Statistique et Informatique (3IN005)

2024-2025

Nicolas Baskiotis

Sorbonne Université
Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique (ISIR)

Cours 2 :

Dénombrements, probabilités conditionnelles

Le cours 1 en un slide

Pour calculer des probabilités, il faut définir :

- une expérience :
- les *évènemements élémentaires* : les résultats de l'expérience aléatoire
- l'*univers* Ω : l'ensemble des évènements élémentaires
- une probabilité pour chaque évènement élémentaire : sa fréquence d'apparition.

Propriétés

- Un *évènement* E est un sous-ensemble de Ω (un/plusieurs év. élémentaires) : $E \subset \Omega$
- Deux évènements E_1 et E_2 sont *incompatibles* ssi aucun de leurs évènements élémentaires n'est en commun : $E_1 \bigcap E_2 = \emptyset$
- Le complémentaire de E est l'ensemble des évènements élémentaires qui ne sont pas dans E : $\overline{E} = \Omega \setminus E$
- Une mesure de probabilité sur Ω est une fonction $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ tq :
  1. $P(\Omega) = 1$: lors de l'expérience, un résultat est forcément observé
  2. pour tout évènement $E \subset \Omega$, $1 \geq P(E) \geq 0$ (pas de probabilité négative !)
  3. Pour toute suite $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'évènements *incompatibles* : $P(\bigcup_i E_i) = \sum_i P(E_i)$.
- En particulier, P est entièrement définie par $P(\{\omega\}), \forall \omega \in \Omega$;
- Évènements élémentaires équiprobables : $P(\{\omega\}) = \frac{1}{card(\Omega)} \forall \omega \in \Omega$,

Plan

Permutation

De combien de manières peut-on ordonner n objets distincts ?

- Pour 2 objets : 2
- Pour n objets : n choix pour le premier objet, puis $n-1$ choix pour le deuxième, ... 1 choix pour le dernier.

$\Rightarrow$ $n!$ possibilités

Et si on ne veut ordonner que p objets parmi n distincts ?

- Avec le même raisonnement, n choix pour le premier, ... $n-p+1$ choix pour le dernier objet sélectionné $\Rightarrow \frac{n!}{(n-p)!}$

Et si q objets sont similaires parmi les n ?

- Dans ce cas, ces objets sont tous interchangeables, il faut enlever les combinaisons identiques.
- $q!$ combinaisons sont identiques

$\Rightarrow \frac{n!}{q!}$ (pourquoi la division ?)

Permutation

De combien de manières peut-on ordonner n objets distincts ?

- Pour 2 objets : 2
- Pour n objets : n choix pour le premier objet, puis $n-1$ choix pour le deuxième, ... 1 choix pour le dernier.

$\Rightarrow$ $n!$ possibilités

Et si on ne veut ordonner que p objets parmi n distincts ?

- Avec le même raisonnement, n choix pour le premier, ... $n-p+1$ choix pour le dernier objet sélectionné $\Rightarrow$ $\frac{n!}{(n-p)!}$

Et si q objets sont similaires parmi les n ?

- Dans ce cas, ces objets sont tous interchangeables, il faut enlever les combinaisons identiques.
- $q!$ combinaisons sont identiques

$\Rightarrow$ $\frac{n!}{q!}$ (pourquoi la division ?)

Permutation

De combien de manières peut-on ordonner n objets distincts ?

- Pour 2 objets : 2
- Pour n objets : n choix pour le premier objet, puis $n-1$ choix pour le deuxième, ... 1 choix pour le dernier.

$\Rightarrow$ $n!$ possibilités

Et si on ne veut ordonner que p objets parmi n distincts ?

- Avec le même raisonnement, n choix pour le premier, ... $n-p+1$ choix pour le dernier objet sélectionné $\Rightarrow \frac{n!}{(n-p)!}$

Et si q objets sont similaires parmi les n ?

- Dans ce cas, ces objets sont tous interchangeables, il faut enlever les combinaisons identiques.
- $q!$ combinaisons sont identiques

$\Rightarrow \frac{n!}{q!}$ (pourquoi la division ?)

Combinaison

Combien de manières de choisir p objets parmi n distincts ?

- l'ordre de sélection ne compte pas, uniquement le type d'objets choisi
- Selon le même principe : $n(n-1)\dots(n-p+1)$ possibilités ordonnées
- il y a p groupes, donc $p!$ configurations identiques

$\Rightarrow$ $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ possibilités.

Propriétés

- $C_n^0 = C_n^n = 1,\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n, \quad C_n^p = C_n^{n-p}$
- Triangle de Pascal : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$
- Formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \Rightarrow card\left(\mathcal{P}(\Omega)\right) = 2^n$$

En résumé : comment compter

Soit un ensemble $\Omega = \{e_1, \dots, e_n\}$, $card(\Omega) = |\Omega| = n$

Un tirage peut être

- ordonné : l'ordre des éléments compte (notation k-uplet (a, b, c, d))
- non ordonné : l'ordre ne compte pas (notation ensemble $\{a, b, c\}$)
- avec ou sans remise : un élément peut être tiré plusieurs fois ou non

Dénombrement de k-uplets

- nombre de k-uplets d'éléments de Ω : n^k (tirage avec remise, ordonné)
- nombre de k-uplets d'éléments distincts (tirage sans remise, ordonné, nombre d'arrangements de k parmi n) : $A_n^k = n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)$
- Nombre de permutations (cas $n = k$) : $n! = n \times (n-1) \times ... \times 1$
- Combinaison de k éléments (sous-ensembles distincts de k éléments) : $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (tirage sans remise non ordonné).

Dénombrements : exercices

Exemple du jeu de 52 cartes.

- On peut :
  - tirer avec ou sans remise
  - considérer la séquence des cartes (tirage ordonné) ou l'ensemble obtenu (non ordonné).
- Quelle est la probabilité d'obtenir :
  - d'obtenir une configuration donnée après un mélange aléatoire ?
  - 1,2,3,4 de la même couleur et dans l'ordre ?
  - que des dames sur 4 tirages ?
  - aucune dames sur 2 tirages ?

Dénombrements : exercices

Exemple du jeu de 52 cartes.

- Quelle est la probabilité d'obtenir :
  - d'obtenir une configuration donnée après un mélange aléatoire ?
    Univers Ω ensemble des suites de 52 cartes : 52! possibilités, donc $\Rightarrow \frac{1}{52!}$
  - 1,2,3,4 de la même couleur et dans l'ordre ?
    Univers Ω ensemble de quadruplets de cartes, 4 couleurs et 1 configuration soit : $\Rightarrow \frac{4}{52*51*50*49}$
  - que des dames sur 4 tirages ?
    Univers Ω ensemble de 4 cartes (sans ordre) $\Rightarrow \frac{1}{C_{52}^4}$
  - aucune dames sur 2 tirages ?
    Univers Ω ensemble de 2 cartes $\Rightarrow \frac{C_{48}^2}{C_{52}^2}$

Dénombrements : exercices

Le singe savant

- Un singe organise au hasard 26 cartes représentant les lettres de l'alphabet. Quelle est la probabilité que le mot `SINGE` apparaîsse dans la chaîne ainsi formée ?
- On ne lui donne que les lettres du mot `SINGE`. Quelle est cette fois la probabilité ?
- Et si le mot était `OUISTITI` ?

Dénombrements : exercices

Le singe savant

- Un singe organise au hasard 26 cartes représentant les lettres de l'alphabet. Quelle est la probabilité que le mot `SINGE` apparaîsse dans la chaîne ainsi formée ?
- On ne lui donne que les lettres du mot `SINGE`. Quelle est cette fois la probabilité ?
- Et si le mot était `OUISTITI` ?

- On considère le mot `SINGE` comme une nouvelle lettre. Il y a donc $21 + 1$ lettres à arranger, soit $22!$ combinaisons possibles. Pour tout l'alphabet, il y a $26!$ combinaisons possibles. La probabilité est donc de $\frac{1}{26 * 25 * 24 * 23}$.
- Cette fois, une configuration pour $5!$ possibles, donc $\frac{1}{5!}$.
- On peut numéroter les I : I_1, I_2, I_3, et les T : T_1, T_2. Il y a $3! * 2! * 1$ configurations possibles en échangeant les I et les T, donc la probabilité est $\frac{12}{8!}$.

Dénombrements : exercices

Tiroir à chaussettes

Un tiroir contient 20 chaussettes de 10 paires différentes. On en tire 4 au hasard. Quelle est la probabilité de :

- obtenir 2 paires ;
- d'obtenir au moins 1 paire.

Dénombrements : exercices

Tiroir à chaussettes

Un tiroir contient 20 chaussettes de 10 paires différentes. On en tire 4 au hasard. Quelle est la probabilité de :

- obtenir 2 paires ;
- d'obtenir au moins 1 paire.

$\Rightarrow$ On numérote les chaussettes de 1 à 20, tirage sans remise non ordonné,

- $\Omega = \{\{i, j, k, l\}, i \neq j \neq k \neq l\}$, $card(\Omega) = C_{20}^4$;
- il y a C_{10}^2 manières de faire 2 paires, donc une proba de $\frac{C_{10}^2}{C_{20}^4} = \frac{3}{19*17}$
- on calcul l'évènement complémentaire - aucune paire : $\frac{20*18*16*14}{4!}$, donc proba de $1 - \frac{1}{5*6*16*14}$

Bien définir un problème

Problème du prince de Toscanne

Pourquoi en lançant trois dés, obtient-on plus souvent un total de 10 points qu'un total de 9 points, alors qu'il y a 6 façons d'obtenir ces deux totaux ?

9 pts	10 pts
$6+2+1$	$6+3+1$
$5+2+2$	$6+2+2$
$5+3+1$	$5+4+1$
$4+3+2$	$5+3+2$
$4+4+1$	$4+4+2$
$3+3+3$	$4+3+3$

Premier réflexe : bien définir les évènements et l'univers !

Bien définir un problème

Problème du prince de Toscanne

Pourquoi en lançant trois dés, obtient-on plus souvent un total de 10 points qu'un total de 9 points, alors qu'il y a 6 façons d'obtenir ces deux totaux ?

Premier réflexe : bien définir les évènements et l'univers !

Soit $E_{i,j,k}$ l'évènement : $\{i,j,k\}$ sont obtenus sur les dés, sans tenir compte de l'ordre :
pour $i \leq j \leq k$, $E_{i,j,k} = \{(i,j,k),(j,i,k),(j,k,i),(k,j,i),(k,i,j),(i,k,j)\}$
Il y a 6 évènements $E_{i,j,k}$ avec $i+j+k=10$, et 6 qui donnent une somme à 9.

Bien définir un problème

Problème du prince de Toscanne

Pourquoi en lançant trois dés, obtient-on plus souvent un total de 10 points qu'un total de 9 points, alors qu'il y a 6 façons d'obtenir ces deux totaux ?

Premier réflexe : bien définir les évènements et l'univers !

Les évènements $\Omega_{i,j,k}$ ne sont pas "équiprobables" :

- si $i \neq j \neq k \neq i$, alors 6 manières d'obtenir le résultat, $P(\Omega_{i,j,k}) = \frac{6}{216}$,
- si $i = j \neq k$, alors 3 manières, $P(\Omega_{i,j,k}) = \frac{3}{216}$
- si $i = j = k$, alors une seule possibilité, $P(\Omega_{i,j,k}) = \frac{1}{216}$

$P(\{i+j+k=9\}) = \frac{6+3+6+6+3+1=25}{216}$ et $P(\{i+j+k=10\}) = \frac{6+3+6+6+3+3=27}{216}$

Le problème des partis
Problème du Chevalier de Méré (Pascal, Fermat)

Deux joueurs jouent à pile ou face

- 128 euros sont en jeu, 64 de la poche de chacun ;
- le premier joueur marque 1 point si pile sort, sinon c'est le second ;
- le premier qui arrive à 7 points gagne tout.
- La partie s'arrête sur un score donné (x, y) subitement ;
- comment répartir équitablement l'argent ?

En particulier :

- si le score est de $(6, 6)$?
- si le score est de $(6, 5)$?
- si le score est $(1, 0)$?
- si le score est $(6, 0)$?

Le problème des partis
Problème du Chevalier de Méré (Pascal, Fermat)

Deux joueurs jouent à pile ou face

- 128 euros sont en jeu, 64 de la poche de chacun ;
- le premier joueur marque 1 point si pile sort, sinon c'est le second ;
- le premier qui arrive à 7 points gagne tout.
- La partie s'arrête sur un score donné (x, y) subitement ;
- comment répartir équitablement l'argent ?

Solution de Fermat

- On note *p* pour pile, *f* pour face ;
- soit *p* le nombre de points manquant au premier joueur, *q* au second pour gagner ;
- une succession de partie : une séquence *pffppf*..
- dénombrer les parties favorables à chaque joueur.

Dénombrements : exercices

Deux personnes dans une file d'attente de n personnes dans un ordre aléatoire

- avec quelle probabilité sont-ils les deux premiers ?
- avec quelle probabilité sont-ils distants de r places ?

Rencontres

- On considère n points distincts dans le plan, tous reliés 2 à 2 par des arêtes, coloriées soit en bleu soit en rouge.
  De combien de manière peut-on colorer les arêtes ?
- Soit n personnes. Montrer que si $n \geq 6$ il est toujours possible de trouver 3 personnes telles que soit elles se connaissent toutes, soit aucune des 3 ne connaît aucune des autres.
- Et si $n = 5$?

Tirage dans une urne

Une urne contient N boules, N_1 de couleur c_1, N_2 de couleur c_2, ..., N_k de couleur c_k.

On tire n boules dans l'urne, respectivement $n_1, \ldots, n_k$ de chaque couleur

Dénombrements : exercices

Deux personnes dans une file d'attente de n personnes dans un ordre aléatoire

- avec quelle probabilité sont-ils les deux premiers ?
- avec quelle probabilité sont-ils distants de r places ?

$\Rightarrow$ Soit i et j les positions des deux personnes, $\Omega = \{\{i, j\}, i < j \in \{1, \cdots n\}\}$, $card(\Omega) = C_n^2$, équi-probables,

- il n'y a qu'une configuration
- il y a $n - r$ configurations

Rencontres

- On considère n points distincts dans le plan, tous reliés 2 à 2 par des arêtes, coloriées soit en bleu soit en rouge.
  De combien de manière peut-on colorer les arêtes ?
- Soit n personnes. Montrer que si $n \geq 6$ il est toujours possible de trouver 3 personnes telles que soit elles se connaissent toutes, soit aucune des 3 ne connaît aucune des autres.
- Et si $n = 5$?

Dénombrements : exercices

Exemple : PMU

Un joueur parie toujours sur le même résultat :

- pour le quarté : les chevaux 1, 2, 3 et 4 vont terminer la course en premier (dans cet ordre).
- pour le 2 sur 4 : les chevaux 1 et 2 seront dans les 4 premiers arrivés.

On suppose qu'il y a toujours 15 chevaux dans une course, et que l'ordre d'arrivée des chevaux suit une probabilité uniforme.

Quelle est la probabilité que le joueur gagne au quarté et au 2 sur 4 ?

Plan

Indépendance

Définition

Deux évènements E et F sont **indépendants** si :

$$P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$$

Autrement dit, si connaître le résultat de l'un n'a aucune influence sur la probabilité du deuxième.

Exemples : lancer de deux dés

- les deux chiffres obtenus après un lancer sont indépendants l'un de l'autre,
- les évènements "le premier dé affiche 6" et "la somme des deux dés vaut 4" ne sont pas indépendants.

Indépendance mutuelle

Définition

Les évènements $E_1, ..., E_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si, pour toute partie $\mathbb{I}$ de l'ensemble $\{1, .., n\}$:

$$P(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} E) = \prod_{i\in\mathbb{I}} P(E_i)$$

Événements non mutuellement indépendants : lancer d'un dé

- $E_1 = \{1, 2, 3\}$, $P(E_1) = \frac{1}{2}$,
- $E_2 = \{3, 4, 5\}$, $P(E_2) = \frac{1}{2}$,
- $E_3 = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(E_3) = \frac{4}{6}$,

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\{3\}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{6},$$

mais $P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \neq P(E_1) \times P(E_3)$.

Indépendance mutuelle

Définition

Les évènements $E_1, ..., E_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si, pour toute partie $\mathbb{I}$ de l'ensemble $\{1, .., n\}$:

$$P(\bigcap_{i \in \mathbb{I}} E) = \prod_{i \in \mathbb{I}} P(E_i)$$

Attention ! La propriété doit être vérifiée pour **tous** les sous-ensembles d'évènements !

Événements non mutuellement indépendants : lancer de deux pièces

On note :

- A l'évènement "la première pièce donne pile"
- B l'évènement "la deuxième pièce donne face"
- C l'évènement "les deux pièces donnent le même résultat"

Indépendance mutuelle ou non ?

Indépendance mutuelle (2)

Un exemple important : le produit d'espaces probabilisés

Soient $\Omega_1, ..., \Omega_n$, n ensembles discrets, et soit P_i une mesure de probabilité sur Ω_i. Alors, la mesure de probabilité Q définie sur $\Omega_1 \times ... \times \Omega_n$ par :

$$Q\left(\{(\omega_1, ..., \omega_n)\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P_i\left(\{\omega_i\}\right).$$

Q est appelée le produit des mesures $P_1, ..., P_n$. Alors, soient $A_1 \subset \Omega_1$, ..., $A_n \subset \Omega_n$, qui définissent les évènements suivants :

$$E_i = \left(\prod_{j<i} \Omega_j\right) \times A_i \times \left(\prod_{j>i} \Omega_j\right).$$

Les évènements E_i sont mutuellement indépendants.

Exemple : lancer de n dés

On lance n fois le même dé ($\Omega_i = \{1, ..., 6\}$). Alors, les évènements E_i définis par "le résultat du i-ème lancer est 1" sont mutuellement indépendants.

Plan

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Roulette russe

Deux balles sont insérées côte à côte dans un pistolet dont le barillet peut contenir 6 balles. Le barillet est positionné ensuite au hasard.

- Quel est le risque que le premier coup soit fatal ?
- Le premier coup n'était pas fatal. Est-il plus risqué de tirer directement ou de positionner le barillet au hasard puis de tirer ?

Probabilités Conditionnelles

Considérons deux évènements E et F, Supposons qu'on ne s'intéresse à la réalisation de E, étant donnée la réalisation de F. Cela revient à estimer la réalisation de $E \cap F$ par rapport à F

Définition

Soit Ω un ensemble dénombrable et P une mesure de probabilisé sur Ω. Soit F un évènement *de probabilité non nulle*. On appelle probabilité conditionnelle sachant F l'application :

$$P(. \mid F) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

définie par

$$\forall E \in \mathcal{P}(\Omega), P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Cette application est une mesure de probabilité sur Ω. Note : $P(E \mid F)$ se lit "probabilité de E sachant F".

Plan

Probabilités Conditionnelles en chaîne

Application en chaîne de la formule des probabilités conditionnelles

- Par définition, si $P(F) \neq 0$, on a $P(E \cap F) = P(E|F)P(F)$
- Plus généralement, si $E_1, ..., E_n$ sont n évènements, on a :

$$P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) = P(E_1)\prod_{i=2}^{n} P(E_i \mid E_1 \cap ... \cap E_{i-1})$$

Exemple

Quelle est la probabilité de tirer trois boules de la même couleur dans une urne contenant 7 boules rouges et 5 boules bleues, en tirant les trois boules l'une après l'autre et sans remise ?

Probabilités Conditionnelles en chaîne

Application en chaîne de la formule des probabilités conditionnelles

- Par définition, si $P(F) \neq 0$, on a $P(E \cap F) = P(E|F)P(F)$
- Plus généralement, si $E_1, ..., E_n$ sont n évènements, on a :

$$P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) = P(E_1) \prod_{i=2}^{n} P(E_i \mid E_1 \cap ... \cap E_{i-1})$$

Exemple

Quelle est la probabilité de tirer trois boules de la même couleur dans une urne contenant 7 boules rouges et 5 boules bleues, en tirant les trois boules l'une après l'autre et sans remise ? Posons

- R_i=`La` i^{eme} `boule tirée est rouge`, $i \in \{1, 2, 3\}$
- B_i=`La` i^{eme} `boule tirée est bleue`, $i \in \{1, 2, 3\}$

On a alors $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)P(R_2|R_1)P(R_3|R_2 \cap R_1) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} \times \frac{5}{10}$.

De même, $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10}$