TD5 : Langages et Automates

1 Langages

Exercice 1

1. Soit A un alphabet. Montrer que $(\mathcal{P}(A^*), \cdot, \{\varepsilon\})$ est un monoïde.
2. Montrer que si $(L_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de langages, alors

$$(\bigcup_{i\in I} L_i) \cdot L = \bigcup_{i\in I}(L_i \cdot L)$$

3. Montrer que $L^* = (L + \{\varepsilon\})^*$ et que $L^* = \{\varepsilon\} + L \cdot L^*$.
4. Montrer que $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$.

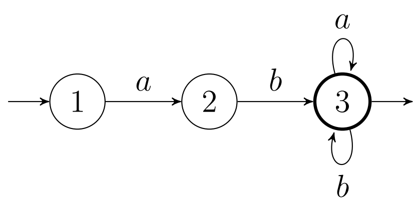
Exercice 2

Soit A un alphabet contenant la lettre b. Soit $X = \{b\}$ et $Y = (A \setminus \{b\}) \cdot \{b\}^*$.

1. Décrire informellement les éléments de X^*, Y et Y^*.
2. Montrer que tout mot de A^* commençant par une lettre distincte de b appartient à Y^*.
3. Montrer que tout mot u de A^* s'écrit de façon unique sous la forme $u = vw$, où $v \in X^*$ et $w \in Y^*$.

2 Automates complets/déterministes

Exercice 3 Expliquez pourquoi l'automate suivant sur $\{a, b\}$ n'est pas complet. Quel langage reconnait-il ? Donnez un automate complet équivalent.



Exercice 4 Représenter l'automate $\mathcal{A}$ sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ d'états $0, 1, 2, 3$, d'état initial 0, d'état terminal 3 et de transitions $(0, a, 0)$, $(0, a, 1)$, $(0, b, 0)$, $(0, c, 0)$, $(1, a, 2)$, $(1, b, 2)$, $(1, c, 2)$, $(2, a, 3)$, $(2, b, 3)$, $(2, c, 3)$.

1. Cet automate est-il complet ? déterministe ? justifier.
2. Les mots *baba* et *cabcb* sont-ils reconnus par $\mathcal{A}$?
3. Décrire $L(\mathcal{A})$ en langage ordinaire.

3 Construction d'automates

Exercice 5 Construire un automate déterministe reconnaissant le langage fini : $\{a, ba, aba, bab, bbba\}$.

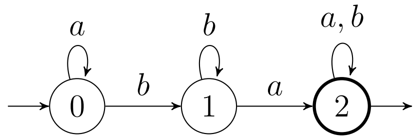
Exercice 6 Soit $A = \{a, b, c\}$. Donner des automates finis reconnaissant les langages suivants.

1. L'ensemble des mots de longueur paire.
2. L'ensemble des mots où le nombre d'occurrences de "b" est divisible par 3.
3. L'ensemble des mots se terminant par "b".
4. L'ensemble des mots non vides ne se terminant pas par "b".
5. L'ensemble des mots contenant au moins un "b".
6. L'ensemble des mots contenant au plus un "b".
7. L'ensemble des mots contenant exactement un "b".
8. L'ensemble des mots ne contenant aucun "b".
9. L'ensemble des mots contenant au moins un "a" et dont la première occurrence de "a" n'est pas suivie par un "c".

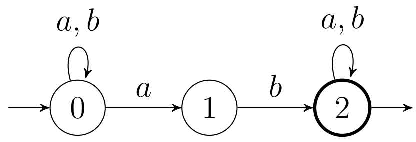
4 Opérations

Exercice 7 [Intersection et déterminisation] On considère les automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ suivants sur l'alphabet $\{a, b\}$.

L'automate $\mathcal{A}_1$



L'automate $\mathcal{A}_2$



1. Construire à partir de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ un automate acceptant l'intersection $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$.
2. Les automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont-ils déterministes ? Expliquez pourquoi et si ce n'est pas le cas, déterminisez-les.
3. Les automates $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et les automates déterministes construits sont-ils complets ? Que remarquez-vous ?

Exercice 8 [Intersection et concaténation] Sur $A = \{a, b\}$, soient L_1 le langage comprenant tous les mots contenant un nombre pair de b et L_2 le langage comprenant tous les mots contenant un nombre impair de a.

1. Donner pour chaque L_i un automate $\mathcal{A}_i$ reconnaissant L_i.

2. Calculer à partir des $\mathcal{A}_i$ un automate reconnaissant $L_1 \cap L_2$.
3. Construire à partir des $\mathcal{A}_i$ un automate reconnaissant $L_1.L_2$.

Exercice 9 Soit $A = \{a, b\}$ et soit L le langage comprenant tous les mots ayant trois occurrences successives de "a". Donner un automate non déterministe reconnaissant L et construire un automate déterministe acceptant L.

Exercice 10 [Complémentaire et différence]

1. Soient L_1 et L_2 des langages sur un alphabet A. Montrer que si L_1 et L_2 sont respectivement reconnaissables par des automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ alors le langage $L_1 \setminus L_2$ est reconnaissable par un automate.
2. Construire un automate déterministe sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ pour l'ensemble des mots non vides ne se terminant pas par "b". Cette construction sera faite de deux façons.
   (a) En utilisant le résultat ci-dessus à partir d'un automate $\mathcal{A}_1$ acceptant les mots non vides et de l'automate non déterministe (qu'on appellera $\mathcal{A}_2$) de l'exercice 3.3.
   (b) En déterminisant l'automate (qu'on appellera $\mathcal{A}_4$) de l'exercice 3.4.

5 Systèmes d'équations et expressions rationnelles

Exercice 11 [Lemme d'Arden] On rappelle ici l'énoncé : *Soient K et M deux langages de A^* tels que $\varepsilon \notin K$, alors l'équation $X = K.X + M$ (qui s'écrit aussi $X = K.X \cup M$, la notation $+$ représentant l'union) admet pour unique solution le langage $K^*.M$.* Démontrez-le.

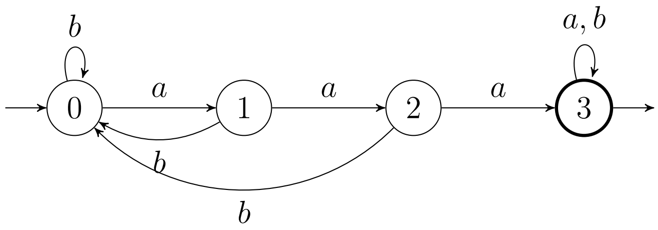
Exercice 12

1. Soit l'automate $\mathcal{A}$ d'états 0, 1, d'état initial 0, d'état terminal 1 et de transitions $(0, a, 0)$, $(0, b, 1)$, $(1, a, 0)$ et $(1, b, 1)$. Dessiner l'automate $\mathcal{A}$. Soit L le langage reconnu par $\mathcal{A}$. Donner le système d'équations associé à $\mathcal{A}$ et en déduire une expression rationnelle pour L.
2. Mêmes questions avec $\mathcal{B}$ d'états 0, 1, 2 d'état initial 0, d'état terminal 0 et de transitions $(0, a, 1)$, $(0, b, 0)$, $(0, c, 0)$, $(1, b, 1)$, $(1, c, 2)$, $(2, a, 2)$, $(2, b, 0)$, $(2, c, 1)$.

Exercice 13 Soit L l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ où le nombre d'occurrences de "b" est divisible par 3. Il y a un automate $\mathcal{A}$ à trois états tel que $L = L(\mathcal{A})$ (cf. exercice 3.2). Donner le système d'équations associé à l'automate, et résoudre ce système, pour donner une expression rationnelle dénotant L.

Exercice 14 Soit $A = \{a, b\}$ et L le langage comprenant tous les mots ayant trois occurrences successives de "a".

1. Donner une expression rationnelle pour L associée à l'automate non déterministe obtenu à l'exercice 4.
2. On admet que l'automate minimal $\mathcal{M}$ de L est le suivant :



Calculer une autre expression rationnelle pour L à partir de $\mathcal{M}$.

3. Donner un automate déterministe pour le complémentaire de L, c'est-à-dire l'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ qui n'ont pas trois occurrences successives de "a". En déduire une expression rationnelle pour le complémentaire de L.

6 Langages reconnaissables

Exercice 15 [Préfixe] Soit L un langage et $\mathrm{Pref}(L) = \{u \in A^* \mid \exists v \in A^* : uv \in L\}$ l'ensemble des préfixes des mots de ce langage L. Montrer que si un langage L est reconnaissable l'ensemble $\mathrm{Pref}(L)$ est aussi reconnaissable.

Exercice 16 Montrer que le langage $L = \{a^n b^n, n \geq 0\}$ sur l'alphabet $\{a, b\}$ ne peut pas être reconnu par un automate fini.

Exercice 17 [Lemme de l'étoile] Soit L un langage reconnaissable par un automate fini. Montrer qu'il existe un entier N_0 tel que pour tout mot $w \in L$ vérifiant $|w| \geq N_0$ (où $|w|$ est la longueur de w), on a $w = w_1 u w_2$ avec

1. $u \neq \varepsilon$,
2. $|u| < N_0$,
3. $w_1 u^* w_2 \subseteq L$.

Exercice 18 Montrer, en utilisant le lemme de l'étoile, que les langages suivants sur l'alphabet $\{a, b\}$ ne peuvent pas être reconnus par un automate fini.

1. $L_1 = \{a^n b^n, n \geq 0\}$
2. $L_2 = \{a^p, p \text{ premier}\}$.

Exercice 19 Les langages ci-dessous sont-ils reconnaissables ?

1. $L = \{a^n b^p \mid n, p \geq 0, n = p \bmod 3\}$
2. $L' = \{a^m b^n \mid n \geq 1, n \geq 1, m \neq n\}$

7 Automates minimaux

Rappelons que la minimisation part d'un automate déterministe complet dont tous les états sont accessibles depuis l'état initial.

Exercice 20 Soit l'automate $\mathcal{A}$ d'états 0, 1, 2, 3, 4, 5 d'état initial 0, d'état terminal 5 et de transitions :
$(0, a, 1), (1, a, 2), (2, a, 2), (3, a, 4), (4, a, 4), (5, a, 5), (0, b, 3), (1, b, 5), (2, b, 5), (3, b, 5), (4, b, 5), (5, b, 5)$.
Dessiner l'automate $\mathcal{A}$. Minimiser $\mathcal{A}$.

Exercice 21 Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$. On veut calculer l'automate minimal du langage L comprenant tous les mots contenant "aa" mais ne contenant pas "bb". Pour cela, on va calculer L comme intersection des langages suivants : L_1 l'ensemble des mots contenant "aa" et L_2 l'ensemble des mots ne contenant pas "bb".

1. Construire d'abord un automate déterministe $\mathcal{D}_i$ acceptant L_i, $i = 1, 2$.
2. Construire à partir des $\mathcal{D}_i$ un automate déterministe et complet $\mathcal{A}$ reconnaissant $L_1 \cap L_2$.
3. $\mathcal{A}$ est-il minimal ? Justifiez votre réponse et si non, construisez un automate minimal $\mathcal{B}$ reconnaissant $L = L_1 \cap L_2$.

8 Construction d'automates plus difficiles

Exercice 22 Soit $A = \{a, b, c\}$. Construire un automate déterministe complet qui reconnaît l'ensemble des mots de longueur paire qui se terminent par ab.

Exercice 23 Construire un automate déterministe complet minimal reconnaissant l'ensemble des mots sur $\{a, b, c\}$ comportant au moins trois lettres et dont la troisième lettre à partir de la fin est un "a" ou un "c".

Exercice 24 Donner les automates déterministes complets minimaux reconnaissant les langages sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ donnés par les expressions rationnelles suivantes

1. $(a + b)^*b(a + b)^*$.
2. $\left((a + b)^2\right)^* + \left((a + b)^3\right)^*$.
3. $ba^* + ab + (a + bb)ab^*$.