Sorbonne Université 8 Novembre 2024

MASTER ANDROIDE – MOGPL

Examen réparti 1 - 2h00

(notes de cours et TD autorisées, barême indicatif)

Exercice 1 : modélisation par la PL (1.5 + 1.5 + 1.5 = 4.5 pts)

1) Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux polyèdres convexes de $\mathbb{R}^n$ définis chacun par un système de contraintes linéaires. On cherche deux points x et y de $\mathbb{R}^n$ tels que $x \in \mathcal{P}$, $y \in \mathcal{P}'$ et x et y soient les plus proches possibles au sens de la distance $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$. Formuler un programme linéaire qui permette de résoudre ce problème dans le cas des deux polyèdres suivants ($n = 2$) :

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{rcr} -x_1 + 4x_2 & \leq & 18 \\ 3x_1 + 2x_2 & \geq & 16 \\ 2x_1 - x_2 & \leq & 6 \end{array} \right. \qquad \mathcal{P}' \left\{ \begin{array}{rcr} 2y_1 + 3y_2 & \leq & 26 \\ 3y_1 - y_2 & \geq & 17 \\ y_1 - 4y_2 & \leq & 2 \end{array} \right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \qquad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

On ne demande pas de résoudre le programme linéaire formulé.

2) Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux polyèdres convexes de $\mathbb{R}^n$ chacun étant défini par un système d'au plus q contraintes linéaires portant sur les variables $x_1, \ldots, x_n$ plus les contraintes de non-négativité des variables. On souhaite tester si $\mathcal{P}$ est inclus dans $\mathcal{P}'$. Expliquer comment on peut répondre à cette question en résolvant au plus q programmes linéaires. Illustrer cela en formulant le ou les programmes linéaires à résoudre dans le cas des deux polyèdres suivants ($n = q = 3$) :

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & \leq & 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 5 \end{array} \right. \qquad \mathcal{P}' \left\{ \begin{array}{rcr} 3x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 10 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq & 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 2 \end{array} \right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

On ne demande pas de résoudre les programmes linéaires formulés.

3) On cherche les deux points x et y du polyèdre $\mathcal{P}$ de la question 2 qui soient les plus éloignés l'un de l'autre au sens de la distance $d(x,y) = \|x-y\|_1$ (norme L_1). Ecrire un programme linéaire pour résoudre cette question.

Exercice 2 : initialisation pour la PL (4 pts)

Appliquer la méthode en deux phases au programme linéaire $\mathcal{P}$ suivant (on utilisera la méthode des tableaux pour présenter les itérations de l'algorithme du simplexe) :

$$\min 3x_1 + x_2 + x_3$$

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Que peut-on conclure ?

Exercice 3 : certificat d'optimalité utilisant la dualité (4 pts)

En utilisant la dualité, déterminer si la solution $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$ est une solution optimale du programme linéaire suivant :

$$\max z = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccccc} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \end{array} \right.$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5$$

Exercice 4 : test d'intersection utilisant la dualité (1 + 2 + 1.5 + 2.5 = 7 pts)

On considère les deux polyèdres $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de $\mathbb{R}^2$ décrits par les contraintes suivantes :

$$\mathcal{P}_1 \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 & \leq & 24 \\ x_1 + 4x_2 & \geq & 16 \end{array} \right. \qquad \mathcal{P}_2 \left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ x_1 + x_2 & \leq & 5 \end{array} \right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \qquad\qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

L'objet des questions suivantes est de tester si l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est vide ou non en utilisant la dualité.

1) Ecrire le système d'inéquations linéaires $\mathcal{S}$ que doit vérifier un couple (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$ pour appartenir à l'ensemble $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

2) On considère le programme linéaire $\mathcal{P}$ qui consite à maximiser la fonction $z = 0x_1 + 0x_2$ sous les contraintes $\mathcal{S}$ avec $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. Ecrire le dual $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ en utilisant que des variables positives (on notera $y = (y_1, \ldots, y_4)$ le vecteur des variables duales).

3) Montrer que tout vecteur $y_\alpha = (0, 2\alpha, 3\alpha, 5\alpha)$ avec $\alpha \geq 0$ est une solution réalisable de $\mathcal{D}$. Quelle est la valeur de y_α pour la fonction objectif de $\mathcal{D}$? Que peut-on en déduire sur la valeur de la fonction objectif de $\mathcal{D}$ à l'optimum ?

4) Que peut-on déduire du résultat de la question 3 concernant $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$? Justifier votre réponse. Vérifier ensuite le résultat trouvé en représentant graphiquement les polyèdres $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ dans l'espace (x_1, x_2).