

EXERCICE 11

Logique - Quantificateurs

quels que soient les prédictats F G ,
quelle que soit la constante a ,

$$(((\exists x, F(x)) \vee G(a)) \Leftrightarrow (\exists x, (F(x) \vee G(a))))$$

Soit la constante α

Montrons $((\exists x, F(x)) \vee G(\alpha)) \Leftrightarrow (\exists x, (F(x) \vee G(\alpha)))$ (1)

$(\Leftrightarrow I)$

Supposons que $(\exists x, F(x)) \vee G(\alpha)$ (h1)

Montrons $\exists x, (F(x) \vee G(\alpha))$ (2)

$(\forall E)$

Montrons $(\exists x, F(x)) \vee G(\alpha)$ (3)

d'après (h1)

Supposons que $\exists x, F(x)$ (h2)

Montrons $\exists x, (F(x) \vee G(\alpha))$ (4)

$(\exists E)$

Montrons $\exists x, F(x)$ (5)

d'après (h2)

Soit l'élément x

Supposons que $F(x)$ (h3)

Montrons $\exists x, (F(x) \vee G(\alpha))$ (6)

$(\exists I)$

Montrons $F(x) \vee G(\alpha)$ (7)

$(\vee Ig)$

Montrons $F(x)$ (8)

d'après (h3)

Supposons que $G(\alpha)$ (h4)

Montrons $\exists x, (F(x) \vee G(\alpha))$ (9)

$(\exists I)$

Montrons $F(\alpha) \vee G(\alpha)$ (10)

$(\vee Id)$

Montrons $G(\alpha)$ (11)

d'après (h4)

Supposons que $\exists x, (F(x) \vee G(\alpha))$ (h5)

Montrons $(\exists x, F(x)) \vee G(\alpha)$ (12)

$(\exists E)$

Montrons $\exists x, (F(x) \vee G(\alpha))$ (13)

d'après (h5)

Soit l'élément x

Supposons que $F(x) \vee G(a)$ (h6)

Montrons $(\exists x, F(x)) \vee G(a)$ (14)

($\vee E$)

Montrons $F(x) \vee G(a)$ (15)

d'après (h6)

Supposons que $F(x)$ (h7)

Montrons $(\exists x, F(x)) \vee G(a)$ (16)

($\vee Ig$)

Montrons $\exists x, F(x)$ (17)

($\exists I$)

Montrons $F(x)$ (18)

d'après (h7)

Supposons que $G(a)$ (h8)

Montrons $(\exists x, F(x)) \vee G(a)$ (19)

($\vee Id$)

Montrons $G(a)$ (20)

d'après (h8)