Modélisation, Optimisation, Graphes et Programmation Linéaire
Examen deuxième session 2017-2018

Une feuille manuscrite recto-verso est autorisée. Tout autre document est interdit. Les téléphones doivent être rangés.

Le barême est **indicatif** et peut donc être sujet à modifications.

Exercice 1: (4 points) Modélisation

La société Glueco produit 3 types de colle A, B, C sur deux lignes de production distinctes. Chaque ligne peut être utilisée par au plus 7 employés à la fois. Les employés sont payés 500 euros la semaine sur la ligne de production 1 et 900 euros la semaine sur la ligne de production 2. L'initialisation d'une semaine de production coûte 1000 euros sur la ligne 1 et 2000 euros sur la ligne 2 (on précise que le coût d'initialisation d'une ligne n'existe que s'il y a au moins un employé qui travaille dessus dans la semaine). Un employé travaillant une semaine sur la ligne 1 produit 20 unités de colle A, 30 unités de colle B et 40 unités de colle C. Un employé travaillant une semaine sur la ligne 2 produit 50 unités de colle A, 35 unités de colle B et 45 unités de colle C. Chaque semaine, la demande implique de produire au moins 120 unités de colle A, 150 unités de colle B et au moins 200 unités de colle C. Formuler un programme linéaire en nombres entiers permettant de déterminer comment satisfaire la demande à moindre coût sur une semaine (on précisera les variables de décision du problème, les contraintes et l'objectif, on ne demande pas de résoudre le problème).

Exercice 2: (7 points) Flot et dualité

On considère une instance d'un problème de flot maximum avec un graphe orienté $G = (V, A)$, un sommet source s, un sommet puits t, et pour chaque arc $(i, j) \in A$ une capacité $c_{ij} \in \mathbb{N}$.

On exprime le problème du flot maximum (continu) par le programme linéaire (P) suivant :

$$\left\{\begin{array}{l|ll} \max\ v & & \\ s.t. & \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki} \;=\; & \left\{\begin{array}{lll} v & si & i = s \\ -v & si & i = t \\ 0 & si & i \notin \{s,t\} \end{array}\right. , \\ & x_{ij} \leq c_{ij}, & \forall (i,j) \in A, \\ & x_{ij} \geq 0, & \forall (i,j) \in A. \end{array}\right.$$

La variable v correspond à la valeur du flot. La première contrainte exprime le fait que le flux sortant de s est v (cas $i = s$), le fait que le flux entrant en t est v (cas $i = t$), et la conservation aux nœuds pour un sommet $i \notin \{s, t\}$.

1. (3 points) Afin d'écrire le dual (D) du programme linéaire ci-dessus, on note z_i la variable de (D) associée à la contrainte de (P) liée au sommet $i \in V$, et y_{ij} la variable de (D) associée à la contrainte $x_{ij} \leq c_{ij}$.
   (a) Ecrire la contrainte de (D) associée à la variable v de (P).
   (b) Ecrire la contrainte de (D) associée à la variable x_{ij} de (P) (pour un arc $(i, j) \in A$).
   (c) Exprimer alors (D).
2. (0.5 point) On considère le PL en variables binaires (D_{01}) obtenu à partir de (D) en imposant aux variables z_i et y_{ij} de valoir 0 ou 1.
   Montrer que dans toute solution réalisable de (D_{01}) $z_s = 0$ et $z_t = 1$.

3. (2 points) On considère une solution optimale (z^*, y^*) de (D_{01}), à laquelle on associe $A = \{i \in V : z_i^* = 0\}$ et $B = \{i \in V : z_i^* = 1\}$.
   Soit un arc $(i, j) \in A$. Donner les valeurs de y_{ij}^* suivant que i et j sont dans A ou B (4 cas donc à distinguer). A quoi est égale la capacité de la coupe (A, B) dans le réseau ?
4. (1.5 point) Réciproquement, soit (S, T) une coupe du réseau avec $s \in S$ et $t \in T$. Comment définir les variables z et y de (D_{01}) pour avoir une solution dont la valeur est la capacité de (S, T) ?
   Que modélise alors sur le programme (D_{01}) ?

Exercice 3: (4 points) **Modélisation et résolution par la PLNE**

Un caviste dispose de deux types de bouteilles de champagne supérieur, les champagnes millésimés et les champagnes non millésimés. Il souhaite proposer des colis de bouteilles pour les fêtes de Noël. Il envisage deux types de colis :
— le colis 1 est composé d'une bouteille de champagne millésimé et de 3 bouteilles de champagne non millésimé et est proposé à 80 Euros
— le colis 2 est composé de deux bouteilles de champagne millésimé et de 4 bouteilles de champagne non millésimé et est proposé à 120 Euros

Sachant qu'il lui reste seulement 10 bouteilles de champagne millésimé et de 25 bouteilles de champagne non millésimé, on souhaite savoir combien de colis de chaque type il doit constituer pour maximiser le revenu lié à la vente des colis.

1. (1 point) Modéliser ce problème comme un programme linéaire en nombres entiers (PLNE).
2. (3 points) Résoudre le PLNE obtenu à la question précédente à l'aide de la procédure de séparation/évaluation vue en cours (à chaque itération, on justifiera la solution trouvée à la relaxation continue du sous-problème courant par une résolution graphique).

Exercice 4: (5 points) **Flot et transport**

On considère le problème de transport consistant à acheminer de l'huile d'olive depuis 4 sources A, B, C, D vers 3 destinations a, b, c. Les demandes en a, b et c sont respectivement de 10, 15 et 25 tonnes d'huile. Les stocks en A, B, C et D sont respectivement de 20, 10, 10 et 10 tonnes d'huile.

Les coûts (par tonne) de transport sont donnés par la matrice suivante :

	a	b	c
A	0	0	7
B	3	0	3
C	0	8	0
D	5	0	0

1. (1 point) Dessiner le réseau "des coûts 0" (algorithme hongrois), et représenter sur ce graphe le flot consistant à acheminer 10 tonnes de A à a, 5 de A à b, 10 de C à c, et 10 de D à b.
2. (2 points) Appliquer l'algorithme de Ford et Fulkerson **à partir du flot de la question précédente** sur ce réseau pour trouver un flot maximum. On indiquera clairement la/les procédure(s) de marquage, la/les chaîne(s) augmentante(s), le flot maximum trouvé et sa valeur.
3. (2 points) Le flot maximum trouvé permet-il de déduire une solution optimale du problème de transport (dans l'algorithme hongrois) ? Si oui donner cette solution, si non indiquer les modifications à effectuer sur la matrice pour la suite de l'algorithme (il n'est pas demandé de poursuivre l'algorithme).