Année 2014-2015 - S1

2I005 - décembre 2014

Durée : 2h - Documents, calculettes et téléphones interdits

Inscrire votre nom sur la copie et la cacheter, puis inscrire votre numéro d'anonymat sous le logo UPMC et le reporter sur toutes les copies intercalaires. Conserver l'étiquette portant votre numéro d'anonymat, elle sera **obligatoire** pour toute consultation de copie.
La note (entre 0 et 60) est le minimum entre 60 et la somme des points obtenus (entre 0 et 74).

Exercice 1 (19 points= 4+4+3+8)

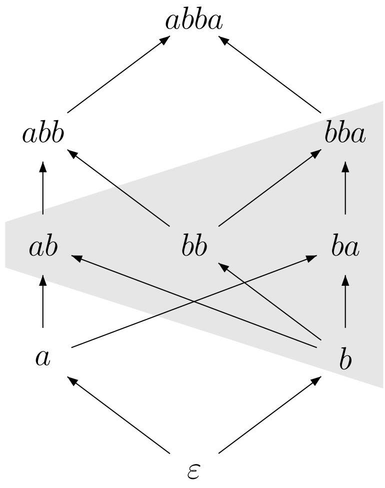
1. Soit $\mathcal{P}$ une propriété sur un ensemble E muni d'un ordre bien fondé $\preceq$. On suppose que pour tout x de E, si $\mathcal{P}(y)$ est vrai pour tout $y \prec x$ alors $\mathcal{P}(x)$ est vrai. Montrer qu'alors $\mathcal{P}(x)$ est vrai pour tout x de E.

   Cf cours.

2. Soit A un alphabet et A^* l'ensemble des mots sur cet alphabet. On considère la relation binaire $\preceq$ définie sur A^* par : $u \preceq v$ si u est un facteur de v, c'est-à-dire qu'il existe deux mots v_1 et v_2 de A^* tels que $v = v_1uv_2$. Par exemple, pour $A = \{a, b\}$, l'ensemble des facteurs de $v = aba$ est $\{\varepsilon, a, b, ab, ba, aba\}$.
   (a) Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur A^*. Cet ordre est-il total ? Est-il bien fondé ?

   2+1+1 pour les 4 points La relation est réfléxive car $u = \varepsilon u \varepsilon$ pour tout u. Elle est transitive car si $u \preceq v$ et $v \preceq w$ alors $w = w_1vw_2 = w_1v_1uv_2w_2$. Supposons $v = v_1uv_2$ et $u = u_1vu_2$ alors $u = u_1v_1uv_2u_2$ donc $u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = \varepsilon$ et $u = v$ donc la relation est antisymétrique. L'ordre n'est pas total car a et b sont incomparables. Il est bien fondé car si $u \preceq v$ alors la longueur de u est inférieure ou égale à la longueur de v. Donc si une suite était strictement décroissante, la longueur diminuerait d'au moins 1 à chaque terme, et elle serait nulle à partir d'un certain rang. Donc la suite serait stationnaire sur ε.

   (b) Soit E l'ensemble des facteurs du mot *abba*. Représenter la relation d'ordre $\preceq$ sur E par un graphe (sans les arcs de réflexivité et de transitivité).

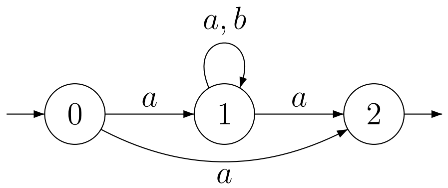


(c) Pour la partie $B = \{b, ab, bb, ba, bba\}$ de E, donner l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de B dans E. Donner, lorsqu'ils existent, la borne inférieure, la borne supérieure, le plus petit élément et le plus grand élément, les éléments minimaux et les éléments maximaux de B.

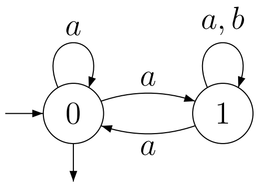
$Maj(B) = \{abba\}$ donc B n'a pas de plus grand élément et sa borne supérieure est $abba$.
$Min(B) = \{\varepsilon, b\}$ donc b est à la fois le plus petit élément de B et sa borne inférieure.
Les éléments maximaux de B sont ab et bba, son seul élément minimal est b.

Exercice 2 (23 points = 2+1+2+4+4+3+4+3) On se place sur l'alphabet $A = \{a, b\}$.

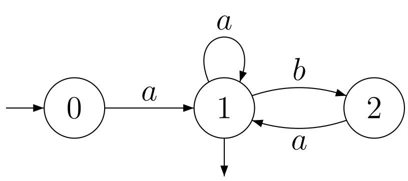
1. Dessiner un automate acceptant les mots commençant par a et se terminant par a.



ou

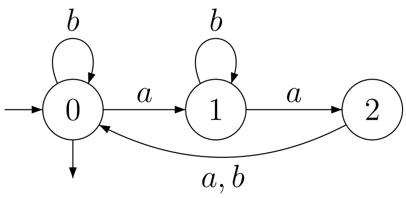


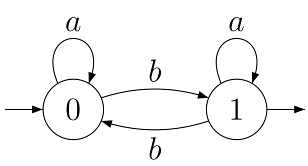
ou



Le trosième peut être obtenu en déterminisant les deux premiers.

2. On note $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ et $M = \mathcal{L}(\mathcal{B})$ pour les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ suivants :

$\mathcal{A}$: 

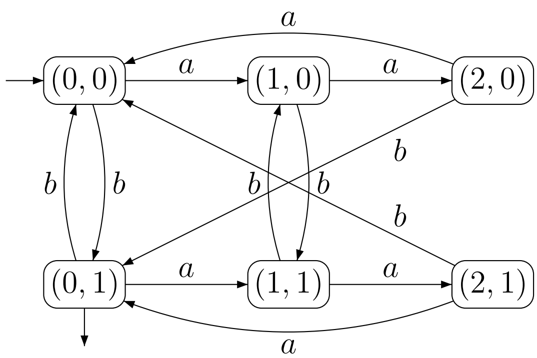
$\mathcal{B}$: 

(a) Décrire informellement le langage M.

(b) Les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont-ils déterministes ? complets ?

Le langage M contient les mots ayant un nombre impair de b. Les deux automates sont déterministes et complets.

(c) Construire à partir de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ un automate acceptant le langage $L \cap M$.



(d) Calculer une expression rationnelle du langage accepté par $\mathcal{A}$.

Le système d'équations est le suivant :
(1) $L_0 = bL_0 + aL_1 + \varepsilon$
(2) $L_1 = bL_1 + aL_2$
(3) $L_2 = (a + b)L_0$

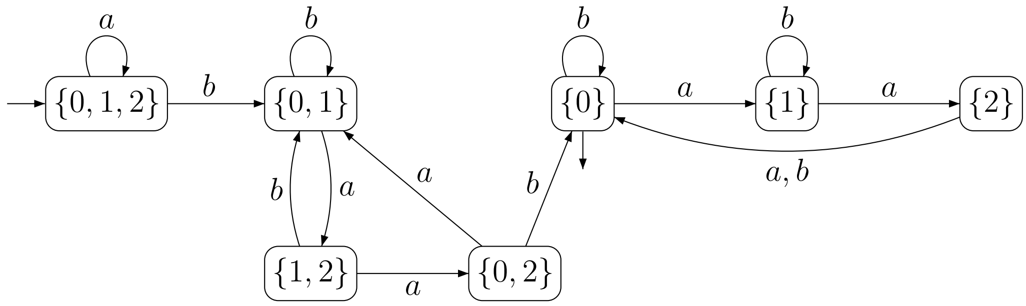
On remplace (3) dans (2) : $L_1 = bL_1 + a(a + b)L_0$ et on applique le lemme d'Arden : $L_1 = b^*a(a + b)L_0$.
On remplace dans (1) : $L_0 = bL_0 + ab^*a(a + b)L_0 + \varepsilon = [b + ab^*a(a + b)]L_0 + \varepsilon$, et une dernière application du lemme d'Arden donne l'expression cherchée : $L_0 = [b + ab^*a(a + b)]^*$.

3. On considère maintenant l'automate $\mathcal{C}$ obtenu à partir de $\mathcal{A}$ en prenant les trois états 0, 1 et 2 comme états initiaux. On ne s'occupe pas des états finals de $\mathcal{C}$.

(a) Pour le mot $w = baab$, quel est l'état atteint en lisant ce mot en partant de l'état 0 ? En partant de l'état 1 ? En partant de l'état 2 ?

Dans les trois cas, on arrive dans l'état 0.

(b) Déterminiser $\mathcal{C}$ (donc avec $\{0, 1, 2\}$ comme état initial) et dessiner l'automate $\mathcal{D}$ obtenu, avec le singleton $\{0\}$ comme état final.



(c) Expliquer pourquoi le langage accepté par $\mathcal{D}$ est le produit de deux langages : $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = S.L$ où S contient le mot w et L est le langage de la question 2.

L'automate $\mathcal{D}$ peut être obtenu par la construction du cours pour la concaténation de deux langages, à partir des deux automates suivants :
— l'automate $\mathcal{D}_1$, obtenu à partir de $\mathcal{D}$ en supprimant toutes les transitions partant de $\{0\}$ (ainsi que les états $\{1\}$ et $\{2\}$),
— l'automate $\mathcal{A}$, obtenu à partir de $\mathcal{D}$ en considérant $\{0\}$ comme initial (ce qui revient à supprimer tous les états qui ne sont pas des singletons) et en remplaçant chaque singleton $\{i\}$ par i.

En notant $\mathcal{L}(\mathcal{D}_1) = S$, on obtient donc $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = S.L$ et on vérifie que S contient le mot $w = baab$.

Exercice 3 (16 points = 4+3+6+3)

1. On considère deux formules F et G du calcul propositionnel. Montrer que $F \models G$ (G est conséquence de F) si et seulement si la formule $F \to G$ est valide.

   Cf cours.

2. Soit f la fonction booléenne définie par $f(x, y, z) = x.\overline{y}(\overline{x} + z)(\overline{y} + z)$. Donner une forme conjonctive et une forme disjonctive pour f.

   La fonction f est déjà sous forme conjonctive. Pour obtenir une forme disjonctive, on développe : $f(x, y, z) = x.\overline{y}(\overline{x}.\overline{y}+\overline{x}z+\overline{y}z+z)$. Comme $\overline{x}z+\overline{y}z+z = (\overline{x}+\overline{y}+1)z = z$, on obtient $f(x, y, z) = x.\overline{y}(\overline{x}.\overline{y} + z) = x.\overline{y}z$.

3. Brigitte, Gina et Patrice discutent d'une réforme de l'université.

Gina déclare (G) :	Si la réforme passe, tous les étudiants réussiront leurs examens.
Brigitte déclare (B) :	Si la réforme passe, l'université s'affaiblira.
Patrice déclare (P) :	Tous les étudiants réussiront leurs examens et l'université ne s'affaiblira pas.

   (a) Exprimer les trois déclarations G, B et P en fonction des propositions p : *la* *réforme passe*, q : *tous les étudiants réussiront leurs examens* et r : *l'université s'affaiblira*. Pour une interprétation I, calculer $I(G)$, $I(B)$ et $I(P)$ en fonction de $I(p)$, $I(q)$ et $I(r)$.

— $G : p \to q$, donc $I(G) = I(q) + \overline{I(p)}$
— $B : p \to r$, donc $I(B) = I(r) + \overline{I(p)}$
— $P : q \wedge (\neg r)$ donc $I(P) = I(q).\overline{I(r)}$

(b) On sait que Gina et Patrice mentent toujours, mais que Brigitte ne ment pas. **Sans table de vérité**, dire ce qui va se passer.

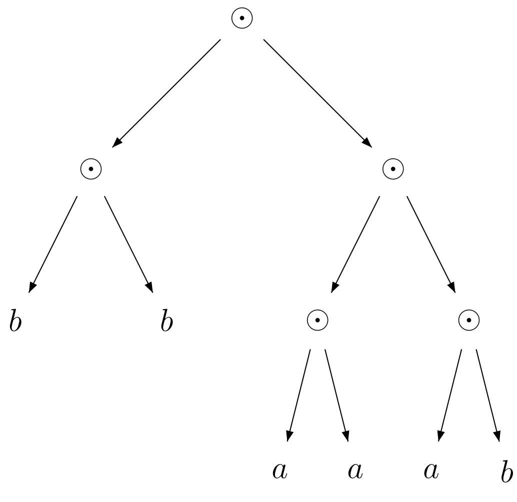
Comme Gina ment, on a $I(G) = 0$, ce qui implique $I(q) = 0$ et $\overline{I(p)} = 0$ donc q est faux et p est vrai. Comme Brigitte ne ment pas, on a $I(B) = 1 = I(r) + \overline{I(p)} = I(r)$, donc on en déduit que r est vrai.

Exercice 4 (16 points = 3+1+6+3+1+2) Soit les symboles de constantes $F_0 = \{a, b\}$.

1. On considère l'ensemble $\mathcal{T}$ des termes construits sur $F_0 \cup F_2$, où $F_2 = \{\odot\}$.
   (a) Donner une définition inductive adaptée des termes de $\mathcal{T}$.

   (B) a et b appartiennent à $\mathcal{T}$,
   (I) si t_1 et t_2 appartiennent à $\mathcal{T}$, alors $t_1 \odot t_2$ appartient aussi à $\mathcal{T}$.

   (b) Dessiner un arbre représentant le terme $t_1 = (b \odot b) \odot ((a \odot a) \odot (a \odot b))$.



   (c) Les termes sont interprétés sur le domaine $D = \mathbb{N}$, avec a interprétée par $a_D = 2$, b par $b_D = 3$ et $\odot$ interprétée comme la multiplication. (i) Calculer $h^*(t_1)$.
   (ii) Pour $t \in \mathcal{T}$, définir inductivement $nba(t)$, le nombre de a de t et $nbb(t)$ le nombre de b de t, et montrer que $h^*(t) = 2^{nba(t)} \times 3^{nbb(t)}$ pour tout terme t.

Ici, 6 = 1 + 2 + 3.
Comme $\odot$ est interprétée par la multiplication dans $\mathbb{N}$, $h^*(t_1)$ est obtenu directement en multipliant toutes les valeurs des feuilles donc
$h^*(t_1) = a_D^3 b_D^3 = 8 \times 27 = 216$.

Vu en cours, par exemple pour nba :
(B) $nba(a) = 1$ et $nba(b) = 0$,
(I) si t_1 et t_2 appartiennent à $\mathcal{T}$, alors $nba(t_1 \odot t_2) = nba(t_1) + nba(t_2)$.

La propriété est satisfaite pour a et b car $h^*(a) = a_D = 2$ avec $2^{nba(a)} \times 3^{nbb(a)} = 2^1.3^0 = 2$, et $h^*(b) = b_D = 3$ avec $2^{nba(b)} \times 3^{nbb(b)} = 2^0.3^1 = 3$.
Supposons le résultat pour deux termes t_1 et t_2 :
$h^*(t_1) = 2^{nba(t_1)} \times 3^{nbb(t_1)}$ et $h^*(t_2) = 2^{nba(t_2)} \times 3^{nbb(t_2)}$.
Alors pour $t = t_1 \odot t_2$, la définition inductive de h^* (cf cours) implique : $h^*(t) = h^*(t_1) \times h^*(t_2)$. Donc $h^*(t) = 2^{nba(t_1)} \times 3^{nbb(t_1)} \times 2^{nba(t_2)} \times 3^{nbb(t_2)}$ et ainsi $h^*(t) = 2^{nba(t_1)+nba(t_2)} \times 3^{nbb(t_1)+nbb(t_2)} = 2^{nba(t)} \times 3^{nbb(t)}$ en utilisant les définitions inductives de nba et nbb.

Pour la suite, il fallait permuter les points :
1 pour Tarski, 3 pour la question 3.a

2. On se place dans le monde de Tarski. Donner une formule exprimant :
a est un cube et, soit b est un dodécaèdre, soit b est à gauche de a.

$$\texttt{Cube}(a) \wedge (\texttt{Dodec}(b) \vee \texttt{LeftOf}(b, a))$$

3. On considère le calcul propositionnel enrichi par F_0 et les symboles de prédicats $R_1 = \{d, k\}$ et $R_2 = \{\leq\}$.
   (a) Donner une définition inductive de l'ensemble des formules.

   (B) les propositions $p \in \mathcal{P}$ sont des formules,
   $d(c)$ et $k(c)$ sont des formules pour toute constante $c \in F_0$,
   $c_1 \leq c_2$ est une formule pour toutes constantes c_1, c_2 de F_0.
   (I) si F_1 et F_2 sont deux formules alors $F_1 \wedge F_2$ et $F_1 \wedge F_2$ sont aussi des formules.
   Si F est une formule alors $\neg F$ est aussi une formule.

   (b) On se place sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, en interpétant d comme `impair`, k comme $x = x^3$ et $\leq$ comme l'ordre usuel. Par quelles valeurs distinctes de $\mathbb{N}$ peut-on interpréter les constantes a et b pour que la formule $k(a) \wedge (d(b) \vee (b \leq a))$ soit satisfaite ?

   Pour que $k(a)$ soit satisfaite, il faut que a soit interprétée comme 0 ou 1 sur $\mathbb{N}$. Pour que la formule soit satisfaite, il faut de plus que l'une des deux propositions $d(b)$ ou $b \leq a$ soit satisfaite. Comme les deux valeurs doivent être distinctes, on peut interpréter a par 1 et b par 0, auquel cas $b \leq a$ est satisfaite. On peut aussi choisir d'interpréter a par 0 et b par n'importe quel nombre entier impair (par exemple 1), auquel cas $d(b)$ est satisfaite.