Rapport – LRC - TME 2

Yuxiang Zhang 21202829
Kenan Alsafadi 21502362

Exercice 2 – Prise en main

Remarque méthodologique

Pour chaque formule F on indique la procédure pas à pas (`Next Rule : ...`) et on fournit la représentation arborescente issue du tableau. Rappel des règles (très sommaire) : $\wedge$ donne une addition dans le même nœud (règle α), $\vee$ et $\rightarrow$ (selon la forme) peuvent créer bifurcation (règle β), et la négation devant une implication se transforme en conjonction etc. Pour tester la validité d'une formule F, on construit le tableau pour $\neg F$: si toutes les branches se ferment, F est valide.

F1

$$F1 = A \wedge \neg(B \rightarrow A)$$

Notation LoTREC : `(and A (not (imp B A)))`

Pas à pas (Next Rule) :

1. Next Rule : **and** (règle α) $\Rightarrow$ on ajoute dans le même nœud : A, $\neg(B \rightarrow A)$.
2. Next Rule : **not imp** ($\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$) (règle d'élimination de l'implication négative) $\Rightarrow$ on ajoute : B, $\neg A$.
3. Next Rule : **stop** — on observe A et $\neg A$ dans la même branche $\Rightarrow$ branche fermée.

Conclusion La seule branche se ferme (contradiction A et $\neg A$). Donc $F1$ est **insatisfiable**.

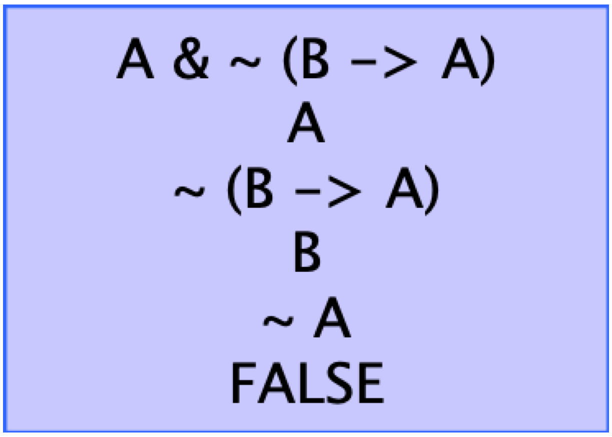


FIGURE 1 – Tableau de F1 : une seule branche fermée

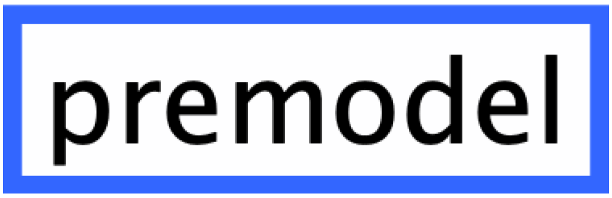


FIGURE 2 – Tableaux Tree de F1

F2

$$F2 = ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \to (\neg B \to ((A \wedge B) \vee C))$$

Notation préfixe de F2 : `(imp (and (or A C) (or B C)) (imp (not B) (or (and A B) C)))`.

Ici nous testons la **validité** de $F2$. On construit le tableau pour $\neg F2$.

On pose $\neg F2$ en racine. Déroulement (strictement suivant la séquence demandée) :

1. Next Rule : **not imp** sur $\neg F2$.
   Règle appliquée : $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$. (type : α)
   Résultat dans le même nœud :
   $$(A \vee C) \wedge (B \vee C), \qquad \neg(\neg B \to ((A \wedge B) \vee C)).$$
2. Next Rule : **and** sur $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$.
   Règle : décomposer la conjonction (type : α).
   On ajoute dans le même nœud :
   $$A \vee C, \qquad B \vee C.$$
3. Next Rule : **not imp** sur $\neg(\neg B \to ((A \wedge B) \vee C))$.
   Application : $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$ (type : α).
   On ajoute :
   $$\neg B, \qquad \neg((A \wedge B) \vee C).$$

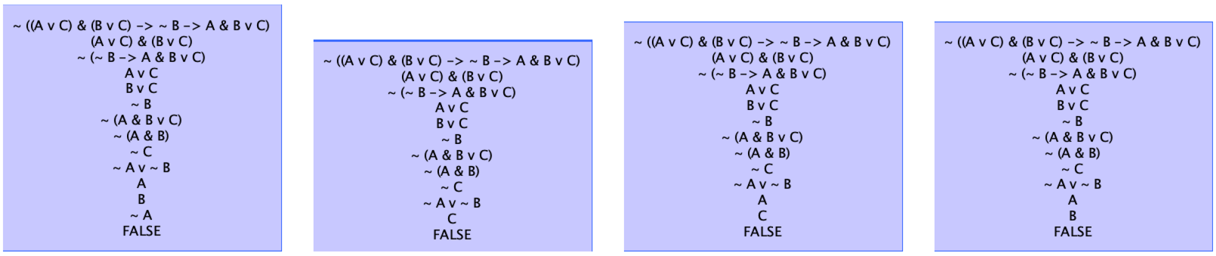
4. Next Rule : **not or** sur $\neg((A \wedge B) \vee C)$.
   Règle : $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ (type : α).
   On remplace $\neg((A \wedge B) \vee C)$ par
   $$\neg(A \wedge B), \qquad \neg C,$$
   dans le même nœud.
5. Next Rule : **not and** sur $\neg(A \wedge B)$.
   Règle : $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ — bifurcation (type : β).
   On crée donc deux branches principales :
   — Branche (I) : on suppose $\neg A$.
   — Branche (II) : on suppose $\neg B$.
   (Rappel des littéraux présents dans chaque branche : $A \vee C$, $B \vee C$, $\neg B$, $\neg C$.)
6. Next Rule : **or** — traitement explicite des disjonctions $A \vee C$ et $B \vee C$ dans chaque branche (LoTREC présente ces choix comme sous-branches explicites).
   Décomposition (les chemins effectifs sont listés ci-dessous) :

   Branche (I) : $\neg A$, $\neg B$, $\neg C$, $A \vee C$, $B \vee C$ Les choix possibles donnés par LoTREC (pour $A \vee C$ et $B \vee C$) produisent deux sous-branches principales :
   - (I.1) choix A à partir de $A \vee C \Rightarrow$ obtention de A qui contredit $\neg A \Rightarrow$ **stop (fermeture)**.
   - (I.2) choix C (soit depuis $A \vee C$ soit depuis $B \vee C$) $\Rightarrow$ obtention de C qui contredit $\neg C \Rightarrow$ **stop (fermeture)**.

   Branche (II) : $\neg B$, $\neg C$, $A \vee C$, $B \vee C$ Les choix possibles donnent aussi deux sous-branches :
   - (II.1) choix B à partir de $B \vee C \Rightarrow$ obtention de B qui contredit $\neg B \Rightarrow$ **stop (fermeture)**.
   - (II.2) choix C à partir de $B \vee C$ (ou $A \vee C$) $\Rightarrow$ obtention de C qui contredit $\neg C \Rightarrow$ **stop (fermeture)**.
7. **Résumé des étapes finales** : `not imp` $\to$ `and` $\to$ `not imp` $\to$ `not or` $\to$ `not and` $\to$ `or` $\to$ $\underbrace{\texttt{stop}, \texttt{stop}, \texttt{stop}, \texttt{stop}}_{\text{les quatre fermetures des sous-branches}}$.

Pourquoi LoTREC montre quatre chemins ? La bifurcation initiale provient de l'étape $\neg(A \wedge B)$ (règle β) qui crée deux branches. Ensuite, chaque branche contient au moins une disjonction ($A \vee C$ ou $B \vee C$) que LoTREC explicite en montrant les choix possibles (prendre la première ou la seconde disjunct). Si l'on combine la bifurcation β avec les choix sur les disjonctions, on obtient 2 (branches) $\times$ 2 (choix de disjonction) = 4 chemins explicites, chacun conduisant à une contradiction (stop).

Conclusion Toutes les sous-branches se ferment $\Rightarrow \neg F2$ est insatisfiable. Par conséquent $F2$ est **valide**.



(a) premodel.1 (b) premodel.2 (c) premodel.3 (d) premodel.4

FIGURE 3 – Tableau de $\neg F2$: les quatre chemins (choix de disjonction) montrés par LoTREC — chacun se ferme.

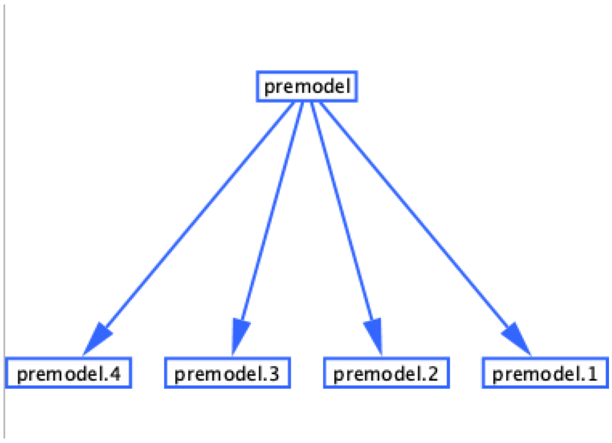


FIGURE 4 – Tableaux Tree de $\neg F2$

F3

$$F3 = \neg\big((A \to B) \to (\neg B \to \neg A)\big)$$

Notation préfixe : `(not (imp (imp A B) (imp (not B) (not A))))`.

Remarque. En logique classique, la contraposition $(A \to B) \iff (\neg B \to \neg A)$ est une équivalence valide. Ainsi, l'implication $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ est **toujours vraie**. Par conséquent, sa négation est **toujours fausse**.

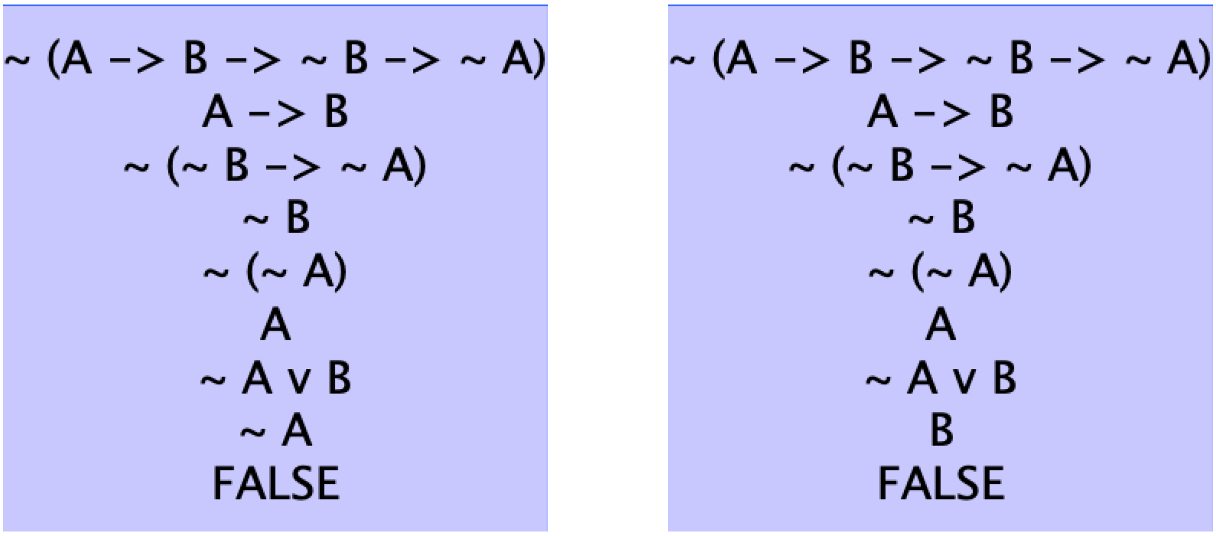
Tableau (pas à pas selon LoTREC) :

1. **not imp** : on applique la règle $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$.
   $\Rightarrow$ on obtient $(A \to B)$ et $\neg(\neg B \to \neg A)$.
2. **not imp** : appliquée sur $\neg(\neg B \to \neg A)$.
   $\Rightarrow$ on obtient $\neg B$ et $\neg\neg A$.
3. **not not** : la double négation sur $\neg\neg A$ donne A.
4. **imp** : on développe $(A \to B)$ en $(\neg A \vee B)$.
5. **or** : on applique la règle de disjonction sur $(\neg A \vee B)$. Cela crée deux branches :
   — Branche 1 : $\neg A, \neg B, A$

— Branche 2 : $B, \neg B, A$

6. **stop** : dans la branche 1, on trouve A et $\neg A \Rightarrow$ contradiction $\to$ branche fermée. Dans la branche 2, on trouve B et $\neg B \Rightarrow$ contradiction $\to$ branche fermée.
7. **stop** : toutes les branches étant fermées, le tableau se termine.

Conclusion. Toutes les branches se ferment, donc $F3$ est **insatisfiable**.



(a) premodel.1 (b) premodel.2

FIGURE 5 – Tableau de $F3$ (les deux vues offertes par LoTREC) — toutes les branches se ferment.

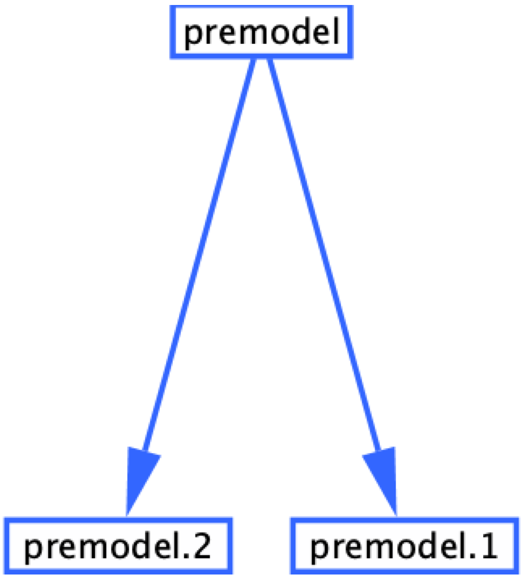


FIGURE 6 – Tableaux Tree de F3

F4

$$F4 = ((A \to B) \land (B \to C)) \lor ((C \to B) \land (B \to A))$$

Notation préfixe : `(or (and (imp A B) (imp B C)) (and (imp C B) (imp B A)))`.

But. Examiner la satisfiabilité de $F4$.

Tableau (pas à pas selon LoTREC) :

1. **or** : la formule principale est une disjonction. On crée deux branches :
   — Branche gauche (L) : $(A \to B) \wedge (B \to C)$
   — Branche droite (R) : $(C \to B) \wedge (B \to A)$
2. **and** : on décompose la conjonction de chaque branche.
   — Branche L : $(A \to B)$, $(B \to C)$
   — Branche R : $(C \to B)$, $(B \to A)$
3. **imp** : on développe les implications en disjonctions.

$$(A \to B) \equiv (\neg A \vee B), \quad (B \to C) \equiv (\neg B \vee C), \quad (C \to B) \equiv (\neg C \vee B), \quad (B \to A) \equiv (\neg B \vee A)$$

4. **or** : on applique la règle de disjonction sur $(\neg A \vee B)$. Deux sous-branches :
   — $\neg A$
   — B
5. **and** : sur la même branche L, on traite aussi $(\neg B \vee C)$.
6. **imp** : dans la branche R, on développe $(C \to B)$ et $(B \to A)$ en $(\neg C \vee B)$ et $(\neg B \vee A)$.
7. **or** : application sur $(\neg C \vee B)$ (branche R). Deux sous-branches : $\neg C$ ou B.
8. **or** : application sur $(\neg B \vee A)$ (branche R). Deux sous-branches : $\neg B$ ou A.
9. **stop** : aucune contradiction n'est trouvée dans les branches ouvertes de L. Ces branches sont satisfaisables pour certaines valuations (A, B, C).
10. **or** : LoTREC termine le développement des dernières disjonctions.
11. **stop** : le tableau est complet. Plusieurs branches restent ouvertes $\Rightarrow$ $F4$ est satisfiable.

Exemple concret (modèle). Prenons $A = \top$, $B = \bot$, $C = \bot$:

$$(C \to B) = (\bot \to \bot) = \top, \qquad (B \to A) = (\bot \to \top) = \top,$$

donc la conjonction droite R est vraie, et $F4$ est vraie sous cette valuation.

Conclusion. $F4$ est **satisfiable** (il existe des valuations qui rendent $F4$ vraie) mais **non valide** en général.

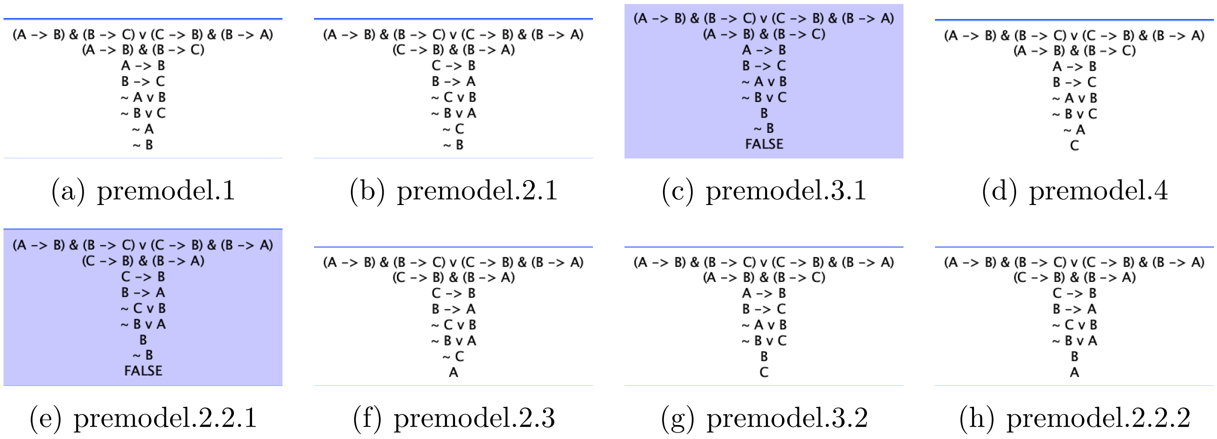


FIGURE 7 – Tableau de $F4$: les branches et pré-modèles rencontrés (captures LoTREC).

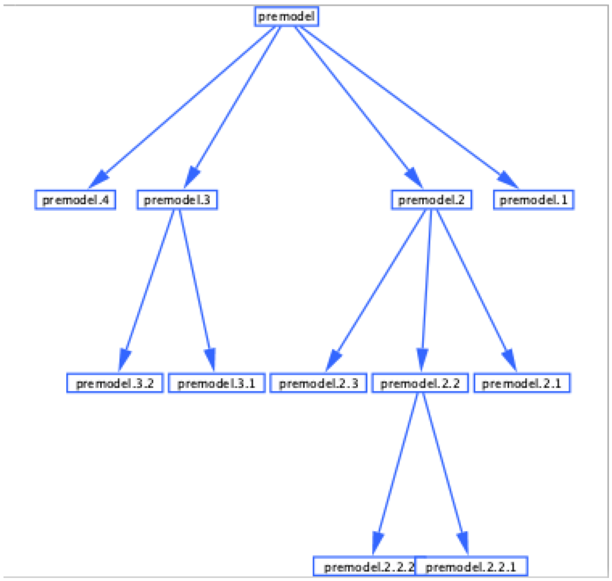


FIGURE 8 – Tableaux Tree de F4

F5

$$F5 = (A \to B) \to \big((B \to C) \leftrightarrow (A \to C)\big)$$

Notation préfixe : `(imp (imp A B) (equiv (imp B C) (imp A C)))`.

Analyse rapide. On cherche à vérifier la validité de $F5$. Considérons la valuation $A = \bot, B = \top, C = \bot$:

$$A \to B = (\bot \to \top) = \top, \quad B \to C = (\top \to \bot) = \bot, \quad A \to C = (\bot \to \bot) = \top.$$

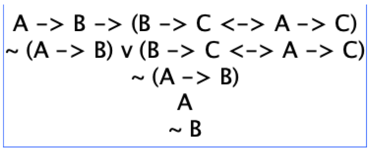
Ainsi, $(B \to C) \leftrightarrow (A \to C) = (\bot \leftrightarrow \top) = \bot$. L'antécédent est vrai, le conséquent est faux $\to$ $F5$ est **faux** sous cette valuation. Donc $F5$ n'est pas valide.

Cependant, il existe des valuations qui la rendent vraie, par exemple $A = \top, B = \bot, C = \bot$: alors $A \to B = \bot$ (antécédent faux), donc $F5$ est vraie. $F5$ est donc **satisfiable** (mais non valide).

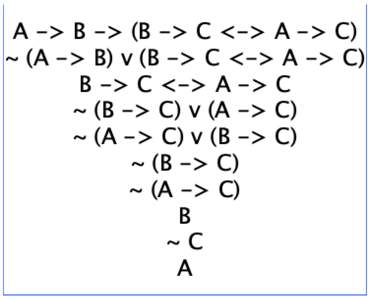
Tableau (pas à pas selon LoTREC) :

1. **imp** : la formule principale est une implication. On applique la règle $(p \to q) \equiv (\neg p \lor q)$. $\Rightarrow$ on obtient $\neg(A \to B) \lor ((B \to C) \leftrightarrow (A \to C))$.
2. **or** : on ouvre deux branches selon la disjonction.
   — Branche 1 : $\neg(A \to B)$
   — Branche 2 : $(B \to C) \leftrightarrow (A \to C)$
3. **not imp** : dans la branche 1, on développe $\neg(A \to B)$. $\neg(p \to q) \equiv p \land \neg q$. $\Rightarrow$ on obtient A et $\neg B$.
4. **equiv** : dans la branche 2, on développe l'équivalence. $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \to q) \land (q \to p))$. $\Rightarrow$ on obtient $(B \to C)$ et $(A \to C)$.
5. **or** : la règle de disjonction s'applique implicitement dans le développement de la partie droite si on remplace les implications.
6. **not imp** : si on développe encore la négation éventuelle d'une implication, on obtiendrait des conjonctions $p \land \neg q$.
7. **imp** : on développe $(B \to C)$ en $(\neg B \lor C)$, et $(A \to C)$ en $(\neg A \lor C)$.
8. **or** : on applique la règle de disjonction sur ces formules : $(\neg B \lor C)$ crée deux sous-branches, puis $(\neg A \lor C)$ en crée deux autres.
9. **stop** : certaines branches peuvent déjà se fermer (par contradiction entre A et $\neg A$, ou B et $\neg B$).
10. **stop** : LoTREC ferme les branches inconsistantes.
11. **imp** : il reste des implications simples à développer pour les branches ouvertes.
12. **or** : nouvelle application de la règle $\lor$ sur les implications développées.
13. **stop** : certaines branches demeurent ouvertes — aucune contradiction trouvée.
14. **or** : fin de l'exploration (toutes les disjonctions traitées).

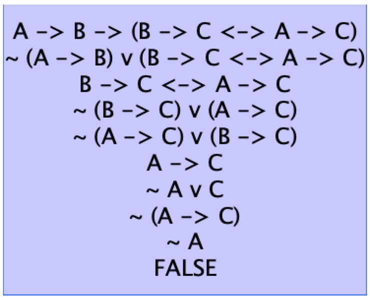
Conclusion. Certaines branches du tableau restent ouvertes $\to$ **contre-exemple à la validité**. Ainsi, $F5$ est **satisfiable** mais **non valide**.



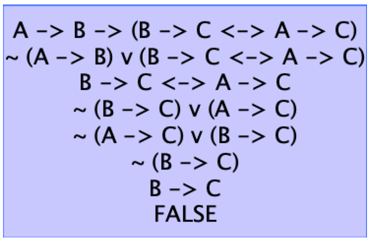
(a) premodel.1



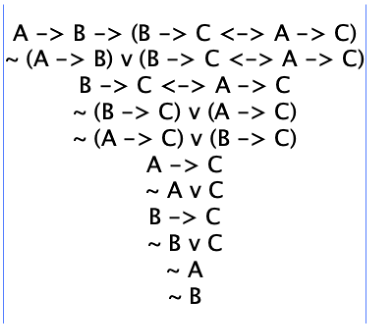
(b) premodel.2.1



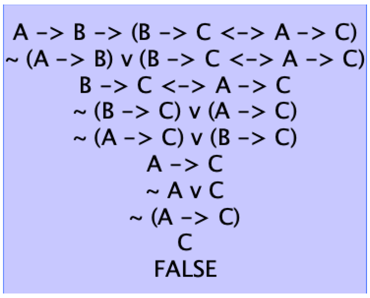
(c) premodel.2.2.1



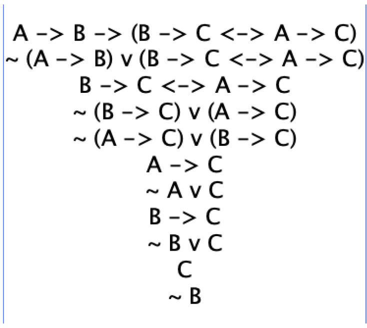
(d) premodel.2.3



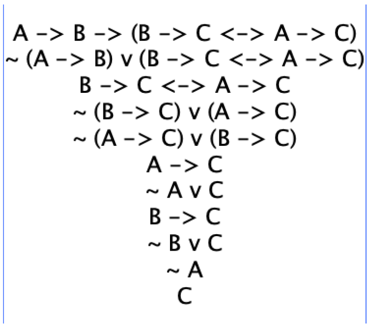
(e) premodel.2.2.2.1



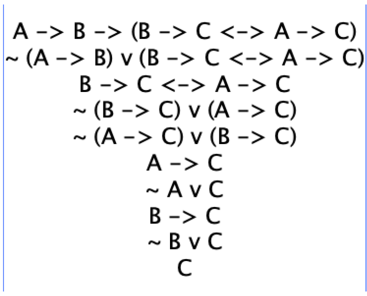
(f) premodel.2.2.3



(g) premodel.2.2.2.2.1



(h) premodel.2.2.2.3



(i) premodel.2.2.2.2.2

Figure 9 – Tableau de $F5$: captures LoTREC illustrant les branches / choix (au moins une branche reste ouverte).

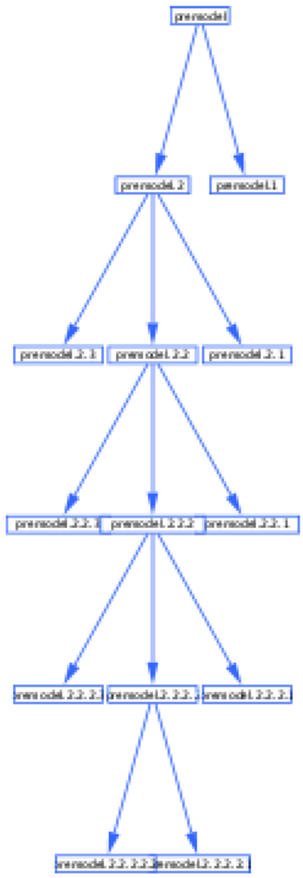


FIGURE 10 – Tableaux Tree de F5

F6

$$F6 = ((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$$

Notation préfixe : `(not (imp (and (imp A B) (imp B C)) (imp A C)))`

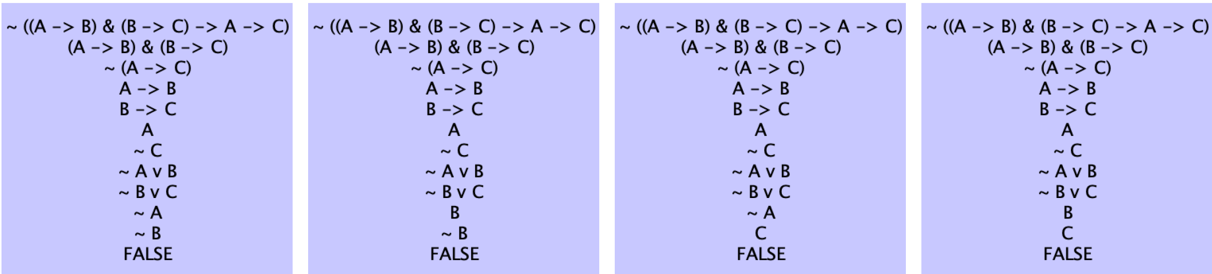
Test de validité On considère $\neg F6$.

Pas à pas (selon LoTREC) :

1. **not imp** : on développe $\neg((A \to B) \land (B \to C) \to (A \to C))$. $\Rightarrow$ $(A \to B) \land (B \to C)$ et $\neg(A \to C)$.
2. **and** : décomposer la conjonction $(A \to B) \land (B \to C)$. $\Rightarrow$ on obtient $(A \to B)$ et $(B \to C)$ dans le même nœud.
3. **not imp** : développer $\neg(A \to C)$. $\Rightarrow$ on obtient A et $\neg C$.
4. **imp** : développer $(A \to B)$ en $(\neg A \lor B)$.
5. **or** : créer deux branches selon $\neg A$ ou B.

6. **stop** : vérifier si la branche contient déjà des littéraux ou contradictions immédiates.
7. **or** : développer $(B \to C)$ en $(\neg B \vee C)$, créer deux sous-branches.
8. **stop** : vérifier contradictions dans ces sous-branches.
9. **stop** : combinaison avec A et $\neg C$, propagation des littéraux.
10. **stop** : toutes les branches sont fermées $\to$ contradiction.

Conclusion Toutes les branches se ferment $\to \neg F6$ est insatisfiable $\to F6$ est **valide**.



(a) premodel.1 (b) premodel.2.1 (c) premodel.3 (d) premodel.2.2

FIGURE 11 – Tableau de $F6$: branches et fermeture (captures LoTREC).

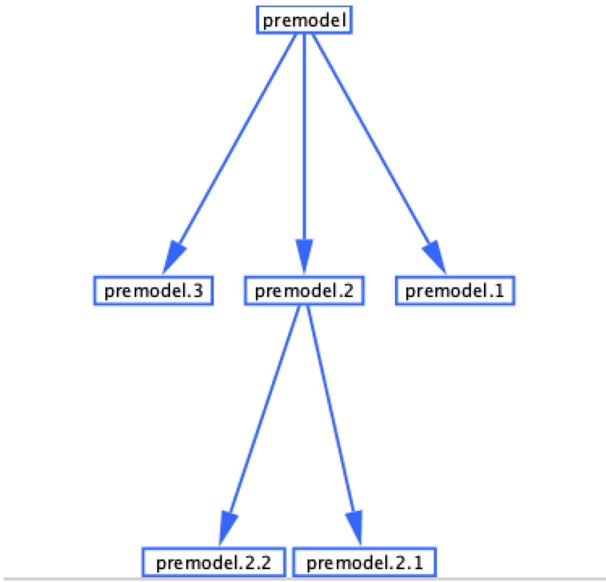


FIGURE 12 – Tableaux Tree de $\neg F6$

Résumé final

— $F1 = A \wedge \neg(B \to A)$: **insatisfiable**.
— $F2 = ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \to (\neg B \to ((A \wedge B) \vee C))$: **valide** (tautologie).
— $F3 = \neg((A \to B) \to (\neg B \to \neg A))$: **insatisfiable**.
— $F4 = ((A \to B) \wedge (B \to C)) \vee ((C \to B) \wedge (B \to A))$: **satisfiable** mais **non valide** (contingente).

— $F5 = (A \to B) \to ((B \to C) \leftrightarrow (A \to C))$: **satisfiable** mais **non valide** (contingente).
— $F6 = ((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$: **valide**.

Exercice 3 – Diagnostic médical (simpliste)

On dispose des connaissances suivantes sur la grippe :

(a) La fièvre est définie comme une température supérieure à 38°C.
(b) Les patients qui ont la grippe doivent prendre du tamiflu.
(c) Les patients qui ont de la fièvre et qui toussent ont la grippe.
(d) Le patient tousse et a une température supérieure à 38°C.

On utilise les variables propositionnelles : `GRIPPE`, `TAMIFLU`, `FIEVRE`, `TOUX`, `SUP38` (et `BRONCHITE` pour la question 3).

Q3.1. Formalisation

On formalise les connaissances comme suit (notation mathématique) :

$$\begin{aligned} F1 &: \quad SUP38 \to FIEVRE, \\ F2 &: \quad GRIPPE \to TAMIFLU, \\ F3 &: \quad (FIEVRE \wedge TOUX) \to GRIPPE, \\ F4 &: \quad TOUX \wedge SUP38. \end{aligned}$$

En notation préfixe (LoTREC), une représentation possible des conjoints est :

```
(imp SUP38 FIEVRE)
(imp GRIPPE TAMIFLU)
(imp (and FIEVRE TOUX) GRIPPE)
(and TOUX SUP38)
```

Q3.2. Faut-il prendre du tamiflu ? (procédure pas à pas)

Étapes de raisonnement

1. **Étape 1 :** Vérifier si la base de connaissances permet de déduire le fait que le patient doit prendre du tamiflu :
$$F1 \wedge F2 \wedge F3 \wedge F4 \ \models \ TAMIFLU$$
2. **Étape 2 :** Par le théorème de la déduction, cela s'équivaut à tester la validité de l'implication :
$$\models \ (F1 \wedge F2 \wedge F3 \wedge F4) \to TAMIFLU$$
3. **Étape 3 :** Pour étudier la validité de l'implication, on teste l'insatisfiabilité de sa négation :
$$\neg\Big((F1 \wedge F2 \wedge F3 \wedge F4) \to TAMIFLU\Big)$$
Si cette formule est insatisfiable (toutes les branches du tableau se ferment), alors l'implication est valide et le patient doit effectivement prendre du tamiflu.

Entrée préfixe (utilisée dans LoTREC)

La formule testée (négation de l'implication), en préfixe, est :

```
(not (imp (and (and (imp S F) (imp G T)) (and (imp (and F T) G) (and T S))) T))
```

Resultat LoTREC et interprétation

LoTREC renvoie : `FALSE` pour la formule `not (...)`. Interprétation :
— `not(...)` est **insatisfiable** (LoTREC renvoie `FALSE`),
— donc la formule originelle $(F1 \wedge F2 \wedge F3 \wedge F4) \rightarrow TAMIFLU$ est **valide**.

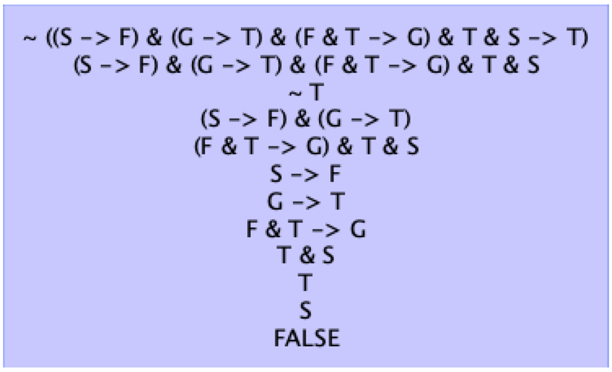


FIGURE 13 – Résultat de la vérification avec LoTREC pour la question 2

Conclusion (question 2)

Puisque l'implication est valide, on déduit logiquement que **le patient considéré doit prendre du tamiflu**.

Q3.3. Cas avec incertitude (remplacement de la règle (c))

Nouvelle règle

On remplace la règle (c) par une règle incertaine :

$$(FIEVRE \wedge TOUX) \rightarrow (GRIPPE \vee BRONCHITE).$$

La base modifiée est donc :

$$\begin{aligned} KB' = \{\ & SUP38 \rightarrow FIEVRE, \\ & GRIPPE \rightarrow TAMIFLU, \\ & (FIEVRE \wedge TOUX) \rightarrow (GRIPPE \vee BRONCHITE), \\ & TOUX, \\ & SUP38\ \}. \end{aligned}$$

Formule testée en préfixe (LoTREC)

La négation de l'implication que l'on teste est (forme fournie) :

```
not (imp and and imp S F imp G T and imp and F T or G B and T S T)
```

Resultat LoTREC et interprétation (suivant la réponse fournie)

LoTREC renvoie : `FALSE` pour la formule ci-dessus. Interprétation selon le même raisonnement :

— `not(...)` est **insatisfiable** d'après LoTREC,

— donc l'implication $(F1 \wedge F2 \wedge F3' \wedge F4) \rightarrow TAMIFLU$ est **valide**.

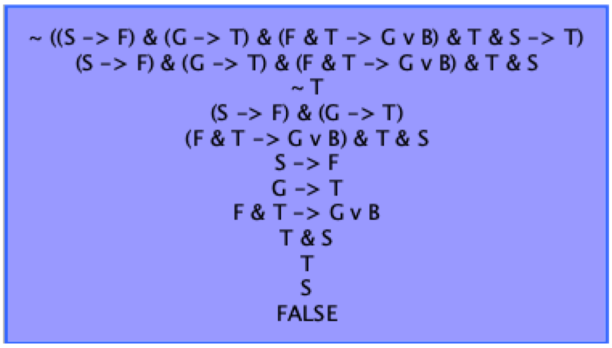


Figure 14 – Résultat de la vérification avec LoTREC pour la question 3

Conclusion (question 3)

D'après le résultat indiqué (LoTREC renvoyant `FALSE`), on conclut que même en présence de l'incertitude (le succédent à droite pouvant être `GRIPPE` ou `BRONCHITE`), l'implication qui garantit la prise de tamiflu reste valable. Autrement dit, **la prise de tamiflu est toujours indiquée** dans ce cas, selon les tests effectués.

Remarque finale

Le raisonnement ci-dessus suit strictement la procédure indiquée : on a traduit les connaissances en formules propositionnelles, on a exprimé la démande de déduction comme la validité d'une implication, et on a utilisé le fait que LoTREC renvoie `FALSE` (pour la formule `not(...)`) comme certificat d'insatisfiabilité de la négation — ce qui implique la validité de l'implication cherchée. Selon cette démonstration, la conclusion pratique est que le patient doit prendre du tamiflu dans les deux configurations considérées.

Exercice 4 – Modèles et pré-modèles

Enoncé

On considère la formule suivante en variables propositionnelles a, b, c :

$$\Phi \;=\; ((a \rightarrow b) \wedge b \wedge c) \;\vee\; ((c \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)).$$

On demande :

1. Construire la table de vérité et énumérer les modèles de Φ.
2. Construire avec la méthode des tableaux les pré-modèles obtenus et représenter ces pré-modèles sur l'hypercube des interprétations possibles.
3. $*$ Peut-on construire une formule donnant trois pré-modèles P_1, P_2, P_3 tels que $M(P_1) \subset M(P_2) \subset M(P_3)$?
4. $*$ Existe-t-il un lien général entre le nombre de pré-modèles et le nombre de modèles d'une formule ?

Q4.1. Table de vérité et modèles

Avec trois variables a, b, c il y a $2^3 = 8$ affectations. Pour chaque affectation on calcule Φ.

#	a	b	c	$a \to b$	$(a \to b) \wedge b \wedge c$	$c \to b$	$b \to a$	Φ
1	0	0	0	1	0	1	1	1
2	0	0	1	1	0	0	1	0
3	0	1	0	1	0	1	0	0
4	0	1	1	1	1	1	0	1
5	1	0	0	0	0	1	1	1
6	1	0	1	0	0	0	1	0
7	1	1	0	1	0	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1

Les lignes où Φ vaut vrai sont les numéros : 1, 4, 5, 7, 8. En notant une affectation par le triplet (a, b, c) (avec 1 pour vrai, 0 pour faux), les modèles de Φ sont :

$$M(\Phi) = \{(0,0,0),\ (0,1,1),\ (1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}.$$

Q4.2. Pré-modèles par la méthode des tableaux

Écrivons Φ sous la forme $L \vee R$ avec

$$L = (a \to b) \wedge b \wedge c, \qquad R = (c \to b) \wedge (b \to a).$$

La règle de la disjonction ($\vee$) dans les tableaux crée deux branches : une branchant sur L, l'autre sur R.

Branche 1 : L

On ajoute les formules :

$$a \to b, \quad b, \quad c.$$

Interprétation partielle : $b =$ vrai, $c =$ vrai ; a n'est pas contraint (car $a \to b$ est automatique si b est vrai). Donc le pré-modèle correspondant, noté P_1, détermine :

$$P_1 : \ b = 1,\ c = 1,\ a \text{ non fixé}.$$

Ainsi

$$M(P_1) = \{(0,1,1), (1,1,1)\}.$$

Branche 2 : R

On ajoute :

$$c \to b, \quad b \to a.$$

Ces deux implications imposent les contraintes : si $c = 1$ alors $b = 1$; si $b = 1$ alors $a = 1$. Les affectations qui vérifient ces contraintes sont :

$$(0, 0, 0),\ (1, 0, 0),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, 1).$$

Le pré-modèle P_2 correspond donc à :

$$P_2 :\ \{c \to b,\ b \to a\}, \qquad M(P_2) = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

Observations

- Les deux pré-modèles P_1 et P_2 ont des ensembles de modèles qui se recouvrent : $(1, 1, 1) \in M(P_1) \cap M(P_2)$.
- L'union $M(P_1) \cup M(P_2)$ est exactement $M(\Phi)$ calculé à la question 1.
- Chaque pré-modèle est obtenu par une branche ouverte du tableau (aucune des deux branches n'est fermée), donc chacune correspond à au moins un modèle.

Représentation sur l'hypercube

L'hypercube des interprétations pour (a, b, c) a 8 sommets correspondant aux triplets $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$.

- $M(P_1) = \{011, 111\}$: deux sommets fixés (situation $b = 1, c = 1$).
- $M(P_2) = \{000, 100, 110, 111\}$: quatre sommets selon les contraintes $c \to b$ et $b \to a$.

Coloriage

$M(P_1) = \{011, 111\} \to$ marquons en R ces deux sommets.

$M(P_2) = \{000, 100, 110, 111\} \to$ marquons en B ces sommets.

Le sommet 111 est dans les deux $\to$ on peut le marquer R+B (intersection).

```
    011(R)-------111(R+B)
    /|           /|
   / |          / |
001---------101 |
 |  010-------|--110(B)
 |  /         |  /
 | /          | /
000(B)------100(B)
```

Figure 15 – Représentation sur l'hypercube

Q4.3. Existence de pré-modèles emboîtés

La question demande si l'on peut obtenir trois pré-modèles P_1, P_2, P_3 tels que

$$M(P_1) \subset M(P_2) \subset M(P_3).$$

Construction explicite Oui. Par exemple, considérons la formule suivante en variables (x, y, z) :

$$\Psi = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee x.$$

Les trois disjoncts engendrent 3 branches distinctes dans le tableau :

- Branche 1 $(x \wedge y \wedge z) \Rightarrow$ pré-modèle Q_1 avec $x = 1, y = 1, z = 1$.
  $M(Q_1) = \{(1, 1, 1)\}$.
- Branche 2 $(x \wedge y) \Rightarrow$ pré-modèle Q_2 avec $x = 1, y = 1$, z non fixé.
  $M(Q_2) = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.
- Branche 3 $(x) \Rightarrow$ pré-modèle Q_3 avec $x = 1$, y, z non fixés.
  $M(Q_3) = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

On vérifie immédiatement que

$$M(Q_1) \subset M(Q_2) \subset M(Q_3).$$

Ainsi la réponse à la question est positive : on peut construire une formule donnant trois pré-modèles emboîtés.

Q4.4. Lien entre nombre de pré-modèles et nombre de modèles

Quelques remarques générales :

- Chaque pré-modèle (branche ouverte) correspond à au moins un modèle : $M(P) \neq \varnothing$.
- Différents pré-modèles peuvent correspondre à des ensembles de modèles qui se recouvrent (ils ne sont pas nécessairement disjoints).
- Le nombre de pré-modèles d'une formule n'est pas nécessairement égal au nombre de modèles ; un pré-modèle peut englober plusieurs modèles si peu de littéraux sont fixés dans la branche correspondante.
- En extrême, on peut avoir relativement peu de pré-modèles couvrant un grand nombre de modèles (pré-modèle très général) ou bien de nombreux pré-modèles chacun correspondant à un petit nombre de modèles.
- En bref : il n'existe pas de relation simple et universelle de type "nombre de pré-modèles = f(nombre de modèles)". Le lien dépend fortement de la structure de la formule et de la manière dont la décomposition par tableaux crée des bifurcations.

Conclusion (Exercice 4)

- La formule Φ admet cinq modèles précis : $(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$.
- Le tableau produit deux pré-modèles ouverts P_1 et P_2 dont les ensembles de modèles sont

$$M(P_1) = \{(0, 1, 1), (1, 1, 1)\}, \quad M(P_2) = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\},$$

et $M(P_1) \cup M(P_2) = M(\Phi)$.
— Il est possible de construire des formules engendrant des pré-modèles emboîtés (ex. Ψ donnée).
— La relation entre le nombre de pré-modèles et le nombre de modèles est essentiellement structurelle et il n'existe pas de formule simple universelle liant ces deux nombres.

Exercice 5 – Exploitation de l'arbre

Dans cette question, nous analysons la structure globale de l'arbre construit par la méthode des tableaux.

Q5.1. Une formule non valide dont toutes les feuilles sont ouvertes

On cherche une formule qui n'est pas valide et qui conduit à un arbre sans contradiction, donc toutes les feuilles restent ouvertes. Un exemple simple est :

$$F = a$$

En effet, a n'est pas une tautologie (elle n'est pas valide, car elle peut être fausse selon l'interprétation). Dans le tableau construit à partir de F, on ne génère aucune contradiction : la seule branche contient a, et donc toutes les feuilles sont ouvertes.

Ainsi $F = a$ est une formule non valide avec uniquement des feuilles ouvertes.

Q5.2. Une formule valide dont l'arbre contient une feuille fermée

On cherche maintenant une formule valide, mais dont le développement du tableau conduit à la fermeture d'au moins une branche. Un bon exemple est :

$$F = (a \land \neg a) \lor (b \lor \neg b)$$

Analyse par la méthode des tableaux :

— Le développement de la disjonction génère deux branches :
  1. Branche 1 : $a \land \neg a \quad \Rightarrow$ contradiction immédiate (branche fermée).
  2. Branche 2 : $b \lor \neg b \quad \Rightarrow$ tautologie, toujours vraie (branche ouverte).

— L'arbre contient donc à la fois une feuille fermée et une feuille ouverte.

Comme la deuxième branche est toujours vraie, la formule F est une tautologie (valide). Ainsi, nous avons un exemple de formule valide qui génère un arbre avec au moins une feuille fermée.

Conclusion (Exercice 5)

— Pour une formule **non valide**, comme a, toutes les branches peuvent rester ouvertes.
— Pour une formule **valide**, comme $(a \land \neg a) \lor (b \lor \neg b)$, on peut obtenir un arbre contenant à la fois des branches fermées et des branches ouvertes.

Bilan pour ce TP

— **Objectifs atteints :** prise en main de LoTREC (modes `Build Premodels` et `Step by step`), compréhension des règles α/β, capacité à formaliser des connaissances propositionnelles et à vérifier la validité/satisfiabilité via tableaux.

— **Compétences développées :** traduction de connaissances naturelles en formules logiques, lecture et interprétation des pré-modèles, extraction de modèles depuis les branches ouvertes, utilisation pratique des outils de raisonnement (LoTREC).

— **Observations :** les règles α enrichissent le nœud courant tandis que les règles β créent des bifurcations ; un pré-modèle peut correspondre à plusieurs modèles complets ; la validité d'une implication se vérifie en montrant que sa négation est insatisfiable.

— **Améliorations possibles :** ajouter des captures d'écran *step-by-step* et documenter précisément les commandes LoTREC utilisées (facilite la relecture et la reproductibilité), explorer des cas non monotones ou incertains (pour observer la propagation d'ambiguïté).