

Cours 2

Règles de déduction : connecteurs

Logique – Licence Informatique



Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 $F_1 \Rightarrow F_2$

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :

- ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »

$$F_1 \Rightarrow F_2$$

« vraie » lorsque :

F_1 désigne l'énoncé : « *la figure f est un carré* »

F_2 désigne l'énoncé : « *la figure f a 4 côtés de longueurs égales* »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :

- ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »

$$F_1 \Rightarrow F_2$$

« vraie » lorsque :

F_1 désigne l'énoncé : « *la figure f est un carré* »

F_2 désigne l'énoncé : « *la figure f a 4 côtés de longueurs égales* »

« fausse » lorsque :

F_1 désigne l'énoncé : « *la figure f est un triangle* »

F_2 désigne l'énoncé : « *la figure f a 4 côtés de longueurs égales* »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :

- ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »

$$F_1 \Rightarrow F_2$$

« vraie » lorsque :

F_1 désigne l'énoncé : « *la figure f est un carré* »

F_2 désigne l'énoncé : « *la figure f a 4 côtés de longueurs égales* »

« fausse » lorsque :

F_1 désigne l'énoncé : « *la figure f est un triangle* »

F_2 désigne l'énoncé : « *la figure f a 4 côtés de longueurs égales* »

dépend de l'interprétation des symboles utilisés dans les énoncés :
formules contingentes

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :

- ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
- ▶ toujours « vraies »

$$(F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)) \Rightarrow F_2$$

« vraie » quels que soient les énoncés désignés par F_1 et F_2

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :

- ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
- ▶ toujours « vraies »

$$(F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)) \Rightarrow F_2$$

« vraie » quels que soient les énoncés désignés par F_1 et F_2

F_1 désigne l'énoncé : « *il pleut* »

F_2 désigne l'énoncé : « *je prends mon parapluie* »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :

- ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
- ▶ toujours « vraies »

$$(F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)) \Rightarrow F_2$$

« vraie » quels que soient les énoncés désignés par F_1 et F_2

F_1 désigne l'énoncé : « *n est le carré d'un entier relatif* »

F_2 désigne l'énoncé : « *n est un nombre positif ou nul* »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :

- ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
- ▶ toujours « vraies »
- ▶ toujours « fausses »

$$F \wedge \neg F$$

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :

- ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
- ▶ toujours « vraies »
- ▶ toujours « fausses »

$$F \wedge \neg F$$

lorsqu'une formule est toujours fausse sa négation est toujours vraie

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de**systèmes de déduction**
 - ▶ ensemble de règles logiques de raisonnement permettant de**prouver une formule**

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de**systèmes de déduction**
 - ▶ ensemble de règles logiques de raisonnement permettant de**prouver une formule**
 - règles qui ne dépendent pas de l'interprétation des formules

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de**systèmes de déduction**
 - ▶ ensemble de règles logiques de raisonnement permettant de**prouver une formule**
 - règles qui ne dépendent pas de l'interprétation des formules
 - règles qui définissent l'ensemble des raisonnements acceptés

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
 - ▶ ensemble de règles logiques de raisonnement permettant de **prouver une formule**
 - ▶ un système de déduction permet de caractériser un sous-ensemble des formules logiques : **formules prouvables**

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
- il existe plusieurs systèmes de déduction

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
- il existe plusieurs systèmes de déduction
 - ▶ **Déduction Naturelle** (Gerhard Gentzen, 1934)

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
- il existe plusieurs systèmes de déduction
 - ▶ **Déduction Naturelle** (Gerhard Gentzen, 1934)
- il existe plusieurs formalismes pour écrire des preuves

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
- il existe plusieurs systèmes de déduction
 - ▶ **Déduction Naturelle** (Gerhard Gentzen, 1934)
- il existe plusieurs formalismes pour écrire des preuves
 - ▶ des emboîtements de boîtes
 - ★ preuves à /a Lamport – preuves structurées
How to write a 21st century proof ? (Leslie Lamport, 2011)
 - ★ preuves vérifiables (Isabelle/Isar-HOL)

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
- il existe plusieurs systèmes de déduction
 - ▶ **Déduction Naturelle** (Gerhard Gentzen, 1934)
- il existe plusieurs formalismes pour écrire des preuves
 - ▶ des emboîtements de boîtes
 - ★ preuves à /a Lamport – preuves structurées
How to write a 21st century proof ? (Leslie Lamport, 2011)
 - ★ preuves vérifiables (Isabelle/Isar-HOL)
 - ▶ il en existe d'autres ... (arbres d'inférence, etc)

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape *i* d'une preuve (boîte numéro *i*) :

(i) supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
 montrons F
 ... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
(i) CQFD (Nom)

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
 montrons F
 ... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
 $\langle i \rangle$ CQFD (Nom)

- ▶ correspond à l'application d'une règle logique

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
montrons F
 ... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
 $\langle i \rangle$ CQFD (Nom)

- ▶ correspond à l'application d'une règle logique
- ▶ (Nom) : nom de la règle logique utilisée pour montrer que F est prouvable avec les hypothèses $h_1 : F_1, \dots, h_n : F_n$ de la boîte à partir de la séquence de sous-boîtes donnée

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
montrons F
 ... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
 $\langle i \rangle$ CQFD (Nom)

- ▶ correspond à l'application d'une règle logique
- ▶ (Nom) : nom de la règle logique utilisée pour montrer que F est prouvable avec les hypothèses $h_1 : F_1, \dots, h_n : F_n$ de la boîte à partir de la séquence de sous-boîtes donnée
- ▶ plusieurs boîtes d'une même preuve peuvent avoir le même numéro, mais toutes les sous-boîtes d'une boîte de numéro i ont un numéro strictement supérieur à i

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
 montrons F
 ... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
 $\langle i \rangle$ CQFD (Nom)

- ▶ h_j : label / nom de l'hypothèse

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
montrons F
 ... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
 $\langle i \rangle$ CQFD (Nom)

- ▶ h_j : label / nom de l'hypothèse
- ▶ l'ordre dans lequel apparaissent les hypothèses d'une boîte n'a pas d'importance (ensemble non ordonné d'hypothèses)

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
montrons F
 ... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
 $\langle i \rangle$ CQFD (Nom)

- ▶ h_j : label / nom de l'hypothèse
- ▶ l'ordre dans lequel apparaissent les hypothèses d'une boîte n'a pas d'importance (ensemble non ordonné d'hypothèses)
- ▶ plusieurs hypothèses différentes d'une même preuve peuvent avoir le même nom, mais le nom d'une hypothèse introduite dans une boîte de numéro i ne peut plus être utilisé pour nommer une hypothèse dans toutes les sous-boîtes de la boîte i

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
montrons F
 ... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
 $\langle i \rangle$ CQFD (Nom)

- ▶ h_j : label / nom de l'hypothèse
- ▶ l'ordre dans lequel apparaissent les hypothèses d'une boîte n'a pas d'importance (ensemble non ordonné d'hypothèses)
- ▶ plusieurs hypothèses différentes d'une même preuve peuvent avoir le même nom, mais le nom d'une hypothèse introduite dans une boîte de numéro i ne peut plus être utilisé pour nommer une hypothèse dans toutes les sous-boîtes de la boîte i
- ▶ toutes les hypothèses d'une boîte peuvent être utilisées dans chacune de ses sous-boîtes (sauf mention explicite)

Axiome (Ax)

ce que l'on cherche à prouver est en hypothèse :

- $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : A$
montrons A
- $\langle i \rangle$ CQFD (Ax avec h)

Axiome (Ax)

ce que l'on cherche à prouver est en hypothèse :

- $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : A$
montrons A
- $\langle i \rangle$ CQFD (Ax avec h)

l'hypothèse $h : A$ peut également être supposée dans une boîte $\langle j \rangle$ dont cette boîte $\langle i \rangle$ est une sous-boîte

- $\langle j \rangle$ supposons $h'_1 : A'_1, \dots, h'_k : A'_k, h : A$
montrons B
...
- $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A
- $\langle i \rangle$ CQFD (Ax avec h)
...
- $\langle j \rangle$ CQFD (Nom)

Règle d'affaiblissement (Af)

si A est prouvable à partir des hypothèses de A_1, \dots, A_n

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n,$

$\langle i+1 \rangle$ montrons A

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$

Règle d'affaiblissement (Af)

si A est prouvable à partir des hypothèses de A_1, \dots, A_n alors A est encore prouvable si on ajoute une hypothèse B

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : B$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons A
sans utiliser h

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (Af)

Règle d'affaiblissement (Af)

si A est prouvable à partir des hypothèses de A_1, \dots, A_n alors A est encore prouvable si on ajoute une hypothèse B

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : B$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons A
sans utiliser h

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (Af)

- utile dans certaines situations, par exemple lorsque l'on veut « réutiliser » une preuve existante qui utilise seulement un sous-ensemble des hypothèses disponibles

Règles d'introduction (I) et d'élimination (E)

- pour les constantes **true** et **false** :
- pour les connecteurs logiques (\Rightarrow , \wedge , \vee et \neg) :

Règles d'introduction (I) et d'élimination (E)

- pour les constantes **true** et **false** :
 - ▶ règles d'introduction
 - ★ permettent de prouver la formule constante

- pour les connecteurs logiques (\Rightarrow , \wedge , \vee et \neg) :
 - ▶ règles d'introduction
 - ★ permettent de prouver une formule dont la racine de l'arbre de syntaxe est le connecteur logique considéré

Règles d'introduction (I) et d'élimination (E)

- pour les constantes **true** et **false** :
 - ▶ règles d'introduction
 - ★ permettent de prouver la formule constante
 - ▶ règles d'élimination
 - ★ permettent de prouver une formule en **utilisant une hypothèse** correspondant à la formule constante
- pour les connecteurs logiques (\Rightarrow , \wedge , \vee et \neg) :
 - ▶ règles d'introduction
 - ★ permettent de prouver une formule dont la racine de l'arbre de syntaxe est le connecteur logique considéré
 - ▶ règles d'élimination
 - ★ permettent de prouver une formule en **utilisant une hypothèse** correspondant à une formule dont la racine de l'arbre de syntaxe est le connecteur logique considéré

Constante true

- introduction : permet de prouver la formule **true**
 - ▶ c'est un axiome

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons true
 $\langle i \rangle$ CQFD (I_{\top})

Constante true

- introduction : permet de prouver la formule **true**
 - ▶ c'est un axiome

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons true
 $\langle i \rangle$ CQFD (I_{\top})

- élimination : permet d'utiliser l'hypothèse ***h* : true**
 - ▶ pas de règle d'élimination pour **true**
 - ★ on ne peut rien déduire de l'hypothèse ***h* : true**

Constante false

- introduction : permet de prouver la formule **false**
 - ▶ pas de règle d'introduction : la formule **false** ne doit pas être prouvable (sans hypothèses contradictoires) !

Constante false

- introduction : permet de prouver la formule **false**
 - ▶ pas de règle d'introduction : la formule **false** ne doit pas être prouvable (sans hypothèses contradictoires) !
- élimination : permet d'utiliser l'hypothèse ***h* : false**
 - ▶ on peut **tout** déduire de l'hypothèse ***h* : false**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : \text{false}$
montrons B
 $\langle i \rangle$ CQFD (E_\perp avec h)

Implication : introduction (I_{\Rightarrow})

- pour prouver $A \Rightarrow B$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \Rightarrow B$

$\langle i \rangle$

Implication : introduction (I_{\Rightarrow})

- pour prouver $A \Rightarrow B$ il suffit de supposer A et de prouver B

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \Rightarrow B$

$\langle i+1 \rangle$ supposons $h : A$
montrons B

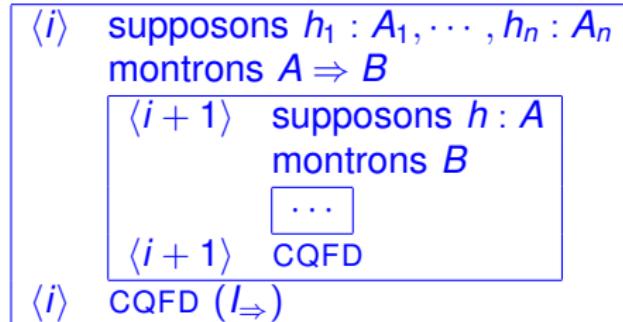
...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (I_{\Rightarrow})

Implication : introduction (I_{\Rightarrow})

- pour prouver $A \Rightarrow B$ il suffit de supposer A et de prouver B



- les formules A et B de la boîte $\langle i+1 \rangle$ sont des sous-formules de la formule $A \Rightarrow B$ de la boîte $\langle i \rangle$
 - une fois que l'on a choisi d'appliquer cette règle, le contenu de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$

Implication : élimination (E_{\Rightarrow})

- *Modus-Ponens* : si à partir des hypothèses A_1, \dots, A_n on peut prouver $A \Rightarrow B$ et A

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \Rightarrow B$

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i+2 \rangle$ montrons A

...

$\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$

Implication : élimination (E_{\Rightarrow})

- *Modus-Ponens* : si à partir des hypothèses A_1, \dots, A_n on peut prouver $A \Rightarrow B$ et A alors la formule B est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons B

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \Rightarrow B$

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i+2 \rangle$ montrons A

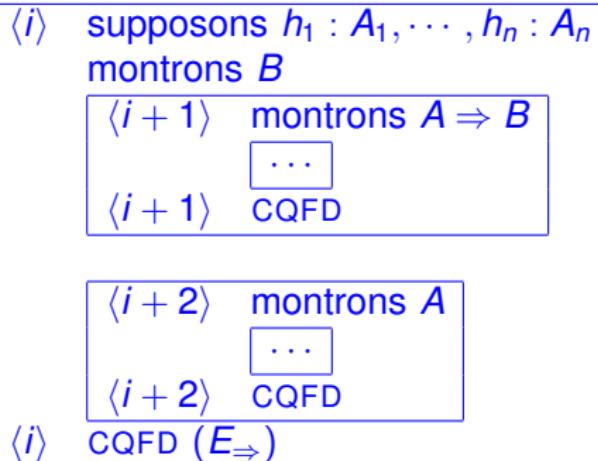
...

$\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_{\Rightarrow})

Implication : élimination (E_{\Rightarrow})

- *Modus-Ponens* : si à partir des hypothèses A_1, \dots, A_n on peut prouver $A \Rightarrow B$ et A alors la formule B est prouvable



- ▶ la formule A des boîtes $\langle i+1 \rangle$ et $\langle i+2 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule B de la boîte $\langle i \rangle$
 - ★ appliquer cette règle nécessite de choisir/trouver une formule A telle que les formules A et $A \Rightarrow B$ soient prouvables

Conjonction : introduction (I_{\wedge})

- pour prouver $A \wedge B$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \wedge B$

$\langle i \rangle$

Conjonction : introduction (I_{\wedge})

- pour prouver $A \wedge B$ il suffit de prouver A et de prouver B

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$

montrons $A \wedge B$

$\langle i+1 \rangle$ montrons A

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i+2 \rangle$ montrons B

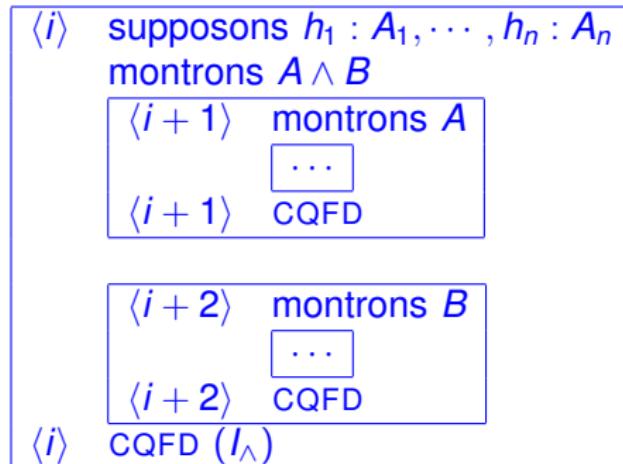
...

$\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (I_{\wedge})

Conjonction : introduction (I_{\wedge})

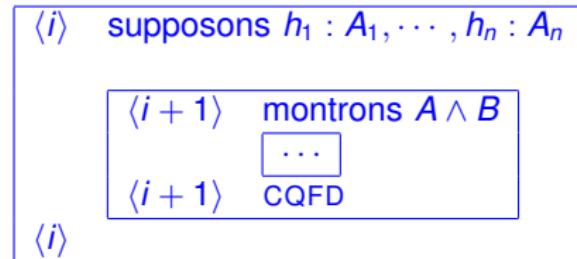
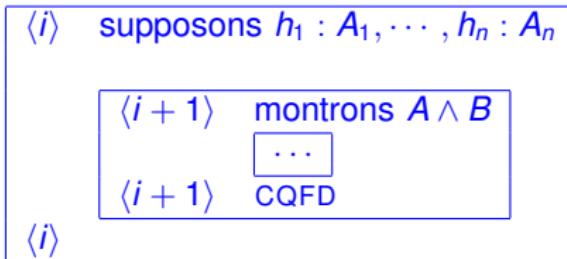
- pour prouver $A \wedge B$ il suffit de prouver A et de prouver B



- les formules A et B des boîtes $\langle i+1 \rangle$ et $\langle i+2 \rangle$ sont des sous-formules de la formule $A \wedge B$ de la boîte $\langle i \rangle$
 - une fois que l'on a choisi d'appliquer cette règle, le contenu des boîtes $\langle i+1 \rangle$ et $\langle i+2 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$

Conjonction : élimination (E_{\wedge}^g) (E_{\wedge}^d)

- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$



Conjonction : élimination (E_{\wedge}^g) (E_{\wedge}^d)

- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$ alors la formule A est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$

\cdots

 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_{\wedge}^g)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$

\cdots

 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$

Conjonction : élimination (E_{\wedge}^g) (E_{\wedge}^d)

- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$ alors la formule A est prouvable et la formule B est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$

...

 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_{\wedge}^g)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons B

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$

...

 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_{\wedge}^d)

Conjonction : élimination (E_{\wedge}^g) (E_{\wedge}^d)

- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$ alors la formule A est prouvable et la formule B est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$

\cdots

 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_{\wedge}^g)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons B

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$

\cdots

 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_{\wedge}^d)

- (E_{\wedge}^g) : la sous-formule B de la boîte $\langle i+1 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule A de la boîte $\langle i \rangle$

Conjonction : élimination (E_{\wedge}^g) (E_{\wedge}^d)

- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$ alors la formule A est prouvable et la formule B est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$
 \cdots
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_{\wedge}^g)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons B

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$
 \cdots
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_{\wedge}^d)

- (E_{\wedge}^g) : la sous-formule B de la boîte $\langle i+1 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule A de la boîte $\langle i \rangle$
- (E_{\wedge}^d) : la sous-formule A de la boîte $\langle i+1 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule B de la boîte $\langle i \rangle$

Conjonction : élimination (E_{\wedge}^g) (E_{\wedge}^d)

- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$ alors la formule A est prouvable et la formule B est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_{\wedge}^g)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons B

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_{\wedge}^d)

- (E_{\wedge}^g) : la sous-formule B de la boîte $\langle i+1 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule A de la boîte $\langle i \rangle$
- (E_{\wedge}^d) : la sous-formule A de la boîte $\langle i+1 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule B de la boîte $\langle i \rangle$
 - ★ appliquer cette règle nécessite de choisir/trouver une formule A ou une formule B telle que $A \wedge B$ soit prouvable
 - ★ la formule $A \wedge B$ peut être une hypothèse

Disjonction : introduction (I_V^g) (I_V^d)

- pour prouver $A \vee B$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \vee B$

$\langle i \rangle$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \vee B$

$\langle i \rangle$

Disjonction : introduction (I_V^g) (I_V^d)

- pour prouver $A \vee B$ il suffit de prouver A

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \vee B$

$\langle i+1 \rangle$ montrons A

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (I_V^g)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \vee B$

$\langle i \rangle$

Disjonction : introduction (I_V^g) (I_V^d)

- pour prouver $A \vee B$ il suffit de prouver A ou bien de prouver B

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \vee B$

$\langle i+1 \rangle$ montrons A

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (I_V^g)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \vee B$

$\langle i+1 \rangle$ montrons B

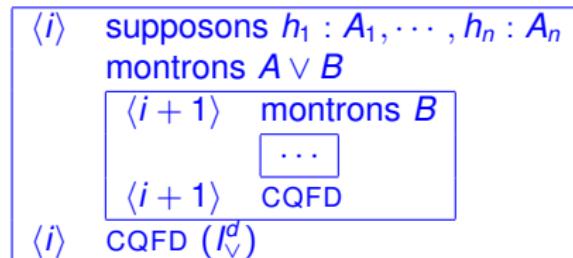
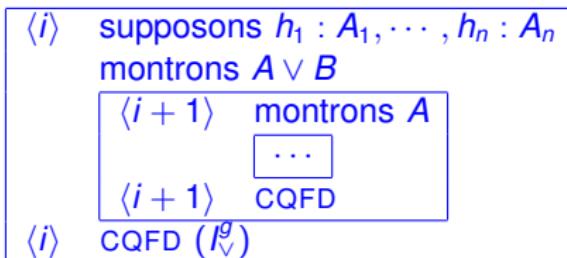
...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (I_V^d)

Disjonction : introduction (I_V^g) (I_V^d)

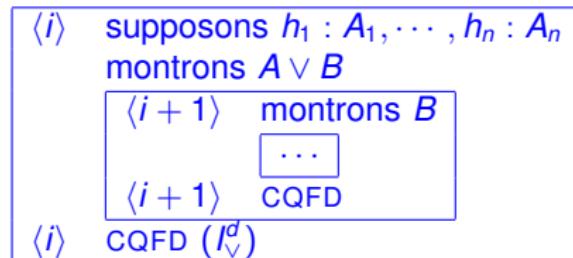
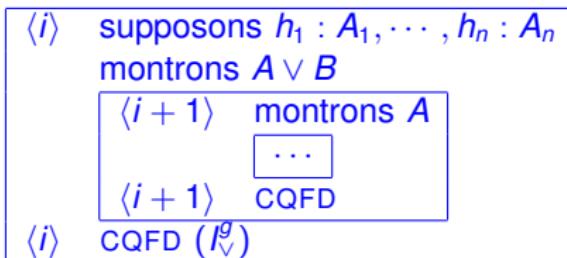
- pour prouver $A \vee B$ il suffit de prouver A ou bien de prouver B



- (I_V^g) : la formule A de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $A \vee B$ de la boîte $\langle i \rangle$

Disjonction : introduction (I_V^g) (I_V^d)

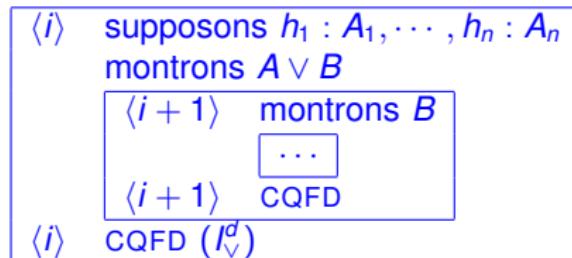
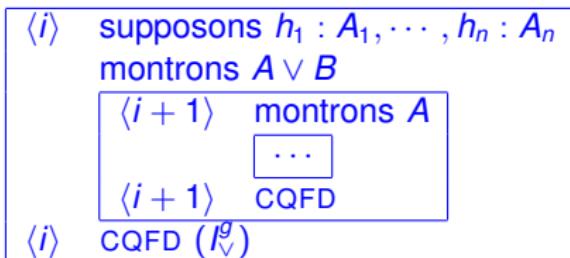
- pour prouver $A \vee B$ il suffit de prouver A ou bien de prouver B



- (I_V^g) : la formule A de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $A \vee B$ de la boîte $\langle i \rangle$
- (I_V^d) : la formule B de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $A \vee B$ de la boîte $\langle i \rangle$

Disjonction : introduction (I_V^g) (I_V^d)

- pour prouver $A \vee B$ il suffit de prouver A ou bien de prouver B



- (I_V^g) : la formule A de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $A \vee B$ de la boîte $\langle i \rangle$
- (I_V^d) : la formule B de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $A \vee B$ de la boîte $\langle i \rangle$
 - une fois que l'on a choisi d'appliquer cette règle, le contenu de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$

Disjonction : élimination (E_{\vee})

- raisonnement par cas

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$

$\langle i \rangle$

Disjonction : élimination (E_V)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$

$\langle i+2 \rangle$ supposons $h_A : A$
montrons C

...

$\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$

Disjonction : élimination (E_V)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C et si à partir de l'hypothèse B on sait prouver C

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$

$\langle i+2 \rangle$ supposons $h_A : A$
montrons C

...

$\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i+3 \rangle$ supposons $h_B : B$
montrons C

...

$\langle i+3 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$

Disjonction : élimination (E_{\vee})

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C et si à partir de l'hypothèse B on sait prouver C et si on sait prouver $A \vee B$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \vee B$
...
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i+2 \rangle$ supposons $h_A : A$
montrons C
...

$\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i+3 \rangle$ supposons $h_B : B$
montrons C
...

$\langle i+3 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$

Disjonction : élimination (E_V)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C et si à partir de l'hypothèse B on sait prouver C et si on sait prouver $A \vee B$ alors C est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons C

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \vee B$
 \dots
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i+2 \rangle$ supposons $h_A : A$
montrons C

\dots
 $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i+3 \rangle$ supposons $h_B : B$
montrons C

\dots
 $\langle i+3 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_V)

Disjonction : élimination (E_V)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C et si à partir de l'hypothèse B on sait prouver C et si on sait prouver $A \vee B$ alors C est prouvable

- ▶ les formules A et B des boîtes $\langle i+1 \rangle$, $\langle i+2 \rangle$ et $\langle i+3 \rangle$ n'apparaissent pas dans la boîte $\langle i \rangle$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons C

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \vee B$
 \dots
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i+2 \rangle$ supposons $h_A : A$
montrons C

\dots
 $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i+3 \rangle$ supposons $h_B : B$
montrons C

\dots
 $\langle i+3 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_V)

Disjonction : élimination (E_V)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C et si à partir de l'hypothèse B on sait prouver C et si on sait prouver $A \vee B$ alors C est prouvable

- ▶ les formules A et B des boîtes $\langle i+1 \rangle$, $\langle i+2 \rangle$ et $\langle i+3 \rangle$ n'apparaissent pas dans la boîte $\langle i \rangle$
 - ★ appliquer cette règle nécessite de trouver deux formules A et B telles que $A \vee B$ soit prouvable et telles que C soit prouvable à partir de A et soit aussi prouvable à partir de B

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons C

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \vee B$
 \dots
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i+2 \rangle$ supposons $h_A : A$
montrons C

\dots
 $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i+3 \rangle$ supposons $h_B : B$
montrons C

\dots
 $\langle i+3 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_V)

Négation : introduction (I_{\neg})

- pour prouver $\neg A$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $\neg A$

$\langle i \rangle$

Négation : introduction (I_{\neg})

- pour prouver $\neg A$ il suffit de supposer A et de prouver false

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $\neg A$

$\langle i+1 \rangle$ supposons $h : A$
montrons false

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (I_{\neg})

Négation : introduction (I_{\neg})

- pour prouver $\neg A$ il suffit de supposer A et de prouver false

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $\neg A$

$\langle i + 1 \rangle$ supposons $h : A$
montrons false

...

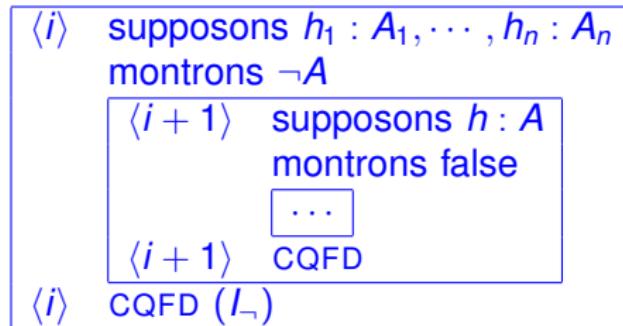
$\langle i + 1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (I_{\neg})

- forme particulière d'un raisonnement par l'absurde (utilisable uniquement pour prouver la négation d'une formule)

Négation : introduction (I_{\neg})

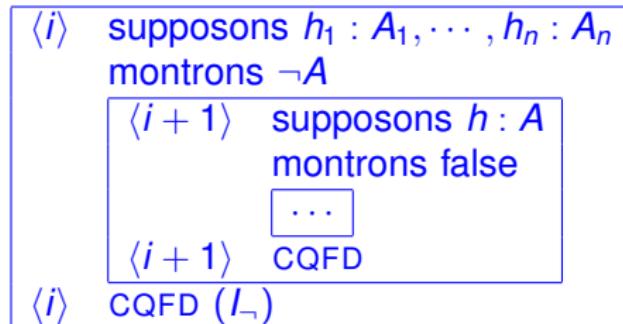
- pour prouver $\neg A$ il suffit de supposer A et de prouver false



- forme particulière d'un raisonnement par l'absurde (utilisable uniquement pour prouver la négation d'une formule)
- revient à voir une preuve de $\neg A$ comme une preuve de $A \Rightarrow \text{false}$

Négation : introduction (I_{\neg})

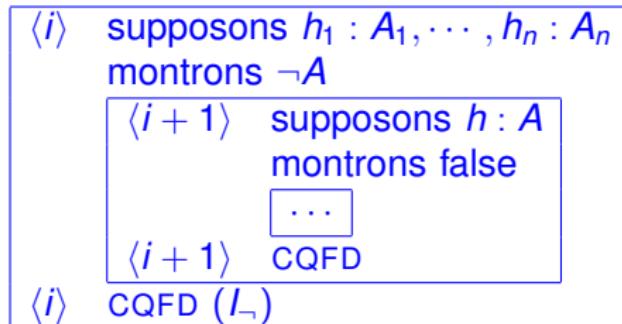
- pour prouver $\neg A$ il suffit de supposer A et de prouver false



- forme particulière d'un raisonnement par l'absurde (utilisable uniquement pour prouver la négation d'une formule)
- revient à voir une preuve de $\neg A$ comme une preuve de $A \Rightarrow \text{false}$
- la formule A de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $\neg A$ de la boîte $\langle i \rangle$

Négation : introduction (I_{\neg})

- pour prouver $\neg A$ il suffit de supposer A et de prouver false



- forme particulière d'un raisonnement par l'absurde (utilisable uniquement pour prouver la négation d'une formule)
- revient à voir une preuve de $\neg A$ comme une preuve de $A \Rightarrow \text{false}$
- la formule A de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $\neg A$ de la boîte $\langle i \rangle$
 - une fois que l'on a choisi d'appliquer cette règle, le contenu de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$

Négation : élimination (E_{\neg})

- si on sait prouver une formule $\neg A$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg A$

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$

Négation : élimination (E_{\neg})

- si on sait prouver une formule $\neg A$ et si on sait aussi prouver A

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg A$

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i+2 \rangle$ montrons A

...

$\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$

Négation : élimination (E_{\neg})

- si on sait prouver une formule $\neg A$ et si on sait aussi prouver A alors **false** est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons false

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg A$
 \dots
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i+2 \rangle$ montrons A

\dots

$\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_{\neg})

Négation : élimination (E_{\neg})

- si on sait prouver une formule $\neg A$ et si on sait aussi prouver A alors **false** est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons false

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg A$
 \dots
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

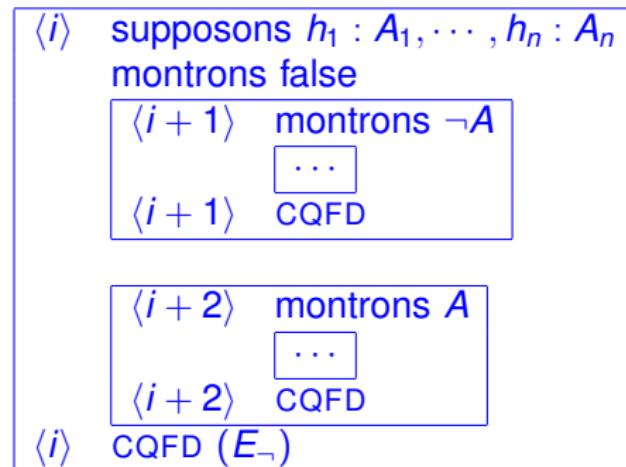
$\langle i+2 \rangle$ montrons A
 \dots
 $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_{\neg})

- la formule A qui apparaît dans les boîtes $\langle i+1 \rangle$ et $\langle i+2 \rangle$ n'apparaît pas dans la boîte $\langle i \rangle$

Négation : élimination (E_{\neg})

- si on sait prouver une formule $\neg A$ et si on sait aussi prouver A alors **false** est prouvable



- la formule A qui apparaît dans les boîtes $\langle i+1 \rangle$ et $\langle i+2 \rangle$ n'apparaît pas dans la boîte $\langle i \rangle$
 - appliquer cette règle nécessite de choisir/trouver une formule A telle que A soit prouvable et $\neg A$ soit aussi prouvable

Exemple

⟨1⟩ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

⟨1⟩



Exemple

(1) montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(2) supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

(2)

(1) CQFD ($I \Rightarrow$)

Exemple

$\langle 1 \rangle$ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

$\langle 3 \rangle$ montrons $\neg A$

$\langle 3 \rangle$

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg B$

$\langle 4 \rangle$

$\langle 2 \rangle$ CQFD (I_{\wedge})

$\langle 1 \rangle$ CQFD (I_{\Rightarrow})



Exemple

$\langle 1 \rangle$ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

$\langle 3 \rangle$ montrons $\neg A$

$\langle 4 \rangle$ supposons $h_2 : A$, montrons false

$\langle 3 \rangle$ CQFD (I_{\neg})

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg B$

$\langle 4 \rangle$
 $\langle 2 \rangle$ CQFD (I_{\wedge})

$\langle 1 \rangle$ CQFD (I_{\Rightarrow})



Exemple

$\langle 1 \rangle$ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

$\langle 3 \rangle$ montrons $\neg A$

$\langle 4 \rangle$ supposons $h_2 : A$, montrons false

$\langle 5 \rangle$ montrons $\neg(A \vee B)$

$\langle 5 \rangle$

$\langle 6 \rangle$ montrons $A \vee B$

$\langle 6 \rangle$

$\langle 4 \rangle$ CQFD (E_{\neg})

$\langle 3 \rangle$ CQFD (I_{\neg})

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg B$

$\langle 4 \rangle$

$\langle 2 \rangle$ CQFD (I_{\wedge})

$\langle 1 \rangle$ CQFD (I_{\Rightarrow})



Exemple

- (1) montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- (2) supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$
- (3) montrons $\neg A$
- (4) supposons $h_2 : A$, montrons false
- (5) montrons $\neg(A \vee B)$
- (5) CQFD (A_x avec h_1)
- (6) montrons $A \vee B$
- (6)
- (4) CQFD (E_{\neg})
- (3) CQFD (I_{\neg})
- (4) montrons $\neg B$
- (4)
- (2) CQFD (I_{\wedge})
- (1) CQFD (I_{\Rightarrow})

Exemple

- (1) montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- (2) supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$
- (3) montrons $\neg A$
- (4) supposons $h_2 : A$, montrons false
- (5) montrons $\neg(A \vee B)$
- (5) CQFD (Ax avec h_1)
- (6) montrons $A \vee B$
- (7) montrons A
- (7) CQFD (I_\vee^g)
- (4) CQFD (E_{\neg})
- (3) CQFD (I_{\neg})
- (4) montrons $\neg B$
- (2) CQFD (I_{\wedge})
- (1) CQFD (I_{\Rightarrow})

Exemple

- (1) montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- (2) supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$
- (3) montrons $\neg A$
- (4) supposons $h_2 : A$, montrons false
- (5) montrons $\neg(A \vee B)$
- (5) CQFD (Ax avec h_1)
- (6) montrons $A \vee B$
- (7) montrons A
- (7) CQFD (Ax avec h_2)
- (6) CQFD (β_{\vee})
- (4) CQFD (E_{\neg})
- (3) CQFD (I_{\neg})
- (4) montrons $\neg B$
- (2) CQFD (I_{\wedge})
- (1) CQFD (I_{\Rightarrow})



Exemple

- (1) montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- (2) supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$
- (3) montrons $\neg A$
- (4) supposons $h_2 : A$, montrons false
- (5) montrons $\neg(A \vee B)$
- (5) CQFD (Ax avec h_1)
- (6) montrons $A \vee B$
- (7) montrons A
- (7) CQFD (Ax avec h_2)
- (6) CQFD (I_{\vee}^g)
- (4) CQFD (E_{\neg})
- (3) CQFD (I_{\neg})
- (4) montrons $\neg B$
- (5) supposons $h_3 : B$, montrons false
- (5)
- (4) CQFD (I_{\neg})
- (2) CQFD (I_{\wedge})
- (1) CQFD (I_{\Rightarrow})

Exemple

- (1) montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- (2) supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$
- (3) montrons $\neg A$
- (4) supposons $h_2 : A$, montrons false
- (5) montrons $\neg(A \vee B)$
- (5) CQFD (Ax avec h_1)
- (6) montrons $A \vee B$
- (7) montrons A
- (7) CQFD (Ax avec h_2)
- (6) CQFD (I_{\vee}^g)
- (4) CQFD (E_{\neg})
- (3) CQFD (I_{\neg})
- (4) montrons $\neg B$
- (5) supposons $h_3 : B$, montrons false
- (6) montrons $\neg(A \vee B)$
- (6) CQFD (E_{\neg})
- (7) montrons $A \vee B$
- (7) CQFD (E_{\neg})
- (5) CQFD (E_{\neg})
- (4) CQFD (I_{\neg})
- (2) CQFD (I_{\wedge})
- (1) CQFD (I_{\Rightarrow})

Exemple

- (1) montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- (2) supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$
- (3) montrons $\neg A$
- (4) supposons $h_2 : A$, montrons false
- (5) montrons $\neg(A \vee B)$
- (5) CQFD (Ax avec h_1)
- (6) montrons $A \vee B$
- (7) montrons A
- (7) CQFD (Ax avec h_2)
- (6) CQFD (I_{\vee}^g)
- (4) CQFD (E_{\neg})
- (3) CQFD (I_{\neg})
- (4) montrons $\neg B$
- (5) supposons $h_3 : B$, montrons false
- (6) montrons $\neg(A \vee B)$
- (6) CQFD (Ax avec h_1)
- (7) montrons $A \vee B$
- (7)
- (5) CQFD (E_{\neg})
- (4) CQFD (I_{\neg})
- (2) CQFD (I_{\wedge})
- (1) CQFD (I_{\Rightarrow})

Exemple

- (1) montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- (2) supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$
- (3) montrons $\neg A$
- (4) supposons $h_2 : A$, montrons false
- (5) montrons $\neg(A \vee B)$
- (5) CQFD (Ax avec h_1)
- (6) montrons $A \vee B$
- (7) montrons A
- (7) CQFD (Ax avec h_2)
- (6) CQFD (I_V^g)
- (4) CQFD (E_{\neg})
- (3) CQFD (I_{\neg})
- (4) montrons $\neg B$
- (5) supposons $h_3 : B$, montrons false
- (6) montrons $\neg(A \vee B)$
- (6) CQFD (Ax avec h_1)
- (7) montrons $A \vee B$
- (8) montrons B
- (8) CQFD (I_V^d)
- (5) CQFD (E_{\neg})
- (4) CQFD (I_{\neg})
- (2) CQFD (I_{\wedge})
- (1) CQFD (I_{\Rightarrow})

Exemple

- (1) montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- (2) supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$
- (3) montrons $\neg A$
- (4) supposons $h_2 : A$, montrons false
- (5) montrons $\neg(A \vee B)$
- (5) CQFD (Ax avec h_1)
- (6) montrons $A \vee B$
- (7) montrons A
- (7) CQFD (Ax avec h_2)
- (6) CQFD (I_V^g)
- (4) CQFD (E_{\neg})
- (3) CQFD (I_{\neg})
- (4) montrons $\neg B$
- (5) supposons $h_3 : B$, montrons false
- (6) montrons $\neg(A \vee B)$
- (6) CQFD (Ax avec h_1)
- (7) montrons $A \vee B$
- (8) montrons B
- (8) CQFD (Ax avec h_3)
- (7) CQFD (I_V^d)
- (5) CQFD (E_{\neg})
- (4) CQFD (I_{\neg})
- (2) CQFD (I_{\wedge})
- (1) CQFD (I_{\Rightarrow})

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
 - ▶ prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
 - ▶ prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
 - ★ on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
 - ▶ prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
 - ★ on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$
 - ▶ si l'on sait prouver A , alors on sait prouver $\neg\neg A$
 - ★ mais on ne sait pas prouver A à partir de la preuve de $\neg\neg A$

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
 - ▶ prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
 - ★ on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$
 - ▶ si l'on sait prouver A , alors on sait prouver $\neg\neg A$
 - ★ mais on ne sait pas prouver A à partir de la preuve de $\neg\neg A$
 - ▶ une forme de raisonnement par l'absurde n'est possible que pour prouver la négation d'une formule

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
 - ▶ prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
 - ★ on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$
 - ▶ si l'on sait prouver A , alors on sait prouver $\neg\neg A$
 - ★ mais on ne sait pas prouver A à partir de la preuve de $\neg\neg A$
 - ▶ une forme de raisonnement par l'absurde n'est possible que pour prouver la négation d'une formule

c'est la **logique intuitionniste**

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
 - ▶ prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
 - ★ on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$
 - ▶ si l'on sait prouver A , alors on sait prouver $\neg\neg A$
 - ★ mais on ne sait pas prouver A à partir de la preuve de $\neg\neg A$
 - ▶ une forme de raisonnement par l'absurde n'est possible que pour prouver la négation d'une formule
- c'est la **logique intuitionniste**
- **logique classique** : on ajoute le raisonnement par l'absurde pour toutes les formules

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
 - ▶ prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
 - ★ on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$
 - ▶ si l'on sait prouver A , alors on sait prouver $\neg\neg A$
 - ★ mais on ne sait pas prouver A à partir de la preuve de $\neg\neg A$
 - ▶ une forme de raisonnement par l'absurde n'est possible que pour prouver la négation d'une formule
- c'est la **logique intuitionniste**
- **logique classique** : on ajoute le raisonnement par l'absurde pour toutes les formules
 - ▶ on peut alors prouver le tiers exclu et l'équivalence entre $\neg\neg A$ et A

Raisonnement par l'absurde (Abs)

- pour prouver A

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i \rangle$

Raisonnement par l'absurde (Abs)

- pour prouver A il suffit de supposer $\neg A$ et de prouver false

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (Abs)

Raisonnement par l'absurde (Abs)

- pour prouver A il suffit de supposer $\neg A$ et de prouver false

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (Abs)

- la formule A qui apparaît dans la boîte $\langle i+1 \rangle$ apparaît dans la boîte $\langle i \rangle$

Raisonnement par l'absurde (Abs)

- pour prouver A il suffit de supposer $\neg A$ et de prouver false

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (Abs)

- la formule A qui apparaît dans la boîte $\langle i+1 \rangle$ apparaît dans la boîte $\langle i \rangle$
 - une fois que l'on a choisi d'appliquer cette règle, le contenu de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$

Règles dérivées

- permet de construire une preuve à partir d'autres preuves

Règles dérivées

- permet de construire une preuve à partir d'autres preuves
 - ▶ introduire une nouvelle règle correspondant à un raisonnement souvent utilisé

Règles dérivées

- permet de construire une preuve à partir d'autres preuves
 - ▶ introduire une nouvelle règle correspondant à un raisonnement souvent utilisé
- *exemple* : comment prouver A

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i \rangle$

Règles dérivées

- permet de construire une preuve à partir d'autres preuves
 - ▶ introduire une nouvelle règle correspondant à un raisonnement souvent utilisé
- *exemple* : comment prouver A à partir d'une preuve de $\neg\neg A$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
 \dots
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^1)

Règle dérivée : exemple (R_{\neg}^1)

(1) supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle i+1 \rangle$

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^1)

(1)

Règle dérivée : exemple (R_{\neg}^1)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle i+1 \rangle$

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^1)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle 2 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false

$\langle 2 \rangle$

$\langle 1 \rangle$ CQFD (Abs)

Règle dérivée : exemple (R_{\neg}^1)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle i+1 \rangle$

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^1)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle 2 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false

$\langle 3 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle 3 \rangle$

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg A$

$\langle 4 \rangle$

$\langle 2 \rangle$ CQFD (E_{\neg})

$\langle 1 \rangle$ CQFD (Abs)

Règle dérivée : exemple (R_{\neg}^1)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle i+1 \rangle$

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^1)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle 2 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false

$\langle 3 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle 3 \rangle$

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg A$
 $\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax) avec h

$\langle 2 \rangle$ CQFD (E_{\neg})

$\langle 1 \rangle$ CQFD (Abs)

Règle dérivée : exemple (R_{\neg}^1)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle i+1 \rangle$

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^1)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle 2 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false

$\langle 3 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
sans utiliser h

$\langle 4 \rangle$ CQFD
 $\langle 3 \rangle$ CQFD (Af)

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg A$
 $\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax) avec h

$\langle 2 \rangle$ CQFD (E_{\neg})

$\langle 1 \rangle$ CQFD (Abs)

Règle dérivée : exemple (R_{\neg}^1)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^1)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle 2 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false

$\langle 3 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
sans utiliser h

...

$\langle 4 \rangle$ CQFD (Af)

$\langle 3 \rangle$ CQFD (Af)

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg A$

$\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax) avec h

$\langle 2 \rangle$ CQFD (E_{\neg})

CQFD (Abs)

Règle dérivée : exemple (R_{\neg}^1)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

...

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^1)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle 2 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false

$\langle 3 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
sans utiliser h

...

$\langle 4 \rangle$ CQFD (Af)

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg A$

$\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax) avec h

$\langle 2 \rangle$ CQFD (E_{\neg})

$\langle 1 \rangle$ CQFD (Abs)