

## Série 2 : Jeux

### Exercice 1: Un premier jeu simple...

Dans la table qui suit, les vecteurs de gains donnent le gain de l'agent 1, puis celui de l'agent 2. L'agent 1 dispose de 2 stratégies possibles :  $a$  et  $b$ , tandis que l'agent 2 dispose de 3 stratégies :  $r$ ,  $s$ ,  $t$ . Ainsi, si 1 joue  $a$  et 2 joue  $t$ , le gain de 1 sera 0 et celui de 2 sera 5 (case  $(a, t)$  dans la matrice).

	$r$	$s$	$t$
$a$	(3,3)	(1,2)	(0,5)
$b$	(1,4)	(0,0)	(2,1)

1. Existe-t-il une stratégie dominante pour l'un des joueurs ? Existe-t-il des stratégies dominées, strictement ou faiblement ? Existe-t-il un ou des équilibre(s) de Nash ?
2. En supposant à présent que les agents jouent de manière séquentielle, indiquez pour chacun des agents s'il est préférable de jouer en premier ou en second.

### Exercice 2: Colonel Blotto

Le jeu dit du Colonel Blotto oppose deux joueurs, qui ont chacun  $n$  troupes à allouer sur des champs de batailles. Ces champs de batailles sont au nombre de  $k$ . On suppose que, sur un champ de bataille donné, le joueur qui a disposé le plus de troupes gagne la bataille (la bataille peut donner un match nul en cas de même nombre de troupes). Au final, le joueur qui remporte le plus de batailles gagne la partie. Il s'agit donc d'un jeu à somme nulle. Une stratégie pour un joueur consiste donc à décider de l'allocation de ses troupes sur les champs, et peut s'écrire comme un vecteur

$$(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

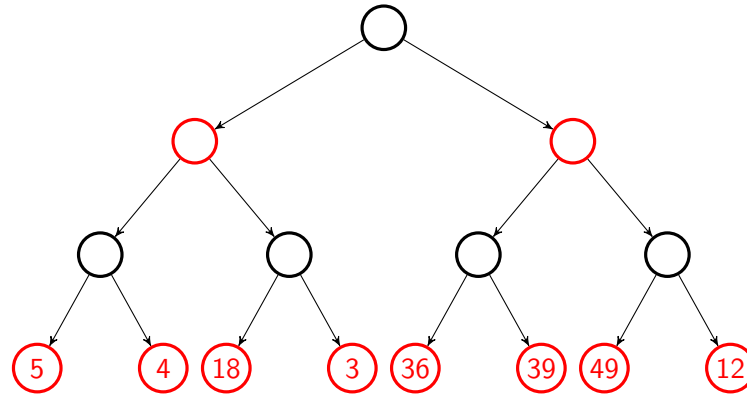
où la coordonnée  $x_i$  est le nombre de troupes allouées sur le champ  $i$ .

Commençons par considérer le cas  $k = 3$  et  $n = 6$ , avec la contrainte suivante : le nombre de troupes doit nécessairement être croissante avec les indices des champs.

1. Lister les stratégies des agents. Représentez le jeu sous forme matricielle, en considérant que le gain est : 1 pour un joueur qui gagne la partie, 0 pour un match nul, et -1 pour une défaite.
2. Existe-t-il une stratégie dominante ? Existe-t-il des stratégies dominées, strictement ou faiblement ? Donnez les équilibres de Nash de ce jeu.
3. Montrer, de manière générale (sans considérer la contrainte du nombre de troupes croissantes), qu'il n'existe pas de stratégie gagnant à ce jeu. En déduire qu'il n'existe pas de stratégie dominante. Existe-t-il des stratégies dominées ?

### Exercice 3: Minimax et élagage alpha-beta

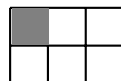
On considère l'arbre de recherche suivant, dans lequel les nœuds noirs sont des nœuds MAX, tandis que les nœuds gris sont des nœuds MIN. Les valeurs dans les feuilles sont les valeurs obtenues dans chacun de ces états finaux.



1. Indiquez par utilisation de l'algorithme minimax la valeur du nœud racine
2. Utilisez ensuite l'algorithme avec les coupes  $\alpha$ - $\beta$ . Que se passerait-il si vous aviez évalué les nœuds dans l'ordre inverse ?

### Exercice 4: Le jeu de la tablette de chocolat

Dans le jeu de la tablette de chocolat (*chomp game*), deux joueurs doivent manger à tour de rôle une tablette de  $m \times n$  carrés, mais malheureusement le carré en haut à gauche est empoisonné : le joueur qui le mange a perdu. La règle est la suivante : lorsqu'un joueur mange un carré, tous les carrés situés dans la zone sud-est du carré mangé disparaissent.



1. Sur un jeu de tablette  $2 \times 3$ , analysez l'arbre de recherche obtenu pour ce jeu. Que pouvez-vous en conclure ?
2. Sur une tablette  $2 \times n$ , existe-t-il selon vous une stratégie dominante ? Si non, justifiez votre réponse. Si oui, quelle est-elle ?
3. Sur une tablette  $n \times n$ , existe-t-il selon vous une stratégie dominante ? Si non, justifiez votre réponse. Si oui, quelle est-elle ?

▷ Petite note historique : la version "barre chocolatée" du jeu a été proposée par David Gale (le même Gale que celui de l'algorithme des mariages stables).