TD5 : Logique

Exercice 1 [Fonctions booléennes]

1. Construire la table de vérité de la fonction booléenne correspondant à l'opérateur booléen "ou exclusif", noté XOR, et donner une expression booléenne associée. Donner des formes normales disjonctives et conjonctives pour cette fonction.
2. Donner une expression booléenne pour la fonction f définie par :

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

3. Donner une expression booléenne pour la fonction g définie par :

x_1	x_2	x_3	$g(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

   et en donner une forme normale conjonctive.
4. Donner une forme normale conjonctive pour la fonction $h(x,y,z) = xy + yz + xz$.

Exercice 2 [Formules logiques et fonctions booléennes]
On considère la formule F suivante :

$$(p \land q \land \neg r) \lor (p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land q \land r)$$

1. Les formules F et $\neg F$ sont-elles satisfaisables ? Sont-elles valides (des tautologies) ? Donner des formes normales conjonctives et disjonctives pour les fonctions booléennes représentant ces formules.
2. Déterminer une formule G telle que $(F \land G) \lor (\neg F \land \neg G)$ soit une formule valide (i.e. une tautologie).

Exercice 3 [Enigme]
Anna et Mathias sont accusés d'un crime. Il font les déclarations suivantes :

Anna : Mathias est coupable.
Mathias : Nous sommes tous les deux innocents.

1. On suppose que tous les deux ont menti. Peut-on déterminer qui est coupable, qui ne l'est pas ?

2. On suppose maintenant que les coupables mentent et que les innocents disent la vérité. Peut-on déterminer qui est coupable, qui ne l'est pas ?

Exercice 4 [Conséquence sémantique]
Les conséquences sémantiques suivantes sont-elles vérifiées ?

1. $p \to q \models \neg q \to \neg p$
2. $p \to q \models q \to p$
3. $p \to q \models \neg p \to \neg q$
4. $\{p \vee q, \neg p\} \models q$
5. $\{p \vee q, p \to r, q \to r\} \models r$
6. $\{\neg(p \vee q), r \to q\} \models \neg(p \vee r)$

Exercice 5 [Formules valides, conséquence sémantique]
Soit φ et ψ deux formules de la logique des propositions. Montrer que $\varphi \models \psi$ si et seulement si $\varphi \to \psi$ est valide.

Exercice 6 [Formules valides, formules satisfiables]
Les formules suivantes sont-elles satisfaisables ? sont-elles valides (des tautologies) ?

(1) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	(2) $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$
(3) $(p \to q) \to (q \to p)$	(4) $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$
(5) $(p \to q) \to p$	(6) $p \to (q \to p)$

Exercice 7
Un logicien dit à son fils : "si tu ne ranges pas ta chambre, tu n'iras pas au cours de logique" ; le fils range sa chambre, et est envoyé au cours de gymnastique tout de suite après. Quelle erreur avait-il faite en pensant aller au cours de logique ?

Exercice 8 [Enigme]
Anissa, Antoine et Jennifer ont un examen de logique à passer. On suppose que :

A : L'un des trois au moins révisera pour l'examen.
B : Si Anissa ne révise pas, alors Antoine non plus.
C : Si Anissa révise, alors Jennifer aussi.

Formaliser ces trois hypothèses. Peut-on dire qui révisera ? qui ne révisera pas ?

Exercice 9 [Enigme]

1. Soit f la fonction booléenne à 3 variables définie par :
   $f(x,y,z) = (\overline{x}.z + \overline{y})(\overline{x} + \overline{y}.\overline{z})(xy + yz + xz)$.
   (a) La fonction f est-elle sous forme normale conjonctive ? disjonctive ?
   (b) Donner une forme normale disjonctive pour f et en déduire une forme normale conjonctive.

2. Le lendemain de Noël, on retrouve une boîte de chocolats totalement vide. Pour trouver les coupables qui ont mangé des chocolats, on interroge les trois enfants qui font les déclarations suivantes :

   Anissa : (A) Si Boris est coupable alors Charlotte aussi et je suis innocente.
   Boris : (B) au moins deux d'entre nous ont mangé des chocolats.
   Charlotte : (C) Si Anissa est coupable alors Boris et moi sommes innocents.

   (a) Exprimer chacune des trois déclarations A, B et C comme une formule, à l'aide des propositions p : *Anissa a mangé des chocolats*, q : *Boris a mangé des chocolats*, r : *Charlotte a mangé des chocolats*.

   (b) Pour une interprétation $\mathbf{I}$, calculer les interprétations de ces trois formules $\mathbf{I}(A)$, $\mathbf{I}(B)$ et $\mathbf{I}(C)$, en fonction de $\mathbf{I}(p)$, $\mathbf{I}(q)$, $\mathbf{I}(r)$.

   (c) On suppose que les trois enfants disent la vérité. Que peut-on en déduire sur la réponse à la question : qui a mangé des chocolats ?

   (d) Après une enquête plus approfondie, il s'avère que Boris et Anissa sont coupables et Charlotte innocente. En utilisant (b), dire qui a menti et qui a dit la vérité.

Exercice 10 [Enigme]

1. Soit f la fonction booléenne à 5 variables définie par :
   $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$
   $x_1.(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_3 + x_4)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_4})(x_2 + x_3 + \overline{x_4} + x_5)$.

   (a) La fonction f est-elle sous forme normale conjonctive ? disjonctive ?

   (b) Montrer que pour deux éléments quelconques a et b de $\mathbb{B}$, $(a+b)(a+\overline{b}) = a$.

   (c) En déduire que $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1.\overline{x_3}.x_4.(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_4})(x_2 + x_3 + \overline{x_4} + x_5)$, puis en déduire une forme normale à la fois disjonctive et conjonctive pour f.

2. Des étudiants sont invités à une fête de nouvel an. On sait que :
   1. Abdel vient.
   2. Si Abdel vient mais pas Brigitte alors Carl ne vient pas.
   3. Si Brigitte et Carl viennent alors Abdel ne vient pas.
   4. Si Abdel vient alors Dina ou Carl aussi.
   5. Si Dina vient alors Abdel ne vient pas ou Brigitte ne vient pas.
   5. Si Dina vient mais pas Brigitte ni Carl alors Elie vient.

   (a) Exprimer chacune de ces informations comme une formule, à l'aide des propositions a : *Abdel vient*, b : *Brigitte vient*, c : *Carl vient*, d : *Dina vient*, e : *Elie vient*.

   (b) Pour une interprétation $\mathbf{I}$, calculer les interprétations de ces formules en fonction de $\mathbf{I}(a)$, $\mathbf{I}(b)$, $\mathbf{I}(c)$, $\mathbf{I}(d)$ et $\mathbf{I}(e)$.

   (c) Qui vient à la fête ? (Justifier la réponse).