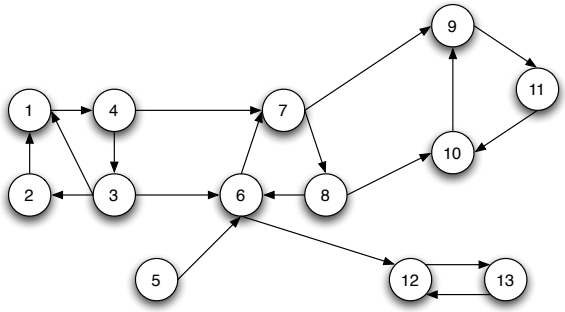
UE LU3IN003 - Algorithmique.
Licence d'informatique.

Partiel du 18 novembre 2022. Durée : 1h30

Documents non autorisés. Seule une feuille A4 portant sur les cours est autorisée.
Tous objets connectés éteints et rangés dans vos sacs.

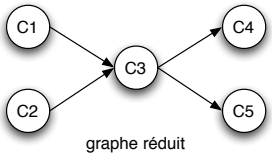
Exercice 1 (4 points)

On considère le graphe G_1 représenté sur la figure ci-dessous.



Question 1 (1/4) — Déterminer les composantes fortement connexes de G_1 et le graphe réduit $\hat{G}_1$ de G_1.

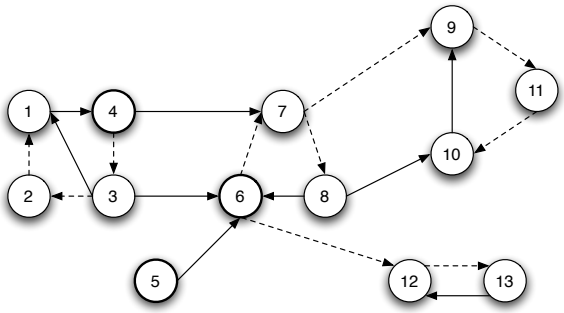
5 composantes fortement connexes :
C1 = {1,2,3,4}
C2 = {5}
C3 = {6,7,8}
C4 = {9,10,11}
C5 = {12,13}



graphe réduit

Question 2 (1/4) — Quels sont les points de régénération du parcours générique $L = (6, 7, 9, 11, 10, 8, 12, 13, 5, 4, 3, 2, 1)$? Donner une forêt couvrante associée à L.

Les points de régénération sont $s_1 = 6$, $s_9 = 5$ et $s_{10} = 4$.
Une forêt couvrante associée à L (arcs en pointillé) :



Question 3 (1/4) — Donner un parcours de G_1 comportant exactement deux points de régénération. Donner un parcours de G_1 comportant exactement cinq points de régénération.

Le parcours $(1, 4, 3, 2, 6, 7, 8, 12, 13, 9, 11, 10, 5)$ comporte 2 points de régénération (1 et 5).
Le parcours $(9, 11, 10, 12, 13, 6, 7, 8, 5, 4, 3, 2, 1)$ comporte 5 points de régénération (9, 12, 6, 5 et 4).

Question 4 (1/4) — Dans le cas général, donner le nombre de points de régénération minimum et maximum du parcours d'un graphe orienté. On ne demande pas de justification.

Le nombre de points de régénération minimum du parcours d'un graphe orienté correspond au nombre de sommets sans prédécesseur du graphe réduit associé.
Le nombre de points de régénération maximum du parcours d'un graphe orienté correspond au nombre de sommets du graphe réduit associé.

Exercice 2 (7 points)

Dans cet exercice, on considère un tableau de n entiers, noté A, dont les cellules 1 à n comportent une permutation des entiers 1 à n. Une paire (i, j) est une *inversion* pour le tableau A si $i < j$ et $A[i] > A[j]$. Par exemple, le tableau $A = [6, 2, 7, 1, 3, 5, 4]$ comporte 11 inversions : $(1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (6, 7)$. L'objet de l'exercice est de concevoir et d'étudier des algorithmes pour compter le nombre d'inversions dans un tableau A.

Question 1 (2/7) — Donner en quelques mots le principe d'un algorithme naïf permettant de compter le nombre d'inversions dans un tableau A. Quelle est la complexité de cet algorithme ?

Un algorithme naïf consiste à compter le nombre d'inversions de A en considérant toutes les paires (i, j) avec $i < j$, et de tester si $A[i] > A[j]$ ou pas. Complexité $O(n^2)$.

On s'intéresse à présent à un algorithme de type diviser pour régner, appelé Trier-et-Compter, dont le pseudo-code est donné ci-après, afin de compter le nombre d'inversions dans un tableau A. Dans la suite de l'exercice, on notera $|A|$ la taille d'un tableau A.

Trier-et-Compter

Entrées : A : un tableau d'entiers
si $|A|=1$ **alors retourner** $(0, A)$
sinon
  Diviser le tableau A en deux moitiés A_1 et A_2
  $(m_1, A'_1) \leftarrow$ Trier-et-Compter(A_1)
  $(m_2, A'_2) \leftarrow$ Trier-et-Compter(A_2)
  $(m_3, A') \leftarrow$ Fusionner-et-Compter(A'_1, A'_2)
fin
retourner $(m_1 + m_2 + m_3, A')$

Trier-et-Compter est fondé sur une partition en 3 catégories des inversions présentes dans A :

1. L'ensemble des inversions (i, j) avec $i \leq n/2$ et $j \leq n/2$.
2. L'ensemble des inversions (i, j) avec $i > n/2$ et $j > n/2$.
3. L'ensemble des inversions (i, j) avec $i \leq n/2$ et $j > n/2$.

Le nombre d'inversions du premier type, noté m_1, est obtenu par un appel récursif sur la première moitié du tableau A (notée A_1). De même, le nombre d'inversions du second type, noté m_2, est obtenu par un appel récursif sur la deuxième moitié de A (notée A_2). Pour le nombre d'inversions du troisième type, noté m_3, on fait appel à un algorithme, nommé Fusionner-et-Compter (voir pseudo-code), qui prend en entrée les sous-tableaux A_1 et A_2 préalablement triés (notés A'_1 et A'_2), et qui réalise les deux opérations suivantes simultanément :

— Le calcul de la valeur de m_3.

— Le tri du tableau A en fusionnant les tableaux triés A'_1 et A'_2 (le tableau trié est noté A').

Enfin, Trier-et-Compter termine en retournant le nombre d'inversions du tableau A (c'est-à-dire $m_1 + m_2 + m_3$) ainsi que le tableau trié A'.

Question 2 (1/7) — Compléter la ligne 5 de Fusionner-et-Compter avec un calcul en $O(1)$ afin que m_3 corresponde bien au nombre d'inversions du troisième type au terme de la boucle tant que.
Une indication est donnée en haut de la page suivante.

Fusionner-et-Compter

Entrées : A'_1 et A'_2 : deux tableaux triés
1 $i \leftarrow 1$; $j \leftarrow 1$; $A' \leftarrow [\,]$; $m_3 \leftarrow 0$
2 **tant que** $i \leq |A'_1|$ *et* $j \leq |A'_2|$ **faire**
3 **si** $A'_1[i] > A'_2[j]$ **alors**
4 Ajouter $A'_2[j]$ à la fin du tableau A' // instruction en $O(1)$
5 $m_3 \leftarrow$ $m_3 + |A'_1| - i + 1$
6 $j \leftarrow j + 1$
7 **fin**
8 **sinon**
9 Ajouter $A'_1[i]$ à la fin du tableau A' // instruction en $O(1)$
10 $i \leftarrow i + 1$
11 **fin**
12 **fin**
13 **tant que** $i \leq |A'_1|$ **faire**
14 Ajouter $A'_1[i]$ à la fin du tableau A' // instruction en $O(1)$
15 $i \leftarrow i + 1$
16 **fin**
17 **tant que** $j \leq |A'_2|$ **faire**
18 Ajouter $A'_2[j]$ à la fin du tableau A' // instruction en $O(1)$
19 $j \leftarrow j + 1$
20 **fin**
21 **retourner** (m_3, A')

Indication : Supposons que $A'_1 = [2, 6, 7]$ et $A'_2 = [1, 3, 4, 5]$ en entrée de Fusionner-et-Compter.
Pour $i = 1$ et $j = 1$, on détecte 3 inversions impliquant l'entier 1 car $A'_1[i] = 2 > 1 = A'_2[j]$.
Pour $i = 1$ et $j = 2$, pas d'inversion supplémentaire impliquant 2 car $A'_1[i] = 2 < 3 = A'_2[j]$.
Pour $i = 2$ et $j = 2$, on détecte 2 inversions impliquant l'entier 3 car $A'_1[i] = 6 > 3 = A'_2[j]$. Etc.

Question 3 (2/7) — Quelle est la complexité de Fusionner-et-Compter ? Justifier brièvement.

Il y a exactement une itération pour chaque valeur de i comprise entre 1 et $|A'_1|$, et une itération pour chaque valeur de j comprise entre 1 et $|A'_2|$. Comme toutes les opérations se font en $O(1)$ et que $|A'_1| + |A'_2| = |A| = n$, l'algorithme est en $O(n)$.

Question 4 (2/7) — Soit $T(n)$ le nombre d'opérations effectuées par l'algorithme Trier-et-Compter. Donner la formule de récurrence vérifiée par T. A l'aide d'un théorème vu en cours, en déduire la complexité de l'algorithme.

$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$. D'après le théorème maître, l'algorithme est en $O(n \log n)$.

Exercice 3 (9 points)

Dans cet exercice, on considère une chaîne s de bits (0 ou 1), indicée de 1 à n. Initialement, la chaîne s est constituée uniquement de 1. On vise à transformer s en une chaîne constituée uniquement de 0 en ne s'autorisant que les deux types suivants de transformations de s (que l'on peut réaliser autant de fois que l'on souhaite), appelées *permutations autorisées* dans la suite :

1. on peut toujours permuter la valeur du bit d'indice 1 (changer un 0 en 1, ou un 1 en 0) ;
2. si s débute par une séquence d'exactement i bits à 0 (le bit d'indice $i+1$ est 1), alors on peut permuter la valeur du bit d'indice $i+2$ (changer un 0 en 1, ou un 1 en 0).

Par exemple, pour $n = 5$, la séquence de permutations autorisées suivante permet de transformer $s = 11111$ en la chaîne 00000 (le chiffre au dessus de chaque flèche est l'indice du bit permuté) :

$$11111 \xrightarrow{1} 01111 \xrightarrow{3} 01011 \xrightarrow{1} 11011 \xrightarrow{2} 10011 \xrightarrow{1} 00011 \xrightarrow{5} 00010$$
$$\xrightarrow{1} 10010 \xrightarrow{2} 11010 \xrightarrow{1} 01010 \xrightarrow{3} 01110 \xrightarrow{1} 11110 \xrightarrow{2} 10110 \xrightarrow{1} 00110 \xrightarrow{4} 00100$$
$$\xrightarrow{1} 10100 \xrightarrow{2} 11100 \xrightarrow{1} 01100 \xrightarrow{3} 01000 \xrightarrow{1} 11000 \xrightarrow{2} 10000 \xrightarrow{1} 00000$$

Les deux procédures *mutuellement récursives* ci-dessous (c'est-à-dire qui s'appellent l'une l'autre) permettent d'effectuer une mise à zéro de s qui fait uniquement appel à des permutations autorisées :

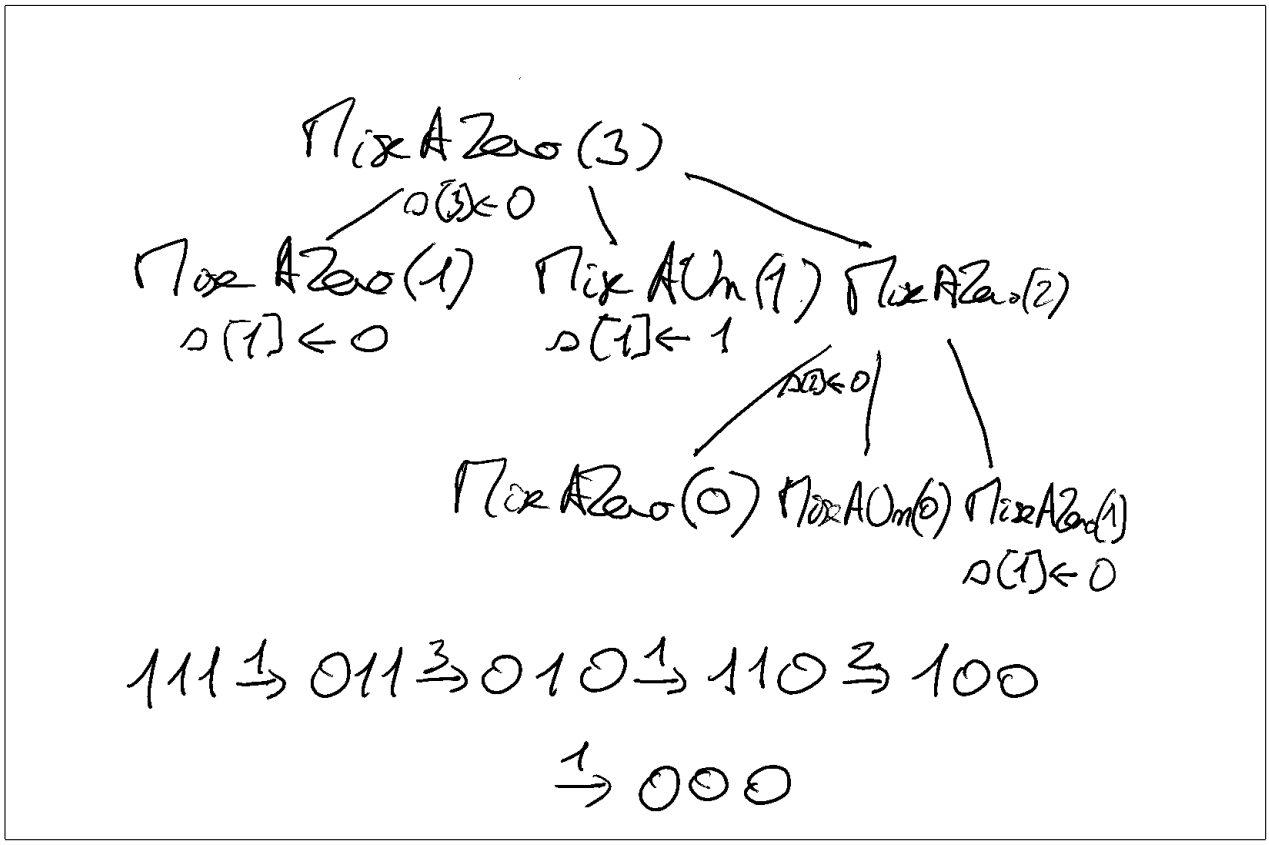
- MiseAZero(k), pour $k \geq 0$, produit une séquence de permutations autorisées qui change les k premiers bits de s, qui doivent être tous de valeur 1 en entrée, en une séquence de k bits 0.
- MiseAUn(k), pour $k \geq 0$, produit une séquence de permutations autorisées qui change les k premiers bits de s, qui doivent être tous de valeur 0 en entrée, en une séquence de k bits 1.

Ces séquences de permutations autorisées sont appelées séquences *valides* dans la suite. L'appel initial avec une chaîne s constituée de n bits tous de valeur 1 est MiseAZero(n). L'objectif de l'exercice est de prouver la validité de l'algorithme et d'analyser sa complexité.

```
MiseAZero(k)
  si k=1
    s[1] ← 0
  sinon si k>1
    MiseAZero(k−2)
    s[k] ← 0
    MiseAUn(k−2)
    MiseAZero(k−1)
```

```
MiseAUn(k)
  si k=1
    s[1] ← 1
  sinon si k>1
    MiseAUn(k−1)
    MiseAZero(k−2)
    s[k] ← 1
    MiseAUn(k−2)
```

Question 1 (2/9) — Donner l'arbre des appels récursifs généré par l'appel MiseAZero(3). En déduire la séquence de permutations autorisées pour convertir la chaîne 111 en 000.



Question 2 (2/9) — Prouver par récurrence que les appels MiseAZero(k) et MiseAUn(k) produisent chacun une séquence valide. En déduire la validité de MiseAZero(n) pour transformer la chaîne s complète.
Indication : Il y a deux cas de base $k=0$ et $k=1$. L'étape inductive consistera à montrer que si MiseAZero($k-2$), MiseAZero($k-1$), MiseAUn($k-2$) et MiseAUn($k-1$) produisent chacun une séquence valide, alors MiseAZero(k) et MiseAUn(k) également. On prouvera l'étape inductive uniquement pour MiseAZero(k) (la preuve pour MiseAUn(k) étant similaire).

HR_k : "MiseAZero(k) et MiseAUn(k) produisent chacune une séquence valide."

Cas de base. Pour $k=0$, MiseAZero(0) et MiseAUn(0) ne font rien, ce qui correspond bien à permuter la valeur des 0 premiers bits de s. Pour $k=1$, MiseAZero(1) et MiseAUn(1) permutent la valeur du premier bit de s, ce qui est autorisé et aboutit bien au résultat attendu.

Etape inductive. Montrons qui si MiseAZero(k–2), MiseAZero(k–1), MiseAUn(k–2) et MiseAUn(k–1) produisent chacun une séquence valide, alors MiseAZero(k) et MiseAUn(k) également.
L'appel MiseAZero($k-2$) changent les valeurs des $k-2$ premiers bits de s de 1 à 0 avec uniquement des permutations autorisées, d'après HR_{k-2}. On obtient alors $s=0...011$.

L'instruction $s[k] \leftarrow 0$, permutation autorisée de type 2 car les $k-2$ premiers bits de s sont 0 et le bit $k-1$ est 1, donne $s=0...010$.
L'appel MiseAUn$(k-2)$ change les valeurs des $k-2$ premiers bits de s de 0 à 1 avec uniquement des permutations autorisées, d'après HR_{k-2}. On obtient alors $s=1...110$, où les $k-1$ premiers bits sont 1.
L'appel MiseAZero$(k-1)$ change les valeurs des $k-1$ premiers bits de s de 1 à 0 avec uniquement des permutations autorisées, d'après HR_{k-1}. On obtient alors $s=0...000$, ce qui est la chaîne recherchée.
La preuve pour MiseAUn(k) est similaire.

Conclusion. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, MiseAZero(k) et MiseAUn(k) produisent chacun une séquence valide qui change les k premiers bits de s de 1 à 0 ou de 0 à 1.

C'est en particulier vrai pour $k=n$, et MiseAZero(n) permet donc bien de changer la chaîne s de n bits 1 en n bits 0, avec uniquement des permutations autorisées.

Question 3 (2/9) — Soit $A(n)$ le nombre de nœuds dans l'arbre des appels récursifs de MiseAZero(n) ou MiseAUn(n) (par symétrie, le nombre est le même dans les deux cas). Donner l'équation de récurrence que vérifie $A(n)$. En déduire la complexité de MiseAZero(n).

L'équation de récurrence est $A(n) = 1 + A(n-1) + 2A(n-2)$. Le polynôme caractéristique de $A'(n) = A'(n-1) + 2A'(n-2)$ est $r^2 - r - 2 = 0$. L'unique racine réelle positive $(1 + \sqrt{9})/2 = 2$. L'arbre des appels récursifs comporte donc $O(2^n)$ nœuds. De plus, il y a une unique permutation de bit par appel. La complexité de MiseAZero(n) est donc $O(2^n)$.

Question 4 (3/9) — Une séquence de permutations autorisées est dite *élémentaire* si elle ne comporte pas deux permutations successives dont l'une est l'inverse de la précédente (par exemple, $111 \to 011 \to 111$ n'est pas élémentaire). L'objet de cette question est de montrer que la séquence produite par MiseAZero(n) est en fait la *seule* séquence élémentaire possible pour transformer une chaîne de n bits 1 en une chaîne de n bits 0 en utilisant uniquement des permutations autorisées. Pour cela, on va s'aider d'une modélisation par un graphe et de la propriété suivante (admise) :

Propriété.
Soit G un graphe non-orienté. Les composantes connexes de G sont uniquement des chaînes et/ou des cycles si et seulement si les degrés des sommets de G sont tous dans $\{1, 2\}$.

Indiquer quel graphe non-orienté considérer pour prouver l'unicité de la séquence élémentaire de permutations autorisées, c'est-à-dire à quoi correspond l'ensemble des sommets et sous quelle condition une arête existe entre deux sommets. Justifier que le graphe est non-orienté. Expliquer pourquoi les degrés des sommets sont tous dans $\{1, 2\}$. Identifier les deux seuls sommets de degré 1 dans ce graphe, et en déduire le résultat recherché en vous appuyant sur le résultat de la question 2.

On considère le graphe dont les sommets correspondent aux 2^n chaînes de bits. Une arête figure entre deux sommets s'il existe une permutation autorisée pour passer de l'un à l'autre.
Le graphe est non-orienté car les permutations autorisées sont *symétrique* : si on passe d'une chaîne s à une chaîne s' par une permutation du bit d'indice i, alors on passe de s' à s par une permutation du bit d'indice i.

Tous les degrés sont 1 ou 2 car la permutation autorisée de type 1 est possible depuis toute chaîne et qu'il y a au plus deux permutations autorisées possibles depuis une chaîne donnée.
Dans ce graphe, les deux seuls sommets de degré 1 sont $0\ldots0$ et $0\ldots01$ car les indices $n+2$ et $n+1$ sont hors du domaine. Ces deux sommets sont donc les extrémités d'une composante connexe qui est une chaîne, d'après la propriété mise en exergue dans l'énoncé de la question.
De plus, le sommet $1\ldots1$ appartient à la même composante connexe que $0\ldots0$ car la question 2 est une preuve constructive qu'il existe une séquence de permutations autorisées de $1\ldots1$ à $0\ldots0$, et donc qu'il existe une chaîne entre les deux sommets correspondants du graphe.
L'algorithme de la question 2 produit donc l'unique chaîne élémentaire qui relie $1\ldots1$ à $0\ldots0$ dans ce graphe.