1 – Ensembles, relations, fonctions

UE LU2IN005 – Mathématiques discrètes

Mathieu Jaume

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Ensembles

Ensemble : réunion, dans une même entité, de certains objets bien déterminés

- caractérisé par une **relation d'appartenance** $\in$
  - $e \in E$: e est un élément appartenant à l'ensemble E

exemples :

$$\begin{array}{ll} 2 \in \{1,3,2,5\} & \{2\} \in \{\{1,3\},\{2\},\{5\}\} \\ 4 \notin \{1,3,2,5\} & \{2\} \notin \{\{1,3\},\{2,5\}\} \\ \{2\} \notin \{1,3,2,5\} & \{2,5\} \in \{\{1,3\},\{2,5\}\} \\ & \{2,5\} \notin \{\{\{1,3\},\{2,5\}\}\} \end{array}$$

- $\emptyset$: ensemble vide — pour tout x, $x \notin \emptyset$
- $\{e\}$: singleton (ensemble contenant un unique élément)

  pour tout x, $x \in \{e\}$ ssi $x = e$
- le **cardinal** $|E|$ d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments appartenant à cet ensemble

$$|\emptyset| = 0 \quad |\{1,3,2,5\}| = 4 \quad |\{\{\{1,3\},\{2,5\}\}\}| = 1$$

Inclusion – Egalité

- $A \subseteq B$: A est **inclus** dans B
  A est un **sous-ensemble** de B

  ssi tous les éléments appartenant à A appartiennent aussi à B

  exemples : $\emptyset \subseteq \{0\} \subseteq \{0, 1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
- tout ensemble E est inclus dans lui-même : $E \subseteq E$

  $\subseteq$ est une **relation réflexive**
- pour tout ensemble E, l'ensemble vide est inclus dans E : $\emptyset \subseteq E$

  («si $x \in \emptyset$ alors $x \in E$» est toujours vrai puisque $x \in \emptyset$ est toujours faux)
- si $E_1 \subseteq E_2$ et $E_2 \subseteq E_3$, alors $E_1 \subseteq E_3$

  exemple : puisque $\{1, 3\} \subseteq \{3, 2, 1\}$ et $\{3, 2, 1\} \subseteq \{5, 2, 1, 4, 3\}$ on a $\{1, 3\} \subseteq \{5, 2, 1, 4, 3\}$

  $\subseteq$ est une **relation transitive**

Inclusion – Egalité

- **Egalité** : deux ensembles A et B sont égaux ssi ils contiennent exactement les mêmes éléments :

$$A = B \text{ ssi } (A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A)$$

exemple : $\{2, 1, 3\} = \{3, 2, 1\}$

  - si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ alors $A = B$

$\subseteq$ est une **relation anti-symétrique**

- $\subseteq$ est une relation réflexive, transitive et anti-symétrique

$\subseteq$ est une **relation d'ordre**

- deux ensembles quelconques ne sont pas nécessairement «comparables» avec l'inclusion

exemple : $\{1, 2\} \not\subseteq \{1, 4, 5\}$ et $\{1, 4, 5\} \not\subseteq \{1, 2\}$

$\subseteq$ est une **relation (d'ordre) partielle**

Union – Intersection

- l'**union** $A \cup B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou appartenant à B :

$$x \in A \cup B \text{ ssi } (x \in A \text{ ou } x \in B) \qquad A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

exemple : $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

- l'**intersection** $A \cap B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B :

$$x \in A \cap B \text{ ssi } (x \in A \text{ et } x \in B) \qquad A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

exemple : $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$

- lorsque A et B sont des ensembles finis : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

exemple :
$$\begin{array}{rl} & |\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\}| = |\{1,2,3,4\}| = 4 \\ = & |\{1,2,3\}| + |\{2,3,4\}| - |\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}| \\ = & |\{1,2,3\}| + |\{2,3,4\}| - |\{2,3\}| = 3+3-2 = 4 \end{array}$$

- deux ensembles A et B sont **disjoints** ssi $A \cap B = \emptyset$

Différence – Complémentaire

- la **différence** $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais n'appartiennent pas à B :

$$x \in A \setminus B \text{ ssi } (x \in A \text{ et } x \notin B) \qquad A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

exemple : $\{0, 1, 2, 3, 8\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{0, 1, 8\}$

- le **complémentaire** $\overline{A}$ d'un ensemble A (dans un domaine de référence $\mathbf{U}$) est l'ensemble des éléments de $\mathbf{U}$ n'appartenant pas à A :

$$x \in \overline{A} \text{ ssi } x \notin A \qquad \overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

exemple : si $\mathbf{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{1, 4\}$ alors $\overline{A} = \{2, 3, 5\}$

Produit cartésien

- le **produit cartésien** $A \times B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$:

  $(x, y) \in A \times B$ ssi $(x \in A$ et $y \in B)$ $\qquad A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$

  exemple : si $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{a, b\}$, alors :

  $$A \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

- produit cartésien de n ensembles : ensemble de n-uplets

  $$\prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in E_1, \cdots, x_n \in E_n\}$$

- si $E_1, \cdots, E_n$ sont des ensembles finis, $|E_1 \times \cdots \times E_n| = |E_1| \times \cdots \times |E_n|$

Quelques propriétés classiques

Associativité	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Commutativité	$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$
Distributivité	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$
Idempotence	$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$
Ensemble vide	$A \cup \emptyset = A \qquad A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$ $A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \backslash \emptyset = A \qquad \emptyset \backslash A = \emptyset$
Absorption	$A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A$
Complémentaire	$A \cup \overline{A} = \mathbf{U} \qquad A \cap \overline{A} = \emptyset$
Loi de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Parties d'un ensemble

- une **partie** A d'un ensemble E est un sous-ensemble de E
- $\wp(E)$: **ensemble des parties** de E

$$A \in \wp(E) \text{ ssi } A \subseteq E \qquad \wp(E) = \{A \mid A \subseteq E\}$$

- partie vide $\emptyset \in \wp(E)$ car $\emptyset \subseteq E$
- partie pleine $E \in \wp(E)$ car $E \subseteq E$
- $\wp(E)$ n'est jamais l'ensemble vide
  $\wp(E)$ contient toujours au moins l'élément $\emptyset$
  - ★ $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$

exemple : $\wp(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Parties d'un ensemble

Construction récursive de $\wp(E)$

- si $E = \emptyset$ alors $\wp(E) = \{\emptyset\}$
- sinon $E = \{e\} \cup F \neq \emptyset$

  exemple : $E = \{1,2,3\} = \{\boxed{1}\} \cup \{2,3\} = \{\boxed{1}\} \cup F$ avec $F = \{2,3\}$
  - $\wp(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \underline{\{1\}}, \{2\}, \{3\}, \underline{\{1,2\}}, \underline{\{1,3\}}, \{2,3\}, \underline{\{1,2,3\}}\}$
    - résultat de l'appel récursif : $\wp(F) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$ fournit les 4 éléments «rouges» de $\wp(\{1,2,3\})$
    - construction des 4 éléments «soulignés» de $\wp(\{1,2,3\})$ à partir des 4 éléments «rouges» et de l'élément «encadré»

$$\underline{\{1\}} = \{\boxed{1}\} \cup \emptyset \qquad \underline{\{1,2\}} = \{\boxed{1}\} \cup \{2\}$$
$$\underline{\{1,3\}} = \{\boxed{1}\} \cup \{3\} \qquad \underline{\{1,2,3\}} = \{\boxed{1}\} \cup \{2,3\}$$

  Proposition $\wp(\{e\} \cup F) = \wp(F) \cup \{\{e\} \cup A \mid A \in \wp(F)\}$

- **Corollaire** : si E est un ensemble fini contenant n éléments, alors $|\wp(E)| = 2^n$
  - démonstration par récurrence sur n

Partitions d'un ensemble

- partitionner un ensemble E : «découper» cet ensemble en parties non vides deux à deux disjointes.
  - *exemple :* découpage électoral
- une **partition** de E est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E telle que :
  1. $A_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$,
  3. $E = \bigcup_{i \in I} A_i$.

  il existe plusieurs partitions différentes pour un même ensemble.
  - *exemple :* $E = \{a, b, c, d, e, f\}$
    - $(A_i)_{i \in \{1,2,3\}}$: $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b, c\}$, $A_3 = \{d, e, f\}$
    - $(B_i)_{i \in \{1,2,3,4\}}$: $B_1 = \{a, f\}$, $B_2 = \{d\}$, $B_3 = \{b\}$, $B_4 = \{c, e\}$

Relations

- **relation n-aire R** : ensemble de n-uplets appartenant à un produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$
  - $R \subseteq E_1 \times \cdots \times E_n$
  - $R \in \wp(E_1 \times \cdots \times E_n)$: R est une partie de $E_1 \times \cdots \times E_n$
  - $(e_1, \cdots, e_n) \in R$: les éléments $e_1, \cdots, e_n$ sont en relation
- **relation unaire R** : définition d'un sous-ensemble d'un ensemble E
  - **en extension**, en faisant figurer (dans n'importe quel ordre) entre accolades tous les éléments appartenant à R (chaque élément apparaissant une unique fois) : $R = \{e_1, e_2, \cdots\}$
  - **en compréhension**, en définissant R comme une propriété caractéristique des éléments appartenant à cette relation (c-à-d une propriété vérifiée par tous les éléments de R et seulement par les éléments de R) : $\{x \mid R(x)\}$
  - *exemple :* $\{2, 3\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 5x = -6\} = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 3\}$

  Tout ensemble est un sous-ensemble (une partie) de l'«univers» $\mathbf{U}$ et est défini par une relation unaire $\in$ d'appartenance.

Relations

- **relation binaire** R d'un ensemble E vers un ensemble F : sous-ensemble R de $E \times F$ $\qquad R \subseteq E \times F$
  - plusieurs notations équivalentes : $(x, y) \in R$, $x \, R \, y$, $R(x, y)$
  - lorsque $E = F$, $R \subseteq E \times E$ est appelée une relation binaire sur E
  - Id_E : **relation identité** sur E

    $$(x_1, x_2) \in \mathrm{Id}_E \text{ ssi } x_1 = x_2 \qquad \mathrm{Id}_E = \{(x, x) \mid x \in E\}$$

    - *exemple :* $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), \cdots\} = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$
  - *exemples :*
    - relation $\leq$ sur $\mathbb{N}$: partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par :

      $$\leq \; = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), \cdots \\ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), \cdots \\ (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), \cdots \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \mid n_1 \leq n_2 \end{array} \right\}$$

    - relation $<$ sur $\mathbb{N}$: partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par :

      $$<= \left\{ \begin{array}{l} (0, 1), (0, 2), (0, 3), \cdots \\ (1, 2), (1, 3), (1, 4), \cdots \\ (2, 3), (2, 4), (2, 5), \cdots \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \mid n_1 < n_2 \end{array} \right\} = \leq \setminus \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$$

Relations réflexives

une relation binaire R sur E est **réflexive** ssi tout élément est en relation avec lui-même :

$$\text{pour tout } x \in E, (x, x) \in R$$

- *exemples :*
  - $\leq$ sur $\mathbb{N}$ est réflexive car pour tout entier n, $n \leq n$
  - $\subseteq$ sur l'ensemble des parties d'un ensemble est réflexive car tout ensemble F est inclus dans lui-même ($F \subseteq F$)
  - $<$ sur $\mathbb{N}$ n'est pas réflexive car $2 \not< 2$ par exemple

Relations symétriques

une relation binaire R sur E est **symétrique** ssi à chaque fois qu'un élément x est en relation avec un élément y, l'élément y est aussi en relation avec x :

pour tous $x, y \in E$, si $(x, y) \in R$ alors $(y, x) \in R$

- *exemples :*
  - la relation $\equiv_n$ sur $\mathbb{N}$ définie par :

    $$(n_1, n_2) \in \equiv_n \text{ ssi } n_1 \mod n = n_2 \mod n$$

    ($k \mod n$: reste de la division entière de k par n)

    est symétrique (puisque l'égalité est aussi symétrique)
  - $\leq$ sur $\mathbb{N}$ n'est pas symétrique car $2 \leq 3$ mais $3 \not\leq 2$ par exemple

Relations anti-symétriques

une relation binaire R sur E est **anti-symétrique** ssi lorsque deux éléments x et y sont tous les deux en relation avec l'autre, c'est qu'ils sont égaux :

pour tous $x, y \in E$, si $(x, y) \in R$ et $(y, x) \in R$, alors $x = y$

- *exemples :*
  - $\leq$ sur $\mathbb{N}$ est anti-symétrique car si $n_1 \leq n_2$ et $n_2 \leq n_1$, c'est que $n_1 = n_2$
  - la relation $\equiv_n$ sur $\mathbb{N}$ ($(n_1, n_2) \in \equiv_n$ ssi $n_1 \mod n = n_2 \mod n$) n'est pas anti-symétrique : par exemple $10 \equiv_5 15$ et $15 \equiv_5 10$ mais $10 \neq 15$

Relations transitives

une relation binaire R sur E est **transitive** ssi à chaque fois qu'un élément x est en relation avec un élément y qui est lui-même en relation avec un élément z, l'élément x est aussi en relation avec z :

$$\text{pour tous } x, y, z \in E, \text{ si } (x, y) \in R \text{ et } (y, z) \in R \text{ alors } (x, z) \in R$$

- *exemples :*
  - $\leq$ sur $\mathbb{N}$ est transitive car si $n_1 \leq n_2$ et $n_2 \leq n_3$, alors $n_1 \leq n_3$
  - la relation S sur $\mathbb{N}$ définie par $(n_1, n_2) \in S$ ssi $n_2 = n_1 + 1$ n'est pas transitive : par exemple $(2, 3) \in S$ et $(3, 4) \in S$ mais $(2, 4) \notin S$

Relations totales

une relation binaire R sur E est **totale** ssi étant donnés deux éléments quelconques x et y, l'un des deux au moins est en relation avec l'autre :

$$\text{pour tous } x, y \in E, (x, y) \in R \text{ ou } (y, x) \in R$$

- *exemples :*
  - $\leq$ sur $\mathbb{N}$ est totale : pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \leq n_2$ ou $n_2 \leq n_1$
  - l'inclusion ensembliste $\subseteq$ n'est pas une relation totale : $\{1, 2\} \not\subseteq \{1, 4, 5\}$ et $\{1, 4, 5\} \not\subseteq \{1, 2\}$ par exemple

Relations d'équivalence – Relations d'ordre

- une relation binaire R sur E est une **relation d'équivalence** ssi elle est réflexive, symétrique et transitive.
  - *exemples :*
    - ★ la relation $\equiv_n$ sur $\mathbb{N}$ ($(n_1, n_2) \in \equiv_n$ ssi $n_1 \mod n = n_2 \mod n$) est une relation d'équivalence
    - ★ $\leq$ sur $\mathbb{N}$ n'est pas une relation d'équivalence car $\leq$ n'est pas symétrique
- une relation binaire R sur E est une **relation d'ordre** ssi elle est réflexive, anti-symétrique et transitive.
  - *exemples :*
    - ★ $\leq$ sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre
    - ★ la relation $\equiv_n$ sur $\mathbb{N}$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas anti-symétrique

Relations d'équivalence

Soit R une relation d'équivalence sur E.

- $[e]_R$: **classe d'équivalence** d'un élément $e \in E$ pour R

$$[e]_R = \{e' \in E \mid (e, e') \in R\}$$

  - $e \in [e]_R$ car R est réflexive

- $E_{/R}$ **ensemble quotient** de E par R : ensemble des classes d'équivalence de E pour R

$$E_{/R} = \{[e]_R \mid e \in E\}$$

  - **Proposition** $E_{/R}$ forme une partition de E.

- *exemple :*
  - $\equiv_2$ sur $\mathbb{N}$ ($(n_1, n_2) \in \equiv_2$ ssi $n_1 \mod 2 = n_2 \mod 2$)
  - classe d'équivalence d'un entier p :

$$\begin{array}{l} [p]_{\equiv_2} = \{k \in \mathbb{N} \mid p \mod 2 = k \mod 2\} \\ [0]_{\equiv_2} = [2]_{\equiv_2} = [4]_{\equiv_2} = \cdots = \{k \in \mathbb{N} \mid k \mod 2 = 0\} \\ [1]_{\equiv_2} = [3]_{\equiv_2} = [5]_{\equiv_2} = \cdots = \{k \in \mathbb{N} \mid k \mod 2 = 1\} \end{array}$$

  - ensemble quotient : $\mathbb{N}_{/\equiv_2} = \{[0]_{\equiv_2}, [1]_{\equiv_2}\}$

Opérations ensemblistes sur les relations

Les relations sont des ensembles (des sous-ensembles de produits cartésiens).

- on peut leur appliquer les opérateurs sur les ensembles
  - complémentaire $\overline{R}$ d'une relation R, union $R_1 \cup R_2$, intersection $R_1 \cap R_2$ et différence $R_1 \setminus R_2$ de deux relations R_1 et R_2
  - *exemple :* $< \; = \; \leq \setminus Id_{\mathbb{N}}$
- on peut exprimer qu'une relation R_1 est incluse dans une relation R_2 : $R_1 \subseteq R_2$
  - *exemple :* $< \; \subseteq \; \leq$

Inverse d'une relation

la **relation inverse** R^{-1} d'une relation $R \subseteq E \times F$ de E vers F est la relation de F vers E contenant tous les couples (x, y) tels que $(y, x) \in R$

$$(x, y) \in R^{-1} \text{ ssi } (y, x) \in R$$

$$R^{-1} = \{(x, y) \in F \times E \mid (y, x) \in R\} \subseteq F \times E$$

- *exemple :* la relation $>$ sur $\mathbb{N}$ est la relation inverse de $<$ car $n_1 > n_2$ ssi $n_2 < n_1$

Produit de relations

la **relation produit** $R_1.R_2$ des relations $R_1 \subseteq E \times F$ et $R_2 \subseteq F \times G$ est la relation de E vers G définie par :

> pour tout $x \in E$ pour tout $\forall y \in G$
> $(x, y) \in R_1.R_2$ ssi il existe $z \in F$ tel que $(x, z) \in R_1$ et $(z, y) \in R_2$

$$R_1.R_2 = \{(x, y) \in E \times G \mid \exists z \in F \ (x, z) \in R_1 \text{ et } (z, y) \in R_2\}$$

$$\begin{tikzcd} \boxed{x} \arrow[r, "R_1"] \arrow[rr, bend left, "R_1.R_2"] & \boxed{z} \arrow[r, "R_2"] & \boxed{y} \end{tikzcd}$$

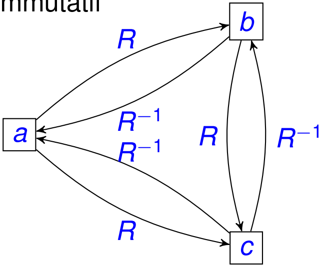
- permet de **composer** deux relations
  - on note parfois $R_2 \circ R_1$ le produit $R_1.R_2$

Produit de relations

- *exemple :*
  $\leq$ relation sur $\mathbb{N}$,
  S relation sur $\mathbb{N}$
  $(n_1, n_2) \in S$ ssi $n_2 = n_1 + 1$

$$\begin{tikzcd} \boxed{n} \arrow[r, "S"] \arrow[rr, bend left, "< \,=\, S.\leq"] & \boxed{n+1} \arrow[r, "\leq"] & \boxed{m} \end{tikzcd}$$

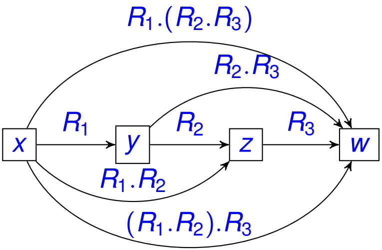
- le produit n'est pas commutatif
  exemple :

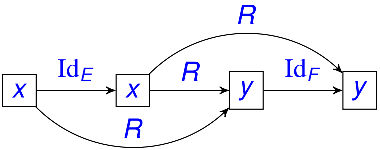


  - $R.R^{-1} \neq R^{-1}.R$
    - ⋆ $(b, c) \in R^{-1}.R$ car $(b, a) \in R^{-1}$ et $(a, c) \in R$
    - ⋆ $(b, c) \notin R.R^{-1}$
  - $R.R^{-1} \neq \mathrm{Id}_E$ et $R^{-1}.R \neq \mathrm{Id}_E$

Produit de relations

- le produit admet la relation vide pour **élément absorbant** :
  $R.\emptyset = \emptyset.R = \emptyset$
- le produit est **associatif** : $(R_1.R_2).R_3 = R_1.(R_2.R_3)$
- le produit admet la relation identité pour **élément neutre** : si $R \subseteq E \times F$
  $R.\mathrm{Id}_F = \mathrm{Id}_E.R = R$





Produit de relations

- relation R sur E

$$R^n = \underbrace{R.\cdots.R}_{n \text{ fois}} = \begin{cases} \mathrm{Id}_E & \text{si } n = 0 \\ R.R^k & \text{si } n = k+1 \end{cases}$$

- *exemple :* S relation sur $\mathbb{N}$ $(n_1, n_2) \in S$ ssi $n_2 = n_1 + 1$

$$\begin{array}{ll}
S^0 & = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}} = \{(n,n)\} = \{(n_1,n_2) \mid n_2 = n_1 + 0\} \\
S^1 & = S = \{(n_1,n_2) \mid n_2 = n_1 + 1\} \\
S^2 & = S.S^1 = \{(n_1,n_2) \mid \exists n_3 \; (n_1,n_3) \in S \text{ et } (n_3,n_2) \in S^1\} \\
 & = \{(n_1,n_2) \mid \exists n_3 \; n_3 = n_1 + 1 \text{ et } n_2 = n_3 + 1\} \\
 & = \{(n_1,n_2) \mid n_2 = n_1 + 2\} \\
\ldots & \\
S^n & = S.S^{n-1} = \{(n_1,n_2) \mid \exists n_3 \; (n_1,n_3) \in S \text{ et } (n_3,n_2) \in S^{n-1}\} \\
 & = \{(n_1,n_2) \mid \exists n_3 \; n_3 = n_1 + 1 \text{ et } n_2 = n_3 + (n-1)\} \\
 & = \{(n_1,n_2) \mid n_2 = n_1 + n\}
\end{array}$$

Fermetures

- **fermeture** d'une relation R sur E pour une propriété P :
  - on ajoute si besoin des éléments dans R pour que R vérifie la propriété P
  - on en ajoute le moins possible

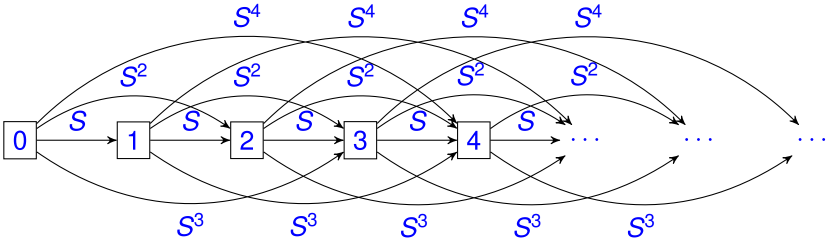
  si elle existe c'est la plus petite relation R' (au sens de l'inclusion) qui contient R et vérifie P
  - $R \subseteq R'$
  - R' vérifie la propriété P
  - si $R \subseteq R''$ et R'' vérifie la propriété P alors $R' \subseteq R''$
- **fermeture transitive** R^+ de R
  - on ajoute les éléments nécessaires dans R pour obtenir une relation transitive
- **fermeture réflexo-transitive** $R^\star$ de R
  - on ajoute les éléments nécessaires dans R pour obtenir une relation réflexive et transitive

Fermetures

fermeture transitive R^+ de R

- on ajoute les éléments nécessaires dans R pour obtenir une relation transitive
$$R^+ = R \cup (R.R) \cup (R.R.R) \cup \cdots = \bigcup_{i \geq 1} R^i$$

- *exemple :* S relation sur $\mathbb{N}$ $\qquad (n_1, n_2) \in S$ ssi $n_2 = n_1 + 1$
$$S^+ = \{(n_1, n_2) \mid \exists n > 0 \; n_2 = n_1 + n\} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 < n_2\} = <$$



Fermetures

fermeture réflexo-transitive $R^\star$ de R

- on ajoute les éléments nécessaires dans R pour obtenir une relation réflexive et transitive

$$R^\star = \mathrm{Id}_E \cup R \cup (R.R) \cup (R.R.R) \cup \cdots = \bigcup_{i \geq 0} R^i$$

- *exemple :* S relation sur $\mathbb{N}$ $\quad (n_1, n_2) \in S$ ssi $n_2 = n_1 + 1$

$$\begin{aligned} S^\star &= \mathrm{Id}_{\mathbb{N}} \cup S^+ \\ &= \{(n_1, n_2) \mid n_1 = n_2\} \cup \{(n_1, n_2) \mid n_1 < n_2\} \\ &= \{(n_1, n_2) \mid n_1 \leq n_2\} \\ &= \leq \end{aligned}$$

Relations et fonctions

- une relation R de E vers F est **déterministe** (on dit aussi **fonctionnelle**) ssi tout élément de E est en relation avec au plus un élément de F :

$$\begin{array}{l}\text{pour tout } e \in E, \text{ pour tous } e_1, e_2 \in F \\ \text{si } (e, e_1) \in R \text{ et } (e, e_2) \in R \text{ alors } e_1 = e_2\end{array}$$

exemples :

- $S = \{(n_1, n_2) \mid n_2 = n_1 + 1\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est fonctionnelle car si $(n_1, n_2) \in S$ et $(n_1, n_3) \in S$ alors $n_2 = n_3 = n_1 + 1$
- $S^{-1} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 = n_2 + 1\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est fonctionnelle car si $(n_1, n_2) \in S^{-1}$ et $(n_1, n_3) \in S^{-1}$ alors $n_1 = n_2 + 1 = n_3 + 1$ et donc $n_2 = n_3$
- $\leq$ n'est pas fonctionnelle car par exemple $1 \leq 4$ et $1 \leq 7$ mais $4 \neq 7$

Relations et fonctions

- une relation $f \subseteq E \times F$ déterministe est une **fonction** $f : E \to F$
  - si $(x, y) \in f$, on note $y = f(x)$ $\qquad f = \{(x, f(x))\}$
    - y est l'**image** de x
    - x est l'**antécédent** de y
  - si $X \subseteq E$, on note aussi $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$
  - *exemples :*
    - fonction $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

      $S(n) = n + 1$ $\qquad S(2) = 3$ $\qquad S(\{3, 5, 2\}) = \{4, 6, 3\}$

      $n_2 = S(n_1)$ ssi $(n_1, n_2) \in S$ $\qquad S(0) = 1$

      $S(n)$ est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$
    - fonction $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

      $P(n) = n - 1$ $\qquad P(3) = 2$

      $n_2 = P(n_1)$ ssi $(n_1, n_2) \in S^{-1}$ $\qquad P(0)$ n'existe pas / n'est pas défini

      $P(n)$ n'est pas défini pour tout $n \in \mathbb{N}$
  - lorsque f n'est pas définie pour tout élément de E, on dit parfois que f est une **fonction partielle**

Relations et applications

- une relation R de E vers F est **totale à gauche** ssi chaque élément de E est en relation avec au moins un élément de F :

$$\text{pour tout } e_1 \in E, \text{ il existe } e_2 \in F \text{ tel que } (e_1, e_2) \in R$$

exemples :

- $S = \{(n_1, n_2) \mid n_2 = n_1 + 1\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est totale à gauche car pour tout $n_1 \in \mathbb{N}$ il existe $n_2 = n_1 + 1 \in \mathbb{N}$ tel que $(n_1, n_2) \in S$
- $S^{-1} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 = n_2 + 1\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ n'est pas totale à gauche car il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $(0, n) \in S^{-1}$
- $\leq$ est totale à gauche car pour tout $n_1 \in \mathbb{N}$ il existe $n_2 = n_1 \in \mathbb{N}$ par exemple tel que $(n_1, n_2) \in \leq$

Relations et applications

- une relation $f \subseteq E \times F$ déterministe et totale à gauche est une **application** $f : E \to F$
  - tout élément de E possède une (unique) **image**
    - on dit parfois que l'application f est une **fonction totale**
  - *exemples :*
    - $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $S(n) = n + 1$ est une application (tout entier admet un successeur)
    - $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $P(n) = n - 1$ n'est pas une application (l'entier 0 n'admet pas de prédécesseur dans $\mathbb{N}$)
    - $P' : (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \to \mathbb{N}$ tel que $P'(n) = n - 1$ est une application (tout entier non nul admet un prédécesseur dans $\mathbb{N}$)
    - $P'' : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tel que $P''(n) = n - 1$ est une application (tout entier relatif admet un prédécesseur dans $\mathbb{Z}$)
    - $\leq$ n'est pas une application car $\leq$ n'est pas une fonction

Relations, applications injectives

- une relation R de E vers F est **injective** ssi pour chaque élément de F il existe au plus un élément de E en relation avec lui :

$$\text{pour tout } e \in F, \text{ pour tous } e_1, e_2 \in E$$
$$\text{si } (e_1, e) \in R \text{ et } (e_2, e) \in R \text{ alors } e_1 = e_2$$

exemples :

- $S = \{(n_1, n_2) \mid n_2 = n_1 + 1\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est injective car si $(n_1, n) \in S$ et $(n_2, n) \in S$ alors $n = n_1 + 1 = n_2 + 1$ et donc $n_1 = n_2$
- $C_1 = \{(n, m) \mid m = n^2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ n'est pas est injective car par exemple $(2, 4) \in C_1$ et $(-2, 4) \in C_1$ mais $2 \neq -2$
- $C_2 = \{(n, m) \mid m = n^2\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est injective
- $\leq$ n'est pas injective car par exemple $1 \leq 4$ et $2 \leq 4$ mais $1 \neq 2$

Relations, applications injectives

- une relation $f \subseteq E \times F$ injective, déterministe et totale à gauche est une **application injective** (on dit aussi **injection**)
  - tout élément de F possède **au plus un antécédent**

$$\text{pour tous } e_1, e_2 \in E,\ \text{si } f(e_1) = f(e_2) \text{ alors } e_1 = e_2$$

exemples :

- $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $S(n) = n + 1$ est injective car si $f(n_1) = f(n_2)$ alors $n_1 + 1 = n_2 + 1$ et donc $n_1 = n_2$
- $C_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tel que $C_1(n) = n^2$ n'est pas est injective car par exemple $C_1(2) = C_1(-2) = 4$ mais $2 \neq -2$
- $C_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $C_2(n) = n^2$ est injective

Relations, applications surjectives

- une relation R de E vers F est **surjective** ssi pour chaque élément de F il existe au moins un élément de E en relation avec lui :

$$\text{pour tout } e_2 \in F, \text{ il existe } e_1 \in E \text{ tel que } (e_1, e_2) \in R$$

exemples :

  - $S = \{(n_1, n_2) \mid n_2 = n_1 + 1\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ n'est pas surjective car il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 = n + 1$
  - $S' = \{(n_1, n_2) \mid n_2 = n_1 + 1\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est surjective car tout entier relatif admet un prédécesseur dans $\mathbb{Z}$
  - $\leq$ est surjective car pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un entier m tel que $m \leq n$ (n par exemple puisque $n \leq n$)

Relations, applications surjectives

- une relation $f \subseteq E \times F$ surjective, déterministe et totale à gauche est une **application surjective** (on dit aussi **surjection**)
  - tout élément de F possède **au moins un antécédent**

$$\text{pour tout } e_2 \in F, \text{ il existe } e_1 \in E \text{ tel que } f(e_1) = e_2$$

exemples :

- $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $S(n) = n + 1$ n'est pas surjective car il n'existe par d'entier naturel n tel que $S(n) = n + 1 = 0$
- $S' : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tel que $S'(n) = n + 1$ est surjective car pour tout entier relatif k il existe un entier relatif $k - 1$ tel que $S'(k - 1) = k$

Applications bijectives

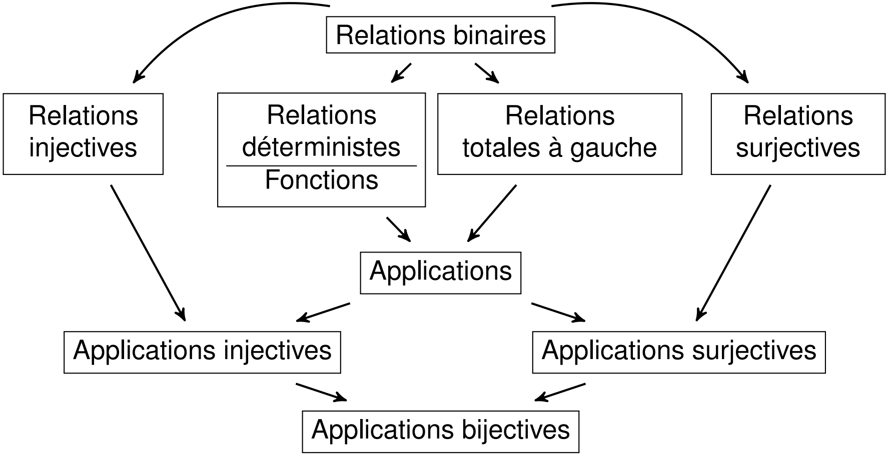
- une application injective et surjective est une **application bijective** (on dit aussi **bijection**)
  - tout élément de F possède **exactement un antécédent**
- *exemples :*
  - $f : \mathbb{N} \to \{n \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } k \in \mathbb{N},\ n = 2k\}$ tel que $f(n) = 2n$ est une bijection
  - $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $g(x) = x + 1$ est une bijection
  - $h : E \to \wp(E)$ telle que $h(e) = \{e\}$ n'est pas une bijection (h n'est pas surjective)
    - ★ **Théorème** Il n'existe pas de bijection de E vers $\wp(E)$.

Applications bijectives

propriété caractéristique des bijections : toute application bijective f admet une application réciproque f^{-1}

- **Proposition** Soit $f : E \to F$ une application.
  1. L'inverse f^{-1} est une application si et seulement si f est bijective.
  2. Si f est bijective, alors l'application f^{-1} est bijective.
  3. Si f est bijective, alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.
- *exemple :*
  - la bijection $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 1$ admet pour réciproque la bijection $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - 1$

Relations, fonctions, applications



Ensembles dénombrables

- un ensemble E est **dénombrable** ssi ses éléments peuvent être énumérés (sans omission ni répétition)
  - E est dénombrable ssi il est possible de numéroter ses éléments avec des entiers naturels
- tout ensemble fini est dénombrable
- un ensemble E infini est **dénombrable** ssi il existe une bijection $f : E \to \mathbb{N}$
  - bijection qui associe un numéro unique à chaque élément de E

  ou de manière équivalente ssi ssi il existe une bijection $g : \mathbb{N} \to E$
  - bijection qui associe à un entier n (un numéro), le n-ième élément de E
- deux ensembles A et B ont le même nombre d'éléments ssi il existe une bijection $f : A \to B$

Ensembles dénombrables

- *exemples :*
  - $f : \mathbb{N} \to \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair}\}$ définie par $f(n) = 2n$ est une bijection
    - ★ l'ensemble des entiers pairs est dénombrable
    - ★ il existe autant d'entiers naturels pairs que d'entiers naturels
  - l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable
    - ★ il faut trouver un chemin qui permette d'atteindre chaque point (n, m) en temps fini et sans passer deux fois par le même point ... et numéroter les points par leur ordre d'apparition sur le chemin

$$
\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[r] & (0,1) \arrow[dl] & (0,2) \arrow[dl] & (0,3) \arrow[dl] \\
(1,0) \arrow[urr] & (1,1) \arrow[dl] & (1,2) \arrow[dl] & \cdots \\
(2,0) \arrow[uurrr] & (2,0) & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

  - $f : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ tel que $f((n, m)) = \left(\sum_{i=0}^{n+m} i\right) + n$ est une bijection
    - ★ *exemple :* $(1, 2)$ est le $(0 + 1 + 2 + 3) + 1 = 7$-ième élément

Monoïdes

- un **monoïde** est un ensemble E muni d'une opération $\odot : E \times E \to E$:
  - associative : $\forall e_1, e_2, e_3 \in E \ (e_1 \odot e_2) \odot e_3 = e_1 \odot (e_2 \odot e_3)$
  - qui possède un élément neutre e : $\forall e' \in E \ e \odot e' = e' \odot e = e'$
- *exemple :* l'ensemble des suites finies d'éléments d'un ensemble A (c-à-d l'ensemble des **mots** de longueur finie construits à partir d'un **alphabet** A), muni de la concaténation forme un monoïde, noté A^*
  - la concaténation est associative
  - le mot vide ε est l'élément neutre de la concaténation