TD3 : Induction sur $\mathbb{N}$

Exercice 1 Montrer que, pour $n \geq 2$,

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$$
$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$$

(Lois de de Morgan généralisées)

Exercice 2 Soit a un entier. Soit $P_a(n)$ la propriété "$9 \mid (10^n + a)$". Montrer que, pour tout entier a et tout $n \in \mathbb{N}$, $P_a(n)$ implique $P_a(n+1)$. A-t-on $P_a(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 3 La suite harmonique est définie par $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que $H_{2^n} \geq 1 + n/2$.
2. Montrer par induction que $H_n = p_n/q_n$ avec p_n entier positif impair et q_n entier positif pair pour $n \geq 2$. En déduire que H_n n'est pas entier pour $n \geq 2$.

Exercice 4 On rappelle que les nombres de Fibonacci sont définis par $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n > 1$ et $F_0 = 0,\ F_1 = 1$.

Montrer que pour tout $n > 0$:

1. $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.
2. $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
3. $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
4. F_{3n} est pair.
5. $\varphi^{n-2} \leq F_n \leq \varphi^{n-1}$, où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est la solution positive de $r^2 - r - 1 = 0$.

Exercice 5 Donner une définition inductive de $f(n) = a^{2^n}$.

Indication : On pourra remarquer que $a^{2^{n+1}} = \left(a^{2^n}\right)^2$.

Exercice 6 On considère le polynôme à coefficients réels $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$.

1. Trouver a et b pour que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) - P(x) = x^2$. On suppose dans la suite que cette propriété est vérifiée.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est un entier.
3. Pour tout $n \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$. Montrer que

$$\forall n \geq 0, S_n = P(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 7

1. On suppose qu'une propriété P définie sur $\mathbb{N}$ vérifie :
   (a) $P(1)$ est vraie
   (b) si $P(n)$ est vraie alors $P(2n)$ est vraie (pour $n \geq 1$)

(c) si $P(n)$ est vraie alors $P(n-1)$ est vraie (pour $n \geq 2$).

Montrer par récurrence sur n que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

2. On veut montrer que la moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique. Soient $a_1, \dots, a_n$ n nombres réels positifs, avec $n \geq 1$; on pose $A = (a_1 + \cdots + a_n)/n$ et $G = (a_1 \dots a_n)^{1/n}$, montrer que $A \geq G$.

Exercice 8

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = 4$.
2. En déduire que tout entier m peut s'écrire comme somme et différence des carrés $1^2, 2^2, \dots, n^2$ pour un certain n, c'est-à-dire que pour tout m :
   $P(m)$: il existe $n \in \mathbb{N}$, et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, tels que $m = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \cdots + \varepsilon_n n^2$.
   Indication : montrer d'abord le résultat pour $m \in \{0, 1, 2, 3\}$.