
Dans cette séance de TME, on utilise LoTREC pour la logique épistémique.

Exercice 1

Choisir la logique S5 appelée **S5-explicit-edges**.

1. Vérifier si les formules suivantes sont satisfiables, insatisfiables, ou valides dans S5.

- $Kp \rightarrow \neg K \neg Kp$
- $Kp \wedge KK \neg p$
- $Kp \rightarrow KK \neg p$

2. Examiner les règles de la stratégie de cette logique et les commenter brièvement, en particulier par rapport à la logique modale considérée dans le TME précédent.

Exercice 2

On considère l'équivalence $\neg Kp \Leftrightarrow K \neg Kp$.

1. Montrer qu'elle est valide dans le système S5 (=KT45).
2. Montrer qu'elle ne l'est pas dans le système S4 (=KT4), en utilisant la logique **S4-Explicit-R**.

Attention le nom de cette logique est trompeur, elle n'affiche pas explicitement toutes les relations (notamment les relations symétriques et réflexives). Sa stratégie a été définie indépendamment de celle de **S5-explicit-edges** et la comparaison des règles mises en œuvre n'est pas aisée.

Examiner et commenter en quoi les modèles construits pour l'une des logiques ne satisfont pas l'autre.

Exercice 3

On considère les formules dans un cadre multiagents. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser une logique permettant l'emploi simultané de plusieurs modalités : choisir la logique prédéfinie **Model-Checking-Multimodal**. Il est alors possible de spécifier à quelle relation fait référence l'emploi d'une modalité donnée. Par exemple, **nec R1 P** utilise la relation **R1**, donc correspond à $K_1 p$ alors que **nec R2 P** utilise la relation **R2**, donc correspond à $K_2 p$. Les noms des relations doivent commencer par une majuscule.

1. Editer la règle **ExampleOfModelAndFormula** de manière à créer la structure de Kripke correspondant à l'exercice des trois femmes sur l'escalier (NB il peut être plus facile de le faire directement dans le xml que par clics dans lotrec, MAIS il faut d'abord tester si la version de lotrec autorise le chargement de fichier).

2. Vérifier les formules de l'exercice.

Rappel : les formules à tester doivent être indiquées après un **isItTrue** dans cette même règle **ExampleOfModelAndFormula**.

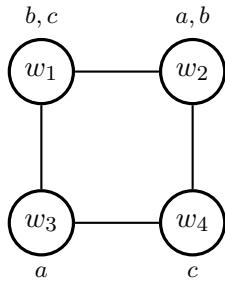
3. Vérifier ensuite que B peut savoir si elle a un papillon sur la tête. Observer le résultat : peut-on en déduire que si C a le papillon sur la tête, alors B sait si elle a le papillon sur la tête ?

4. Est-il vrai que A sait que C ne sait pas si elle a un papillon sur la tête ?

5. Est-il vrai que quand B sait si elle a un papillon sur la tête, alors A sait que B le sait ?

Exercice 4 [Examen de 2ème session, 2015]

On considère le modèle de Kripke M suivant :



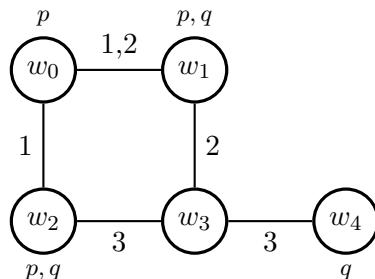
1. On suppose qu'il y a trois agents (1, 2 et 3), et que les relations de réflexivité avec ces trois agents sont présentes mais pas explicitement représentées. Proposer une manière d'étiqueter toutes les relations d'accessibilité par les agents (note : chaque agent doit apparaître sur *au moins* une relation du graphe dessiné, mais une relation peut être étiquetée par plusieurs agents), telle que la structure de Kripke corresponde bien à la logique S5, et que les formules suivantes soient (toutes) valides :

- (a) $M \models \neg K_3 b \wedge \neg K_3 \neg b$
- (b) $M \models \neg K_1 c \wedge (K_1 b \vee K_1 \neg b)$
- (c) $M \models K_2 b \vee K_2(a \wedge \neg b) \vee K_2(c \wedge \neg b)$

Vérifier ensuite votre proposition avec LoTREC.

Exercice 1 *Connaissance commune et connaissance distribuée*

On considère la structure de Kripke suivante (l'orientation des arcs est omise car la relation est symétrique, de même les arcs de réflexivité sont omis pour faciliter la lecture) qui implique trois agents 1,2 et 3.



1. Cette structure est-elle adéquate pour la logique S5 ?
2. Le tableau suivant présente des formules qui dépendent de groupes G . Indiquez, en justifiant vos réponses, si elles sont vraies, pour chaque groupe G considéré.

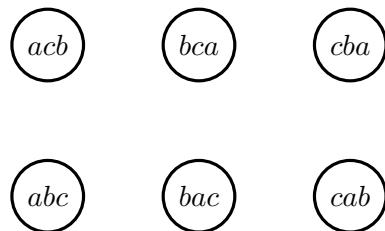
groupe G	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$M, w_2 \models C_G(p \rightarrow q)$				
$M, w_0 \models C_G(q \rightarrow p)$				
$M, w_0 \models D_G p$				
$M \models D_G(p \vee q)$				
$M \models K_2(q \wedge \neg p) \rightarrow C_G(p \vee q)$				
$M, w_2 \models E_G^2(p \vee q)$				

3. Pouvez-vous trouver une formule qui soit vraie pour les groupes $\{1, 2\}$ et $\{1, 3\}$, et fausse pour les groupes $\{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$?

Exercice 2 *La galette des rois*

Amel (a), Benoît (b) et Clarisse (c) se retrouvent pour fêter une galette des rois. La (ou le) plus jeune doit aller sous la table pour allouer les parts à l'aveugle, mais personne ne connaît l'âge des autres, et personne ne veut révéler son âge aux autres... La galette risque donc d'attendre longtemps.

On modélise la situation avec les mondes notés xyz (avec $x, y, z \in \{a, b, c\}$), avec pour convention le fait que le monde xyz est le monde où x est le plus jeune, suivi de y , suivi de z . On a donc 6 mondes correspondant aux 6 ($=3!$) manières possibles d'ordonner Amel, Benoît et Clarisse.



1. En conservant la disposition des mondes donnée ci-dessus, complétez la structure avec les relations d'accessibilité qui devraient exister pour que toutes les personnes sachent toujours qui est la plus jeune, mais que aucune ne sache jamais qui est la plus âgée.
2. Heureusement, une quatrième personne (Zorro) arrive et dit :

- Amel, je peux te dire si tu es l'aînée ou pas;
- Benoît, je peux te dire si Amel est plus âgée que Clarisse ou pas;
- Clarisse, je peux te dire s'il y a une personne plus jeune et une personne plus âgée que toi (sans te dire qui sont ces personnes), ou pas.

Zorro donne alors chacune de ces informations secrètement à chacune des personnes.

En conservant la disposition des mondes donnée ci-dessus, complétez la structure avec les relations d'accessibilité qui existent après que Zorro aura parlé à Amel, Benoît et Clarisse.

- Existe-t-il des situations où les informations de Zorro permettent, si certaines personnes communiquent, de garantir que toutes les personnes savent qui est la plus jeune, mais que aucune ne sait qui est la plus âgée ?

Exercice 3 *Trois femmes debout sur un escalier, suite)*

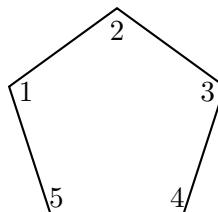
Nous reprenons la situation des trois femmes sur l'escalier discutée dans le TD précédent (la femme 1 est sur la plus haute marche, etc.)

- Représentez sous forme de formules de la logique modale les énoncés suivants, et indiquez s'ils sont valides ou pas dans la structure de Kripke construite précédemment.
 - Il est connaissance commune que si la femme 2 sait si elle a le papillon sur la tête alors la femme 3 a le papillon sur la tête;
 - Si la femme 3 sait si elle a le papillon sur la tête, alors il est connaissance commune qu'elle a le papillon sur la tête;
 - Si la femme 2 sait si elle a le papillon sur la tête, alors tout le monde sait que la femme 2 n'a pas le papillon sur la tête;
 - Si la femme 2 sait si elle a le papillon sur la tête, alors il est connaissance commune entre 1 et 2 qu'elle n'a pas le papillon sur la tête;
 - Si la femme 2 et la femme 3 communiquent, elles peuvent déterminer si la femme 1 a le papillon sur la tête.
- A présent la femme 1 annonce : “la femme 2 ne sait pas si elle a le papillon sur la tête”. Indiquez la modification à effectuer sur la structure de Kripke pour prendre en compte cette nouvelle information. Est-il vrai que après cette annonce, la femme 3 sait qu'elle n'a pas le papillon sur la tête ?

Exercice 4 – Modélisation et annonces publiques (la carte jaune) — *Examen 2018-2019*

On se place dans cet exercice dans le cadre d'une logique de la connaissance de type S5.

Un jeu de cartes est composé de 5 cartes : 2 cartes rouges (R), 2 cartes bleues (B), et 1 carte jaune (J). 5 agents sont disposés en “ cercle”, comme indiqué sur la figure, de telle manière que chaque agent ne voit que les cartes de ses deux voisins. Les agents ne voient pas leur propre carte. Par exemple, l'agent 2 voit les cartes de l'agent 1 et de l'agent 3.



- On modélise un monde possible comme une attribution (valide selon les spécifications du problème) d'une couleur à chaque agent. Cette modélisation induit-elle 120, 30 ou 12 mondes possibles ? Justifiez votre réponse.
- L'agent 1 annonce “Je sais que mes voisins ont des cartes de la même couleur”. Après cette annonce, seuls subsistent 6 mondes possibles. Représentez la structure de Kripke résultante, avec les relations d'accessibilité des agents 1, 2, 3, 4 et 5.

3. Est-il vrai, après cette annonce, que :

- (a) les agents 2 et 5 savent qui possède la carte J ;
- (b) les agents 3 et 4 ne savent pas qui possède la carte J ;
- (c) les agents 3 et 4 ont la connaissance distribuée de qui possède la carte J .

Justifier vos réponses en vous appuyant sur la structure de Kripke obtenue.