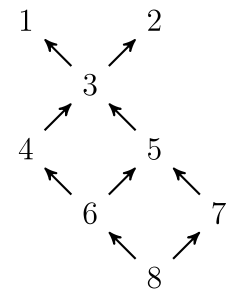
TD2 : Ensembles ordonnés, Relations d'ordre

Exercice 1 [Majorants, minorants, borne supérieure, borne inférieure]
Soit $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ un ensemble ordonné selon le diagramme suivant :



On considère le sous-ensemble $V = \{4, 5, 6\}$ de W.

1. Trouver l'ensemble des majorants de V.
2. Trouver l'ensemble des minorants de V.
3. Est-ce que $\sup(V)$ existe ?
4. Est-ce que $\inf(V)$ existe ?

Exercice 2
Soit R la relation définie sur l'ensemble $E = \{(1,3), (3,1), (3,5), (5,3), (5,7), (7,5), (7,7)\}$ par :

$$(m_1, m_2)\, R\, (n_1, n_2) \text{ si et seulement si } m_1 \leq n_1 \text{ et } m_2 \leq n_2$$

Pour l'ensemble $A = \{(3,5), (5,3), (5,7), (7,5)\}$ donner, s'ils existent, les éléments maximaux, les éléments minimaux, les majorants, les minorants, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne inférieure et la borne supérieure.

Exercice 3
On définit la relation $\preceq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $(a, b) \preceq (c, d)$ ssi $a + b < c + d$ ou $(a, b) = (c, d)$.

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.
2. Cet ordre est-il total ? bien fondé ? Justifier les réponses.
3. Soit l'ensemble $A = \{(0,2), (2,1), (1,2), (2,2)\}$. Déterminer, s'ils existent, les minorants, les majorants, les éléments minimaux, les éléments maximaux, la borne inférieure, la borne supérieure, le minimum, le maximum de A.
4. Même question pour $B = \{(0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (2,1), (3,0)\}$.

Exercice 4
Soit $E = \{2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, ordonné par la relation «x divise y».

1. Vérifier que cette relation est une relation d'ordre.
2. Déterminer les éléments minimaux de E
3. Déterminer les éléments maximaux de E.

Exercice 5
On se place dans $F = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ordonné par la relation «x divise y».

1. Existe-t-il une borne supérieure et une borne inférieure pour tout sous-ensemble de 2 éléments ?
2. Soient les ensembles $A = \{6, 15, 21\}$ et $B = \{1, 6, 14, 21\}$. Donner les minorants et majorants de A (resp. B). A (resp. B) possède-t-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?
3. Soit $A = \{3, 6, 12, 15\}$. Donner les majorants, minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus petit et le plus grand élément, les éléments maximaux, minimaux s'ils existent. Discuter.

Exercice 6
Donner un exemple d'ensemble ordonné qui a exactement un élément maximal mais qui n'a pas de plus grand élément.

Exercice 7
Soit $A = \{a, b, c\}$ un ensemble ordonné comme l'indique le diagramme suivant :

$$b \longrightarrow a \longleftarrow c$$

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles non-vides et totalement ordonnés de A ; $\mathcal{A}$ est partiellement ordonné par inclusion. Représenter graphiquement l'ordre de $\mathcal{A}$.

Exercice 8

1. Définir la relation "est un préfixe de" sur A^*. S'agit-il d'une relation d'ordre ? si oui, s'agit-il d'un ordre total ou d'un ordre partiel ?
2. En supposant que A est muni d'un ordre total $\preceq_A$, définir l'ordre lexicographique sur A^*. S'agit-il d'un ordre total ou d'un ordre partiel ?
3. Soit $A = \{a, b\}$ tel que $a \preceq_A b$. Montrer que l'ordre lexicographique défini à la question précédente n'est pas un ordre bien fondé.

Exercice 9 Les ordres suivants sont-ils bien fondés ?

1. sur A^2, l'ordre lexicographique (A alphabet totalement ordonné).
2. sur $\mathbb{N}$ $m \leq n$ ssi m divise n.
3. sur l'ensemble des diviseurs d'un entier donné, la relation du 2.
4. sur A^*, l'ordre préfixe.
5. sur A^*, l'ordre $u \leq v$ ssi u est un sous-mot de v.
6. sur A^*, l'ordre lexicographique (A alphabet totalement ordonné).
7. sur $A^*/\equiv$, l'ordre des longueurs $u \leq v$ ssi $|u| \leq |v|$ (où $\equiv$ est défini par $u \equiv v$ si et seulement si $|u| = |v|$).

Exercice 10
Montrer que les ensembles ordonnés $\wp(\{a, b, c\})$ muni de la relation d'inclusion et $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ muni de la relation de division (dans $\mathbb{N}$) sont isomorphes.

Exercice 11
Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\preceq$ et soit A une partie de E.

1. Montrer que si A admet un plus grand élément alors cet élément est l'unique élément maximal. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.
2. On suppose que la relation d'ordre $\preceq$ est *totale*. Montrer qu'alors, si A admet un élément maximal, cet élément est unique. Montrer de plus que dans ce cas, cet élément maximal est le plus grand élément de A.

Exercice 12
Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$. Montrer que si cette relation est totale, alors pour tout $x, y \in E$: ($x \leq y$ et $x \neq y$) ssi $y \not\leq x$.

Exercice 13
On considère un ensemble E muni d'une opération binaire notée $\sqcup$ telle que $\sqcup$ est commutative, associative et idempotente (c'est-à-dire pour tout $x \in E$, $x \sqcup x = x$). On définit la relation $\preceq$ sur E par : $x \preceq y$ ssi $x \sqcup y = y$.

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.
2. Montrer que toute paire d'éléments admet une borne supérieure.

Exercice 14
Soit E un ensemble. On considère l'ensemble $\wp(E)$ des parties de E, muni de la relation d'ordre partiel $\subseteq$. Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$\inf(\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}) = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ et } \sup(\{A_1, \cdots, A_n\}) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Exercice 15
Soit E un ensemble. On considère l'ensemble $\wp(E)$ des parties de E et X un sous-ensemble de E.

1. La relation $\leq_X$ définie sur $\wp(E)$ par :

$$A_1 \leq_X A_2 \text{ ssi } A_1 \cap X \subseteq A_2 \cap X$$

   est-elle une relation d'ordre ? Pourquoi ?
2. Montrer que la relation $\equiv_X$ définie sur $\wp(E)$ par :

$$A_1 \equiv_X A_2 \text{ ssi } A_1 \cap X = A_2 \cap X$$

   est une relation d'équivalence.
3. On considère l'ensemble des classes d'équivalence de $\wp(E)$ pour la relation $\equiv_X$ et on définit sur cet ensemble la relation $\preceq_X$ par :

$$[A_1]_{\equiv_X} \preceq_X [A_2]_{\equiv_X} \text{ ssi } A_1 \leq_X A_2$$

   Montrer que $\preceq_X$ est une relation d'ordre.

Exercice 16

1. On note $\wp(\mathbb{N})$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$. On considère les deux ensembles ordonnés $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ et $(\mathbb{N}, \leq)$, où $\subseteq$ est la relation d'inclusion d'ensembles, et $\leq$ est la relation d'ordre usuelle sur les entiers naturels. On définit une application $f : \wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ par $f(X) = \sum_{x \in X} x$, pour tout $X \in \wp(\mathbb{N})$. L'application f est-elle monotone ?
2. Soit le sous-ensemble $E = \wp(\{1, 2, 3\})$ de $\wp(\mathbb{N})$, ordonné par la relation d'inclusion d'ensembles.
   (a) Représenter la relation d'ordre par un graphe (sans les arcs de réflexivité ni de transitivité).
   (b) Pour la partie $A = E \setminus \{1, 2, 3\}$, donner l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants. Donner, lorsqu'ils existent, la borne inférieure, la borne supérieure, le plus petit élément et le plus grand élément. S'ils n'existent pas, indiquer « n'existe pas ». Donner les éléments minimaux et les éléments maximaux.
3. Soient $(E, \preceq_1)$ et $(F, \preceq_2)$ deux ensembles ordonnés, et soit $f : E \to F$ une application monotone. Soit A une partie de E. On note $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.
   (a) Montrer que si A admet un plus grand élément M, alors $f(M)$ est le plus grand élément de $f(A)$.
   (b) Peut-on affirmer que si A admet une borne supérieure B, alors $f(B)$ est la borne supérieure de $f(A)$? On pourra s'inspirer de l'application f définie à la question 1, et de la partie A définie à la question 2.