

## 24 LOIS DE DE MORGAN 2/4

### Quantificateurs

*quel que soit* le prédicat F,

$$(\exists x, \neg(F(x))) \Leftrightarrow \neg(\forall x, F(x)))$$

---

Montrons  $(\exists x, \neg(\mathbf{F}(x))) \Leftrightarrow \neg(\forall x, \mathbf{F}(x))$  (1)

( $\Leftrightarrow I$ )

Supposons que  $\exists x, \neg(\mathbf{F}(x))$  (h1)

Montrons  $\neg(\forall x, \mathbf{F}(x))$  (2)

( $\exists E$ )

Montrons  $\exists x, \neg(\mathbf{F}(x))$  (3)

d'après (h1)

Soit l'élément  $a$

Supposons que  $\neg(\mathbf{F}(a))$  (h2)

Montrons  $\neg(\forall x, \mathbf{F}(x))$  (4)

( $\neg I$ )

Supposons que  $\forall x, \mathbf{F}(x)$  (h3)

Montrons  $\perp$  (5)

( $\neg E$ )

Montrons  $\mathbf{F}(a)$  (6)

( $\forall E$ )

Montrons  $\forall x, \mathbf{F}(x)$  (7)

d'après (h3)

Montrons  $\neg(\mathbf{F}(a))$  (8)

d'après (h2)

Supposons que  $\neg(\forall x, \mathbf{F}(x))$  (h4)

Montrons  $\exists x, \neg(\mathbf{F}(x))$  (9)

(A)

Supposons que  $\neg(\exists x, \neg(\mathbf{F}(x)))$  (h5)

Montrons  $\perp$  (10)

( $\neg E$ )

Montrons  $\forall x, \mathbf{F}(x)$  (11)

( $\forall I$ )

Soit l'élément  $a$

Montrons  $\mathbf{F}(a)$  (12)

(A)

Supposons que  $\neg(\mathbf{F}(a))$  (h6)

*Montrons*  $\perp$  (13)

( $\neg E$ )

*Montrons*  $\exists x, \neg (\mathbf{F} (x))$  (14)

( $\exists I$ )

*Montrons*  $\neg (\mathbf{F} (a))$  (15)

*d'après* (h6)

*Montrons*  $\neg (\exists x, \neg (\mathbf{F} (x)))$  (16)

*d'après* (h5)

*Montrons*  $\neg (\forall x, \mathbf{F} (x))$  (17)

*d'après* (h4)