Logique

Principales définitions et «recettes» pour rédiger des démonstrations correctes

Syntaxe des formules de la logique de propositions

<u>Définition</u> L'ensemble $\mathbb{F}$ des formules de la logique des propositions est défini inductivement à partir de $\mathcal{P} \cup \{\mathsf{true}, \mathsf{false}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$:

- toute proposition atomique de $\mathcal{P}$ est une formule de $\mathbb{F}$,
- les constantes true et false sont des formules de $\mathbb{F}$,
- si $F \in \mathbb{F}$ alors $\neg F \in \mathbb{F}$ (négation),
- si $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$ alors $(F_1 \wedge F_2) \in \mathbb{F}$ (conjonction : et),
- si $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$ alors $(F_1 \vee F_2) \in \mathbb{F}$ (disjonction : ou),
- si $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$ alors $(F_1 \rightarrow F_2) \in \mathbb{F}$ (implication).

Toutes les formules sont obtenues en appliquant un nombre fini de fois ces règles de construction.

Syntaxe des expressions booléennes

<u>Définition</u>

- les booléens 0 et 1 de l'ensemble $\mathbb{B}$ sont des expressions booléennes
- (uniquement pour les expressions booléennes avec variables) les symboles de variables booléennes sont des expressions booléennes
- si e est une expression booléenne, alors $\overline{e}$ est une expression booléenne
- si e_1 et e_2 sont des expressions booléennes, alors $e_1 + e_2$ et $e_1 \cdot e_2$ sont des expressions booléennes

Interprétation d'une formule logique

<u>Définition</u> Etant donnée une interprétation $\mathbf{I} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{B}$ des symboles de propositions, on définit l'expression booléenne associée à une formule logique par :

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{I}(p) \quad (p \in \mathcal{P}) & & \mathbf{I}(F_1 \wedge F_2) = \mathbf{I}(F_1) \cdot \mathbf{I}(F_2) \\
\mathbf{I}(\mathsf{true}) = 1 & \mathbf{I}(\neg F) = \overline{\mathbf{I}(F)} & \mathbf{I}(F_1 \vee F_2) = \mathbf{I}(F_1) + \mathbf{I}(F_2) \\
\mathbf{I}(\mathsf{false}) = 0 & & \mathbf{I}(F_1 \rightarrow F_2) = \overline{\mathbf{I}(F_1)} + \mathbf{I}(F_2)
\end{array}$$

Algèbre de Boole minimale $(\mathbb{B}, \cdot, +, \overline{})$

<u>Définition</u> $(\mathbb{B}, \cdot, +, \overline{})$ est une algèbre de Boole minimale lorsque $\mathbb{B}$ contient uniquement deux éléments distincts et les opérateurs booléens vérifient les propriétés suivantes (pour tous $a, b \in \mathbb{B}$) :

Distinction
$0 \not\equiv 1$

Complément	
complément 0	$\overline{0} \equiv 1$
involution	$\overline{\overline{a}} \equiv a$

	Produit	Somme
commutativité	$a \cdot b \equiv b \cdot a$	$a + b \equiv b + a$
élément neutre	$1 \cdot a \equiv a$	$0 + a \equiv a$
élément absorbant	$0 \cdot a \equiv 0$	$1 + a \equiv 1$

Equivalences booléennes

Proposition Pour tous $a, b, c \in \mathbb{B}$:

associativité	
$(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c)$	$(a+b)+c \equiv a+(b+c)$
idempotence	
$a \cdot a \equiv a$	$a + a \equiv a$
élément neutre	
$a \cdot 1 \equiv a$	$a + 0 \equiv a$
élément absorbant	
$a \cdot 0 \equiv 0$	$a + 1 \equiv 1$
distributivité	
$a \cdot (b+c) \equiv a \cdot b + a \cdot c$	$a + (b \cdot c) \equiv (a+b) \cdot (a+c)$
complément	
$a \cdot \overline{a} \equiv 0$	$a + \overline{a} \equiv 1$
lois de Morgan	
$\overline{a \cdot b} \equiv \overline{a} + \overline{b}$	$\overline{a+b} \equiv \overline{a} \cdot \overline{b}$

Opérateurs booléens

Définition Les opérateurs booléens sont définis par :

a_1	a_2	$a_1 \cdot a_2$	$a_1 + a_2$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Formes normales dijonctives et conjonctives

Définition Un littéral est soit une variable booléenne x soit le complémentaire $\overline{x}$ d'une variable booléenne.

Définition Une expression booléenne en forme normale conjonctive (FNC) est une expression qui s'écrit comme un produit de sommes de littéraux.

Définition Une expression booléenne en forme normale disjonctive (FND) est une expression qui s'écrit comme une somme de produits de littéraux.

Proposition Toute expression booléenne admet une forme normale conjonctive et une forme normale disjonctive qui lui sont équivalentes.

Mise en forme normale par transformations syntaxiques

- **1.** application de l'opérateur de complémentation uniquement sur des variables booléennes
  $\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ $\quad \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$ $\quad \overline{\overline{x}} = x$ $\quad \overline{0} = 1$ $\quad \overline{1} = 0$
- **2.** distributivité
  - du produit sur la somme pour obtenir une FND : $x \cdot (y+z) = (y+z) \cdot x = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
  - de la somme sur le produit pour obtenir une FNC : $x + (y \cdot z) = (y \cdot z) + x = (x+y) \cdot (x+z)$
- (à tout moment) simplifications possibles ($x \cdot x = x$, etc.)

Mise en forme normale à partir d'une fonction boolénne Soit $f(x_1, \cdots, x_n)$ la fonction booléenne définie par une expression booléenne et $\mathcal{D}_f = \{(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{B}^n \mid f(b_1, \cdots, b_n) = 1\}$. Une forme normale disjonctive de cette expression est définie par :

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{(b_1, \cdots, b_n) \in \mathcal{D}_f} x'_1 \cdot \ldots \cdot x'_n \qquad \text{où } x'_i = \begin{cases} x_i & \text{si } b_i = 1 \\ \overline{x_i} & \text{si } b_i = 0 \end{cases}$$

Une forme normale conjonctive de cette expression est définie par :

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{(b_1, \cdots, b_n) \notin \mathcal{D}_f} x'_1 + \ldots + x'_n \qquad \text{où } x'_i = \begin{cases} x_i & \text{si } b_i = 0 \\ \overline{x_i} & \text{si } b_i = 1 \end{cases}$$

Formules satisfiables

Définition Une formule F est satisfiable ssi il existe une interprétation $\mathbf{I}$ telle que $\mathbf{I}(F) = 1$ (F est insatisfiable ssi il n'existe aucune interprétation $\mathbf{I}$ telle que $\mathbf{I}(F) = 1$).

Montrons que F est satisfiable.
Soit $\mathbf{I} = \boxed{\text{à trouver}}$, montrons que $\mathbf{I}(F) = 1$.
…

A partir de l'hypothèse «F est satisfiable»
on peut déduire qu'il existe une interprétation $\mathbf{I}$
telle que $\mathbf{I}(F) = 1$.

Montrons que F est insatisfiable.
Soit $\mathbf{I}$ une interprétation quelconque,
montrons que $\mathbf{I}(F) = 0$.
…

A partir de l'hypothèse «F est insatisfiable»
on peut déduire que pour toute interprétation $\mathbf{I}$
$\mathbf{I}(F) = 0$.

Formules valides (tautologies)

Définition Une formule F est valide ssi pour toute interprétation $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}(F) = 1$.

Montrons que F est valide.
Soit $\mathbf{I}$ une interprétation quelconque,
montrons que $\mathbf{I}(F) = 1$.
…

A partir de l'hypothèse «F est valide»
on peut déduire que pour toute interprétation $\mathbf{I}$
$\mathbf{I}(F) = 1$.

Proposition F est **valide** ssi $\neg F$ est **insatisfiable**.

Proposition F est **insatisfiable** ssi $\neg F$ est **valide**.

Conséquence sémantique

Définition $F_2 \models F_1$: La formule F_1 est conséquence sémantique de la formule F_2 ssi pour toute interprétation $\mathbf{I}$ telle que $\mathbf{I}(F_2) = 1$, on a $\mathbf{I}(F_1) = 1$.

Définition $\mathcal{H} \models F$: La formule F est conséquence sémantique de l'ensemble fini de formules $\mathcal{H} = \{F_1, \cdots, F_n\}$ ssi pour toute interprétation $\mathbf{I}$ telle que $\mathbf{I}(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) = 1$, on a $\mathbf{I}(F) = 1$.

Montrons que $F_2 \models F_1$.
Soit $\mathbf{I}$ une interprétation telle que $\mathbf{I}(F_2) = 1$,
montrons que $\mathbf{I}(F_1) = 1$.
…

A partir de l'hypothèse $F_2 \models F_1$ et d'une interprétation $\mathbf{I}$
telle que $\mathbf{I}(F_2) = 1$, on peut déduire que $\mathbf{I}(F_1) = 1$.

Montrons que $\mathcal{H} \models F$.
Soit $\mathbf{I}$ une interprétation telle que
$\mathbf{I}(G) = 1$ pour toute formule $G \in \mathcal{H}$.
Montrons que $\mathbf{I}(F) = 1$.
…

A partir de l'hypothèse $\mathcal{H} \models F$ et d'une interprétation $\mathbf{I}$
telle que $\mathbf{I}(G) = 1$ pour toute formule $G \in \mathcal{H}$,
on peut déduire que $\mathbf{I}(F) = 1$.

<u>Proposition</u> $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \rightarrow F_1$ est valide.

<u>Proposition</u> $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\} \models F$ ssi $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n) \rightarrow F$ est valide.

Formules logiquement équivalentes

<u>Définition</u> $F_1 \sim F_2$ ssi pour toute interprétation $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}(F_1) = \mathbf{I}(F_2)$.

Montrons que $F_1 \sim F_2$.

Soit $\mathbf{I}$, une interprétation quelconque, montrons que $\mathbf{I}(F_1) = \mathbf{I}(F_2)$.
…

A partir de l'hypothèse $F_1 \sim F_2$ et d'une interprétation $\mathbf{I}$, on peut déduire que $\mathbf{I}(F_1) = \mathbf{I}(F_2)$.

<u>Proposition</u> $\sim$ est une relation d'équivalence.

<u>Proposition</u> $F_1 \sim F_2$ ssi $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$.