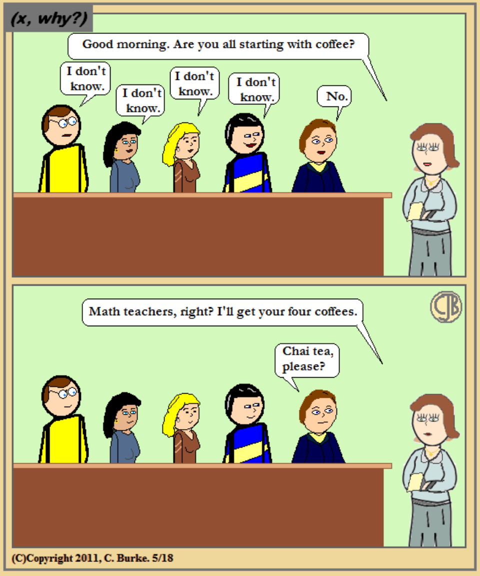
Logique et Représentation des Connaissances III - Notions de connaissance de groupe

N. Maudet

2025–2026

LRC Master Informatique

Coffee logic



Source : https ://mrburkemath.blogspot.com/2011/05/coffee-logic.html

De nouvelles modalités

On introduit trois nouvelles modalités permettant de représenter différentes notions de connaissance pour groupe d'agents G.

- E_G : "tout le monde dans la groupe G sait que..."
- C_G : "c'est une connaissance commune dans le groupe G que..."
- D_G : "c'est une connaissance distribuée dans le groupe G que..."

Nous allons détailler chacune des trois notions.

Fagin, Halpern, Moses, Vardi. *Reasoning about knowledge*. MIT Press.

E_G : tout le monde sait que...

La définition est directe :

$M, w \models E_G\phi$ ssi $M, w \models K_i\phi$ pour tous les agents $i \in G$

C_G : il est connaissance commune que...

Il y a connaissance commune lorsque tout le monde sait que ϕ, et que tout le monde sait que tout le monde sait que ϕ, etc.

Autrement dit, en posant $E^0_G\phi \equiv \phi$ et $E^{k+1}_G\phi \equiv E_G E^k_G\phi$, la définition de $C_G\phi$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$M, w \models C_G\phi \text{ ssi } M, w \models E^k_G\phi \text{ pour } k = 1, 2 \cdots + \infty$$

C_G : il est connaissance commune que...

G-atteignable

Soient w_1 et w_2 deux mondes et G un groupe d'agents. On dit que w_2 est G-atteignable depuis w_1 dans une structure de Kripke si il existe un chemin de w_1 à w_2 dont les arcs sont labellisés par des agents appartenant au groupe G.

On peut alors reformuler :

- $M, w \models E_G^k \phi$ ssi $M, w' \models \phi$ pour tous les mondes w' G-atteignables depuis w en k arcs.
- $M, w \models C_G \phi$ ssi $M, w' \models \phi$ pour tous les mondes w' G-atteignables depuis w (en un nombre quelconque d'arcs).

D_G : il est connaissance distribuée que...

Intuitivement, ϕ est une connaissance distribuée dans le groupe G si on peut déduire ϕ en combinant les connaissances des agents du groupe G (ie. si les agents se communiquent leurs connaissances).

$M, w \models D_G\phi$ ssi $(M, w') \models \phi$ pour tout w' tel que $(w, w') \in \cap_{i \in G} R_i$

Quelques propriétés

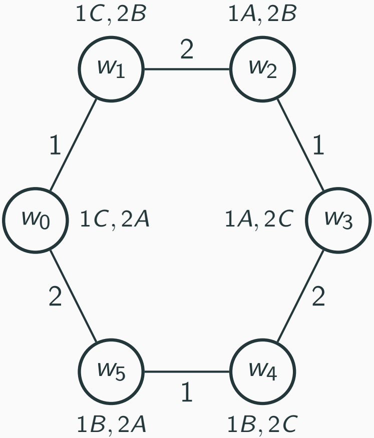
- si $C_G\phi$ alors $C'_G\phi$ pour tout $G' \subseteq G$
  une connaissance commune de G reste une connaissance commune dans les sous-groupes de G

Quelques propriétés

- si $C_G\phi$ alors $C'_G\phi$ pour tout $G' \subseteq G$
  une connaissance commune de G reste une connaissance commune dans les sous-groupes de G
- $D_G\phi$ alors $D'_G\phi$ pour tout $G' \supseteq G$
  une connaissance distribuée de G reste une connaissance distribuée dans les groupes qui contiennent G

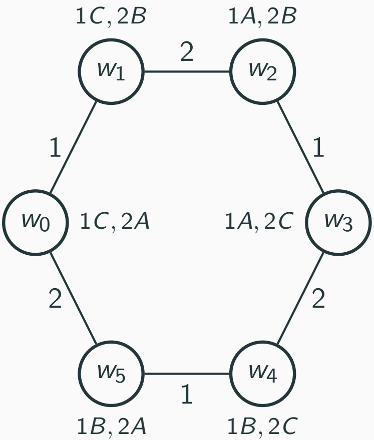
Quelques propriétés

- si $C_G\phi$ alors $C'_G\phi$ pour tout $G' \subseteq G$
  une connaissance commune de G reste une connaissance commune dans les sous-groupes de G
- $D_G\phi$ alors $D'_G\phi$ pour tout $G' \supseteq G$
  une connaissance distribuée de G reste une connaissance distribuée dans les groupes qui contiennent G
- $C_G\phi \rightarrow E_G\phi$ et $E_G\phi \rightarrow D_G\phi$



Avec le groupe $G = \{1, 2\}$.

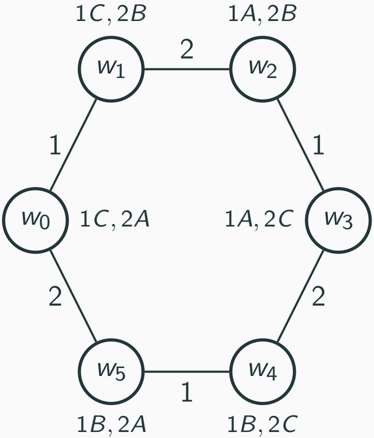
- $M, w_2 \models C_G(1A \vee 1B \vee 1C)$



Avec le groupe $G = \{1, 2\}$.

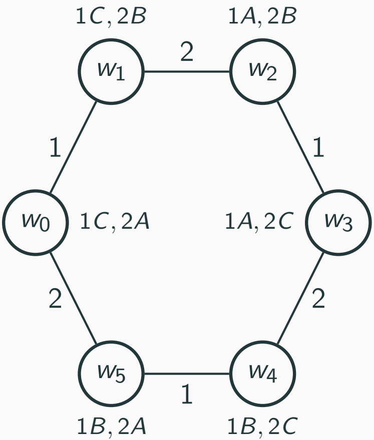
- $M, w_2 \models C_G(1A \vee 1B \vee 1C)$ ✔
- $M, w_2 \models C_G(1B \rightarrow (2A \vee 2C))$

Exemple : Jeu de carte [Halpern et al.]



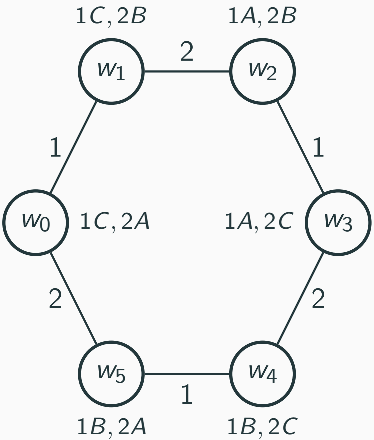
Avec le groupe $G = \{1, 2\}$.

- $M, w_2 \models C_G(1A \vee 1B \vee 1C)$ ✔
- $M, w_2 \models C_G(1B \rightarrow (2A \vee 2C))$ ✔
- $M, w_2 \models D_G(1A \wedge 2B)$



Avec le groupe $G = \{1, 2\}$.

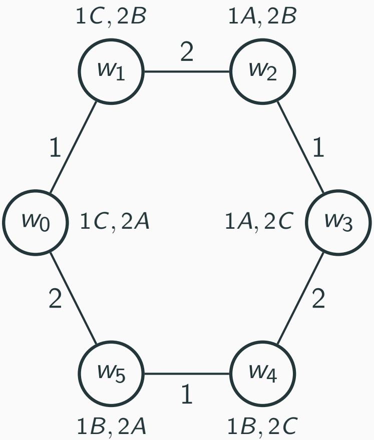
- $M, w_2 \models C_G(1A \vee 1B \vee 1C)$ ✔
- $M, w_2 \models C_G(1B \rightarrow (2A \vee 2C))$ ✔
- $M, w_2 \models D_G(1A \wedge 2B)$ ✔
- $M, w_2 \models E_G \neg 1B$



Avec le groupe $G = \{1, 2\}$.

- $M, w_2 \models C_G(1A \vee 1B \vee 1C)$ ✔
- $M, w_2 \models C_G(1B \rightarrow (2A \vee 2C))$ ✔
- $M, w_2 \models D_G(1A \wedge 2B)$ ✔
- $M, w_2 \models E_G \neg 1B$ ✔
- $M, w_2 \models C_G \neg 1B$

Exemple : Jeu de carte [Halpern et al.]



Avec le groupe $G = \{1, 2\}$.

- $M, w_2 \models C_G(1A \vee 1B \vee 1C)$ ✔
- $M, w_2 \models C_G(1B \rightarrow (2A \vee 2C))$ ✔
- $M, w_2 \models D_G(1A \wedge 2B)$ ✔
- $M, w_2 \models E_G \neg 1B$ ✔
- $M, w_2 \models C_G \neg 1B$ ✘

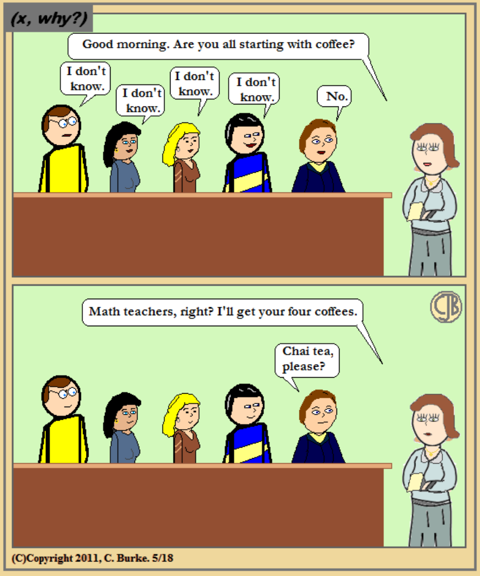
Annonces publiques

L'effet d'une annonce publique $[\phi]$ (un agent déclare publique que ϕ) est de restreindre la structure de Kripke aux seuls mondes possibles dans lesquels ϕ est vrai.

On introduit donc un aspect dynamique dans la structure.

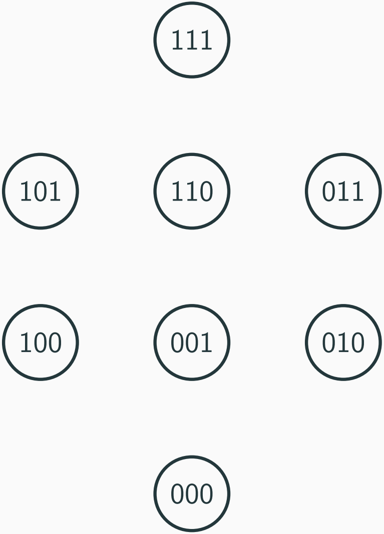
Attention : cela se distingue (subtilement) du fait de rendre ϕ connaissance commune : en effet, une annonce peut parfois être non réussie au sens où $\neg\phi$ est vraie après l'annonce publique.

Retour sur Coffee logic



Source : https ://mrburkemath.blogspot.com/2011/05/coffee-logic.html

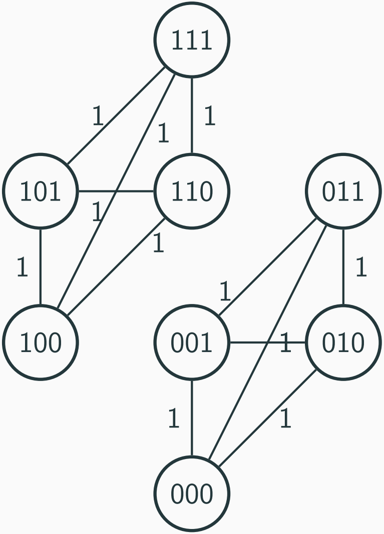
Retour sur Coffee logic



On ne représente que les relations de l'agent concerné à son tour.

Séquence d'annonces publiques :

Retour sur Coffee logic



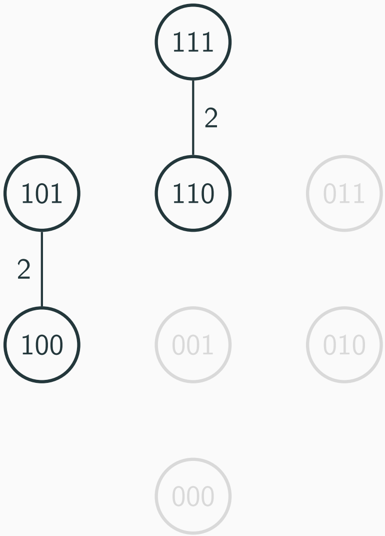
On ne représente que les relations de l'agent concerné à son tour.

Séquence d'annonces publiques :

- Vous prenez tous un café ?

1 :

Retour sur Coffee logic



On ne représente que les relations de l'agent concerné à son tour.

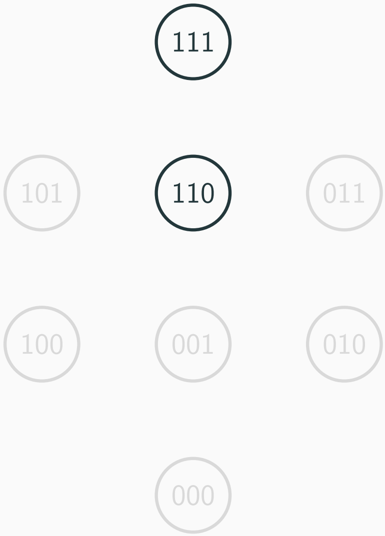
Séquence d'annonces publiques :

- Vous prenez tous un café ?

1 : Je ne sais pas

2 :

Retour sur Coffee logic



On ne représente que les relations de l'agent concerné à son tour.

Séquence d'annonces publiques :

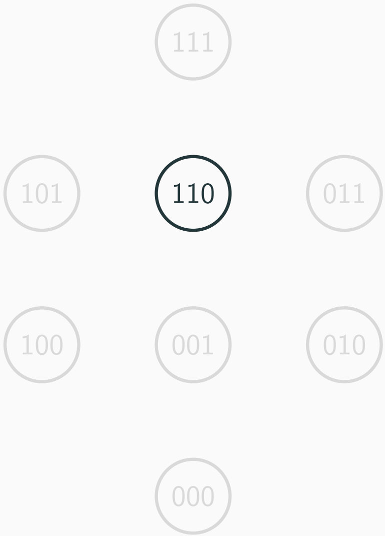
- Vous prenez tous un café ?

1 : Je ne sais pas

2 : Je ne sais pas

3 :

Retour sur Coffee logic



On ne représente que les relations de l'agent concerné à son tour.

Séquence d'annonces publiques :

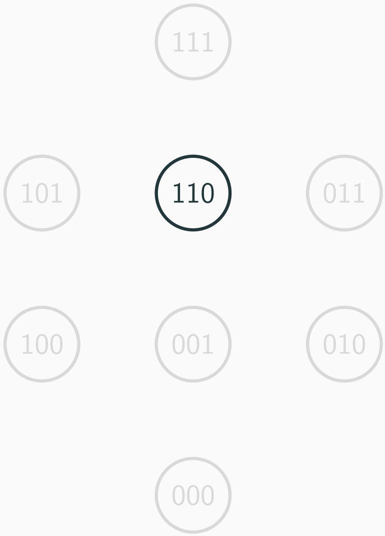
- Vous prenez tous un café ?

1 : Je ne sais pas

2 : Je ne sais pas

3 : Non.

Retour sur Coffee logic



On ne représente que les relations de l'agent concerné à son tour.

Séquence d'annonces publiques :

- Vous prenez tous un café ?

1 : Je ne sais pas

2 : Je ne sais pas

3 : Non.

Enigmes épistémiques : les enfants sales [Halpern et al.]

Un groupe de n enfants jouent ensemble. En jouant, k d'entre eux se salissent les cheveux. Chacun peut voir les cheveux des autres mais pas les siens. En rentrant, leur père, mécontent, déclare (annonce publique) :

« Au moins l'un de vous s'est sali les cheveux ! »

Puis il répète en boucle cette question :

« Est-ce que l'un de vous sait s'il a de la boue sur les cheveux ? »

Enigmes épistémiques : les enfants sales [Halpern et al.]

Un groupe de n enfants jouent ensemble. En jouant, k d'entre eux se salissent les cheveux. Chacun peut voir les cheveux des autres mais pas les siens. En rentrant, leur père, mécontent, déclare (annonce publique) :

« Au moins l'un de vous s'est sali les cheveux ! »

Puis il répète en boucle cette question :

« Est-ce que l'un de vous sait s'il a de la boue sur les cheveux ? »

Pendant $k - 1$ tours, tous les enfants répondent non à la question, mais au tour k tous les enfants sales répondent « Oui ! »

Enigmes épistémiques : les enfants sales [Halpern et al.]

Modélisation (dans le cas de 3 enfants) :

On peut voir chaque monde comme un tuple $\langle x_1, \ldots x_i \ldots x_n \rangle$

- Combien de mondes possibles ?

Enigmes épistémiques : les enfants sales [Halpern et al.]

Modélisation (dans le cas de 3 enfants) :

On peut voir chaque monde comme un tuple $\langle x_1, \ldots x_i \ldots x_n \rangle$

- Combien de mondes possibles ? 8 ($= 2^3$)
- Relations :

Enigmes épistémiques : les enfants sales [Halpern et al.]

Modélisation (dans le cas de 3 enfants) :

On peut voir chaque monde comme un tuple $\langle x_1, \dots x_i \dots x_n \rangle$

- Combien de mondes possibles ? 8 ($= 2^3$)
- Relations : un enfant *i* peut voir si les autres sont sales, mais pas lui : il ne peut pas distinguer deux mondes qui diffèrent seulement en *i*

Enigmes épistémiques : les enfants sales [Halpern et al.]

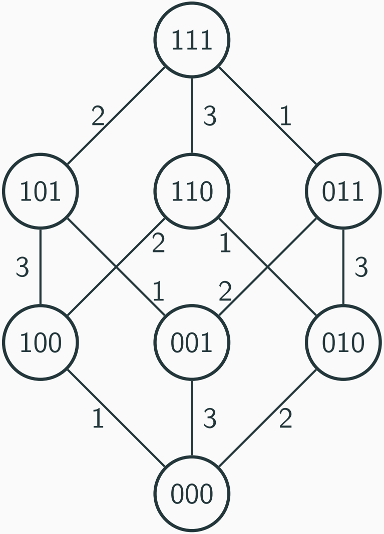
Modélisation (dans le cas de 3 enfants) :

On peut voir chaque monde comme un tuple $\langle x_1, \ldots x_i \ldots x_n \rangle$

- Combien de mondes possibles ? 8 ($= 2^3$)
- Relations : un enfant i peut voir si les autres sont sales, mais pas lui : il ne peut pas distinguer deux mondes qui diffèrent seulement en i
- Propositions : p_i pour l'enfant i est sale, avec raccourci :

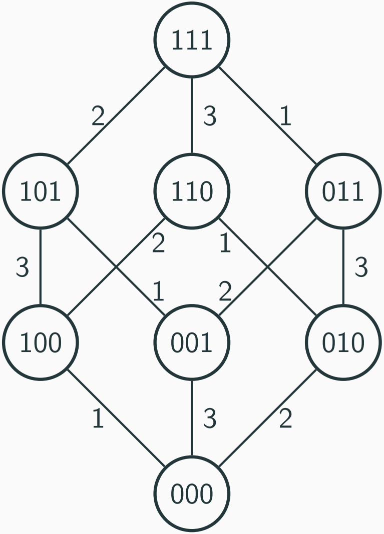
$$p \equiv p1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$$

"au moins un des enfants est sale"



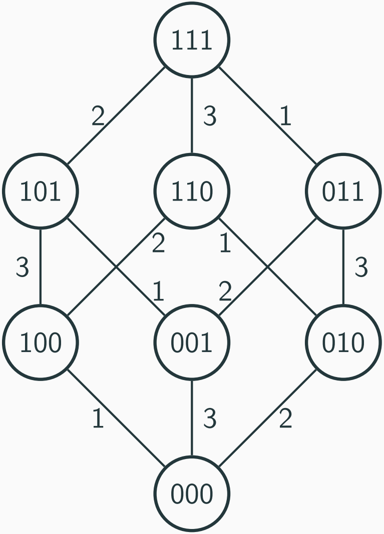
Avec le groupe $G = \{1, 2, 3\}$:

- $M \models C(p_2 \rightarrow K_1 p_2)$



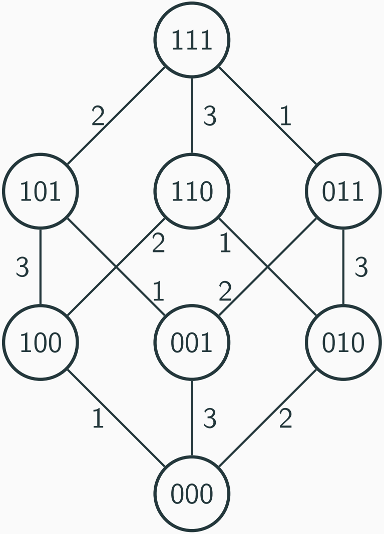
Avec le groupe $G = \{1, 2, 3\}$:

- $M \models C(p_2 \rightarrow K_1 p_2)$ ✔
- $M, (101) \models Ep$



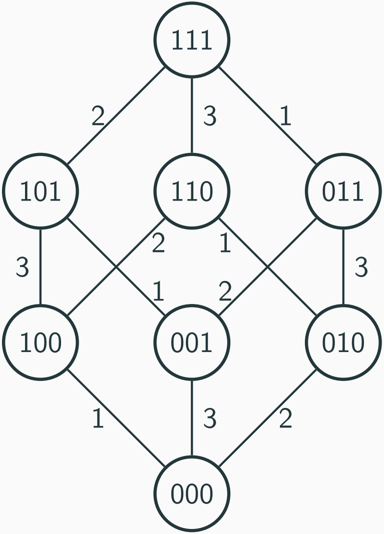
Avec le groupe $G = \{1, 2, 3\}$:

- $M \models C(p_2 \rightarrow K_1 p_2)$ ✔
- $M, (101) \models Ep$ ✔
- $M, (101) \models E^2 p$



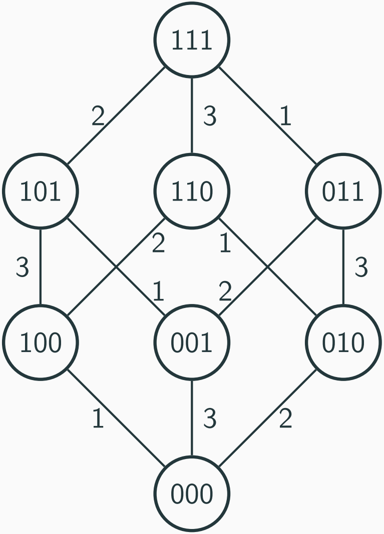
Avec le groupe $G = \{1, 2, 3\}$:

- $M \models C(p_2 \rightarrow K_1 p_2)$ ✔
- $M, (101) \models Ep$ ✔
- $M, (101) \models E^2 p$ ✘
- $M \models D_{12}(p_1 \wedge p_2)$



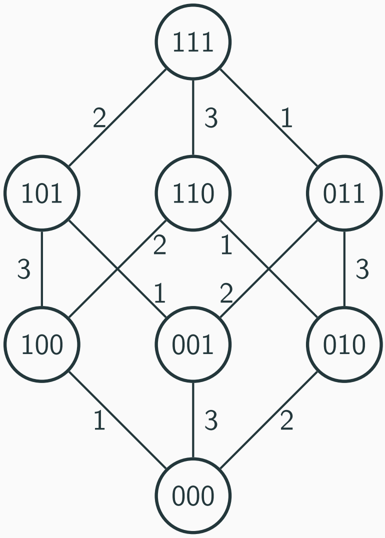
Avec le groupe $G = \{1, 2, 3\}$:

- $M \models C(p_2 \to K_1 p_2)$ ✔
- $M, (101) \models Ep$ ✔
- $M, (101) \models E^2 p$ ✘
- $M \models D_{12}(p_1 \wedge p_2)$ ✘
- $M \models D_{12}\neg(p_1 \wedge p_2)$



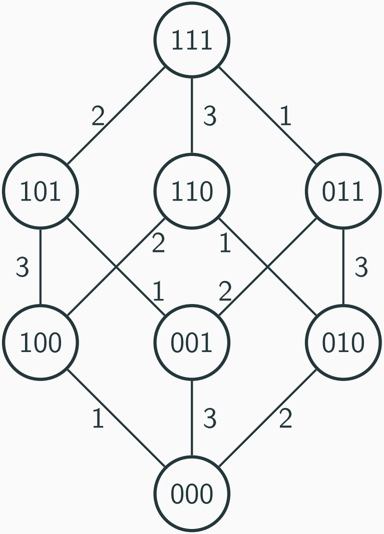
Avec le groupe $G = \{1, 2, 3\}$:

- $M \models C(p_2 \to K_1 p_2)$ ✔
- $M, (101) \models Ep$ ✔
- $M, (101) \models E^2 p$ ✘
- $M \models D_{12}(p_1 \land p_2)$ ✘
- $M \models D_{12}\neg(p_1 \land p_2)$ ✘
- $M \models (D_{12}p_1 \lor D_{12}\neg p_1) \land (D_{12}p_2 \lor D_{12}\neg p_2)$

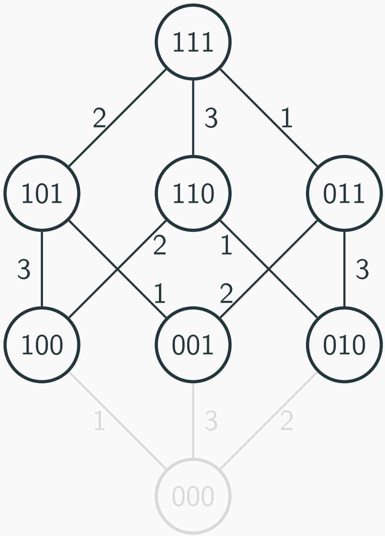


Avec le groupe $G = \{1, 2, 3\}$:

- $M \models C(p_2 \rightarrow K_1 p_2)$ ✔
- $M, (101) \models Ep$ ✔
- $M, (101) \models E^2 p$ ✘
- $M \models D_{12}(p_1 \wedge p_2)$ ✘
- $M \models D_{12}\neg(p_1 \wedge p_2)$ ✘
- $M \models (D_{12} p_1 \vee D_{12}\neg p_1) \wedge (D_{12} p_2 \vee D_{12}\neg p_2)$ ✔



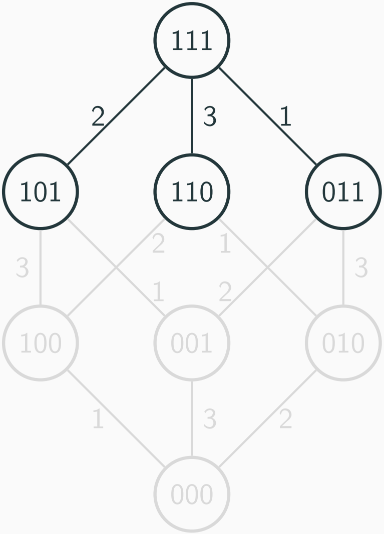
Supposons que 1 et 3 soient sales,
ie. le monde réel est 101.
Séquence d'annonces publiques :



Supposons que 1 et 3 soient sales, ie. le monde réel est 101.

Séquence d'annonces publiques :

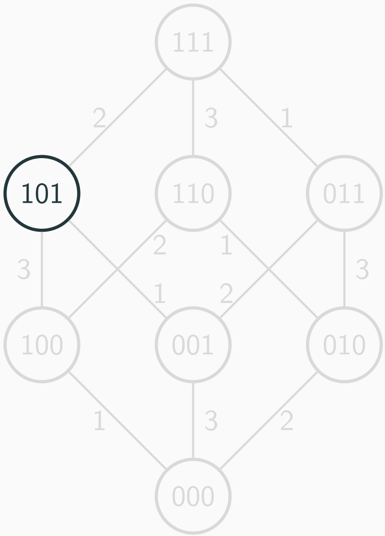
- L'un de vous est sale.



Supposons que 1 et 3 soient sales, ie. le monde réel est 101.

Séquence d'annonces publiques :

- L'un de vous est sale.
- Est-ce que l'un de vous sait si il ou elle est sale ? [silence]

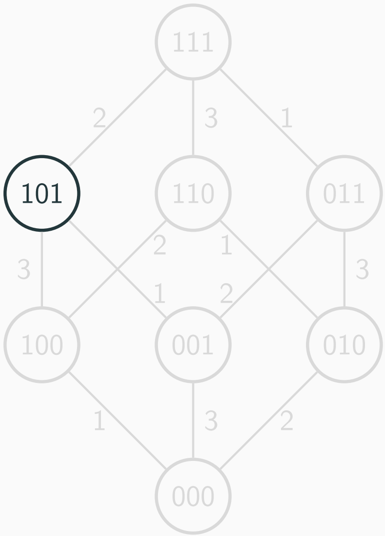


Supposons que 1 et 3 soient sales, ie. le monde réel est 101.

Séquence d'annonces publiques :

- L'un de vous est sale.
- Est-ce que l'un de vous sait si il ou elle est sale ? [silence]
- Est-ce que l'un de vous sait si il ou elle est sale ? [1 :oui/ 3 :oui]

Enigmes épistémiques : les enfants sales [Halpern et al.]



Supposons que 1 et 3 soient sales, ie. le monde réel est 101.

Séquence d'annonces publiques :

- L'un de vous est sale.
- Est-ce que l'un de vous sait si il ou elle est sale ? [silence]
- Est-ce que l'un de vous sait si il ou elle est sale ? [1 :oui/ 3 :oui]

Avant les dernières réponses de 1 et 3, l'agent 2 ne sait pas qu'il n'est pas sale. Il le sait après l'annonce.

Enigmes épistémiques : le magicien et l'épicier [ER, 2016-2017]

Un chef de royaume réunit en son palais un magicien et un épicier, et leur présente sur une table 4 sphères noires, qu'il décrit de la manière suivante :

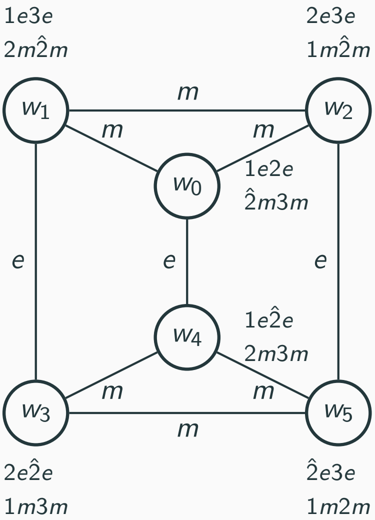
- la première pèse 110 grammes (c'est la légère),
- la deuxième pèse 130 grammes (c'est la lourde),
- les deux restantes pèsent chacune 120 grammes, mais l'une d'elles a des pouvoirs extraordinaire (c'est la magique, tandis que l'autre est la normale). »

Vous aller recevoir un paquet contenant deux des sphères. Vous ne verrez pas les sphères à l'intérieur des paquets. Vous pourrez ensuite communiquer l'un après l'autre. Les seules annonces permises sont de la forme *Je (ne) sais (pas) que j'ai (je n'ai pas) la sphère x*. Si vous réussissez après une annonce chacun à savoir quelles sphères sont dans vos paquets, le royaume est à vous !

Enigmes épistémiques : le magicien et l'épicier [ER, 2016-2017]

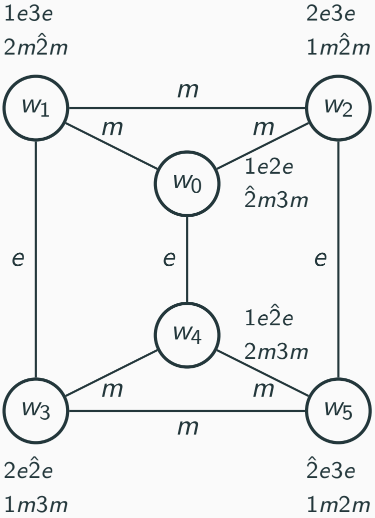
Modélisation : avec 1 pour 110 grammes, 2 pour 120 normale, $\hat{2}$ pour 120 grammes magique, 3 pour 130 grammes, avec par convention le paquet de l'épicier puis le paquet du magicien : $12|\hat{2}3$.

- Combien de mondes ? 6 mondes.
- Relations : l'épicier peut distinguer les mondes dans lesquels le poids de son sachet est différent, le magicien peut distinguer s'il possède la sphère magique ou pas.



Annonces publiques (toutes depuis la situation initiale) :

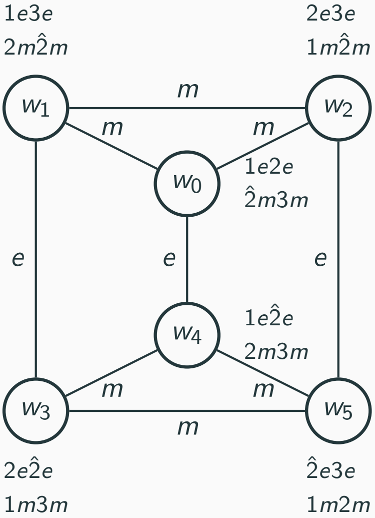
Enigmes épistémiques : le magicien et l'épicier [ER, 2016-2017]



Annonces publiques (toutes depuis la situation initiale) :

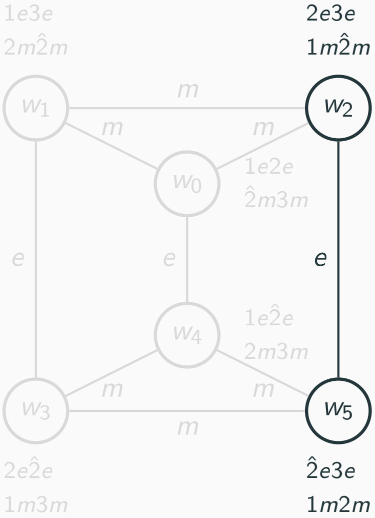
- E : $[\neg K_e \hat{2}e]$.

Enigmes épistémiques : le magicien et l'épicier [ER, 2016-2017]



Annonces publiques (toutes depuis la situation initiale) :

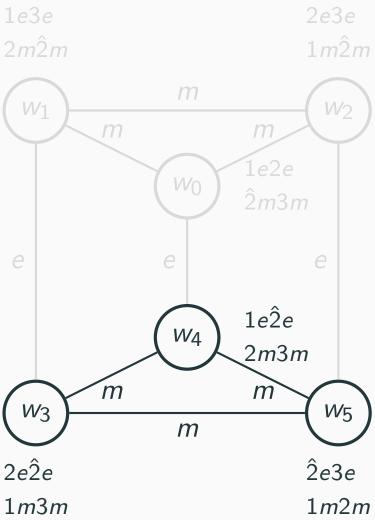
- E : $[\neg K_e \hat{2}e]$.
- E : $[K_e 3e]$



Annonces publiques (toutes depuis la situation initiale) :

- E : $[\neg K_e \hat{2}e]$.
- E : $[K_e 3e]$

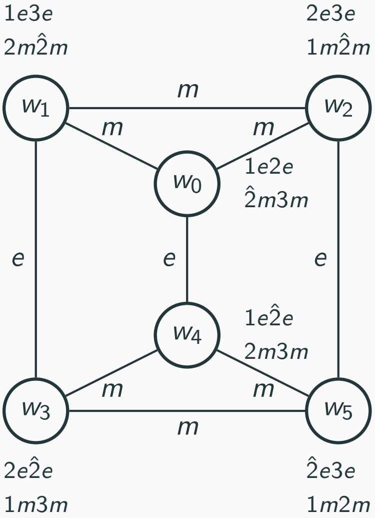
Enigmes épistémiques : le magicien et l'épicier [ER, 2016-2017]



Annonces publiques (toutes depuis la situation initiale) :

- E : $[\neg K_e \hat{2}e]$.
- E : $[K_e 3e]$
- M : $[K_m \neg \hat{2}m]$

Enigmes épistémiques : le magicien et l'épicier [ER, 2016-2017]

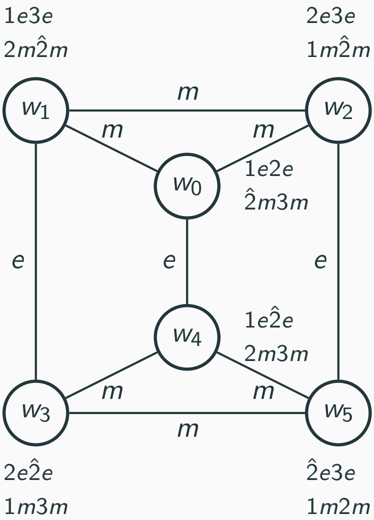


Annonces publiques (toutes depuis la situation initiale) :

- E : $[\neg K_e \hat{2}e]$.
- E : $[K_e 3e]$
- M : $[K_m \neg \hat{2}m]$

Vous êtes le roi, vous choisissez l'ordre de parole et le contenu des paquets, comment garder votre royaume ?

Enigmes épistémiques : le magicien et l'épicier [ER, 2016-2017]



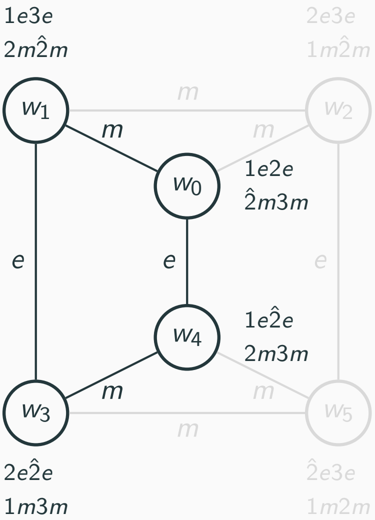
Annonces publiques (toutes depuis la situation initiale) :

- E : $[\neg K_e \hat{2}e]$.
- E : $[K_e 3e]$
- M : $[K_m \neg \hat{2}m]$

Vous êtes le roi, vous choisissez l'ordre de parole et le contenu des paquets, comment garder votre royaume ?

Faire un paquet de 240 grammes et demander à l'épicier de commencer.

Enigmes épistémiques : le magicien et l'épicier [ER, 2016-2017]



Annonces publiques (toutes depuis la situation initiale) :

- E : $[\neg K_e \hat{2}e]$.
- E : $[K_e 3e]$
- M : $[K_m \neg \hat{2}m]$

Vous êtes le roi, vous choisissez l'ordre de parole et le contenu des paquets, comment garder votre royaume ?

Faire un paquet de 240 grammes et demander à l'épicier de commencer. Seule annonce possible : Je ne sais pas que j'ai la sphère lourde (ou légère)

Enigmes épistémiques : le magicien et l'épicier [ER, 2016-2017]

Pourtant si nous sommes le magicien, l'intuition nous dit que nous devrions déduire que le monde réel est w_1 ou w_3 si l'épicier nous annonce : "Je ne sais pas que j'ai la sphère lourde". Pourquoi ?

Enigmes épistémiques : le magicien et l'épicier [ER, 2016-2017]

Pourtant si nous sommes le magicien, l'intuition nous dit que nous devrions déduire que le monde réel est w_1 ou w_3 si l'épicier nous annonce : "Je ne sais pas que j'ai la sphère lourde". Pourquoi ? Car si le monde était w_0 ou w_4, l'épicier aurait pu annoncer "Je sais que j'ai la sphère légère". Cette annonce étant plus informative, l'épicier l'aurait choisie : on doit donc être dans le monde w_1 ou w_3. Mais ce raisonnement s'appuie sur la connaissance de l'intention de l'autre agent.

Enigmes épistémiques : l'anniversaire de Cheryl [TME]

Cet exercice a été posé en 2015 lors d'un examen de mathématiques "Singapore and Asian Schools Math Olympiad".

Cheryl ne souhaite pas révéler sa date d'anniversaire à ses deux nouveaux amis, Albert et Bernard. Par contre, elle leur donne 10 dates (jour/mois) possibles, indiquées dans la table suivante :

Mai		15	16			19
Juin				17	18	
Juillet	14		16			
Août	14	15		17		

Cheryl parle ensuite séparément à Albert, à qui elle révèle seulement le mois de son anniversaire, puis à Bernard à qui elle révèle seulement le jour de son anniversaire.

https://www.theguardian.com/science/alexs-adventures-in-numberland/2015/apr/13/can-you-solve-the-singapore-primary-maths-question-that-went-viral

Enigmes épistémiques : l'anniversaire de Cheryl [TME]

Albert et Bernard font les déclarations publiques suivantes :

(i) Albert : "Je ne sais pas quelle est la date d'anniversaire de Cheryl, mais je sais que Bernard ne le sait pas non plus".

(ii) Bernard : "Maintenant je sais quelle est la date d'anniversaire de Cheryl".

(iii) Albert : "Alors je sais moi aussi quelle est la date d'anniversaire de Cheryl".

☞ Correction en TME

Enigmes épistémiques : les deux prisonniers [ER, 2018-2019]

Deux amis sont faits prisonniers, et chacun peut voir par la fenêtre de sa cellule une partie distincte d'un grand jardin. L'un voit 8 statues, tandis que l'autre en voit 12. Les deux amis ne peuvent pas communiquer, mais la personne qui les tient leur dit :

> ≪ Il y a dans le jardin 18 ou 20 statues en tout, vous les voyez toutes, et aucune statue n'est visible par vous deux. ≫

Chaque jour il passe voir chacun des prisonniers et il leur demande s'ils savent combien de statues sont dans le jardin. Si aucun ne répond il passe le lendemain, si l'un d'eux répond corrctement ils sont libérés, sinon ils restent en prison...

`http://nautil.us/blog/-the-logic-puzzle-you-can-only-solve-with-your-brightest-friend`

☞ Correction (variante) : ER2 2018-2019

Enigmes épistémiques : les cartes russes [Van Ditmarsch]

On dispose d'un jeu de 7 cartes $\{0, \ldots 6\}$. Anne reçoit 3 cartes, Bob reçoit 3 cartes, tandis que Cathy reçoit 1 carte. Chacun ne voit que ses propres cartes.

Est-ce que Anne peut communiquer publiquement de manière à ce que Bob connaisse ses cartes, mais que Cathy ne sache rien (ie. elle ne doit pas savoir qui détient une seule des cartes).

Modélisation :

Initialement, $C_3^7 \times C_3^4 \times C_1^1 = 140$ mondes possibles.

Supposons que le monde réel soit $012|345|6$.

Une solution : A annonce $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$

Combien de mondes possibles après cette annonce ?

Modélisation :

Initialement, $C_3^7 \times C_3^4 \times C_1^1 = 140$ mondes possibles.

Supposons que le monde réel soit 012|345|6.

Une solution : A annonce $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$

Combien de mondes possibles après cette annonce ? 20

Enigmes épistémiques : les cartes russes [Van Ditmarsch]

C entend l'annonce, et peut vérifier qu'il ne peut rien déduire, quelle que soit la carte qu'il possède :

- $0C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $1C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $2C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $3C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $4C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $5C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $6C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$

C entend l'annonce, et peut vérifier qu'il ne peut rien déduire, quelle que soit la carte qu'il possède :

- $0C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $1C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $2C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $3C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $4C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $5C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $6C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$

Pourquoi vérifier tous les cas ?

Enigmes épistémiques : les cartes russes [Van Ditmarsch]

C entend l'annonce, et peut vérifier qu'il ne peut rien déduire, quelle que soit la carte qu'il possède :

- $0C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $1C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $2C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $3C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $4C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $5C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$
- $6C$: $\{012 \vee 034 \vee 056 \vee 135 \vee 246\}$

Pourquoi vérifier tous les cas ? Il faut raisonner sur l'intention de A, qui veut que C reste ignorant. Si la condition n'était pas satisfaite pour $1C$ par exemple, C pourrait en déduire que A souhaitant qu'il reste ignorant, il ne peut affirmer cela que parce qu'il sait que C ne possède pas 1, et donc qu'il possède cette carte !

Réponse de B : $\{345 \vee 125 \vee 024\}$

A ce stade là A et B savent que C a la carte 6.

Pour C qui possède la carte 6 il reste alors 3 mondes possibles :

$$012|345|6 \text{ ou } 034|125|6 \text{ ou } 135|024|6$$