Induction structurelle

Principales définitions et «recettes» pour rédiger des démonstrations correctes

Ensemble défini par induction structurelle

Définition Soit E un ensemble, $X_0 \subseteq E$, et un ensemble de règles $\mathcal{F}$, données sous la forme d'applications distinctes $f : E^{a(f)} \to E$, avec $a(f)$ l'arité de l'application f. L'ensemble défini inductivement à l'aide de E, X_0, et $\mathcal{F}$, est le plus petit ensemble X de E (pour l'inclusion) vérifiant :

— **Base :** $X_0 \subseteq X$,

— **Induction :** pour toute application $f \in \mathcal{F}$ d'arité n, pour tous $x_1, \ldots, x_n$, si $x_1, \ldots, x_n \in X$, alors $f(x_1, \ldots, x_n) \in X$.

> Soient E, X_0, $\mathcal{F}$ définissant X. Montrons $x \in X$
> Montrons $x \in X_0$
> ...

> Soient E, X_0, $\mathcal{F}$ définissant X. Montrons $x \in X$
> Montrons $x = f(u_1, \ldots, u_n)$
> avec $u_1, \ldots, u_n \in X$ et $f : E^n \to E \in \mathcal{F}$.
> ...

> Soient E,$X_0 \subseteq E$ et $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_k$ un ensemble de fonctions.
> Montrons que X est l'ensemble défini par ces 3 éléments.
> > 1– Montrons que X vérifie **Base** et **Induction**
> > > 1–1– Montrons que $X_0 \subseteq X$
> > > ...
> >
> > > 1–2–1– Soit n_1 l'arité de f_1. Soient $x_1, \ldots, x_{n_1} \in X$.
> > > Montrons $f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}) \in X$.
> >
> > ...
> > > 1–2–k– Soit n_k l'arité de f_k. Soient $x_1, \ldots, x_{n_k} \in X$.
> > > Montrons $f_k(x_1, \ldots, x_{n_k}) \in X$.
>
> > 2– Soit $V \subseteq E$ vérifiant **Base** et **Induction**.
> > Montrons $X \subseteq V$
> > ...

Fonctions définies par induction structurelle

Définition Soit X un ensemble défini par induction structurelle à partir de E, X_0, et $\mathcal{F}$, on peut définir une fonction g par induction structurelle de la façon suivante :

Base $g(x)$ donné explicitement pour tout $x \in X_0$,

Induction pour toute règle $f \in \mathcal{F}$ d'arité n, on donne
$g(f(x_1, \ldots, x_n)) = h(x_1, \ldots, x_n, g(x_1), \ldots, g(x_n))$.

Arbres binaires étiquetés

Définition Soit A un alphabet. L'ensemble AB des arbres binaires étiquetés par A est défini par :

Base : $\emptyset \in AB$

Induction : si $g, d \in AB$, alors pour tout $a \in A$, $(a, g, d) \in AB$.

Définition La hauteur d'un arbre (la distance entre la feuille la plus éloignée et la racine) $h : AB \to \mathbb{N}$ est donnée par

Base : $h(\emptyset) = 0$

Induction : $h(a, g, d) = 1 + \max((h(g), h(d))$

Définition Le nombre de noeuds d'un arbre $\mathcal{N} : AB \to \mathbb{N}$ est donné par

Base : $\mathcal{N}(\emptyset) = 0$

Induction : $\mathcal{N}(a, g, d) = 1 + \mathcal{N}(g) + \mathcal{N}(d)$

Définition Le parcours en profondeur préfixe d'un arbre $pre : AB \to A^*$ est donné par :
Base : $pre(\emptyset) = \varepsilon$
Induction : $pre((a, g, d)) = a.pre(g).pre(d)$

Preuves par induction structurelle

Théorème Soit X un ensemble défini par induction structurelle à partir de E, X_0 et $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{P}$ une propriété sur les éléments de X.

(B) : Si $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in X_0$

(I) : Si, pour tout $f \in \mathcal{F}$ d'arité n, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in X$, (**si** $\mathcal{P}(x_1)$,...,$\mathcal{P}(x_n)$ sont vraies, **alors** $\mathcal{P}(f(x_1, \ldots, x_n))$ est vraie)

Alors, pour tout $x \in X$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

> Soit X un ensemble défini par induction structurelle à partir de E, X_0, et $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_k\}$.
> Montrons $P(x)$ pour tout élément $x \in X$.
>
> > 1– Montrons $P(x_0)$ pour tout élément $x_0 \in X_0$.
> > ...
>
> > 2– 1– Soit n_1 l'arité de f_1. Soient $x_1, \ldots, x_{n_1} \in X$ et supposons que $P(x_1), \ldots, P(x_{n_1})$ sont vrais.
> > Montrons $P(f_1(x_1, \ldots, x_{n_1})$
> > ...
>
> ...
>
> > 2– k– Soit n_k l'arité de f_k. Soient $x_1, \ldots, x_{n_k} \in X$ et supposons que $P(x_1), \ldots, P(x_{n_k})$ sont vrais.
> > Montrons $P(f_1(x_1, \ldots, x_{n_k})$
> > ...