Année 2019–2020

# LU2IN005 - janvier 2020

Durée : 1h45 - Documents, calculettes et téléphones interdits

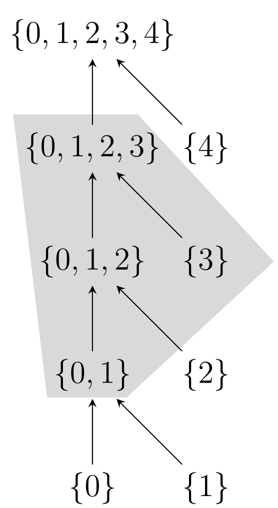
Inscrire votre nom sur la copie et la cacheter, puis inscrire votre numéro d'anonymat sous le logo UPMC et le reporter sur toutes les copies intercalaires. Conserver l'étiquette portant votre numéro d'anonymat, elle sera **obligatoire** pour toute consultation de copie.
La note (entre 0 et 60) est le minimum entre 60 et la somme des points obtenus (entre 0 et 62).

**Exercice 1 (25 pts= (1,5+3,5)+(2+8)+4+(1,5+2+2,5))**

1. Énoncer le principe d'induction pour un ensemble $E$ muni d'un ordre partiel $\preceq$ bien fondé et le démontrer.

   Cf cours.

2. Soit $E = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$) ordonné par inclusion.
   (a) Représenter la relation d'ordre sur $E$ par un graphe (sans les arcs de réflexivité et de transitivité).
   (b) Pour la partie $A = \{\{3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$ de $E$, donner l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants. Donner, lorsqu'ils existent, la borne inférieure, la borne supérieure, le plus petit élément, le plus grand élément, les éléments minimaux et les éléments maximaux de $A$.




Maj($A$) $= \{\{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
sup($A$) $= \{0, 1, 2, 3\}$
pge($A$) $= \{0, 1, 2, 3\}$
unique élément maximal : $\{0, 1, 2, 3\}$
Min($A$) $= \emptyset$
pas de borne inférieure
pas de plus petit élément
éléments minimaux : $\{3\}$, $\{0, 1\}$.

3. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ : $\mathcal{S} = \{\{k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$ qui contient tous les singletons et $\mathcal{D}$ qui contient toutes les parties $P_k = \{0, 1, \ldots, k\}$, pour $k \in \mathbb{N}$. Pour l'ensemble $\mathcal{E} = \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ ordonné par inclusion, donner s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, les éléments minimaux et les éléments maximaux.

Ce sous ensemble de parties de $\mathbb{N}$ généralise l'exemple ci-dessus avec les relations $P_k \subseteq P_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\{k\} \subseteq P_k$ pour tout $k \geq 1$ (et $\{0\} = P_0$).
Il n'y a donc pas de plus grand élément, pas de plus petit élément, aucun élément maximal et $\mathcal{S}$ est l'ensemble des éléments minimaux.

4. On considère des arbres binaires sur l'alphabet $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, en notant $\langle k \rangle$ pour l'arbre $(\{k\}, \emptyset, \emptyset)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathcal{F}$ est défini inductivement par :
(B) $t_0 = \langle 0 \rangle$ est dans $\mathcal{F}$.
(I) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $t_k = (P_k, g, d)$ est dans $\mathcal{F}$ alors $t_{k+1} = (P_{k+1}, \langle k+1 \rangle, t_k)$ est aussi dans $\mathcal{F}$.
(a) Dessiner $t_0$, $t_1$ et $t_2$.

$t_0 : \{0\}$

$t_1$ :
$$\begin{tikzcd} & \{0,1\} \arrow[dl] \arrow[d] \\ \{1\} & \{0\} \end{tikzcd}$$

$t_2$ :
$$\begin{tikzcd} & \{0,1,2\} \arrow[dl] \arrow[d] \\ \{2\} & \{0,1\} \arrow[dl] \arrow[d] \\ \{1\} & \{0\} \end{tikzcd}$$

(b) En prenant $n(\langle 0 \rangle) = 1$ et $h(\langle 0 \rangle) = 0$, donner les définitions inductives des fonctions $n$ (nombre de noeuds) et $h$ (hauteur), en définissant $n(t_{k+1})$ en fonction de $n(t_k)$ et $h(t_{k+1})$ en fonction de $h(t_k)$.

$n(t_{k+1}) = n(t_k) + 2$ et $h(t_{k+1}) = h(t_k) + 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer par induction que $n(t) = 2h(t) + 1$ pour tout $t \in \mathcal{F}$.

Pour $t_0$, on a bien la relation avec $h(t_0) = 0$ et $n(t_0) = 1$.
Supposons la propriété vraie pour $t_k$ : $n(t_k) = 2h(t_k) + 1$.
Alors $n(t_{k+1}) = n(t_k) + 2 = 2h(t_k) + 1 + 2 = 2(h(t_k) + 1) + 1 = 2h(t_{k+1}) + 1$ donc la propriété est vraie sur tout $\mathcal{F}$.

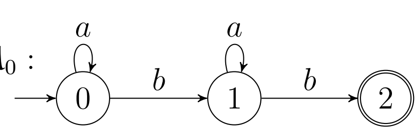
**Exercice 2 (16 pts= 4+2+1+3+3+3)** On se place sur l'alphabet $A = \{a, b\}$.

1. Montrer que le langage $P = \{a^p b a^n \mid n, p \in \mathbb{N}, p \leq n\}$ n'est pas reconnaissable.

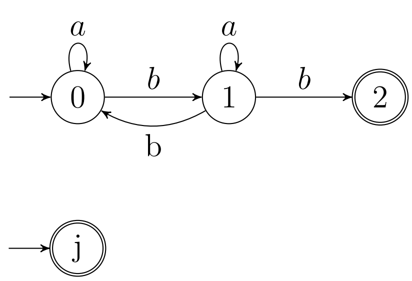
   Par l'absurde, supposons qu'il existe un automate fini $\mathcal{A}$ à $N$ états acceptant $P$. Alors le mot $w = a^N b a^N$ est dans $P$ et il existe un chemin qui l'accepte dans $\mathcal{A}$ : $s_0 \xrightarrow{a} s_1 \cdots \xrightarrow{a} s_N \xrightarrow{ba^N} s_f$ avec $s_0$ initial et $s_f$ final.
   Parmi les $N+1$ états $s_0, s_1, \ldots, s_N$, deux au moins sont égaux, donc il existe $i < j$ tels que $s_i = s_j$. On peut alors factoriser $w$ en $w = a^{n_1} a^{n_2} a^{n_3} b a^N$ avec $s_0 \xrightarrow{a^{n_1}} s_i$, $s_i \xrightarrow{a^{n_2}} s_j$ et $s_i \xrightarrow{a^{n_3}} s_N$, donc $n_1 + n_2 + n_3 = N$ et $n_2 > 0$. Comme $s_j = s_i$, le mot $a^{n_2}$ est l'étiquette d'une boucle dans $\mathcal{A}$. En itérant cette boucle, on obtient un mot $w' = a^{n_1+2n_2+n_3} b a^N$ qui est aussi accepté par $\mathcal{A}$, alors que $n_1 + 2n_2 + n_3 = N + n_2$ est strictement supérieur à $N$ puisque $n_2 > 0$. On a donc une contradiction ce qui permet de conclure que $P$ n'est pas reconnaissable.

2. Dessiner un automate acceptant le langage de l'expression rationnelle $(a^*ba^*b)^*$.

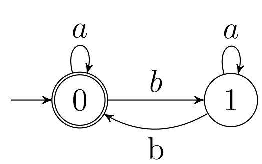
   Il faut utiliser la construction du cours à partir de l'automate $\mathcal{A}_0$ suivant qui accepte $a^*ba^*b$ :

   $\mathcal{A}_0$ :
   
   

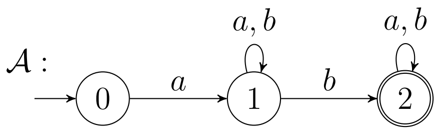
   ce qui donne :

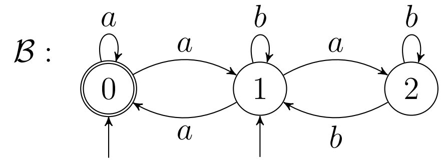
   
   

   Remarquons que l'automate suivant est incorrect car il accepte tous les mots de $a^*$ alors que ceux-ci ne sont pas dans $\mathcal{L}((a^*ba^*b)^*)$. On peut mettre 1 points sur 2...

3. On considère les deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ suivants :

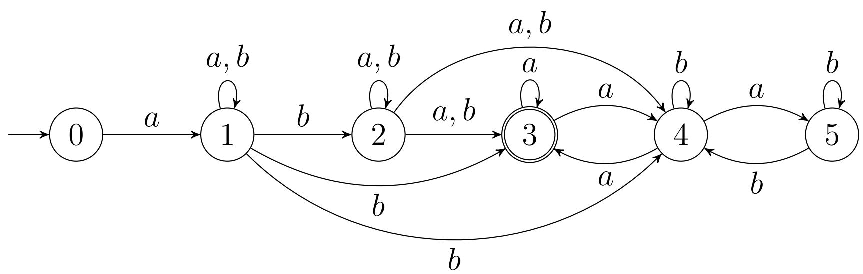




   (a) Décrire en français le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

   Le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ contient les mots qui commencent par $a$ et contiennent au moins un $b$.

   (b) Construire à partir de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ un automate acceptant le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A}).\mathcal{L}(\mathcal{B})$.

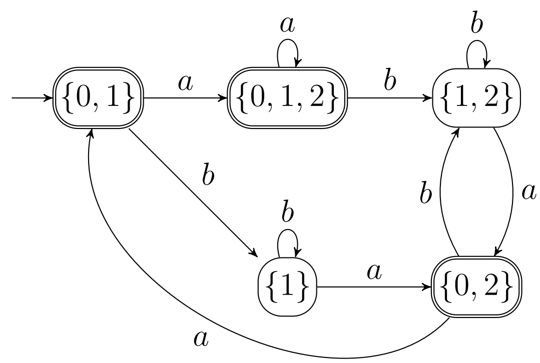


   (c) Calculer une expression rationnelle de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$.

   L'expression rationnelle de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ sera $E = E_0 + E_1$ où $E_0$ et $E_1$ sont données par le système suivant :
   (1) $E_0 = aE_0 + aE_1 + \varepsilon$
   (2) $E_1 = bE_1 + aE_0 + aE_2$
   (3) $E_2 = bE_2 + bE_1$

   En appliquant le lemme d'Arden dans (3), on obtient $E_2 = b^*bE_1$, que l'on substitue dans (2). On a donc $E_1 = (b + ab^*b)E_1 + aE_0$ et en réappliquant le lemme d'Arden on obtient : $E_1 = (b + ab^*b)^*aE_0$. On substitue dans (1) :
   $E_0 = [a + a(b + ab^*b)^*a]E_0 + \varepsilon$ donc finalement en appliquant une dernière fois le lemme d'Arden :
   $E_0 = [a + a(b + ab^*b)^*a]^*$ et $E_1 = (b + ab^*b)^*aE_0$.

(d) Déterminiser l'automate $\mathcal{B}$.




**Exercice 3 (21 pts = (1+4)+(2+2)+(3+3+3+3))**
**Cet exercice sera traité sans utiliser de table de vérité.**

1. On considère $F$ et $G$ deux formules du calcul propositionnel. Donner la définition de $F \models G$. Démontrer que $F \models G$ si et seulement si la formule $F \to G$ est valide.

   Cf cours.

2. Soit $f$ la fonction booléenne à 3 variables définie par :
   $f(x,y,z) = (\overline{x}.z + \overline{y})(\overline{x} + \overline{y}.\overline{z})(xy + yz + xz)$.

   (a) La fonction $f$ est-elle sous forme conjonctive ? disjonctive ?

   Aucune des deux.

   (b) Donner une forme disjonctive pour $f$ et en déduire une forme conjonctive.

   $f(x,y,z) = (\overline{x}.z + \overline{x}.\overline{y} + \overline{yz})(xy + yz + xz) = \overline{x}.y.z$ qui est à la fois FND et FNC.

3. Le lendemain de Noël, on retrouve une boîte de chocolats totalement vide. Pour trouver les coupables qui ont mangé des chocolats, on interroge les trois enfants qui font les déclarations suivantes :
   Anissa : (A) Si Boris est coupable alors Charlotte aussi et je suis innocente.
   Boris : (B) au moins deux d'entre nous ont mangé des chocolats.
   Charlotte : (C) Si Anissa est coupable alors Boris et moi sommes innocents.

   (a) Exprimer chacune des trois déclarations A, B et C comme une formule, à l'aide des propositions $p$ : *Anissa a mangé des chocolats*, $q$ : *Boris a mangé des chocolats*, $r$ : *Charlotte a mangé des chocolats*.

$$A = q \to (r \wedge \neg p), \;\; B = (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r), \;\; C = p \to (\neg q \wedge \neg r)$$

(b) Pour une interprétation $I$, calculer les interprétations de ces trois formules $I(A)$, $I(B)$ et $I(C)$, en fonction de $I(p)$, $I(q)$, $I(r)$.

Posons $x = I(p)$, $y = I(q)$ et $z = I(r)$.
Alors $I(A) = \overline{y} + \overline{x}.z$, $I(B) = xy + yz + xz$ et $I(C) = \overline{x} + \overline{y}.\overline{z}$.

(c) On suppose que les trois enfants disent la vérité. Que peut-on en déduire sur la réponse à la question : qui a mangé des chocolats ?

Le fait que les trois enfants disent la vérité se traduit par $I(A \wedge B \wedge C) = 1$, c'est-à-dire $I(A)I(B)I(C) = 1$ donc $f(x, y, z) = 1$. En utilisant la question 2, on obtient $\overline{x}.y.z = 1$ c'est-à-dire $\overline{x} = y = z = 1$ donc $x = 0$, $y = z = 1$, ce qui signifie que Anissa est innnocente mais Boris et Charlotte sont coupables.

(d) Après une enquête plus approfondie, il s'avère que Boris et Anissa sont coupables et Charlotte innocente. En utilisant (b), dire qui a menti et qui a dit la vérité.

« Anissa est coupable » se traduit par $x = I(p) = 1$, « Boris est coupable » devient $y = I(q) = 1$ et « Charlotte est innocente » se traduit par $z = I(r) = 0$.
On en déduit d'après (b) que $I(A) = 0$, $I(B) = 1$ et $I(C) = 0$ donc Anissa et Charlotte ont menti tandis que Boris a dit la vérité.