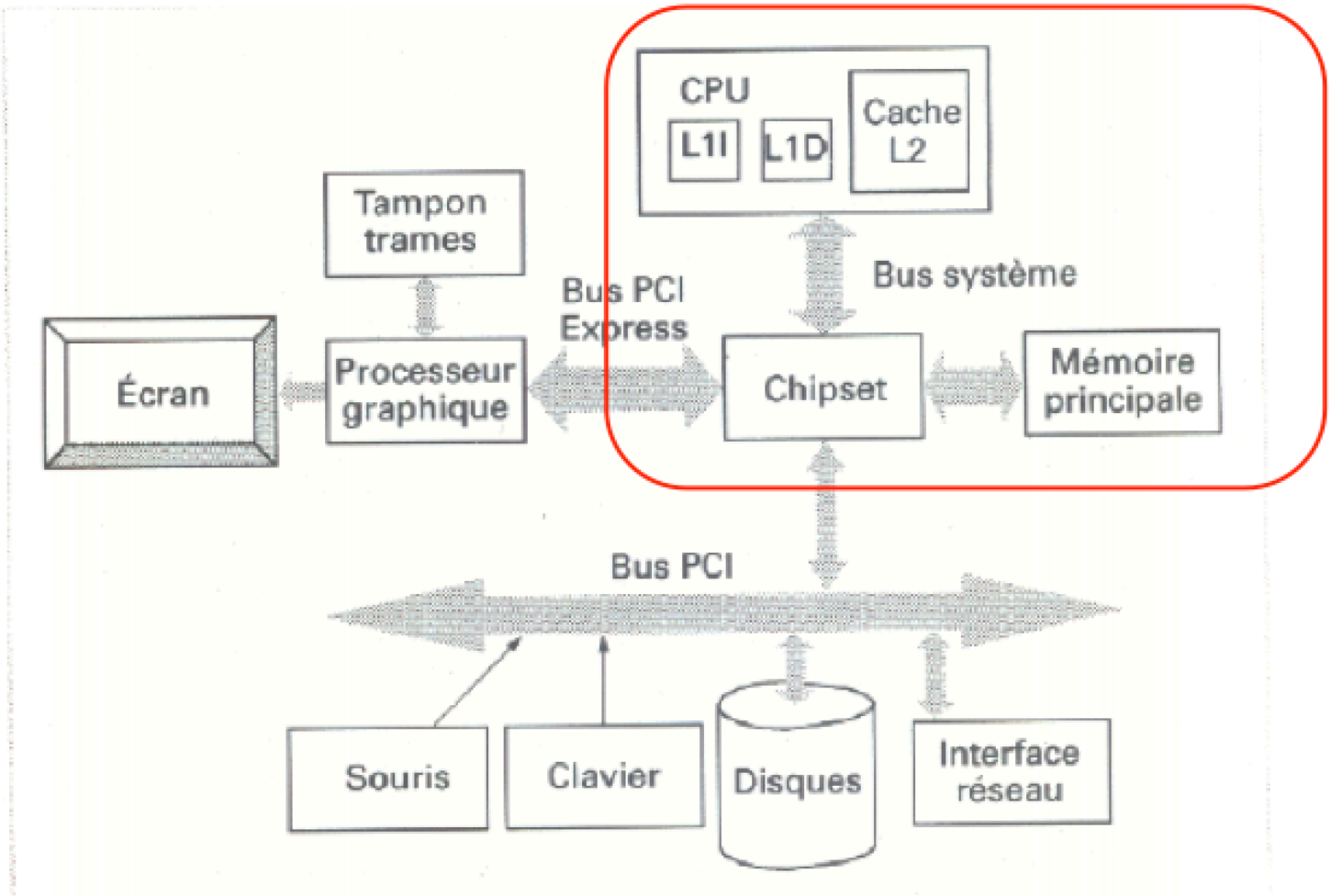
Architecture des ordinateurs
Cours 1

Responsable de l'UE : Emmanuelle Encrenaz
Supports de cours : Karine Heydemann

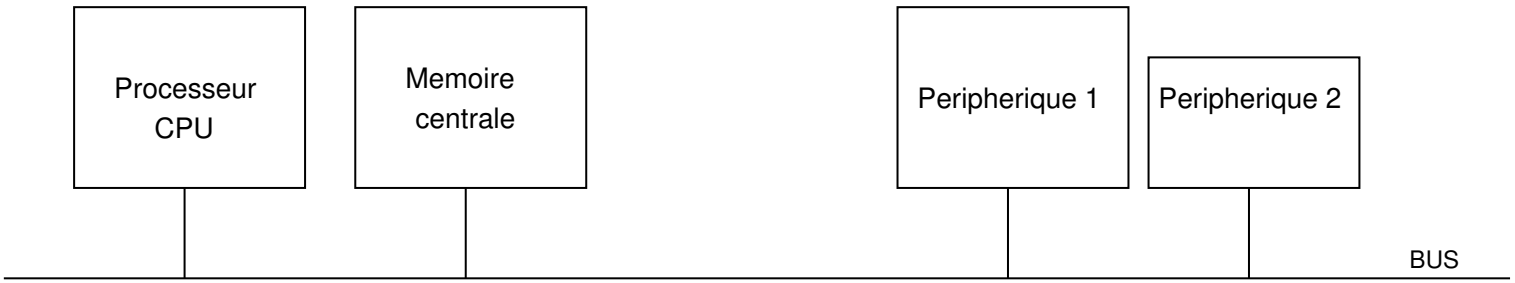
Contact : emmanuelle.encrenaz@lip6.fr

Plan du cours 1

Architecture générale d'un ordinateur (type PC)



Vue abstraite d'un ordinateur (type PC)



Un ordinateur, dont l'architecture abstraite est représentée ci-dessus, comprend

- un processeur (ou CPU)
- une mémoire centrale (ou RAM ou mémoire vive)
- un bus
- des périphériques

Architecture générale d'un ordinateur

- Le processeur (ou CPU) est l'unité de traitement de l'information (instructions et données). Il exécute des programmes (suite d'instructions qui définissent un traitement à appliquer à des données).
- La mémoire centrale (ou RAM ou mémoire vive) est une unité de stockage temporaire des informations nécessaires à l'exécution d'un programme. Externe au processeur, elle stocke en particulier les instructions du programme en cours d'exécution ou à exécuter et les données du programme (nombre, caractères alphanumériques, adresses mémoire, ...).
- Le bus est le support physique des transferts d'information entre les différentes unités.
- Les périphériques sont des unités connexes permettant de communiquer avec l'ensemble processeur-mémoire : clavier, écran, disque dur, réseau, imprimante/scanner, ...

Représentation d'un programme : instructions et données

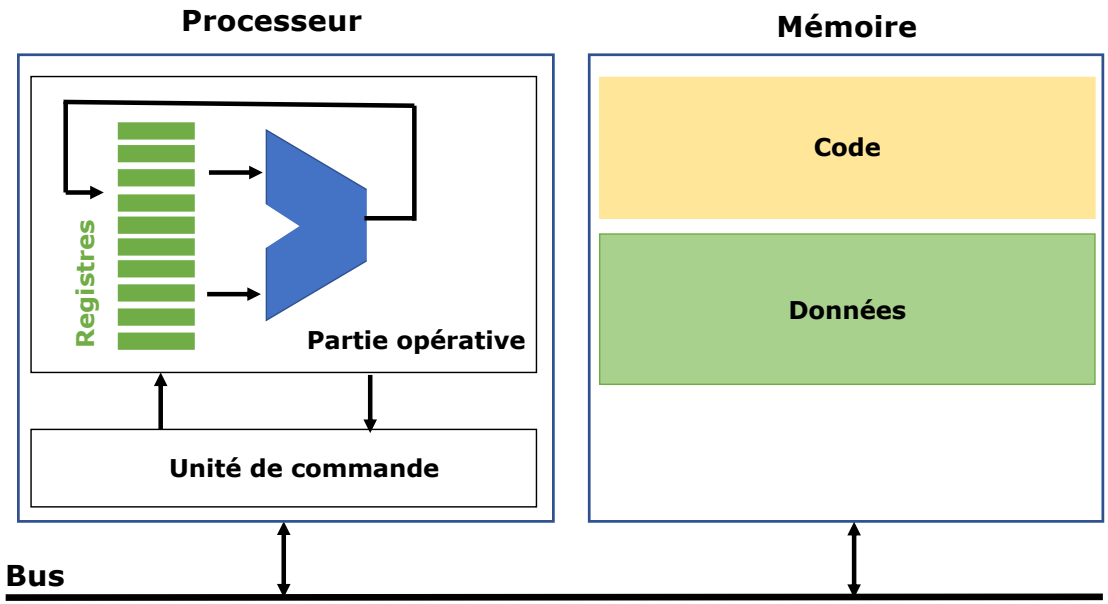
- Un programme définit un traitement à appliquer à des données
- Deux parties :
  - les données
  - le traitement qui est une suite d'opérations sur les données

Représentation en machine

- Les données sont représentées en binaire avec un codage associé à leur nature (entiers relatifs, caractères,...) et stockées en mémoire
- Le traitement à réaliser est traduit en une suite d'instructions compréhensibles par le processeur cible : ces instructions sont dites en langage machine
- Elles sont codées en binaire et stockées en mémoire

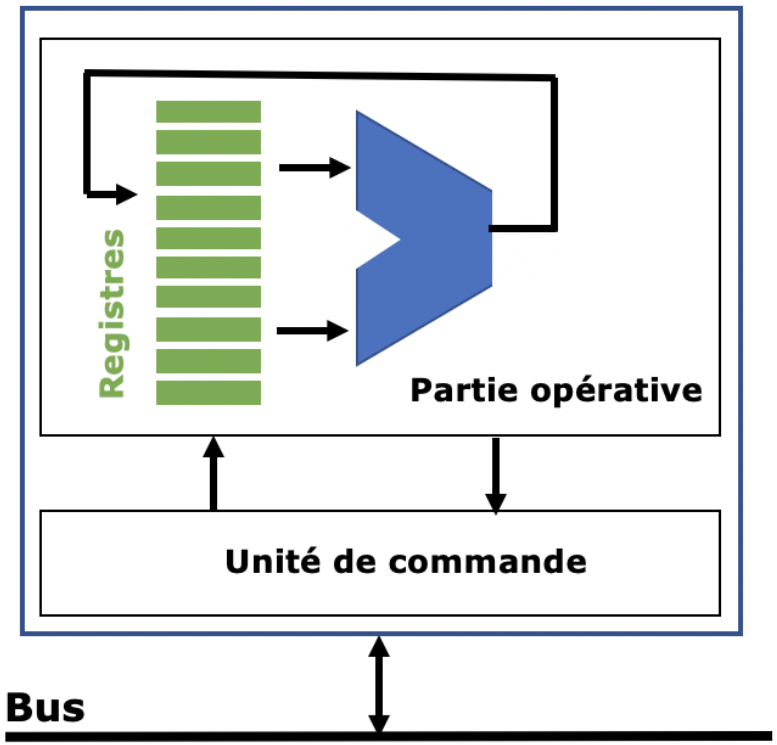
Stockage des informations

- Dans la mémoire sont stockées les données et les instructions du programme en cours d'exécution
- Dans le processeur, toute donnée (ou information) est stockée dans un registre : instruction en cours d'exécution + des données ou valeurs temporaires
- Transfert des informations entre la mémoire et le processeur via le bus



Architecture d'un processeur séquentiel

- Unité de commande : récupère les instructions dans la mémoire, les analyse puis séquence les actions élémentaires pour leur réalisation.
- Partie opérative : au service de l'unité de commande, contient les outils pour réaliser les actions élémentaires ordonnées par l'unité de commande. Comprend notamment une unité arithmétique et logique (ALU) et des registres (éléments de mémorisation temporaire).



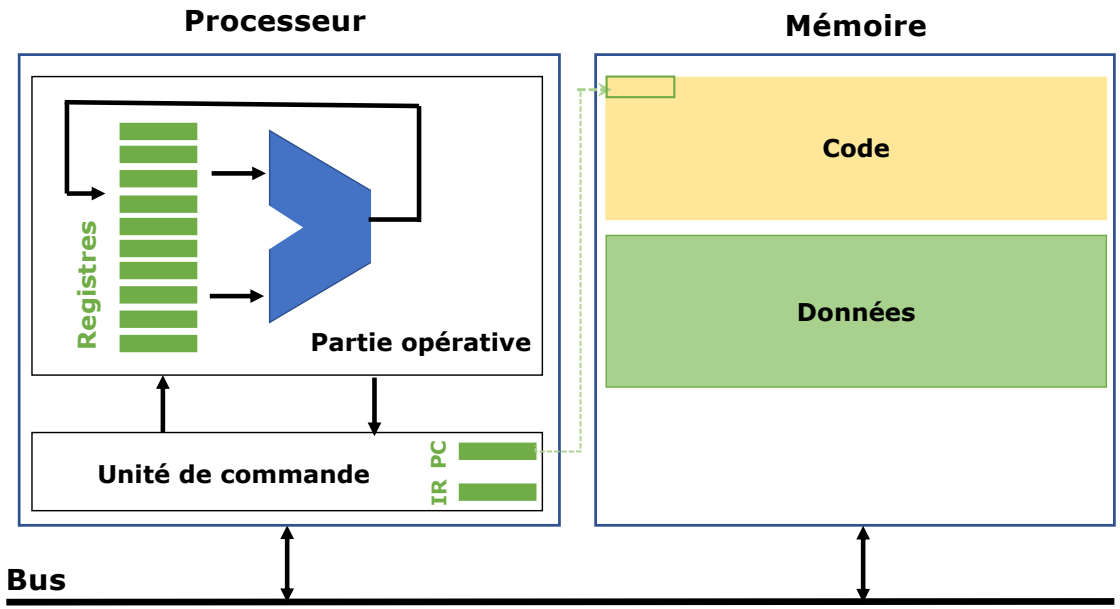
Boucle d'exécution réalisée par processeur

Deux registres particuliers dans le processeur

- PC = Program Counteur
- IR = Instruction Register

Le processeur exécute sans fin la suite des opérations suivantes

1. Lire une instruction en mémoire (mise dans IR)



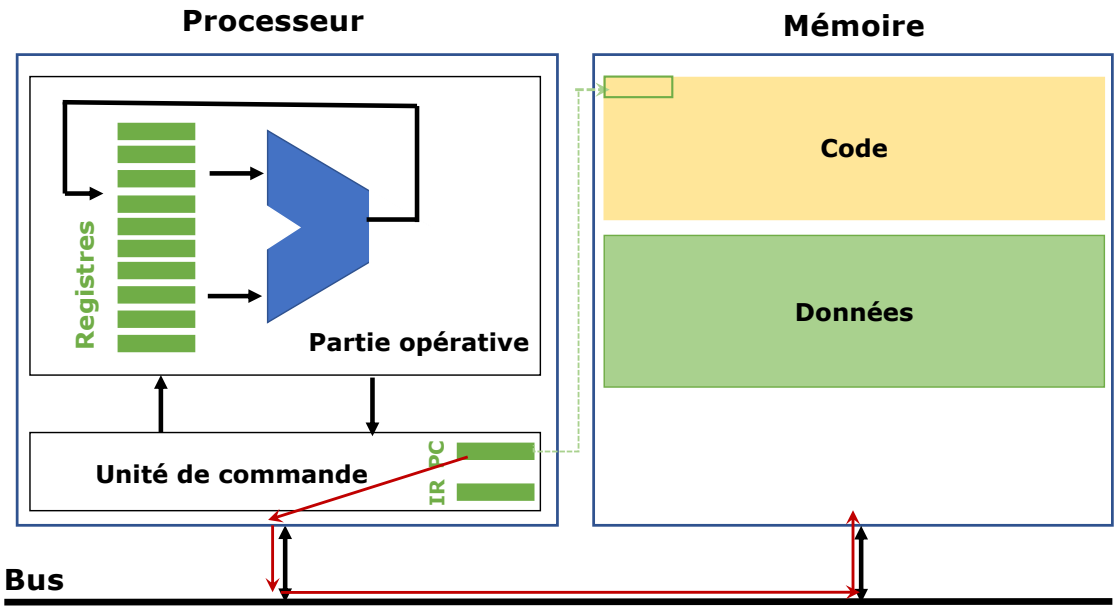
Boucle d'exécution réalisée par processeur

Deux registres particuliers dans le processeur

- PC = Program Counteur
- IR = Instruction Register

Le processeur exécute sans fin la suite des opérations suivantes

1. Lire une instruction en mémoire (mise dans IR)



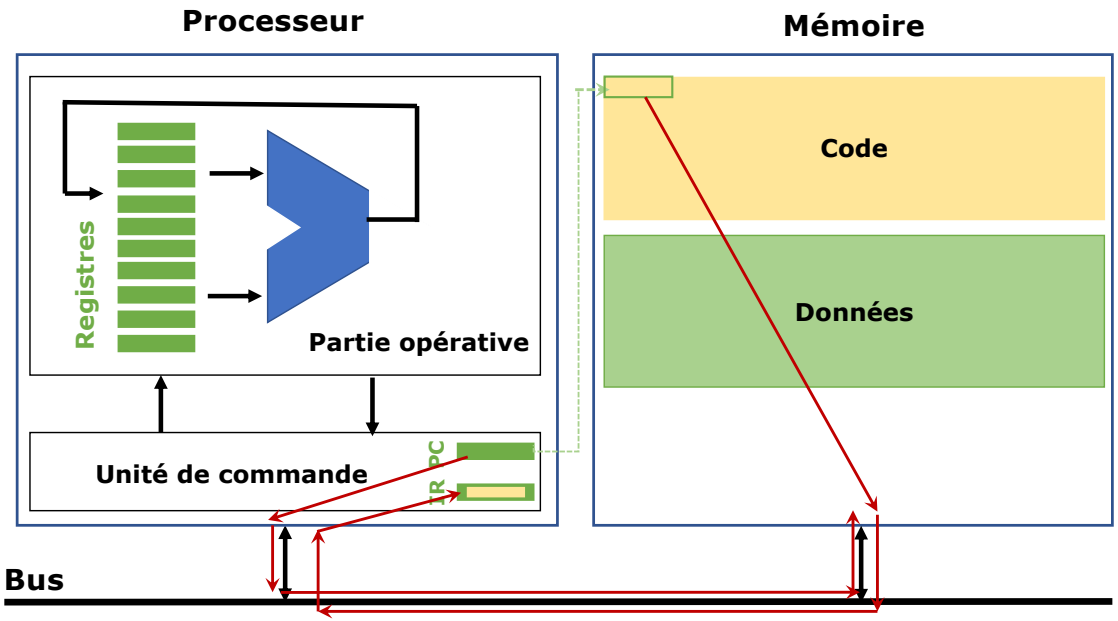
Boucle d'exécution réalisée par processeur

Deux registres particuliers dans le processeur

- PC = Program Counteur
- IR = Instruction Register

Le processeur exécute sans fin la suite des opérations suivantes

1. Lire une instruction en mémoire (mise dans IR)



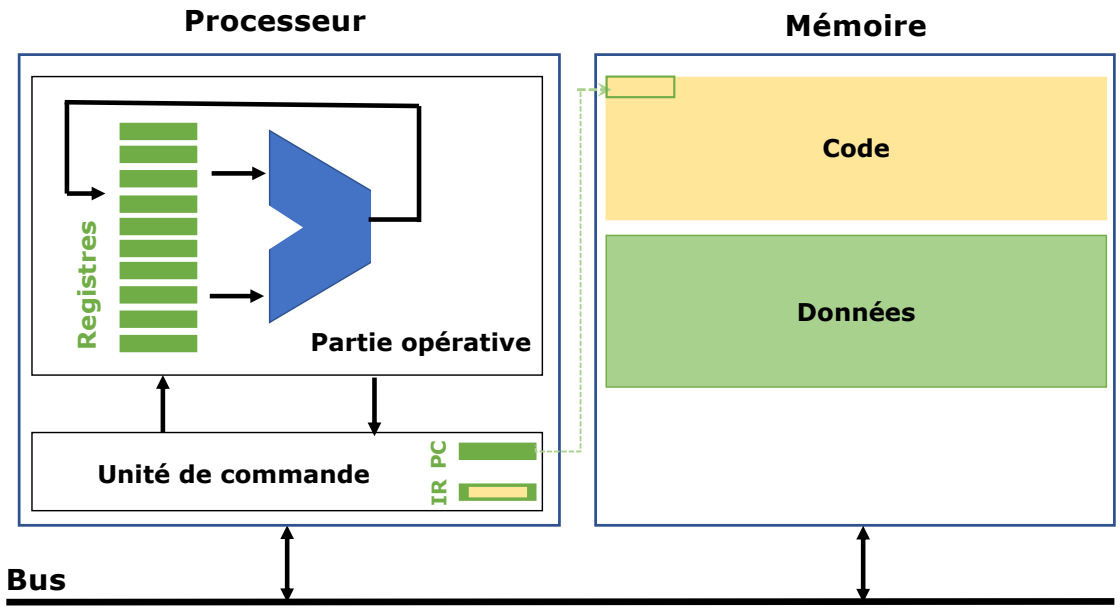
Boucle d'exécution réalisée par processeur

Deux registres particuliers dans le processeur

- PC = Program Counteur
- IR = Instruction Register

Le processeur exécute sans fin la suite des opérations suivantes

1. Lire une instruction en mémoire (mise dans IR)
2. Décoder l'instruction



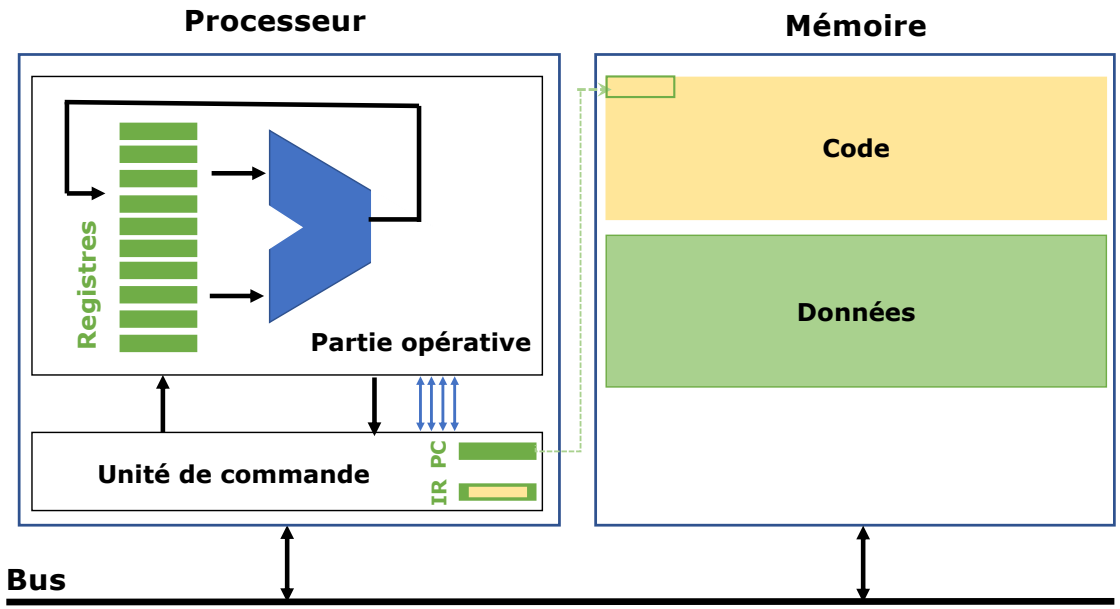
Boucle d'exécution réalisée par processeur

Deux registres particuliers dans le processeur

- PC = Program Counteur
- IR = Instruction Register

Le processeur exécute sans fin la suite des opérations suivantes

1. Lire une instruction en mémoire (mise dans IR)
2. Décoder l'instruction
3. Exécuter l'instruction



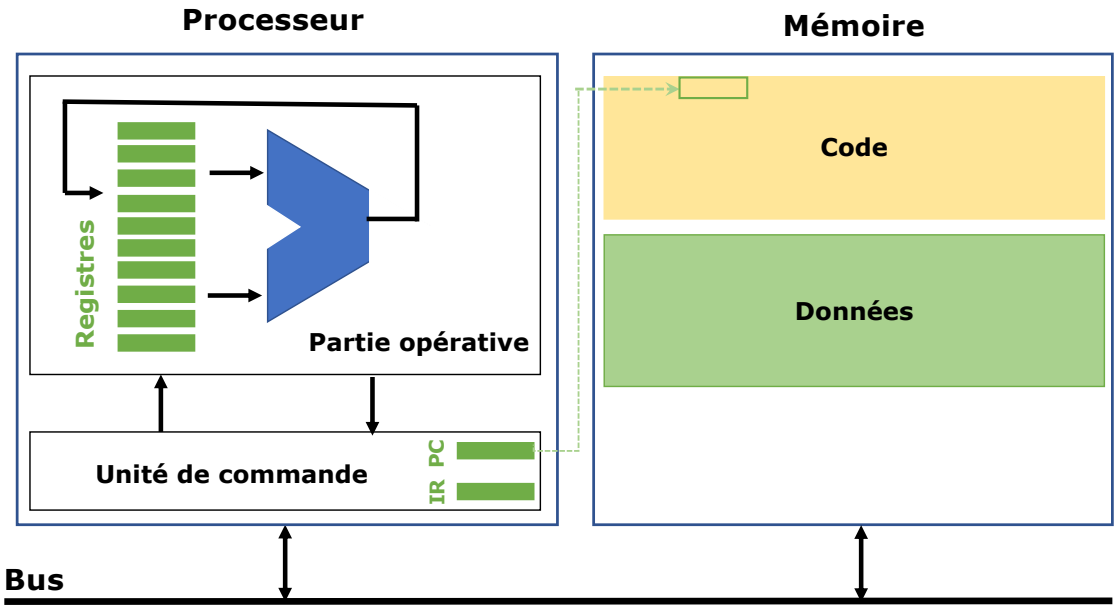
Boucle d'exécution réalisée par processeur

Deux registres particuliers dans le processeur

- PC = Program Counteur
- IR = Instruction Register

Le processeur exécute sans fin la suite des opérations suivantes

1. Lire une instruction en mémoire (mise dans IR)
2. Décoder l'instruction
3. Exécuter l'instruction
4. Calculer l'adresse de l'instruction suivante (mise à jour PC)



Réalisation physique des éléments d'un ordinateur

- La réalisation physique des éléments d'un ordinateur est électronique (mécanique pour certains périphériques).
- Les grandeurs manipulées au sein des composants sont des tensions électriques
  - qui sont stockées dans des éléments mémorisants, ou
  - qui transitent sur des fils et traversent des portes combinant les tensions et réalisant des fonctions logiques.
- On distingue deux niveaux de tension (par exemple 0V et 1.5V) qui représentent deux valeurs distinctes nommées 0 et 1.
- C'est pourquoi toutes les informations manipulées sont représentées par des mots composés de 0 et de 1.

Des 0 et des 1... représentation binaire

Toutes les informations manipulées sont représentées par des mots composés de 0 et de 1.

- mot binaire = un mot formé sur l'alphabet {0,1}
- bit = 0 ou 1
- octet = mot binaire composé de 8 bits
- quartet = mot binaire composé de 4 bits
- mot MIPS = mot de 32 bits = un mot de 4 octets

L'information représentée par un mot binaire dépend de son interprétation : instruction, donnée (entiers, chaine de caractères, entête descripteur de fichier, adresse mémoire, ...)

Les traitements réalisés par l'ordinateur sont faits sur la représentation binaire des informations, en calculant des fonctions logiques.

Logique booléenne

- Logique booléenne : formalisation des raisonnements basés sur des éléments qui peuvent être soit vrais, soit faux.
- Soit $\mathcal{B}$ l'alphabet $\mathcal{B}$ = {FAUX, VRAI} = {F,V} = {0,1}.
- Ordre sur les éléments de $\mathcal{B}$: 0 < 1
- Variable booléenne : une variable pouvant contenir soit vrai, soit faux.
- Fonction booléenne : une fonction de $\mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$
- Table de vérité : énumération ligne à ligne des valeurs prises par une fonction f en fonction de la valeur de ses paramètres

Opérations logiques

- Le complément / NON / NOT et noté par le surlignage est une fonction unaire. Si $a = 0$ alors $\overline{a} = 1$ et si $a = 1$ alors $\overline{a} = 0$
- L'addition / OU / OR et notée + est une fonction binaire et définie par $a + b = max(a, b)$
- La multiplication / ET / AND et notée . est une fonction binaire et définie par $a.b = min(a, b)$.
- Leur table de vérité :

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

a	b	a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	b	a.b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Algèbre de Boole (1)

$< \mathcal{B}, 0, 1, +, ., - >$ forme une algèbre de Boole car il respecte les axiomes suivant :

- 0 est l'élément neutre pour l'addition et 1 pour la multiplication : $\forall x \in \mathcal{B}$

$$x + 0 = 0 + x = x$$
$$x.1 = 1.x = x$$

- La somme d'un élément et de son complément est 1 : $\forall x \in \mathcal{B}$

$$x + \overline{x} = \overline{x} + x = 1$$

- Le produit d'un élément et de son complément est 0 : $\forall x \in \mathcal{B}$

$$x.\overline{x} = \overline{x}.x = 0$$

Algèbre de Boole (2)

$< \mathcal{B}, 0, 1, +, ., - >$ forme une algèbre de Boole car il respecte les axiomes suivant :

- L'addition et la multiplication sont associatives :
  $\forall x, y, z \in \mathcal{B}^3$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$
$$(x.y).z = x.(y.z)$$

- L'addition et la multiplication sont commutatives :
  $\forall x, y \in \mathcal{B}^2$

$$x + y = y + x$$
$$x.y = y.x$$

- L'addition et la multiplication sont distributives l'une par rapport à l'autre :
  $\forall x, y, z \in \mathcal{B}^3$

$$x.(y + z) = x.y + x.z$$
$$x + (y.z) = (x + y).(x + z)$$

  (différent de l'algèbre sur les nombres)

Autres propriétés

- Loi de De Morgan : $\forall x, y \in \mathcal{B}^2$

$$\overline{x + y} = \overline{x}.\overline{y}$$
$$\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$$

Simplifications :

- Loi d'involution : $\forall x \in \mathcal{B}$

$$\overline{\overline{x}} = x$$

- Éléments absorbants : $\forall x \in \mathcal{B}$

$$x.0 = 0$$
$$x + 1 = 1$$

- Idempotence : $\forall x \in \mathcal{B}$

$$x.x = x$$
$$x + x = x$$

Expression algébrique d'une fonction booléenne

- Toute fonction booléenne *f* peut s'exprimer à partir
  - des constantes 0 et 1,
  - des noms des variables booléennes paramètres de *f*,
  - et des opérations +, . et - de l'algèbre de Boole.
- Construction d'une expression algébrique d'une fonction *f* à partir de sa table de vérité :
  - La forme normale disjonctive de *f* s'obtient en réalisant la disjonction (OU) des termes représentant les lignes où *f* vaut 1.
  - Chaque terme est le produit (ET) des noms de variables de *f*, complémentés si la contribution de la variable est 0

Expression algébrique d'une fonction booléenne

- La forme normale disjonctive de *f* s'obtient en réalisant la disjonction (OU) des termes représentant les lignes où *f* vaut 1.
- Chaque terme est le produit (ET) des noms de variables de *f*, complémentés si la contribution de la variable est 0
- Exemple :

a	b	c	f(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Expression algébrique d'une fonction booléenne

- La forme normale disjonctive de f s'obtient en réalisant la disjonction (OU) des termes représentant les lignes où f vaut 1.
- Chaque terme est le produit (ET) des noms de variables de f, complémentés si la contribution de la variable est 0
- Exemple :

a	b	c	f(a,b,c)	terme
0	0	0	0	-
0	0	1	1	$\overline{a}.\overline{b}.c$
0	1	0	1	$\overline{a}.b.c$
0	1	1	0	-
1	0	0	0	-
1	0	1	1	$a.\overline{b}.c$
1	1	0	1	$a.b.\overline{c}$
1	1	1	0	-

Expression algébrique d'une fonction booléenne

- La forme normale disjonctive de f s'obtient en réalisant la disjonction (OU) des termes représentant les lignes où f vaut 1.
- Chaque terme est le produit (ET) des noms de variables de f, complémentés si la contribution de la variable est 0
- Exemple :

a	b	c	f(a,b,c)	terme
0	0	0	0	-
0	0	1	1	$\overline{a}.\overline{b}.c$
0	1	0	1	$\overline{a}.b.\overline{c}$
0	1	1	0	-
1	0	0	0	-
1	0	1	1	$a.\overline{b}.c$
1	1	0	1	$a.b.\overline{c}$
1	1	1	0	-

$$f(a,b,c) = \overline{a}.\overline{b}.c + \overline{a}.b.\overline{c} + a.\overline{b}.c + a.b.\overline{c}$$

Equivalence de deux fonctions booléennes ou expressions algébriques

- Deux fonctions booléennes sont équivalentes si elles ont la même table de vérité.
- Deux expressions algébriques booléennes sont équivalentes si elles peuvent se réécrire en une même 3ème expression.

Equivalence de deux fonctions booléennes ou expressions algébriques

- $f(a, b, c) = \overline{a}.\overline{b}.c + \overline{a}.b.\overline{c} + a.\overline{b}.c + a.b.\overline{c}$

Equivalence de deux fonctions booléennes ou expressions algébriques

- $f(a,b,c) = \overline{a}.\overline{b}.c + \overline{a}.b.\overline{c} + a.\overline{b}.c + a.b.\overline{c}$
- $f(a,b,c) = \overline{a}.(\overline{b}.c + b.\overline{c}) + a.(\overline{b}.c + b.\overline{c})$ // distributivité

Equivalence de deux fonctions booléennes ou expressions algébriques

- $f(a,b,c) = \overline{a}.\overline{b}.c + \overline{a}.b.\overline{c} + a.\overline{b}.c + a.b.\overline{c}$
- $f(a,b,c) = \overline{a}.(\overline{b}.c + b.\overline{c}) + a.(\overline{b}.c + b.\overline{c})$ // distributivité
- $f(a,b,c) = (\overline{a} + a).(\overline{b}.c + b.\overline{c})$ // distributivité

Equivalence de deux fonctions booléennes ou expressions algébriques

- $f(a,b,c) = \overline{a}.\overline{b}.c + \overline{a}.b.\overline{c} + a.\overline{b}.c + a.b.\overline{c}$
- $f(a,b,c) = \overline{a}.(\overline{b}.c + b.\overline{c}) + a.(\overline{b}.c + b.\overline{c})$ // distributivité
- $f(a,b,c) = (\overline{a} + a).(\overline{b}.c + b.\overline{c})$ // distributivité
- $f(a,b,c) = 1.(\overline{b}.c + b.\overline{c})$ // somme élément et son complément

Equivalence de deux fonctions booléennes ou expressions algébriques

- $f(a,b,c) = \overline{a}.\overline{b}.c + \overline{a}.b.\overline{c} + a.\overline{b}.c + a.b.\overline{c}$
- $f(a,b,c) = \overline{a}.(\overline{b}.c + b.\overline{c}) + a.(\overline{b}.c + b.\overline{c})$ // distributivité
- $f(a,b,c) = (\overline{a} + a).(\overline{b}.c + b.\overline{c})$ // distributivité
- $f(a,b,c) = 1.(\overline{b}.c + b.\overline{c})$ // somme élément et son complément
- $f(a,b,c) = \overline{b}.c + b.\overline{c}$ // 1 élément neutre de .

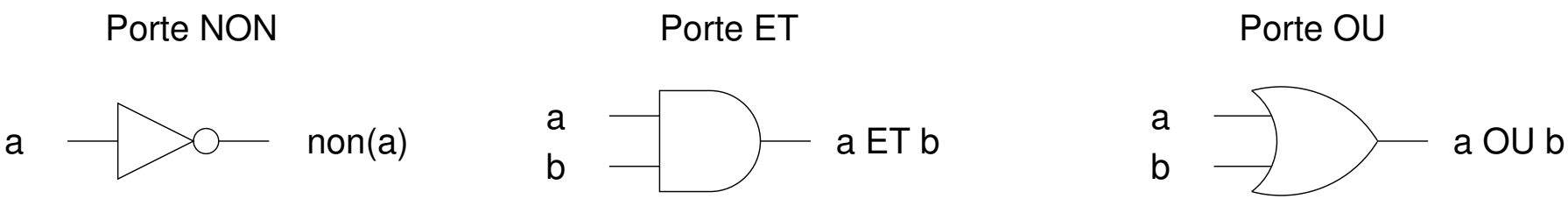
Equivalence de deux fonctions booléennes ou expressions algébriques

- $f(a,b,c) = \overline{a}.\overline{b}.c + \overline{a}.b.\overline{c} + a.\overline{b}.c + a.b.\overline{c}$
- $f(a,b,c) = \overline{a}.(\overline{b}.c + b.\overline{c}) + a.(\overline{b}.c + b.\overline{c})$ // distributivité
- $f(a,b,c) = (\overline{a} + a).(\overline{b}.c + b.\overline{c})$ // distributivité
- $f(a,b,c) = 1.(\overline{b}.c + b.\overline{c})$ // somme élément et son complément
- $f(a,b,c) = \overline{b}.c + b.\overline{c}$ // 1 élément neutre de .

$$\overline{a}.\overline{b}.c + \overline{a}.b.\overline{c} + a.\overline{b}.c + a.b.\overline{c} \equiv \overline{b}.c + b.\overline{c}$$

Représentation schématique des fonctions booléennes

- Un circuit est une représentation schématique de l'évaluation d'une fonction booléenne à partir de l'une de ses expressions algébriques.
- Une porte logique représentant une fonction booléenne f à n variables est un élément possédant n signaux d'entrée et un signal de sortie. Elle produit sur le signal de sortie la valeur de f pour la configuration fournie sur les signaux d'entrée.
- Illustration de la représentation schématique des portes ET, OU et NON.



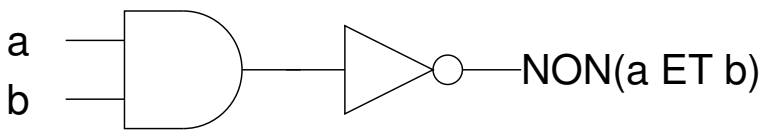
Circuit logique

- Un circuit logique est un diagramme orienté composé de signaux d'entrée, de portes logiques et de signaux de sortie. Il respecte les règles de connectique suivantes :
  - les entrées des portes logiques sont connectées à des signaux d'entrée du circuit ou à des sorties d'autres portes du circuit,
  - les signaux de sortie sont connectés à des sorties de portes du circuit,
  - la composition de fonctions $g \circ f$ est représentée par la mise en séquence de f et de g :
    les signaux de sortie de f sont connectés aux signaux d'entrée de g.

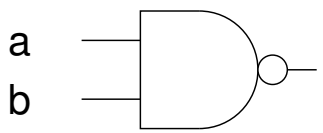
Circuit logique

- Un circuit logique est un diagramme orienté composé de signaux d'entrée, de portes logiques et de signaux de sortie. Il respecte les règles de connectique suivantes :
  - les entrées des portes logiques sont connectées à des signaux d'entrée du circuit ou à des sorties d'autres portes du circuit,
  - les signaux de sortie sont connectés à des sorties de portes du circuit,
  - la composition de fonctions $g \circ f$ est représentée par la mise en séquence de f et de g :
    les signaux de sortie de f sont connectés aux signaux d'entrée de g.
- Exemple : $\overline{a.b}$

Realisation de NON(a ET b)



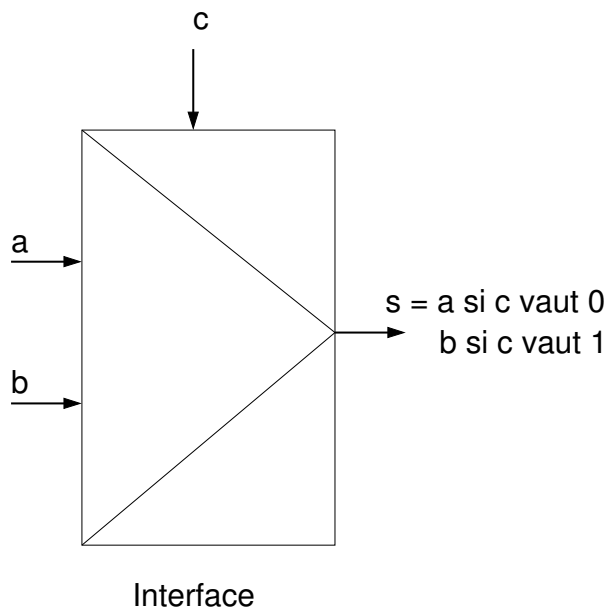
Representation commune de la porte NAND



NON(a ET b) = a NAND b

Multiplexeur

- Un multiplexeur à deux entrées *a* et *b* et une commande *c* est un circuit :
  - sortie = la valeur de l'entrée *a* si *c* vaut 0
  - sortie = la valeur de l'entrée *b* sinon (si *c* vaut 1).
- Un multiplexeur permet de sélectionner une des entrées en fonction de la valeur de la commande *c*, indépendamment de la valeur des entrées



Interface

Table de vérité de $mux2(a, b, c)$:

c	mux2(a,b,c)
0	a
1	b

$$mux2(a, b, c) = a.\overline{c} + b.c$$

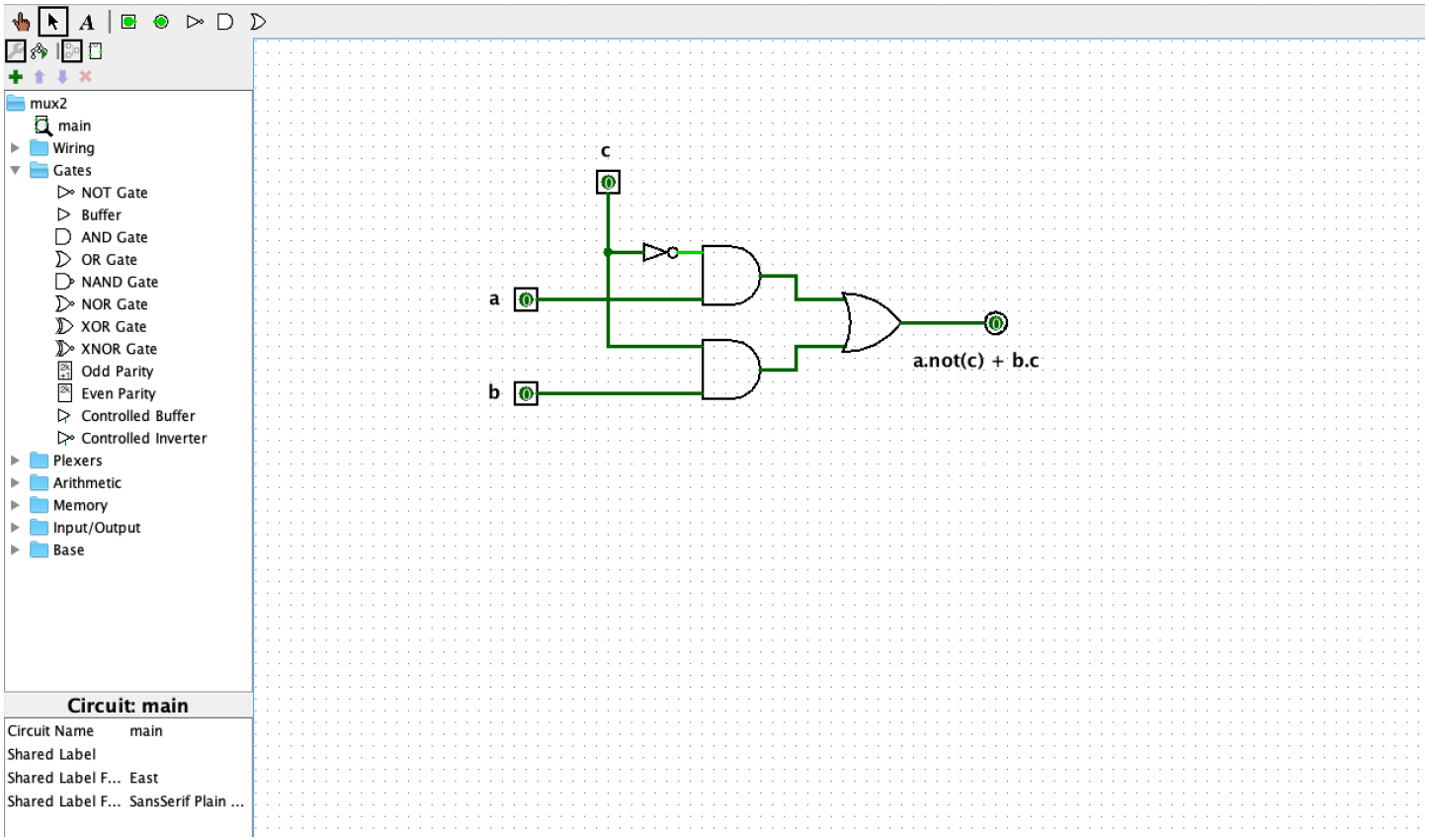
Circuit combinatoire

- Circuit combinatoire c'est un circuit logique dont le graphe orienté est sans cycle. La valeur du signal de sortie ne dépend que des valeurs des signaux d'entrée à l'instant présent (dès qu'une entrée change, la sortie change – modulo le temps de propagation de l'information mais c'est très rapide !).

- LOGISIM : logiciel d'édition et simulation de schémas logiques utilisé en TME. Il permet de représenter une partie simplifiée de l'unité arithmétique et logique d'un processeur.

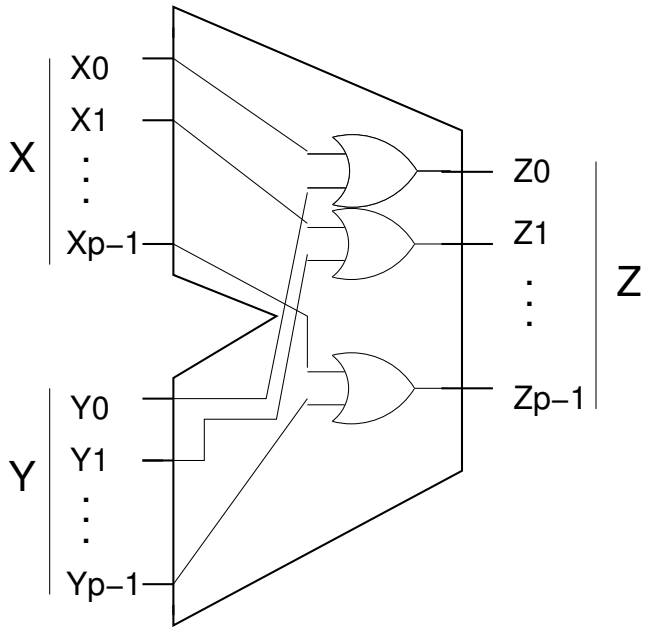
LOGISIM

- Une expression algébrique d'une fonction f booléenne décrit un mode opératoire pour déterminer la valeur de f, elle peut être représentée par un circuit composé de portes logiques ET, OU, NON (ou d'autres).
- Le circuit aura autant d'entrées que de variables différentes et une sortie
- Exemple du multiplexeur à 2 entrées et 1 commande : $a.\overline{c} + b.c$



Unité arithmétique et logique

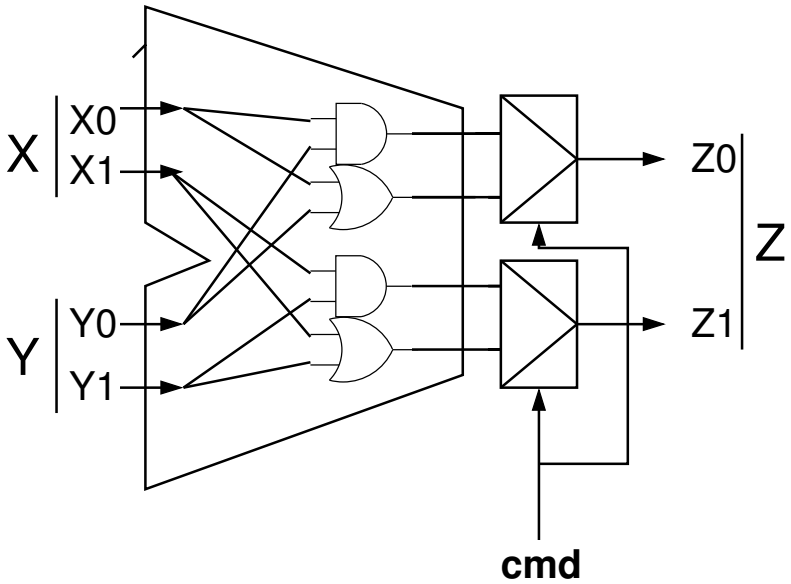
- Dans les processeurs, existence d'instructions réalisant des opérations logiques sur des mots (binaires) de p bits.
- Si f est une fonction booléenne binaire alors sur deux mots de p bits : $f(a_{p-1}...a_1a_0, b_{p-1}...b_1b_0) = f(a_{p-1}, b_{p-1})f(a_{p-2}, b_{p-2})...f(a_1, b_1)f(a_0, b_0)$.
- L'opération est effectuée bit à bit.
- Exemple en MIPS opération logique OU via l'instruction `or $3,$2,$1`.



Unité arithmétique et logique

- Dans les processeurs, existence d'instructions réalisant des opérations logiques sur des mots (binaires) de *p* bits via l'ALU.
- Plusieurs opérations logiques précablées : OU, ET, XOR, ...
- Exemple d'instructions MIPS : `or $3,$2,$1` et `and $3,$2,$1`.
- L'unité de commande sélectionne l'opération, les opérandes sources et destination.

La valeur de cmd est determinee par l'instruction en cours d'execution



Si or \$1, \$2, \$3 selection du OU (cmd = 1)
Si and \$1, \$2, \$3 selection du ET (cmd = 0)

Représentation des informations en machine

- La représentation binaire est facile à réaliser (2 états d'équilibre) et les opérations fondamentales sont relativement simples à effectuer sous forme de circuit logique.

- Différents types d'informations (instructions, données) dans un ordinateur, mais toutes représentées sous forme binaire.

- L'information élémentaire = le bit
- Les informations (instructions, caractère, nombre, ...) sont représentées avec un ensemble de bits en utilisant un codage.

Codage des informations

- Le codage d'une information = correspondance entre la représentation externe de l'information (caractère A ou nombre 36) et sa représentation binaire (suite de bits).
- C'est l'utilisation d'une information qui en détermine le type (décodage appliqué, lieu d'utilisation...)
- Besoin de codage pour les informations traitées par le processeur :
  - les instructions : les instructions et leur codage dépend du (type de) processeur
  - les données numériques (N, Z, etc.), alphanumériques ou plus complexes (image) : codage suivant des normes (complément à deux, ASCII, UTF-8, RGB).

Système de numération

- Un système de numération fait correspondre à un nombre N un certain formalisme écrit et oral.
- Dans un système de base avec $B > 1$, les nombres 0, 1, 2, ..., $B - 1$ sont appelés chiffres.

Expression d'un entier N dans une base B

Tout entier naturel N peut être exprimé comme une somme de multiples de puissance de la base B, les multiples étant des chiffres (donc $< B$)

$N = \sum_i a_i B^i = a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + ... + a_1 B + a_0$ avec $\forall i \; a_i < B$

- La notation condensée de l'entier naturel N dans la base B est $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0{}_B$.
- Cette notation est pondérée : chaque position correspond à une puissance de la base B et il y a un chiffre pour chaque position (éventuellement 0).

Notations

Notation avec indice pour les systèmes de base

- b pour la base 2/le binaire : 111_b
- d pour la base 10/le décimal : 111_d
- h pour la base 16/l'hexadécimal : 111_h,

Notation avec préfixe réservée aux mots binaires (voir plus loin)

- le préfixe $0x$ pour la représentation hexadécimale d'un mot binaire : $0x111, 0x23445, ...$
- le préfixe $0b$ pour la représentation d'un mot binaire : $0b1110$

Représentation en base 2

- Les informations manipulées par un ordinateur étant des mots binaires : les nombres entiers sont représentés en base 2 et les chiffres sont 0 et 1

Interprétation des entiers naturels représentés en binaire

$$(a_{n-1}...a_1 a_0)_b = N_d = (\sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i)_d$$

Exemples

$N_d = 111_b = (1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0)_d$
$N_d = 111_b = 7_d$

$N_d = 110011_b = (1 * 2^5 + 1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0)_d$
$N_d = (2^5 + 2^4 + 2^1 + 2^0)_d = 51_d$

- Nombres entiers exprimés en binaire $\Rightarrow$ grand nombre de bits
- Représentation en base 16/en hexadécimal préférée car simple conversion hexadécimal depuis/vers binaire et notation plus dense

Représentation en hexadécimal

- En base 16, on utilise les symboles 0, 1, ..., 8, 9, A, B, C, D, E,F pour les 15 chiffres avec la correspondance suivante :

Hexadécimal	Décimal	Binaire
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111

Hexadécimal	Décimal	Binaire
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

Interprétation d'un naturel représenté en hexadécimal

$N_d = (a_{n-1}a_{n-2}a_1a_0)_h$
$N_d = (a_{n-1}16^{n-1} + a_{n-2}16^{n-2} + ... + a_1 16 + a_0)_d$

- Il y a quatre fois moins de symboles que dans la notation en binaire.
- Attention $1001_h \neq 1001_b$!

Représentation des valeurs des mots

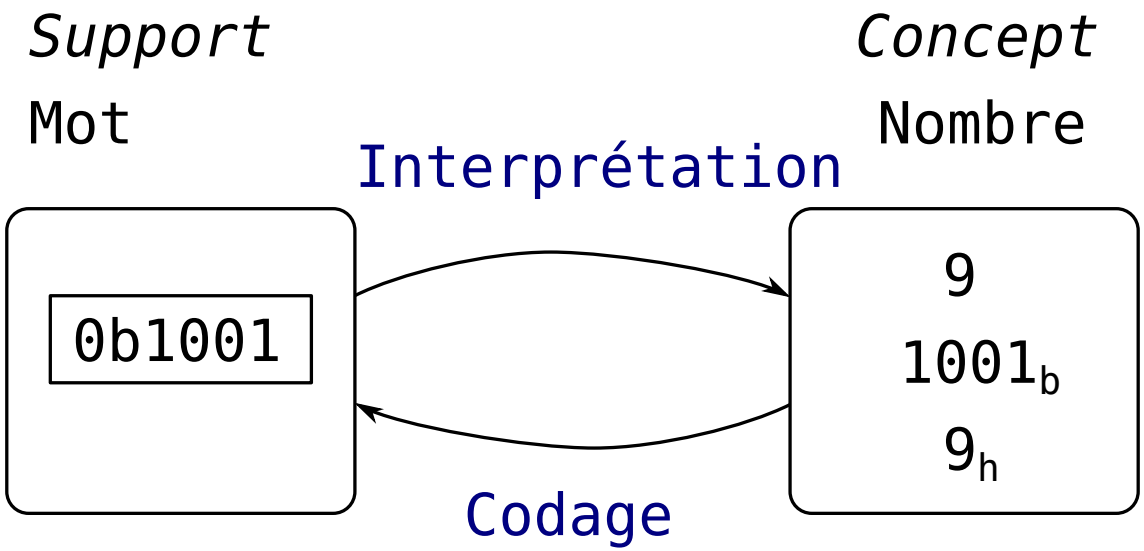
- Un mot binaire peut être interprété de **différentes façons**, pas uniquement comme un nombre non signé
- $\Rightarrow$ Pour décrire la valeur d'un mot binaire – par exemple le contenu d'un registre – on utilise une notation **avec préfixe** :
  - Le préfixe $0x$ pour la représentation hexadécimale : $0x11$, $0x0445$, $0x1234ABCD$
  - Le préfixe $0b$ pour la représentation binaire : $0b1110$, $0b00010011$
- Cette notation décrit le contenu du mot **sans l'interpréter** :
  - Ne dit pas s'il s'agit d'un nombre positif, d'un nombre négatif, d'un caractère, d'une instruction...
  - Décrit juste la valeur des bits 1 à 1, du bit de poids faible (le plus à droite) au bit de poids fort (le plus à gauche)
- Les 0 en tête sont généralement écrits pour indiquer la taille du mot
- La taille de représentation (taille du mot en bits) doit être connue : c'est normalement toujours le cas

Codage entiers naturels

Codage entiers naturels

- Pour encoder un entier naturel sur un mot, on utilise la représentation binaire du nombre
- Le bit de poids faible (bit de rang 0) correspond à 2^0, le bit de poids fort (bit de rang $N-1$) à 2^{N-1}
- Ce codage s'appelle le codage entiers naturels

Codage entiers naturels



Exemple

- Sur 4 bits, le mot 0b1001 s'interprète comme la valeur 9 selon le codage *entiers naturels*, et $9 = 1001_b$
- Néanmoins, ce sont **deux choses différentes** : le même mot pourrait être interprété d'une façon différente, en utilisant un autre codage
- Le nombre 3 se code 0b0011 sur un mot de 4 bits, et $3 = 11_b$

Représentation en machine : taille bornée

Taille de représentation bornée

Les nombres sont représentés sur des mots de taille bornée (32 ou 64 bits)
$\Rightarrow$ tous les nombres ne sont pas représentables

Intervalle de représentation

- Sur p symboles en base B, représentation possible des entiers naturels compris dans l'intervalle $[0, B^p - 1]$
- Sur un mot de n bits, représentation possible de l'intervalle $[0, 2^n - 1]$ avec le codage entiers naturels

Exemples

- Sur 3 chiffres en décimal, intervalle [0, 999]
- Sur 3 symboles en hexadécimal, intervalle $[0, 4095 = \mathrm{FFF}_h]$
- Sur 8 bits, intervalle $[0, 255 = 11111111_b]$

Extension de la représentation d'un entier naturel

Extension de p à n bits

- Soit un mot de p bits contenant une valeur v, interprété selon le codage entier naturel par le nombre d
- Pour que le mot v' de n bits ($n > p$) encode également le nombre d, il faut :
  - Copier les bits de poids faible de v dans v'
  - Mettre les bits de poids fort restant à 0

Extension de 4 à 8 bits

- 3 sur 4 bits se code 0b0011 $\rightarrow$ 3 sur 8 bits se code 0b0000 0011
- 9 sur 4 bits se code 0b1001 $\rightarrow$ 9 sur 8 bits se code 0b0000 1001

Changement de base

Comment passer d'une base B_1 à une base B_2 ?

- Algorithmes de conversion
  - Par divisions successives
  - Par tableau de puissance
- Correspondance simple entre certaines bases (2 vers 16, 16 vers 2)

Algorithme de conversion par divisions successives

Conversion de la base 10 à une base $B > 1$ pour un nombre N donné possible par divisions successives.
En base B :

- Le symbole a_0 est le reste de la division euclidienne de N par B car :

$$\begin{aligned} N &= a_{n-1}B^{n-1} + ... + a_iB^i + ... + a_2B^2 + a_1B + a_0 \\ &= (a_{n-1}B^{n-2} + ... + a_iB^{i-1} + a_2B^1 + a_1)B + a_0 \end{aligned}$$

- Le symbole de rang 1 (B^1) est le reste de la division euclidienne de $\frac{N}{B}$ par B car :

$$\begin{aligned} \frac{N}{B} &= a_{n-1}B^{n-2} + .. + a_iB^{i-1} + ...a_2B + a_1 \\ &= (a_{n-1}B^{n-3} + ... + a_iB^{i-2} + ... + a_2)B + a_1 \end{aligned}$$

- Le symbole de rang i est le reste de la division euclidienne de $\frac{N}{B^i}$ par B car :

$$\frac{N}{B^i} = a_{n-1}B^{n-1-i} + ... + a_{i+1}B + a_i$$

Algorithme

$i \leftarrow 0$
$Q \leftarrow 1$
while $Q > 0$ **do**
  $Q \leftarrow \frac{N}{B}$
  $R \leftarrow N \bmod B$
  $a_i \leftarrow R$
  $N \leftarrow Q$
  $i \leftarrow i + 1$
end while
$a_i \leftarrow 0$
Return $a_{j,j\in[0,i]}$

Algorithme de conversion par divisions successives

Conversion de la base 10 à une base $B > 1$ pour un nombre N donné possible par divisions successives.
En base B :

- Le symbole a_0 est le reste de la division euclidienne de N par B car :

$$\begin{aligned} N &= a_{n-1}B^{n-1} + ... + a_iB^i + ... + a_2B^2 + a_1B + a_0 \\ &= (a_{n-1}B^{n-2} + ... + a_iB^{i-1} + a_2B^1 + a_1)B + a_0 \end{aligned}$$

- Le symbole de rang 1 (B^1) est le reste de la division euclidienne de $\frac{N}{B}$ par B car :

$$\begin{aligned} \frac{N}{B} &= a_{n-1}B^{n-2} + .. + a_iB^{i-1} + ...a_2B + a_1 \\ &= (a_{n-1}B^{n-3} + ... + a_iB^{i-2} + ... + a_2)B + a_1 \end{aligned}$$

- Le symbole de rang i est le reste de la division euclidienne de $\frac{N}{B^i}$ par B car :

$$\frac{N}{B^i} = a_{n-1}B^{n-1-i} + ... + a_{i+1}B + a_i$$

Algorithme

$i \leftarrow 0$
$Q \leftarrow 1$
while $Q > 0$ **do**
  $Q \leftarrow \frac{N}{B}$
  $R \leftarrow N \bmod B$
  $a_i \leftarrow R$
  $N \leftarrow Q$
  $i \leftarrow i + 1$
end while
$a_i \leftarrow 0$
Return $a_{j,j\in[0,i]}$

Algorithme de conversion par divisions successives

Conversion de la base 10 à une base $B > 1$ pour un nombre N donné possible par divisions successives.
En base B :

- Le symbole a_0 est le reste de la division euclidienne de N par B car :

$$\begin{aligned} N &= a_{n-1}B^{n-1} + ... + a_iB^i + ... + a_2B^2 + a_1B + a_0 \\ &= (a_{n-1}B^{n-2} + ... + a_iB^{i-1} + a_2B^1 + a_1)B + a_0 \end{aligned}$$

- Le symbole de rang 1 (B^1) est le reste de la division euclidienne de $\frac{N}{B}$ par B car :

$$\begin{aligned} \frac{N}{B} &= a_{n-1}B^{n-2} + .. + a_iB^{i-1} + ...a_2B + a_1 \\ &= (a_{n-1}B^{n-3} + ... + a_iB^{i-2} + ... + a_2)B + a_1 \end{aligned}$$

- Le symbole de rang i est le reste de la division euclidienne de $\frac{N}{B^i}$ par B car :

$$\frac{N}{B^i} = a_{n-1}B^{n-1-i} + ... + a_{i+1}B + a_i$$

Algorithme

$i \leftarrow 0$
$Q \leftarrow 1$
while $Q > 0$ **do**
  $Q \leftarrow \frac{N}{B}$
  $R \leftarrow N \bmod B$
  $a_i \leftarrow R$
  $N \leftarrow Q$
  $i \leftarrow i + 1$
end while
$a_i \leftarrow 0$
Return $a_{j,j\in[0,i]}$

Algorithme de conversion par divisions successives

Conversion de la base 10 à une base $B > 1$ pour un nombre N donné possible par divisions successives.
En base B :

- Le symbole a_0 est le reste de la division euclidienne de N par B car :

$$\begin{aligned} N &= a_{n-1}B^{n-1} + ... + a_iB^i + ... + a_2B^2 + a_1B + a_0 \\ &= (a_{n-1}B^{n-2} + ... + a_iB^{i-1} + a_2B^1 + a_1)B + a_0 \end{aligned}$$

- Le symbole de rang 1 (B^1) est le reste de la division euclidienne de $\frac{N}{B}$ par B car :

$$\begin{aligned} \frac{N}{B} &= a_{n-1}B^{n-2} + .. + a_iB^{i-1} + ...a_2B + a_1 \\ &= (a_{n-1}B^{n-3} + ... + a_iB^{i-2} + ... + a_2)B + a_1 \end{aligned}$$

- Le symbole de rang i est le reste de la division euclidienne de $\frac{N}{B^i}$ par B car :

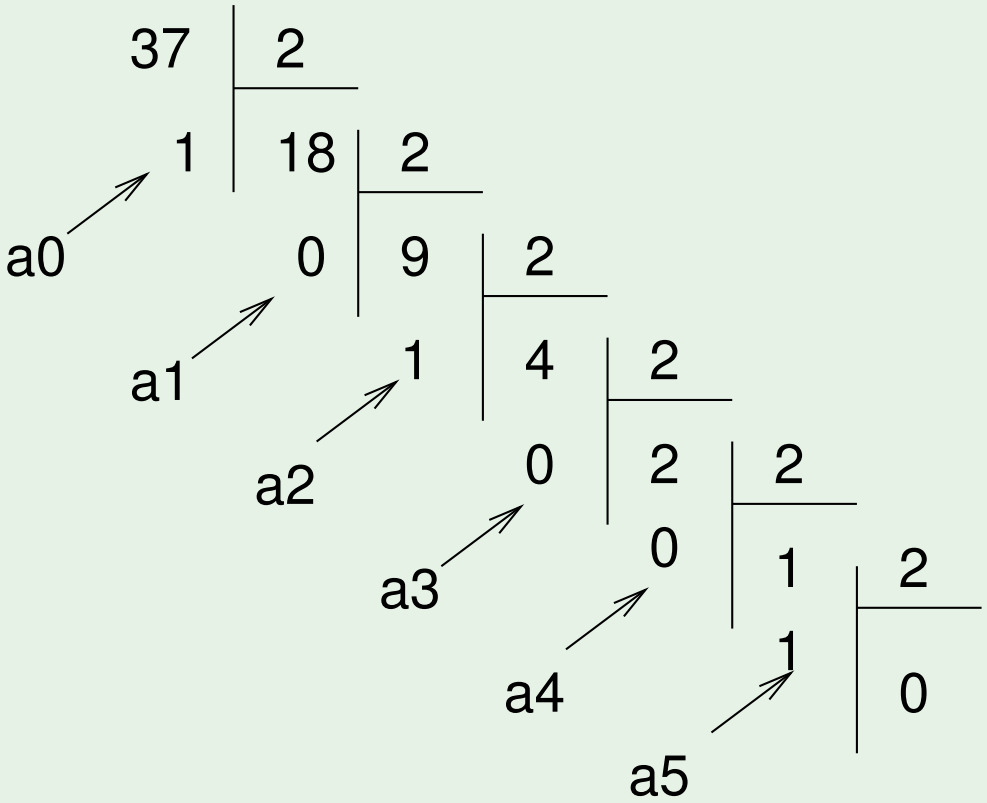
$$\frac{N}{B^i} = a_{n-1}B^{n-1-i} + ... + a_{i+1}B + a_i$$

Algorithme

$i \leftarrow 0$
$Q \leftarrow 1$
while $Q > 0$ **do**
  $Q \leftarrow \frac{N}{B}$
  $R \leftarrow N \bmod B$
  $a_i \leftarrow R$
  $N \leftarrow Q$
  $i \leftarrow i + 1$
end while
$a_i \leftarrow 0$
Return $a_{j,j\in[0,i]}$

Exemple de conversion par divisions successives

Conversion de 37d en binaire



37d = 100101b = 2^5 + 2^2 + 2^0

Conversion de la base 10 vers la base B sur (k+1) symboles

Conversion d'un nombre N donné dans une base $B > 1$ sur $(k+1)$ symboles en cherchant les multiples des puissances de B en commençant par le symbole de poids fort.

Algorithme

$i \leftarrow k$
$b_{i,i\in[0,k]} \leftarrow 0$
while $N >= 0$ and $i \geq 0$ **do**
  if $N \geq \alpha.B^i$ and $N < (\alpha+1).B^i, \alpha \in [0, B-1]$) **then**
    $b_i \leftarrow \alpha$
    $N \leftarrow N - \alpha.B^i$
  end if
  $i \leftarrow i - 1$
end while
Return $b_{i,i\in[0,k]}$

$\Rightarrow$ réalisable à la main avec un tableau des puissances B^i , en cherchant le plus grand multiple de B^i inférieur ou égal à N

Conversion en binaire avec tableau de puissances

Conversion de 39_d en binaire

			2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
			a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
$39 < 2^6$	$\Longrightarrow$	$a_6 = 0$	0	?	?	?	?	?	?
$39 > 2^5$	$\Longrightarrow$	$a_5 = 1$	0	1	?	?	?	?	?
$39 - 2^5 = 7 < 2^4$	$\Longrightarrow$	$a_4 = 0$	0	1	0	?	?	?	?
$7 < 2^3$	$\Longrightarrow$	$a_3 = 0$	0	1	0	0	?	?	?
$7 > 2^2$	$\Longrightarrow$	$a_2 = 1$	0	1	0	0	1	?	?
$7 - 2^2 = 3 > 2^1$	$\Longrightarrow$	$a_1 = 1$	0	1	0	0	1	1	?
$3 - 2^1 = 1 \geq 2^0$	$\Longrightarrow$	$a_0 = 1$	0	1	0	0	1	1	1

Conversion de la base 2 à la base 16

Conversion base 2 $\rightarrow$ base 16

1. Séparer le nombre binaire en quartet (paquet de 4 bits) en partant de la droite
2. Convertir chaque quartet en son symbole hexadécimal

Exemple $N = 0b1101001010010111$

$$N = 0b \quad 1101 \quad 0010 \quad 1001 \quad 0111$$

Exemple $N = 0b0011110011100101$

$$N = 0b \quad 0011 \quad 1100 \quad 1110 \quad 0101$$

$$-$$

Conversion de la base 2 à la base 16

Conversion base 2 $\rightarrow$ base 16

1. Séparer le nombre binaire en quartet (paquet de 4 bits) en partant de la droite
2. Convertir chaque quartet en son symbole hexadécimal

Exemple $N = 0b1101001010010111$

$$\begin{array}{rcccccc} N & = & 0b & 1101 & 0010 & 1001 & 0111 \\ & = & 0x & D & 2 & 9 & 7 \end{array}$$

$\rightarrow N = 0xB297$

Exemple $N = 0b0011110011100101$

$$\begin{array}{rcccccc} N & = & 0b & 0011 & 1100 & 1110 & 0101 \\ & = & 0x & 3 & C & E & 5 \end{array}$$

$\rightarrow N = 0x3CE5$

Conversion de la base 16 à la base 2

Conversion base 16 $\rightarrow$ base 2

1. Convertir chaque symbole hexadécimal en quartet/mot de 4 bits

Exemple $N = 0xAFDB$

$$N = 0x\ A\ F\ D\ B$$

Exemple $N = 0b854F$

$$N = 0x\ 8\ 5\ 4\ F$$

Conversion de la base 16 à la base 2

Conversion base 16 $\rightarrow$ base 2

1. Convertir chaque symbole hexadécimal en quartet/mot de 4 bits

Exemple $N = 0xAFDB$

$$\begin{array}{rcccccc} N & = & 0x & A & F & D & B \\ & = & 0b & 1010 & 1111 & 1101 & 1011 \end{array}$$

$\rightarrow N = 0b1010111111011011$

Exemple $N = 0b854F$

$$\begin{array}{rcccccc} N & = & 0x & 8 & 5 & 4 & F \\ & = & 0b & 1000 & 0101 & 0100 & 1111 \end{array}$$

$\rightarrow N = 0b1000010101001111$

Conclusion

On a vu

- Architecture générale d'un ordinateur
- Logique booléenne et circuit logique
- Représentation en machine, représentation des entiers naturels et algorithmes de conversion

Important :

- Moodle 2024 : `https://moodle-sciences-24.sorbonne-universite.fr/`
- URL du site de l'UE : ~~`https://www-licence.ufr-info-p6.jussieu.fr/lmd/licence/2022/ue/LU3IN029-2022oct/`~~

Conversion de $N = 687_d$ en hexadécimal avecc un tableau de puissances (exemple supplémentaire)

- On suppose que k vaut 3 et on rappelle que $16^3 = 4096$ et $16^2 = 256$.

16^3	16^2	16^1	16^0
a_3	a_2	a_1	a_0
?	?	?	?

- $N = 687_d$
- $687 < 16^3$
  $\rightarrow a_3 = 0$

Conversion de $N = 687_d$ en hexadécimal avecc un tableau de puissances (exemple supplémentaire)

- On suppose que k vaut 3 et on rappelle que $16^3 = 4096$ et $16^2 = 256$.

16^3	16^2	16^1	16^0
a_3	a_2	a_1	a_0
?	?	?	?

- $N = 687_d$
- $687 < 16^3$
  $\rightarrow a_3 = 0$

16^3	16^2	16^1	16^0
a_3	a_2	a_1	a_0
0	?	?	?

- $N = 687_d$
- $2 \times 16^2 \geq 687 < 3 \times 16^2$
  $\rightarrow a_2 = 2$

Conversion de $N = 687_d$ en hexadécimal avecc un tableau de puissances (exemple supplémentaire)

- On suppose que k vaut 3 et on rappelle que $16^3 = 4096$ et $16^2 = 256$.

16^3	16^2	16^1	16^0
a_3	a_2	a_1	a_0
?	?	?	?

16^3	16^2	16^1	16^0
a_3	a_2	a_1	a_0
0	?	?	?

16^3	16^2	16^1	16^0
a_3	a_2	a_1	a_0
0	2	?	?

- $N = 687_d$
- $687 < 16^3$
  $\rightarrow a_3 = 0$
- $N = 687_d$
- $2 \times 16^2 \geq 687 < 3 \times 16^2$
  $\rightarrow a_2 = 2$
- $N = 687 - 2 \times 16^2 = 175_d$
- $10 \times 16 < 175 < 11 \times 16$
  $\rightarrow a_1 = A$

Conversion de $N = 687_d$ en hexadécimal avecc un tableau de puissances (exemple supplémentaire)

- On suppose que k vaut 3 et on rappelle que $16^3 = 4096$ et $16^2 = 256$.

16^3	16^2	16^1	16^0
a_3	a_2	a_1	a_0
?	?	?	?

16^3	16^2	16^1	16^0
a_3	a_2	a_1	a_0
0	?	?	?

16^3	16^2	16^1	16^0
a_3	a_2	a_1	a_0
0	2	?	?

16^3	16^2	16^1	16^0
a_3	a_2	a_1	a_0
0	2	A	?

- $N = 687_d$
- $687 < 16^3$
  $\rightarrow a_3 = 0$
- $N = 687_d$
- $2 \times 16^2 \geq 687 < 3 \times 16^2$
  $\rightarrow a_2 = 2$
- $N = 687 - 2 \times 16^2 = 175_d$
- $10 \times 16 < 175 < 11 \times 16$
  $\rightarrow a_1 = A$
- $N = 175 - 10 \times 16^1 = 15_d$
  $\rightarrow a_0 = F$

Conversion de $N = 687_d$ en hexadécimal avecc un tableau de puissances (exemple supplémentaire)

- On suppose que k vaut 3 et on rappelle que $16^3 = 4096$ et $16^2 = 256$.

16^3	16^2	16^1	16^0
a_3	a_2	a_1	a_0
?	?	?	?

- $N = 687_d$
- $687 < 16^3$
  $\rightarrow a_3 = 0$

16^3	16^2	16^1	16^0
a_3	a_2	a_1	a_0
0	?	?	?

- $N = 687_d$
- $2 \times 16^2 \geq 687 < 3 \times 16^2$
  $\rightarrow a_2 = 2$

16^3	16^2	16^1	16^0
a_3	a_2	a_1	a_0
0	2	?	?

- $N = 687 - 2 \times 16^2 = 175_d$
- $10 \times 16 < 175 < 11 \times 16$
  $\rightarrow a_1 = A$

16^3	16^2	16^1	16^0
a_3	a_2	a_1	a_0
0	2	A	?

- $N = 175 - 10 \times 16^1 = 15_d$
  $\rightarrow a_0 = F$

16^3	16^2	16^1	16^0
a_3	a_2	a_1	a_0
0	2	A	F

- $687_d = 02AF_h$