

EXERCICE 31

Logique - Quantificateurs

quel que soit le prédicat F,

$$(((\exists y, \forall x, (F(x) \Leftrightarrow F(y))) \wedge (\exists x, F(x))) \Rightarrow (\forall x, F(x)))$$

Montrons $((\exists y, \forall x, (\mathbf{F}(x) \Leftrightarrow \mathbf{F}(y))) \wedge (\exists x, \mathbf{F}(x))) \Rightarrow (\forall x, \mathbf{F}(x))$ (1)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $(\exists y, \forall x, (\mathbf{F}(x) \Leftrightarrow \mathbf{F}(y))) \wedge (\exists x, \mathbf{F}(x))$ (h1)

Montrons $\forall x, \mathbf{F}(x)$ (2)

($\forall I$)

Soit l'élément x

Montrons $\mathbf{F}(x)$ (3)

($\exists E$)

Montrons $\exists x_0, \forall m, (\mathbf{F}(m) \Leftrightarrow \mathbf{F}(x_0))$ (4)

($\wedge Eg$)

Montrons $(\exists y, \forall x, (\mathbf{F}(x) \Leftrightarrow \mathbf{F}(y))) \wedge (\exists x, \mathbf{F}(x))$ (5)

d'après (h1)

Soit l'élément x_0

Supposons que $\forall m, (\mathbf{F}(m) \Leftrightarrow \mathbf{F}(x_0))$ (h2)

Montrons $\mathbf{F}(x)$ (6)

($\exists E$)

Montrons $\exists x_1, \mathbf{F}(x_1)$ (7)

($\wedge Ed$)

Montrons $(\exists y, \forall x, (\mathbf{F}(x) \Leftrightarrow \mathbf{F}(y))) \wedge (\exists x, \mathbf{F}(x))$ (8)

d'après (h1)

Soit l'élément x_1

Supposons que $\mathbf{F}(x_1)$ (h3)

Montrons $\mathbf{F}(x)$ (9)

($\Leftrightarrow Ed$)

Montrons $\mathbf{F}(x) \Leftrightarrow \mathbf{F}(x_0)$ (10)

($\forall E$)

Montrons $\forall m, (\mathbf{F}(m) \Leftrightarrow \mathbf{F}(x_0))$ (11)

d'après (h2)

Montrons $\mathbf{F}(x_0)$ (12)

($\Leftrightarrow Eg$)

Montrons $\mathbf{F}(x_1) \Leftrightarrow \mathbf{F}(x_0)$ (13)

($\forall E$)

Montrons $\forall m, (\mathbf{F}(m) \Leftrightarrow \mathbf{F}(x_0))$ (14)
d'après (h2)

Montrons $\mathbf{F}(x_1)$ (15)
d'après (h3)