

49 DISTRIBUTIVITÉ DE L'IMPLICATION 2/3

Connecteurs

quelles que soient les propositions **A B C**,

$$((A \Rightarrow (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)))$$

Montrons ($\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$) $\Leftrightarrow ((\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$ (h1)

Montrons $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C})$ (2)

($\vee E$)

Supposons que \mathbf{A} (h2)

Montrons $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C})$ (3)

($\vee E$)

Montrons $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ (4)

($\Rightarrow E$)

Montrons \mathbf{A} (5)

d'après (h2)

Montrons $\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$ (6)

d'après (h1)

Supposons que \mathbf{B} (h3)

Montrons $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C})$ (7)

($\vee Ig$)

Montrons $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ (8)

($\Rightarrow I$)

Supposons que \mathbf{A} (h4)

Montrons \mathbf{B} (9)

d'après (h3)

Supposons que \mathbf{C} (h5)

Montrons $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C})$ (10)

($\vee Id$)

Montrons $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}$ (11)

($\Rightarrow I$)

Supposons que \mathbf{A} (h6)

Montrons \mathbf{C} (12)

d'après (h5)

Supposons que $\neg \mathbf{A}$ (h7)

Montrons $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C})$ (13)

($\vee Ig$)

Montrons $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ (14)

($\Rightarrow I$)

Supposons que \mathbf{A} (h8)

Montrons \mathbf{B} (15)

($\perp E$)

Montrons \perp (16)

($\neg E$)

Montrons \mathbf{A} (17)

d'après (h8)

Montrons $\neg \mathbf{A}$ (18)

d'après (h7)

Supposons que $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C})$ (h9)

Montrons $\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$ (19)

($\Rightarrow I$)

Supposons que \mathbf{A} (h10)

Montrons $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ (20)

($\vee E$)

Montrons $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C})$ (21)

d'après (h9)

Supposons que $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ (h11)

Montrons $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ (22)

($\vee Ig$)

Montrons \mathbf{B} (23)

($\Rightarrow E$)

Montrons \mathbf{A} (24)

d'après (h10)

Montrons $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ (25)

d'après (h11)

Supposons que $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}$ (h12)

Montrons $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ (26)

($\vee Id$)

Montrons \mathbf{C} (27)

($\Rightarrow E$)

Montrons \mathbf{A} (28)

d'après (h10)

Montrons $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}$ (29)

d'après (h12)