

# LI214 - 11 avril 2012

Durée : 2h - Documents, calculatrices et téléphones interdits

**Inscrire votre numéro de groupe sur votre copie.** La note (entre 0 et 60) est le minimum entre 60 et la somme des points obtenus (entre 0 et 72).

## Exercice 1 (15 points=4+1+3+4+3)

- On considère les applications  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$  et  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = 2x + 1$ . Déterminer les applications composées  $f \circ f$ ,  $f \circ g$ ,  $g \circ f$  et  $g \circ g$ .

$$(f \circ f)(x) = x^4, (f \circ g)(x) = (2x + 1)^2, (g \circ f)(x) = 2x^2 + 1, (g \circ g)(x) = 4x + 3.$$

- Donner la définition d'une application injective de  $E$  dans  $F$ .

Cf cours.

- On considère la fonction  $h$  définie par  $h(x) = 1 + \frac{2}{x}$ . Déterminer les plus grands sous-ensembles  $E$  et  $F$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $h$  soit une application bijective de  $E$  dans  $F$ . Justifier la bijection.

Soient  $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et  $F = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Pour  $y \in F$ , il existe un unique  $x = \frac{2}{y-1}$  de  $E$  tel que  $y = f(x)$ .

- Dire si les applications suivantes sont injectives, surjectives. Justifier les réponses.  
(a)  $F : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$  est définie par  $F(n) = 2n - 3$  si  $n \geq 1$  et  $n + 1$  sinon.

L'application  $F$  n'est pas injective car  $F(2) = 1$  et  $F(0) = 1$ . Elle n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent par  $F$ .

(b)  $G : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  est définie par  $G(x) = 2x - |x|$ .

L'application  $G$  peut être décrite par :  $G(x) = x$  si  $x \geq 0$  et  $G(x) = 3x$  si  $x \leq 0$ . Soient  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $G(x_1) = G(x_2)$  alors si  $x_1$  et  $x_2$  ne sont pas de même signe, ils sont différents. Sinon, ou bien  $x_1 = x_2$  ou bien  $3x_1 = 3x_2$  donc aussi  $x_1 = x_2$ . Donc  $G$  est injective.

Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Si  $y \geq 0$  alors  $y = G(y)$  et si  $y \leq 0$  alors  $y = G(\frac{y}{3})$  donc  $G$  est surjective. On en déduit que  $G$  est bijective.

5. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Notons  $S_n = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ .

Pour  $n = 1$ , on a bien l'égalité  $\frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$  voulue.

Supposons que  $S_n = \frac{n}{2n+1}$ .

Alors  $S_{n+1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}$ .

Donc  $S_{n+1} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$  d'où le résultat.

## Exercice 2 (19 points= 3+4+2+2+8)

1. (a) Soit  $E$  un ensemble muni d'une relation d'ordre  $\preceq$  et  $A$  une partie de  $E$ . Donner la définition d'un minorant de  $A$  dans  $E$  et du plus petit élément de  $A$ . Donner la définition d'un ordre bien fondé.
- (b) Démontrer que l'ordre  $\preceq$  sur  $E$  est bien fondé si et seulement si toute partie non vide de  $E$  admet au moins un élément minimal.

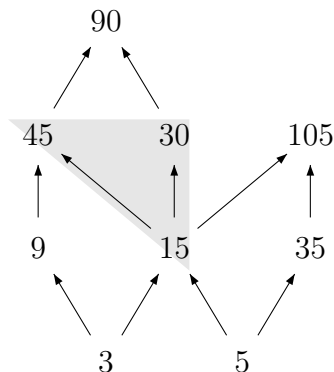
Cf. cours.

- (c) L'ordre naturel  $\leq$  sur l'ensemble  $\mathbb{R}_+$  des nombres réels positifs ou nuls est-il bien fondé? Justifier la réponse.

Non, car la suite  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  est infinie et strictement décroissante.

2. On considère l'ensemble d'entiers naturels  $E = \{3, 5, 9, 15, 30, 35, 45, 90, 105\}$  ordonné par la relation «  $x$  divise  $y$  ».

- (a) Représenter la relation d'ordre sur  $E$  par un graphe (sans les arcs de réflexivité et de transitivité).

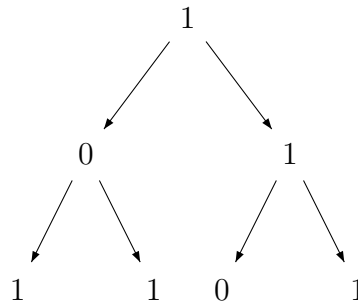


- (b) Pour la partie  $A = \{15, 30, 45\}$  de  $E$ , donner l'ensemble des minorants et l'ensemble des majorants. Cette partie  $A$  admet-elle une borne inférieure ? une borne supérieure ? un plus petit élément ? un plus grand élément ? Donner les éléments minimaux et les éléments maximaux de  $A$ .

La partie  $A$  (grisée) a pour ensemble de minorants  $\{3, 5, 15\}$  et comme ensemble de majorants  $\{90\}$ , dans  $E$ . Par conséquent, elle admet 90 comme borne supérieure mais pas de plus grand élément. Elle admet 15 comme borne inférieure, qui est en même temps son plus petit élément et son unique élément minimal. Les éléments maximaux de  $A$  sont 30 et 45.

### Exercice 3 (16 points = 1+2+5+4+4)

1. On considère le sous-ensemble  $ABC$  d'arbres binaires sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  contenant les *arbres binaires complets*. L'ensemble  $ABC$  est défini inductivement par :
  - (B) 0 et 1 sont des arbres binaires complets,
  - (I) si  $g$  et  $d$  sont deux arbres binaires complets de même hauteur, alors  $(0, g, d)$  et  $(1, g, d)$  sont des arbres binaires complets.
- (a) En considérant que les arbres 0 et 1 sont de hauteur 1, dessiner un arbre binaire complet de hauteur 3. Définir inductivement la fonction  $nb1$  qui associe à un arbre binaire sur  $\{0, 1\}$  le nombre de noeuds qui valent 1.



- (B)  $nb1(0) = 0$  et  $nb1(1) = 1$ ,
- (I) si  $g$  et  $d$  sont deux arbres binaires, alors  $nb1(0, g, d) = nb1(g) + nb1(d)$  et  $nb1(1, g, d) = 1 + nb1(g) + nb1(d)$ .
- (b) En notant  $h(t)$  la hauteur d'un arbre binaire et  $n(t)$  son nombre de noeuds, rappeler les définitions inductives usuelles de  $h$  et  $n$  et montrer par induction que pour tout arbre  $t$  de  $ABC$ ,  $n(t) = 2^{h(t)} - 1$ .
  - (Bh)  $h(0) = h(1) = 1$ ,
  - (Ih) si  $g$  et  $d$  sont deux arbres binaires et si  $x \in \{0, 1\}$  alors  $h(x, g, d) = 1 + \max(h(g), h(d))$ .

(Bn)  $n(0) = n(1) = 1$ ,

(In) si  $g$  et  $d$  sont deux arbres binaires et si  $x \in \{0, 1\}$  alors  $n(x, g, d) = 1 + n(g) + n(d)$ .

Pour les deux arbres 0 et 1, on a bien l'égalité puisque  $2^1 - 1 = 1$ .

Soit  $t = (x, g, d)$  un arbre binaire de  $ABC$ , avec  $x \in \{0, 1\}$  et donc  $h(g) = h(d)$ . L'hypothèse d'induction sur  $g$  et  $d$  implique :  $n(g) = 2^{h(g)} - 1$  et  $n(d) = 2^{h(d)} - 1$ . Par la définition inductive (In), on a  $n(t) = 1 + n(g) + n(d)$ , donc  $n(t) = 1 + 2^{h(g)} - 1 + 2^{h(d)} - 1 = 2^{h(g)} + 2^{h(d)} - 1$ . L'hypothèse d'égalité des hauteurs implique donc  $n(t) = 2 \times 2^{h(d)} - 1 = 2^{h(d)+1} - 1$ . Mais d'après l'hypothèse d'induction (Ih),  $h(t) = 1 + h(d)$ , ce qui permet de conclure que  $n(t) = 2^{h(t)} - 1$ .

2. Soit  $\mathcal{T}$  l'ensemble des termes construits sur  $F_0 \cup F_1$ , avec  $F_0 = \{a\}$  et  $F_1 = \{s\}$ .

(a) Donner la définition inductive des termes de  $\mathcal{T}$ . On définit  $s^n(a)$  inductivement par :  $s^0(a) = a$  et  $s^{n+1}(a) = s(s^n(a))$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Montrer que  $\mathcal{T} = \{s^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Cf. cours (double inclusion).

(b) On interprète les termes de  $\mathcal{T}$  sur le domaine  $D = \mathbb{N}$ , en associant à  $a$  la valeur  $a_D = 5$  et à  $s$  l'application  $s_D : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  définie par  $s_D(n) = 3n$ . Déterminer la valeur  $h^*$  d'un terme quelconque de  $\mathcal{T}$  (justifier la réponse).

On rappelle la définition inductive de l'application  $h^*$  sur l'ensemble  $\mathcal{T}$  :

(B)  $h^*(a) = a_D$ ,

(I)  $h^*(t) = s_D(h^*(t_1))$  pour un terme  $t = s(t_1)$ .

On montre par induction que  $h^*(s^n(a)) = 5 \times 3^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

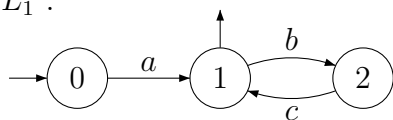
Pour  $n = 0$ ,  $h^*(a) = 5$ .

Supposons que  $h^*(s^n(a)) = 5 \times 3^n$ . Alors  $s^{n+1}(a) = s(s^n(a))$  par définition de  $s^n(a)$ . Donc  $h^*(s^{n+1}(a)) = h^*(s(s^n(a))) = s_D(h^*(s^n(a)))$  d'après la définition inductive de  $h^*$ . Ainsi,  $h^*(s^{n+1}(a)) = s_D(5 \times 3^n)$  en appliquant l'hypothèse d'induction, et  $h^*(s^{n+1}(a)) = 3 \times 5 \times 3^n$  en appliquant la définition de  $s_D$ , d'où  $h^*(s^{n+1}(a)) = 5 \times 3^{n+1}$ .

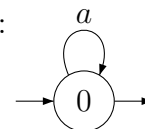
**Exercice 4 (22 points=4+4+3+4+4+3)** On se place sur l'alphabet  $A = \{a, b, c\}$ .

1. Dessiner des automates finis acceptant les langages  $L_1 = a(bc)^*$  et  $L_2 = a^*$ . En déduire, **en explicitant la construction**, un automate acceptant la concaténation  $L_1 L_2$ .

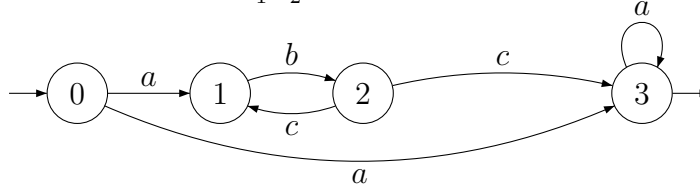
pour  $L_1$  :



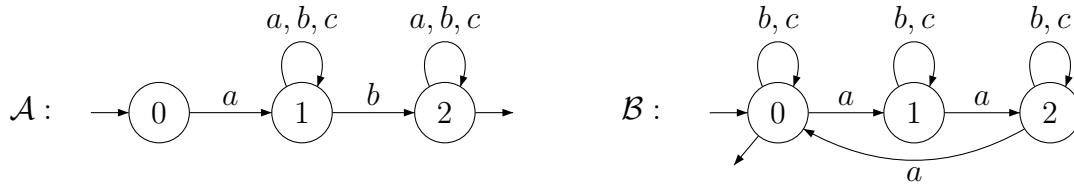
pour  $L_2$  :



Donc pour la concaténation  $L_1L_2$  :



2. On note  $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$  et  $M = \mathcal{L}(\mathcal{B})$  pour les automates  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  suivants :



(a) Les automates  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont-ils déterministes ? complets ? Justifier les réponses.

L'automate  $\mathcal{A}$  n'est pas complet car il n'y a pas de transition d'étiquette  $b$  partant de l'état 0. Il n'est pas déterministe car il y a deux transitions d'étiquette  $b$  partant de l'état 1 :  $1 \xrightarrow{b} 1$  et  $1 \xrightarrow{b} 2$ .

L'automate  $\mathcal{B}$  est déterministe et complet car pour tout état  $s$  et toute lettre  $x$  de  $A$ , il y a exactement une transition d'étiquette  $x$  partant de  $s$ .

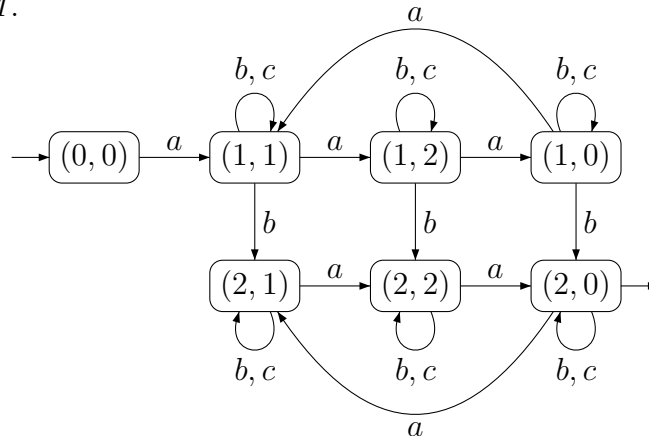
(b) Décrire (en français) les langages  $L$  et  $M$ .

Le langage  $L$  contient exactement les mots qui commencent par  $a$  et qui contiennent au moins un  $b$ .

Le langage  $M$  contient exactement les mots contenant un nombre de  $a$  multiple de 3.

**Dans l'ordre, en explicitant les constructions et les calculs :**

(c) Construire (et dessiner) un automate acceptant l'intersection  $L \cap M$  des langages  $L$  et  $M$ .



(d) Calculer une expression rationnelle du langage accepté par l'automate  $\mathcal{B}$ .

Les équations associées à cet automate sont :

$$L_0 = (b + c)L_0 + aL_1 + \varepsilon \quad (1)$$

$$L_1 = (b + c)L_1 + aL_2 \quad (2)$$

$$L_2 = (b + c)L_2 + aL_0 \quad (3)$$

Donc  $L_2 = (b + c)^*aL_0$ , d'après le lemme d'Arden. On insère cette expression dans (2) :  $L_1 = (b + c)L_1 + a(b + c)^*aL_0$  donc à nouveau on obtient par le lemme d'Arden :  $L_1 = (b + c)^*a(b + c)^*aL_0$ .

En remplaçant à nouveau dans (1), on a :  $L_0 = (b + c)L_0 + a(b + c)^*a(b + c)^*aL_0 + \varepsilon$  et donc le langage cherché est  $L_0 = M = [(b + c) + a(b + c)^*a(b + c)^*a]^*$ .

(e) Construire un automate déterministe acceptant  $L$ .

