

## EXERCICE 12

### Logique - Quantificateurs

*quels que soient* les prédictats  $F$   $G$ ,  
*quelle que soit* la constante  $a$ ,

$$(( (\forall x, F(x)) \Rightarrow G(a)) \Leftrightarrow \exists x, (F(x) \Rightarrow G(a)))$$

---

*Soit* la constante  $a$

Montrons  $((\forall x, F(x)) \Rightarrow G(a)) \Leftrightarrow \exists x, (F(x) \Rightarrow G(a))$  (1)

( $\Leftrightarrow I$ )

Supposons que  $(\forall x, F(x)) \Rightarrow G(a)$  (h1)

Montrons  $\exists x, F(x) \Rightarrow G(a)$  (2)

( $\exists E$ )

Supposons que  $\exists x, \neg(F(x))$  (h2)

Montrons  $\exists x, F(x) \Rightarrow G(a)$  (3)

( $\exists E$ )

Montrons  $\exists x, \neg(F(x))$  (4)

d'après (h2)

*Soit* l'élément  $x$

Supposons que  $\neg(F(x))$  (h3)

Montrons  $\exists x, F(x) \Rightarrow G(a)$  (5)

( $\exists E$ )

Montrons  $\exists x, \neg(F(x))$  (6)

d'après (h2)

*Soit* l'élément  $x_0$

Supposons que  $\neg(F(x_0))$  (h4)

Montrons  $\exists x, F(x) \Rightarrow G(a)$  (7)

( $\exists I$ )

Supposons que  $F(x_0)$  (h5)

Montrons  $G(a)$  (8)

( $\perp E$ )

Montrons  $\perp$  (9)

( $\neg E$ )

Montrons  $F(x_0)$  (10)

d'après (h5)

Montrons  $\neg(F(x_0))$  (11)

d'après (h4)

Supposons que  $\neg(\exists x, \neg(F(x)))$  (h6)

Montrons  $\exists x, F(x) \Rightarrow G(a)$  (12)

( $\exists I$ )

Supposons que  $\mathbf{F}(\alpha)$  (h7)

Montrons  $\mathbf{G}(\alpha)$  (13)

( $\Rightarrow E$ )

Montrons  $\forall x, \mathbf{F}(x)$  (14)

d'après le lemme 27 de la section 'De Morgan'

Montrons  $\neg(\exists x, \neg(\mathbf{F}(x)))$  (15)

d'après (h6)

Montrons  $(\forall x, \mathbf{F}(x)) \Rightarrow \mathbf{G}(\alpha)$  (16)

d'après (h1)

Supposons que  $\exists x, \mathbf{F}(x) \Rightarrow \mathbf{G}(\alpha)$  (h8)

Montrons  $(\forall x, \mathbf{F}(x)) \Rightarrow \mathbf{G}(\alpha)$  (17)

( $\Rightarrow I$ )

Supposons que  $\forall x, \mathbf{F}(x)$  (h9)

Montrons  $\mathbf{G}(\alpha)$  (18)

( $\exists E$ )

Montrons  $\exists x, \mathbf{F}(x) \Rightarrow \mathbf{G}(\alpha)$  (19)

d'après (h8)

Soit l'élément  $x$

Supposons que  $\mathbf{F}(x) \Rightarrow \mathbf{G}(\alpha)$  (h10)

Montrons  $\mathbf{G}(\alpha)$  (20)

( $\Rightarrow E$ )

Montrons  $\mathbf{F}(x)$  (21)

( $\forall E$ )

Montrons  $\forall x, \mathbf{F}(x)$  (22)

d'après (h9)

Montrons  $\mathbf{F}(x) \Rightarrow \mathbf{G}(\alpha)$  (23)

d'après (h10)