

Statistique et Informatique (3IN005)

2024-2025

Nicolas Baskiotis

Sorbonne Université
Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique (ISIR)

Cours 4 :

Espérance, Variance
Loi des grands nombres

Résumé

On a vu comment :

- compter et dénombrer (*cours 1*)
- définir, manipuler et calculer une probabilité, (*cours 2*)
- définir une variable aléatoire (*cours 3*).

A venir :

- manipuler une variable aléatoire
- modélisation, faire le lien entre la théorie et l'empirique
- probabilités réelles.

Loi d'une variable aléatoire

Propriété

Une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow F$ est totalement définie par sa loi de probabilité, caractérisé par :

- son image dans F : l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre,
- les probabilités attribuées à chacune de ses valeurs $P(X = x), x \in F$.

Loi conjointe

Soit (Ω, P) un espace de probabilité, et soient X et Y deux v.a. sur cet espace, à valeur resp. dans F et G . (X, Y) est une v.a., appelée loi conjointe de X et Y ; les valeurs de (X, Y) sont dans $F \times G$.

Propriétés

- la connaissance uniquement de X et de Y ne suffit pas à connaître la loi jointe, sauf si X est indépendant de Y .
 - $\forall x \in F, P(X = x) = \sum_{y \in G} P(X = x, Y = y)$
- ⇒ la connaissance de la loi jointe permet de déduire la loi de X , appelée dans ce cas *loi marginale*.

Tableau de contingence (intro)

Etude de la loi jointe de deux variables aléatoires

Score, Film				
1 étoile	5	10	10	5
2 étoiles	10	2	5	5
3 étoiles	15	20	15	10
4 étoiles	2	30	5	10

- Quelle est la loi jointe $P(S, F)$?
- La loi marginale du score ? du film ?
- Comment étudier l'indépendance ?

Tableau de contingence (intro)

Etude de la loi jointe de deux variables aléatoires

Score, Film					Total
1 star	5	10	10	5	30
2 stars	10	2	5	5	22
3 stars	15	20	15	10	60
4 stars	2	30	5	10	47
Total	32	62	35	30	159

- Quelle est la loi jointe $P(S, F)$?
- La loi marginale du score ? du film ?
- Comment étudier l'indépendance ?

Tableau de contingence (intro)

Etude de la loi jointe de deux variables aléatoires

Score, Film					Total
    	0.03	0.06	0.06	0.04	0.19
   	0.06	0.02	0.04	0.03	0.14
  	0.09	0.12	0.09	0.06	0.37
 	0.02	0.19	0.03	0.06	0.30
Total	0.2	0.39	0.22	0.19	1.

- Quelle est la loi jointe $P(S, F)$?
- La loi marginale du score ? du film ?
- Comment étudier l'indépendance ?

Tableau de contingence (intro)

Etude de la loi jointe de deux variables aléatoires

Score, Film					Total
1 star	0.03	0.06	0.06	0.04	0.19
2 stars	0.06	0.02	0.04	0.03	0.14
3 stars	0.09	0.12	0.09	0.06	0.37
4 stars	0.02	0.19	0.03	0.06	0.30
Total	0.2	0.39	0.22	0.19	1.

- Quelle est la loi jointe $P(S, F)$? se lit dans les cases du tableau
- La loi marginale du score ? du film ? la ligne/colonne *total*
- Comment étudier l'indépendance ? Indépendance \Leftrightarrow relation linéaire entre lignes/colonnes

Plan

1 Caractéristiques d'une variable aléatoire

2 Lois usuelles

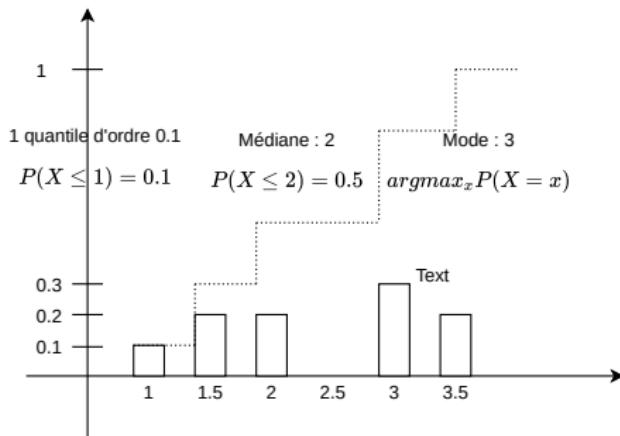
3 Loi des grands nombres

Caractéristiques d'une v.a.

Définitions

Soit une v.a. X ,

- le *quantile* d'ordre α est la valeur x_α telle que $P(X < x_\alpha) = \alpha$.
- la *médiane* est le quantile d'ordre $\alpha = \frac{1}{2}$
- le *mode* (ou valeur dominante, valeur la plus probable) est la valeur de X associée à la plus grande probabilité.



Espérance d'une v.a. à valeurs réelles

Définition

Soit Ω un ensemble dénombrable, et P une distribution de probabilité sur Ω . Soit X une v.a. sur l'espace probabilisé (Ω, P) , à valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$. on appelle *espérance* de X , notée $\mathbb{E}(X)$ la quantité :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

Remarques

- intuition (cf. loi des grands nombres, fin du cours) : l'espérance est la limite (quand $n \rightarrow \infty$) de la moyenne sur un échantillon de taille n .
- Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , alors $\mathbb{E}(X) = p$.

Espérance d'une v.a. à valeurs réelles

Propriétés

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ et tout couple de v.a. (X, Y) valeurs réelles :

- $\mathbb{E}(a) = a$,
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$,
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,

Plus généralement, si X_1, \dots, X_n sont n v.a. réelles :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$$

- si X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Espérance d'une v.a. à valeurs réelles

Propriétés

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ et tout couple de v.a. (X, Y) valeurs réelles :

- $\mathbb{E}(a) = a$,

Soit X la fonction constante $X(\omega) = a$,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega} X(\omega)P(\{\omega\}) = \sum_{\omega} aP(\{\omega\}) = a \sum_{\omega} P(\{\omega\}) = a$$

- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$,

- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,

Plus généralement, si X_1, \dots, X_n sont n v.a. réelles :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$$

- si X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Espérance d'une v.a. à valeurs réelles

Propriétés

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ et tout couple de v.a. (X, Y) valeurs réelles :

- $\mathbb{E}(a) = a,$
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X),$

Soit $Y(\omega) = aX(\omega),$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{\omega} Y(\omega)P(\{\omega\}) = \sum_{\omega} aX(\omega)P(\{\omega\}) = a\mathbb{E}(X)$$

- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y),$

Plus généralement, si X_1, \dots, X_n sont n v.a. réelles :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$$

- si X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Espérance d'une v.a. à valeurs réelles

Propriétés

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ et tout couple de v.a. (X, Y) valeurs réelles :

- $\mathbb{E}(a) = a$,
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$,
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,

Soit $Z = X + Y$, $\mathbb{E}(Z) = \sum_{i,j} (x_i + y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$
 $= \sum_{i,j} x_i P(X = x_i, Y = y_j) + \sum_{i,j} y_j P(X = x_i, Y = y_j)$
 $= \sum_i x_i (\sum_j P(X = x_i, Y = y_j)) + \sum_j y_j (\sum_i P(X = x_i, Y = y_j)) =$
 $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

Plus généralement, si X_1, \dots, X_n sont n v.a. réelles :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$$

- si X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Espérance d'une v.a. à valeurs réelles

Propriétés

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ et tout couple de v.a. (X, Y) valeurs réelles :

- $\mathbb{E}(a) = a,$
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X),$
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y),$

Plus généralement, si X_1, \dots, X_n sont n v.a. réelles :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$$

- si X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Soit $Z = XY$, $\mathbb{E}(Z) = \sum_{i,j} x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i,j} x_i y_j P(X = x_i)P(Y = y_j) = (\sum_i x_i P(X = x_i))(\sum_j y_j P(Y = y_j)) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Théorème de transfert

Soit X un v.a. discrète et $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, alors $Y = \phi(X)$ est également une v.a. discrète et $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_i \phi(x_i) P(X = x_i)$

Application :

Soit X une v.a. uniforme sur $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, soit $Y = X^2$, alors pour calculer $\mathbb{E}[Y]$ il n'est pas nécessaire de calculer d'abord la loi de Y . On peut écrire :

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{5} ((-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2) = 2$$

Variance et écart-type d'une v.a. à valeurs réelles

Définition

Soit X une v.a. d'espérance m à valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots\}$, On appelle variance de X , la quantité :

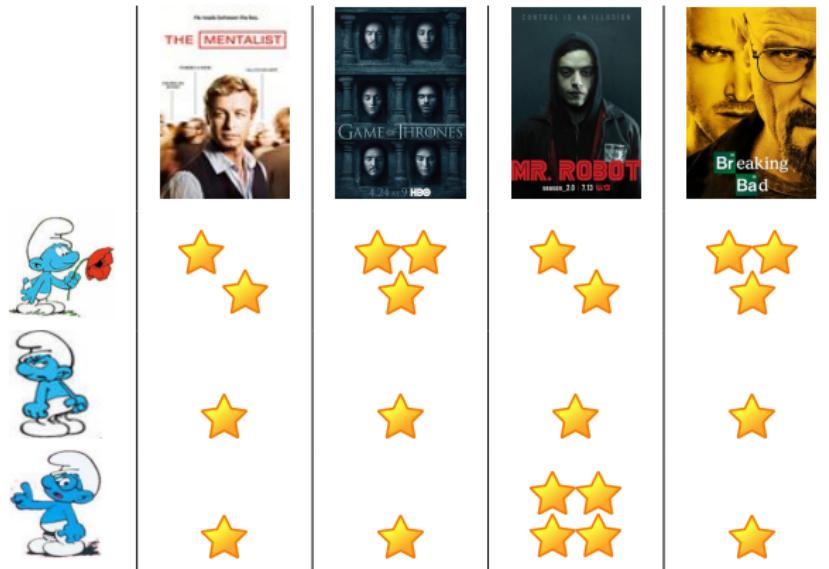
$$V(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m)^2 P(X = x_i)$$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est appelé l'écart-type de X .

Propriétés

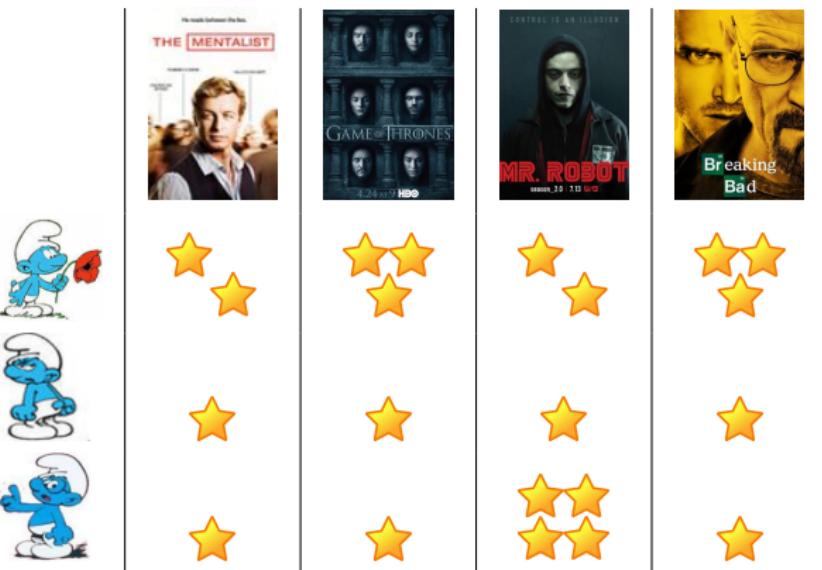
- $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$,
- $\forall a \in \mathbb{R}, V(a) = 0$,
- $\forall a \in \mathbb{R}, V(X + a) = V(X)$,
- $\forall a \in \mathbb{R}, V(aX + b) = a^2 V(X)$
- Si X_1, \dots, X_n sont n v.a.r. indépendantes : $V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$

Espérance : exemple



- Espérance du score si les films et les profils sont équiprobables ?
- Si $P(\text{joyeux}) = 0.5$, $P(\text{grincheux} = 0.2)$?

Espérance : exemple



- Espérance du score si les films et les profils sont équiprobables ?
- Si $P(\text{joyeux}) = 0.5$, $P(\text{grincheux} = 0.2)$?

$$E(\text{Score}) = \sum_{f \in \text{Film}, p \in \text{Profil}} \text{Score}_{f,p} P(F = f, P = p)$$

Exemple

Mé lange de cartes

Combien de cartes restent à une place inchangée après un mélange aléatoire du paquet ?

Exemple

Mé lange de cartes

Combien de cartes restent à une place inchangée après un mélange aléatoire du paquet ?

Solution

Soit X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i -ème carte est la même avant et après le mélange, 0 sinon.

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{52},$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{52} X_i\right) = \sum_{i=1}^{52} \mathbb{E}(X_i) = 1$$

Exemple

Roulette : 37 numéros (0 à 36)

- pari sur les nombres impairs :
on donne au joueur 2 fois sa mise s'il gagne ;
- pari sur un nombre particulier :
on donne au joueur 36 fois sa mise s'il gagne.
- vaut-il mieux jouer sur les nombres impairs ou sur un nombre particulier ?

Exemple

Roulette : 37 numéros (0 à 36)

- pari sur les nombres impairs :
on donne au joueur 2 fois sa mise s'il gagne ;
- pari sur un nombre particulier :
on donne au joueur 36 fois sa mise s'il gagne.
- vaut-il mieux jouer sur les nombres impairs ou sur un nombre particulier ?

Solution

Soit G_I la v.a. du gain si on parie sur les nombres impairs, et G_N sur un nombre particulier :

- Espérance : $\mathbb{E}(G_I) = \frac{-1*14}{37} + \frac{13}{37} = \frac{-1}{37}$
 $\mathbb{E}(G_N) = \frac{-1*36}{37} + \frac{35*1}{37} = \frac{-1}{37}$

⇒ même espérance de gain.

- Variance : $V(G_I) = \mathbb{E}(G_I^2) - \mathbb{E}(G_I)^2 = \frac{14^2+13^2-1}{37^2} = 0.26$
 $V(G_N) = \frac{36^2+35^2-1}{37^2} = 1.84$

⇒ plus grande variance pour un nombre en particulier.

Covariance de deux v.a.

Définitions

On appelle covariance de deux variables v.a. X et Y , l'expression :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \times (Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Propriétés

- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$,
- Si deux variables X et Y sont centrées on a alors $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY)$
- Si deux variables sont indépendants alors :
 - $\text{Cov}(X, Y) = 0$, la réciproque est fausse
 - $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Covariance de deux v.a.

Exemple

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes prenant leurs valeurs dans respectivement $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{Y} = \{-1, 1\}$. La distribution de probabilité du couple est donnée par :

		x	1	2	3
y		1	2	3	
	-1	0.1	0.3	0.1	
+1	0.2	0.1	0.2		

On a dans ce cas $\text{Cov}(X, Y) = 0$ mais comme par exemple

$$\underbrace{P(X = 1, Y = 1)}_{=0.2} \neq \underbrace{P(X = 1) \times P(Y = 1)}_{=0.15}$$

les variables X et Y ne sont pas indépendantes !

Coefficient de corrélation

Propriété

Soient deux variables v.a. X et Y définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{C}, P) , on a

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X) V(Y)}$$

De plus **l'égalité** a lieu si et seulement si Y et X sont linéairement dépendantes, ou si X est une constante

Définition

Soient deux variables v.a. X et Y définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{C}, P) , on appelle le coefficient de corrélation la version normalisée de la covariance entre X et Y

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}}$$

On a dans ce cas

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq +1$$

Exemples

Histoire d'amphi

Trois amphis contiennent chacun 36, 40 et 44 étudiants. On prend un étudiant au hasard, et X la v.a. du nombre d'étudiants de son amphi de provenance. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exemples

Histoire d'amphi

Trois amphis contiennent chacun 36, 40 et 44 étudiants. On prend un étudiant au hasard, et X la v.a. du nombre d'étudiants de son amphi de provenance. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Solution

$$P(X = 36) = \frac{36}{120}, P(X = 40) = \frac{40}{120}, P(X = 44) = \frac{44}{120}$$

Donc $\mathbb{E}[X] = 36 \cdot \frac{3}{10} + 40 \cdot \frac{1}{3} + 44 \cdot \frac{11}{30} = 40.26$ (à comparer avec la moyenne de 40 étudiants/amphi).

Plan

1 Caractéristiques d'une variable aléatoire

2 Lois usuelles

3 Loi des grands nombres

Loi de Bernoulli

Question :

Quelle est la probabilité de :

- obtenir pile avec une pièce équilibrée ?
- de deviner correctement une date d'anniversaire ?,
- d'obtenir un 6 sur un dé non pipé ?
- de gagner au loto ?

Loi de Bernoulli

Question :

Quelle est la probabilité de :

- obtenir pile avec une pièce équilibrée ?
- de deviner correctement une date d'anniversaire ?,
- d'obtenir un 6 sur un dé non pipé ?
- de gagner au loto ?

Réponse : loi de Bernouilli

C'est la loi d'une v.a. X à valeur dans $\{0, 1\}$.

$X = 1$ représente le "succès" de l'expérience, et $X = 0$ l'"échec".

$$\forall x \in \{0, 1\}, P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}$$

La probabilité de succès $p = P(X = 1)$ est le paramètre de la loi.

$$E(X) = p, V(X) = p(1 - p)$$

Loi binomiale

Question :

Quelle est la probabilité de :

- d'obtenir 10 piles lors de 30 tirages ?
- d'obtenir quatre nombre paires sur 10 tirages de dé ?,
- de faire plus de 2 erreurs

Loi binomiale

Question :

Quelle est la probabilité de :

- d'obtenir 10 piles lors de 30 tirages ?
- d'obtenir quatre nombre paires sur 10 tirages de dé ?,
- de faire plus de 2 erreurs

Réponse : loi binomiale

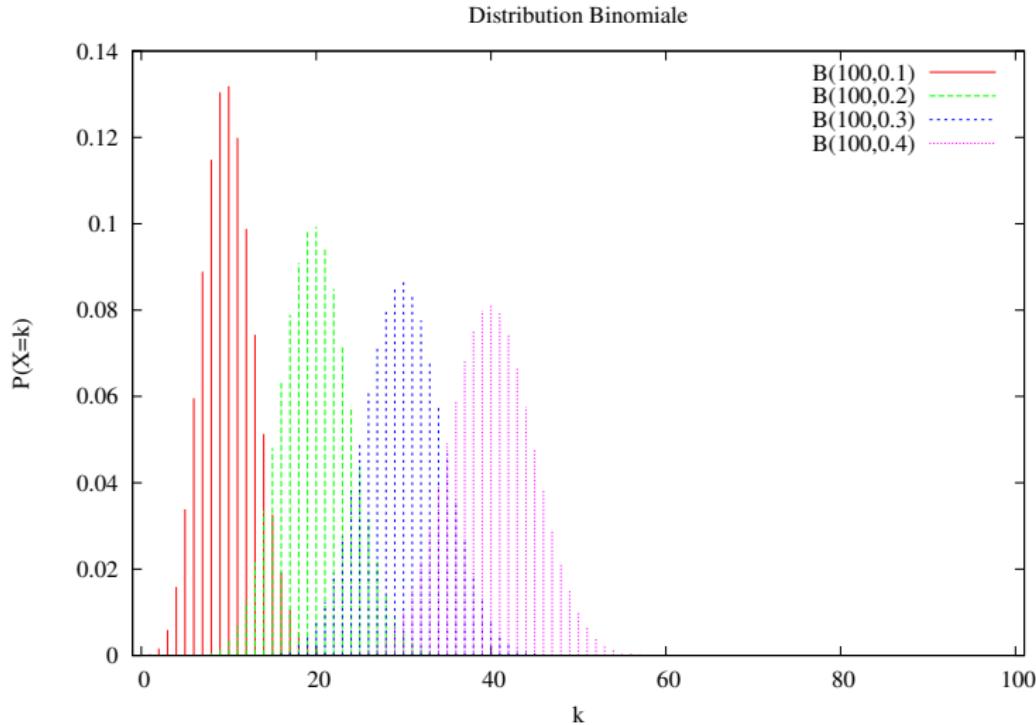
Soit X , le nombre de succès d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p , répétée n fois indépendamment. La loi de X est appelée la *loi binomiale* de paramètres n et p :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1 - p)$$

Variance de la loi binomiale

Si X suit une loi binomiale, $V(X) = np(1 - p)$.



Lois de probabilités discrètes : loi de Poisson

Loi de Poisson

Une variable aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre λ si elle vérifie :

$$\forall k \geq 0, P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Propriétés

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, V(X) = \lambda.$$

La loi de poisson est la seule loi discrète vérifiant $\mathbb{E}(X) = V(X)$.

Domaine d'application

La loi de poisson est la loi des petites probabilités ou loi des événements rares. On l'utilise pour modéliser le nombre d'occurrences d'un événement durant une période donnée quand il s'en produit en moyenne λ .

Loi de Poisson (2)

Propriétés

Soit $(Y_n)_{n>0}$ une suite de v.a.r. sur (Ω, P) telles que Y_n suit la loi binomiale de paramètres n et λ/n .

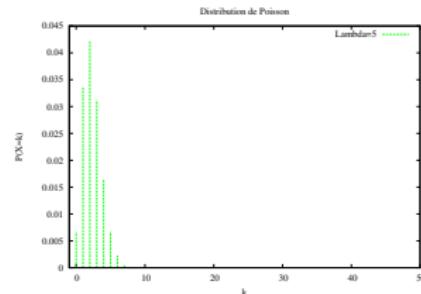
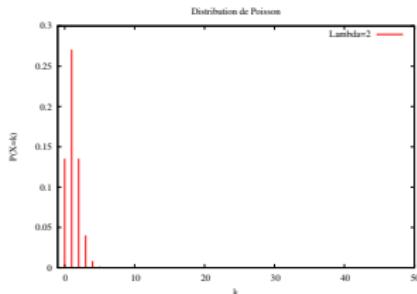
Soit X une v.a.r. sur (Ω, P) suivant une loi de Poisson de paramètre λ .

- pour tout entier k , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n = k) = P(X = k).$$

- On peut donc approximer une loi binomiale de paramètre n et p par une loi de Poisson de paramètre np lorsque n est grand par rapport à p .
En pratique, on peut utiliser la règle $n \geq 100$ et $np \leq 10$.

Loi de Poisson



Exemple

Le tableau ci-dessous répertorie le nombre de plantage d'un serveur sur une période de 200 jours

# plantage	0	1	2	3	4	5
# de jours	86	82	22	7	2	1

Les plantages sont survenus indépendamment les uns des autres, on peut approcher le nombre de plantage par jours avec une v.a. qui suit une loi de poisson de paramètre λ , où λ est le nombre moyen de plantage par jour.

Ainsi, l'estimation du nombre de jours où il s'est produit moins de 3 plantages est :

$$200 * P(X < 3) \approx 190$$

Lois discrètes usuelles : résumé

Nom	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$Var(X)$
Bernoulli	$\mathbb{P}(X = k) = p^k(1 - p)^{(1-k)}$	p	$p(1 - p)$
binomiale	$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k(1 - p)^{(n-k)}$	np	$np(1 - p)$
Poisson	$\mathbb{P}(X = n) = \exp(-\lambda)\lambda^n/n!$	λ	λ
géométrique	$\mathbb{P}(X = n) = p(1 - p)^{n-1}$	$1/p$	$(1 - p)/p^2$

Exemples

Chuck a luck

Le joueur parie sur un chiffre entre 1 et 6. Trois dés sont lancés. Le joueur remporte 1,2 ou 3 fois sa mise en fonction du nombre de fois où le chiffre apparaît, et perd sa mise si le chiffre n'apparaît pas. Avez-vous intérêt à jouer ?

Exemples

Chuck a luck

Le joueur parie sur un chiffre entre 1 et 6. Trois dés sont lancés. Le joueur remporte 1,2 ou 3 fois sa mise en fonction du nombre de fois où le chiffre apparaît, et perd sa mise si le chiffre n'apparaît pas. Avez-vous intérêt à jouer ?

Solution

Soit X le gain du joueur, c'est une loi binomiale de paramètre $\frac{1}{6}$ sur 3 lancés :

$$P(X = -1) = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}, P(X = 1) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216},$$

$$P(X = 2) = 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{15}{216}, P(X = 3) = 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216},$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{-125 + 75 + 30 + 3}{216} = \frac{-17}{216}$$

Exemples

Surbooking

On fait l'hypothèse qu'avec une probabilité de 0.05, un passager qui a réservé une place dans un avion ne se présente pas à l'embarquement. Un compagnie décide donc de vendre 94 places pour 90 places disponibles. Quelle est la probabilité qu'il y ait trop de monde à l'embarquement ?

Exemples

Surbooking

On fait l'hypothèse qu'avec une probabilité de 0.05, un passager qui a réservé une place dans un avion ne se présente pas à l'embarquement. Un compagnie décide donc de vendre 94 places pour 90 places disponibles. Quelle est la probabilité qu'il y ait trop de monde à l'embarquement ?

Solution

Soit X nombre de passagers qui ne se présentent pas, loi binomiale de paramètre 94, 0.05. La proba est donc $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \sum_{i=0}^3 C_9 4^i \left(\frac{5}{100}\right)^i \left(\frac{95}{100}\right)^{94-i}$.
On peut approximer par une loi de Poisson de paramètre 94×0.05 , dans ce cas : $p = e^{-4.7} \left(1 + 4.7 + \frac{4.7^2}{2} + \frac{4.7^3}{6}\right)$.

Exemples

Loi jointe

Soit X un nombre aléatoire entre 1 et 6, et Y un nombre entre 1 et X (tirages uniformes).

- Quelle est la loi jointe ?
- Donner $P(X = i|Y = j)$
- X et Y sont-ils indépendants ?

Exemples

Loi jointe

Soit X un nombre aléatoire entre 1 et 6, et Y un nombre entre 1 et X (tirages uniformes).

- Quelle est la loi jointe ?
- Donner $P(X = i|Y = j)$
- X et Y sont-ils indépendants ?

Solution

- $P(X = i, Y = j) = 0$ pour $j > i$, par ailleurs $P(X = i) = \frac{1}{6}$, et $P(Y = j|X = i) = \frac{1}{i}$. Donc $P(X = i, Y = j) = \frac{1}{6i}$ pour $j \leq i$.
- $P(Y = j) = \sum_{i=1}^6 P(Y = j|X = i)P(X = i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^j \frac{1}{i}$ et
 $P(X = i|Y = j) = \frac{P(X=i, Y=j)}{P(Y=j)} = \frac{1}{i} \sum_{t=1}^j \frac{1}{t}$
- Non bien sûr : $P(Y = 6) > 0$, $P(X = 1) > 0$, $P(X = 0, Y = 6) = 0$

Exemples

Natalité

On suppose que la probabilité pour un nouveau né d'être un garçon est de 0.5 et que tout couple engendre jusqu'à l'obtention d'un garçon.

- Soit X le nombre d'enfants d'un couple. Quelle est sa loi ?
- Soit G la proportion de garçons parmi les enfants d'un couple. Quelle est son expression en fonction de X ?
- Quelle est l'espérance de G ?

Exemples

Natalité

On suppose que la probabilité pour un nouveau né d'être un garçon est de 0.5 et que tout couple engendre jusqu'à l'obtention d'un garçon.

- Soit X le nombre d'enfants d'un couple. Quelle est sa loi ?
- Soit G la proportion de garçons parmi les enfants d'un couple. Quelle est son expression en fonction de X ?
- Quelle est l'espérance de G ?

Solution

- Loi géométrique de paramètre 0.5.
- un enfant parmi les X , donc $G = \frac{1}{X}$
- $\mathbb{E}[G] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n}$ or $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pour $x \in [-1, 1[$, donc $\mathbb{E}[G] = \ln 2 = 0.69$.

Algorithme de Monte-Carlo

Algorithme aléatoire dont la réponse binaire (vrai/faux) est avec une faible probabilité incorrecte

- Soit une propriété à tester, et un test qui lorsqu'il est passé la propriété est toujours correct, et lorsqu'il n'est pas passé, alors avec une probabilité p la propriété est vrai, et $1 - p$ la propriété est fausse.
- On itère le test jusqu'à ce que le test passe mais au plus n fois.
Pour i de 1 à n :
 - si Test(propriete) vrai, retourner vrai
 - retourner faux
- La probabilité d'une erreur est donc la probabilité de retourner faux alors que la propriété est vrai, soit $(1 - p)^n$.

Applications Monte-Carlo

Test de primalité de Fermat

- Si n est premier, $a^{n-1} \bmod n = 1$, sinon plus de la moitié des entiers a entre 1 et $n - 1$ ne vérifient pas l'égalité.
- Comment faire un algorithme qui retourne si n pas premier une réponse juste avec une probabilité plus grande que $1 - 10^{-6}$?

Test tableau trié

- Soit un tableau de n nombres, soit trié, soit permuté aléatoirement.
- Quel test pour appliquer Monte-Carlo ?

Plan

1 Caractéristiques d'une variable aléatoire

2 Lois usuelles

3 Loi des grands nombres

Loi des grands nombres : préliminaires

Inégalité de Markov

Soit X une v.a.r. non négative, et a un réel strictement positif, on a alors

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Loi des grands nombres : préliminaires

Inégalité de Markov

Soit X une v.a.r. non négative, et a un réel strictement positif, on a alors

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Démonstration

on suppose que X est à valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots\}$, $0 \leq x_i < x_{i+1}$.
On note j , le plus petit indice tel que $x_j \geq a$.

$$aP(X \geq a) = a \sum_{i=j}^{\infty} P(X = x_i) \leq \sum_{i=j}^{\infty} x_i P(X = x_i) \leq \mathbb{E}(X)$$

Loi des grands nombres : préliminaires

Inégalité de Tchebychev

Soit X une v.a.r d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance $V(X)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2}$$

Loi des grands nombres : préliminaires

Inégalité de Tchebychev

Soit X une v.a.r d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance $V(X)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2}$$

!

Démonstration

$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, l'événement $\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda\}$ est égal à $\{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \lambda^2\}$. D'après l'inégalité de Markov :

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) = P((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \lambda^2) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2}.$$

Loi des grands nombres : préliminaires

Inégalité de Tchebychev : corollaire

- Inégalité : $P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2}$,
- Cas particulier : si $V(X)$ est petit, alors X est proche de son espérance avec une grande probabilité.

Cas particulier

Soient X_1, \dots, X_n , n v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance m et de variance v .

Soit $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Alors :

- $\mathbb{E}(Z_n) = m$,
- $\mathbb{V}(Z_n) = \frac{v}{n}$

La variance tend vers 0 avec $n \Rightarrow$ la moyenne est proche de l'espérance.

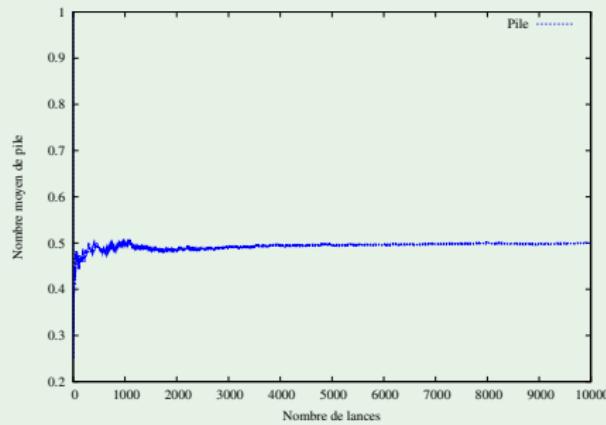
Loi des grands nombres

Énoncé

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance E et de variance ν finies. Alors :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - E \right| \geq \epsilon \right) = 0$$

Exemple : Pile ou Face avec une pièce non-truquée



Loi des grands nombres

Applications

- Estimation des paramètres d'une loi binomiale ou d'une loi de poisson en calculant la moyenne des valeurs sur un échantillon.
- Estimation de probabilités par comptage :
soit (Ω, P) un espace probabilisé, où P est *inconnue*.
Soit E un événement. On peut estimer $P(E)$ en estimant l'espérance de la v.a. de bernoulli Y :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in E$$

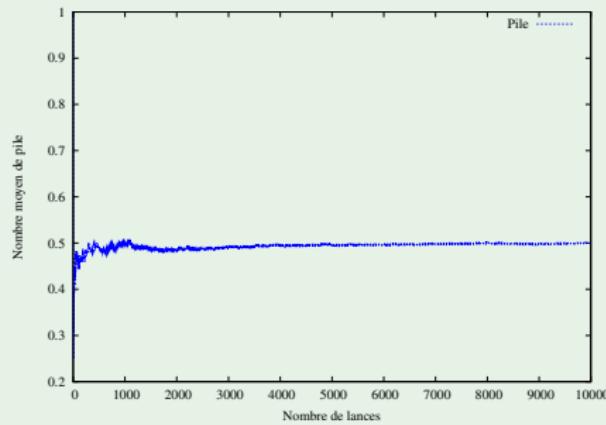
Loi des grands nombres

Énoncé

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance E et de variance ν finies. Alors :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - E \right| \geq \epsilon \right) = 0$$

Exemple : Pile ou Face avec une pièce non-truquée



Applications

1 dé par seconde pendant 1h

On jette 3600 fois un dé, soit X le nombre de fois où 1 apparaît.

- Quelle est la loi de X , espérance, variance ?
- Quelle est la probabilité que X soit entre 480 et 720 ?
- Minorer cette probabilité.

Applications

1 dé par seconde pendant 1h

On jette 3600 fois un dé, soit X le nombre de fois où 1 apparaît.

- Quelle est la loi de X , espérance, variance ?
- Quelle est la probabilité que X soit entre 480 et 720 ?
- Minorer cette probabilité.

Solution

- X est la somme de 3600 v.a. de Bernoulli de paramètres $\frac{1}{6}$, soit une loi binomiale de paramètre $3600, \frac{1}{6}$, espérance de $3600/6 = 600$ et variance $3600 * 5/36 = 500$.
- $P(480 < X < 720) = \sum_{i=481}^{719} P(X = i) = \sum_{i=481}^{719} C_{3600}^i \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{3600-i} \approx 1 - 10^{-7}$
- Inégalité de Tchebychev :
$$P(480 < X < 720) = P(-120 < X - 600 < 120), \text{ soit}$$
$$P(480 < X < 720) = 1 - P(|X - 600| \geq 120) \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{120^2} \geq 0.965.$$

Lemme de Borel-Cantelli

Enoncé

Soit une suite A_n d'événements aléatoires et $\limsup_n A_n = \cap_p \cup_{n \geq p} A_n$, alors

- si la série $\sum_n P(A_n) < \infty$, alors $P(\limsup_n A_n) = 0$, presque sûrement un nombre fini de A_n sont réalisées ;
- si les (A_n) sont indépendants, $\sum_n P(A_n)$ diverge alors $P(\limsup_n A_n) = 1$, une infinité de A_n sont réalisés presque sûrement.

Applications

- Combien de fois k piles arrivent dans une succession infinie de lancés pile/face ?
- Quelle est la probabilité de tirer aléatoirement un nombre rationnel ?