# Mathématiques Discrètes

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ — LU2IN005

ANNÉE 2020-2021 — **Examen du 19 janvier 2021** — Durée : 1h30

## N° d'anonymat :

**Documents, calculettes et téléphones interdits.** La note (entre 0 et 20) est le minimum entre 20 et la somme des points obtenus (entre 0 et 23). **Le barême est donné à titre indicatif.**

**Exercice 1** (Total : 2½ points)

(1) (1 point) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 3x^2$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel $x$. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.

**Solution:** La fonction $f$ n'est pas injective : $f(-1) = f(1) = 3$. La fonction $f$ n'est pas surjective : les nombres négatifs n'ont aucun antécédent. La fonction $f$ n'étant pas injective, elle n'est pas bijective.

La fonction $g$ est n'est pas injective : $g(1) = g(1.5) = 1$. La fonction $g$ n'est pas surjective : 1.5 n'a aucun antécédent. La fonction $g$ n'est donc pas bijective.

(2) (1½ points) Soit $E$ un ensemble et $\preceq$ une relation d'ordre sur $E$. Montrer que $\preceq$ est un ordre bien fondé si et seulement si toute partie non vide de $E$ admet un élément minimal.

**Solution:**

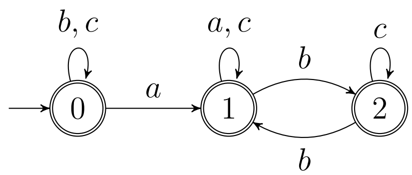
— ($\Rightarrow$) Par l'absurde. Soit $X$ une partie non vide de $E$. Si $X$ n'admet pas d'élément minimal alors pour tout $x \in X$ il existe $y \in X$ tel que $y \prec x$. Puisque $X \neq \emptyset$ on peut choisir un élément $x_0 \in X$ et il existe donc $x_1 \in X$ tel que $x_1 \prec x_0$. $x_1$ n'est pas minimal et on peut ainsi construire ¡¡de proche en proche¿¿ une suite infinie strictement décroissante, et $\preceq$ n'est donc pas bien fondée ce qui contredit l'hypothèse.

— ($\Leftarrow$) On montre que toute suite strictement décroissante est finie. Si toute partie non vide de $E$ admet un élément minimal, alors c'est en particulier le cas pour toute suite strictement décroissante. Soit $p \in \mathbb{N}$ l'indice de cet élément minimal, tous les éléments d'indice inférieur à $p$ lui sont supérieurs et, puisque la suite est strictement décroissante, $p$ est le plus grand indice de la suite qui est donc finie.

**Exercice 2** (Total : 13 points)

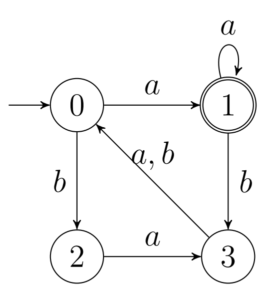
(1) (2 points) Construire un automate fini sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ reconnaissant le langage $\mathcal{L} = \{w \in A^* \mid \text{le nombre de } b \text{ séparant deux } a \text{ est pair}\}$.

**Solution:**

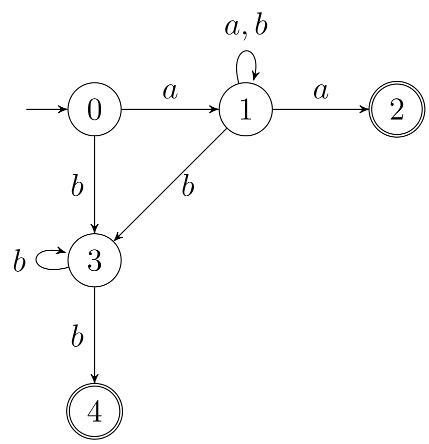



(2) On considère les deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ci-dessous :

$\mathcal{A}$ :




$\mathcal{B}$

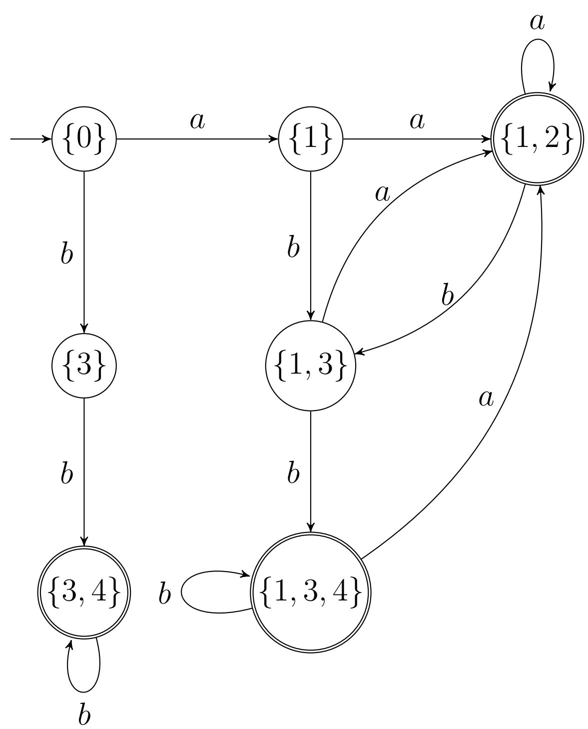



a. (½ point) L'automate $\mathcal{A}$ est-il déterministe ? complet ? L'automate $\mathcal{B}$ est-il déterministe ? complet ? Justifier.

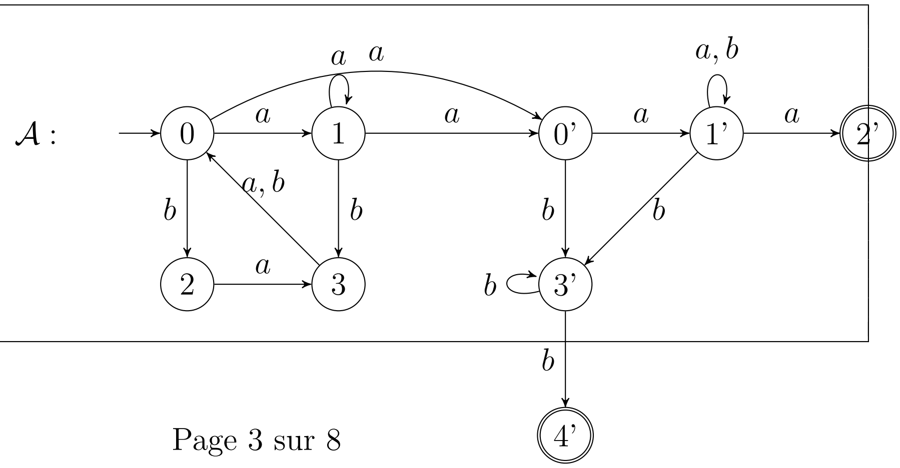
**Solution:** $\mathcal{A}$ est déterministe, mais n'est pas complet : il n'y a aucune transition étiquetée par $b$ à partir de l'état 2. $\mathcal{B}$ n'est pas déterministe : depuis l'état 1, il y a deux transitions étiquetée par $a$, et n'est pas complet : aucune transition ne sort de l'état 2.

b. (3 points) Si l'un ou les deux automates ci-dessus sont non-déterministes, le ou les déterminiser, en explicitant clairement votre construction.

**Solution:** Déterminisation de l'automate $\mathcal{B}$ :




c. (1½ points) Construire un automate reconnaissant le langage $L(\mathcal{A}).L(\mathcal{B})$.




**Solution:**

d. (3 points) En utilisant la méthode du cours, donner une expression rationnelle équivalente au langage $L(\mathcal{A})$.

**Solution:** On établit les équations :

$$
\begin{aligned}
L_0 &= aL_1 + bL_2 && (1)\\
L_1 &= aL_1 + bL_3 + \varepsilon && (2)\\
L_2 &= aL_3 && (3)\\
L_3 &= (a+b)L_0 && (4)
\end{aligned}
$$

On remplace (4) dans (2) et (4) dans (3) :

$$
\begin{aligned}
L_0 &= aL_1 + bL_2 && (1)\\
L_1 &= aL_1 + b(a+b)L_0 + \varepsilon && (2)\\
L_2 &= a(a+b)L_0 && (3)\\
L_3 &= (a+b)L_0 && (4)
\end{aligned}
$$

On applique le lemme d'Arden à (2) on obtient $L_1 = a^*b(a+b)L_0 + a^*$. On remplace ensuite (2) et (3) dans (1) :

$$
\begin{aligned}
L_0 &= a(a^*b(a+b)L_0 + a^*) + ba(a+b)L_0 && (1)\\
L_1 &= a^*b(a+b)L_0 + a^* && (2)\\
L_2 &= a(a+b)L_0 && (3)\\
L_3 &= (a+b)L_0 && (4)
\end{aligned}
$$

On applique le lemme d'Arden à (1) : $L_0 = [aa^*b(a+b) + ba(a+b)]^*aa^*$ ce qui donne $L(\mathcal{A}) = [aa^*b(a+b) + ba(a+b)]^*aa^*$

On rappelle que pour un mot $u$ sur un alphabet $A$, $|u|$ désigne la taille du $u$. On se place sur l'alphabet $A = \{a, b\}$. On définit le langage $\mathcal{L}_1 = \{u.a^n \mid u \in A^*, |u| = n\}$

(3) (½ point) Donner trois mots de $\mathcal{L}_1$.

**Solution:** Par exemple $aa$, $abaa$, $aabbaaaa$.

(4) (2 points) Le langage $\mathcal{L}_1$ est-il reconnaissable ? Démontrer précisément votre réponse.

**Solution:** Le langage $\mathcal{L}_1$ n'est pas reconnaissable. En effet, supposons qu'il existe un automate $\mathcal{A}$ tel que $L(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_1$. Soit $N$ le nombre d'états de $\mathcal{A}$, et considérons $w = b^N a^N \in \mathcal{L}_1$. Il existe alors une exécution acceptante de $\mathcal{A}$ sur $w$ : $s_0 \xrightarrow{b} s_1 \xrightarrow{b} \dots \xrightarrow{b} s_N \xrightarrow{a} \dots \xrightarrow{a} s_{2N}$ avec $s_0$ état initial et $s_{2N}$ état acceptant. Comme il n'y a que $N$ états distincts dans l'automate $\mathcal{A}$, il existe $i < j$ tels que $s_i = s_j$ et on peut réécrire l'exécution de l'automate sur $w$ : $s_0 \xrightarrow{b^p} s_i \xrightarrow{b^q} s_j \xrightarrow{b^r} s_N \xrightarrow{a^N} s_{2N}$, ou encore, puisque $s_i = s_j$, $s_0 \xrightarrow{b^p} s_i \xrightarrow{b^q} s_i \xrightarrow{b^r} s_N \xrightarrow{a^N} s_{2N}$, avec $p + q + r = N$ et $q > 0$.

On peut donc construire une autre exécution acceptante de $\mathcal{A}$ : $s_0 \xrightarrow{b^p} s_i \xrightarrow{b^p} s_i \xrightarrow{b^p} s_i \xrightarrow{b^r} s_N \xrightarrow{a^N} s_{2N}$. Cette exécution est d'étiquette $w' = b^{p+2q+r} a^N$. Or, $p+2q+r = N+q > N$. Supposons qu'il existe $u'$ tel que $|u'| = n$ et $w' = u'a^n$. Nécessairement, $n \leq N$ (car $N$ est le nombre maximal de $a$ dont on dispose à la fin du mot). On aurait donc $a^N = a^t a^n$ et $u' = b^{N+q} a^t$ avec $|u'| = n$. Mais $|u'| = N + q + t > N \geq n$ donc $w' \notin \mathcal{L}_1$. Or, $w' \in L(\mathcal{A})$. On a donc une contradiction.

Donc $\mathcal{L}_1$ n'est pas reconnaissable.

(5) (½ point) Donner un langage $\mathcal{L}$ reconnaissable tel que $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$.

**Solution:** $\mathcal{L}_1 \subseteq A^*$ et $A^*$ est reconnaissable.

**Exercice 3** (Total : 2½ points)

(1) (1 point) Pour $F$ et $G$ deux formules de la logique propositionnelle, on note $F \sim G$ si $F$ est sémantiquement équivalente à $G$ (on dit aussi $F$ est logiquement équivalente à $G$).

On pose $F = \neg p \to (q \wedge \neg q)$ et $G = p$. A-t-on $F \sim G$ ? Justifier précisément la réponse.

> **Solution:** Soit $I$ une interprétation. Alors, $I(F) = I(\neg p \to (q \wedge \neg q)) = \overline{I(\neg p)} + I(q \wedge \neg q) = \overline{\overline{I(p)}} + I(q).I(\neg q) = I(p) + I(q).\overline{I(q)} = I(p)$. Donc $F \sim G$.

(2) On note $F \models G$ si $G$ est conséquence sémantique de $F$.

a. (½ point) Donner la définition mathématique de $F \models G$.

> **Solution:** $F \models G$ si et seulement si, pour toute interprétation $I$, si $I(F) = 1$ alors $I(G) = 1$.

On étend la notion de conséquence sémantique aux ensembles de formules.

b. (1 point) On pose $\mathcal{F} = \{p \to \neg r, \neg r \to p, p \to q, \neg p\}$ et $G = \neg r \to q$. A-t-on $\mathcal{F} \models G$ ? Jusitifier précisément la réponse.

> **Solution:** Soit $I$ une interprétation telle que $I(p \to \neg r) = I(\neg r \to p) = I(p \to q) = I(\neg p) = 1$.
>
> Alors $I(p) = 0$, et $I(\neg r \to p) = \overline{I(\neg r)} + I(p) = 1$ implique que $\overline{\overline{I(r)}} + 0 = 1$ donc que $I(r) = 1$. Or, $I(\neg r \to q) = \overline{I(\neg r)} + I(q) = \overline{\overline{I(r)}} + I(q) = I(r) + I(q) = 1 + I(q) = 1$. Donc $\mathcal{F} \models G$.

**Exercice 4** (Total : 5 points)

(1) (½ point) Donner une forme normale conjonctive et un forme normale disjonctive de l'expression booléenne $\overline{x+y}+z$.

**Solution:** $\overline{x+y}+z = \underbrace{(\overline{x}\cdot\overline{y})+z}_{\text{FND}} = \underbrace{(z+\overline{x})\cdot(z+\overline{y})}_{\text{FNC}}$

(2) (1 point) Montrer que $(\overline{x+y}+z)\cdot(z+\overline{x})\cdot(x+y+z) = z$.

**Solution:**

$$\begin{array}{rl}
 & (\overline{x+y}+z)\cdot(z+\overline{x})\cdot(x+y+z) \\
= & (\overline{x}\cdot\overline{y}+z)\cdot(z\cdot x+z\cdot y+z\cdot z+\overline{x}\cdot x+\overline{x}\cdot y+\overline{x}\cdot z) \\
= & (\overline{x}\cdot\overline{y}+z)\cdot(z\cdot x+z\cdot y+z+\overline{x}\cdot y+\overline{x}\cdot z) \\
= & \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z\cdot x+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z\cdot y+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{x}\cdot y+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{x}\cdot z \\
 & +z\cdot z\cdot x+z\cdot z\cdot y+z\cdot z+z\cdot\overline{x}\cdot y+z\cdot\overline{x}\cdot z \\
= & \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z+z\cdot x+z\cdot y+z+z\cdot\overline{x}\cdot y+z\cdot\overline{x} \\
= & z\cdot(\overline{x}\cdot\overline{y}+x+y+1+\overline{x}\cdot y+\overline{x}) \\
= & z\cdot 1 = z
\end{array}$$

(3) La réserve de chocolat a disparu ... Elie, Léa et Emilio sont soupçonnés d'avoir mangé le chocolat. On suppose que :

— (*i*) Si Elie ou Léa (l'un des deux au moins) a mangé du chocolat alors Emilio aussi.

— (*ii*) Si Emilio n'a pas mangé de chocolat alors Léa n'en a pas mangé non plus.

— (*iii*) L'un des trois au moins a mangé du chocolat.

On désigne par les symboles $p$, $q$ et $r$ les propositions suivantes :

— $p$ : « *Léa a mangé du chocolat.* »

— $q$ : « *Elie a mangé du chocolat.* »

— $r$ : « *Emilio a mangé du chocolat.* »

a. (1 point) Formaliser les trois hypothèses ci-dessus par trois formules $F_1$, $F_2$ et $F_3$ de la logique des propositions.

**Solution:** $F_1 = (p \vee q) \to r$, $F_2 = \neg r \to \neg p$, $F_3 = p \vee q \vee r$

b. (1½ points) Soit $\mathbf{I}$ une interprétation quelconque. Exprimer $\mathbf{I}(F_1)$, $\mathbf{I}(F_2)$ et $\mathbf{I}(F_3)$ en fonction de $\mathbf{I}(p)$, $\mathbf{I}(q)$ et $\mathbf{I}(r)$.

**Solution:** $\mathbf{I}(F_1) = \overline{\mathbf{I}(p) + \mathbf{I}(q)} + \mathbf{I}(r)$, $\mathbf{I}(F_2) = \mathbf{I}(r) + \overline{\mathbf{I}(p)}$ et $\mathbf{I}(F_3) = \mathbf{I}(p) + \mathbf{I}(q) + \mathbf{I}(r)$.

c. (1 point) Que peut-on en déduire sur Emilio ? sur Léa ? sur Elie ?

**Solution:** En notant $x = \mathbf{I}(p)$, $y = \mathbf{I}(q)$ et $z = \mathbf{I}(r)$, les trois hypothèses permettent d'obtenir :

$$(\overline{x + y} + z) \cdot (z + \overline{x}) \cdot (x + y + z) = 1$$

et d'après la question précédente on peut en déduire que $z = \mathbf{I}(r) = 1$. On peut donc seulement déduire que Emilio a mangé du chocolat mais on ne peut rien déduire sur Léa et Elie.