LICENCE Structures Discrètes

Examen 12 Septembre 2005. Durée 2 heures

Documents interdits

SVP Mettez votre nom sur la copie, cachetez-la, puis écrivez votre numéro d'anonymat au–dessus, et reportez ce numéro d'anonymat sur toutes les copies intercalaires ; ensuite gardez le papier donnant votre numéro d'anonymat, vous en aurez besoin pour consulter votre copie – Merci

Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs - tout téléphone visible sera confisqué

Exercice 1 Rappelons que l'ensemble AB des arbres binaires étiquetés sur l'alphabet A est défini inductivement par
(B) $\emptyset \in AB$ (il s'agit de l'arbre vide),
(I) $g, d \in AB \Longrightarrow \forall a \in A$, $(a, g, d) \in AB$ (l'arbre de racine a, de fils gauche g et de fils droit d).

Donner une définition inductive du parcours postfixe d'un arbre binaire. $\diamondsuit$

Exercice 2 Soit $F_0 = \{a\}$, $F_1 = \{s\}$, $F = F_0 \bigcup F_1$. L'ensemble T des termes construits sur F est $T = \{a, s\big(a\big), s\big(s\big(a\big)\big), \ldots\}$.

Posons $V = \mathbb{N}$. Soit $h\colon F_0 \longrightarrow V$, et $h_s\colon V \longrightarrow V$; il existe une et une seule fonction h^* de T dans V telle que:
(B') Si $t \in F_0$, $h^*(t) = h(t)$,
(I') Si $t = s\big(t_1\big)$, $h^*(t) = h_s(h^*(t_1))$.

Calculer h^* si $h(a) = 1$, $h_s(n) = 3 + n$. $\diamondsuit$

Exercice 3 Donnez un automate déterniniste, complet et minimal reconnaissant le langage $L = \Big((a+b)^2\Big)^*$. $\diamondsuit$

Exercice 4 Soit $A = \{a, b\}$; Soient L_1 le langage comprenant tous les mots contenant un nombre pair de b et L_2 le langage comprenant tous les mots contenant un nombre impair de a.

1. Donner pour chaque L_i un automate déterministe complet A_i reconnaissant L_i et exprimer L_i sous forme d'expression rationnelle.
2. Construire à partir des A_i un automate déterministe reconnaissant $L_1 \cap L_2$. $\diamondsuit$

Exercice 5 1) Traduire l'ensemble d'énoncés suivants en formules de *Tarski's World* . On notera F_i la formule traduisant $\mathbf{F}_i$, pour $i = 1, \ldots, 4$.
$\mathbf{F}_1$: *Tout cube est à droite de tout tétraèdre.*
$\mathbf{F}_2$: *Il n'y a pas de dodécaèdre.*
$\mathbf{F}_3$: *Il y a exactement deux cubes.*
$\mathbf{F}_4$: *Un objet est à droite d'un autre objet uniquement si le second est derrière le premier.*

2) L'ensemble $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ de formules obtenu est-il satisfaisable ? Justifiez votre réponse en dessinant une grille en 2D qui représente un monde qui en est un modèle.

3) L'ensemble de formules $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ est-il T–valide ? Justifiez votre réponse en dessinant une grille en 2D qui représente un monde qui est un contre-exemple.

(On rappelle les prédicats de *Tarski's World* : Tet(x) ("x est un tétraèdre"), Cube(x) ("x est un cube"), Dodec(x) ("x est un dodécaèdre"), BackOf(x,y) ("x est derrière y"), RightOf(x,y) ("x est à droite de y").) $\diamondsuit$

1.

(B) $post(\emptyset) = \varepsilon$

(I) $post(\ (a, g, d)\ ) = post(g)post(d)a.$

2. Montrons par induction que $h^*(s^n(a)) = 3n + 1$.

(B) si $n = 0$, $h^*(s^0(a)) = h^*(a) = h(a) = 1$

(I) supposons $h^*(s^n(a)) = 3n+1$, et calculons $h^*(s^{n+1}(a)) = h_s((h^*(s^n(a)))) = 3+3n+1 = 3(n+1)+1$, d'où le résultat.

3.

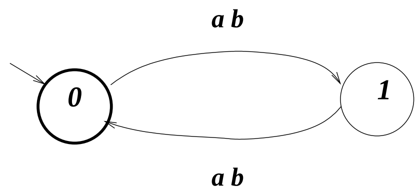

Figure 1 Automate reconnaissant $\left((a+b)^2\right)^*$.

4.

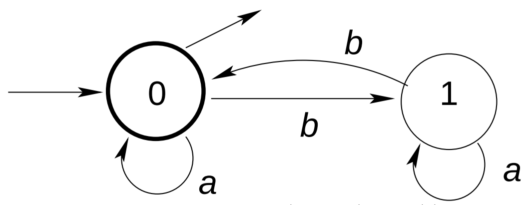

Figure 2 $L_1 = (a + (ba^*b))^*$

Les équations

$$x_{0,0} = ax_{0,0} + bx_{1,0} + \varepsilon$$
$$x_{1,0} = ax_{1,0} + bx_{0,0}$$

d'où $x_{1,0} = a^*bx_{0,0}$, puis en reportant dans la première équation $x_{0,0} = ax_{0,0} + ba^*bx_{0,0} + \varepsilon$ et

$L_1 = x_{0,0} = (a + (ba^*b))^*$

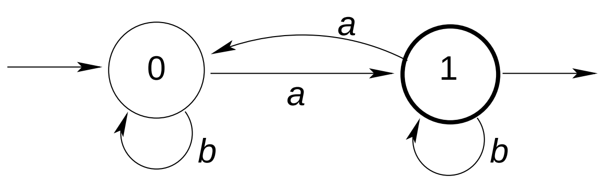

Figure 3 $L_2 = (b + ab^*a)^*ab^*$

Les équations

$$x_{0,1} = bx_{0,1} + ax_{1,1}$$
$$x_{1,1} = bx_{1,1} + ax_{0,1} + \varepsilon$$

d'où

$x_{1,1} = b^*(ax_{0,1}+\varepsilon)$, puis en reportant dans la première équation $x_{0,1} = ax_{0,0}+ba^*bx_{0,0}+\varepsilon$ et

$L_2 = x_{0,1} = (b + ab^*a)^*ab^*$

Pour obtenir les automates de la question 2 , on construit l'automate produit (les états sont les couples de $S_1 \times S_2$ Pour l'intersection on ne garde comme états terminaux que les couples formés d'un état terminal de A_1 et d'un état terminal de A_2, c'est-à-dire ici uniquement l'état $0, 1$.

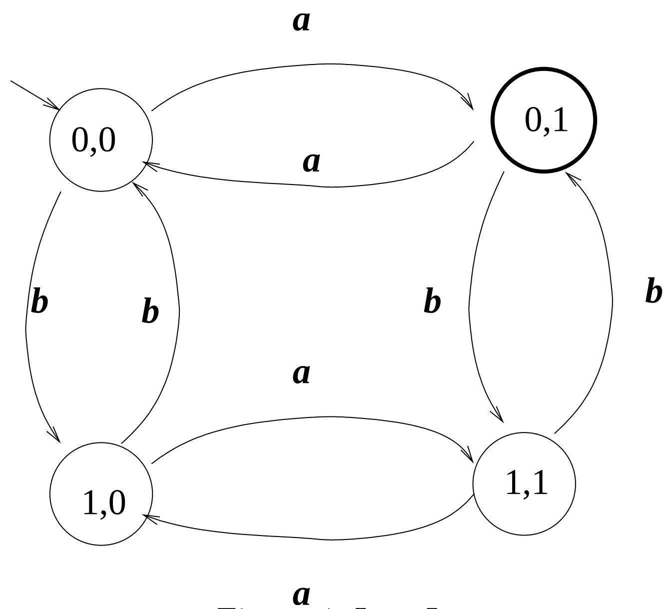

Figure 4 $L_1 \cap L_2$

5.

1) F_1: $\forall x \forall y ((Cube(x) \wedge Tet(y)) \longrightarrow RightOf(x,y))$

F_2: $\forall x \neg Dodec(x)$

F_3: $\exists y \exists x \left((Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge \neg(x = y)) \wedge \forall z (cube(z) \longrightarrow (z = x) \vee (z = y))\right)$.

F_4: $\forall x \forall y (RightOf(x,y) \longrightarrow BackOf(y,x))$

2) et 3)

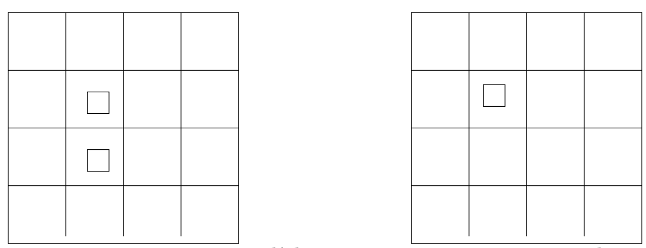

Figure 5 Un modèle et un contre-exemple