

## EXERCICE 41

### Logique - Connecteurs

*quelles que soient* les propositions **A** **B**,  
 $((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)))$

---

Montrons ( $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$ )  $\Leftrightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$  (1)

( $\Leftrightarrow I$ )

Supposons que  $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$  (h1)

Montrons ( $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ )  $\Rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$  (2)

( $\Rightarrow I$ )

Supposons que  $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$  (h2)

Montrons  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$  (3)

( $\wedge E$ )

Montrons  $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$  (4)

d'après (h2)

Supposons que  $\mathbf{A}$  (h3)

Montrons  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$  (5)

( $\wedge I$ )

Montrons  $\mathbf{A}$  (6)

d'après (h3)

Montrons  $\mathbf{B}$  (7)

( $\Leftrightarrow Eg$ )

Montrons  $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$  (8)

d'après (h1)

Montrons  $\mathbf{A}$  (9)

d'après (h3)

Supposons que  $\mathbf{B}$  (h4)

Montrons  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$  (10)

( $\wedge I$ )

Montrons  $\mathbf{A}$  (11)

( $\Leftrightarrow Ed$ )

Montrons  $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$  (12)

d'après (h1)

Montrons  $\mathbf{B}$  (13)

d'après (h4)

Montrons  $\mathbf{B}$  (14)

d'après (h4)

Supposons que ( $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ )  $\Rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$  (h5)

Méthode :  $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B} \Leftrightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$

*Montrons  $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$*  (15)

( $\Leftrightarrow I$ )

*Supposons que  $\mathbf{A}$*  (h6)

*Montrons  $\mathbf{B}$*  (16)

( $\wedge Ed$ )

*Montrons  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$*  (17)

( $\Rightarrow E$ )

*Montrons  $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$*  (18)

( $\vee Ig$ )

*Montrons  $\mathbf{A}$*  (19)

*d'après (h6)*

*Montrons ( $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ ) \Rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})* (20)

*d'après (h5)*

*Supposons que  $\mathbf{B}$*  (h7)

*Montrons  $\mathbf{A}$*  (21)

( $\wedge Eg$ )

*Montrons  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$*  (22)

( $\Rightarrow E$ )

*Montrons  $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$*  (23)

( $\vee Id$ )

*Montrons  $\mathbf{B}$*  (24)

*d'après (h7)*

*Montrons ( $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ ) \Rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})* (25)

*d'après (h5)*