COMPLEX - TD 07

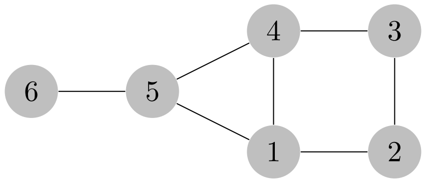
2025-2026

Énoncé

Exercice 1 : 3-coupe minimale

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté à $n \geq 3$ sommets et m arêtes. Une 3-coupe est une partition de V en trois sous-ensembles non vides S_1, S_2, S_3 telle que $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = V$ et $S_1 \cap S_2 = S_1 \cap S_3 = S_2 \cap S_3 = \emptyset$. Le cardinal d'une telle 3-coupe est le nombre d'arêtes de G avec une extrémité dans un ensemble S_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et l'autre extrémité dans un ensemble S_j avec $j \in \{1, 2, 3\}$ et $i \neq j$.

1.a] Trouver une 3-coupe de cardinal minimal pour le graphe $G = (V, E)$ défini par $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$



1.b] Supposons que l'on considère une partition aléatoire formée en prenant pour S_1 un sommet aléatoire u de V, pour S_2 un sommet aléatoire $v \neq u$ de V et pour S_3 l'ensemble $V \setminus \{u, v\}$. Calculer la probabilité qu'une arête de G n'appartienne pas à la 3-coupe ainsi construite.

1.c] En déduire l'espérance du cardinal de la 3-coupe aléatoire ainsi construite.

1.d] En déduire, qu'il existe une 3-coupe de G de cardinal inférieur ou égal à

$$\left[1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n-1}\right)\right] m$$

1.e] Considérons une 3-coupe minimale C de G. Donner une borne inférieure sur la probabilité qu'une arête tirée uniformément aléatoirement dans E n'appartienne pas à la 3-coupe C.

1.f] Considérons la variante de l'algorithme de Karger qui s'arrête lorsqu'il ne reste plus que trois sommets du graphe (au lieu de deux pour celui vu en cours). Montrer la probabilité que l'algorithme ne sélectionne jamais une arête appartenant à C est supérieure ou égale à

$$\prod_{i=4}^{n} \left(1 - \frac{2}{i}\right)\left(1 - \frac{2}{i-1}\right)$$

1.g] En déduire un algorithme probabiliste (de type Monte-Carlo) qui étant donné un graphe G retourne une 3-coupe minimale avec probabilité au moins $1/2$ en $O(n^6)$ opérations.

Exercice 2 : Ensemble indépendant

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté et sans boucle. Un ensemble indépendant dans G est un sous-ensemble $S \subseteq V$ tels que aucune paire de sommets de S ne sont reliés par une arête de E.

Nous notons $N(v)$ le voisinage de v dans G, c'est-à-dire l'ensemble des sommets u pour lesquels le couple $\{u, v\}$ est une arête de E : $N(v) = \{u \in V | \{u, v\} \in E\}$. Nous notons également $\deg(v) = \#N(v)$ le degré d'un sommet $v \in V$, c'est-à-dire le nombre d'arêtes contenant ce sommet et $\Delta = \max_{v \in V} \deg(v)$, le degré maximal d'un sommet de G.

2.a] Considérons l'algorithme déterministe suivant pour calculer un ensemble indépendant S.

1. initialiser l'ensemble S à $\emptyset$ et l'ensemble T à V
2. tant que T est non vide
   (a) retirer un sommet v de T (dans un ordre arbitraire)
   (b) ajouter v à S
   (c) supprimer les éléments de $N(v)$ de T
3. retourner S

Montrer que cet algorithme retourne bien un ensemble indépendant de G.

2.b] Montrer que l'ensemble S retourné par cet algorithme vérifie $\#S \geq n/(\Delta + 1)$.

2.c] Considérons le graphe $G = (V, E)$ défini par $V = \{1, \ldots, n\}$ et $E = \{\{1, i\}, i \in \{2, \ldots, n\}\}$. Montrer que G possède un ensemble indépendant à $n - 1$ sommets et que le degré maximal de G est égal à $n - 1$.
Montrer que l'algorithme précédent peut effectivement retourner pour ce graphe un ensemble indépendent S à un seul sommet.

2.d] L'exemple précédent montre que les degrés des sommets d'un graphe peut varier fortement. Il est donc préférable de regarder les degrés des sommets individuellement. Dans la suite nous considérons que l'ensemble des sommets V du graphe $G = (V, E)$ est l'ensemble des entiers consécutifs $\{1, \ldots, n\}$. Considérons σ une permutation quelconque de l'ensemble $V = \{1, \ldots, n\}$ et notons

$$S_\sigma = \{i \in V \mid \forall j \in N(i), \sigma(i) < \sigma(j)\}$$

Montrer que S_σ est un ensemble indépendant de G.

2.e] Considérons l'algorithme probabiliste qui consiste à tirer uniformément aléatoirement une permutation σ de l'ensemble $V = \{1, \ldots, n\}$ et à retourner l'ensemble S_σ associé. Considérons pour tout sommet i de V, la variable aléatoire

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S_\sigma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $\mathbb{E}(X_i) = 1/(\deg(i) + 1)$.

2.f] Notons X la variable aléatoire correspondant au nombre de sommets de S_σ retourné par l'algorithme probabiliste. Déduire de la question précédente que $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} 1/(\deg(i) + 1)$.

2.g] En déduire la taille moyenne de l'ensemble indépendant retourné par l'algorithme probabiliste sur le graphe de la question **2.c**.