

## Interro 2 : correction

### Exercice 1

Posons  $P(n)$  la propriété définie pour  $n \in \mathbb{N}$  par

$$P(n) := \left( \frac{n}{n+1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} \right),$$

et montrons  $\forall n \geq 1 P(n)$  par récurrence sur  $n$ .

**Initialisation** Montrons  $P(1)$ .

On a  $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$  et  $\sum_{i=1}^1 \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$

D'où  $P(1)$ .

**Hérédité**

Soit  $n \geq 1$ . Supposons  $P(n)$  et montrons  $P(n+1)$ .

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{par } P(n)) \\ &= \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+1+1) + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+1) + n + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

D'où  $P(n+1)$ .

On a donc montré que pour tout entier  $n \geq 1$  :  $\frac{n}{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)}$

### Exercice 2

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrons que  $xRx$ .

On a  $\|x - x\| = 0 \leq 2$

Donc  $xRx$  et donc  $R$  est réflexive.

2. On a  $0R2$  ( $\|0 - 2\| = 2$ ) et  $2R4$  ( $\|2 - 4\| = 2$ ).

Or  $\|0 - 4\| = 4 > 2$ . Donc, on n'a pas  $0R4$  et donc  $R$  n'est pas transitive.

3. Soit  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $xRy$ . Montrons que  $yRx$ .

On a

$$\|x - y\| = \|- (x - y)\| = \|y - x\|.$$

Donc  $\|x - y\| < 2 \Rightarrow \|y - x\| < 2 \Rightarrow yRx$

Donc  $R$  est symétrique

4. On a  $0R2$  et  $2R0$  mais pas  $0 = 2$ , donc  $R$  n'est pas antisymétrique.
5.  $R$  n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas transitive.
6. On a  $0R2$  et  $0R1$  mais  $1 \neq 2$ . Donc  $R$  n'est pas déterministe.

## Retour sur l'interro 2

### Générale

Cette évaluation a été bien mieux réussie que la précédente. On a la nette impression que vous comprenez mieux les objets que vous manipulez, parce que vous prenez le temps de poser les choses correctement, et (dans la majorité des cas) les questions sont réussies parfaitement dès qu'elles sont abordées. Maintenant, ce sont principalement des problèmes liés aux spécificités des exercices qu'il reste : des points de compréhensions, des méconnaissances de certains objets mathématiques etc... Donc, vous êtes en bonne voie pour le partiel.

Je conseillerais :

- Continuez à consolider ces acquis : il faut que à terme cela devienne naturel et cela vient en pratiquant.
- Retravailler ce qui vous a mis en difficulté : les calculs ? la gestion des valeurs absolue ? Ici, cela dépend de chacun et chacune.
- Ensuite, vous pouvez prendre en vitesse. (Vous verrez plus on travail le premier point plus la vitesse augmente sans que l'on ai rien à faire).
- Et seulement après, commencer à aborder les exercices plus difficiles pour consolider votre compréhension (il y a des annales de partiel sur le site du cours).
- Une autre astuce pour progresser plus rapidement. Si vous avez l'impression que cela vous aide : travailler (de façon non passive) aussi à plusieurs pour apprendre les uns des autres. Il y a beaucoup à apprendre de la façon dont d'autres réfléchissent mais aussi expliquer permet souvent de se rendre compte de ce qu'on a pas complètement compris.

Pour cette interro, je n'ai pas été regardante sur la façon de rédiger l'articulation logique de la preuve. Cela va être de moins en moins le cas. On reviendra dessus en td, mais les mots "alors", "donc", "on a" etc. ont un sens bien défini. De même certaines formulations comme "il y a", "il faut que" n'ont pas de sens dans une preuve ou sont à minima particulièrement obscures. Finalement, d'autres comme "on voit que" sont généralement mauvais signe sur la rigueur d'une preuve. Pas besoin d'effet de style littéraire, vous pouvez écrire 46 fois "donc" à la suite, faire des phrases extrêmement simples, n'utiliser qu'une dizaine de mots, ce n'est pas problématique.

Et finalement : certain et certaines restent encore en plus grande difficulté. J'ajouterai alors aussi : ne paniquez pas en interrogation et allez-y à votre rythme, en vous posant régulièrement la question "est-ce que j'ai le droit de faire ça ?" ou "est-ce que ceci est vrai ?" quand vous écrivez quelque chose. Pour ce partiel, assurez vous que vous maîtrisez le cours et les exemples de cours et pendant le partiel repérez les questions de cours et/ou exercices très proches des exemples et commencez par ça. Ensuite, il faudra probablement engager un travail de plus longue haleine, parce que cette méthode ne suffira bientôt plus. Si vous ne savez pas quoi faire, les mails sont là pour ça.

Une dernière remarque plus générale : les conseils que je vous donne sont issus de mon expérience personnelle et de ce que mes propres professeur.es et chargé.es de td m'ont appris, donc n'hésitez pas à aller voir ce que d'autres chargé.es de td auraient dit et/ou comment d'autres élèves surmontent des difficultés similaires aux vôtres.

### Exercice 1

- Ce qu'on appelle une propriété en mathématique c'est un énoncé mathématique. Dans une preuve par récurrence, vous avez une propriété qui dépend d'un paramètre  $n$ , généralement notée  $P(n)$  et vous montrez  $\forall n, P(n)$ . Le " $\forall$ " est donc à l'extérieur de la définition de  $P(n)$  (d'ailleurs la propriété  $\forall n P(n)$  ne dépend pas de  $n$ ).
- Les erreurs de sujet arrivent, même en exam. Si jamais ça arrive en partiel ou exam, ayez confiance en vous : vous savez que votre calcul de l'initialisation est juste, donc l'erreur est peut être dans le sujet. Et alors demandez ou passer à autre chose d'abord.
- Petite astuce pour le calcul : parfois on voudrait voir apparaître un terme dans un calcul. Une façon de procéder c'est de forcer son apparition avec le genre d'astuce ci dessous. Disons que l'on a une équation  $a = b$  où  $a$  et  $b$  des formules et que vous voudriez faire apparaître un terme  $c$  alors vous pouvez faire :

$$a = b \Rightarrow a = b + 0 \Rightarrow a = b + c - c$$

ou bien, si  $c$  est non nul,

$$a = b \Rightarrow a = b * 1 \Rightarrow a = b * \frac{c}{c}.$$

- Le point clef du calcul et l'étape la moins triviale pour l'hérédité, c'est la factorisation du polynôme (pour celles et ceux étant parti.es dans la même direction que la correction). En avançant plus dans les études on apprend à repérer ces points charnières dans les preuves : ce sont ceux qui doivent être le mieux traités. Ne pas les détailler c'est souvent mettre le doute au correcteur ou à la correctrice sur votre capacité à faire la preuve (i.e. il ou elle en vient à se demander si vous avez pas juste écrit "= résultat").

## Exercice 2

- Il y a parfois quelques incertitudes sur la manipulation des valeurs absolues.
- Attention être anti-symétrique ce n'est pas exactement 'ne pas être symétrique'. Exemple :
  - La relation  $R = \{(1, 1)\}$  est symétrique et anti-symétrique.
  - La relation  $R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$  n'est pas anti-symétrique ni symétrique
- Le plus simple pour montrer qu'une affirmation est fausse sur un cas concret comme dans cet exercice, c'est de donner un contre-exemple. Faire une preuve générale sans exhiber de contre exemple c'est montrer que l'ensemble des éléments qui ne respecte pas l'affirmation est non vide, ce qui peut vite devenir difficile à présenter proprement, long, et fastidieux.