

EXERCICE 43

Logique - Quantificateurs

quelle que soit la constante a ,

quels que soient les prédictats P Q ,

$$(\exists x, (P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow ((\forall x, \neg(Q(x))) \Rightarrow (\exists x, P(x)))$$

Soit la constante a

Supposons que $\exists x, (\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x))$ (h1)

Montrons $(\forall x, \neg(\mathbf{Q}(x))) \Rightarrow (\exists x, \mathbf{P}(x))$ (1)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $\forall x, \neg(\mathbf{Q}(x))$ (h2)

Montrons $\exists x, \mathbf{P}(x)$ (2)

($\exists E$)

Montrons $\exists x, (\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x))$ (3)

d'après (h1)

Soit l'élément x

Supposons que $\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)$ (h3)

Montrons $\exists x, \mathbf{P}(x)$ (4)

($\forall E$)

Montrons $\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)$ (5)

d'après (h3)

Supposons que $\mathbf{P}(x)$ (h4)

Montrons $\exists x, \mathbf{P}(x)$ (6)

($\exists I$)

Montrons $\mathbf{P}(x)$ (7)

d'après (h4)

Supposons que $\mathbf{Q}(x)$ (h5)

Montrons $\exists x, \mathbf{P}(x)$ (8)

($\perp E$)

Montrons \perp (9)

($\neg E$)

Montrons $\mathbf{Q}(x)$ (10)

d'après (h5)

Montrons $\neg(\mathbf{Q}(x))$ (11)

($\forall E$)

Montrons $\forall x, \neg(\mathbf{Q}(x))$ (12)

d'après (h2)