Ensembles ordonnés

Principales définitions et «recettes» pour rédiger des démonstrations correctes

Relations d'ordre

Définition La relation R sur E est une relation d'ordre ssi elle est réflexive, anti-symétrique et transitive.

Montrons que R est une relation d'ordre.
1– Montrons que R est réflexive.
...
2– Montrons que R est anti-symétrique.
...
3– Montrons que R est transitive.
...

A partir de l'hypothèse «R est une relation d'ordre», on peut déduire que R est réflexive, anti-symétrique et transitive.

Ordre strict

Définition L'ordre strict $\prec$ associé à $\preceq$ est défini par $x \prec y$ ssi $x \preceq y$ et $x \neq y$.

Montrons que $x \prec y$.
1– Montrons que $x \preceq y$.
...
2– Montrons que $x \neq y$.
...

A partir de l'hypothèse $x \prec y$, on peut déduire $x \preceq y$ et $x \neq y$.

Relations d'ordre totales

Définition La relation d'ordre $\preceq$ sur E est totale ssi pour tous $x, y \in E$, $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.

A partir de deux éléments $e_1, e_2 \in E$ et de l'hypothèse «$\preceq$ est une relation d'ordre totale», on peut déduire $e_1 \preceq e_2$ ou $e_2 \preceq e_1$. (sans savoir laquelle de ces 2 affirmations est vraie).

Montrons que $\preceq$ est totale.
Soit $x, y \in E$, montrons que $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.
...

Supposons par hypothèse que R est une relation d'ordre totale.
Soit $e_1, e_2 \in E$, montrons une propriété P.
1– Supposons $e_1 \preceq e_2$ et montrons P.
...
2– Supposons $e_2 \preceq e_1$ et montrons P.
...

Applications monotones

Définition Soit $(E_1, \preceq_1)$ et $(E_2, \preceq_2)$ deux ensembles ordonnés. L'application $f : E_1 \to E_2$ est monotone ssi pour tous $x_1, y_1 \in E_1$, si $x_1 \preceq_1 y_1$, alors $f(x_1) \preceq_2 f(y_1)$.

Montrons que $f : E_1 \to E_2$ est une application monotone.
Soit $x_1, y_1 \in E_1$ tels que $x_1 \preceq_1 y_1$, montrons que $f(x_1) \preceq_2 f(y_1)$.
...

A partir de deux éléments $e_1, e_2 \in E_1$ tels que $e_1 \preceq_1 e_2$ et de l'hypothèse «$f : E_1 \to E_2$ est une application monotone», on peut déduire $f(e_1) \preceq_2 f(e_2)$.

Ensembles isomorphes

Définition Deux ensembles ordonnés $(E_1, \preceq_1)$ et $(E_2, \preceq_2)$ sont **isomorphes** ssi il existe une bijection $f : E_1 \to E_2$ telle que f et f^{-1} sont monotones.

Montrons que $(E_1, \preceq_1)$ et $(E_2, \preceq_2)$ sont isomorphes.
Soit $f : E_1 \to E_2$ définie par $f(e_1) = \boxed{\text{à trouver}}$.
1– Montrons que f est une bijection.
...

2– Montrons que f est une application monotone.
...

3– Montrons que f^{-1} est une application monotone.
...

A partir de l'hypothèse «$(E_1, \preceq_1)$ et $(E_2, \preceq_2)$ sont des ensembles isomorphes» on peut déduire qu'il existe une bijection $f : E_1 \to E_2$ telle que f et f^{-1} sont monotones.

Eléments minimaux/maximaux

Définition Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et X une partie de E :
- x est un élément minimal de X ssi $x \in X$ et pour tout $y \in X$, si $y \preceq x$ alors $y = x$
- x est un élément maximal de X ssi $x \in X$ et pour tout $y \in X$, si $x \preceq y$ alors $y = x$

Montrons que x est un élément minimal de X.
1– Montrons que $x \in X$.
...

2– Soit $y \in X$ tel que $y \preceq x$, montrons que $y = x$.
...

A partir de l'hypothèse «x est un élément minimal de X» on peut déduire que $x \in X$.

A partir des hypothèses «x est un élément minimal de X» et «$y \in X$ est tel que $y \preceq x$», on peut déduire que $y = x$.

Montrons que x est un élément maximal de X.
1– Montrons que $x \in X$.
...

2– Soit $y \in X$ tel que $x \preceq y$, montrons que $y = x$.
...

A partir de l'hypothèse «x est un élément maximal de X» on peut déduire que $x \in X$.

A partir des hypothèses «x est un élément maximal de X» et «$y \in X$ est tel que $x \preceq y$», on peut déduire que $y = x$.

Minorants/Majorants

Définition Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et X une partie de E :
- x est un minorant de X ssi $x \in E$ et pour tout $y \in X$, $x \preceq y$
- x est un majorant de X ssi $x \in E$ et pour tout $y \in X$, si $y \preceq x$

Montrons que $x \in E$ est minorant de X.
Soit $y \in X$, montrons que $x \preceq y$.

A partir des hypothèses «$x \in E$ est un minorant de X» et $y \in X$, on peut déduire que $x \preceq y$.

Montrons que $x \in E$ est majorant de X.
Soit $y \in X$, montrons que $y \preceq x$.

A partir des hypothèses «$x \in E$ est un majorant de X» et $y \in X$, on peut déduire que $y \preceq x$.

Plus petit élément (minimum)/Plus grand élément (maximum)

Définition Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et X une partie de E :
- x est le plus petit élément de X ssi $x \in X$ et x est un minorant de X
- x est le plus grand élément de X ssi $x \in X$ et x est un majorant de X

Montrons que x est le plus petit élément de X.
1– Montrons que $x \in X$.
...

2– Montrons que x est un minorant de X.
...

A partir de l'hypothèse «x est le plus petit élément de X» on peut déduire que $x \in X$ et que x est un minorant de X.

Montrons que x est le plus grand élément de X.
1– Montrons que $x \in X$.
...

2– Montrons que x est un majorant de X.
...

A partir de l'hypothèse «x est le plus grand élément de X» on peut déduire que $x \in X$ et que x est un majorant de X.

Borne inférieure/Borne supérieure

Définition Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et X une partie de E :
- x est la borne inférieure de X ssi x est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de X
- x est la borne supérieure de X ssi x est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de X

Montrons que x est la borne inférieure de X.
1– Montrons que x est un minorant de X.
...

2– Soit y un minorant de X, montrons que $y \preceq x$.
...

A partir de l'hypothèse «x est la borne inférieure de X» on peut déduire que x est un minorant de X.

A partir des hypothèses «x est la borne inférieure de X» et «y est un minorant de X», on peut déduire que $y \preceq x$.

Montrons que x est la borne supérieure de X.
1– Montrons que x est un majorant de X.
...

2– Soit y un majorant de X, montrons que $x \preceq y$.
...

A partir de l'hypothèse «x est la borne supérieure de X» on peut déduire que x est un majorant de X.

A partir des hypothèses «x est la borne supérieure de X» et «y est un majorant de X», on peut déduire que $x \preceq y$.

Ordres bien fondés

Définition Une relation d'ordre $\preceq$ sur un ensemble E est bien fondée ssi il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante $e_1 \succ e_2 \succ \cdots$ d'éléments de E.

Montrons que $\preceq$ est une relation d'ordre bien fondée.
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite décroissante pour $\preceq$, montrons que cette suite est stationnaire à partir d'un certain rang.

A partir des hypothèses «$\preceq$ est une relation d'ordre bien fondée» et «$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante», on peut déduire qu'à partir d'un certain rang k, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (c-à-d $e_k = e_i$ pour tout $i \geq k$).

Théorème La relation d'ordre $\preceq$ sur E est bien fondée ssi toute partie non vide de E admet un élément minimal (pour cet ordre).

Montrons que $\preceq$ est une relation d'ordre bien fondée.
Soit X une partie non vide de E, montrons que X admet un élément minimal.

A partir des hypothèses «$\preceq$ est une relation d'ordre bien fondée», $X \neq \emptyset$ et $X \subseteq E$, on peut déduire qu'il existe un élément minimal $x \in X$ de X.

Théorème [Induction bien fondée] Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre bien fondée $\preceq$, et P une propriété sur les éléments de E.

$$\text{Si} \left(\begin{array}{l} \text{pour tout } x \in E \\ (\text{si } (\text{pour tout } y \prec x \ P(y)) \text{ alors } P(x)) \end{array} \right) \text{ alors pour tout } \ e \in E \ P(e).$$

Soit E un ensemble et $\preceq$ une relation d'ordre bien fondée sur E, montrons $P(e)$ pour tout élément $e \in E$.

1– Montrons $P(x)$ pour tout les éléments minimaux de E.

...

2– Soit $e \in E$. Supposons $P(k)$ pour tout $k \prec e$, montrons $P(e)$.

...

Théorème [Récurrence complète sur $\mathbb{N}$]

$$\text{Si} \left(\begin{array}{l} \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \text{si } (\text{pour tout } k < n \ P(k)) \text{ alors } P(n) \end{array} \right) \text{alors pour tout } \ n \in \mathbb{N} \ P(n)$$

Ordres lexicographiques

Définition Soit $(E_1, \preceq_1)$, ..., $(E_n, \preceq_n)$ des ensembles ordonnés. La relation d'ordre lexicographique $\preceq$ sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ est définie par :

$$(e_1, \cdots, e_n) \preceq (f_1, \cdots, f_n) \text{ ssi } \left(\begin{array}{ll} & \left(\begin{array}{l} \text{il existe } i \leq n \text{ tel que} \\ (\text{pour tout } \ k < i \ e_k = f_k) \ \text{ et } \ e_i \prec_i f_i \end{array} \right) \\ \text{ou} & (e_1, e_2, \cdots, e_n) = (f_1, f_2, \cdots, f_n) \end{array} \right)$$

Théorème Soit $(E_1, \preceq_1)$, ..., $(E_n, \preceq_n)$ des ensembles ordonnés. Si $\preceq_1$, ...,$\preceq_n$ sont des ordres bien fondés, alors l'ordre lexicographique $\preceq$ sur $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est bien fondé.