

EXERCICE 14

Logique - Quantificateurs

quels que soient les prédictats F G ,
quelle que soit la constante a ,

$$((G(a) \Rightarrow (\forall x, F(x))) \Leftrightarrow \forall x, (G(a) \Rightarrow F(x)))$$

Soit la constante a

Montrons $(G(a) \Rightarrow (\forall x, F(x))) \Leftrightarrow \forall x, (G(a) \Rightarrow F(x))$ (1)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $G(a) \Rightarrow (\forall x, F(x))$ (h1)

Montrons $\forall x, G(a) \Rightarrow F(x)$ (2)

($\forall I$)

Soit l'élément x

Montrons $G(a) \Rightarrow F(x)$ (3)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $G(a)$ (h2)

Montrons $F(x)$ (4)

($\forall E$)

Montrons $\forall x, F(x)$ (5)

($\Rightarrow E$)

Montrons $G(a)$ (6)

d'après (h2)

Montrons $G(a) \Rightarrow (\forall x, F(x))$ (7)

d'après (h1)

Supposons que $\forall x, G(a) \Rightarrow F(x)$ (h3)

Montrons $G(a) \Rightarrow (\forall x, F(x))$ (8)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $G(a)$ (h4)

Montrons $\forall x, F(x)$ (9)

($\forall I$)

Soit l'élément x

Montrons $F(x)$ (10)

($\Rightarrow E$)

Montrons $G(a)$ (11)

d'après (h4)

Montrons $G(a) \Rightarrow F(x)$ (12)

($\forall E$)

Montrons $\forall x, G(a) \Rightarrow F(x)$ (13)

— — — — *d'après (h3)*