

EXERCICE 29

Logique - Quantificateurs

quelle que soit la proposition **P**,
quel que soit le prédicat **Q**,

$$((\forall x, (P \vee Q(x))) \Leftrightarrow (P \vee (\forall x, Q(x))))$$

Montrons $(\forall x, (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(x))) \Leftrightarrow (\mathbf{P} \vee (\forall x, \mathbf{Q}(x)))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $\forall x, (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(x))$ (h1)

Montrons $\mathbf{P} \vee (\forall x, \mathbf{Q}(x))$ (2)

(TE)

Supposons que \mathbf{P} (h2)

Montrons $\mathbf{P} \vee (\forall x, \mathbf{Q}(x))$ (3)

($\forall Ig$)

Montrons \mathbf{P} (4)

d'après (h2)

Supposons que $\neg \mathbf{P}$ (h3)

Montrons $\mathbf{P} \vee (\forall x, \mathbf{Q}(x))$ (5)

($\forall Id$)

Montrons $\forall x, \mathbf{Q}(x)$ (6)

($\forall I$)

Soit l'élément x

Montrons $\mathbf{Q}(x)$ (7)

($\forall E$)

Montrons $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(x)$ (8)

($\forall E$)

Montrons $\forall x, (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(x))$ (9)

d'après (h1)

Supposons que \mathbf{P} (h4)

Montrons $\mathbf{Q}(x)$ (10)

($\perp E$)

Montrons \perp (11)

($\neg E$)

Montrons \mathbf{P} (12)

d'après (h4)

Montrons $\neg \mathbf{P}$ (13)

d'après (h3)

Supposons que $\mathbf{Q}(x)$ (h5)

Montrons $\mathbf{Q}(x)$ (14)

d'après (h5)

Supposons que $\mathbf{P} \vee (\forall x, \mathbf{Q}(x))$ (h6)

Montrons $\forall x, (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(x))$ (15)

($\forall E$)

Montrons $\mathbf{P} \vee (\forall x, \mathbf{Q}(x))$ (16)

d'après (h6)

Supposons que \mathbf{P} (h7)

Montrons $\forall x, (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(x))$ (17)

($\forall I$)

Soit l'élément x

Montrons $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(x)$ (18)

($\vee Ig$)

Montrons \mathbf{P} (19)

d'après (h7)

Supposons que $\forall x, \mathbf{Q}(x)$ (h8)

Montrons $\forall x, (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(x))$ (20)

($\forall I$)

Soit l'élément x

Montrons $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}(x)$ (21)

($\vee Id$)

Montrons $\mathbf{Q}(x)$ (22)

($\forall E$)

Montrons $\forall x, \mathbf{Q}(x)$ (23)

d'après (h8)