Année 2010-2011 - S1

LI214 - Correction succincte du partiel 10 novembre 2010

Durée : 2h - Documents, calculettes et téléphones interdits

Inscrire votre numéro de groupe sur votre copie. La note (entre 0 et 60) est le minimum entre 60 et la somme des points obtenus (entre 0 et 75).

Exercice 1 (12 points=3+6+3)

1. On considère l'ensemble des applications de $\{a, b, c\}$ dans $\{1, 2\}$. Combien y a-t-il de telles applications ? Combien y en a-t-il d'injectives ? de surjectives ? Justifier les réponses.

   L'ensemble des applications de $E = \{a, b, c\}$ dans $F = \{1, 2\}$, noté F^E, a pour cardinal $|F|^{|E|} = 2^3 = 8$. Il y a donc 8 applications de $\{a, b, c\}$ dans $\{1, 2\}$, dont aucune n'est injective puisque $|E| > |F|$. Les applications surjectives sont celles qui sont différentes des deux applications constantes 1 et 2, donc il y en a 6.

2. Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'application est injective, surjective, bijective. Justifier les réponses.

   (a) $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $f(x) = x + 1$ si x est pair et $f(x) = x - 1$ si x est impair.

   L'application f est injective. En effet, supposons $f(x) = f(y)$. Si x et y sont tous deux pairs, alors $x + 1 = y + 1$ implique $x = y$. Un raisonnement similaire lorsqu'ils sont tous deux impairs donne aussi $x = y$. Si x et y n'ont pas même parité, alors par symétrie, on peut supposer x pair et y impair donc $x + 1 = y - 1$. Ceci implique $y - x = 2$, donc x et y ont même parité, ce qui est une contradiction.
   L'application f est aussi surjective. Soit $n \in \mathbb{N}$, si n est pair, $n + 1$ est impair et $f(n + 1) = n$, sinon, n est impair et dans ce cas, $n - 1$ est pair et $n - 1 \geq 0$ avec $f(n - 1) = n$. Donc n a toujours un antécédent.
   Donc f est bijective.

   (b) $g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ définie par $g(x) = 2x + 1$

   L'application g est injective car $2x + 1 = 2y + 1$ implique $x = y$. Elle n'est pas surjective car par exemple 2 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{Z}$.

   (c) $h : \mathbb{N} \mapsto \{0, 1, 2, 3\}$ qui à $x \in \mathbb{N}$ associe son reste dans la division par 4.

   L'application h est surjective car $h(i) = i$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Elle n'est pas injective car par exemple $h(4) = h(0) = 0$.

3. On considère la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+2}$. Montrer par récurrence que $u_n = \frac{1}{2^n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

   Pour $n = 1$, on a : $u_1 = 1$ et $\frac{1}{2^1-1} = 1$ donc la propriété est vraie.
   Supposons $u_n = \frac{1}{2^n-1}$. Alors par définition $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n}$. En appliquant l'hypothèse d'induction, on obtient :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2^n-1} \times \frac{1}{\frac{1}{2^n-1}+2} = \frac{1}{1+2(2^n-1)} = \frac{1}{2^{n+1}-1}$$

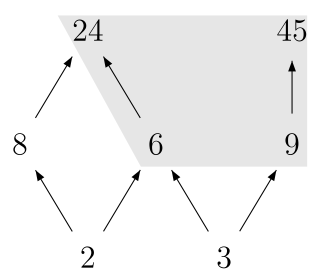
   d'où la propriété au rang $n+1$.

Exercice 2 (20 points= 3+4+3+2+8)

1. (a) Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\preceq$ et A une partie de E. Donner la définition de la borne supérieure de A dans E et d'un élément maximal de A. Donner la définition d'un ordre bien fondé.
   (b) Démontrer que l'ordre $\preceq$ sur E est bien fondé si et seulement si toute partie non vide de E admet au moins un élément minimal.
   (c) Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$ ordonné par $a < b$. L'ordre lexicographique sur A^* est-il bien fondé ? Justifier la réponse.

   Voir le cours.

2. On considère l'ensemble d'entiers naturels $E = \{2, 3, 6, 8, 9, 24, 45\}$ ordonné par la relation « x divise y ».
   (a) Représenter la relation d'ordre sur E par un graphe (sans les arcs de réflexivité et de transitivité).



   (b) Pour la partie $A = \{6, 9, 24, 45\}$ de E, donner l'ensemble des minorants et l'ensemble des majorants. Cette partie A admet-elle une borne inférieure ? une borne supérieure ? un plus petit élément ? un plus grand élément ? Donner les éléments minimaux et les éléments maximaux de A. Justifier les réponses.

La partie A (grisée) a pour ensemble de minorants $\{3\}$ et un ensemble vide de majorants, dans E. Par conséquent, elle n'a pas de borne supérieure ni de plus grand élément. Elle admet 3 comme borne inférieure mais 3 n'est pas un plus petit élément car il n'appartient pas à A. Les éléments minimaux de A sont 6 et 9, ses éléments maximaux sont 24 et 45.

Exercice 3 (16 points = 5+2+3+2+4)

1. On considère l'alphabet $A = \{a, b\}$. On rappelle que pour un mot w de A^* :
   - on désigne par $|w|_a$ (resp. $|w|_b$) le nombre de a (resp. de b) dans w,
   - un mot w' est un préfixe de w s'il existe un mot w'' tel que $w = w'w''$.

   Le langage P de A^* est défini inductivement par :

   (B) le mot vide ε appartient à P,

   (I) si deux mots u et v appartiennent à P alors le mot $aubv$ appartient aussi à P.

   Montrer par induction structurelle sur P que tout mot w de P vérifie :

   (a) w a autant de a que de b (c'est-à-dire $|w|_a = |w|_b$),

   (b) tout préfixe w' de w a au moins autant de a que de b (c'est-à-dire $|w'|_a \geq |w'|_b$).

   (a) Le mot vide ε a autant de a que de b ($|\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b = 0$).
   Pour l'induction, supposons que u et v ont tous deux autant de a que de b. Alors $|aubv|_a = 1 + |u|_a + |v|_a = 1 + |u|_b + |v|_b$ en appliquant cette hypothèse d'induction. Donc $|aubv|_a = |aubv|_b$ et la propriété est établie.

   (b) Soit w' un préfixe de ε. Alors $w' = \varepsilon$ donc comme ci-dessus $|\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b = 0$ et la propriété est vraie.
   Pour l'induction, soit w' un préfixe de $w = aubv$. Il faut considérer 3 cas.

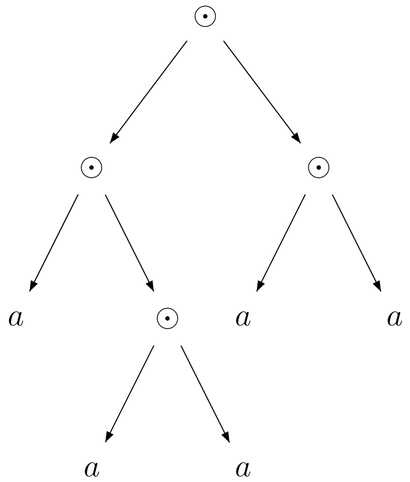
   i. Soit $w' = \varepsilon$ et c'est comme ci-dessus.

   ii. Soit $w' = au'$ où u' est un préfixe de u (qui peut être le mot vide). Comme $u \in L$, l'hypothèse d'induction implique $|u'|_a \geq |u'|_b$ donc $|au'|_a = 1 + |u'|_a$ est strictement supérieur à $|au'|_b = |u'|_b$.

   iii. Soit $w' = aubv'$ où v' est un préfixe de v (qui peut aussi être le mot vide). Comme $u \in L$, on peut appliquer le résultat (a), donc $|u|_a = |u|_b$ et comme $v \in L$, par hypothèse d'induction, on a $|v'|_a \geq |v'|_b$. Alors $|w'|_a = 1 + |u|_a + |v'|_a$ et $|w'|_b = 1 + |u|_b + |v'|_b$ donc l'inégalité est préservée, ce qui termine la preuve.

2. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des termes construits sur $F_0 \cup F_2$, avec $F_0 = \{a\}$ et $F_2 = \{\odot\}$.

   (a) Dessiner sous forme d'un arbre le terme $\odot(\odot(a, \odot(a, a)), \odot(a, a))$.



(b) Donner la définition inductive des termes de $\mathcal{T}$ et donner la définition inductive de la fonction $nba : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{N}$ qui associe à un terme le nombre de a dans ce terme.

Les termes de $\mathcal{T}$ sont définis par :
(B) $a \in \mathcal{T}$,
(I) si t_1 et t_2 sont des termes de $\mathcal{T}$ alors $t = \odot(t_1, t_2)$ est aussi un terme de $\mathcal{T}$.
La fonction $nba : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{N}$ est définie inductivement par :
(B) $nba(a) = 1$,
(I) si t_1 et t_2 sont des termes de $\mathcal{T}$ et $t = \odot(t_1, t_2)$ alors $nba(t) = nba(t_1) + nba(t_2)$.

(c) A quelle fonction classique sur les arbres cette fonction correspond-elle ?

C'est la fonction qui à un arbre associe son nombre de feuilles.

(d) On interprète les termes de $\mathcal{T}$ sur le domaine $D = \mathbb{N}$, en associant à a la valeur $a_D = 5$ et à $\odot$ l'application $h_\odot : \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}$ définie par $h_\odot(m, n) = m \times n$. Déterminer la valeur h^* d'un terme quelconque de $\mathcal{T}$ (justifier la réponse).

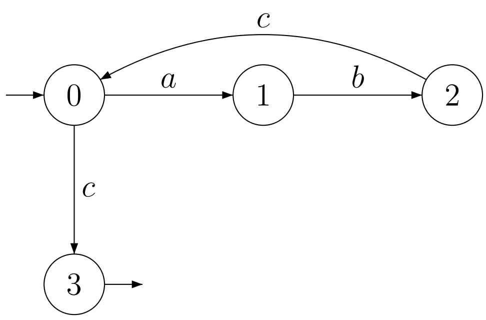
On rappelle la définition inductive de la valeur $h^*(t)$ d'un terme t de cet ensemble $\mathcal{T}$:
(B) $h^*(a) = a_D$,
(I) $h^*(t) = h_\odot(h^*(t_1), h^*(t_2))$ pour un terme $t = \odot(t_1, t_2)$.

On démontre par induction que pour tout terme $t \in \mathcal{T}$, $h^*(t) = 5^{nba(t)}$. En effet, la propriété est vraie pour a puisque $h^*(a) = a_D = 5$ avec $nba(a) = 1$ et $5^1 = 5$.
Pour l'induction, on suppose que $h^*(t_1) = 5^{nba(t_1)}$ et $h^*(t_2) = 5^{nba(t_2)}$. La définition inductive de h^* implique $h^*(t) = h^*(t_1) \times h^*(t_2))$ donc $h^*(t) = 5^{nba(t_1)} \times 5^{nba(t_2)} = 5^{nba(t_1)+nba(t_2)}$. Ainsi, en utilisant la définition inductive de nba, on obtient bien $h^*(t) = 5^{nba(t)}$.

Exercice 4 (27 points=4+4+2+3+6+4+4)

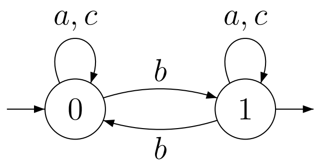
On se place sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$.

1. Dessiner un automate fini acceptant le langage $L = (abc)^*c$.

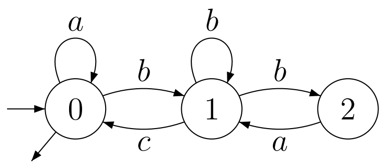


2. On considère les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ suivants, on note $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ et$M = \mathcal{L}(\mathcal{B})$:

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



   (a) Les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont-ils déterministes ? complets ? Justifier les réponses.

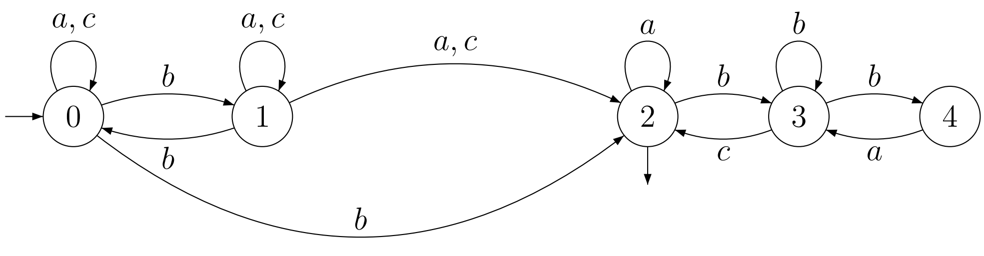
   L'automate $\mathcal{A}$ est déterministe et complet, tandis que l'automate $\mathcal{B}$ n'est ni déterministe puisque deux transitions d'étiquette b partent de l'état 1, ni complet puisqu'il n'y a pas de transition d'étiquette c partant de l'état 0.

   (b) Décrire (en français) le langage L.

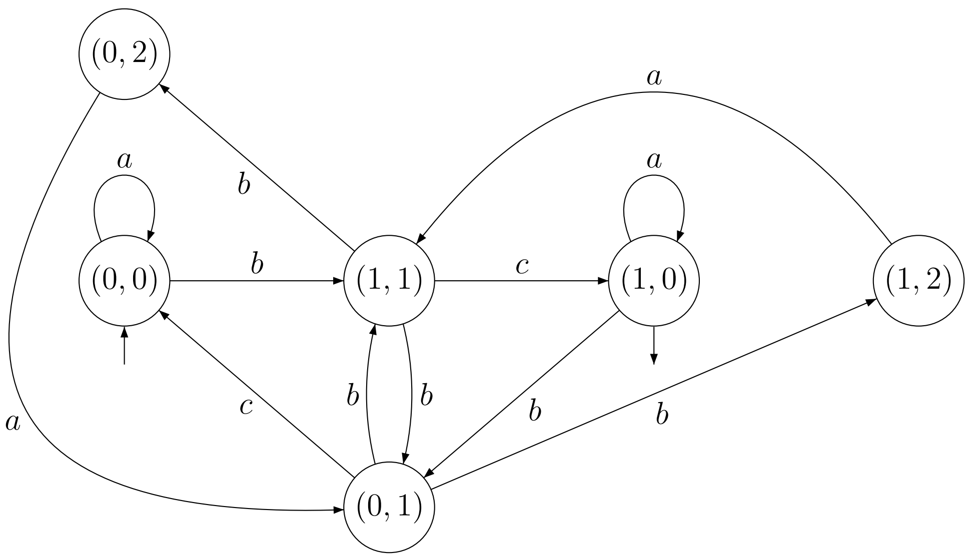
   Le langage L contient exactement les mots sur l'alphabet A ayant un nombre impair de b.

   Dans l'ordre, en explicitant les constructions et les calculs :

   (c) Construire un automate acceptant la concaténation LM des langages L et M.



   (d) Construire un automate acceptant l'intersection $L \cap M$ des langages L et M. Dessiner cet automate et donner explicitement ses états, ses transitions, ses états initiaux et ses états finals.



Les états sont le produit cartésien $\{0,1\} \times \{0,1,2\}$, l'état initial est $(0,0)$, il y a un seul état final $(1,0)$. L'automate contient par exemple les transitions $(0,1) \xrightarrow{b} (1,1)$ et $(0,1) \xrightarrow{b} (1,2)$ qui correspondent à la transition $0 \xrightarrow{b} 1$ de $\mathcal{A}$ synchronisée avec (respectivement) les deux transitions $1 \xrightarrow{b} 1$ et $1 \xrightarrow{b} 2$ de $\mathcal{B}$.

(e) Calculer une expression rationnelle du langage accepté par l'automate $\mathcal{B}$.

Les équations associées à $\mathcal{B}$ sont :

i. $L_0 = aL_0 + bL_1 + \varepsilon$

ii. $L_1 = bL_1 + bL_2 + cL_0$

iii. $L_2 = aL_1$

On remplace la troisième équation dans la seconde : $L_1 = (b + ba)L_1 + cL_0$,
puis on applique le lemme d'Arden (car $\varepsilon \notin \{b, ba\}$) : $L_1 = (b + ba)^*cL_0$.
On remplace ensuite dans la première équation : $L_0 = aL_0 + b(b + ba)^*cL_0 + \varepsilon$,
et on applique finalement à nouveau le lemme d'Arden, d'où :
$M = L_0 = [a + b(b + ba)^*c]^*$.

(f) Construire un automate déterministe acceptant M.