

EXERCICE 12

Logique - Quantificateurs

quels que soient les prédicats F G ,

quelle que soit la constante a ,

$$(((\forall x, F(x)) \Rightarrow G(a)) \Leftrightarrow \exists x, (F(x) \Rightarrow G(a)))$$

Soit la constante a

Montrons $((\forall x, F(x)) \Rightarrow G(a)) \Leftrightarrow \exists x, (F(x) \Rightarrow G(a))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $(\forall x, F(x)) \Rightarrow G(a)$ (h1)

Montrons $\exists x, F(x) \Rightarrow G(a)$ (2)

(TE)

Supposons que $\exists x, \neg(F(x))$ (h2)

Montrons $\exists x, F(x) \Rightarrow G(a)$ (3)

($\exists E$)

Montrons $\exists x, \neg(F(x))$ (4)

d'après (h2)

Soit l'élément x

Supposons que $\neg(F(x))$ (h3)

Montrons $\exists x, F(x) \Rightarrow G(a)$ (5)

($\exists E$)

Montrons $\exists x, \neg(F(x))$ (6)

d'après (h2)

Soit l'élément x_0

Supposons que $\neg(F(x_0))$ (h4)

Montrons $\exists x, F(x) \Rightarrow G(a)$ (7)

($\exists I$)

Supposons que $F(x_0)$ (h5)

Montrons $G(a)$ (8)

($\perp E$)

Montrons \perp (9)

($\neg E$)

Montrons $F(x_0)$ (10)

d'après (h5)

Montrons $\neg(F(x_0))$ (11)

d'après (h4)

Supposons que $\neg(\exists x, \neg(F(x)))$ (h6)

Montrons $\exists x, F(x) \Rightarrow G(a)$ (12)

Montrons $\neg \mathbf{F}(\mathbf{a}) \Rightarrow \neg \mathbf{G}(\mathbf{a})$ (12)

($\exists I$)

Supposons que $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ (h7)

Montrons $\mathbf{G}(\mathbf{a})$ (13)

($\Rightarrow E$)

Montrons $\forall \mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})$ (14)

d'après le lemme 27 de la section 'De Morgan'

Montrons $\neg(\exists \mathbf{x}, \neg(\mathbf{F}(\mathbf{x})))$ (15)

d'après (h6)

Montrons $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})) \Rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{a})$ (16)

d'après (h1)

Supposons que $\exists \mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{a})$ (h8)

Montrons $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})) \Rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{a})$ (17)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})$ (h9)

Montrons $\mathbf{G}(\mathbf{a})$ (18)

($\exists E$)

Montrons $\exists \mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{a})$ (19)

d'après (h8)

Soit l'élément \mathbf{x}

Supposons que $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{a})$ (h10)

Montrons $\mathbf{G}(\mathbf{a})$ (20)

($\Rightarrow E$)

Montrons $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ (21)

($\forall E$)

Montrons $\forall \mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})$ (22)

d'après (h9)

Montrons $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{a})$ (23)

d'après (h10)