

EXERCICE 31

Logique - Quantificateurs

quel que soit le prédicat F ,

$$(((\exists y, \forall x, (F(x) \Leftrightarrow F(y))) \wedge (\exists x, F(x))) \Rightarrow (\forall x, F(x)))$$

Montrons $((\exists y, \forall x, (F(x) \Leftrightarrow F(y))) \wedge (\exists x, F(x))) \Rightarrow (\forall x, F(x))$ (1)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $(\exists y, \forall x, (F(x) \Leftrightarrow F(y))) \wedge (\exists x, F(x))$ (h1)

Montrons $\forall x, F(x)$ (2)

($\forall I$)

Soit l'élément x

Montrons $F(x)$ (3)

($\exists E$)

Montrons $\exists x^0, \forall m, (F(m) \Leftrightarrow F(x^0))$ (4)

($\wedge Eg$)

Montrons $(\exists y, \forall x, (F(x) \Leftrightarrow F(y))) \wedge (\exists x, F(x))$ (5)

d'après (h1)

Soit l'élément x^0

Supposons que $\forall m, (F(m) \Leftrightarrow F(x^0))$ (h2)

Montrons $F(x)$ (6)

($\exists E$)

Montrons $\exists x^1, F(x^1)$ (7)

($\wedge Ed$)

Montrons $(\exists y, \forall x, (F(x) \Leftrightarrow F(y))) \wedge (\exists x, F(x))$ (8)

d'après (h1)

Soit l'élément x^1

Supposons que $F(x^1)$ (h3)

Montrons $F(x)$ (9)

($\Leftrightarrow Ed$)

Montrons $F(x) \Leftrightarrow F(x^0)$ (10)

($\forall E$)

Montrons $\forall m, (F(m) \Leftrightarrow F(x^0))$ (11)

d'après (h2)

Montrons $F(x^0)$ (12)

($\Leftrightarrow Eg$)

Montrons $F(x^1) \Leftrightarrow F(x^0)$ (13)

($\forall E$)

Montrons $\forall m, (F(m) \Leftrightarrow F(x_0))$ (14)

d'après (h2)

Montrons $F(x_1)$ (15)

d'après (h3)