Année 2009-2010 - S2

LI214 - 6 avril 2010

Durée : 2h - Documents, calculettes et téléphones interdits

Inscrire votre numéro de groupe sur votre copie. La note (entre 0 et 60) est le minimum entre 60 et la somme des points obtenus (entre 0 et 72).

Exercice 1 (8 points)

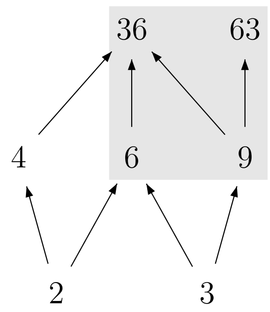
1. Donner une application $e : \{a,b,c\} \mapsto \{a,b,c\}$ qui ne soit ni injective ni surjective.
2. Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'application est injective, surjective, bijective. Justifier les réponses.
   (a) $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ définie par $f(x) = x^2$ si $x > 0$ et $f(x) = -x^2$ si $x \leq 0$
   (b) $g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ définie par $g(x) = x - 5$
   (c) $h : \mathbb{N} \mapsto \{0,1,2\}$ qui à $x \in \mathbb{Z}$ associe son reste dans la division par 3.

1. Par exemple $e(a) = e(b) = a$, donc e non injective et $e(c) = b$ donc e non surjective car c n'a pas d'antécédent.
2. (a) f est injective car supposons $f(x) = f(y)$. Comme les images des entiers négatifs sont négatives, et celles des entiers positifs sont positives, x et y ont même signe. par symétrie, si on suppose x et y positifs, alors $x = y$. Mais f n'est pas surjective car par exemple 3 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{Z}$.
   (b) g est bijective car soit $y \in \mathbb{Z}$, il existe un unique $x = y + 5$ tel que $g(x) = y$.
   (c) h est surjective car $h(p) = p$ pour $p = 0,1,2$, mais pas injective car par exemple $h(3) = h(6) = 0$.

Exercice 2 (17 points= 3+4+2+8)

1. (a) Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\preceq$ et A une partie de E. Donner la définition de la borne supérieure de A dans E et d'un élément maximal de A. Donner la définition d'un ordre bien fondé.
   (b) Démontrer que l'ordre $\preceq$ sur E est bien fondé si et seulement si toute partie non vide de E admet au moins un élément minimal.
2. Soit l'ensemble $E = \{2,3,4,6,9,36,63\}$ ordonné par la relation « x divise y ».
   (a) Représenter la relation d'ordre sur E par un graphe (sans les arcs de réflexivité et de transitivité).
   (b) Pour la partie $A = \{6,9,36,63\}$ de E, donner l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants. A admet-elle une borne inférieure ? une borne supérieure ? un minimum ? un maximum ? Donner les éléments minimaux et les éléments maximaux de A. Justifier les réponses.

1. voir cours.

2. (a) 

   (b) Dans E, on a : $Maj(A) = \emptyset$ et $Min(A) = \{3\}$. Donc A n'a ni plus grand élément, ni borne supérieure (qui seraient tous deux des éléments de $Maj(A)$) et A n'a pas de plus petit élément mais une borne inférieure $inf(A) = 3$ (le plus grand des minorants). Les éléments minimaux de A sont 6 et 9 (aucun élément de A strictement inférieur), les éléments maximaux sont 36 et 63.

Exercice 3 **(9 points = 3+3+3)**

1. On considère la fonction f définie inductivement sur $\mathbb{N}$ par $f(k+1) = 3f(k) + 4$ et $f(0) = c$ pour un entier naturel c donné.
   Montrer par récurrence que $f(k) = 3^k(c+2) - 2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit l'ensemble $\mathcal{T}$ des termes construits sur $F_0 \cup F_1$, avec $F_0 = \{a\}$ et $F_1 = \{s\}$.
   (a) On définit inductivement s^n par $s^0(a) = a$ et $s^{n+1}(a) = s(s^n(a))$. Donner la définition inductive de $\mathcal{T}$ et montrer (double inclusion) que $\mathcal{T} = \{s^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
   (b) Soit l'interprétation h de ces termes ayant pour domaine $\mathbb{N}$, avec $h(a) = 5$ et $h_s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $h_s(n) = 3n + 4$. On rappelle la définition inductive de la valeur $h^*(t)$ d'un terme t de cet ensemble :
   (B) $h^*(a) = h(a)$,
   (I) $h^*(t) = h_s(h^*(t_1))$ pour un terme $t = s(t_1)$.
   Déterminer h^* et justifier la réponse.

1. (B) : $3^0(c+2) - 2 = c = f(0)$
   (I) : supposons $f(k) = 3^k(c+2) - 2$ pour $k \geq 0$. Alors $f(k+1) = 3f(k) + 4$ par définition donc $f(k+1) = 3(3^k(c+2) - 2) + 4$ par hypothèse de récurrence, d'où $f(k+1) = 3^{k+1}(c+2) - 6 + 4 = 3^{k+1}(c+2) - 2$, ce qui donne le résultat pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. (a) L'ensemble $\mathcal{T}$ des termes sur $F_0 \cup F_1$ est défini inductivement par :
   (B) : $a \in \mathcal{T}$
   (I) : si t appartient à $\mathcal{T}$ alors $s(t) \in \mathcal{T}$.
   • On montre par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s^n(a) \in \mathcal{T}$.
   • Réciproquement, on montre par induction structurelle que tout terme de $\mathcal{T}$ est de la forme $s^n(a)$ pour un entier naturel n. C'est vrai pour a qui est égal à $s^0(a)$ d'après la définition inductive de $s^n(a)$. Supposons que ce soit vrai pour un terme t de $\mathcal{T}$: $t = s^n(a)$. Alors $s(t) = s(s^n(a)) = s^{n+1}(a)$ toujours d'après la définition inductive de $s^n(a)$, ce qui conclut la démonstration.

(b) Pour déterminer h^* sur $\mathcal{T}$, on voit d'abord d'après (B) que $h^*(a) = h(a) = 5$. En appliquant (I) sur $t = s^{n+1}(a) = s(s^n(a))$, on obtient : $h^*(s^{n+1}(a)) = h_s(h^*(s^n(a))) = 3 \times h^*(s^n(a)) + 4$. On retrouve donc la relation de récurrence du paragraphe précédent, ce qui donne, avec $c = 5$: $h^*(s^n(a)) = 3^n(c+2) - 2 = 7 \times 3^n - 2$ pour tout entier naturel n.

Exercice 4 (12 points=3+2+5+2) On considère l'ensemble ABP contenant les arbres binaires non vides sur $\{a, b\}$, dont tous les sous-arbres gauches sont réduits à des feuilles. Ces arbres sont appelés des *peignes* et sont définis inductivement par :

(B) $(a, \emptyset, \emptyset)$ et $(b, \emptyset, \emptyset)$ sont dans ABP (et notés respectivement a et b).

(I) Si t est dans ABP et $r \in \{a, b\}$, alors (r, a, t) et (r, b, t) sont aussi dans ABP.

1. On note comme pour les arbres binaires usuels $h(t)$ la hauteur d'un arbre, $n(t)$ son nombre de noeuds et $f(t)$ son nombre de feuilles. Rappelez les définitions inductives de ces fonctions en les adaptant pour les peignes.
2. Les deux arbres a et b étant de hauteur 1, dessiner un peigne de hauteur 3 et un peigne de hauteur 4.
3. Montrer par induction que $f(t) = h(t)$, puis que $n(t) = 2h(t) - 1$.
4. Donner une définition inductive de la fonction *nba* qui associe à un peigne le nombre de noeuds étiquetés par a.

1.

```
        a                        b
       / \                      / \
      b   b                    a   b
         / \                      / \
        a   a                    b   a
                                    / \
                                   a   a
```

On se rappelle que la hauteur est définie inductivement par :
(Bh) $h(a) = 1$ et $h(b) = 1$
(Ih) $h(t) = max(h(g), h(d)) + 1$ si $t = (r, g, d)$
Mais ici, g est toujours de hauteur 1 et d non vide donc $h(d) \geq 1$. Ainsi on peut modifier (Ih) en : $h(r, a, t) = h(r, b, t) = h(t) + 1$.

2. Le nombre de feuilles est défini inductivement par :
(Bf) $f(a) = f(b) = 1$
(If) $f(t) = f(g) + f(d)$ si $t = (r, g, d)$
Mais ici, g est toujours une feuille donc (If) devient : $f(r, a, t) = f(r, b, t) = 1 + f(t)$. L'unicité de la définition par induction permet donc de conclure.

3. Le nombre de noeuds est défini inductivement par :
(Bn) $n(a) = n(b) = 1$

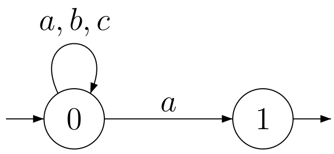
(In) $n(t) = 1 + n(g) + n(d)$ si $t = (r, g, d)$
A nouveau, dans ABP, g est toujours une feuille donc (In) devient : $n(r, a, t) = n(r, b, t) = 2 + n(t)$. Montrons ce résultat par induction. Pour $r \in \{a, b\}$, on a : $h(r) = 1$ et $n(r) = 1 = 2 \times 1 - 1$. Supposons la propriété vraie pour un arbre t de ABP. Alors pour $r \in \{a, b\}$ et $s \in \{a, b\}$, $n(r, s, t) = 2 + n(t)$ d'après (In) modifiée. Par hypothèse d'induction, $n(t) = 2h(t) - 1$, donc $n(r, s, t) = 2 + 2h(t) - 1$. Ainsi, $n(r, s, t) = 2(h(t) + 1) - 1$ avec $h(t) + 1 = h(r, s, t)$ d'après (Ih) modifiée. On a donc le résultat.

4. Définition inductive de nba :
   (Ba) $nba(a) = 1$ et $nba(b) = 0$
   (Ia) Soient $t \in ABP$, $r \in \{a, b\}$ et $s \in \{a, b\}$.
   Alors $nba(r, s, t) = nba(r) + nba(s) + nba(t)$.

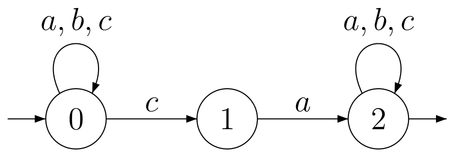
Exercice 5 (26 points=4+4+2+3+4+4+5) On se place sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$.

1. Dessiner un automate fini acceptant le langage $L = (ba^*c)^*a$.
2. On considère les automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ suivants :

$\mathcal{A}_1$:

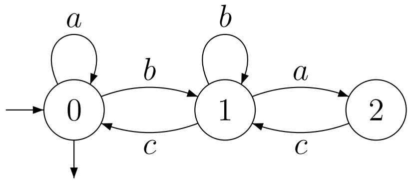


$\mathcal{A}_2$:

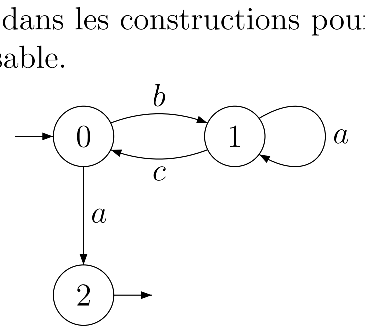


   (a) Les automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont-ils déterministes ? complets ? (justifier les réponses).
   (b) Décrire (en français) les langages acceptés $L_1 = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$ et $L_2 = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$. **En explicitant les constructions et le calcul :**
   (c) Construire un automate acceptant la concaténation des langages L_1L_2,
   (d) construire un automate acceptant l'intersection des langages $L_1 \cap L_2$,
   (e) construire un automate déterministe acceptant L_2.
3. Calculer l'expression rationnelle du langage accepté par l'automate :

$\mathcal{A}$:



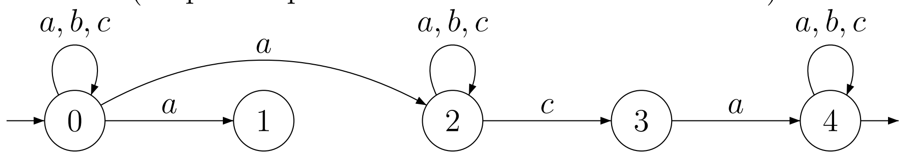
1. On procède un peu comme dans les constructions pour le produit et l'étoile, dans le sens rationnel $\Rightarrow$ reconnaissable.



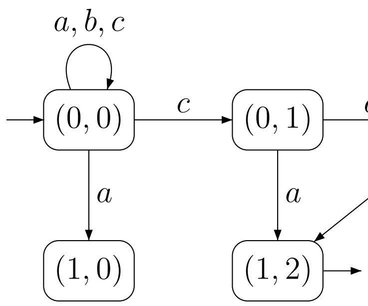
2. (a) Aucun des deux automates n'est déterministe ou complet : $\mathcal{A}_1$ n'est pas déterministe car il y a deux transitions d'étiquette a partant de l'état 0, ni complet car il n'y a pas de transition partant de 1. $\mathcal{A}_2$ n'est pas déterministe car il y a deux transitions d'étiquette c partant de l'état 0, ni complet car il n'y a pas de transition d'étiquette b ou c partant de 1.

   (b) Le langage $L_1 = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$ accepte les mots de A^* se terminant par a et le langage $L_2 = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ accepte les mots de A^* contenant le facteur ca.

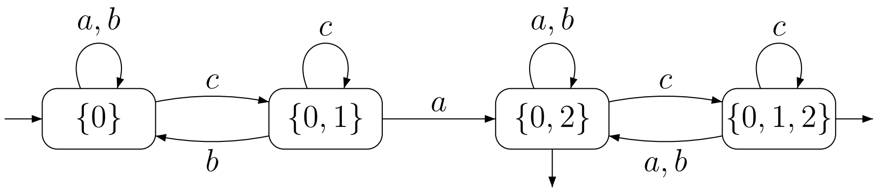
   (c) En appliquant la construction du cours, on obtient pour le produit L_1L_2 l'automate suivant (duquel on pourrait maintenant retirer l'état 1) :



   (d) La construction pour $L_1 \cap L_2$ repose sur le produit cartésien des états et la synchronisation des transitions. Sur l'automate construit, on pourrait aussi retirer l'état $(1, 0)$.



   (e) Les états d'un automate déterministe acceptant L_2 sont des parties de $\{0, 1, 2\}$:



3. En notant L_i le langage accepté par $\mathcal{A}$ partant de i, pour $i = 0, 1, 2$, le système d'équation associé à $\mathcal{A}$ est :

$$\begin{cases} (1)\ L_0 = aL_0 + bL_1 + \varepsilon \\ (2)\ L_1 = bL_1 + aL_2 + cL_0 \\ (3)\ L_2 = cL_1 \end{cases}$$

En reportant (3) dans (2), on obtient $L_1 = bL_1 + acL_1 + cL_0$, donc $L_1 = (b+ac)L_1 + cL_0$ et en appliquant le lemme d'Arden, $L_1 = (b + ac)^*cL_0$.
En reportant ce résultat dans (1), on obtient $L_0 = (a + b(b + ac)^*c)L_0 + \varepsilon$, d'où à nouveau par le lemme d'Arden $L_0 = [a + b(b + ac)^*c]^*$ qui est le résultat cherché puisque $L_0 = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.