2 – Relations d'ordre, Ensembles ordonnés

UE LU2IN005 – Mathématiques discrètes

Mathieu Jaume

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Relations d'ordre

- une **relation d'ordre** est une relation binaire $\preceq$ sur un ensemble E
  1. réflexive : pour tout $x \in E$, $x \preceq x$
  2. anti-symétrique : pour tous $x, y \in E$, si $x \preceq y$ et $y \preceq x$, alors $x = y$
  3. transitive : pour tous $x, y, z \in E$, si $x \preceq y$ et $y \preceq z$ alors $x \preceq z$
- **ordre strict** $\prec$ associé à $\preceq$: $x \prec y$ ssi $x \preceq y$ et $x \neq y$ $\quad (\prec = \preceq \setminus \mathrm{Id}_E)$
  - $\prec$ n'est pas une relation d'ordre ($\prec$ n'est pas réflexive)
- une relation d'ordre $\preceq$ sur E est :
  - **totale** ssi $\preceq$ permet toujours de comparer deux éléments quelconques de E ($\preceq$ est un **ordre total**)
    pour tous $x, y \in E$, $x \preceq y$ ou $y \preceq x$
  - **partielle** s'il existe au moins deux éléments e_1, e_2 de E non comparables avec $\preceq$ ($e_1 \not\preceq e_2$ et $e_2 \not\preceq e_1$) ($\preceq$ est un **ordre partiel**)
- $(E, \preceq)$ est un **ensemble ordonné**
  - **ensemble totalement ordonné** si $\preceq$ est un ordre total
  - **ensemble partiellement ordonné** si $\preceq$ est un ordre partiel

Relations d'ordre : exemples

- $(\mathbb{N}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné
- $(\wp(F), \subseteq)$ est un ensemble partiellement ordonné (pour un ensemble F quelconque)
- $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ est un ensemble partiellement ordonné

  $n_1 \sqsubseteq n_2$ ssi n_1 divise n_2 ssi il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n_2 = kn_1$

  - $\sqsubseteq$ est réflexive : tout entier n est divible par lui-même ($n = 1 \times n$)
  - $\sqsubseteq$ est anti-symétrique : si $n_1 \sqsubseteq n_2$ et $n_2 \sqsubseteq n_1$ alors $n_2 = kn_1$ et $n_1 = k'n_2$ et donc $n_2 = kk'n_2$ et par conséquent $kk' = 1$ c-à-d $k = k' = 1$ (puisque $k, k' \in \mathbb{N}$) et finalement $n_1 = n_2$
  - $\sqsubseteq$ est transitive : si $n_1 \sqsubseteq n_2$ et $n_2 \sqsubseteq n_3$ alors $n_2 = kn_1$ et $n_3 = k'n_2$ et donc $n_3 = k'kn_1$ et donc $n_1 \sqsubseteq n_3$
  - $\sqsubseteq$ est une relation partielle : par exemple 2 ne divise pas 5 et 5 ne divise pas 2

Graphe couvrant d'une relation d'ordre

représentation graphique d'une relation d'ordre R sur un ensemble E

- graphe «minimal» représentant une relation, notée $\rightarrow$, telle que :
  - la fermeture réflexive et transitive $\rightarrow^\star$ de $\rightarrow$ correspond exactement à la relation R
    - $\rightarrow$ est la plus petite relation dont la fermeture réflexive et transitive est égale à la relation R
  - la relation $\rightarrow$ contient tous les couples $(a, b) \in R$ tels que $a \neq b$ et tels qu'il n'existe pas d'élément $c \in E$, différent de a et b, tel que $(a, c) \in R$ et $(c, b) \in R$
- $\rightarrow$ s'obtient à partir de R
  - en supprimant de R les couples (x, x) (réflexivité)
  - en supprimant de R les couples pouvant se déduire par transitivité
- $(a, b) \in R$ ssi il existe un chemin de a vers b dans le graphe

Graphe couvrant d'une relation d'ordre : exemples

- graphe couvrant de la relation $\leq$ sur $\mathbb{N}$

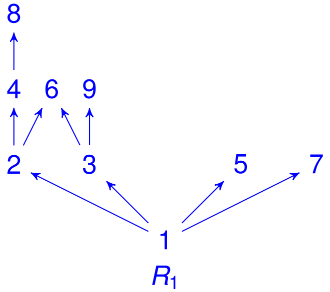
$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow \cdots$$

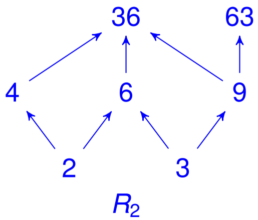
- graphe couvrant de la relation $\subseteq$ sur $\wp(\{1,2,3\})$

$$\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} & \\
\{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
\{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Graphe couvrant d'une relation d'ordre : exemples

- $E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $E_2 = \{2, 3, 4, 6, 9, 36, 63\}$
- $R_1 \subseteq E_1 \times E_1$ et $R_2 \subseteq E_2 \times E_2$: relations d'ordre contenant les couples (a, b) tels que a divise b
- graphes couvrants de R_1 et R_2 :





Applications monotones

- une application monotone entre deux ensembles ordonnés est une application qui «préserve les relations d'ordre» :
  - Soit $(E_1, \preceq_1)$ et $(E_2, \preceq_2)$ deux ensembles ordonnés. L'application $f : E_1 \to E_2$ est **monotone** ssi pour tous $x_1, y_1 \in E_1$, si $x_1 \preceq_1 y_1$, alors $f(x_1) \preceq_2 f(y_1)$
- *exemples :*
  - ensembles ordonnés $(\mathbb{N}, \leq)$ et $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$
  - $f : \mathbb{N} \to \wp(\mathbb{N})$ tel que $f(n) = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$ est monotone
    - ★ si $n_1 \leq n_2$ alors $\{0, 1, \cdots, n_1, \} \subseteq \{0, 1, \cdots, n_1, \cdots, n_2\}$
  - $g : \mathbb{N} \to \wp(\mathbb{N})$ tel que $g(n) = \{n\}$ n'est pas monotone
    - ★ $1 \leq 2$ mais $\{1\} \not\subseteq \{2\}$

Ensembles isomorphes

- deux ensembles ordonnés $(E_1, \preceq_1)$ et $(E_2, \preceq_2)$ sont **isomorphes** ssi il existe une bijection $f : E_1 \rightarrow E_2$ telle que f et f^{-1} sont monotones
- *exemples :*
  - $(\mathbb{N}, \leq)$ et $(\{n \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } k \in \mathbb{N},\ n = 2k\}, \leq)$ sont isomorphes
    - ★ $f : \mathbb{N} \rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } k \in \mathbb{N},\ n = 2k\}$ tel que $f(n) = 2n$ est une bijection monotone et $f^{-1}(n) = \frac{n}{2}$ est aussi monotone
  - $(\mathbb{N}, \leq)$ et $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ ne sont pas isomorphes
    - ★ $f : \mathbb{N} \rightarrow \wp(\mathbb{N})$ tel que $f(n) = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$ est monotone ... mais f n'est pas une bijection
      il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\wp(\mathbb{N})$
- lorsque $(E_1, \preceq_1)$ et $(E_2, \preceq_2)$ sont isomorphes, les graphes couvrants de $\preceq_1$ et $\preceq_2$ ont exactement la même forme
- une bijection f peut être monotone sans que f^{-1} soit monotone
  - *exemple :* $E = \{a, b, c\}$ avec $a \preceq_E b$ et $a \preceq_E c$ et $F = \{1, 2, 3\}$ avec $1 \preceq_F 2 \preceq_F 3$
    $f : E \rightarrow F$ tel que $f(a) = 1$, $f(b) = 2$ et $f(c) = 3$ est une bijection monotone mais f^{-1} n'est pas monotone car $2 \preceq_F 3$ mais $b \not\preceq_E c$

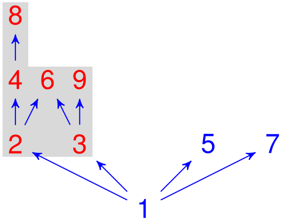
Eléments minimaux

soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et X une partie de E

- un **élément minimal** de X est un élément $x \in X$ tel qu'il n'existe pas, dans X, un élément strictement plus petit que lui :

$$\begin{array}{ll} & x \text{ est un élément minimal de } X \\ \text{ssi} & x \in X \text{ et pour tout } y \in X \; y \not\prec x \\ \text{ssi} & x \in X \text{ et pour tout } y \in X \text{ si } y \preceq x \text{ alors } y = x \end{array}$$

- *exemple :* $E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $X = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$, $R_1 \subseteq E_1 \times E_1$ relation d'ordre contenant les couples (a, b) tels que a divise b



ensemble des éléments minimaux de X : $\{2, 3\}$

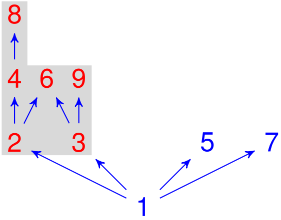
Eléments maximaux

soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et X une partie de E

- un **élément maximal** de X est un élément $x \in X$ tel qu'il n'existe pas, dans X, un élément strictement plus grand que lui :

$$\begin{array}{ll} & x \text{ est un élément maximal de } X \\ \text{ssi} & x \in X \text{ et pour tout } y \in X \; x \not\prec y \\ \text{ssi} & x \in X \text{ et pour tout } y \in X \text{ si } x \preceq y \text{ alors } y = x \end{array}$$

- *exemple :* $E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $X = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$, $R_1 \subseteq E_1 \times E_1$ relation d'ordre contenant les couples (a, b) tels que a divise b



ensemble des éléments maximaux de X : $\{6, 8, 9\}$

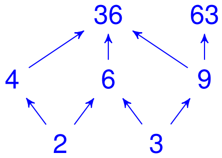
Minorants

soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et X une partie de E

- un **minorant** de X est un élément $e \in E$ inférieur ou égal à tous les éléments de X :

$$e \text{ est un minorant } X \text{ ssi } e \in E \text{ et pour tout } x \in X \; e \preceq x$$

- *exemple :* $E_2 = \{2, 3, 4, 6, 9, 36, 63\}$, $R_2 \subseteq E_2 \times E_2$ relation d'ordre contenant les couples (a, b) tels que a divise b



X	minorants(X)
$\emptyset$	E_2
$\{2, 3, 4, 6\}$	$\emptyset$
$\{4, 6\}$	$\{2\}$
$\{2, 4, 6\}$	$\{2\}$
$\{6, 36\}$	$\{2, 3, 6\}$
$\{36, 63\}$	$\{3, 9\}$
E_2	$\emptyset$

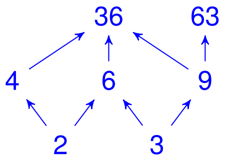
Majorants

soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et X une partie de E

- un **majorant** de X est un élément $e \in E$ supérieur ou égal à tous les éléments de X :

$$e \text{ est un majorant } X \text{ ssi } e \in E \text{ et pour tout } x \in X \ x \preceq e$$

- *exemple :* $E_2 = \{2, 3, 4, 6, 9, 36, 63\}$, $R_2 \subseteq E_2 \times E_2$ relation d'ordre contenant les couples (a, b) tels que a divise b

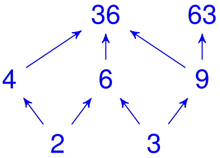


X	majorants(X)
$\emptyset$	E_2
$\{2, 3, 4, 6\}$	$\{36\}$
$\{3\}$	$\{3, 6, 9, 36, 63\}$
$\{6, 9\}$	$\{36\}$
$\{2, 3, 6\}$	$\{6, 36\}$
$\{36, 63\}$	$\emptyset$
E_2	$\emptyset$

Plus petit élément – Minimum

soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et X une partie de E

- le **plus petit élément** (aussi appelé **minimum**), de X, s'il existe, est l'unique élément de $X \cap \mathrm{minorants}(X)$
- *exemple :* $E_2 = \{2, 3, 4, 6, 9, 36, 63\}$, $R_2 \subseteq E_2 \times E_2$ relation d'ordre contenant les couples (a, b) tels que a divise b

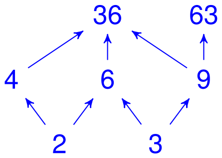


X	$\mathrm{minorants}(X)$	$\mathrm{minimum}(X)$
$\emptyset$	E_2	/
$\{2, 3, 4, 6\}$	$\emptyset$	/
$\{4, 6\}$	$\{2\}$	/
$\{2, 4, 6\}$	$\{2\}$	2
$\{6, 36\}$	$\{2, 3, 6\}$	6
$\{36, 63\}$	$\{3, 9\}$	/
E_2	$\emptyset$	/

Plus grand élément – Maximum

soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et X une partie de E

- le **plus grand élément** (aussi appelé **maximum**), de X, <u>s'il existe</u>, est l'<u>unique</u> élément de $X \cap \mathrm{majorants}(X)$
- *exemple :* $E_2 = \{2, 3, 4, 6, 9, 36, 63\}$, $R_2 \subseteq E_2 \times E_2$ relation d'ordre contenant les couples (a, b) tels que a divise b



X	$\mathrm{majorants}(X)$	$\mathrm{maximum}(X)$
$\emptyset$	E_2	/
$\{2, 3, 4, 6\}$	$\{36\}$	/
$\{3\}$	$\{3, 6, 9, 36, 63\}$	3
$\{6, 9\}$	$\{36\}$	/
$\{2, 3, 6\}$	$\{6, 36\}$	6
$\{36, 63\}$	$\emptyset$	/
E_2	$\emptyset$	/

Unicité du plus petit/grand élément

soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et X une partie de E

- lorsqu'il existe le plus petit élément de X est <u>unique</u>
  - soit x_1, x_2 deux plus petits éléments de X, alors puisque par définition $x_1, x_2 \in X$ et x_1, x_2 sont des minorants de X on a $x_1 \preceq x_2$ et $x_2 \preceq x_1$ et puisque $\preceq$ est une relation d'ordre, c'est une relation anti-symétrique et on obtient $x_1 = x_2$
- lorsqu'il existe le plus grand élément de X est <u>unique</u>
  - raisonnement similaire

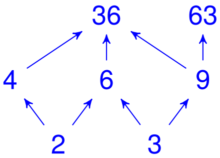
Borne inférieure

soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et X une partie de E

- la **borne inférieure** de X, si elle existe, est le plus grand des minorants de X :

  pour tout $x \in X$ $\inf(X) \preceq x$
  pour tout $x \in E$ si $x \in \mathrm{minorants}(X)$ alors $x \preceq \inf(X)$

- *exemple :* $E_2 = \{2, 3, 4, 6, 9, 36, 63\}$, $R_2 \subseteq E_2 \times E_2$ relation d'ordre contenant les couples (a, b) tels que a divise b



X	$\mathrm{minorants}(X)$	$\mathrm{minimum}(\mathrm{X})$	$\inf(X)$
$\emptyset$	E_2	/	/
$\{2, 3, 4, 6\}$	$\emptyset$	/	/
$\{4, 6\}$	$\{2\}$	/	2
$\{2, 4, 6\}$	$\{2\}$	2	2
$\{6, 36\}$	$\{2, 3, 6\}$	6	6
$\{36, 63\}$	$\{3, 9\}$	/	9
E_2	$\emptyset$	/	/

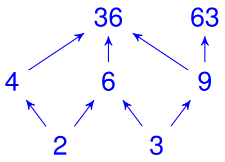
Borne supérieure

soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et X une partie de E

- la **borne supérieure** de X, si elle existe, est le plus petit des majorants de X :

  pour tout $x \in X$ $x \preceq \sup(X)$
  pour tout $x \in E$ si $x \in \mathrm{majorants}(X)$ alors $\sup(X) \preceq x$

- *exemple :* $E_2 = \{2, 3, 4, 6, 9, 36, 63\}$, $R_2 \subseteq E_2 \times E_2$ relation d'ordre contenant les couples (a, b) tels que a divise b



X	$\mathrm{majorants}(X)$	$\mathrm{maximum}(X)$	$\sup(X)$
$\emptyset$	E_2	/	/
$\{2, 3, 4, 6\}$	$\{36\}$	/	36
$\{3\}$	$\{3, 6, 9, 36, 63\}$	3	3
$\{6, 9\}$	$\{36\}$	/	36
$\{2, 3, 6\}$	$\{6, 36\}$	6	6
$\{36, 63\}$	$\emptyset$	/	/
E_2	$\emptyset$	/	/

Ordres bien fondés

- une relation d'ordre $\preceq$ sur un ensemble E est **bien fondée** ssi il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante $e_1 \succ e_2 \succ \cdots$ d'éléments de E
  - *exemples :*
    - ⋆ $\leq$ est bien fondée sur $\mathbb{N}$
    - ⋆ $\leq$ n'est pas bien fondée sur $\mathbb{Z}$
  - à partir d'une suite infinie strictement croissante $e_1 \prec e_2 \prec \cdots$ **on ne peut pas** construire une suite infinie strictement décroissante «en renversant» la suite !
  - toute relation d'ordre sur un ensemble fini est bien fondée
- permet de raisonner par induction bien fondée
- utiles pour prouver la terminaison d'algorithmes

Ordres bien fondés

Théorème La relation d'ordre $\preceq$ sur E est bien fondée ssi toute partie non vide de E admet un élément minimal (pour cet ordre).

- ($\Rightarrow$) Par l'absurde. Soit X une partie non vide de E. Si X n'admet pas d'élément minimal alors pour tout $x \in X$ il existe $y \in X$ tel que $y \prec x$. Puisque $X \neq \emptyset$ on peut choisir un élément $x_0 \in X$ et il existe donc $x_1 \in X$ tel que $x_1 \prec x_0$. x_1 n'est pas minimal et on peut ainsi construire «de proche en proche» une suite infinie strictement décroissante, et $\preceq$ n'est donc pas bien fondée ce qui contredit l'hypothèse.
- ($\Leftarrow$) On montre que toute suite strictement décroissante est finie. Si toute partie non vide de E admet un élément minimal, alors c'est en particulier le cas pour toute suite strictement décroissante. Soit $p \in \mathbb{N}$ l'indice de cet élément minimal, tous les éléments d'indice inférieur à p lui sont supérieurs et, puisque la suite est strictement décroissante, p est le plus grand indice de la suite qui est donc finie.

exemple : la relation $\sqsubseteq$, définie par $n_1 \sqsubseteq n_2$ ssi n_1 divise n_2, est une relation d'odre bien fondée sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

- les éléments minimaux de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ sont les nombres premiers

Induction bien fondée

Théorème Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre bien fondée $\preceq$, et P une propriété sur les éléments de E.

$$\text{Si} \left(\begin{array}{l} \text{pour tout } x \in E \\ (\text{si } (\text{pour tout } y \prec x \ P(y)) \text{ alors } P(x)) \end{array} \right) \text{ alors pour tout } \ e \in E \ P(e).$$

- pour tout $x \in E$
  - on suppose $P(y)$ pour tous les éléments y strictement plus petits que x et on démontre $P(x)$
  - si x est un élément minimal de E ... il n'existe pas d'éléments strictement plus petit que x et on démontre $P(x)$ sans aucune hypothèse

Induction bien fondée

Théorème Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre bien fondée $\preceq$, et P une propriété sur les éléments de E.

$$\text{Si}\left(\begin{array}{l}\text{pour tout } x \in E \\ (\text{si } (\text{pour tout } y \prec x\ P(y)) \text{ alors } P(x))\end{array}\right) \text{ alors pour tout } \ e \in E\ P(e).$$

- Soit $X = \{x \in E \mid P(x) \text{ est faux}\}$. Si X est non vide, alors, puisque $\preceq$ est bien fondée, X admet un élément minimal x_0. Tout élément $y \prec x_0$ n'appartient donc pas à X et vérifie donc $P(y)$. En utilisant l'hypothèse, on en déduit que $P(x_0)$ est vrai ce qui contredit $x_0 \in X$. Donc X est vide, ce qui signifie que pour tout $e \in E$, $P(e)$ est vrai.

Induction bien fondée : exemple

Tout entier $n \geq 2$ peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.

- $P(n)$: n peut s'écrire comme un produit de nombres premiers
- la relation $\sqsubseteq$, définie par $n_1 \sqsubseteq n_2$ ssi n_1 divise n_2, est une relation d'odre bien fondée sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
  - si n est un élément minimal de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, c'est un nombre premier et donc $P(n)$
  - sinon (n n'est pas un nombre premier) on suppose $P(m)$ pour tout $m \sqsubset n$ et on montre $P(n)$
    - il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, n\}$ tel que $n = k_1 k_2$ puisque n n'est pas premier
    - $k_1 \sqsubset n$ et $k_2 \sqsubset n$
    - par hypothèse d'induction ($P(k_1)$ et $P(k_2)$) k_1 et k_2 peuvent s'écrire comme un produit de nombres premiers
    - donc $n = k_1 k_2$ peut s'écrire comme un produit de nombres premiers

Induction bien fondée : exemple

- **Récurrence complète sur $\mathbb{N}$** : induction bien fondée ($\leq$ est une relation d'ordre bien fondée sur $\mathbb{N}$)

$$\text{Si}\left(\underbrace{\begin{array}{l}\text{pour tout } n \in \mathbb{N}\\ \text{si (pour tout } k < n\ P(k)) \text{ alors } P(n)\end{array}}_{I}\right) \text{ alors pour tout } \ n \in \mathbb{N}\ P(n)$$

- Montrons : $\text{Si}\left(\underbrace{P(0)}_{B} \text{ et } \underbrace{\begin{array}{l}\text{pour tout } n \in \mathbb{N}\\ \text{si } P(n) \text{ alors } P(n+1)\end{array}}_{H}\right) \text{ alors pour tout } \ n \in \mathbb{N}\ P(n)$

On suppose B et H et on montre $P(n)$ par induction bien fondée : on montre I

- si n est un élément minimal, alors $n = 0$ et $P(0)$ est vrai d'après B donc I est vrai
- sinon $n = m + 1$ et si $P(m + 1)$ est faux, alors $P(m)$ est faux (contraposée de H) et il existe donc un entier $k < n$ tel que $P(k)$ est faux donc, "pour tout $k < n$ $P(k)$" est faux donc I est vrai

Ordres lexicographiques

- **ordre lexicographique** sur un produit cartésien d'ensembles ordonnés défini à partir des relations d'ordre des ensembles du produit cartésien
  - Soit $(E_1, \preceq_1)$, ..., $(E_n, \preceq_n)$ des ensembles ordonnés. La relation d'ordre lexicographique $\preceq$ sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ est définie par :

$$(e_1, \cdots, e_n) \preceq (f_1, \cdots, f_n)$$
$$\text{ssi} \quad \left(\begin{array}{ll} & \left(\begin{array}{l} \text{il existe } i \leq n \text{ tel que} \\ (\text{pour tout } \ k < i \ e_k = f_k) \ \text{ et } \ e_i \prec_i f_i \end{array} \right) \\ \text{ou} & (e_1, e_2, \cdots, e_n) = (f_1, f_2, \cdots, f_n) \end{array} \right)$$

Proposition $\preceq$ est une relation d'ordre

- *exemple :* ordre lexicographique $\preceq_{\mathbb{N}^3} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ défini à partir de la relation $\leq$ sur $\mathbb{N}$:

$$(n_1, n_2, n_3) \preceq_{\mathbb{N}^3} (n'_1, n'_2, n'_3) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ll} & n_1 < n'_1 \\ \text{ou} & (n_1 = n'_1 \text{ et } n_2 < n'_2) \\ \text{ou} & (n_1 = n'_1 \text{ et } n_2 = n'_2 \text{ et } n_3 \leq n'_3) \end{array} \right)$$

  - $(0,3,3) \preceq_{\mathbb{N}^3} (1,0,0)$, $(2,2,1) \preceq_{\mathbb{N}^3} (2,2,2)$,$(2,2,1) \not\preceq_{\mathbb{N}^3} (2,1,2)$

Ordres lexicographiques bien fondés

- **Théorème** Soit $(E_1, \preceq_1)$, ..., $(E_n, \preceq_n)$ des ensembles ordonnés. Si $\preceq_1$, ...,$\preceq_n$ sont des ordres bien fondés, alors l'ordre lexicographique $\preceq$ sur $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est bien fondé.
- *exemple :* $\preceq_{\mathbb{N}^3}$ est bien fondé
  - il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante de triplets d'entiers pour $\preceq_{\mathbb{N}^3}$
- l'ordre alphabétique sur les lettres de l'alphabet est bien fondé (puisque l'alphabet est fini) mais l'ordre alphabétique sur les mots n'est pas bien fondé
  - suite infinie strictement décroissante $(a^n b)_{n \in \mathbb{N}}$: $b \succ ab \succ aab \succ \cdots$
  - l'ordre alphabétique sur les mots n'est pas un ordre lexicographique sur un produit cartésien ... les mots ne sont pas tous de la même longueur !