

EXERCICE 23

Logique - Connecteurs

quelles que soient les propositions \mathbf{P} \mathbf{Q} ,
 $(\neg\neg\mathbf{P} \Rightarrow (\neg(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q})))$

Montrons $\neg\neg\mathbf{P} \Rightarrow (\neg(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q}))$ (1)

démonstration

Supposons que $\neg\neg\mathbf{P}$ (h1)

Montrons $\neg(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q})$ (2)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $\neg(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$ (h2)

Montrons $\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q}$ (3)

($\wedge I$)

Montrons \mathbf{P} (4)

(A)

Supposons que $\neg\mathbf{P}$ (h3)

Montrons \perp (5)

($\neg E$)

Montrons $\neg\mathbf{P}$ (6)

d'après (h3)

Montrons $\neg\neg\mathbf{P}$ (7)

d'après (h1)

Montrons $\neg\mathbf{Q}$ (8)

($\neg I$)

Supposons que \mathbf{Q} (h4)

Montrons \perp (9)

($\neg E$)

Montrons $\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$ (10)

($\wedge I$)

Montrons \mathbf{P} (11)

(A)

Supposons que $\neg\mathbf{P}$ (h5)

Montrons \perp (12)

($\neg E$)

Montrons $\neg\mathbf{P}$ (13)

d'après (h5)

Montrons $\neg\neg\mathbf{P}$ (14)

d'après (h1)

Montrons Q (15)

d'après (h4)

Montrons $\neg (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$ (16)

d'après (h2)