Modélisation et Optimisation par les Graphes et la Programmation Linéaire

Cours 4 : Dualité, résultats fondamentaux et applications

Patrice Perny

patrice.perny@lip6.fr

LIP6 – UPMC

Master ANDROIDE – M1 – MOGPL

Plan

- Un exemple d'interprétation du dual
- Théorèmes fondamentaux de dualité
- Application à l'analyse post-optimale
- Application aux jeux

I) Un exemple d'interprétation du dual

Retour sur l'exemple du cours précédent

Problème 1

Une entreprise fabrique deux produits P_1, P_2 à l'aide de 3 machines M_1, M_2, M_3. Chaque produit doit être traité par les 3 machines.

Tps d'utilisation	P_1	P_2	utilis. max
M_1	3 mn/kg	10 mn/kg	60 $h/mois$
M_2	12 mn/kg	8 mn/kg	120 $h/mois$
M_3	12 mn/kg	20 mn/kg	150 $h/mois$
Px de vente	20 $Euros/kg$	35 $Euros/kg$	
Px d'achat mat. prem.	10 $Euros/kg$	10 $Euros/kg$	

Modélisation du problème 1

Variables de décision

x_1 : quantité mensuelle de produit P_1 fabriqué

x_2 : quantité mensuelle de produit P_2 fabriqué

Programme Linéaire

$$\max \; z = 10x_1 + 25x_2$$

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3 & x_1 & + & 10 & x_2 & \leq & 3600 \\ 12 & x_1 & + & 8 & x_2 & \leq & 7200 \\ 12 & x_1 & + & 20 & x_2 & \leq & 9000 \end{array} \right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Solution optimale

$x_1^* = 300, x_2^* = 270$ et $z^* = 9750$

Exemple (suite)

Problème 2

Une personne extérieure souhaite louer les machines à plein temps. Pour cela il faut désintéresser le propriétaire des machines de sa propre production pour qu'il ait intérêt à les louer. Quels taux horaire de location lui proposer ?

Modélisation du problème 2

Variables de décision

v_i : prix de location de la machine M_i en Euros/min, $i = 1, 2, 3$.

Programme Linéaire

$$\min \; z' = 3600v_1 + 7200v_2 + 9000v_3$$

$$\mathcal{D} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3 & v_1 & + & 12 & v_2 & + & 12 & v_3 & \geq & 10 \\ 10 & v_1 & + & 8 & v_2 & + & 20 & v_3 & \geq & 25 \end{array} \right.$$

$$v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0$$

Solution optimale

$v_1^* = 5/3, v_2^* = 0, v_3^* = 5/12$ et $z'^* = 9750$

$\mathcal{D}$ est le PROBLÈME DUAL du problème $\mathcal{P}$

II) Résultats fondamentaux de Dualité

Propriétés liant le Primal au Dual

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{rcl} \max\ z & = & c^t x \\ Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \right. \qquad \mathcal{D} \left\{ \begin{array}{rcl} \min\ z' & = & v^t b \\ A^t v & \geq & c \\ v & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Proposition

Si x est une solution réalisable de $\mathcal{P}$ et v est une solution réalisable de $\mathcal{D}$ alors $c^t x \leq v^t b$

Preuve. $A^t v \geq c \Rightarrow c^t \leq v^t A \Rightarrow c^t x \leq v^t Ax \Rightarrow c^t x \leq v^t b$ □

Corollaire

Si x est une solution réalisable de $\mathcal{P}$ et v est une solution réalisable de $\mathcal{D}$ telles que $c^t x = v^t b$ alors x et v sont respectivement des solutions optimales de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

Preuve. Si x' est $\mathcal{P}$-réalisable alors $c^t x' \leq v^t b = c^t x$
Si v' est $\mathcal{D}$-réalisable alors $v'^t b \geq c^t x = v^t b$ □

Egalité des objectifs à l'optimum

Proposition

Si les contraintes de $\mathcal{P}$ sont compatible (non-vides) ainsi que celles de $\mathcal{D}$ alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ ont au moins une solution optimale et les objectifs ont la même valeur à l'optimum :

$$c^t x^* = v^{*t} b$$

x^* solution optimale de $\mathcal{P}$, v^* solution optimale de $\mathcal{D}$

Illustration sur l'exemple initial :

Solution du primal : $x_1^* = 300, x_2^* = 270$ et $z^* = 9750$
Solution du dual : $v_1^* = 5/3, v_2^* = 0, v_3^* = 5/12$ et $z'^* = 9750$

Théorème fondamental de dualité

Notation :
$\mathcal{CP} = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b, x \geq 0\}, \ \ \mathcal{CD} = \{v \in \mathbb{R}^m, A^t v \geq c, v \geq 0\}$

Théorème (Théorème des écarts complémentaires)

x^* est une solution optimale du problème $\mathcal{P}$ et v^* est une solution optimale du problème $\mathcal{D}$ si et seulement si on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^* \in \mathcal{CP}, v^* \in \mathcal{CD} \\ v^{*t}(Ax^* - b) = 0 \\ x^{*t}(A^t v^* - c) = 0 \end{array} \right.$$

Ce théorème montre qu'il est possible, connaissant la solution optimale x^* de $\mathcal{P}$, d'obtenir la solution optimale de v^* de $\mathcal{D}$ et réciproquement.

Preuve

$\Rightarrow$) Soient x^* et v^* des solutions optimales des problèmes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ respectivement.
D'après la proposition précédente on sait que : $c^t x^* = v^{*t} b$

$$\begin{array}{rcl} v^{*t}(Ax^* - b) & = & v^{*t}Ax^* - v^{*t}b \\ \geq 0 \quad \leq 0 & = & v^{*t}Ax^* - c^t x^* \\ & = & (v^{*t}A - c^t)x^* \ \ \text{scalaire} \\ & = & x^{*t}(A^t v^* - c) \\ & = & \geq 0 \quad \geq 0 \end{array}$$

Donc $v^{*t}(Ax^* - b) = x^{*t}(A^t v^* - c) = 0$

Preuve (suite et fin)

$\Leftarrow$)

$v^{*t}(Ax^* - b) = 0 \Rightarrow v^{*t}Ax^* = v^{*t}b$

$x^{*t}(A^t v^* - c) = 0 \Rightarrow x^{*t}A^t v^* = x^{*t}c$
d'où en transposant $v^{*t}Ax^* = c^t x^*$

$c^t x^* = v^{*t}b \Rightarrow x^*$ sol opt de $\mathcal{P}$ et v^* sol opt de $\mathcal{D}$
(d'après le corollaire vu précédemment)

Passage de x^* à v^* : cas général

- Si la contrainte primale n°j n'est pas active alors $(Ax^* - b)_j < 0$ et la variable duale associée v_j^* est nécessairement nulle.
- Si $x_i^* > 0$ alors la contrainte duale associée est active $(A^t v^* - c)_i = 0$ ce qui signifie que les m variables duales vérifient l'équation linéaire : $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j^* = c_i$

Parmi les contraintes de $\mathcal{P}$ on a :

- p contraintes inactives donc p variables duales sont nulles
- $m - p$ contraintes actives (qui ajoutées aux n-(m-p) hyperplans $x_i^* = 0$ définissent x^*)
- $m - p$ composantes de x sont positives, donc les m variables duales $v_j{}^*$ satisfont un système de $m - p$ équations linéaires. Comme on connait p variables duales (qui sont nulles, voir point 1) il reste un système de $m - p$ variables à $m - p$ inconnues à résoudre.

Passage de x^* à v^* : exemple

La solution optimale de l'exemple initial est :
$x_1 = 300, x_2 = 270, e_1 = 0, e_2 = 1440, e_3 = 0$
Comme $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ les contraintes duales 1 et 2 sont actives.
On a donc $e'_1 = e'_2 = 0$ et en vertu du théorème précédent :

$$\begin{aligned} 3v_1 + 12v_2 + 12v_3 &= 10 \\ 10v_1 + 8v_2 + 20v_3 &= 25 \end{aligned}$$

La seconde contrainte primale est inactive donc la seconde variable duale est nulle : $v_2 = 0$

Il nous reste donc à résoudre.

$$\begin{aligned} 3v_1 + 12v_3 &= 10 \\ 10v_1 + 20v_3 &= 25 \end{aligned}$$

ce qui donne $v_1 = 5/3, v_2 = 0, v_3 = 5/12, e'_1 = 0, e'_2 = 0$ et $z' = 9750$

Passage de v^* à x^* : exemple

$v_1 = 5/3, v_2 = 0, v_3 = 5/12, e'_1 = 0, e'_2 = 0$

Comme $v_1 > 0$ et $v_3 > 0$ les contraintes 1 et 3 sont actives dans le primal. On a donc $e_1 = e_3 = 0$ et on doit résoudre :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 10x_2 &= 3600 \\ 12x_1 + 20x_2 &= 9000 \end{aligned}$$

Cela donne $x_1 = 300, x_2 = 270, e_1 = 0, e_2 = 1440, e_3 = 0$ et $z = 9750$

Tableaux optimaux du simplexe pour le primal et le dual

Le tableau du primal à l'optimum est :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
x_1	1	0	$-1/3$	0	$1/6$	300
x_2	0	1	$1/5$	0	$-1/20$	270
e_2	0	0	$12/5$	1	$-8/5$	1440
	0	0	$-5/12$	0	$-5/3$	-9750

Le tableau du dual à l'optimum est :

	v_1	v_2	v_3	e'_1	e'_2	
v_3	0	$8/5$	1	$-1/6$	$1/20$	$5/12$
v_1	1	$-12/5$	0	$1/3$	$-1/5$	$5/3$
	0	1440	0	300	270	-9750

On retrouve les mêmes coefficients au signe près et à une transposition près : solutions du dual $\leftrightarrow$ valeurs des coûts marginaux du primal et inversement
On peut reconstruire le tableau du simplexe du dual à l'optimum à partir de celui du primal et inversement.

III) Dualité et analyse post-optimale

Analyse post-optimale

Supposons que la capacité de production de la machine M_1 augmente de $\lambda > 0$ et que l'on veuille examiner l'impact sur la solutions optimale. Le nouveau problème devient :

$$\max\ z = 10x_1 + 25x_2$$

$$\mathcal{P}\left\{\begin{array}{llllllll} 3 & x_1 & + & 10 & x_2 & + & e_1 & = 3600+\lambda \\ 12 & x_1 & + & 8 & x_2 & + & e_2 & = 7200 \\ 12 & x_1 & + & 20 & x_2 & + & e_3 & = 9000 \end{array}\right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0$$

$$\max\ z = 10x_1 + 25x_2$$

$$\mathcal{P}\left\{\begin{array}{llllllll} 3 & x_1 & + & 10 & x_2 & + & e_1 - \lambda & = 3600 \\ 12 & x_1 & + & 8 & x_2 & + & e_2 & = 7200 \\ 12 & x_1 & + & 20 & x_2 & + & e_3 & = 9000 \end{array}\right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0$$

En fonction des variables hors base à l'optimum

$$\max\ z = 9750 - 5/3e_1 - 5/12e_3$$

$$\mathcal{P}\left\{\begin{array}{lllllllll} x_1 & = & 300 & + & 1/3 & e_1 & - & 1/6 & e_3 \\ x_2 & = & 270 & - & 1/5 & e_1 & + & 1/20 & e_3 \\ e_2 & = & 1440 & - & 12/5 & e_1 & + & 8/5 & e_3 \end{array}\right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0$$

ce qui devient avec λ :

$$\max\ z = 9750 - 5/3(e_1-\lambda) - 5/12e_3$$

$$\mathcal{P}\left\{\begin{array}{lllllllll} x_1 & = & 300 & + & 1/3 & (e_1-\lambda) & - & 1/6 & e_3 \\ x_2 & = & 270 & - & 1/5 & (e_1-\lambda) & + & 1/20 & e_3 \\ e_2 & = & 1440 & - & 12/5 & (e_1-\lambda) & + & 8/5 & e_3 \end{array}\right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0$$

Analyse vue de la base optimale

Si l'on garde le même sommet correspondant à $e_1 = e_3 = 0$ on obtient alors :

$$\max\ z = 9750 + 5/3\lambda$$

$$\mathcal{P}\left\{\begin{array}{lllllll} x_1 & = & 300 & - & 1/3 & \lambda & \geq & 0 \\ x_2 & = & 270 & + & 1/5 & \lambda & \geq & 0 \\ e_2 & = & 1440 & + & 12/5 & \lambda & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0$$

La solution optimale s'améliore avec λ et ce sans changer de base. Le domaine de validité de cette analyse est $\lambda \leq 900$. On note que $5/3$ représente le coefficient d'augmentation de la fonction objectif lorsqu'on a une relaxation de la contraintes 1.

C'est aussi la valeur de la variable duale v_1 à l'optimum !

Idem si on relâche la contrainte pour M_3 on trouve $z' = 9750 + 5/12\lambda$ (pas pour M_2 qui n'est pas active)

Variations plus importantes du second membre

Dans l'exemple, si $\lambda > 900$ il faut changer de base et l'analyse est plus complexe en raison du changement significatif du polyèdre des contraintes (les solutions réalisables ne sont plus les mêmes). C'est pire si tout le second membre varie.

Une solution ! Si le second membre des contraintes est modifié c'est la fonction objectif du dual qui est modifiée mais les contraintes restent inchangées !

1. calculer la solution optimale du dual de $\mathcal{D}$ à partir de celle du problème primal $\mathcal{P}$
2. Résoudre $\mathcal{D}'$ (version modifiée de $\mathcal{D}$) par le simplexe (on peut repartir de la solution optimale de $\mathcal{D}$ car elle est toujours réalisable pour $\mathcal{D}'$, seul l'objectif a changé)
3. à partir de la solution de $\mathcal{D}'$ retrouver celle du problème $\mathcal{P}'$ résultant de la modification de $\mathcal{P}$

Variation du second membre vue dans le dual

Supposons que la capacité de production de la machine M_i augmente de $\lambda_i > 0$ et que l'on veuille examiner l'impact sur la solution optimale. Le nouveau problème devient :

$$\max\ z = 10x_1 + 25x_2$$

$$\mathcal{P}\left\{\begin{array}{llllll} 3 & x_1 & + & 10 & x_2 & \leq & 3600 + \lambda_1 \\ 12 & x_1 & + & 8 & x_2 & \leq & 7200 + \lambda_2 \\ 12 & x_1 & + & 20 & x_2 & \leq & 9000 + \lambda_3 \end{array}\right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\min\ z' = (3600 + \lambda_1)v_1 + (7200 + \lambda_2)v_2 + (9000 + \lambda_3)v_3$$

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{lllllllll} 3 & v_1 & + & 12 & v_2 & + & 12 & v_3 & \geq & 10 \\ 10 & v_1 & + & 8 & v_2 & + & 20 & v_3 & \geq & 25 \end{array}\right.$$

$$v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0$$

Le polyèdre ne change pas, on peut repartir de la base optimale.

Analyse post-optimale dans le dual

Le tableau du dual à l'optimum est :

	v_1	v_2	v_3	e'_1	e'_2	
v_3	0	8/5	1	−1/6	1/20	5/12
v_1	1	−12/5	0	1/3	−1/5	5/3
	0	1440	0	300	270	−9750

Comme le nouvel objectif du dual est augmenté de $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, la dernière ligne du tableau du simplexe doit être mise à jour avant d'itérer.

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 v_1 & = & 5/3\ \lambda_1 + 12/5\ \lambda_1 v_2 - 1/3\ \lambda_1 e'_1 + 1/5\ \lambda_1 e'_2 \\ \lambda_2 v_2 & = & \lambda_2 v_2 \\ \lambda_3 v_3 & = & 5/12\ \lambda_3\ - 8/5 \lambda_3 v_2 + 1/6\ \lambda_3 e'_1 - 1/20 \lambda_3 e'_2 \end{array}$$

$$z' = 9750 + 5/3\ \lambda_1 + 5/12\ \lambda_3 + (...)v_2 + (...)e'_1 + (...)e'_2$$

L'ancienne solution optimale reste optimale si les nouveaux coefficients de v_2, e'_1 et e'_2 restent positifs (sinon il faut itérer l'algorithme du simplexe). Une fois l'optimum du dual connu, on utilise alors le *théorème des écarts complémentaires* pour en déduire la nouvelle solution du primal.

Intérêt pratique de la dualité

- donne une vision complémentaire sur un programme linéaire initial
- possède une interprétation économique
- facilite l'analyse post-optimale après variation du second membre
- peut accélerer la résolution pour les problèmes qui ont beaucoup de contraintes et peu de variables (dans ce cas il vaut mieux résoudre le dual que le primal car le nombre d'itérations du Simplexe sera moindre).
- la dualité à différentes applications dans les graphes, e.g. théorème de Ford-Fulkerson pour le calcul du flot maximum (voir partie graphe du cours MOGPL)

IV) Dualité et résolution de jeux

Jeu des deux batailles

- Ce jeu oppose deux pays 1 et 2, chaque pays disposant d'une armée de 5 régiments.
- chaque pays envoie une partie (1 à 4 régiments) à une première bataille, et la gagne s'il a envoyé au moins 2 régiments de plus que l'autre
- si personne ne gagne à la première bataille, la deuxième bataille à lieu entre les réserves (les régiments qui restent), pour la gagner il suffit d'avoir un régiment de plus que l'autre
- la victoire à la première bataille vaut 1 point, celle à la deuxième bataille vaut 2 points, les points gagnés par un joueur sont perdus par l'autre, d'où le tableau des gains :

Tableau des gains pour le joueur 1

$1 \backslash 2$	$(4,1)$	$(3,2)$	$(2,3)$	$(1,4)$
$(4,1)$	0	-2	$+1$	$+1$
$(3,2)$	$+2$	0	-2	$+1$
$(2,3)$	-1	$+2$	0	-2
$(1,4)$	-1	-1	$+2$	0

(p,q) signifie qu'on envoie p régiments à la première bataille et q après.

Jeu à somme nulle

G = Gains pour le joueur 1 $\qquad$ G' = Gains pour le joueur 2

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & +1 & +1 \\ +2 & 0 & -2 & +1 \\ -1 & +2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & +2 & 0 \end{pmatrix} \qquad G' = \begin{pmatrix} 0 & +2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & +2 & -1 \\ +1 & -2 & 0 & +2 \\ +1 & +1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Jeux à somme nulle

$$\forall i \in I \ \forall j \in J \quad g_{ij} + g'_{ij} = 0$$

Jeu simple

On joue une seule fois.

- le joueur 1 peut s'assurer un gain minimum égal à : $\max_{i\in I} \min_{j\in J} g_{ij}$ (= - 1 dans l'exemple)
- le joueur 2 peut limiter sa perte à $\min_{j\in J} \max_{i\in I} g_{ij}$ (= 1 dans l'exemple)

Proposition

$\max_{i\in I} \min_{j\in J} g_{ij} \leq \min_{j\in J} \max_{i\in I} g_{ij}$

Preuve.
$\forall j \in J,\ \min_{j\in J} g_{ij} \leq g_{ij}$ donc
$\forall j \in J,\ \max_{i\in I} \min_{j\in J} g_{ij} \leq \max_{i\in I} g_{ij}$
vrai pour tous les $\max_{i\in I} g_{ij}$ donc pour le plus petit d'entre eux
$\max_{i\in I} \min_{j\in J} g_{ij} \leq \min_{j\in J} \max_{i\in I} g_{ij}$

□

Jeux itérés

On répète le jeu un grand nombre de fois. Les joueurs choisissent une stratégie à chaque itération.
Stratégies mixtes :

- pour joueur 1 $p = (p_1, \ldots, p_m)$, p_i proba avec laquelle J_1 choisit la stratégie i
- pour joueur 2 $q = (q_1, \ldots, q_n)$, q_j proba avec laquelle J_2 choisit la stratégie j

$$\sum_{i\in I} p_i = 1, \sum_{j\in J} q_j = 1$$

Nouveau critère :
Pour J_1 l'espérance de gain de la stratégie pure i est : $\sum_{j\in J} g_{ij} q_j$
Donc l'espérance de gain de sa stratégie mixte p est :
$\sum_{i\in I} p_i \sum_{j\in J} g_{ij} q_j = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} p_i g_{ij} q_j = p^t Gq$

Meilleur réponse à une stratégie mixte de J_2

Cas où la stratégie de l'adversaire est connue
q = Stratégie de J_2

résoudre $\max_p p^t Gq$ s.c. $\sum_{i\in I} p_i = 1, p_i \geq 0$

Dans l'exemple, face à une stratégie uniforme la meilleur réponse du joueur J_1 est donnée par :

$$\max p_2 - p_3, \quad \sum_{i\in I} p_i = 1, \quad \forall i \in I, p_i \geq 0$$

D'où $p = (0, 1, 0, 0)$

La stratégie de l'adversaire est inconnue
résoudre $\max_p \min_q p^t Gq$
s.c. $\sum_{i\in I} p_i = 1, p_i \geq 0$ $\sum_{j\in J} q_j = 1, q_j \geq 0$

Résultat préliminaire pour J_1

Lemme (1)

$\max_p \min_q p^t Gq = \max_p \min_{j\in J} p^t G^j$ $\quad$ (G^j = *colonne j de G*)

Preuve.

- sens $\leq$ évident car à gauche on minimise sur les stratégies mixtes qui contiennent les pures.
- sens $\geq$
  $\max_p \min_{j\in J} p^t G^j \geq \mu \ \Rightarrow\ \exists \hat{p} : \min_{j\in J} \hat{p}^t G^j \geq \mu$ (compacité)
  Donc $\forall j \in J, \hat{p}^t G^j \geq \mu$
  d'où $\forall q$: $\sum_{j\in J} \hat{p}^t G^j q_j \geq \sum_{j\in J} \mu q_j = \mu$
  d'où $\forall q$: $\hat{p}^t Gq \geq \mu$ et donc $\min_q \hat{p}^t Gq \geq \mu$
  de là on tire $\max_p \min_q p^t Gq \geq \mu$

□

En optimisant sa stratégie, J_1 peut omettre de considérer les stratégies mixtes de J_2 et se restreindre aux pures.

Résultat préliminaire pour J_2

Lemme (2)

$\min_q \max_p p^t Gq = \min_q \max_{i\in I} G_i q \quad (G_i = \textit{ligne } i \textit{ de } G)$

Preuve.

- sens $\geq$ évident car à gauche on maximise sur les stratégies mixtes qui contiennent les pures.
- sens $\leq$
  $\min_q \max_{i\in I} G_i q \leq \mu \Rightarrow \exists \hat{q} : \max_{i\in I} G_i \hat{q} \leq \mu$ (compacité)
  Donc $\forall i \in I, G_i \hat{q} \leq \mu$
  d'où $\forall p$: $\sum_{i\in I} p_i G_i \hat{q} \leq \sum_{i\in I} \mu p_i = \mu$
  d'où $\forall p$: $p^t G\hat{q} \leq \mu$ et donc $\max_p p^t G\hat{q} \leq \mu$
  de là on tire $\min_q \max_p p^t Gq \leq \mu$

$\square$

En optimisant sa stratégie, J_2 peut omettre de considérer les stratégies mixtes de J_1 et se restreindre aux pures.

Optimisation des stratégies des deux joueurs

Joueur 1 : $\max_p \min_{j\in J} p^t G^j$

$$\begin{array}{rl} & \max z \\ z - p^t G^j & \leq 0 \\ \sum_{i\in I} p_i & = 1 \\ \forall i, p_i \geq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \max \mu' - \mu'' \\ -p^t G^j + \mu' - \mu'' & \leq 0 \\ \sum_{i\in I} p_i & \leq 1 \\ -\sum_{i\in I} p_i & \leq -1 \\ p_i, \mu', \mu'' \geq 0 & \end{array}$$

Joueur 2 : $\min_q \max_{i\in I} G_i q$

$$\begin{array}{rl} & \min z' \\ z' - G_i q & \geq 0 \\ \sum_{j\in J} q_j & = 1 \\ \forall i, q_i \geq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \min \lambda' - \lambda'' \\ -G_i q + \lambda' - \lambda'' & \geq 0 \\ \sum_{j\in J} q_j & \geq 1 \\ -\sum_{j\in J} q_j & \geq -1 \\ q_j, \lambda', \lambda'' \geq 0 & \end{array}$$

Deux programmes duaux l'un de l'autre

Théorème MINIMAX de von Neumann

Théorème

$\max_p \min_q p^t Gq = \min_q \max_p p^t Gq$

Preuve. On a :

$\max_p \min_q p^t Gq = \max_p \min_{j\in J} p^t G^j$ (Lemme 1)
$\min_q \max_p p^t Gq = \min_q \max_{i\in I} G_i q$ (Lemme 2)

De plus par dualité on sait que : $\max_p \min_{j\in J} p^t G^j = \min_q \max_{i\in I} G_i q$ $\square$

Définition

Dans un jeu à somme nulle on appelle valeur du jeu *la valeur* $z^* = z'^* = \max_p \min_q p^t Gq = \min_q \max_p p^t Gq$

Le cas d'un jeu symétrique à somme nulle
On rappelle qu'un jeu est dit *à somme nulle* si $G = -G'$ où G et G' sont les matrices de gain des deux joueurs. De plus un jeu est dit *symétrique* si $G^t = G'$ c'est-à-dire tel que $g_{ij} = g'_{ji}$ pour tous (i,j).

Donc un jeu symétrique à somme nulle est tel que $G = -G^t$ c'est-à-dire $g_{ij} = -g_{ji}$ pour tous (i,j) (cf le jeu des deux batailles).

Conséquence du théorème minimax pour les jeux symétriques

Proposition

La valeur d'un jeu symétrique à somme nulle est nécessairement 0. De plus les politiques optimales sont identiques pour les deux joueurs.

Preuve : Le gain optimal du joueur 1 est $z^* = \max_p \min_q p^t Gq = \max_p \min_q q^t G^t p = \max_p \min_q q^t(-G)p = -\min_p \max_q(q^t Gp) = -z'^*$. Donc $z^* = -z'^*$. Comme de plus par dualité on avait aussi $z^* = z'^*$ on a bien $z^* = z'^* = 0$.

De plus, puisque la valeur du jeu est nulle, la politique optimale pour J_1 est caractérisée par : $p^t G^j \geq 0, j \in J$. De même la politique optimale pour J_2 est caractérisée par : $G_i q \leq 0, i \in I$ et les deux systèmes sont équivalents quand le jeu est symétrique (en effet on a $(G_i q)^t = -q^t G^i \leq 0$ qui est équivalent à $p^t G^i \geq 0$ pour tout $i \in I$).

Application au jeu des deux batailles

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & +1 & +1 \\ +2 & 0 & -2 & +1 \\ -1 & +2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & +2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{lllllr} & -2\beta & +\gamma & +\delta & \leq 0 & (1) \\ 2\alpha & & -2\gamma & +\delta & \leq 0 & (2) \\ -\alpha & +2\beta & & -2\delta & \leq 0 & (3) \\ -\alpha & -\beta & +2\gamma & & \leq 0 & (4) \\ \alpha & +\beta & +\gamma & +\delta & = 1 & (5) \end{array} \right.$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$$

(2) + (4) $\Rightarrow \alpha \leq \beta - \delta$
(2)+(3)+(4) $\Rightarrow \beta \leq \delta$ et donc $\alpha \leq 0$ soit $\alpha = 0$
De (2) et (4) et $\alpha = 0$ on tire $\delta \leq 2\gamma \leq \beta$ et donc $\beta = \delta = 2\gamma$.

D'où, en utilisant (5), on détermine ici l'unique stratégie mixte optimale :
$\alpha = 0, \beta = 2/5, \gamma = 1/5, \delta = 2/5$