Induction Structurelle

UE LU2IN005 – Mathématiques discrètes

N. Sznajder

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Ensembles définis par induction structurelle

Définition

Soit E un ensemble, $X_0 \subseteq E$, et un ensemble de règles $\mathscr{F}$, données sous la forme d'applications distinctes $f : E^{a(f)} \rightarrow E$, avec $a(f)$ l'arité de l'application f. L'ensemble défini inductivement à l'aide de E, X_0, et $\mathscr{F}$, est le plus petit ensemble X de E (pour l'inclusion) vérifiant :

- **Base :** $X_0 \subseteq X$
- **Induction :** pour toute application $f \in \mathscr{F}$ d'arité n, pour tous $x_1, \ldots, x_n$, si $x_1, \ldots, x_n \in X$, alors $f(x_1, \ldots, x_n) \in X$.

Ensembles définis par induction structurelle - Exemples

Exemple

On définit $X \subseteq \mathbb{N}$ par

Base :	$1 \in X$	$(X_0 = \{1\})$
Induction :	pour tout $x \in X$, $x + 2 \in X$	$(\mathscr{F} = \{f : x \mapsto x + 2\}$

Ensembles définis par induction structurelle - Exemples

Exemple

On définit $X \subseteq \mathbb{N}$ par

Base : $1 \in X$ $\quad(X_0 = \{1\})$

Induction : pour tout $x \in X$, $x + 2 \in X$ $\quad(\mathscr{F} = \{f : x \mapsto x + 2\})$

X est l'ensemble des entiers impairs

Ensembles définis par induction structurelle - Exemples

Exemple

On définit $X \subseteq \mathbb{N}$ par

Base :	$1 \in X$	$(X_0 = \{1\})$
Induction :	pour tout $x \in X$, $x + 2 \in X$	$(\mathscr{F} = \{f : x \mapsto x + 2\}$

X est l'ensemble des entiers impairs

Exemple

Soit $A = \{a, b\}$. On définit $L \subseteq A^*$ par

Base :	$\varepsilon \in L$	$(X_0 = \{\varepsilon\})$
Induction :	si $u \in L$, $a.u.b \in L$	$(\mathscr{F} = \{f : u \mapsto a.u.b\})$

Ensembles définis par induction structurelle - Exemples

Exemple

On définit $X \subseteq \mathbb{N}$ par

Base : $1 \in X$ $(X_0 = \{1\})$

Induction : pour tout $x \in X$, $x + 2 \in X$ $(\mathscr{F} = \{f : x \mapsto x + 2\})$

X est l'ensemble des entiers impairs

Exemple

Soit $A = \{a, b\}$. On définit $L \subseteq A^*$ par

Base : $\varepsilon \in L$ $(X_0 = \{\varepsilon\})$

Induction : si $u \in L$, $a.u.b \in L$ $(\mathscr{F} = \{f : u \mapsto a.u.b\})$

$L = \{a^n b^n, n \in \mathbb{N}\}$

Fonctions définies par induction structurelle

Définition

Soit X un ensemble défini par induction structurelle à partir de E, X_0, et $\mathscr{F}$, on peut définir une fonction g par induction structurelle de la façon suivante :

Base $g(x)$ donné explicitement pour tout $x \in X_0$,

Induction pour toute règle $f \in \mathscr{F}$ d'arité n, on donne $g(f(x_1, \ldots, x_n)) = h(x_1, \ldots, x_n, g(x_1), \ldots, g(x_n))$.

Fonctions définies par induction structurelle

Définition

Soit X un ensemble défini par induction structurelle à partir de E, X_0, et $\mathscr{F}$, on peut définir une fonction g par induction structurelle de la façon suivante :

Base $g(x)$ donné explicitement pour tout $x \in X_0$,

Induction pour toute règle $f \in \mathscr{F}$ d'arité n, on donne $g(f(x_1, \ldots, x_n)) = h(x_1, \ldots, x_n, g(x_1), \ldots, g(x_n))$.

Exemple

Sur $L \subseteq A^*$ défini par

Base : $\varepsilon \in L$ $(X_0 = \{\varepsilon\})$

Induction : si $u \in L$, $a.u.b \in L$ $(\mathscr{F} = \{f : u \mapsto a.u.b\})$

on peut définir $\mathrm{taille} : L \to \mathbb{N}$ par

Fonctions définies par induction structurelle

Définition

Soit X un ensemble défini par induction structurelle à partir de E, X_0, et $\mathscr{F}$, on peut définir une fonction g par induction structurelle de la façon suivante :

Base $g(x)$ donné explicitement pour tout $x \in X_0$,

Induction pour toute règle $f \in \mathscr{F}$ d'arité n, on donne $g(f(x_1, \ldots, x_n)) = h(x_1, \ldots, x_n, g(x_1), \ldots, g(x_n))$.

Exemple

Sur $L \subseteq A^*$ défini par

Base : $\varepsilon \in L$ $\quad (X_0 = \{\varepsilon\})$

Induction : si $u \in L$, $a.u.b \in L$ $\quad (\mathscr{F} = \{f : u \mapsto a.u.b\})$

on peut définir $\mathrm{taille} : L \to \mathbb{N}$ par

Base : $\mathrm{taille}(\varepsilon) = 0$

Induction : $\mathrm{taille}(a.u.b) = 2 + \mathrm{taille}(u)$

Un exemple important : les arbres binaires étiquetés

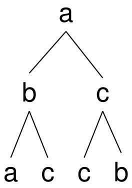
Structure de donnés dont les éléments sont les **noeuds**. Les noeuds peuvent avoir un **père**, et des **fils**. L'unique noeud sans père est la **racine**. Les noeuds sans fils sont les **feuilles**. Dans les arbres **binaires**, chaque noeud a au plus **deux fils**.

Un exemple important : les arbres binaires étiquetés

Structure de donnés dont les éléments sont les **noeuds**. Les noeuds peuvent avoir un **père**, et des **fils**. L'unique noeud sans père est la **racine**. Les noeuds sans fils sont les **feuilles**. Dans les arbres **binaires**, chaque noeud a au plus **deux fils**.

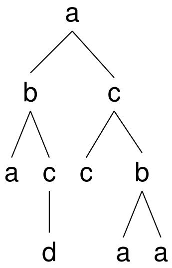
Un exemple important : les arbres binaires étiquetés

Structure de donnés dont les éléments sont les **noeuds**. Les noeuds peuvent avoir un **père**, et des **fils**. L'unique noeud sans père est la **racine**. Les noeuds sans fils sont les **feuilles**. Dans les arbres **binaires**, chaque noeud a au plus **deux fils**.



Un exemple important : les arbres binaires étiquetés

Structure de donnés dont les éléments sont les **noeuds**. Les noeuds peuvent avoir un **père**, et des **fils**. L'unique noeud sans père est la **racine**. Les noeuds sans fils sont les **feuilles**. Dans les arbres **binaires**, chaque noeud a au plus **deux fils**.



Un exemple important : les arbres binaires étiquetés

Définition

Soit A un alphabet. L'ensemble AB des arbres binaires étiquetés par A est défini par :

Base : $\emptyset \in AB$

Induction : si $g, d \in AB$, alors pour tout $a \in A$, $(a, g, d) \in AB$.

Exemple

$\emptyset$

Un exemple important : les arbres binaires étiquetés

Définition

Soit A un alphabet. L'ensemble AB des arbres binaires étiquetés par A est défini par :

Base : $\emptyset \in AB$

Induction : si $g, d \in AB$, alors pour tout $a \in A$, $(a, g, d) \in AB$.

Exemple

$\emptyset$

$(a, \emptyset, \emptyset)$ a

Un exemple important : les arbres binaires étiquetés

Définition

Soit A un alphabet. L'ensemble AB des arbres binaires étiquetés par A est défini par :

Base : $\emptyset \in AB$

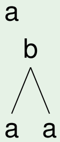
Induction : si $g, d \in AB$, alors pour tout $a \in A$, $(a, g, d) \in AB$.

Exemple

$\emptyset$

$(a, \emptyset, \emptyset)$

$(b, (a, \emptyset, \emptyset), (a, \emptyset, \emptyset))$



Un exemple important : les arbres binaires étiquetés

Définition

Soit A un alphabet. L'ensemble AB des arbres binaires étiquetés par A est défini par :

Base : $\emptyset \in AB$

Induction : si $g, d \in AB$, alors pour tout $a \in A$, $(a, g, d) \in AB$.

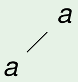
Exemple

$\emptyset$

$(a, \emptyset, \emptyset)$ a

$(b, (a, \emptyset, \emptyset), (a, \emptyset, \emptyset))$

$(a, (a, \emptyset, \emptyset), \emptyset)$



Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Définition

- la hauteur d'un arbre (la distance entre la feuille la plus éloignée et la racine) $h : AB \to \mathbb{N}$ est donnée par

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Définition

- la hauteur d'un arbre (la distance entre la feuille la plus éloignée et la racine) $h : AB \to \mathbb{N}$ est donnée par
  - **Base :** $h(\emptyset) = 0$

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Définition

- la hauteur d'un arbre (la distance entre la feuille la plus éloignée et la racine) $h : AB \to \mathbb{N}$ est donnée par
  - **Base :** $h(\emptyset) = 0$
  - **Induction :** $h(a, g, d) = 1 + \max((h(g), h(d))$

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Définition

- la hauteur d'un arbre (la distance entre la feuille la plus éloignée et la racine) $h : AB \to \mathbb{N}$ est donnée par
  - **Base :** $h(\emptyset) = 0$
  - **Induction :** $h(a, g, d) = 1 + \max((h(g), h(d))$

Exemple

$\emptyset$

$(a, \emptyset, \emptyset)$ a

$(b, (a, \emptyset, \emptyset), (a, \emptyset, \emptyset))$

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Définition

- la hauteur d'un arbre (la distance entre la feuille la plus éloignée et la racine) $h : AB \to \mathbb{N}$ est donnée par
  - **Base :** $h(\emptyset) = 0$
  - **Induction :** $h(a, g, d) = 1 + \max((h(g), h(d))$

Exemple

$\emptyset$ $\qquad$ $h(\emptyset) = 0$

$(a, \emptyset, \emptyset)$ $\qquad$ a

$(b, (a, \emptyset, \emptyset), (a, \emptyset, \emptyset))$

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Définition

- la hauteur d'un arbre (la distance entre la feuille la plus éloignée et la racine) $h : AB \to \mathbb{N}$ est donnée par
  - **Base :** $h(\emptyset) = 0$
  - **Induction :** $h(a, g, d) = 1 + \max((h(g), h(d))$

Exemple

$\emptyset$		$h(\emptyset) = 0$
$(a, \emptyset, \emptyset)$	a	$h(a, \emptyset, \emptyset) = 1 + \mathbf{max}(0, 0)$
$(b, (a, \emptyset, \emptyset), (a, \emptyset, \emptyset))$		

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Définition

- la hauteur d'un arbre (la distance entre la feuille la plus éloignée et la racine) $h : AB \to \mathbb{N}$ est donnée par
  - **Base :** $h(\emptyset) = 0$
  - **Induction :** $h(a, g, d) = 1 + \max((h(g), h(d))$

Exemple

$\emptyset$		$h(\emptyset) = 0$
$(a, \emptyset, \emptyset)$	a	$h(a, \emptyset, \emptyset) = 1 + \mathbf{max}(0, 0)$
$(b, (a, \emptyset, \emptyset), (a, \emptyset, \emptyset))$		$h(b, (a, \emptyset, \emptyset), (a, \emptyset, \emptyset))$ $= 1 + \mathbf{max}(h(a, \emptyset, \emptyset), h(a, \emptyset, \emptyset))$ $= 1 + 1 = 2$

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Définition

- le nombre de noeuds d'un arbre $\mathscr{N} : AB \rightarrow \mathbb{N}$ est donné par

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Définition

- le nombre de noeuds d'un arbre $\mathcal{N} : AB \to \mathbb{N}$ est donné par
  - **Base :** $\mathcal{N}(\emptyset) = 0$

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Définition

- le nombre de noeuds d'un arbre $\mathcal{N} : AB \to \mathbb{N}$ est donné par
  - **Base :** $\mathcal{N}(\emptyset) = 0$
  - **Induction :** $\mathcal{N}(a, g, d) = 1 + \mathcal{N}(g) + \mathcal{N}(d)$

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Définition

- le nombre de noeuds d'un arbre $\mathcal{N} : AB \rightarrow \mathbb{N}$ est donné par
  - **Base :** $\mathcal{N}(\emptyset) = 0$
  - **Induction :** $\mathcal{N}(a, g, d) = 1 + \mathcal{N}(g) + \mathcal{N}(d)$

Exemple

$\emptyset$

$(a, \emptyset, \emptyset)$ a

$(b, (a, \emptyset, \emptyset), (a, \emptyset, \emptyset))$

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Définition

- le nombre de noeuds d'un arbre $\mathcal{N} : AB \rightarrow \mathbb{N}$ est donné par
  - **Base :** $\mathcal{N}(\emptyset) = 0$
  - **Induction :** $\mathcal{N}(a, g, d) = 1 + \mathcal{N}(g) + \mathcal{N}(d)$

Exemple

$\emptyset$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mathcal{N}(\emptyset) = 0$

$(a, \emptyset, \emptyset)$ $\qquad$ a

$(b, (a, \emptyset, \emptyset), (a, \emptyset, \emptyset))$

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Définition

- le nombre de noeuds d'un arbre $\mathcal{N} : AB \to \mathbb{N}$ est donné par
  - **Base :** $\mathcal{N}(\emptyset) = 0$
  - **Induction :** $\mathcal{N}(a, g, d) = 1 + \mathcal{N}(g) + \mathcal{N}(d)$

Exemple

$\emptyset$ $\qquad$ $\mathcal{N}(\emptyset) = 0$

$(a, \emptyset, \emptyset)$ $\qquad$ a $\qquad$ $\mathcal{N}(a, \emptyset, \emptyset) = 1 + 0 + 0$

$(b, (a, \emptyset, \emptyset), (a, \emptyset, \emptyset))$

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Définition

- le nombre de noeuds d'un arbre $\mathcal{N} : AB \to \mathbb{N}$ est donné par
  - **Base :** $\mathcal{N}(\emptyset) = 0$
  - **Induction :** $\mathcal{N}(a, g, d) = 1 + \mathcal{N}(g) + \mathcal{N}(d)$

Exemple

$\emptyset$ — $\mathcal{N}(\emptyset) = 0$

$(a, \emptyset, \emptyset)$ — a — $\mathcal{N}(a, \emptyset, \emptyset) = 1 + 0 + 0$

$(b, (a, \emptyset, \emptyset), (a, \emptyset, \emptyset))$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(b, (a, \emptyset, \emptyset), (a, \emptyset, \emptyset)) \\
&= 1 + \mathcal{N}(a, \emptyset, \emptyset) + \mathcal{N}(a, \emptyset, \emptyset) \\
&= 1 + 1 + 1 = 3
\end{aligned}$$

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Parcours en profondeur d'un arbre : on visite un noeud, puis son sous-arbre gauche, puis son sous-arbre droit. **Traitement préfixe des noeuds** : on affiche le noeud la première fois qu'on le rencontre.

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Parcours en profondeur d'un arbre : on visite un noeud, puis son sous-arbre gauche, puis son sous-arbre droit. **Traitement préfixe des noeuds** : on affiche le noeud la première fois qu'on le rencontre.

Définition

- la fonction $\mathrm{pre} : AB \to A^*$ est donnée par :
  - $\mathrm{pre}(\emptyset) = \varepsilon$

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Parcours en profondeur d'un arbre : on visite un noeud, puis son sous-arbre gauche, puis son sous-arbre droit. **Traitement préfixe des noeuds** : on affiche le noeud la première fois qu'on le rencontre.

Définition

- la fonction $\mathrm{pre} : AB \to A^*$ est donnée par :
  - $\mathrm{pre}(\emptyset) = \varepsilon$
  - $\mathrm{pre}((a, g, d)) = a.\mathrm{pre}(g).\mathrm{pre}(d)$

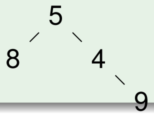
Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Parcours en profondeur d'un arbre : on visite un noeud, puis son sous-arbre gauche, puis son sous-arbre droit. **Traitement préfixe des noeuds** : on affiche le noeud la première fois qu'on le rencontre.

Définition

- la fonction $\mathrm{pre} : AB \to A^*$ est donnée par :
  - $\mathrm{pre}(\emptyset) = \varepsilon$
  - $\mathrm{pre}((a, g, d)) = a.\mathrm{pre}(g).\mathrm{pre}(d)$

Exemple



Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Parcours en profondeur d'un arbre : on visite un noeud, puis son sous-arbre gauche, puis son sous-arbre droit. **Traitement préfixe des noeuds** : on affiche le noeud la première fois qu'on le rencontre.

Définition

- la fonction $\mathrm{pre} : AB \to A^*$ est donnée par :
  - $\mathrm{pre}(\emptyset) = \varepsilon$
  - $\mathrm{pre}((a, g, d)) = a.\mathrm{pre}(g).\mathrm{pre}(d)$

Exemple

$t = (5, (8, \emptyset, \emptyset), (4, \emptyset, (9, \emptyset, \emptyset)))$

```
      5
    /   \
  8       4
            \
              9
```

Fonctions sur les arbres binaires étiquetés

Parcours en profondeur d'un arbre : on visite un noeud, puis son sous-arbre gauche, puis son sous-arbre droit. **Traitement préfixe des noeuds** : on affiche le noeud la première fois qu'on le rencontre.

Définition

- la fonction $\mathrm{pre} : AB \to A^*$ est donnée par :
  - $\mathrm{pre}(\emptyset) = \varepsilon$
  - $\mathrm{pre}((a, g, d)) = a.\mathrm{pre}(g).\mathrm{pre}(d)$

Exemple

$t = (5, (8, \emptyset, \emptyset), (4, \emptyset, (9, \emptyset, \emptyset)))$

```
      5
    /   \
   8     4
          \
           9
```

$$\begin{aligned}\mathrm{pre}(t) &= 5.\mathrm{pre}((8, \emptyset, \emptyset)).\mathrm{pre}((4, \emptyset, (9, \emptyset, \emptyset))) \\ &= 5.8.\mathrm{pre}(\emptyset).\mathrm{pre}(\emptyset).4.\mathrm{pre}(\emptyset).\mathrm{pre}((9, \emptyset, \emptyset)) \\ &= 5.8.\varepsilon.\varepsilon.4.\varepsilon.9.\varepsilon.\varepsilon = 5849\end{aligned}$$

Preuves par induction structurelle

Théorème Soit X un ensemble défini par induction structurelle à partir de E, X_0 et $\mathscr{F}$. Soit $\mathscr{P}$ une propriété sur les éléments de X.

(B) : Si $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in X_0$

(I) : Si, pour tout $f \in \mathscr{F}$ d'arité n, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in X$, **si** $\mathscr{P}(x_1)$,. . .,$\mathscr{P}(x_n)$ sont vraies, **alors** $\mathscr{P}(f(x_1, \ldots, x_n))$ est vraie

Alors, pour tout $x \in X$, $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

Démonstration Soit $V = \{x \in X \mid \mathscr{P}(x) \text{ est vraie}\}$.

- $V \subseteq X$.
- Montrons que $X \subseteq V$. Par **(B)**, $X_0 \subseteq V$. Soit $f \in \mathscr{F}$ d'arité n, et soient $x_1, \ldots, x_n \in V$. Alors, par **(I)**, $\mathscr{P}(f(x_1, \ldots, x_n))$ est vraie. Donc $f(x_1, \ldots, x_n) \in V$. L'ensemble V vérifie donc les conditions définissant l'ensemble défini par induction structurelle à partir de X_0 et $\mathscr{F}$. Par définition, X est le plus petit ensemble vérifiant ces conditions donc $X \subseteq V$.

Donc $X = V$ et $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in X$.

Preuves par induction structurelle

exemple : On définit $L \subseteq A^*$ sur $A = \{a, b\}$ par

- $\varepsilon \in L$
- si $u \in L$, alors $aub \in L$

Montrons $P(u)$: "u **contient autant de** a **que de** b **:** $|u|_a = |u|_b$"

- ε contient autant de a que de b. Donc $P(\varepsilon)$ est vraie.
- Soit $u \in L$ et supposons que $P(u)$ est vraie. Il faut montrer qu'alors $P(aub)$ est vraie.

$$\begin{aligned} |aub|_a &= 1 + |u|_a \\ &= 1 + |u|_b \text{ car } |u|_a = |u|_b \text{ par hypothèse d'induction } P(u) \\ &= |aub|_b \end{aligned}$$

Donc $P(u)$ est vraie pour tout $u \in L$.

Preuves par induction structurelle

exemple : On définit inductivement un sous-ensemble E des expressions arithmétiques sur un ensemble de symboles X

- Si $x \in X$ alors $x \in E$
- Si $k \in \mathbb{Z}$ alors $k \in E$
- Si $e_1, e_2 \in E$ alors $e_1 + e_2 \in E$ et $e_1 * e_2 \in E$

On définit inductivement $\mathrm{nb\_op}(e)$ le nombre d'opérateurs de e, $\mathrm{nb\_cstes}(e)$ le nombre de constantes de e et $\mathrm{nb\_var}(e)$ le nombre de variables de e :

Preuves par induction structurelle

exemple : On définit inductivement un sous-ensemble E des expressions arithmétiques sur un ensemble de symboles X

- Si $x \in X$ alors $x \in E$
- Si $k \in \mathbb{Z}$ alors $k \in E$
- Si $e_1, e_2 \in E$ alors $e_1 + e_2 \in E$ et $e_1 * e_2 \in E$

On définit inductivement $\mathrm{nb\_op}(e)$ le nombre d'opérateurs de e, $\mathrm{nb\_cstes}(e)$ le nombre de constantes de e et $\mathrm{nb\_var}(e)$ le nombre de variables de e :

$$\begin{cases} \mathrm{nb\_op}(x) = 0 & \text{si } x \in X \cup \mathbb{Z} \\ \mathrm{nb\_op}(e_1 + e2) = 1 + \mathrm{nb\_op}(e_1) + \mathrm{nb\_op}(e_2) = \mathrm{nb\_op}(e_1 * e_2) & \end{cases}$$

Preuves par induction structurelle

exemple : On définit inductivement un sous-ensemble E des expressions arithmétiques sur un ensemble de symboles X

- Si $x \in X$ alors $x \in E$
- Si $k \in \mathbb{Z}$ alors $k \in E$
- Si $e_1, e_2 \in E$ alors $e_1 + e_2 \in E$ et $e_1 * e_2 \in E$

On définit inductivement $\mathrm{nb\_op}(e)$ le nombre d'opérateurs de e, $\mathrm{nb\_cstes}(e)$ le nombre de constantes de e et $\mathrm{nb\_var}(e)$ le nombre de variables de e :

$$\begin{cases} \mathrm{nb\_op}(x) = 0 & \text{si } x \in X \cup \mathbb{Z} \\ \mathrm{nb\_op}(e_1 + e2) = 1 + \mathrm{nb\_op}(e_1) + \mathrm{nb\_op}(e_2) = \mathrm{nb\_op}(e_1 * e_2) & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{nb\_cstes}(x) = 0 & \text{si } x \in X \\ \mathrm{nb\_cstes}(k) = 1 & \text{si } k \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{nb\_cstes}(e_1 + e2) = \mathrm{nb\_cstes}(e_1) + \mathrm{nb\_cstes}(e_2) = \mathrm{nb\_cstes}(e_1 * e_2) & \end{cases}$$

Preuves par induction structurelle

exemple : On définit inductivement un sous-ensemble E des expressions arithmétiques sur un ensemble de symboles X

- Si $x \in X$ alors $x \in E$
- Si $k \in \mathbb{Z}$ alors $k \in E$
- Si $e_1, e_2 \in E$ alors $e_1 + e_2 \in E$ et $e_1 * e_2 \in E$

On définit inductivement $\text{nb\_op}(e)$ le nombre d'opérateurs de e, $\text{nb\_cstes}(e)$ le nombre de constantes de e et $\text{nb\_var}(e)$ le nombre de variables de e :

$$\begin{cases} \text{nb\_op}(x) = 0 & \text{si } x \in X \cup \mathbb{Z} \\ \text{nb\_op}(e_1 + e2) = 1 + \text{nb\_op}(e_1) + \text{nb\_op}(e_2) = \text{nb\_op}(e_1 * e_2) & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{nb\_cstes}(x) = 0 & \text{si } x \in X \\ \text{nb\_cstes}(k) = 1 & \text{si } k \in \mathbb{Z} \\ \text{nb\_cstes}(e_1 + e2) = \text{nb\_cstes}(e_1) + \text{nb\_cstes}(e_2) = \text{nb\_cstes}(e_1 * e_2) & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{nb\_var}(x) = 1 & \text{si } x \in X \\ \text{nb\_var}(k) = 0 & \text{si } k \in \mathbb{Z} \\ \text{nb\_var}(e_1 + e2) = \text{nb\_cstes}(e_1) + \text{nb\_cstes}(e_2) = \text{nb\_cstes}(e_1 * e_2) & \end{cases}$$

Preuves par induction structurelle

exemple : On veut montrer $P(e)$: $\mathrm{nb\_op}(e) + 1 = \mathrm{nb\_cstes}(e) + \mathrm{nb\_var}(e)$

- Pour tout $x \in X$,

$$\mathrm{nb\_op}(x) + 1 = 0 + 1 = \mathrm{nb\_cstes}(x) + \mathrm{nb\_var}(x)$$

  Donc $P(x)$ est vraie.

- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{nb\_op}(k) + 1 = 0 + 1 = \mathrm{nb\_var}(k) + \mathrm{nb\_cstes}(k)$$

  Donc $P(k)$ est vraie.

- Soient $e_1, e_2 \in E$ et supposons $P(e_1)$ et $P(e_2)$ vraies. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{nb_op}(e_1 + e_2) + 1 &\overset{\text{(def)}}{=} 1 + \mathrm{nb_op}(e_1) + \mathrm{nb_op}(e_2) + 1 \\
&= \mathrm{nb_cstes}(e_1) + \mathrm{nb_var}(e_1) + \mathrm{nb_cstes}(e_2) + \mathrm{nb_var}(e_2) \\
&= \mathrm{nb_cstes}(e_1) + \mathrm{nb_cstes}(e_2) + \mathrm{nb_var}(e_1) + \mathrm{nb_var}(e_2) \\
&= \mathrm{nb_cstes}(e) + \mathrm{nb_var}(e)
\end{aligned}$$

  Donc $P(e_1 + e_2)$ est vraie.
  Raisonnement similaire pour $P(e_1 * e_2)$.

Preuves par induction structurelle - Cas particulier de l'induction sur $\mathbb{N}$

On peut définir $\mathbb{N}$ par induction structurelle :

(B) $0 \in \mathbb{N}$

(I) si $n \in \mathbb{N}$, alors $n + 1 \in \mathbb{N}$

On retrouve l'induction sur $\mathbb{N}$ en appliquant l'induction structurelle : Si

- $P(0)$ est vraie
- et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1) estvraie$,

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.