chaque personne i a en tête une valeur v_i de l'objet (le prix maximum qu'elle serait à payer pour l'avoir).

Lors de la vente, chaque personne i annonce (de manière simultanée) un prix - 'bid' - noté b_i. Un mécanisme d'enchère consiste, étant donnés les b_i, à attribuer l'objet à une personne, et à donner le prix p que cette personne va payer l'objet.

Il est intéressant d'avoir un mécanisme incitant les participant à révéler leur vraie évaluation de l'objet, c'est-à-dire à déclarer comme *bid* $b_i = v_i$; cela évite les comportements stratégiques. Dans ce cadre, un mécanisme est dit à véracité garantie si une personne n'a jamais intérêt à déclarer un *bid* $b_i \neq v_i$, quels que soient les prix annoncés par les autres personnes.

Si une personne i ne reçoit pas l'objet, son utilité est $u_i = 0$. Si elle reçoit l'objet en payant un prix p, son utilité est $u_i = v_i - p$. Chaque personne cherche bien sûr à maximiser son utilité.

Nous supposerons pour simplifier que tous les prix annoncés sont différents (c'est-à-dire $b_i \neq b_j$ pour tout $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$).

Q1. On considère le mécanisme de l'enchère au meilleur prix : la personne i ayant proposé le *bid* le plus élevé remporte l'enchère et achète l'objet au *bid* annoncé $p = b_i$. Le mécanisme est-il à véracité garantie ?

Q2. On considère maintenant le mécanisme de l'enchère au deuxième prix (enchère de Vickrey) : la personne i ayant proposé le prix le plus élevé remporte l'enchère, mais elle achète maintenant l'objet au prix correspondant au 2ème *bid* annoncé le plus élevé. Ce mécanisme est-il à véracité garantie ?