Induction sur $\mathbb{N}$

UE LU2IN005 – Mathématiques discrètes

N. Sznajder

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Principe d'induction sur $\mathbb{N}$

Soit $P(n)$ une propriété dépendant de n un entier naturel. Si

- $P(0)$ est vraie,
- pour tout $n \geq 0$, si $P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Principe d'induction sur $\mathbb{N}$

Soit $P(n)$ une propriété dépendant de n un entier naturel. Si

- $P(0)$ est vraie,
- pour tout $n \geq 0$, si $P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple

Soit $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$ pour tout $n \geq 0$. On veut prouver $P(n)$:
" $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$" pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Principe d'induction sur $\mathbb{N}$

Exemple

- **Cas de base :** $P(0)$? $S_0 = 0$ par définition, donc $S_0 = \frac{0*1}{2}$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Cas d'induction :** Soit $n \geq 0$ quelconque. Supposons $P(n)$ vraie et montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.
  $S_{n+1} = \underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{S_n} + n + 1$. Par hypothèse de récurrence,
  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, donc $S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, donc $P(n+1)$ est vraie.
- $P(0)$ est vraie, et, pour tout $n \geq 0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie, donc le principe d'induction nous permet de conclure que "$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$" pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Principe d'induction sur $\mathbb{N}$ - variante

Soit $P(n)$ une propriété dépendant de n un entier naturel. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- $P(n_0)$ est vraie,
- pour tout $n \geq n_0$, si $P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Principe d'induction sur $\mathbb{N}$

Exemple

Soit $P(n)$:"Dans tout groupe de n personnes, tous les individus ont le même âge." Montrons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

- **Cas de base :** $P(1)$ trivialement vraie.
- **Cas d'induction :** Soit $n \geq 1$ quelconque. Supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ vraie. Numérotons les personnes du groupe de 1 à $n+1$. Le groupe des personnes de 1 à n contient n individus. Par hypothèse de récurrence, ils ont tous le même âge. Le groupe des personnes numérotées de 2 'a $n+1$ contient aussi n individus, donc ils ont aussi tous le même âge. Comme ces deux groupes ont des individus en commun (par exemple celui numéroté 2), on en déduit que tous les individus numérotés de 1 à $n+1$ ont le même âge et donc $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion :** $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Principe d'induction sur $\mathbb{N}$

Exemple

Soit $P(n)$:"Dans tout groupe de n personnes, tous les individus ont le même âge." Montrons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

- **Cas de base :** $P(1)$ trivialement vraie.
- **Cas d'induction :** Soit $n \geq 1$ quelconque. Supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ vraie. Numérotons les personnes du groupe de 1 à $n+1$. Le groupe des personnes de 1 à n contient n individus. Par hypothèse de récurrence, ils ont tous le même âge. Le groupe des personnes numérotées de 2 'a $n+1$ contient aussi n individus, donc ils ont aussi tous le même âge. Comme ces deux groupes ont des individus en commun (par exemple celui numéroté 2), on en déduit que tous les individus numérotés de 1 à $n+1$ ont le même âge et donc $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion :** $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. Pourtant, c'est faux !!

Principe d'induction sur $\mathbb{N}$

Exemple

$P(1)$ n'implique pas $P(2)$! Car lorsqu'on coupe un groupe de 2 personnes en 2 groupes d'une personne, il n'y a aucun individu qui appartienne aux deux groupes et on ne peut pas conclure pour $P(2)$.

Principe d'induction sur $\mathbb{N}$ - induction forte

Soit $P(n)$ une propriété dépendant de n un entier naturel. Si

- $P(0)$ est vraie,
- pour tout $n > 0$, si pour tout $k < n$ $P(k)$ vraie, alors $P(n)$ vraie

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Principe d'induction sur $\mathbb{N}$ - induction forte, variante

Soit $P(n)$ une propriété dépendant de n un entier naturel. Soit n_0 un entier naturel. Si

- $P(n_0)$ est vraie,
- pour tout $n > n_0$, si pour tout $k < n$ $P(k)$ vraie, alors $P(n)$ vraie

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Principe d'induction sur $\mathbb{N}$ - induction forte

Exemple

Soit la propriété $P(n)$: "n est décomposable en facteurs premiers." On montre $P(n)$ vraie pour tout $n \geq 2$.

- **Cas de base :** $P(2)$ est vraie car 2 est premier.
- **Cas d'induction :** Soit $n > 2$. Si n est premier alors $P(n)$ est vraie. Si n n'est pas premier alors $n = n_1 n_2$ avec $n_1, n_2 < n$. Par hypothèse de récurrence, $P(n_1)$ et $P(n_2)$ sont vraies. Donc $n_1 = p_1 \ldots p_{n_1}$ et $n_2 = q_1 \ldots q_{n_2}$ facteurs premiers. Donc $n = p_1 \ldots p_{n_1} q_1 \ldots q_{n_2}$ et $P(n)$ est vraie.
- **Conclusion :** $P(2)$ est vraie, et pour tout $n > 2$, si pour tout $k < n$ $P(k)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie. Donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

Lien avec l'induction bien fondée

Induction bien fondée ($\leq$ est une relation d'ordre bien fondée sur $\mathbb{N}$) :

$$\text{Si } \left(\underbrace{\begin{array}{l} \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \text{si (pour tout } k < n\ P(k)) \text{ alors } P(n) \end{array}}_{I} \right) \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N},\ P(n)$$

est bien équivalent à :

$$\text{Si } \left(\underbrace{P(0)}_{B} \text{ et } \underbrace{\begin{array}{l} \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \text{si (pour tout } k < n, P(k)) \text{ alors } P(n) \end{array}}_{H} \right) \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N},\ P(n)$$

Lien avec l'induction bien fondée

- induction bien fondée ($\leq$ est une relation d'ordre bien fondée sur $\mathbb{N}$) :

$$\text{Si } \left(\underbrace{\begin{array}{l}\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \text{si (pour tout } k < n \; P(k)) \text{ alors } P(n)\end{array}}_{I} \right) \text{ alors pour tout } \; n \in \mathbb{N} \; P(n)$$

- Montrons :

$$\text{Si } \left(\underbrace{P(0)}_{B} \text{ et } \underbrace{\begin{array}{l}\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \text{si } P(n) \text{ alors } P(n+1)\end{array}}_{H} \right) \text{ alors pour tout } \; n \in \mathbb{N} \; P(n)$$

On suppose B et H et on montre $P(n)$ par induction bien fondée :
  - si n est un élément minimal, alors $n = 0$ et $P(0)$ est vrai d'après B donc I est vrai pour $n = 0$
  - sinon $n = n' + 1$. Supposons $P(n' + 1)$ faux. Par la contraposée de H, $P(n')$ est faux. Donc il existe $k < n$ tel que $P(k)$ est faux, et I est vrai (par sa contraposée) pour $n = n' + 1$

Donc I est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par induction bien fondée, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fonctions définies par récurrence

Définition

Une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par récurrence par :

- **Base** : $f(0) = a$, $a \in \mathbb{N}$,
- **Induction** : $f(n+1) = h(n, f(n))$ avec $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

La fonction est définie de façon unique.

Exemple

- $f(0) = 1$
- $f(n+1) = 2.f(n)$

$f(n) = 2^n$. Preuve par récurrence...

Fonctions définies par récurrence - exemple suite

Exemple

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ $P(n) : f(n) = 2^n$.

Cas de base : $f(0) = 1 = 2^0$

Cas d'induction : Soit $n \geq 0$ et supposons que $P(n)$ est vraie. Par définition, $f(n+1) = 2.f(n)$. Par hypothèse de récurrence, $f(n) = 2^n$. Donc $f(n+1) = 2.2^n = 2^{n+1}$.

Conclusion : $P(0)$ est vraie, et, pour tout $n \geq 0$, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Fonctions définies par récurrence - second exemple

Exemple

- $f(0) = 1$
- $f(n+1) = f(n) + 3$

Montrons par récurrence $Q(n)$: $f(n) = 3n + 1$.
Cas de base : $f(0) = 1 = 3.0 + 1$
Cas d'induction : Soit $n \geq 0$ et supposons que $Q(n)$ est vraie. Par définition, $f(n+1) = f(n) + 3$. Par hypothèse de récurrence, $f(n) = 3n + 1$, donc $f(n+1) = 3n + 1 + 3 = 3(n+1) + 1$.
Conclusion : $Q(0)$ est vraie, et, pour tout $n \geq 0$, si $Q(n)$ est vraie, alors $Q(n+1)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$ est vraie.