

Modélisation et Optimisation par les Graphes et la Programmation Linéaire

Cours 2 : Résolution d'un PL par l'algorithme du simplexe

PATRICE PERNY

patrice.perny@lip6.fr

LIP6 – UPMC

Master ANDROIDE – M1 – MOGPL

- mise sous forme standard d'un programme linéaire
- correspondance sommet \leftrightarrow base
- algorithme du simplexe : méthode algébrique
- cas particuliers

2 / 44

Mise sous forme standard d'un PL

Forme générale d'un PL

max ou min $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n & \leq & b_i & i = 1, \dots, m_1 \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n & \geq & b_i & i = m_1 + 1, \dots, m_2 \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n & = & b_i & i = m_2 + 1, \dots, m \end{cases}$$

$x_k \geq 0$ si $k \in [1, n_1]$, $x_k \leq 0$ si $k \in [n_1 + 1, n_2]$, $x_k \in \mathbb{R}$ si $k \in [n_2 + 1, n]$

I) Mise sous forme standard d'un programme linéaire

Mise sous forme standard

- écrire la forme générale
- passer de la forme générale à la forme canonique
- passer de la forme canonique à la forme standard

Rappels : formes canoniques et formes standards d'un PL

$$c^t = (c_1, \dots, c_n) \quad x^t = (x_1, \dots, x_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^n$$

Formes canoniques

$$\mathcal{C} \quad \begin{cases} \max z = c^t x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \mathcal{C}' \quad \begin{cases} \min z = c^t x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Formes standards

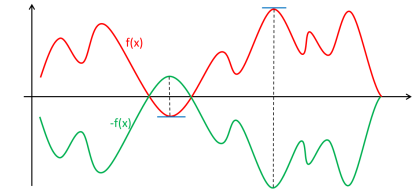
$$\mathcal{S} \quad \begin{cases} \max z = c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \mathcal{S}' \quad \begin{cases} \min z = c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Mise sous forme canonique

Transformation de la fonction objectif

$$\max f(x) = -\min -f(x)$$

$$\min f(x) = -\max -f(x)$$



Obtention des inégalités voulues

- $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \end{cases}$
- $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \rightarrow \sum_{j=1}^n -a_{ij}x_j \geq -b_i$
- $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \rightarrow \sum_{j=1}^n -a_{ij}x_j \leq -b_i$

Substitution des variables négatives ou non signées

- x_i négative : $x_i \rightarrow -x'_i$ et $x_i \leq 0 \rightarrow x'_i \geq 0$
- x_i non signée : $x_i \rightarrow x_i^+ - x_i^-$ avec $x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$

5 / 44

6 / 44

Mise sous forme standard d'un PL

Introduction des variables d'écart

variable d'écart = variable additionnelle positive ou nulle insérée pour transformer une inégalité en égalité dans les contraintes

- $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ avec $b_i \geq 0$
se réécrit $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + e_i = b_i$ avec $e_i \geq 0$
- $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$ avec $b_i \geq 0$
se réécrit $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - e_i = b_i$ avec $e_i \geq 0$

Un exemple : formes canonique et standard

Problème 3

Forme canonique :

$$\mathcal{P} \quad \begin{cases} \max z = 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

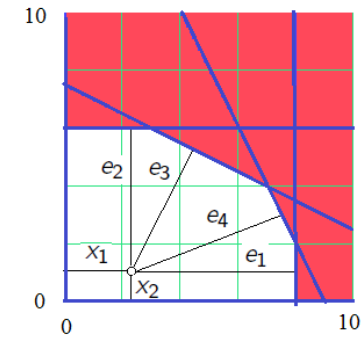
Forme standard :

$$\mathcal{P}' \quad \begin{cases} \max z = 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 + e_1 = 8 \\ x_2 + e_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + e_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + e_4 = 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0, e_4 \geq 0 \end{cases}$$

7 / 44

8 / 44

II) Définitions et concepts préliminaires



9 / 44

10 / 44

Correspondance forme canonique / forme standard

Problème \mathcal{P} : n variables, m ineq. linéaires indépendantes, sol $x \in \mathbb{R}^n$
 Problème \mathcal{P}' : $n + m$ variables, m éq. linéaires indépendantes sol $x' \in \mathbb{R}^{n+m}$

Note : On fait l'hypothèse (non restrictive) que \mathcal{P}' est écrit sous la forme $Ax = b$ avec $b \geq 0$ (voir par exemple le problème 3).

Pour passer de x à x' il suffit d'exprimer les variables d'écart en fonction des variables de décision :

$$\begin{cases} e_1 = 8 - x_1 \\ e_2 = 6 - x_2 \\ e_3 = 15 - x_1 - 2x_2 \\ e_4 = 18 - 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

Ainsi on a les correspondances suivantes :

- $x = (3, 3) \rightarrow x' = (3, 3, 5, 3, 6, 6)$ solution réalisable
- $x = (3, 6) \rightarrow x' = (3, 6, 5, 0, 0, 6)$ sommet réalisable
- $x = (6, 6) \rightarrow x' = (6, 6, 2, 0, -3, 0)$ sommet non-réalisable

Base et variables de base

RAPPELS : Famille génératrice, famille libre, base de \mathbb{R}^m , base canonique.

Soit un PL sous forme canonique avec n variables, m contraintes
 \rightarrow la forme standard introduit m variables d'écart

Forme standard : $\max c^t x$ s.c. $Ax = b, x \geq 0, b \geq 0$

$x \in \mathbb{R}^{n+m}, A \in \mathcal{M}(m, m+n), b \in \mathbb{R}^m$ et c vect. ligne de \mathbb{R}^{n+m}

$$A \begin{matrix} m+n \\ \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} B & N \end{matrix} \end{matrix}$$

- B matrice de m colonnes de la matrice A formant une base de \mathbb{R}^m
- N matrice des n colonnes de la matrice A qui ne sont pas dans B
- x_B vecteur des var. de bases (var. qui correspondent aux colonnes de B)
- x_N vecteur des var. hors base (var. qui correspondent aux colonnes de N)

11 / 44

12 / 44

Correspondance sommet \leftrightarrow base

Le passage base \rightarrow sommet :

- ① identifier les variables hors base x_N
- ② exprimer les variables en base en fonction des variables hors base
 $x_B = f(x_N)$
- ③ mettre à 0 les variables hors base
- ④ si $x_B \geq 0$ on a un sommet réalisable, sinon il ne l'est pas.

Exemple : $(x_1, x_2, e_1, e_4) \rightarrow (3, 6, 5, 0, 0, 6)$

Le passage sommet \rightarrow base :

- ① identifier les variables strictement positives, elles sont nécessairement en base
- ② si m composantes positives on a la base (colonnes de A correspondantes)
sinon il s'agit d'un sommet dégénéré, on ajoute alors des variables nulles en base pour compléter à m
- ③ mettre en base les colonnes de A associées aux variables retenues

Exemple : $(3, 6, 5, 0, 0, 6) \rightarrow (x_1, x_2, e_1, e_4)$

Pour une base B constituée à partir des colonnes de la matrice A , le second membre b des contraintes peut toujours s'écrire comme une combinaison linéaire des colonnes de B , sans se servir de celles de N .

Le système $Ax = b$ s'écrit alors seulement $Bx_B = b$ et on a $x_N = 0$

x tel que $x_B = B^{-1}b$ et $x_N = 0$ correspond à un sommet du polyèdre de \mathcal{P}

En effet, toute variable pouvant être vue comme une variable d'écart à une contrainte (à un hyperplan), $x_N = 0$ signifie qu'on est à l'intersection de n hyperplans séparateurs, donc sur un sommet.

Exemple : si B est la base canonique : $x_B = \{e_1, \dots, e_4\}$, $x_N = \{x_1, x_2\}$

$$\begin{cases} e_1 &= 8 - x_1 \\ e_2 &= 6 - x_2 \\ e_3 &= 15 - x_1 - 2x_2 \\ e_4 &= 18 - 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

B correspond à la solution $(0, 0, 8, 6, 15, 18)$ de \mathcal{P}' et donc au sommet $(0, 0)$

13 / 44

Le cas général

Soit B une base faite de colonnes de A , B est inversible par définition

Expression des var. en base en fonction des var. hors bases

$$\begin{aligned} Ax = b &\Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \\ &\Leftrightarrow B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ &\Leftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \end{aligned}$$

Pour une base donnée B le sommet associé \hat{x}_B est caractérisé par :

$$\begin{cases} \hat{x}_N = 0 \\ \hat{x}_B = B^{-1}b \end{cases}$$

15 / 44

III) Introduction à l'algorithme du simplexe

14 / 44

16 / 44

Principe de l'algorithme du simplexe

Un algorithme dû à G. Dantzig (1947)

Proposition

Si une fonction linéaire atteint sa borne supérieure ou inférieure sur un polyèdre convexe, cette borne est atteinte par au moins un sommet du polyèdre.

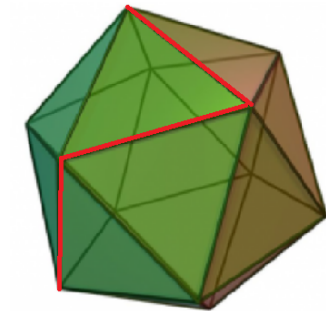
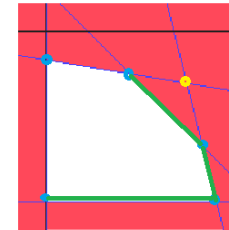
Proposition

Soit C un convexe de \mathbb{R}^n et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction linéaire, l'ensemble des points où f atteint son optimum est convexe et tout optimum local est un optimum global.

→ partant d'un sommet initial, se déplacer le long des arêtes, de sommets en sommets, pour améliorer la valeur de la fonction objectif jusqu'à ce qu'on parvienne à un sommet qui soit un optimum local (et donc aussi un optimum global).

17 / 44

Cheminer de sommet en sommets



18 / 44

L'algorithme du simplexe : présentation algébrique

Initialisation

- ① mettre le problème sous forme standard
- ② choisir une base B (e.g. la base canonique)
- ③ exprimer les variables en base en fonction des variables hors base $x_B = f(x_N)$
- ④ mettre à 0 les variables hors base pour obtenir le sommet associé
- ⑤ vérifier que $x_B \geq 0$ pour que le sommet soit réalisable

Application au PL du problème 3 en partant du sommet $O = (0, 0)$ correspondant à la base canonique.

19 / 44

Traitement itératif et test d'arrêt

Principe : le passage d'un sommet à un autre sommet adjacent se fait en échangeant un vecteur de base et un vecteur hors base (et donc une variable en base et une variable hors base) et en répétant ce processus jusqu'à atteindre l'optimum. A chaque étape il faut s'assurer :

- qu'on n'est pas arrivé à l'optimum avant de chercher un nouveau sommet
- que les déplacements qu'on envisage sont de nature à améliorer la valeur de l'objectif
- que le nouveau sommet que l'on considère est réalisable

Test d'arrêt

- exprimer la fonction objectif en fonction des var. hors base
- si les coefficients des var. hors base (profits marginaux) sont tous négatifs (resp. positifs) alors STOP on est à l'optimum pour un problème de maximisation (resp. minimisation).

20 / 44

Changement de base

- **Choix de la variable entrante** : la variable x_{j_0} associée au plus grand profit marginal positif (1er critère de Dantzig)
- **Choix de la variable sortante** : x_{i_0} la première variable de base qui s'annule lorsque l'on fait augmenter la valeur de la variable entrante (2eme critère de Dantzig)

En pratique on doit garantir que : $x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N \geq 0$ dans la base courante B .

Ce système d'inégalités est de la forme : $x_i = \hat{x}_i - a_{ij_0}x_{j_0} \geq 0$ où $j_0 \in N$ est la variable entrante. La solution est donc de choisir de faire sortir une variable $i_0 \in \arg \min\{i \in B : \frac{\hat{x}_i}{a_{ij_0}}, a_{ij_0} > 0\}$

Application de l'algorithme sur le problème 3

Itération 1

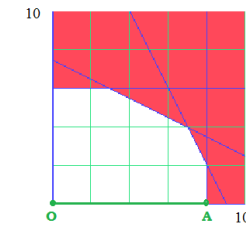
$$x_B = (e_1, e_2, e_3, e_4) \quad x_N = (x_1, x_2)$$

Variables de base en fonction des variables hors base :

$$\begin{cases} e_1 = 8 - x_1 \\ e_2 = 6 - x_2 \\ e_3 = 15 - x_1 - 2x_2 \\ e_4 = 18 - 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

Objectif en fonction des variables hors base : $\max 4x_1 + 3x_2$

Base non optimale, x_1 entre en base ($x_1 = 8$) et e_1 sort de la base ($e_1 = 0$), on se déplace de $O = (0, 0)$ vers $A = (8, 0)$



21 / 44

22 / 44

Itération 2

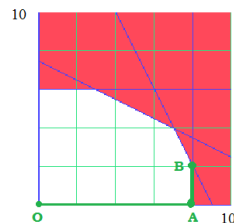
$$x_B = (x_1, e_2, e_3, e_4) \quad x_N = (x_2, e_1)$$

Variables de base en fonction des variables hors base :

$$\begin{cases} x_1 = 8 - e_1 \\ e_2 = 6 - x_2 \\ e_3 = 7 + e_1 - 2x_2 \\ e_4 = 2 + 2e_1 - x_2 \end{cases}$$

Objectif en fonction des variables hors base : $\max 32 - 4e_1 + 3x_2$

Base non optimale, x_2 entre en base ($x_1 = 2$) et e_4 sort de la base ($e_4 = 0$), on se déplace de $A = (8, 0)$ vers $B = (8, 2)$



23 / 44

Itération 3

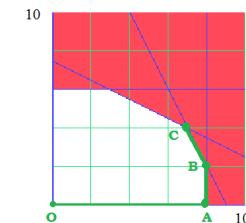
$$x_B = (x_1, x_2, e_2, e_3) \quad x_N = (e_1, e_4)$$

Variables de base en fonction des variables hors base :

$$\begin{cases} x_1 = 8 - e_1 \\ e_2 = 4 - 2e_1 + e_4 \\ e_3 = 3 - 3e_1 - 2e_4 \\ x_2 = 2 + 2e_1 - e_4 \end{cases}$$

Objectif en fonction des variables hors base : $\max 38 + 2e_1 - 3e_4$

Base non optimale, e_1 entre en base ($e_1 = 1$) et e_3 sort de la base ($e_3 = 0$), on se déplace de $B = (8, 2)$ vers $C = (7, 4)$.



24 / 44

Itération 4

$$x_B = (x_1, x_2, e_1, e_2) \quad x_N = (e_3, e_4)$$

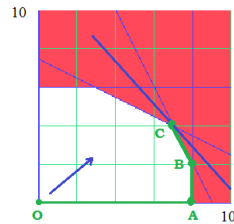
Variables de base en fonction des variables hors base :

$$\begin{cases} x_1 = 7 - \frac{1}{3}e_3 - \frac{2}{3}e_4 \\ e_2 = 2 + \frac{2}{3}e_3 - \frac{1}{3}e_4 \\ e_3 = 1 - \frac{1}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_4 \\ x_2 = 4 - \frac{2}{3}e_3 + \frac{1}{3}e_4 \end{cases}$$

Objectif en fonction des variables hors base : $\max 40 - \frac{2}{3}e_3 - \frac{5}{3}e_4$

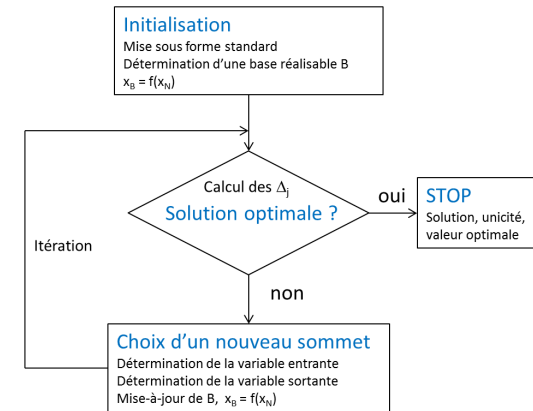
Base optimale, STOP, on s'arrête au sommet C

Solution optimale : $x^* = (7, 4)$, valeur de l'objectif à l'optimum : 40



25 / 44

L'algorithme du simplexe en résumé



26 / 44

1) Dégénérescence de première espèce

IV) Cas particuliers

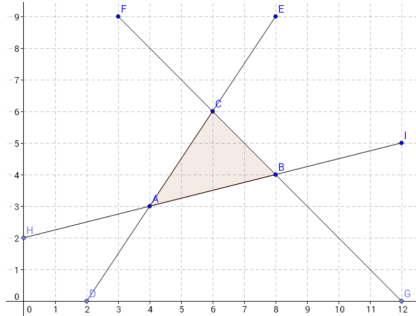
- Dégénérescence caractérisée par l'existence d'un profit marginal nul associé à une variable hors base.
- On peut faire entrer cette variable dans la base (dans le cas d'une maximisation, quand c'est le plus grand profit marginal non négatif).
- La fonction objectif n'augmente alors pas lors du changement de base.
- Cela correspond au cas où le gradient de la fonction objectif est parallèle à l'hyperplan associé à une des contraintes du polyèdre.

27 / 44

28 / 44

Exemple

$$\begin{array}{llll} \max & z = x_1 + x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 & \geq & 6 \\ & -x_1 + 4x_2 & \geq & 8 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2. & & \end{array}$$



$$\begin{array}{llll} \max & z = x_1 + x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + e_1 & = & 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 - e_2 & = & 6 \\ & -x_1 + 4x_2 - e_3 & = & 8 \\ & x_i \geq 0, e_i \geq 0. & & \end{array}$$

Ecriture dans la base associée à A :

$$\max z = 7 + 1/2e_2 + 1/2e_3$$

$$\begin{cases} e_1 = 5 - 1/2e_2 - 1/2e_3 \\ x_1 = 4 + 2/5e_2 + 1/5e_3 \\ x_2 = 3 + 1/10e_2 + 3/10e_3 \end{cases}$$

e_2 ou e_3 peuvent entrer en base, disons e_3 .

Itérations du simplexe

e_3 entre en base, e_1 sort de la base

$$\max z = 12 - e_1 + 0e_2$$

$$\begin{cases} e_3 = 10 - 2e_1 - e_2 \\ x_1 = 6 - 2/5e_1 + 1/5e_2 \\ x_2 = 6 - 3/5e_1 - 1/5e_2 \end{cases}$$

On peut faire entrer e_2 en base! e_3 sort de la base.

$$\max z = 12 - e_1 + 0e_3$$

$$\begin{cases} e_2 = 10 - 2e_1 - e_3 \\ x_1 = 8 - 4/5e_1 - 1/5e_3 \\ x_2 = 4 - 1/5e_1 + 1/5e_3 \end{cases}$$

On s'est déplacé de C vers B sans changer la valeur de la fonction objectif.

On ne peut toujours pas augmenter la fonction objectif. Toute la face [B, C] est optimale.

29 / 44

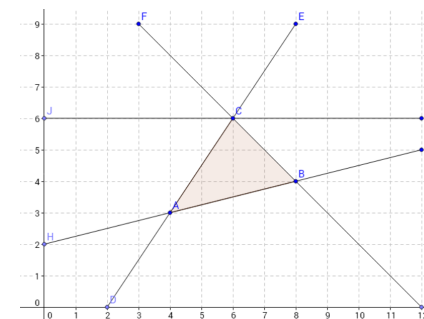
2) Dégénérescence de deuxième espèce

- Dégénérescence caractérisée par l'existence d'une variable nulle en base.
- Correspond au cas d'un sommet qui est à l'intersection de plus de n hyperplans séparateurs du polyèdre.
- Cette dégénérescence peut induire un phénomène de cyclage sur des bases correspondant à un même sommet.

Exemple

$$\begin{array}{llll} \max & z = x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 & \geq & 6 \\ & -x_1 + 4x_2 & \geq & 8 \\ & x_2 & \leq & 6 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2. & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \max & z = x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + e_1 & = & 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 - e_2 & = & 6 \\ & -x_1 + 4x_2 - e_3 & = & 8 \\ & x_2 + e_4 & = & 6 \\ & x_i \geq 0, e_i \geq 0. & & \end{array}$$



Dans la base associée à A :

$$\max z = 10 + 3/5e_2 + 4/5e_3$$

$$\begin{cases} e_1 = 5 - 1/2e_2 - 1/2e_3 \\ x_1 = 4 + 2/5e_2 + 1/5e_3 \\ x_2 = 3 + 1/10e_2 + 3/10e_3 \\ e_4 = 3 - 1/10e_2 - 3/10e_3 \end{cases}$$

$e_3 = 10$ entre en base

e_1 ou e_4 sort de la base (choix!?)

31 / 44

30 / 44

32 / 44

Bases associées au point C

en base (x_1, x_2, e_3, e_4) , hors base (e_1, e_2)

$$\begin{cases} e_3 = 10 - 2e_1 - e_2 \\ x_1 = 6 - 2/5e_1 + 1/5e_2 \\ x_2 = 6 - 3/5e_1 - 1/5e_2 \\ e_4 = 0 + 3/5e_1 + 1/5e_2 \end{cases}$$

$$\max z = 18 - 8/5e_1 - 1/5e_2$$

en base (x_1, x_2, e_2, e_3) , hors base (e_1, e_4)

$$\begin{cases} e_2 = 0 - 3e_1 + 5e_4 \\ e_3 = 10 + e_1 - 5e_4 \\ x_1 = 6 - e_1 + e_4 \\ x_2 = 6 - e_4 \end{cases}$$

$$\max z = 18 - e_1 - e_4$$

33 / 44

Bases associées au point C

en base (x_1, x_2, e_1, e_3) , hors base (e_2, e_4)

$$\begin{cases} e_2 = 0 - 3e_1 + 5e_4 \\ e_3 = 10 + e_1 - 5e_4 \\ x_1 = 6 - e_1 + e_4 \\ x_2 = 6 - e_4 \end{cases}$$

$$\max z = 18 - e_1 - e_4$$

On a donc trois bases pour le même sommet C.

Ici on est sur le sommet optimal, mais cela peut se produire sur d'autres sommets. Dans certains cas, l'existence de multiples bases pour un même sommet peut engendrer un bouclage !

34 / 44

Bouclages éventuels dues aux dégénérescences

Les cas de bouclages arrivent très peu en pratique. Pour les éviter on peut utiliser des règles particulières pour choisir la variable entrante et sortante.

Règles de Bland

- Entre dans la base courante B le plus petit indice parmi ceux des profits marginaux strictement positifs $j_0 = \min\{j \in N, \Delta_j > 0\}$
- Sort de la base courante B le plus petit indice i_0 parmi celles des premières variables en base qui s'annulent lorsque x_{j_0} augmente

$$i_0 = \min\{i \in B : a_{ij_0} > 0 \text{ and } \frac{\hat{x}_i}{a_{ij_0}} = \min_{k \in B} \frac{\hat{x}_k}{a_{kj_0}}\}$$

Proposition

L'algorithme du simplexe avec règles de sélection de Bland ne peut pas cycler.

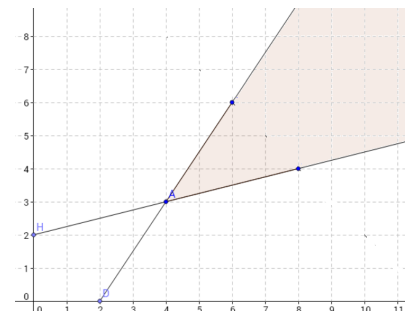
En pratique les règles de Bland rendent les itérations peu efficaces et ne doivent être utilisées que dans les cas problématiques.

D'autres méthodes existent, par exemple faire un déplacement de $\epsilon > 0$ du second membre pour mettre à ϵ la variable qui était nulle en base.

35 / 44

3) Cas d'un optimum non borné

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 - 2x_2 \geq 6 \\ & -x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ & 3x_1 - 2x_2 - e_1 = 6 \\ & -x_1 + 4x_2 - e_2 = 8 \\ & x_i \geq 0, e_i \geq 0. \end{aligned}$$

écriture du PL ds la base associée au sommet

$$(x_1, x_2) = (4, 3)$$

$$\max z = 10 + 3/5e_1 + 4/5e_2$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 + 2/5e_1 + 1/5e_2 \\ x_2 = 3 + 1/10e_1 + 3/10e_2 \end{cases}$$

e_2 entre en base et augmente mais aucune variable ne s'annule !

36 / 44