Modélisation et Optimisation par les Graphes et la Programmation Linéaire

Cours 3 : programmation linéaire, approfondissements

Patrice Perny

patrice.perny@lip6.fr

LIP6 – UPMC

Master ANDROIDE – M1 – MOGPL

Plan

- méthode des tableaux
- méthodes d'initialisation
- dual d'un programme linéaire

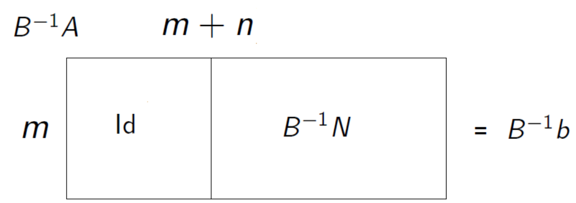
I) Algorithme du Simplexe, méthode des tableaux

Ecriture de la forme standard dans une base B

On considère le PL qui consiste à maximiser (ou minimiser) $c^t x$ sous les contraintes $Ax = b$, $x \geq 0$ où la matrice des contraintes A est de taille $m \times m + n$ (forme standard issue d'une forme canonique avec n variables $(x_1, \ldots, x_n)$ soumise à m contraintes (inégalités).

Soit B la matrice des colonnes de A choisies pour former une base de $\mathbb{R}^m$, alors B est inversible et le système de contraintes $Ax = b$ s'écrit dans la base B :

$$B^{-1}A = B^{-1}b$$



Exemple : Forme standard du problème 3

Dans la base canonique :

$$
\mathcal{P}\left\{\begin{array}{rrrrrrcr}
x_1 & & +e_1 & & & & = & 8 \\
& +x_2 & & +e_2 & & & = & 6 \\
x_1 & +2x_2 & & & +e_3 & & = & 15 \\
2x_1 & +x_2 & & & & +e_4 & = & 18
\end{array}\right.
$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0, e_4 \geq 0$$

Choisissons une autre base B que la base canonique, par exemple :

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Dans la base B, le système de contraintes s'écrit alors : $B^{-1}Ax = B^{-1}b$ donc :

$$
\mathcal{P}\left\{\begin{array}{rrrrrrcr}
x_1 & & +e_1 & & & & = & 8 \\
& & +2e_1 & +e_2 & & -e_4 & = & 4 \\
& & +3e_1 & & +e_3 & -2e_4 & = & 3 \\
& +x_2 & -2e_1 & & & +e_4 & = & 2
\end{array}\right.
$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0, e_4 \geq 0$$

Présentation sous forme de tableau dans la base B

Variables en base : $x_B = (x_1, e_2, e_3, x_4)$, variables hors base : $x_N = (e_1, e_4)$

$$
\mathcal{P}\left\{\begin{array}{rrrrrrcr}
x_1 & & +e_1 & & & & = & 8 \\
& & +2e_1 & +e_2 & & -e_4 & = & 4 \\
& & +3e_1 & & +e_3 & -2e_4 & = & 3 \\
& +x_2 & -2e_1 & & & +e_4 & = & 2
\end{array}\right.
$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0, e_4 \geq 0$$

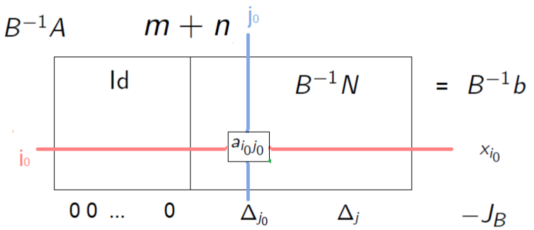
et la fonction objectif s'écrit : $\max 38 + \ 2\ e_1 - 3e_4$

On résume cela dans le tableau suivant :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
x_1	1	0	1	0	0	0	8
e_2	0	0	2	1	0	-1	4
e_3	0	0	**3**	0	1	-2	3
x_2	0	1	-2	0	0	1	2
	0	0	2	0	0	-3	-38

Forme générale du tableau du simplexe

Tableau associé à la base B



où Δ_j est le coefficient dans la fonction objectif de la variable hors située en colonne j

On va échanger un vecteur en base et un vecteur hors base et obtenir ainsi une nouvelle base B'

Pas besoin de calculer explicitement $(B')^{-1}$, on peut mettre à jour directement le tableau...

Etude d'un changement de base particulier

Soit un changement de base qui consiste à échanger une colonne i_0 de B avec une colonne j_0 de N.

On obtient une nouvelle base $B' = B \cup \{j_0\} \setminus \{i_0\}$. La matrice de passage de B vers B' est :

$$
P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{i_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{m-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_m & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A_{j_0} \end{array} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1/\alpha_{i_0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_2/\alpha_{i_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha_{i_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{m-1}/\alpha_{i_0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_m/\alpha_{i_0} & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Mise à jour des coordonnées d'un vecteur élément du domaine des contraintes

$B' = B \cup \{j_0\} \setminus \{i_0\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1j_0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{2j_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{i_0j_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{m-1j_0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{mj_0} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_{1j_0}/a_{i_0j_0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_{2j_0}/a_{i_0j_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{i_0j_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{m-1j_0}/a_{i_0j_0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{mj_0}/a_{i_0j_0} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

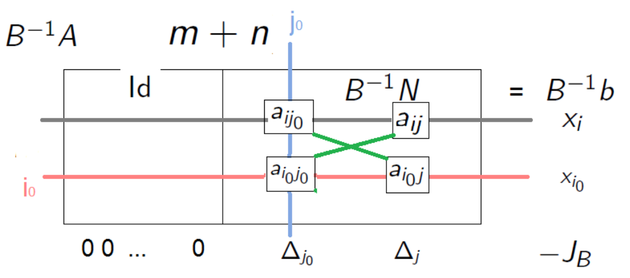
$$x' = P^{-1}x$$

$$\begin{cases} x'_i = x_i - \dfrac{x_{i_0} a_{ij_0}}{a_{i_0j_0}} & \forall i \neq i_0 \\ x'_{i_0} = \dfrac{x_{i_0}}{a_{i_0j_0}} \end{cases}$$

$a_{i_0j_0}$ est appelé "pivot" du changement de base.

Le coefficient sur la ligne du pivot est divisé par le pivot

Mise-à-jour dans le tableau



$$a'_{i_0j} = \frac{a_{i_0j}}{a_{i_0j_0}} \qquad \boxed{a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i_0j}a_{ij_0}}{a_{i_0j_0}} \quad \forall i \neq i_0}$$

Mise-à-jour de la matrice des contraintes

$B' = B \cup \{j_0\} \setminus \{i_0\}$

Colonne A_j (base B) $\rightarrow$ colonne A'_j base B'

$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{i_0j}a_{ij_0}}{a_{i_0j_0}} & \forall i \neq i_0 \\ a'_{i_0j} = \dfrac{a_{i_0j}}{a_{i_0j_0}} \end{cases}$$

La ligne du pivot est divisée par le pivot

Mise-à-jour de l'objectif

$B' = B \cup \{j_0\} \setminus \{i_0\}$

Colonne A_j (base B) $\rightarrow$ colonne A'_j base B'

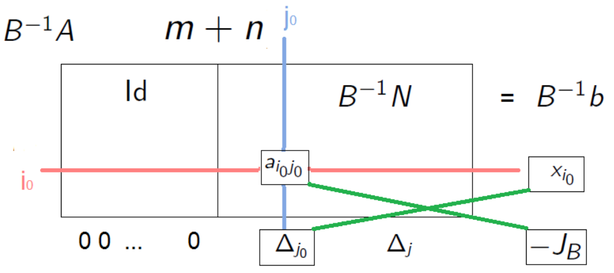
$$\begin{aligned} J(x) &= cx \\ &= c_Bx_B + c_Nx_N \quad (c_B, c_N \text{ vecteurs lignes}) \\ &= c_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_Nx_N \\ &= J_B + (c_N - c_BB^{-1}N)x_N \quad \text{avec } J_B \text{ valeur de l'objectif sur } \hat{x}_B \\ &= J_B + \Delta x_N \quad \text{avec } \Delta = c_N - c_BB^{-1}N \text{ (vecteur ligne)} \\ &= J_B + \textstyle\sum_{j \notin B} \Delta_j x_j \end{aligned}$$

Si x' est le sommet qui correspond à la base B' il vient :
$J_{B'} = J_B + \Delta_{j_0} x'_{j_0}$

Donc : $-J_{B'} = -J_B - \Delta_{j_0} \frac{x_{i_0}}{a_{i_0j_0}}$

L'opposé de la fonction objectif obéit à la règle de calcul

Mise-à-jour dans le tableau



$$\boxed{-J_{B'} = -J_B - \Delta_{j_0}\frac{x_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}}$$

Mise-à-jour de coûts marginaux

On a vu que les coefficients des variables hors base dans la fonction objectif (profits marginaux) sont donnés par $\Delta = c_N - c_B B^{-1} N$

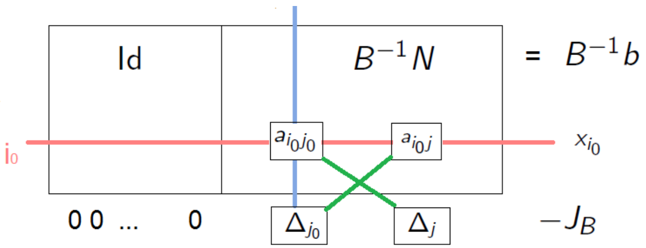
$$\begin{aligned}
\Delta_j &= \Delta e_j \\
&= c_j - c_B B^{-1} N e_j \\
&= c_j - c_B B^{-1} A_j \\
&= c_j - \sum_{k \in B} c_k a_{kj}
\end{aligned}$$

Mise-à-jour : $B' = B \cup \{j_0\} \setminus \{i_0\}$

$$\begin{aligned}
\Delta'_j &= c_j - \sum_{k \in B'} c_k a'_{kj} \\
&= c_j - \sum_{k \in B' \setminus \{j_0\}} c_k a'_{kj} - c_{j_0} a'_{j_0 j} \\
&= c_j - \sum_{k \in B' \setminus \{j_0\}} c_k \left(a_{kj} - \frac{a_{kj_0} a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}\right) - c_{j_0}\frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}} \\
&= c_j - \sum_{k \in B' \setminus \{j_0\}} c_k a_{kj} + \sum_{k \in B' \setminus \{j_0\}} c_k \frac{a_{kj_0} a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}} - c_{j_0}\frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}} \\
&= \Delta_j + c_{i_0} a_{i_0 j} + \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}\left(\sum_{k \in B' \setminus \{j_0\}} c_k a_{kj_0} - c_{j_0}\right) \\
&= \Delta_j + c_{i_0} a_{i_0 j}\frac{a_{i_0 j_0}}{a_{i_0 j_0}} - \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}\left(c_{j_0} - \sum_{k \in B' \setminus \{j_0\}} c_k a_{kj_0}\right) \\
&= \Delta_j - \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}\left(c_{j_0} - \sum_{k \in B'} c_k a_{kj_0}\right) \\
&= \Delta_j - \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}\Delta_{j_0}
\end{aligned}$$

Les coûts marginaux obéissent à la règle de calcul

Mise-à-jour dans le tableau



$$\boxed{\Delta'_j = \Delta_j - \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}\Delta_{j_0}}$$

Exemple : Tableau 1 → Tableau 2

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4		
e_1	**1**	0	1	0	0	0	8	8
e_2	0	1	0	1	0	0	6	$\times$
e_3	1	2	0	0	1	0	15	15
e_4	2	1	0	0	0	1	18	9
	4	3	0	0	0	0	0	

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4		
x_1	1	0	1	0	0	0	8	$\times$
e_2	0	1	0	1	0	0	6	6
e_3	0	2	-1	0	1	0	7	$7/2$
e_4	0	1	-2	0	0	1	2	2
	0	3	-4	0	0	0	-32	

Exemple : Tableau 2 $\rightarrow$ Tableau 3

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4		
x_1	1	0	1	0	0	0	8	$\times$
e_2	0	1	0	1	0	0	6	6
e_3	0	2	-1	0	1	0	7	$7/2$
e_4	0	**1**	-2	0	0	1	2	2
	0	3	-4	0	0	0	-32	

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4		
x_1	1	0	1	0	0	0	8	8
e_2	0	0	2	1	0	-1	4	2
e_3	0	0	3	0	1	-2	3	1
x_2	0	1	-2	0	0	1	2	$\times$
	0	0	2	0	0	-3	-38	

Exemple : Tableau 3 $\rightarrow$ Tableau 4

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4		
x_1	1	0	1	0	0	0	8	8
e_2	0	0	2	1	0	-1	4	2
e_3	0	0	**3**	0	1	-2	3	1
x_2	0	1	-2	0	0	1	2	$\times$
	0	0	2	0	0	-3	-38	

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
x_1	1	0	0	0	$-1/3$	$2/3$	7
e_2	0	0	0	1	$-2/3$	$1/3$	2
e_1	0	0	1	0	$1/3$	$-2/3$	1
x_2	0	1	0	0	$2/3$	$-1/3$	4
	0	0	0	0	$-2/3$	$-5/3$	-40

Nous sommes sur le tableau optimal !

Objectif $= 40$, sol. opt. $(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4) = (7, 2, 1, 2, 0, 0)$

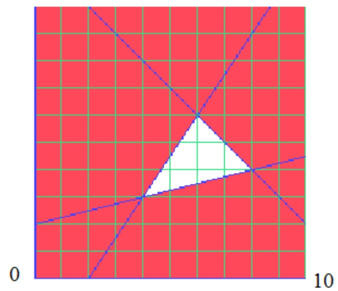
II) Méthodes d'initialisation

Méthodes d'initialisation

Méthodes utilisées lorsque la base canonique n'est pas réalisable.

But : trouver un sommet réalisable et la base associée

$$\begin{array}{llcl} \max & z = x_1 + 2x_2 & & \\ s.t. & x_1 + x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 & \geq & 6 \\ & -x_1 + 4x_2 & \geq & 8 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2. & & \end{array} \qquad \begin{array}{llcl} \max & z = x_1 + 2x_2 & & \\ s.t. & x_1 + x_2 + e_1 & = & 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 - e_2 & = & 6 \\ & -x_1 + 4x_2 - e_3 & = & 8 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2. & & \end{array}$$



Méthode en deux phases

Proposition

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) le problème PL suivant admet une solution réalisable PL : $\max c.x$ *s.t.* $Ax = b, x \geq 0$ *A matrice de taille* $(m, n+m)$

(ii) $(x, 0)$ *est solution du système :* $Ax + a = b, x \geq 0, a \geq 0$*, où* $a = (a_1, \dots, a_m)$ *est un vecteur de variables artificielles*

(iii) $(x, 0)$ *est solution optimale de* PL' : $\min \sum_{i=1}^{m} a_i$ *s.t.* $Ax + a = b, x \geq 0, a \geq 0$

Proposition

Il existe une solution réalisable pour PL si et seulement si PL' admet 0 comme valeur optimale.

Etapes de la méthode en deux phases

- **Phase I :** Résolution du problème PL'. Si la valeur optimale de PL' est égale à 0 alors phase II sinon il n'existe pas de solution réalisable.
- **Phase II :** Repartir du tableau optimal du simplexe en supprimant les colonnes des variables artificielles, remplacer la fonction objectif par $\max c.x$ et mettre à jour les profits marginaux (i.e. le vecteur Δ) en conséquence (pour cela il faut exprimer la nouvelle fonction objectif en fonction des variables hors base)

Illustration sur l'exemple précédent...

Ajout de variables artificielle

$$\min z' = a_1 + a_2$$

$$\begin{array}{lrrrrl} s.t. & x_1 & +x_2 & +e_1 & & = 12 \\ & 3x_1 & -2x_2 & -e_2 & +a_1 & = 6 \\ & -x_1 & +4x_2 & -e_3 & +a_2 & = 8 \end{array}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2.$$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	
e_1	1	1	1	0	0	0	0	12
a_1	3	-2	0	-1	0	1	0	6
a_2	-1	4	0	0	-1	0	1	8
	$\mathbf{-2}$	-2	0	1	1	0	0	-14

Cette dernière ligne étant obtenue en remarquant que l'objectif s'écrit comme suit en fonctions des variables hors base (x_1, x_2, e_2, e_3) :

$$\min z' = a_1 + a_2 = 14 - 2x_1 - 2x_2 + e_2 + e_3$$

Itérations de la Phase I

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	
e_1	0	$5/3$	1	$1/3$	0	$-1/3$	0	10
x_1	1	$-2/3$	0	$-1/3$	0	$1/3$	0	2
a_2	0	$10/3$	0	$-1/3$	-1	$1/3$	1	10
	0	$\mathbf{-10/3}$	0	$1/3$	1	$2/3$	0	-10

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	
e_1	0	0	1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	5
x_1	1	0	0	$-2/5$	$-1/5$	$2/5$	$1/5$	4
x_2	0	1	0	$-1/10$	$-3/10$	$1/10$	$3/10$	3
	0	0	0	0	0	1	1	0

On revient à l'objectif initial $\max z = x_1 + 2x_2 = 10 + 3/5e_2 + 4/5e_3$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	0	0	1	$1/2$	$1/2$	5
x_1	1	0	0	$-2/5$	$-1/5$	4
x_2	0	1	0	$-1/10$	$-3/10$	3
	0	0	0	$3/5$	$4/5$	-10

On a une base réalisable et on peut itérer le simplexe $\rightarrow$ Phase II

Méthode des variables pénalisées

utilise également les variables artificielles.

Principe :

remplacer la fonction objectif $\max c.x$ par $\max c.x - M\sum_{i=1}^{m} a_i$ où M est une constante arbitrairement grande. On réalise ainsi les deux phases I et II de manière intégrée.

Remarque 1. dans le cas d'une minimisation on remplacera la fonction objectif $\min c.x$ par $\min c.x + M\sum_{i=1}^{m} a_i$.

Remarque 2. en cours de résolution, quand une variable artificielle est sortie de la base, il est certain qu'elle n'y rentrera plus, on peut donc supprimer sa colonne dans le tableau du simplexe pour réduire la taille du problème.

Illustration de la méthode des variables pénalisées

$$
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{c}{\max z = x_1 + 2x_2 - Ma_1 - Ma_2} \\
s.t. & x_1 & +x_2 & +e_1 & & = 12 \\
& 3x_1 & -2x_2 & -e_2 & +a_1 & = 6 \\
& -x_1 & +4x_2 & -e_3 & +a_2 & = 8 \\
\multicolumn{6}{c}{x_i \geq 0, i = 1, 2.}
\end{array}
$$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	
e_1	1	1	1	0	0	0	0	12
a_1	3	-2	0	-1	0	1	0	6
a_2	-1	4	0	0	-1	0	1	8
	$1+2M$	$\mathbf{2+2M}$	0	$-M$	$-M$	0	0	$14M$

Variables hors bases : (x_1, x_2, e_2, e_3)

$$z = x_1 + 2x_2 - 14M + 2Mx_1 + 2Mx_2 - Me_2 - Me_3$$

Illustration de la méthode des variables pénalisées

La première variable artificielle sort de base.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	
e_1	$5/4$	0	1	0	$1/4$	0	10
a_1	$5/2$	0	0	-1	$1/2$	1	10
x_2	$-1/4$	1	0	0	$-1/4$	0	2
	$\frac{3+5M}{2}$	0	0	$-M$	$-M$	0	$10M-4$

la deuxième variables artificielle sort de base.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	0	0	1	$1/2$	$1/2$	5
x_1	1	0	0	$-2/5$	$-1/5$	4
x_2	0	1	0	$-1/10$	$-3/10$	3
	0	0	0	$3/5$	$4/5$	-10

Les deux variables artificielles sont éliminées et on peut itérer le simplexe normalement pour finir.

III) Introduction à la dualité

Exemple

Problème 1
Une entreprise fabrique deux produits P_1, P_2 à l'aide de 3 machines M_1, M_2, M_3. Chaque produit doit être traité par les 3 machines.

Tps d'utilisation	P_1	P_2	utilis. max
M_1	3 mn/kg	10 mn/kg	60 $h/mois$
M_2	12 mn/kg	8 mn/kg	120 $h/mois$
M_3	12 mn/kg	20 mn/kg	150 $h/mois$
Px de vente	20 $Euros/kg$	35 $Euros/kg$	
Px d'achat mat. prem.	10 $Euros/kg$	10 $Euros/kg$	

Modélisation du problème 1

Variables de décision
x_1 : quantité mensuelle de produit P_1 fabriqué
x_2 : quantité mensuelle de produit P_2 fabriqué

Programme Linéaire

$$\max\ z = 10x_1 + 25x_2$$
$$\mathcal{P} \begin{cases} 3\ x_1 + 10\ x_2 \leq 3600 \\ 12\ x_1 + 8\ x_2 \leq 7200 \\ 12\ x_1 + 20\ x_2 \leq 9000 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Solution optimale
$x_1^* = 300, x_2^* = 270$ et $z^* = 9750$

Introduction à la dualité

Imaginons qu'on cherche à estimer la valeur optimale de l'objectif de $\mathcal{P}$.

- on voit que $(300, 200)$ est réalisable et donne $z = 8000$
- on voit que $(200, 300)$ est réalisable et donne $z = 9500$

On a déjà une borne inférieure : $z^* \geq 9500$

Pour avoir une borne supérieure on peut par exemple sommer les contraintes 1 et 3 :

Il vient : $15x_1 + 30x_2 \leq 12600$

En remarquant que : $10x_1 + 25x_2 \leq 15x_1 + 30x_2$ du fait de la non-négativité des variables, on déduit que $z^* \leq 12600$

Beaucoup d'autres combinaisons sont possibles. Comment trouver la meilleure ?

Recherche de la meilleure borne supérieure

Si on multiplie la contrainte i par la quantité $v_i \geq 0$, et que l'on somme les contraintes obtenues on obtiendra une borne supérieure qui s'écrira :

$$3600v_1 + 7200v_2 + 9000v_3$$

A condition que la combinaison linéaire obtenue soit bien un majorant de la fonction objectif intiale, ce qui nécessite de satisfaire les contraintes :

$$\begin{array}{l} 3\ v_1 + 12\ v_2 + 12\ v_3 \geq 10 \\ 10\ v_1 + 8\ v_2 + 20\ v_3 \geq 25 \end{array}$$

Si l'on cherche à minimiser la borne pour trouver v_1, v_2, v_3 donnant la meilleure approximation supérieure possible, on tombe sur un nouveau PL à résoudre nommé *problème dual* de $\mathcal{P}$!

Formalisation du problème dual

Programme dual de $\mathcal{P}$

$$\mathcal{D}\ \begin{cases} \min\ z' = 3600v_1 + 7200v_2 + 9000v_3 \\ 3\ v_1 + 12\ v_2 + 12\ v_3 \geq 10 \\ 10\ v_1 + 8\ v_2 + 20\ v_3 \geq 25 \\ v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale

$v_1^* = 5/3, v_2^* = 0, v_3^* = 5/12$ et $z'^* = 9750$

$\mathcal{D}$ est le PROBLÈME DUAL du problème $\mathcal{P}$

Quelques remarques

1. $\mathcal{P}$ étant écrit sous forme max, $\mathcal{D}$ est écrit sous forme min
2. Le dual $\mathcal{D}$ comporte autant de variables que le primal $\mathcal{P}$ a de contraintes
3. Le dual $\mathcal{D}$ comporte autant de contraintes que le primal $\mathcal{P}$ a de variables
4. Les coefficients de la fonction objectif de $\mathcal{P}$ sont les seconds membres des contraintes de $\mathcal{D}$
5. Les seconds membres des contraintes de $\mathcal{P}$ sont les coefficients de la fonction objectif de $\mathcal{D}$
6. Les colonnes de la matrice des contraintes de $\mathcal{P}$ sont les lignes de la matrice de contraintes de $\mathcal{D}$
7. A l'optimum, les valeurs des fonctions objectifs sont égales

Dual d'une forme canonique

Soit le problème primal sous forme canonique :

$c^t = (c_1, \dots, c_n) \qquad x^t = (x_1, \dots, x_n)$

$$\mathcal{P}\ \begin{cases} \max\ z & = & c^t x \\ Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Le programme dual s'écrit :

$v^t = (v_1, \dots, v_m)$

$$\mathcal{D}\ \begin{cases} \min\ z' & = & v^t b \\ A^t v & \geq & c \\ v & \geq & 0 \end{cases}$$

Le dual du dual est le problème primal

Dual d'une forme standard

Soit le problème primal sous forme canonique :

$c^t = (c_1, \dots, c_n) \qquad x^t = (x_1, \dots, x_n)$

$$\mathcal{P}\ \begin{cases} \max\ z & = & c^t x \\ Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Le programme dual s'écrit :

$v^t = (v_1, \dots, v_m)$

$$\mathcal{D}\ \begin{cases} \min\ z' & = & v^t b \\ A^t v & \geq & c \\ v & qcq & \end{cases}$$

Le dual du dual est le problème primal

Exemples de formes plus générales et leur dual

Le dual du problème :

$$\max \ z = 10x_1 + 25x_2$$

$$\mathcal{P} \begin{cases} 3 x_1 + 10 x_2 \leq 3600 \\ 12 x_1 + 8 x_2 = 7200 \\ 12 x_1 + 20 x_2 \geq 9000 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

est :

$$\min \ z' = 3600v_1 + 7200v_2 - 9000v_3$$

$$\mathcal{D} \begin{cases} 3 v_1 + 12 v_2 - 12 v_3 \geq 10 \\ 10 v_1 + 8 v_2 - 20 v_3 \geq 25 \end{cases}$$

$$v_1 \geq 0, v_2 \in \mathbb{R}, v_3 \geq 0$$

Exemples de formes plus générales et leur dual

Le dual du problème :

$$\min \ z = 10x_1 + 25x_2$$

$$\mathcal{P} \begin{cases} 3 x_1 + 10 x_2 \leq 3600 \\ 12 x_1 + 8 x_2 = 7200 \\ 12 x_1 + 20 x_2 \geq 9000 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

est :

$$\max \ z' = -3600v_1 + 7200v_2 + 9000v_3$$

$$\mathcal{D} \begin{cases} -3 v_1 + 12 v_2 + 12 v_3 \leq 10 \\ -10 v_1 + 8 v_2 + 20 v_3 \leq 25 \end{cases}$$

$$v_1 \geq 0, v_2 \in \mathbb{R}, v_3 \geq 0$$

Exemples de formes plus générales et leur dual

Le dual du problème :

$$\max \ z = 10x_1 + 25x_2$$

$$\mathcal{P} \begin{cases} 3 x_1 + 10 x_2 \leq 3600 \\ 12 x_1 + 8 x_2 \leq 7200 \\ 12 x_1 + 20 x_2 \leq 9000 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

est :

$$\min \ z' = 3600v_1 + 7200v_2 + 9000v_3$$

$$\mathcal{D} \begin{cases} 3 v_1 + 12 v_2 + 12 v_3 \geq 10 \\ 10 v_1 + 8 v_2 + 20 v_3 = 25 \end{cases}$$

$$v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0$$

Exemples de formes plus générales et leur dual

Le dual du problème :

$$\min \ z = 10x_1 + 25x_2$$

$$\mathcal{P} \begin{cases} 3 x_1 + 10 x_2 \geq 3600 \\ 12 x_1 + 8 x_2 \geq 7200 \\ 12 x_1 + 20 x_2 \geq 9000 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

est :

$$\max \ z' = 3600v_1 + 7200v_2 + 9000v_3$$

$$\mathcal{D} \begin{cases} 3 v_1 + 12 v_2 + 12 v_3 \leq 10 \\ 10 v_1 + 8 v_2 + 20 v_3 = 25 \end{cases}$$

$$v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0$$

En résumé : pour construire le dual d'une forme générale

Cas d'un problème de maximisation (recherche d'une borne sup)

- $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \rightarrow \quad \times v_i$, variable duale $v_i \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \rightarrow \quad \times v_i$ variable duale v_i non signée
- $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad \rightarrow \quad \times(-v_i)$, variable duale $v_i \geq 0$

Cas d'un problème de minimisation (recherche d'une borne inf)

- $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad \rightarrow \quad \times v_i$ variable duale $v_i \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \rightarrow \quad \times v_i$ variable duale v_i non signée
- $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \rightarrow \quad \times(-v_i)$, variable duale $v_i \geq 0$

Exercice

Quel est le dual du problème ?

$$\min \; z = 10x_1 + 25x_2$$

$$\mathcal{P} \begin{cases} 3 & x_1 & + & 10 & x_2 & = & 3600 \\ 12 & x_1 & + & 8 & x_2 & \leq & 7200 \\ 12 & x_1 & + & 20 & x_2 & \geq & 9000 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}$$