



TD1 : Ensembles, Relations, Fonctions

Exercice 1 [Ensembles]

1. Calculer $S_1 \times S_1$ pour $S_1 = \{0, 1, 2\}$.
2. Calculer l'ensemble $\wp(S)$ des parties de S pour $S = S_1$ puis pour $S = S_2 = \{1, \{1, 4\}\}$ et enfin pour $S = S_3 = \wp(\{1\})$.
3. Donner toutes les partitions possibles de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 2 [Raisonnement sur les ensembles]

1. Soient A, B deux parties de E . Montrer que $A \cap \overline{A \cap B} = A \cap \overline{B}$.
2. Soient A, B, C trois parties de E . Montrer que si $A \cap B = A \cap C$ alors $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.
3. En déduire que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$ si et seulement si $A \cap B = A \cap C$.
4. Soient A, B, C trois parties de E . Montrer que si $(A \cup B \subseteq A \cup C \text{ et } A \cap B \subseteq A \cap C)$ alors $B \subseteq C$. Dans quel cas a-t-on l'égalité $B = C$?
5. Montrer que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
6. A-t-on $\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$? $\wp(A \cup B) = \wp(A) \cup \wp(B)$?
7. Soit E un sous-ensemble d'un ensemble F et x un élément de F qui n'appartient pas à E . Montrer que $\wp(E \cup \{x\}) = \wp(E) \cup \{\{x\} \cup A \mid A \in \wp(E)\}$.

Exercice 3 [Ensembles et Relations]

On considère la relation (ternaire) S définie sur $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ par $S(a, b, c)$ ssi $c = a + b$. Décrire S sous la forme d'un sous-ensemble de D^3 .

Exercice 4 [Propriétés de base des relations binaires]

1. On considère la relation $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ définie sur $E = \{1, 2, 3\}$. Déterminer si R est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.
2. La relation R définie sur \mathbb{N} par $(n, m) \in R$ si et seulement si n et m ont un diviseur commun différent de 1 est-elle transitive ?
3. On définit la relation R sur l'ensemble $\wp(E)$ des parties de E par $(x, y) \in R$ si et seulement si $x \cap y \neq \emptyset$. La relation R est-elle réflexive, symétrique, transitive ?
4. La relation \preceq , définie sur $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ par $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)$ si et seulement si $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$, est-elle une relation d'ordre ? est-elle totale ?
5. On définit une relation R , permettant d'exprimer que deux nombres réels $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sont « équivalents » à ε près, par $(x_1, x_2) \in R$ si et seulement si $|x_1 - x_2| \leq \varepsilon$. La relation R est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 5 [Produit/composition et inverse de relations]

1. Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ et $R \subseteq A \times B$ la relation définie par $(a, b) \in R$ ssi $a < b$.
 - (a) Écrire la relation R comme un ensemble de paires ordonnées.
 - (b) Calculer les relations $R^{-1} \cdot R$ et $R \cdot R^{-1}$.

2. Montrer que pour deux relations quelconques $R \subseteq X \times Y$ et $S \subseteq Y \times Z$, on a l'égalité $(R.S)^{-1} = S^{-1}.R^{-1}$.
3. On considère la relation $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $(x, y) \in R$ si et seulement si $y = 2x$. Quels sont les éléments de R^+ ?

Exercice 6 [Composition et implications ensemblistes des propriétés des relations]

Soit R une relation sur E . Montrer que :

1. R est réflexive si et seulement si $\text{Id}_E \subseteq R$.
2. R est symétrique si et seulement si $R = R^{-1}$.
3. R est antisymétrique si et seulement si $R \cap R^{-1} \subseteq \text{Id}_E$.
4. R est transitive si et seulement si $R.R \subseteq R$.
5. si R est réflexive, alors $R \subseteq R.R$ et $R.R$ est aussi réflexive.
6. si R est symétrique, alors $R^{-1}.R = R.R^{-1}$.
7. si R est transitive, alors $R.R$ transitive.

Exercice 7 [Relation d'équivalence sur les couples d'entiers]

On considère l'ensemble $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, c'est-à-dire l'ensemble des couples d'entiers naturels dont le deuxième élément est non nul. Soit R définie sur cet ensemble par :

$$(a, b)R(c, d) \text{ ssi } ad = bc$$

Démontrer que R est une relation d'équivalence.

Exercice 8 [Partition engendrée par une relation d'équivalence]

Soit R une relation d'équivalence dans A et soit $[a]$ la classe d'équivalence de $a \in A$. Montrer que :

1. pour chaque $a \in A$, $a \in [a]$
2. $[a] = [b]$ ssi $(a, b) \in R$
3. si $[a] \neq [b]$ alors $[a]$ et $[b]$ sont disjointes
4. l'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de A

Exercice 9 [Applications injectives, surjectives, bijectives : exemples]

1. Trouver un exemple d'application qui n'est ni injective, ni surjective.
2. Les applications suivantes sont-elles injectives ? sont-elles surjectives ? sont-elles bijectives ?
 - (a) $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f_1(x) = 3x + 1$ et $f_2 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ telle que $f_2(x) = 3x + 1$
 - (b) $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ telle que $f(x) = x \bmod 3$.
 - (c) $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(x, y) = x + y$.
 - (d) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(n) = n + 1$ si n est pair et $f(n) = n - 1$ si n est impair.
 - (e) $f : A^* \rightarrow A^*$ telle que $f(u) = u.b$ où $A = \{a, b\}$
3. Combien existe-t-il d'applications de $\{a, b, c\}$ dans $\{1, 2\}$? Combien sont des applications injectives ? des applications surjectives ? des applications bijectives ?

Exercice 10 [Produit cartésien, parties d'un ensemble, bijections]

Soient A et B deux parties disjointes d'un ensemble E . Réaliser une bijection entre $\wp(A) \times \wp(B)$ et $\wp(A \cup B)$.

Exercice 11 [Relations d'équivalence, bijections]

1. Soit F un ensemble et E un sous-ensemble de $\wp(F)$. On définit sur E la relation \sim par : $A \sim B$ s'il existe une bijection $f : A \rightarrow B$. Démontrer que la relation \sim est une relation d'équivalence. En se restreignant à un sous-ensemble de $\wp_f(F)$, l'ensemble des parties finies de F , la relation $|A| = |B|$ est une relation d'équivalence.
2. Soit E un ensemble et \equiv une relation d'équivalence sur E .
 - (a) On considère l'application $f : E \rightarrow E_{/\equiv}$ qui à tout $x \in E$ associe $f(x) = [x]_\equiv$. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
 - (b) Soient F un ensemble et $g : E_{/\equiv} \rightarrow F$ et $h : E \rightarrow F$ deux applications telles que pour tout $x \in E$, $h(x) = g([x]_\equiv)$. Montrer que g est injective si et seulement si pour tous $x, x' \in E$, $h(x) = h(x')$ implique $x \equiv x'$.

Exercice 12 [Applications entre ensembles finis]

Soient E et F deux ensembles finis non vides contenant respectivement p et n éléments.

1. Montrer que le nombre d'applications de E vers F est n^p .
2. Combien d'applications de $\{0, 1\}$ vers $\{0, 1\}$ peut-on construire ? Montrer que pour toute application de $\{0, 1\}$ vers $\{0, 1\}$, $f(f(f(x))) = f(x)$.

Exercice 13 [Principe des tiroirs]

Si $n < m$, il n'existe pas d'injection d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments. Une formulation plus imagée de ce résultat est le *principe des tiroirs* (ou encore *pigeon-hole principle*), à savoir : si $n < m$ et que l'on veut placer m chemises dans n tiroirs alors un tiroir au moins contiendra plusieurs chemises. Plus précisément, montrer qu'un tiroir contiendra au moins un nombre entier $p \geq \frac{m}{n}$ chemises.

Exercice 14 [Applications injectives]

Soit $f : A \rightarrow B$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si pour tous sous-ensembles X, Y de A , $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Exercice 15 [Involutions]

On dit qu'une application $f : E \rightarrow E$ est une involution si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(f(x)) = x$. Montrer que si f est une involution alors f est bijective.

Exercice 16 [Composition d'applications]

Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Exercice 17 [Bijection réciproque]

On rappelle que pour une application $f : E \rightarrow F$, une partie A de E et une partie B de F , on définit : $f(A) = \{y \in F \mid \text{il existe } x \in A, y = f(x)\}$ et $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

1. Montrer que pour toute partie A de E , $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que si f est injective, alors pour toute partie A de E , $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.
3. Pour $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{a, b\}$, $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$, $A = \{1\}$, donner $f(A)$ et $f^{-1}(f(A))$.

Exercice 18 [Bijection réciproque]

Soit $f: E \rightarrow F$ une application. Montrer que :

1. Si $E \neq \emptyset$ alors f est injective si et seulement si f a un inverse à gauche, c'est-à-dire il existe une application $r: F \rightarrow E$ telle que $r \circ f = id_E$. L'application r est surjective et s'appelle une rétraction de f .
2. f est surjective si et seulement si f a un inverse à droite, c'est-à-dire il existe une application $s: F \rightarrow E$ telle que $f \circ s = id_F$. L'application s est injective et s'appelle une section de f .
3. f est bijective si et seulement si f a un inverse, c'est-à-dire il existe une application $f^{-1}: F \rightarrow E$ telle que $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$. L'application f^{-1} est une bijection et s'appelle la bijection réciproque de f .

Exercice 19 [Ensembles dénombrables]

On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une bijection entre cet ensemble et \mathbb{N} . Montrer que $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. On pourra montrer que les fonctions f et g suivantes sont des bijections de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N} : $f(x, y) = y + (0 + 1 + 2 + \dots + (x + y))$ et $g(x, y) = 2^y(2x + 1) - 1$.

Exercice 20 [Ensembles dénombrables]

Montrer que l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable.

Exercice 21 [Cantor]

Montrer qu'il n'existe pas de bijection entre un ensemble et l'ensemble de ses parties.

Exercice 22 [Relations d'équivalence, applications]

Soient E et F deux ensembles, et $f: E \rightarrow F$ une application. On définit la relation $\mathcal{R}_f \subseteq E \times E$ par $x \mathcal{R}_f y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$.

1. Montrer que \mathcal{R}_f est une relation d'équivalence.
2. Donner la définition de la classe d'équivalence de x par la relation \mathcal{R}_f .
3. Pour tout $x \in E$, on note $[x]_{\mathcal{R}_f}$ la classe d'équivalence de x . Montrer que, pour tous $x, y \in E$, si $x \in [y]_{\mathcal{R}_f}$, alors $[x]_{\mathcal{R}_f} = [y]_{\mathcal{R}_f}$.

On suppose, pour toute la suite de l'exercice, que l'application f n'est ni injective, ni surjective. On définit l'application $\mathcal{S}: E \rightarrow E_{/\mathcal{R}_f}$ par $\mathcal{S}(x) = [x]_{\mathcal{R}_f}$. On rappelle que $E_{/\mathcal{R}_f}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de E par la relation \mathcal{R}_f .

4. \mathcal{S} est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier chacune des réponses.

On définit la relation $\bar{f} \subseteq E_{/\mathcal{R}_f} \times F$ par $(X, y) \in \bar{f}$ si et seulement si il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$.

5. Montrer que \bar{f} est une application.
6. Est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier chacune des réponses.

Exercice 23 [Monoïdes]

1. Montrer que $(\mathbb{N}, +, 0)$ et $(\wp(E), \cup, \emptyset)$ sont des monoïdes commutatifs.
2. Soit A un alphabet. L'ensemble des mots de A^* de longueur paire est-il un monoïde pour la concaténation ? Même question pour l'ensemble des mots de A^* de longueur impaire.