Mathématiques Discrètes

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ — LU2IN005

ANNÉE 2020-2021 — **Examen du 19 janvier 2021** — Durée : 1h30

N° d'anonymat :

Documents, calculettes et téléphones interdits. La note (entre 0 et 20) est le minimum entre 20 et la somme des points obtenus (entre 0 et 23). **Le barème est donné à titre indicatif.**

Exercice 1 (Total : 2½ points)

(1) (1 point) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 3x^2$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.

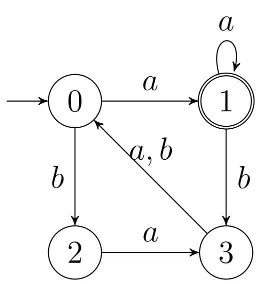
(2) (1½ points) Soit E un ensemble et $\preceq$ une relation d'ordre sur E. Montrer que $\preceq$ est un ordre bien fondé si et seulement si toute partie non vide de E admet un élément minimal.

Exercice 2 (Total : 13 points)

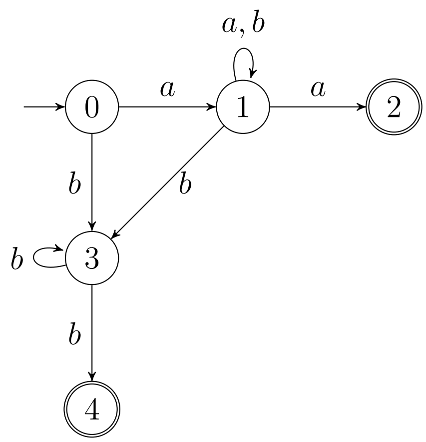
(1) (2 points) Construire un automate fini sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ reconnaissant le langage $\mathcal{L} = \{w \in A^* \mid \text{le nombre de } b \text{ séparant deux } a \text{ est pair}\}$.

(2) On considère les deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ci-dessous :

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$



a. (½ point) L'automate $\mathcal{A}$ est-il déterministe ? complet ? L'automate $\mathcal{B}$ est-il déterministe ? complet ? Justifier.

b. (3 points) Si l'un ou les deux automates ci-dessus sont non-déterministes, le ou les déterminiser, en explicitant clairement votre construction.

c. ($1\frac{1}{2}$ points) Construire un automate reconnaissant le langage $L(\mathcal{A}).L(\mathcal{B})$.

d. (3 points) En utilisant la méthode du cours, donner une expression rationnelle équivalente au langage $L(\mathcal{A})$.

On rappelle que pour un mot u sur un alphabet A, $|u|$ désigne la taille du u. On se place sur l'alphabet $A = \{a, b\}$. On définit le langage $\mathcal{L}_1 = \{u.a^n \mid u \in A^*, |u| = n\}$

(3) ($\frac{1}{2}$ point) Donner trois mots de $\mathcal{L}_1$.

(4) (2 points) Le langage $\mathcal{L}_1$ est-il reconnaissable ? Démontrer précisément votre réponse.

(5) ($1/2$ point) Donner un langage $\mathcal{L}$ reconnaissable tel que $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$.

Exercice 3 (Total : 2½ points)

(1) (1 point) Pour F et G deux formules de la logique propositionnelle, on note $F \sim G$ si F est sémantiquement équivalente à G (on dit aussi F est logiquement équivalente à G).

On pose $F = \neg p \to (q \wedge \neg q)$ et $G = p$. A-t-on $F \sim G$? Justifier précisément la réponse.

(2) On note $F \models G$ si G est conséquence sémantique de F.

a. (½ point) Donner la définition mathématique de $F \models G$.

On étend la notion de conséquence sémantique aux ensembles de formules.

b. (1 point) On pose $\mathcal{F} = \{p \to \neg r, \neg r \to p, p \to q, \neg p\}$ et $G = \neg r \to q$. A-t-on $\mathcal{F} \models G$? Jusitifier précisément la réponse.

Exercice 4 (Total : 5 points)

(1) ($\frac{1}{2}$ point) Donner une forme normale conjonctive et un forme normale disjonctive de l'expression booléenne $\overline{x+y}+z$.

(2) (1 point) Montrer que $(\overline{x+y}+z)\cdot(z+\overline{x})\cdot(x+y+z)=z$.

(3) La réserve de chocolat a disparu ... Elie, Léa et Emilio sont soupçonnés d'avoir mangé le chocolat. On suppose que :

— (i) Si Elie ou Léa (l'un des deux au moins) a mangé du chocolat alors Emilio aussi.
— (ii) Si Emilio n'a pas mangé de chocolat alors Léa n'en a pas mangé non plus.
— (iii) L'un des trois au moins a mangé du chocolat.

On désigne par les symboles p, q et r les propositions suivantes :

— p : « *Léa a mangé du chocolat.* »
— q : « *Elie a mangé du chocolat.* »
— r : « *Emilio a mangé du chocolat.* »

a. (1 point) Formaliser les trois hypothèses ci-dessus par trois formules F_1, F_2 et F_3 de la logique des propositions.

b. (1½ points) Soit $\mathbf{I}$ une interprétation quelconque. Exprimer $\mathbf{I}(F_1)$, $\mathbf{I}(F_2)$ et $\mathbf{I}(F_3)$ en fonction de $\mathbf{I}(p)$, $\mathbf{I}(q)$ et $\mathbf{I}(r)$.

c. (1 point) Que peut-on en déduire sur Emilio ? sur Léa ? sur Elie ?