

## Série 1 : Autour de l'algorithme de Gale-Shapley

### Exercice 1: Algorithme de Gale-Shapley

On considère quatre femmes ( $A, B, C, D$ ) et quatre hommes ( $a, b, c, d$ ). La liste de préférences des femmes est :

$A$	$c$	$b$	$d$	$a$
$B$	$b$	$a$	$c$	$d$
$C$	$b$	$d$	$a$	$c$
$D$	$c$	$a$	$d$	$b$

et celle des hommes :

$a$	$A$	$B$	$D$	$C$
$b$	$C$	$A$	$D$	$B$
$c$	$C$	$B$	$D$	$A$
$d$	$B$	$A$	$C$	$D$

**Q1.** Appliquer l'algorithme de Gale-Shapley “côté homme” (avec l'ordre  $a,b,c,d$ ), puis “côté femme” (avec l'ordre  $A,B,C,D$ ).

**Q2.** Existe-t-il d'autres mariages stables ?

**Q3.** Quelqu'un vous propose un procédé qui consiste à choisir des divorces successifs : on commence par un mariage quelconque, par exemple  $\{(A - a), (B - b), (C - c), (D - d)\}$ . S'il s'agit d'un mariage instable, comme c'est le cas dans le mariage choisi dans l'exemple, on détermine un couple formant une instabilité, ici  $A$  et  $b$  qui se préfèrent mutuellement, et on fait divorcer  $A - a$  et  $B - b$ . Ensuite, on remarie  $A$  avec  $b$  et  $B$  avec  $a$ . On obtient ainsi un nouveau mariage  $\{(A - b), (B - a), (C - c), (D - d)\}$ . On continue de la même manière jusqu'à l'obtention d'un mariage stable.

- (i) Donner une séquence d'étapes conduisant à un mariage stable pour l'exemple ci-dessus.
- (ii) Le procédé qui consiste à choisir des divorces successifs de la façon indiquée plus haut conduit nécessairement à un mariage stable. *Vrai ou faux ?* Si c'est vrai le prouver, sinon donner un contre-exemple.

### Exercice 2: Propriétés des mariages stables

**Q1.** Dans chaque instance du problème du mariage stable, il existe un mariage stable contenant un couple  $(h, f)$  tel que  $h$  est le premier dans la liste de préférence de  $f$  et  $f$  est la première dans la liste de préférence de  $h$ . *Vrai ou faux ?* Si c'est vrai donner une preuve, sinon donner un contre-exemple.

**Q2.** Considérons une instance du problème du mariage stable dans laquelle il existe un homme  $h$  et une femme  $f$  tels que  $h$  est le premier dans la liste de préférence de  $f$  et  $f$  est la première dans la liste de préférence de  $h$ . Dans ce cas, dans tout mariage stable  $S$ , le couple  $(h, f)$  appartient à  $S$ . *Vrai ou faux ?*

**Q3.** Dans tout mariage stable, au moins une femme ou un homme est marié avec son meilleur partenaire (le premier de sa liste de préférence). *Vrai ou faux ?*

### Exercice 3: Nombre de mariages stables

L'algorithme de Gale-Shapley garantit l'existence de mariage stable. On se demande ici s'il peut y avoir beaucoup de mariages stables.

**Q1.** S'il y a  $n$  hommes et  $n$  femmes, combien y a-t-il de mariages (parfaits) possibles ?

**Q2.** Construire une instance avec 2 hommes et 2 femmes avec 2 mariages stables.

**Q3.** Soit  $k$  le nombre de mariages stables d'une instance avec  $n$  hommes et  $n$  femmes. Construire une instance avec  $2n$  hommes et  $2n$  femmes où il y a (au moins)  $k^2$  mariages stables.

**Q4.** Déduire des questions 2 et 3 que le nombre de mariages stables peut être exponentiel en  $n$ .