

COMPLEX - Cours 9

Résolution probabiliste de problèmes SAT

Damien Vergnaud

Sorbonne Université – CNRS



Table des matières

1 MAX-E3-SAT

- MAX-3-SAT et MAX-E3-SAT
- Algorithme probabiliste pour MAX-E3-SAT
- Dérandomisation

2 2-SAT – Algorithme de Papadimitriou

- Description de l'algorithme
- Marche aléatoire
- Analyse

3 3-SAT – Algorithme de Schöning

- Description de l'algorithme
- Marche aléatoire
- Analyse

Problème 3-SAT

$$x_1 \vee x_4 \vee \neg x_6$$

$$x_2 \vee \neg x_4 \vee x_3$$

$$x_1 \vee \neg x_2 \vee x_6$$

$$x_1 \vee x_4 \vee \neg x_6$$

$$x_2 \vee \neg x_4 \vee x_3$$

$$x_1 \vee \neg x_2 \vee x_6$$

clause

littéraux

PROBLÈME 3-SAT

- ENTRÉE : une formule booléenne en n variables sous forme d'une conjonction de m clauses avec au plus 3 littéraux
- SORTIE : VRAI si il existe une assignation des variables, qui rend la formule vraie (et FAUX sinon)
- problème de décision
- « Le » problème \mathcal{NP} -difficile

Problème MAX-3-SAT

PROBLÈME MAX-3-SAT

- ENTRÉE : une formule booléenne en n variables sous forme d'une conjonction de m clauses avec au plus 3 littéraux
- SORTIE : une assignation des variables qui maximise le nombre de clauses satisfaites

Exemple.

$x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$ $\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3$ $x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$ $x_1 \vee x_2 \vee x_3$
 $x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4$ $\neg x_1 \vee x_3$ $x_1 \vee \neg x_3$ $x_1 \vee x_4$ $x_2 \vee \neg x_3$ $\neg x_2$ $\neg x_4$

Problème MAX-3-SAT

PROBLÈME MAX-3-SAT

- ENTRÉE : une formule booléenne en n variables sous forme d'une conjonction de m clauses avec au plus 3 littéraux
- SORTIE : une assignation des variables qui maximise le nombre de clauses satisfaites

Exemple.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 & \neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 & x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 & x_1 \vee x_2 \vee x_3 \\ x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & \neg x_1 \vee x_3 & x_1 \vee \neg x_3 & x_1 \vee x_4 & x_2 \vee \neg x_3 & \neg x_2 \vee \neg x_4 \end{array}$$

- $(0, 0, 0, 0) \rightsquigarrow 9$ clauses satisfaites

Problème MAX-3-SAT

PROBLÈME MAX-3-SAT

- ENTRÉE : une formule booléenne en n variables sous forme d'une conjonction de m clauses avec au plus 3 littéraux
- SORTIE : une assignation des variables qui maximise le nombre de clauses satisfaites

Exemple.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 & \neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 & x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 & x_1 \vee x_2 \vee x_3 \\ x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & \neg x_1 \vee x_3 & x_1 \vee \neg x_3 & x_1 \vee x_4 & x_2 \vee \neg x_3 & \neg x_2 \vee \neg x_4 \end{array}$$

- $(0, 0, 0, 0) \rightsquigarrow 9$ clauses satisfaites
- $(1, 1, 1, 1) \rightsquigarrow 9$ clauses satisfaites

Problème MAX-3-SAT

PROBLÈME MAX-3-SAT

- ENTRÉE : une formule booléenne en n variables sous forme d'une conjonction de m clauses avec au plus 3 littéraux
- SORTIE : une assignation des variables qui maximise le nombre de clauses satisfaites

Exemple.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 & \neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 & x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 & x_1 \vee x_2 \vee x_3 \\ x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & \neg x_1 \vee x_3 & x_1 \vee \neg x_3 & x_1 \vee x_4 & x_2 \vee \neg x_3 & \neg x_2 \vee \neg x_4 \end{array}$$

- $(0, 0, 0, 0) \rightsquigarrow 9$ clauses satisfaites
- $(1, 1, 1, 1) \rightsquigarrow 9$ clauses satisfaites
- $(1, 0, 1, 0) \rightsquigarrow 10$ clauses satisfaites (et c'est le maximum !)

Problème MAX-E3-SAT

PROBLÈME MAX-E3-SAT

- ENTRÉE : une formule booléenne en n variables sous forme d'une conjonction de m clauses avec **exactement** 3 littéraux
- SORTIE : une assignation des variables qui maximise le nombre de clauses satisfaites

Exemple.

$$\begin{array}{cccccc}x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 & \neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 & x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 & x_1 \vee x_2 \vee x_3 \\x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & \neg x_1 \vee x_2 \vee x_4 & x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4 \\\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & x_1 \vee x_2 \vee x_4 & \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & x_1 \vee x_2 \vee x_4\end{array}$$

Problème MAX-E3-SAT

PROBLÈME MAX-E3-SAT

- ENTRÉE : une formule booléenne en n variables sous forme d'une conjonction de m clauses avec **exactement** 3 littéraux
- SORTIE : une assignation des variables qui maximise le nombre de clauses satisfaites

Exemple.

$$\begin{array}{cccc} x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 & \neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 & x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 & x_1 \vee x_2 \vee x_3 \\ x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & \neg x_1 \vee x_2 \vee x_4 & x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4 \\ \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & x_1 \vee x_2 \vee x_4 & \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & x_1 \vee x_2 \vee x_4 \end{array}$$

- $(0, 0, 0, 0) \rightsquigarrow 9$ clauses satisfaites

Problème MAX-E3-SAT

PROBLÈME MAX-E3-SAT

- ENTRÉE : une formule booléenne en n variables sous forme d'une conjonction de m clauses avec **exactement** 3 littéraux
- SORTIE : une assignation des variables qui maximise le nombre de clauses satisfaites

Exemple.

$$\begin{array}{cccc} x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 & \neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 & x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 & x_1 \vee x_2 \vee x_3 \\ x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & \neg x_1 \vee x_2 \vee x_4 & x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4 \\ \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & x_1 \vee x_2 \vee x_4 & \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & x_1 \vee x_2 \vee x_4 \end{array}$$

- $(0, 0, 0, 0) \rightsquigarrow 9$ clauses satisfaites
- $(1, 1, 1, 1) \rightsquigarrow 10$ clauses satisfaites

Problème MAX-E3-SAT

PROBLÈME MAX-E3-SAT

- ENTRÉE : une formule booléenne en n variables sous forme d'une conjonction de m clauses avec **exactement** 3 littéraux
- SORTIE : une assignation des variables qui maximise le nombre de clauses satisfaites

Exemple.

$$\begin{array}{cccc} x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 & \neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 & x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 & x_1 \vee x_2 \vee x_3 \\ x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & \neg x_1 \vee x_2 \vee x_4 & x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4 \\ \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & x_1 \vee x_2 \vee x_4 & \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4 & x_1 \vee x_2 \vee x_4 \end{array}$$

- $(0, 0, 0, 0) \rightsquigarrow 9$ clauses satisfaites
- $(1, 1, 1, 1) \rightsquigarrow 10$ clauses satisfaites
- $(1, 1, 1, 0) \rightsquigarrow 12$ clauses satisfaites (et c'est le maximum !)

Problème MAX-E3-SAT

PROBLÈME MAX-E3-SAT

- ENTRÉE : une formule booléenne en n variables sous forme d'une conjonction de m clauses avec **exactement** 3 littéraux
- SORTIE : une assignation des variables qui maximise le nombre de clauses satisfaites
- 1974 – D. Johnson ; 1992 – M. Yannakakis
~~ Il existe un algorithme probabiliste polynomial de $7/8$ -approximation pour MAX-E3-SAT
- **Idée** : $x_i \leftarrow \begin{cases} \text{dice} & \{0, 1\} \end{cases}$!

Attribution aléatoire pour une clause

Considérons une clause $C = (x \vee y \vee z)$. Nous avons

$$\Pr_{(x,y,z) \in \{0,1\}^3}(C \text{ satisfaite}) = \frac{7}{8}$$

Démonstration.

x	y	z	C	x	y	z	C
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1



Attribution aléatoire pour une clause

Considérons une clause $C = (x \vee y \vee z)$. Nous avons

$$\Pr_{(x,y,z) \in \{0,1\}^3}(C \text{ satisfaite}) = \frac{7}{8}$$

Démonstration.

x	y	z	C	x	y	z	C
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1



Attribution aléatoire pour m clauses

Soient Φ une formule E3-SAT et X la variable aléatoire du nombres de clauses de Φ satisfaites par une attribution aléatoire des variables. Nous avons $\mathbb{E}(X) = 7m/8$

Démonstration.

- Notons pour $i \in \{1, \dots, m\}$, la variable aléatoire

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la clause } C_i \text{ est satisfait} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Nous avons

$$X = \sum_{i=1}^m X_i$$

Attribution aléatoire pour m clauses

Démonstration (fin).

- Par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^m [1 \cdot \Pr(X_i = 1) + 0 \cdot \Pr(X_i = 0)] \\ &= \sum_{i=1}^m \Pr(X_i = 1) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{7}{8} = \frac{7m}{8}\end{aligned}$$



Applications – Méthode probabiliste

Soient Φ une formule E3-SAT. Il existe une assignation des variables de Φ pour laquelle au moins $7m/8$ clauses sont satisfaites

Démonstration. Une variable aléatoire est supérieure ou égale à son espérance au moins une fois ... □

Une formule E3-SAT avec moins de 7 clauses est satisfiable

Démonstration.

$$\left\lceil \frac{7 \times 7}{8} \right\rceil = 7 \dots$$



Applications – Méthode probabiliste

Soient Φ une formule E3-SAT. Il existe une assignation des variables de Φ pour laquelle au moins $7m/8$ clauses sont satisfaites

Démonstration. Une variable aléatoire est supérieure ou égale à son espérance au moins une fois ... □

Une formule E3-SAT avec moins de 7 clauses est satisfiable

Démonstration.

$$\left\lceil \frac{7 \times 7}{8} \right\rceil = 7 \dots$$



Algorithme probabiliste pour MAX-E3-SAT

Entrée: Φ formule booléenne MAX-E3-SAT en n variables et m clauses
Sortie: $y \in \{0, 1\}$ tel que l'assignation y satisfait $\lceil 7m/8 \rceil$ clauses de Φ

tant que vrai faire

$$y = (y_1, \dots, y_n) \xleftarrow{\text{ } \oplus \ominus \text{ }} \{0, 1\}^n$$

si au moins $\lceil 7m/8 \rceil$ clauses de Φ sont satisfaites par y **alors**
 retourner y

fin si

fin tant que

Loi géométrique – Rappel

- **Loi de Bernoulli** X

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1, \\ 1 - p & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Loi géométrique** Y = loi du nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes nécessaire pour obtenir le premier succès

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{p}$$

Probabilité de succès

Soient Φ une formule E3-SAT et S l'événement « une assignation des variables de Φ satisfait au moins $7m/8$ des clauses de Φ .
Nous avons $p = \Pr(S) \geq 1/8m$

Démonstration.

- p_j = probabilité de satisfaire exactement j clauses de Φ
- Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{7m}{8} &= \mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^m j \cdot p_j = \sum_{0 \leq j < 7m/8} j \cdot p_j + \sum_{7m/8 \leq j < m} j \cdot p_j \\ &\leq \left(\frac{7m}{8} - \frac{1}{8}\right) \sum_{0 \leq j < 7m/8} p_j + m \sum_{7m/8 \leq j < m} p_j \\ &\leq \left(\frac{7m}{8} - \frac{1}{8}\right) + m \cdot p\end{aligned}$$

Probabilité de succès

Soient Φ une formule E3-SAT et S l'événement « une assignation des variables de Φ satisfait au moins $7m/8$ des clauses de Φ .
Nous avons $p = \Pr(S) \geq 1/8m$

Démonstration.

- p_j = probabilité de satisfaire exactement j clauses de Φ
- Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{7m}{8} &= \mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^m j \cdot p_j = \sum_{0 \leq j < 7m/8} j \cdot p_j + \sum_{7m/8 \leq j < m} j \cdot p_j \\ &\leq \left(\frac{7m}{8} - \frac{1}{8}\right) \sum_{0 \leq j < 7m/8} p_j + m \sum_{7m/8 \leq j < m} p_j \\ &\leq \left(\frac{7m}{8} - \frac{1}{8}\right) + m \cdot p\end{aligned}$$

Probabilité de succès

Soient Φ une formule E3-SAT et S l'événement « une assignation des variables de Φ satisfait au moins $7m/8$ des clauses de Φ .
Nous avons $p = \Pr(S) \geq 1/8m$

Démonstration.

- p_j = probabilité de satisfaire exactement j clauses de Φ
- Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{7m}{8} &= \mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^m j \cdot p_j = \sum_{0 \leq j < 7m/8} j \cdot p_j + \sum_{7m/8 \leq j < m} j \cdot p_j \\ &\leq \left(\frac{7m}{8} - \frac{1}{8}\right) \sum_{0 \leq j < 7m/8} p_j + m \sum_{7m/8 \leq j < m} p_j \\ &\leq \left(\frac{7m}{8} - \frac{1}{8}\right) + m \cdot p\end{aligned}$$

Probabilité de succès

Soient Φ une formule E3-SAT et S l'événement « une assignation des variables de Φ satisfait au moins $7m/8$ des clauses de Φ .

Nous avons $p = \Pr(S) \geq 1/8m$

Démonstration.

- p_j = probabilité de satisfaire exactement j clauses de Φ
- Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{7m}{8} &= \mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^m j \cdot p_j = \sum_{0 \leq j < 7m/8} j \cdot p_j + \sum_{7m/8 \leq j < m} j \cdot p_j \\ &\leq \left(\frac{7m}{8} - \frac{1}{8}\right) \sum_{0 \leq j < 7m/8} p_j + m \sum_{7m/8 \leq j < m} p_j \\ &\leq \left(\frac{7m}{8} - \frac{1}{8}\right) + m \cdot p\end{aligned}$$

Probabilité de succès

Soient Φ une formule E3-SAT et S l'événement « une assignation des variables de Φ satisfait au moins $7m/8$ des clauses de Φ .
Nous avons $p = \Pr(S) \geq 1/8m$

Démonstration.

- p_j = probabilité de satisfaire exactement j clauses de Φ
- Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{7m}{8} &= \mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^m j \cdot p_j = \sum_{0 \leq j < 7m/8} j \cdot p_j + \sum_{7m/8 \leq j < m} j \cdot p_j \\ &\leq \left(\frac{7m}{8} - \frac{1}{8}\right) \sum_{0 \leq j < 7m/8} p_j + m \sum_{7m/8 \leq j < m} p_j \\ &\leq \left(\frac{7m}{8} - \frac{1}{8}\right) + m \cdot p\end{aligned}$$

Probabilité de succès

Soient Φ une formule E3-SAT et S l'événement « une assignation des variables de Φ satisfait au moins $7m/8$ des clauses de Φ .
Nous avons $p = \Pr(S) \geq 1/8m$

Démonstration.

- p_j = probabilité de satisfaire exactement j clauses de Φ
- Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{7m}{8} &= \mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^m j \cdot p_j = \sum_{0 \leq j < 7m/8} j \cdot p_j + \sum_{7m/8 \leq j < m} j \cdot p_j \\ &\leq \left(\frac{7m}{8} - \frac{1}{8} \right) \sum_{0 \leq j < 7m/8} p_j + m \sum_{7m/8 \leq j < m} p_j \\ &\leq \left(\frac{7m}{8} - \frac{1}{8} \right) + m \cdot p\end{aligned}$$

Probabilité de succès

Soient Φ une formule E3-SAT et S l'événement « une assignation des variables de Φ satisfait au moins $7m/8$ des clauses de Φ .
Nous avons $p = \Pr(S) \geq 1/8m$

Démonstration.

- p_j = probabilité de satisfaire exactement j clauses de Φ
- Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{7m}{8} &= \mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^m j \cdot p_j = \sum_{0 \leq j < 7m/8} j \cdot p_j + \sum_{7m/8 \leq j < m} j \cdot p_j \\ &\leq \left(\frac{7m}{8} - \frac{1}{8} \right) \sum_{0 \leq j < 7m/8} p_j + m \sum_{7m/8 \leq j < m} p_j \\ &\leq \left(\frac{7m}{8} - \frac{1}{8} \right) + m \cdot p\end{aligned}$$

Algorithme probabiliste pour MAX-E3-SAT

Entrée: Φ formule booléenne MAX-E3-SAT en n variables et m clauses

Sortie: $y \in \{0, 1\}$ tel que l'assignation y satisfait $\lceil 7m/8 \rceil$ clauses de Φ

tant que vrai faire

$$y = (y_1, \dots, y_n) \xleftarrow{\text{ } \square \square \text{ }} \{0, 1\}^n$$

si au moins $\lceil 7m/8 \rceil$ clauses de Φ sont satisfaites par y **alors**

retourner y

fin si

fin tant que

Complexité en moyenne : $O(m^2)$

▷ 8m répétitions en moyenne

Probabilité d'erreur : 0

Algorithme de type Las Vegas

Algorithme probabiliste pour MAX-E3-SAT

Entrée: Φ formule booléenne MAX-E3-SAT en n variables et m clauses

Sortie: $y \in \{0, 1\}$ tel que l'assignation y satisfait $\lceil 7m/8 \rceil$ clauses de Φ

tant que vrai faire

$$y = (y_1, \dots, y_n) \xleftarrow{\text{ } \square \square \text{ }} \{0, 1\}^n$$

si au moins $\lceil 7m/8 \rceil$ clauses de Φ sont satisfaites par y **alors**

retourner y

fin si

fin tant que

Complexité en moyenne : $O(m^2)$

▷ 8m répétitions en moyenne

Probabilité d'erreur : 0

Algorithme de type Las Vegas

Algorithme probabiliste pour MAX-E3-SAT

Entrée: Φ formule booléenne MAX-E3-SAT en n variables et m clauses

Sortie: $y \in \{0, 1\}$ tel que l'assignation y satisfait $\lceil 7m/8 \rceil$ clauses de Φ

tant que vrai faire

$$y = (y_1, \dots, y_n) \xleftarrow{\text{ } \square \square \text{ }} \{0, 1\}^n$$

si au moins $\lceil 7m/8 \rceil$ clauses de Φ sont satisfaites par y **alors**

retourner y

fin si

fin tant que

Complexité en moyenne : $O(m^2)$

$\triangleright 8m$ répétitions en moyenne

Probabilité d'erreur : 0

Algorithme de type Las Vegas

Pour aller plus loin ...

- Extensions possibles
 - Algorithme probabiliste d'approximation pour MAX-3-SAT (et non pas MAX-E3-SAT) – (cf. TD)
 - Algorithme probabiliste avec des poids sur les clauses
- 1997, H. J. Karloff, U. Zwick
 - ~~ Il existe un algorithme probabiliste polynomial de 7/8-approximation pour MAX-3-SAT.
- 1997, J. Håstad
 - ~~ Si $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, il n'existe pas d'algorithme probabiliste polynomial de c -approximation avec $c > 7/8$ pour MAX-3-SAT.

Pour aller plus loin ...

- Extensions possibles
 - Algorithme probabiliste d'approximation pour MAX-3-SAT (et non pas MAX-E3-SAT) – (cf. TD)
 - Algorithme probabiliste avec des poids sur les clauses
- 1997, H. J. Karloff, U. Zwick
 - ~~ Il existe un algorithme probabiliste polynomial de 7/8-approximation pour MAX-3-SAT.
- 1997, J. Håstad
 - ~~ Si $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, il n'existe pas d'algorithme probabiliste polynomial de c -approximation avec $c > 7/8$ pour MAX-3-SAT.

Pour aller plus loin ...

- Extensions possibles
 - Algorithme probabiliste d'approximation pour MAX-3-SAT (et non pas MAX-E3-SAT) – (cf. TD)
 - Algorithme probabiliste avec des poids sur les clauses
- 1997, H. J. Karloff, U. Zwick
 - ~~ Il existe un algorithme probabiliste polynomial de 7/8-approximation pour MAX-3-SAT.
- 1997, J. Håstad
 - ~~ Si $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, il n'existe pas d'algorithme probabiliste polynomial de c -approximation avec $c > 7/8$ pour MAX-3-SAT.

Dérandomisation

- L'aléatoire permet d'obtenir des algorithmes parfois plus efficaces, souvent plus simples mais l'aléa n'est **pas gratuit**
- Éliminer (ou limiter) l'aléatoire dans un algorithme probabiliste est un sujet de recherche important appelé **dérandomisation**
- L'algorithme de Johnson de 1974 est une version **dérandomisée** de l'algorithme que nous venons de voir
 - repose sur la même idée que la **méthode probabiliste**
 - c'est la **méthode des espérances conditionnelles**

Dérandomisation

- L'aléatoire permet d'obtenir des algorithmes parfois plus efficaces, souvent plus simples mais l'aléa n'est **pas gratuit**
- Éliminer (ou limiter) l'aléatoire dans un algorithme probabiliste est un sujet de recherche important appelé **dérandomisation**
- L'algorithme de Johnson de 1974 est une version **dérandomisée** de l'algorithme que nous venons de voir
 - repose sur la même idée que la **méthode probabiliste**
 - c'est la **méthode des espérances conditionnelles**

Dérandomisation

- L'aléatoire permet d'obtenir des algorithmes parfois plus efficaces, souvent plus simples mais l'aléa n'est **pas gratuit**
- Éliminer (ou limiter) l'aléatoire dans un algorithme probabiliste est un sujet de recherche important appelé **dérandomisation**
- L'algorithme de Johnson de 1974 est une version **dérandomisée** de l'algorithme que nous venons de voir
 - repose sur la même idée que la **méthode probabiliste**
 - c'est la **méthode des espérances conditionnelles**

Méthode des espérances conditionnelles (1/3)

- Soit Φ une formule E3-SAT en n variables x_1, \dots, x_n
Soit X la variable aléatoire du nombres de clauses de Φ satisfaites par une assignation aléatoire des variables.
- Par la formule des probabilités conditionnelles ($k \in \{0, \dots, m\}$)

$$\begin{aligned}\Pr(X = k) &= \Pr(x_1 = 0) \cdot \Pr(X = k|x_1 = 0) + \Pr(x_1 = 1) \cdot \Pr(X = k|x_1 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \Pr(X = k|x_1 = 0) + \frac{1}{2} \cdot \Pr(X = k|x_1 = 1)\end{aligned}$$

- Nous obtenons pour l'espérance

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X|x_1 = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X|x_1 = 1)$$

Méthode des espérances conditionnelles (2/3)

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X|x_1 = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X|x_1 = 1)$$

- Nous avons donc

$$\mathbb{E}(X|x_1 = 0) \geq \mathbb{E}(X) \text{ ou } \mathbb{E}(X|x_1 = 1) \geq \mathbb{E}(X)$$

(les deux sont possibles)

- **Algorithme déterministe**

- choisir $x_1 \in \{0, 1\}$ pour lequel l'espérance conditionnelle est maximale $\rightsquigarrow x_1 = b$
- appliquer récursivement cette idée à la formule $\Phi' = \Phi|_{x_1=b}$

Méthode des espérances conditionnelles (3/3)

- $\ell_i \vee \ell_j \vee \ell_k$ (avec $i \notin \{j, k\}$)
~~~ la clause est satisfaite avec probabilité  $7/8$
- $x_1 \vee \ell_j \vee \ell_k$  (avec  $1 \notin \{j, k\}$ )
  - $x_1 = 1 \rightsquigarrow$  la clause est satisfaite avec probabilité 1
  - $x_1 = 0 \rightsquigarrow \ell_j \vee \ell_k \rightsquigarrow$  la clause est satisfaite avec probabilité  $3/4$
- $\neg x_1 \vee \ell_j \vee \ell_k$  (avec  $1 \notin \{j, k\}$ )
  - $x_1 = 1 \rightsquigarrow \ell_j \vee \ell_k \rightsquigarrow$  la clause est satisfaite avec probabilité  $3/4$
  - $x_1 = 0 \rightsquigarrow$  la clause est satisfaite avec probabilité 1

Le calcul de  $\mathbb{E}(X|x_1 = 0)$  et  $\mathbb{E}(X|x_1 = 1)$  peut donc se faire en  $O(m)$  opérations élémentaires

Complexité :  $O(m \cdot n)$

## Méthode des espérances conditionnelles (3/3)

- $\ell_i \vee \ell_j \vee \ell_k$  (avec  $1 \notin \{i, j, k\}$ )  
~~~ la clause est satisfaite avec probabilité  $7/8$
- $x_1 \vee \ell_j \vee \ell_k$ (avec $1 \notin \{j, k\}$)
 - $x_1 = 1 \rightsquigarrow$ la clause est satisfaite avec probabilité 1
 - $x_1 = 0 \rightsquigarrow \ell_j \vee \ell_k \rightsquigarrow$ la clause est satisfaite avec probabilité $3/4$
- $\neg x_1 \vee \ell_j \vee \ell_k$ (avec $1 \notin \{j, k\}$)
 - $x_1 = 1 \rightsquigarrow \ell_j \vee \ell_k \rightsquigarrow$ la clause est satisfaite avec probabilité $3/4$
 - $x_1 = 0 \rightsquigarrow$ la clause est satisfaite avec probabilité 1

Le calcul de $\mathbb{E}(X|x_1 = 0)$ et $\mathbb{E}(X|x_1 = 1)$ peut donc se faire en $O(m)$ opérations élémentaires

Complexité : $O(m \cdot n)$

Méthode des espérances conditionnelles (3/3)

- $\ell_i \vee \ell_j \vee \ell_k$ (avec $1 \notin \{i, j, k\}$)
~~~ la clause est satisfaite avec probabilité  $7/8$
- $x_1 \vee \ell_j \vee \ell_k$  (avec  $1 \notin \{j, k\}$ )
  - $x_1 = 1 \rightsquigarrow$  la clause est satisfaite avec probabilité 1
  - $x_1 = 0 \rightsquigarrow \ell_j \vee \ell_k \rightsquigarrow$  la clause est satisfaite avec probabilité  $3/4$
- $\neg x_1 \vee \ell_j \vee \ell_k$  (avec  $1 \notin \{j, k\}$ )
  - $x_1 = 1 \rightsquigarrow \ell_j \vee \ell_k \rightsquigarrow$  la clause est satisfaite avec probabilité  $3/4$
  - $x_1 = 0 \rightsquigarrow$  la clause est satisfaite avec probabilité 1

Le calcul de  $\mathbb{E}(X|x_1 = 0)$  et  $\mathbb{E}(X|x_1 = 1)$  peut donc se faire en  $O(m)$  opérations élémentaires

Complexité :  $O(m \cdot n)$

## Méthode des espérances conditionnelles (3/3)

- $\ell_i \vee \ell_j \vee \ell_k$  (avec  $1 \notin \{i, j, k\}$ )  
~~~ la clause est satisfaite avec probabilité  $7/8$
- $x_1 \vee \ell_j \vee \ell_k$ (avec $1 \notin \{j, k\}$)
 - $x_1 = 1 \rightsquigarrow$ la clause est satisfaite avec probabilité 1
 - $x_1 = 0 \rightsquigarrow \ell_j \vee \ell_k \rightsquigarrow$ la clause est satisfaite avec probabilité $3/4$
- $\neg x_1 \vee \ell_j \vee \ell_k$ (avec $1 \notin \{j, k\}$)
 - $x_1 = 1 \rightsquigarrow \ell_j \vee \ell_k \rightsquigarrow$ la clause est satisfaite avec probabilité $3/4$
 - $x_1 = 0 \rightsquigarrow$ la clause est satisfaite avec probabilité 1

Le calcul de $\mathbb{E}(X|x_1 = 0)$ et $\mathbb{E}(X|x_1 = 1)$ peut donc se faire en $O(m)$ opérations élémentaires

Complexité : $O(m \cdot n)$

Méthode des espérances conditionnelles (3/3)

- $\ell_i \vee \ell_j \vee \ell_k$ (avec $1 \notin \{i, j, k\}$)
~~~ la clause est satisfaite avec probabilité  $7/8$
- $x_1 \vee \ell_j \vee \ell_k$  (avec  $1 \notin \{j, k\}$ )
  - $x_1 = 1 \rightsquigarrow$  la clause est satisfaite avec probabilité 1
  - $x_1 = 0 \rightsquigarrow \ell_j \vee \ell_k \rightsquigarrow$  la clause est satisfaite avec probabilité  $3/4$
- $\neg x_1 \vee \ell_j \vee \ell_k$  (avec  $1 \notin \{j, k\}$ )
  - $x_1 = 1 \rightsquigarrow \ell_j \vee \ell_k \rightsquigarrow$  la clause est satisfaite avec probabilité  $3/4$
  - $x_1 = 0 \rightsquigarrow$  la clause est satisfaite avec probabilité 1

Le calcul de  $\mathbb{E}(X|x_1 = 0)$  et  $\mathbb{E}(X|x_1 = 1)$  peut donc se faire en  $O(m)$  opérations élémentaires

Complexité :  $O(m \cdot n)$

# Table des matières

## 1 MAX-E3-SAT

- MAX-3-SAT et MAX-E3-SAT
- Algorithme probabiliste pour MAX-E3-SAT
- Dérandomisation

## 2 2-SAT – Algorithme de Papadimitriou

- Description de l'algorithme
- Marche aléatoire
- Analyse

## 3 3-SAT – Algorithme de Schöning

- Description de l'algorithme
- Marche aléatoire
- Analyse

# Problème 2-SAT

## Problème 2-SAT

- ENTRÉE : une formule booléenne en  $n$  variables sous forme d'une conjonction de  $m$  clauses avec au plus 2 littéraux
- SORTIE : VRAI si il existe une assignation des variables, qui rend la formule vraie (et FAUX sinon)

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- problème de décision
- problème dans  $\mathcal{P}$  (même linéaire !)
- 1991 – C. H. Papadimitriou  
~~> algorithme probabiliste cubique par **marche aléatoire**

# Algorithme de Papadimitriou

**Entrée:** Formule  $\Phi$  de  $m$  clauses  $C_1, \dots, C_m$  en  $n$  variables

$x_1, \dots, x_n : T \in \mathbb{N}$

**Sortie:** SATISFIABLE ou NON SATISFIABLE

$$y = (y_1, \dots, y_n) \xleftarrow{\text{?}} \{0, 1\}^n$$

**pour**  $i$  de 1 à  $T$  faire

**si**  $\Phi(y) = 0$  alors

considérer une clause  $C_t$  (arbitraire) non satisfaite de  $\Phi$

$j \xleftarrow{\text{?}} \text{VARIABLES}(C_t)$   $\triangleright$  tirage d'une variable dans  $C_t$

$y_j \leftarrow 1 - y_j$   $\triangleright$  changement de la valeur de  $y_j$

**sinon**

**retourner** SATISFIABLE

**fin si**

**fin pour**

**retourner** NON SATISFIABLE

# Algorithme de Papadimitriou

- L'algorithme termine toujours après  $T$  répétition de la boucle **pour ... faire**

Complexité :  $O(Tm)$

- Si l'algorithme retourne SATISFIABLE, alors  $\Phi$  est satisfiable
- Si l'algorithme retourne NON SATISFIABLE, alors  $\Phi$  est peut-être satisfiable

Probabilité d'erreur ?? (dépend notamment de  $T$ )

Algorithme de type Monte-Carlo

# Algorithme de Papadimitriou

- L'algorithme termine toujours après  $T$  répétition de la boucle  
**pour ... faire**

Complexité :  $O(Tm)$

- Si l'algorithme retourne SATISFIABLE, alors  $\Phi$  est satisfiable
- Si l'algorithme retourne NON SATISFIABLE, alors  $\Phi$  est peut-être satisfiable

Probabilité d'erreur ?? (dépend notamment de  $T$ )

Algorithme de type Monte-Carlo

# Algorithme de Papadimitriou

- L'algorithme termine toujours après  $T$  répétition de la boucle  
**pour ... faire**

Complexité :  $O(Tm)$

- Si l'algorithme retourne SATISFIABLE, alors  $\Phi$  est satisfiable
- Si l'algorithme retourne NON SATISFIABLE, alors  $\Phi$  est peut-être satisfiable

Probabilité d'erreur ?? (dépend notamment de  $T$ )

Algorithme de type Monte-Carlo

## Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

# Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- Tirage initial :  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$

## Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- Tirage initial :  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$

## Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- Tirage initial :  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_0 \vee x_2)$

## Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- Tirage initial :  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_0 \vee x_2) \rightsquigarrow x_0$

# Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- Tirage initial :  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_0 \vee x_2) \rightsquigarrow x_0$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$

# Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- Tirage initial :  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_0 \vee x_2) \rightsquigarrow x_0$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_2 \vee \neg x_5)$

# Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- Tirage initial :  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_0 \vee x_2) \rightsquigarrow x_0$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_2 \vee \neg x_5) \rightsquigarrow x_5$

## Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- Tirage initial :  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_0 \vee x_2) \rightsquigarrow x_0$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_2 \vee \neg x_5) \rightsquigarrow x_5$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$

# Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- Tirage initial :  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_0 \vee x_2) \rightsquigarrow x_0$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_2 \vee \neg x_5) \rightsquigarrow x_5$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \rightsquigarrow (x_3 \vee x_6)$

# Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- Tirage initial :  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_0 \vee x_2) \rightsquigarrow x_0$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_2 \vee \neg x_5) \rightsquigarrow x_5$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \rightsquigarrow (x_3 \vee x_6) \rightsquigarrow x_3$

# Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- Tirage initial :  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_0 \vee x_2) \rightsquigarrow x_0$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_2 \vee \neg x_5) \rightsquigarrow x_5$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \rightsquigarrow (x_3 \vee x_6) \rightsquigarrow x_3$
- $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$

# Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- Tirage initial :  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_0 \vee x_2) \rightsquigarrow x_0$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_2 \vee \neg x_5) \rightsquigarrow x_5$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \rightsquigarrow (x_3 \vee x_6) \rightsquigarrow x_3$
- $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0) \rightsquigarrow (x_4 \vee x_6)$

# Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- Tirage initial :  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_0 \vee x_2) \rightsquigarrow x_0$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_2 \vee \neg x_5) \rightsquigarrow x_5$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \rightsquigarrow (x_3 \vee x_6) \rightsquigarrow x_3$
- $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0) \rightsquigarrow (x_4 \vee x_6) \rightsquigarrow x_6$

# Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- Tirage initial :  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_0 \vee x_2) \rightsquigarrow x_0$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_2 \vee \neg x_5) \rightsquigarrow x_5$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \rightsquigarrow (x_3 \vee x_6) \rightsquigarrow x_3$
- $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0) \rightsquigarrow (x_4 \vee x_6) \rightsquigarrow x_6$
- $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$

# Exemple d'exécution

$$(x_0 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \\ (x_0 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee x_6).$$

- Tirage initial :  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
- $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_0 \vee x_2) \rightsquigarrow x_0$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \rightsquigarrow (x_2 \vee \neg x_5) \rightsquigarrow x_5$
- $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \rightsquigarrow (x_3 \vee x_6) \rightsquigarrow x_3$
- $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0) \rightsquigarrow (x_4 \vee x_6) \rightsquigarrow x_6$
- $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 1) \rightsquigarrow \text{SATISFIABLE}$

# Marche aléatoire (1/2)

Supposons que  $\Phi$  est satisfiable ; soit  $y^*$  tel que  $\Phi(y^*) = 1$

Notons  $M(y, y^*)$  le nombre de coordonnées de  $y$  et  $y^*$  égales

- Si  $M(y, y^*) = n$ ,  $\Phi(y) = \Phi(y^*) = 1$  et l'algorithme s'arrête !
- Si  $\Phi(y) = 0$ , alors  $M(y, y^*) < n$ 
  - au moins une clause n'est pas satisfaite  $\rightsquigarrow C_t = \ell_i \vee \ell_j$
  - avec  $y$ ,  $\ell_i = 0$  et  $\ell_j = 0$
  - avec  $y^*$ ,  $\ell_i = 1$  ou  $\ell_j = 1$
  - l'algorithme modifie  $y$  en changeant aléatoirement  $y_i$  ou  $y_j$   
 $M(y, y^*)$  augmente de 1 avec probabilité  $\geq 1/2$   
 $M(y, y^*)$  diminue de 1 avec probabilité  $\leq 1/2$

# Marche aléatoire (1/2)

Supposons que  $\Phi$  est satisfiable ; soit  $y^*$  tel que  $\Phi(y^*) = 1$

Notons  $M(y, y^*)$  le nombre de coordonnées de  $y$  et  $y^*$  égales

- Si  $M(y, y^*) = n$ ,  $\Phi(y) = \Phi(y^*) = 1$  et l'algorithme s'arrête !
- Si  $\Phi(y) = 0$ , alors  $M(y, y^*) < n$ 
  - au moins une clause n'est pas satisfaite  $\rightsquigarrow C_t = \ell_i \vee \ell_j$
  - avec  $y$ ,  $\ell_i = 0$  et  $\ell_j = 0$
  - avec  $y^*$ ,  $\ell_i = 1$  ou  $\ell_j = 1$
  - l'algorithme modifie  $y$  en changeant aléatoirement  $y_i$  ou  $y_j$   
 $M(y, y^*)$  augmente de 1 avec probabilité  $\geq 1/2$   
 $M(y, y^*)$  diminue de 1 avec probabilité  $\leq 1/2$

## Marche aléatoire (1/2)

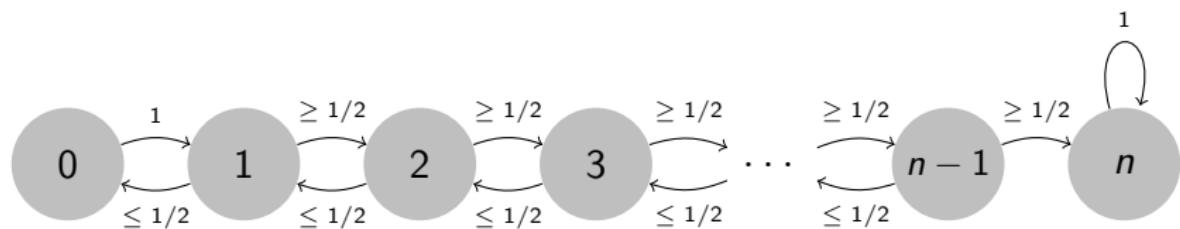
Supposons que  $\Phi$  est satisfiable ; soit  $y^*$  tel que  $\Phi(y^*) = 1$

Notons  $M(y, y^*)$  le nombre de coordonnées de  $y$  et  $y^*$  égales

- Si  $M(y, y^*) = n$ ,  $\Phi(y) = \Phi(y^*) = 1$  et l'algorithme s'arrête !
- Si  $\Phi(y) = 0$ , alors  $M(y, y^*) < n$ 
  - au moins une clause n'est pas satisfaite  $\rightsquigarrow C_t = \ell_i \vee \ell_j$
  - avec  $y$ ,  $\ell_i = 0$  et  $\ell_j = 0$
  - avec  $y^*$ ,  $\ell_i = 1$  ou  $\ell_j = 1$
  - l'algorithme modifie  $y$  en changeant aléatoirement  $y_i$  ou  $y_j$   
 $M(y, y^*)$  augmente de 1 avec probabilité  $\geq 1/2$   
 $M(y, y^*)$  diminue de 1 avec probabilité  $\leq 1/2$

# Marche aléatoire (2/2)

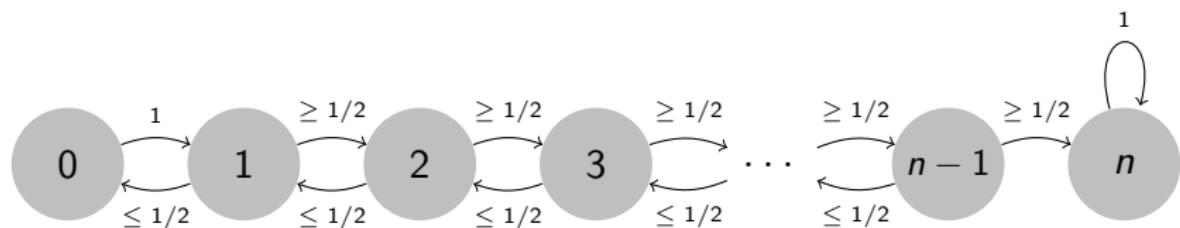
- Nous interprétons le comportement de l'algorithme comme une **marche aléatoire dans un graphe**



- Au départ  $M(y, y^*)$  prend n'importe quelle valeur de  $\{0, \dots, n\}$
- À chaque étape  $M(y, y^*)$  varie de  $\pm 1$
- Combien de temps pour atteindre le sommet  $n$  ?**

## Marche aléatoire (2/2)

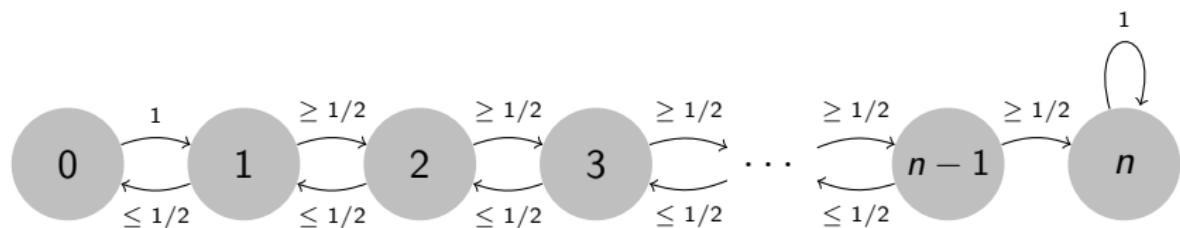
- Nous interprétons le comportement de l'algorithme comme une **marche aléatoire dans un graphe**



- Au départ  $M(y, y^*)$  prend n'importe quelle valeur de  $\{0, \dots, n\}$
- À chaque étape  $M(y, y^*)$  varie de  $\pm 1$
- Combien de temps pour atteindre le sommet  $n$  ?

## Marche aléatoire (2/2)

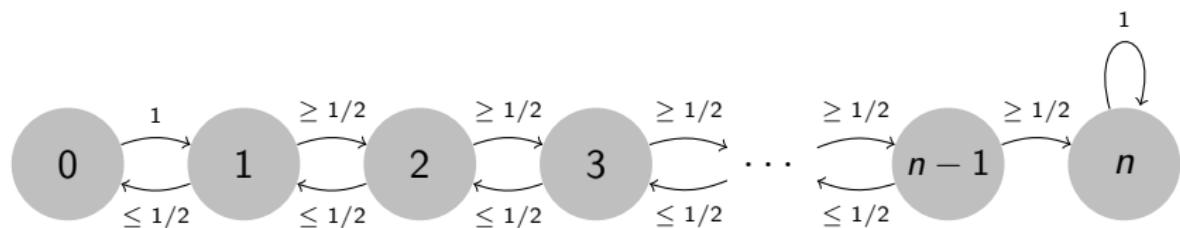
- Nous interprétons le comportement de l'algorithme comme une **marche aléatoire dans un graphe**



- Au départ  $M(y, y^*)$  prend n'importe quelle valeur de  $\{0, \dots, n\}$
- À chaque étape  $M(y, y^*)$  varie de  $\pm 1$
- Combien de temps pour atteindre le sommet  $n$  ?

## Marche aléatoire (2/2)

- Nous interprétons le comportement de l'algorithme comme une **marche aléatoire** dans un graphe



- Au départ  $M(y, y^*)$  prend n'importe quelle valeur de  $\{0, \dots, n\}$
- À chaque étape  $M(y, y^*)$  varie de  $\pm 1$
- **Combien de temps pour atteindre le sommet  $n$  ?**

# Algorithme de Papadimitriou modifié

## Modification formelle de l'algorithme

$$y = (y_1, \dots, y_n) \xleftarrow{\text{?}} \{0, 1\}^n$$

**tant que** vrai faire

**si**  $y \neq y^*$  **alors**

        considérer une clause  $C_t$  (arbitraire) non satisfaite de  $\Phi$

$$j \xleftarrow{\text{?}} \text{VARIABLES}(C_t)$$

        ▷ tirage d'une variable dans  $C_t$

$$y_j \leftarrow 1 - y_j$$

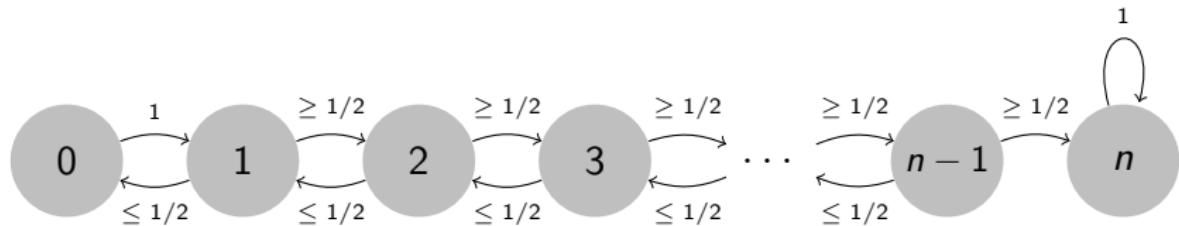
        ▷ changement de la valeur de  $y_j$

**fin si**

**fin tant que**

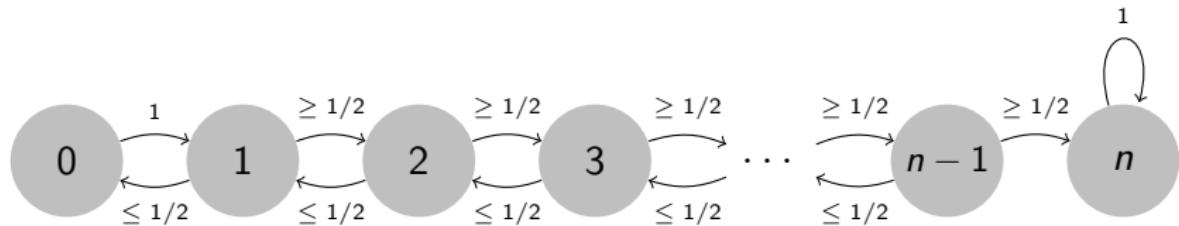
- Si cet « algorithme » s'arrête en moins de  $T$  étapes, l'algorithme de Papadimitriou retourne SATISFIABLE

# Analyse (1/6)



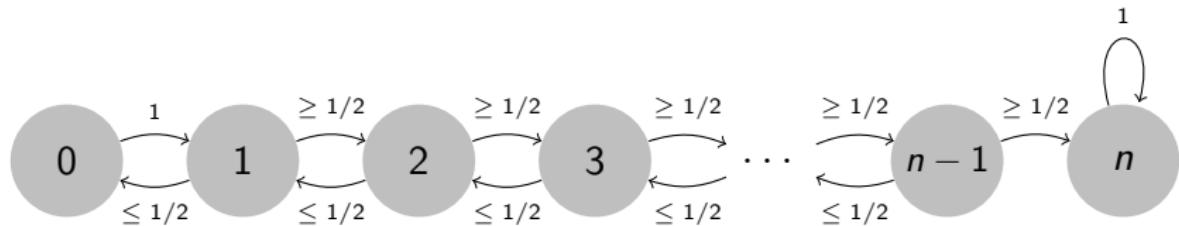
- $Z_j$  = v.a. du nombre d'étapes pour atteindre  $n$  à partir de  $j$
- $Z_n = 0$ ;  $Z_0 = 1 + Z_1$
- $Z_i \geq Z_j$  pour  $i \leq j$
- **Intuition :** «  $Z_j = 1 + Z_{j+1}$  avec probabilité  $\geq 1/2$  »  
«  $Z_j = 1 + Z_{j-1}$  avec probabilité  $\leq 1/2$  »

# Analyse (1/6)



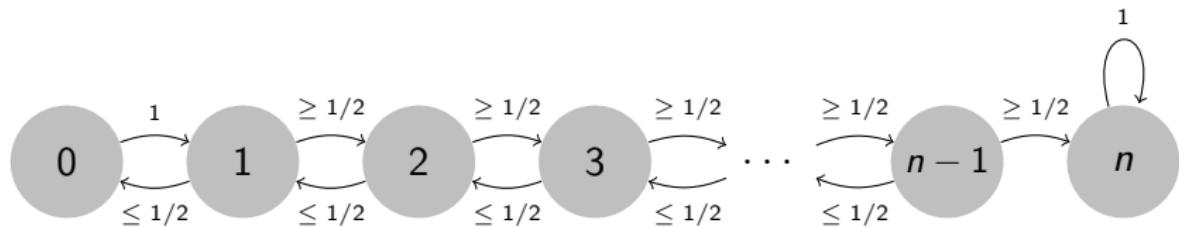
- $Z_j$  = v.a. du nombre d'étapes pour atteindre  $n$  à partir de  $j$
- $Z_n = 0$  ;  $Z_0 = 1 + Z_1$
- $Z_i \geq Z_j$  pour  $i \leq j$
- **Intuition :** «  $Z_j = 1 + Z_{j+1}$  avec probabilité  $\geq 1/2$  »  
«  $Z_j = 1 + Z_{j-1}$  avec probabilité  $\leq 1/2$  »

# Analyse (1/6)



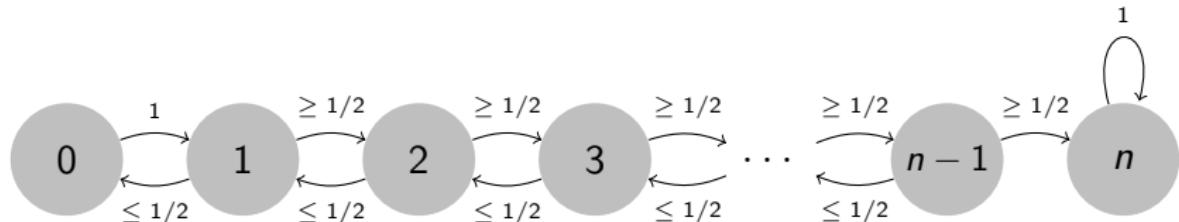
- $Z_j$  = v.a. du nombre d'étapes pour atteindre  $n$  à partir de  $j$
- $Z_n = 0$ ;  $Z_0 = 1 + Z_1$
- $Z_i \geq Z_j$  pour  $i \leq j$
- **Intuition :** «  $Z_j = 1 + Z_{j+1}$  avec probabilité  $\geq 1/2$  »  
«  $Z_j = 1 + Z_{j-1}$  avec probabilité  $\leq 1/2$  »

# Analyse (1/6)



- $Z_j$  = v.a. du nombre d'étapes pour atteindre  $n$  à partir de  $j$
- $Z_n = 0$ ;  $Z_0 = 1 + Z_1$
- $Z_i \geq Z_j$  pour  $i \leq j$
- **Intuition :** «  $Z_j = 1 + Z_{j+1}$  avec probabilité  $\geq 1/2$  »  
«  $Z_j = 1 + Z_{j-1}$  avec probabilité  $\leq 1/2$  »

## Analyse (2/6)



- Posons  $h_j = \mathbb{E}(Z_j)$ . Nous allons montrer  $h_j \leq n^2$
- $h_n = \mathbb{E}(Z_n) = 0$
- $h_0 = \mathbb{E}(Z_0) = \mathbb{E}(1 + Z_1) = 1 + h_1$
- Notons  $p$  la probabilité de passer de  $j$  à  $j + 1$  (avec  $p \geq 1/2$ ) :

$$h_j = \mathbb{E}(Z_j) = p \cdot \mathbb{E}(1 + Z_{j+1}) + (1 - p) \cdot \mathbb{E}(1 + Z_{j-1})$$

# Analyse (3/6)

$$h_j = \mathbb{E}(Z_j) = p \cdot (1 + h_{j+1}) + (1 - p) \cdot (1 + h_{j-1}) \text{ avec } p \geq 1/2$$

- $Z_i \geq Z_j$  pour  $i \leq j \rightsquigarrow Z_{j+1} \leq Z_{j-1} \rightsquigarrow h_{j+1} \leq h_{j-1}$
- L'expression est minimale pour  $p = 1/2$  et

$$h_j \leq \frac{1}{2}(1 + h_{j+1}) + \frac{1}{2} \cdot (1 + h_{j-1}) = 1 + \frac{1}{2}h_{j+1} + \frac{1}{2}h_{j-1}$$

- Par récurrence, pour  $j \in \{0, \dots, n-1\}$

$$h_j \leq h_{j+1} + 2j + 1$$

## Analyse (3/6)

$$h_j = \mathbb{E}(Z_j) = p \cdot (1 + h_{j+1}) + (1 - p) \cdot (1 + h_{j-1}) \text{ avec } p \geq 1/2$$

- $Z_i \geq Z_j$  pour  $i \leq j \rightsquigarrow Z_{j+1} \leq Z_{j-1} \rightsquigarrow h_{j+1} \leq h_{j-1}$
- L'expression est minimale pour  $p = 1/2$  et

$$h_j \leq \frac{1}{2}(1 + h_{j+1}) + \frac{1}{2} \cdot (1 + h_{j-1}) = 1 + \frac{1}{2}h_{j+1} + \frac{1}{2}h_{j-1}$$

- Par récurrence, pour  $j \in \{0, \dots, n-1\}$

$$h_j \leq h_{j+1} + 2j + 1$$

## Analyse (3/6)

$$h_j = \mathbb{E}(Z_j) = p \cdot (1 + h_{j+1}) + (1 - p) \cdot (1 + h_{j-1}) \text{ avec } p \geq 1/2$$

- $Z_i \geq Z_j$  pour  $i \leq j \rightsquigarrow Z_{j+1} \leq Z_{j-1} \rightsquigarrow h_{j+1} \leq h_{j-1}$
- L'expression est minimale pour  $p = 1/2$  et

$$h_j \leq \frac{1}{2}(1 + h_{j+1}) + \frac{1}{2} \cdot (1 + h_{j-1}) = 1 + \frac{1}{2}h_{j+1} + \frac{1}{2}h_{j-1}$$

- Par récurrence, pour  $j \in \{0, \dots, n-1\}$

$$h_j \leq h_{j+1} + 2j + 1$$

# Analyse (4/6)

$$h_j \leq h_{j+1} + 2j + 1$$

En effet,

- $h_0 = 1 + h_1 = h_1 + 2 \cdot 0 + 1$
- Par l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} h_j &\leq 1 + \frac{1}{2}h_{j+1} + \frac{1}{2}h_{j-1} \leq 1 + \frac{1}{2}h_{j+1} + \frac{1}{2}(h_j + 2(j-1) + 1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}h_{j+1} + \frac{1}{2}h_j + (j-1) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et

$$h_j - \frac{1}{2}h_j \leq \frac{1}{2}h_{j+1} + j + \frac{1}{2}$$

## Analyse (5/6)

- Nous avons  $h_n = 0$  et pour  $j \in \{0, \dots, n-1\}$

$$h_j \leq h_{j+1} + 2j + 1$$

donc

$$\begin{aligned} h_j &\leq h_{j+1} + 2j + 1 \\ &\leq h_{j+2} + (2(j+1) + 1) + (2j + 1) \\ &\leq h_{j+3} + (2(j+2) + 1) + (2(j+1) + 1) + (2j + 1) \\ &\leq \dots \\ &\leq h_n + (2(n-1) + 1) + \dots + (2j + 1) \end{aligned}$$

et

$$h_j \leq \sum_{k=j}^{n-1} (2k + 1) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1) = n + n(n-1) = n^2$$

# Analyse (6/6)

- Nous avons pour  $j \in \{0, \dots, n\}$

$$\mathbb{E}(Z_j) = h_j \leq n^2$$

- L'algorithme modifié termine donc en  $n^2$  répétitions de la boucle  
tant que ... faire
- Comment fixer  $T$  dans l'algorithme de Papadimitriou  
pour assurer une bonne probabilité de succès ?  
Inégalité de Markov !

# Analyse (6/6)

- Nous avons pour  $j \in \{0, \dots, n\}$

$$\mathbb{E}(Z_j) = h_j \leq n^2$$

- L'algorithme modifié termine donc en  $n^2$  répétitions de la boucle  
**tant que ... faire**
- Comment fixer  $T$  dans l'algorithme de Papadimitriou pour assurer une bonne probabilité de succès ?  
Inégalité de Markov !

# Analyse (6/6)

- Nous avons pour  $j \in \{0, \dots, n\}$

$$\mathbb{E}(Z_j) = h_j \leq n^2$$

- L'algorithme modifié termine donc en  $n^2$  répétitions de la boucle  
**tant que ... faire**
- **Comment fixer  $T$  dans l'algorithme de Papadimitriou pour assurer une bonne probabilité de succès ?**  
Inégalité de Markov !

# Inégalité de Markov

## Inégalité de Markov

Soit  $Z$  une variable aléatoire réelle positive.

$$\forall a > 0, \quad \Pr(Z \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Z)}{a}.$$

## Exemples.

- Loi géométrique  $\mathbb{E}(Y) = 1/p \rightsquigarrow \Pr\left(Z \geq \frac{2}{p}\right) \leq \frac{1}{2}$
- Alg. de Papadimitriou  $\mathbb{E}(Z_j) \leq n^2 \rightsquigarrow \Pr\left(Z_j \geq 2 \cdot n^2\right) \leq \frac{1}{2}$

# Algorithme de Papadimitriou

- L'algorithme termine toujours après  $T = 2n^2$  répétition de la boucle **pour ... faire**

Complexité :  $O(n^2 \cdot m)$

- Si l'algorithme retourne SATISFIABLE, alors  $\Phi$  est satisfiable
- Si l'algorithme retourne NON SATISFIABLE, alors  $\Phi$  est peut-être satisfiable

Probabilité d'erreur  $\leq 1/2$

## Algorithme de type Monte Carlo

# Algorithme de Papadimitriou – Amplification

**Entrée:** Formule  $\Phi$  de  $m$  clauses  $C_1, \dots, C_m$  en  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$

**Sortie:** SATISFIABLE ou NON SATISFIABLE

**pour**  $j$  de 1 à  $T_0 = \lceil \log(m) \rceil$  **faire**

$$y = (y_1, \dots, y_n) \xleftarrow{\text{dice}} \{0, 1\}^n$$

**pour**  $i$  de 1 à  $T_1 = 2n^2$  **faire**

**si**  $\Phi(y) = 0$  **alors**

considérer une clause  $C_t$  (arbitraire) non satisfaite de  $\Phi$

$$j \xleftarrow{\text{dice}} \text{VARIABLES}(C_t) \quad \triangleright \text{tirage d'une variable dans } C_t$$

$$y_j \leftarrow 1 - y_j \quad \triangleright \text{changement de la valeur de } y_j$$

**sinon**

**retourner** SATISFIABLE

**fin si**

**fin pour**

**fin pour**

**retourner** NON SATISFIABLE

## Algorithme de Papadimitriou – Amplification

- L'algorithme termine toujours après  $T_0 \times T_1 = 2n^2 \log(m)$  répétition de la boucle **pour ... faire**

Complexité :  $O(n^2 \cdot m \cdot \log(m))$

- Si l'algorithme retourne SATISFIABLE, alors  $\Phi$  est satisfiable
- Si l'algorithme retourne NON SATISFIABLE, alors  $\Phi$  est peut-être satisfiable

Probabilité d'erreur  $\leq 1/m$

## Algorithme de type Monte Carlo

# Table des matières

## 1 MAX-E3-SAT

- MAX-3-SAT et MAX-E3-SAT
- Algorithme probabiliste pour MAX-E3-SAT
- Dérandomisation

## 2 2-SAT – Algorithme de Papadimitriou

- Description de l'algorithme
- Marche aléatoire
- Analyse

## 3 3-SAT – Algorithme de Schöning

- Description de l'algorithme
- Marche aléatoire
- Analyse

# Problème 3-SAT

## Problème 3-SAT

- ENTRÉE : une formule booléenne en  $n$  variables sous forme d'une conjonction de  $m$  clauses avec au plus 3 littéraux
  - SORTIE : VRAI si il existe une assignation des variables, qui rend la formule vraie (et FAUX sinon)
- 
- problème de décision
  - « Le » problème  $\mathcal{NP}$ -difficile
  - 1999 – U. Schöning  
~~ algorithme probabiliste exponentiel par **marche aléatoire**

# Algorithme de Schöning

**Entrée:** Formule  $\Phi$  de  $m$  clauses  $C_1, \dots, C_m$  en  $n$  variables

$x_1, \dots, x_n : T_0, T_1 \in \mathbb{N}$

**Sortie:** SATISFIABLE ou NON SATISFIABLE

**pour**  $j$  de 1 à  $T_0$  **faire**

$$y = (y_1, \dots, y_n) \xleftarrow{\text{dice}} \{0, 1\}^n$$

**pour**  $i$  de 1 à  $T_1$  **faire**

**si**  $\Phi(y) = 0$  **alors**

considérer une clause  $C_t$  (arbitraire) non satisfaite de  $\Phi$

$$j \xleftarrow{\text{dice}} \text{VARIABLES}(C_t) \quad \triangleright \text{tirage d'une variable dans } C_t$$

$$y_j \leftarrow 1 - y_j \quad \triangleright \text{changement de la valeur de } y_j$$

**sinon**

**retourner** SATISFIABLE

**fin si**

**fin pour**

**fin pour**

## Marche aléatoire (1/2)

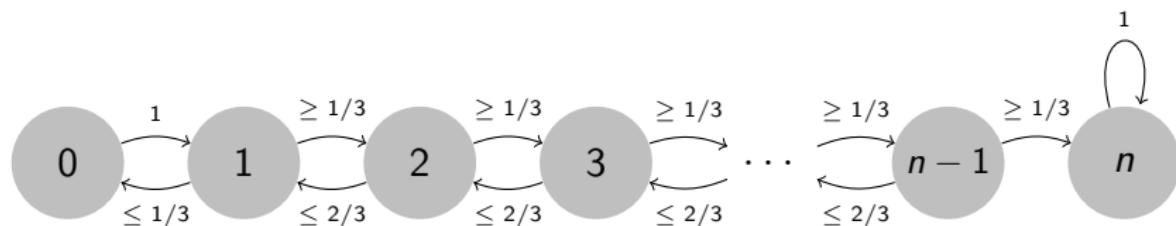
Supposons que  $\Phi$  est satisfiable ; soit  $y^*$  tel que  $\Phi(y^*) = 1$

Notons  $M(y, y^*)$  le nombre de coordonnées de  $y$  et  $y^*$  égales

- Si  $M(y, y^*) = n$ ,  $\Phi(y) = \Phi(y^*) = 1$  et l'algorithme s'arrête !
- Si  $\Phi(y) = 0$ , alors  $M(y, y^*) < n$ 
  - au moins une clause n'est pas satisfaite  $\rightsquigarrow C_t = \ell_i \vee \ell_j \vee \ell_k$
  - avec  $y$ ,  $\ell_i = 0$  et  $\ell_j = 0$  et  $\ell_k = 0$
  - avec  $y^*$ ,  $\ell_i = 1$  ou  $\ell_j = 1$  ou  $\ell_k = 1$
  - l'algorithme modifie  $y$  en changeant aléatoirement  $y_i$  ou  $y_j$   
 $M(y, y^*)$  augmente de 1 avec probabilité  $\geq 1/3$   
 $M(y, y^*)$  diminue de 1 avec probabilité  $\leq 2/3$

## Marche aléatoire (2/2)

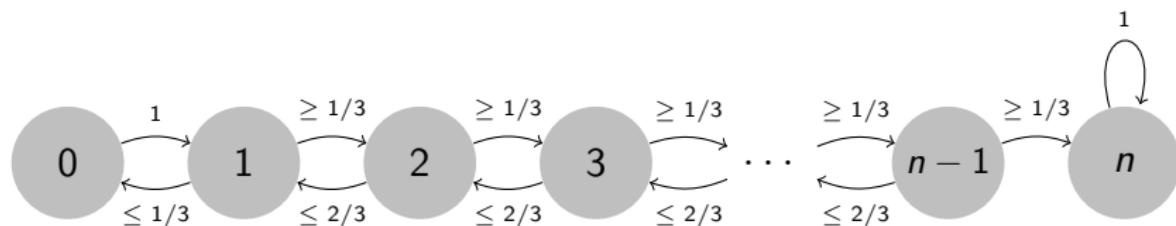
- Nous interprétons le comportement de l'algorithme comme une **marche aléatoire dans un graphe**



- Au départ  $M(y, y^*)$  prend n'importe quelle valeur de  $\{0, \dots, n\}$
- À chaque étape  $M(y, y^*)$  varie de  $\pm 1$
- Combien de temps pour atteindre le sommet  $n$  ?**
- A priori, beaucoup plus que dans le cas de 2-SAT !*

## Marche aléatoire (2/2)

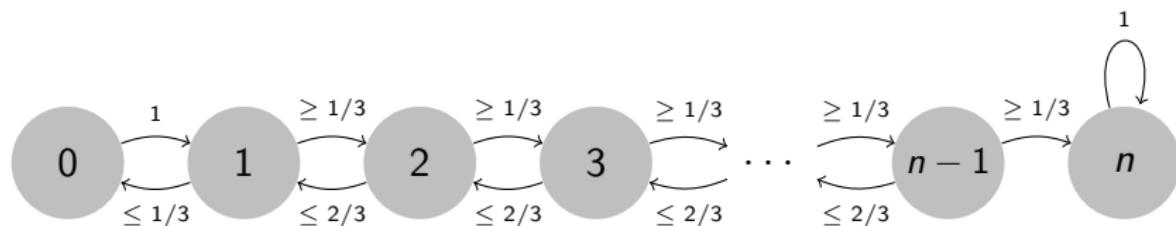
- Nous interprétons le comportement de l'algorithme comme une **marche aléatoire** dans un graphe



- Au départ  $M(y, y^*)$  prend n'importe quelle valeur de  $\{0, \dots, n\}$
- À chaque étape  $M(y, y^*)$  varie de  $\pm 1$
- Combien de temps pour atteindre le sommet  $n$  ?**
- A priori, beaucoup plus que dans le cas de 2-SAT !*

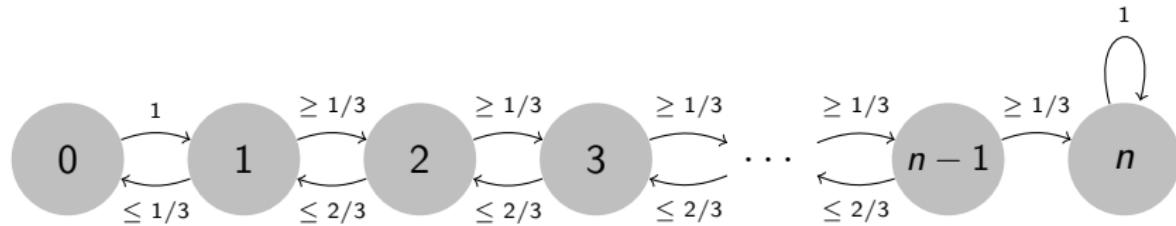
## Marche aléatoire (2/2)

- Nous interprétons le comportement de l'algorithme comme une **marche aléatoire dans un graphe**



- Au départ  $M(y, y^*)$  prend n'importe quelle valeur de  $\{0, \dots, n\}$
- À chaque étape  $M(y, y^*)$  varie de  $\pm 1$
- Combien de temps pour atteindre le sommet  $n$  ?**
- A priori, beaucoup plus que dans le cas de 2-SAT !*

# Algorithme de Schöning – Première approche (1/2)

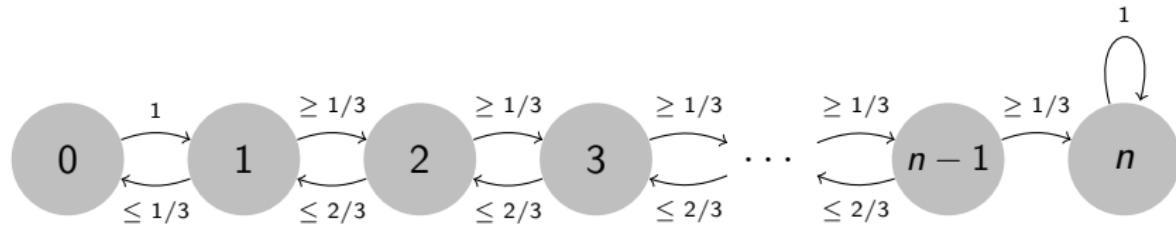


- On espère partir d'un état initial « proche » du sommet  $n$

$$M(y, y^*) \geq n/2 \quad \rightsquigarrow \quad \text{probabilité} \geq 1/2$$

- Si c'est le cas, on espère faire  $\leq n/2$  étapes vers la droite  
 $\rightsquigarrow$  probabilité  $\geq (1/3)^{n/2}$
- Avec  $T_1 = \lceil n/2 \rceil$ , pour  $\Phi$  satisfiable, on obtient un succès dans la boucle **pour ... faire** avec probabilité  $p \geq (1/2) \cdot (1/3)^{n/2}$

# Algorithme de Schöning – Première approche (1/2)

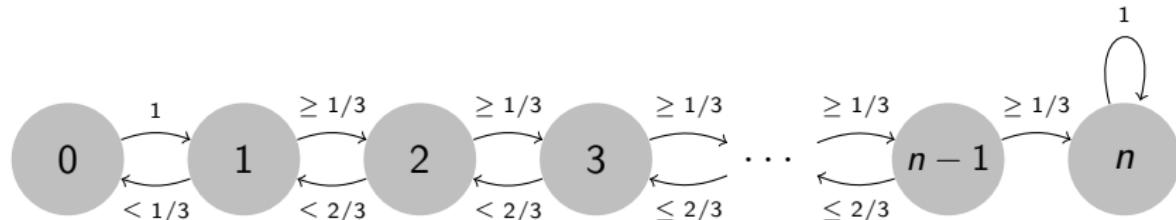


- On espère partir d'un état initial « proche » du sommet  $n$

$$M(y, y^*) \geq n/2 \quad \rightsquigarrow \quad \text{probabilité} \geq 1/2$$

- Si c'est le cas, on espère faire  $\leq n/2$  étapes vers la droite  
 $\rightsquigarrow$  probabilité  $\geq (1/3)^{n/2}$
- Avec  $T_1 = \lceil n/2 \rceil$ , pour  $\Phi$  satisfiable, on obtient un succès dans la boucle **pour ... faire** avec probabilité  $p \geq (1/2) \cdot (1/3)^{n/2}$

# Algorithme de Schöning – Première approche (1/2)



- On espère partir d'un état initial « proche » du sommet  $n$

$$M(y, y^*) \geq n/2 \quad \rightsquigarrow \quad \text{probabilité} \geq 1/2$$

- Si c'est le cas, on espère faire  $\leq n/2$  étapes vers la droite  
 $\rightsquigarrow$  probabilité  $\geq (1/3)^{n/2}$
- Avec  $T_1 = \lceil n/2 \rceil$ , pour  $\Phi$  satisfiable, on obtient un succès dans la boucle **pour ... faire** avec probabilité  $p \geq (1/2) \cdot (1/3)^{n/2}$

## Algorithme de Schöning – Première approche (2/2)

- En répétant  $T_0 = \ln(m)/p$  fois cette boucle, l'algorithme échoue pour  $\Phi$  satisfiable avec probabilité

$$\leq (1 - p)^{\ln(m)/p} \leq \frac{1}{m}$$

Complexité :

$$O(T_0 \cdot T_1 \cdot m) = O(n \cdot m \cdot \log m \cdot 3^{n/2}) = \tilde{O}(3^{n/2}) = O(1.733^n)$$

Probabilité d'erreur  $\leq 1/m$

## Algorithme de Schöning – Première approche (2/2)

- En répétant  $T_0 = \ln(m)/p$  fois cette boucle, l'algorithme échoue pour  $\Phi$  satisfiable avec probabilité

$$\leq (1 - p)^{\ln(m)/p} \leq \frac{1}{m}$$

Complexité :

$$O(T_0 \cdot T_1 \cdot m) = O(n \cdot m \cdot \log m \cdot 3^{n/2}) = \tilde{O}(3^{n/2}) = O(1.733^n)$$

Probabilité d'erreur  $\leq 1/m$

## Algorithme de Schöning – Première approche (2/2)

- En répétant  $T_0 = \ln(m)/p$  fois cette boucle, l'algorithme échoue pour  $\Phi$  satisfiable avec probabilité

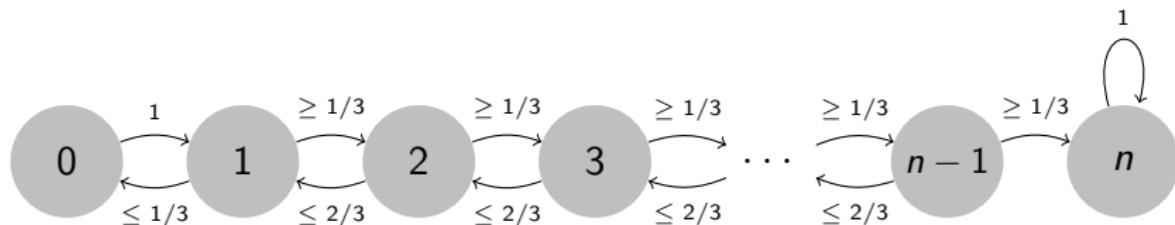
$$\leq (1 - p)^{\ln(m)/p} \leq \frac{1}{m}$$

Complexité :

$$O(T_0 \cdot T_1 \cdot m) = O(n \cdot m \cdot \log m \cdot 3^{n/2}) = \tilde{O}(3^{n/2}) = O(1.733^n)$$

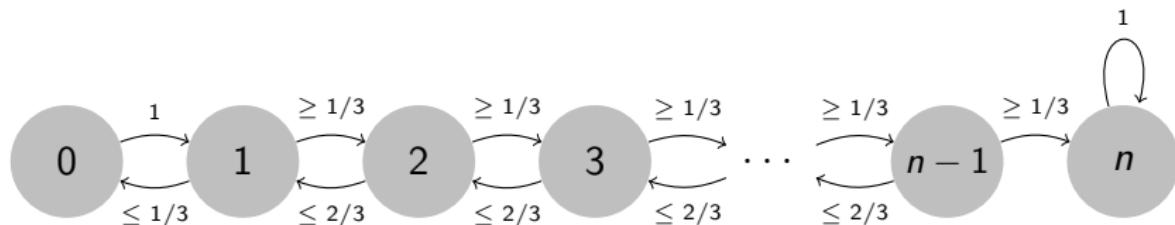
Probabilité d'erreur  $\leq 1/m$

# Algorithme de Schöning – Analyse (1/5)



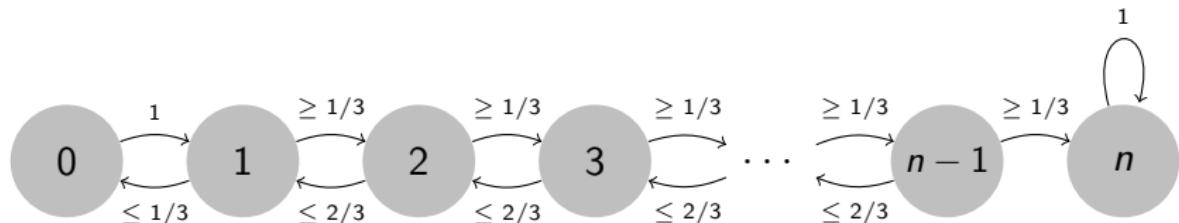
- **Idée 1 :** Exécuter la boucle **pour ... faire** plus longtemps pour permettre des étapes vers la gauche  $\rightsquigarrow T_1 = 3n$
- **Idée 2 :** Faire une analyse plus fine en prenant en compte tous les états initiaux possibles  $j \in \{0, \dots, n\}$

# Algorithme de Schöning – Analyse (1/5)



- **Idée 1 :** Exécuter la boucle **pour** . . . **faire** plus longtemps pour permettre des étapes vers la gauche  $\rightsquigarrow T_1 = 3n$
- **Idée 2 :** Faire une analyse plus fine en prenant en compte tous les états initiaux possibles  $j \in \{0, \dots, n\}$

# Algorithme de Schöning – Analyse (2/5)



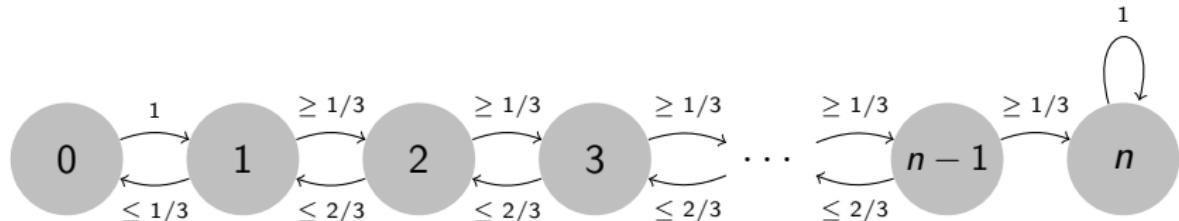
- $D_j$  : « pour  $y$  aléatoire, nous avons  $M(y, y^*) = n - j$  »

$$\Pr(D_j) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- $E_j$  : « en partant de  $n - j$ , nous arrivons à  $n$  en  $\leq 3n$  étapes »
- $F_j$  : « en partant de  $n - j$ , nous arrivons à  $n$  en  $2j$  étapes à droite et  $j$  étapes à gauche »

$$\Pr(E_i) \geq \Pr(F_j)$$

## Algorithme de Schöning – Analyse (2/5)



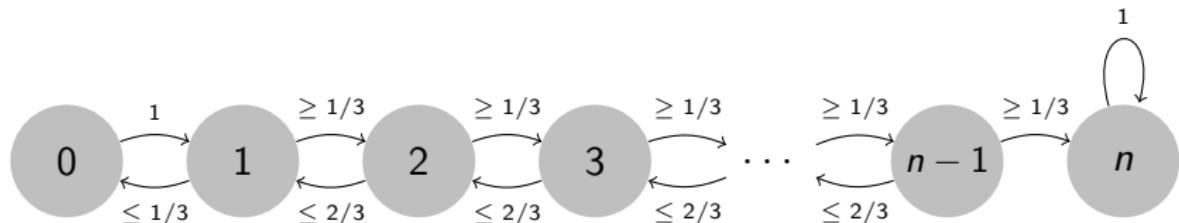
- $D_j$  : « pour  $y$  aléatoire, nous avons  $M(y, y^*) = n - j$  »

$$\Pr(D_j) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- $E_j$  : « en partant de  $n - j$ , nous arrivons à  $n$  en  $\leq 3n$  étapes »
- $F_j$  : « en partant de  $n - j$ , nous arrivons à  $n$  en  $2j$  étapes à droite et  $j$  étapes à gauche »

$$\Pr(E_i) \geq \Pr(F_j)$$

## Algorithme de Schöning – Analyse (2/5)



- $D_j$  : « pour  $y$  aléatoire, nous avons  $M(y, y^*) = n - j$  »

$$\Pr(D_j) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- $E_j$  : « en partant de  $n - j$ , nous arrivons à  $n$  en  $\leq 3n$  étapes »
- $F_j$  : « en partant de  $n - j$ , nous arrivons à  $n$  en  $2j$  étapes à droite et  $j$  étapes à gauche »

$$\Pr(E_i) \geq \Pr(F_j)$$

## Algorithme de Schöning – Analyse (3/5)

- $F_j$  : « en partant de  $n - j$ , nous arrivons à  $n$  en  $2j$  étapes à droite et  $j$  étapes à gauche »

$$\Pr(F_j) \geq \binom{3j}{j} \left(\frac{2}{3}\right)^j \left(\frac{1}{3}\right)^{2j} \text{ avec } \binom{3j}{j} = \frac{3j!}{2j! \cdot j!}$$

### Formule de Stirling

$$\sqrt{2\pi t} \left(\frac{t}{e}\right)^t \leq t! \leq 2 \cdot \sqrt{2\pi t} \left(\frac{t}{e}\right)^t$$

$$\binom{3j}{j} \geq \frac{\sqrt{2\pi 3j} \left(\frac{3j}{e}\right)^{3j}}{2 \cdot \sqrt{2\pi j} \left(\frac{j}{e}\right)^j 2 \cdot \sqrt{2\pi 2j} \left(\frac{2j}{e}\right)^{2j}} = \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{\pi j}} \left(\frac{27}{4}\right)^j$$

et

$$\Pr(F_j) \geq \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{\pi j}} \left(\frac{27}{4}\right)^j \left(\frac{2}{3}\right)^j \left(\frac{1}{3}\right)^{2j} = \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{\pi j}} \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

# Algorithme de Schöning – Analyse (4/5)

- Nous avons pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\Pr(E_j) \geq \Pr(F_j) \geq \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{\pi j}} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{c}{\sqrt{j}} \left(\frac{1}{2}\right)^j \geq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

- Nous avons une probabilité de succès  $p'$  telle que

$$\begin{aligned} p' &\geq \sum_{j=0}^n \Pr(D_j) \Pr(E_j) \geq \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\ &\geq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \end{aligned}$$

## Algorithme de Schöning – Analyse (4/5)

- Nous avons pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\Pr(E_j) \geq \Pr(F_j) \geq \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{\pi j}} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{c}{\sqrt{j}} \left(\frac{1}{2}\right)^j \geq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

- Nous avons une probabilité de succès  $p'$  telle que

$$\begin{aligned} p' &\geq \sum_{j=0}^n \Pr(D_j) \Pr(E_j) \geq \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\ &\geq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \end{aligned}$$

## Algorithme de Schöning – Analyse (4/5)

- Nous avons pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\Pr(E_j) \geq \Pr(F_j) \geq \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{\pi j}} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{c}{\sqrt{j}} \left(\frac{1}{2}\right)^j \geq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

- Nous avons une probabilité de succès  $p'$  telle que

$$\begin{aligned} p' &\geq \sum_{j=0}^n \Pr(D_j) \Pr(E_j) \geq \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\ &\geq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \end{aligned}$$

# Algorithme de Schöning – Analyse (4/5)

- Nous avons pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\Pr(E_j) \geq \Pr(F_j) \geq \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{\pi j}} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{c}{\sqrt{j}} \left(\frac{1}{2}\right)^j \geq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

- Nous avons une probabilité de succès  $p'$  telle que

$$\begin{aligned} p' &\geq \sum_{j=0}^n \Pr(D_j) \Pr(E_j) \geq \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\ &\geq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \mathbf{1}^{n-j} \end{aligned}$$

## Algorithme de Schöning – Analyse (4/5)

- Nous avons pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\Pr(E_j) \geq \Pr(F_j) \geq \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{\pi j}} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{c}{\sqrt{j}} \left(\frac{1}{2}\right)^j \geq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

- Nous avons une probabilité de succès  $p'$  telle que

$$\begin{aligned} p' &\geq \sum_{j=0}^n \Pr(D_j) \Pr(E_j) \geq \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\ &\geq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \mathbf{1}^{n-j} \\ &\geq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} + 1\right)^n = \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{aligned}$$

# Algorithme de Schöning – Analyse (5/5)

- Avec  $T_1 = 3n$ , pour  $\Phi$  satisfiable, on obtient un succès dans la boucle **pour ... faire** avec probabilité  $p' \geq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{4}\right)^n$
- En répétant  $T_0 = \ln(m)/p'$  fois cette boucle, l'algorithme échoue pour  $\Phi$  satisfiable avec probabilité

$$\leq (1 - p')^{\ln(m)/p'} \leq \frac{1}{m}$$

Complexité :

$$O(T_0 T_1 m) = O(m \cdot n \cdot \sqrt{n} \cdot (4/3)^n) = \tilde{O}((4/3)^n) = O(1.334^n)$$

Probabilité d'erreur  $\leq 1/m$

Algorithme de type Monte Carlo

# Algorithme de Schöning – Analyse (5/5)

- Avec  $T_1 = 3n$ , pour  $\Phi$  satisfiable, on obtient un succès dans la boucle **pour ... faire** avec probabilité  $p' \geq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{4}\right)^n$
- En répétant  $T_0 = \ln(m)/p'$  fois cette boucle, l'algorithme échoue pour  $\Phi$  satisfiable avec probabilité

$$\leq (1 - p')^{\ln(m)/p'} \leq \frac{1}{m}$$

Complexité :

$$O(T_0 T_1 m) = O(m \cdot n \cdot \sqrt{n} \cdot (4/3)^n) = \tilde{O}((4/3)^n) = O(1.334^n)$$

Probabilité d'erreur  $\leq 1/m$

Algorithme de type Monte Carlo

# Algorithme de Schöning – Analyse (5/5)

- Avec  $T_1 = 3n$ , pour  $\Phi$  satisfiable, on obtient un succès dans la boucle **pour ... faire** avec probabilité  $p' \geq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{4}\right)^n$
- En répétant  $T_0 = \ln(m)/p'$  fois cette boucle, l'algorithme échoue pour  $\Phi$  satisfiable avec probabilité

$$\leq (1 - p')^{\ln(m)/p'} \leq \frac{1}{m}$$

Complexité :

$$O(T_0 T_1 m) = O(m \cdot n \cdot \sqrt{n} \cdot (4/3)^n) = \tilde{O}((4/3)^n) = O(1.334^n)$$

Probabilité d'erreur  $\leq 1/m$

Algorithme de type Monte Carlo

## Algorithme de Schöning – Analyse (5/5)

- Avec  $T_1 = 3n$ , pour  $\Phi$  satisfiable, on obtient un succès dans la boucle **pour ... faire** avec probabilité  $p' \geq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{4}\right)^n$
- En répétant  $T_0 = \ln(m)/p'$  fois cette boucle, l'algorithme échoue pour  $\Phi$  satisfiable avec probabilité

$$\leq (1 - p')^{\ln(m)/p'} \leq \frac{1}{m}$$

Complexité :

$$O(T_0 T_1 m) = O(m \cdot n \cdot \sqrt{n} \cdot (4/3)^n) = \tilde{O}((4/3)^n) = O(1.334^n)$$

Probabilité d'erreur  $\leq 1/m$

Algorithme de type Monte Carlo