

## Examen réparti 1

(notes de cours et TD autorisées, barème indicatif)

### Exercice 1 : modélisation (4 pts)

Le manager d'une entreprise de livraison rapide souhaite constituer ses équipes de livreurs sachant que les besoins en personnel sont définis chaque semaine par les effectifs minimaux suivants :

<i>jour</i>	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
<i>effectif</i>	17	13	15	19	14	16	11

Les livreurs travaillent à plein temps sur un cycle de 5 jours consécutifs et 2 jours de repos. Les cycles peuvent commencer n'importe quel jour de la semaine et se répètent à l'identique les semaines suivantes. Par exemple, un livreur dont le cycle commence le jeudi travaille jusqu'au lundi (inclus) de la semaine suivante, se repose le mardi et le mercredi, et reprend le jeudi suivant. Le manager souhaite organiser ses équipes pour disposer des effectifs minimum requis chaque jour tout en minimisant le nombre total de livreurs employés.

- 1) Formuler ce problème comme un programme linéaire en nombres entiers (on ne demande pas de le résoudre).
- 2) Le manager envisage maintenant une solution mixte en ayant recours à du personnel intérimaire qui peut être mobilisé pour compléter l'effectif d'employés réguliers qu'il va recruter. Ce personnel intérimaire est plus flexible car on l'embauche à la journée (n'importe quel jour de la semaine) mais son coût journalier est 50% plus cher que le coût moyen journalier du personnel régulier (salaire hebdomadaire divisé par 7). Comment modifier le programme linéaire en variables entières proposé à la question précédente si l'on souhaite trouver l'organisation des équipes qui soit la moins chère possible et qui couvre les besoins ?

### Exercice 2 : méthode en deux phases et dualité (6 pts)

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  on considère le programme linéaire  $\mathcal{P}(\lambda)$  défini par :

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & + & 2x_2 \geq 2\lambda \\ x_1 & - & x_2 \geq -3\lambda \\ -4x_1 & + & x_2 \geq -8\lambda \end{array} \right. \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- 1) Mettre  $\mathcal{P}(1)$  sous forme standard avec un second membre positif. En déduire que mettre toutes les variables d'écart en base ne correspond pas à une solution réalisable.
- 2) Détailler le déroulement de la méthode en deux phases (après ajout éventuel d'une ou plusieurs variables artificielles là où c'est utile) pour la résolution de  $\mathcal{P}(1)$  ; on utilisera la méthode des tableaux pour effectuer toute itération de l'algorithme du simplexe. Vérifier ainsi que la solution optimale de  $\mathcal{P}(1)$  est  $x^* = (0, 1)$ .
- 3) En utilisant la forme initiale de  $\mathcal{P}(\lambda)$  (celle avec les inégalités), écrire le problème dual  $\mathcal{D}(\lambda)$  de  $\mathcal{P}(\lambda)$ , puis résoudre  $\mathcal{D}(1)$  en vous servant du théorème des écarts complémentaires.
- 4) Etudier comment évolue la solution optimale de  $\mathcal{P}(\lambda)$  et sa valeur en fonction de  $\lambda$  pour  $\lambda \geq 1$ .

### Exercice 3 : séparation et évaluation (4 pts)

Soit  $\mathcal{P}$  le programme linéaire suivant en variables mixtes (une variable est entière, la seconde réelle et la troisième booléenne).

$$\max z = 9x_1 + 12x_2 + 2x_3$$

$$s.c. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \in \mathbb{N}, x_2 \geq 0, x_3 \in \{0, 1\}$$

Sachant que la relaxation continue de  $\mathcal{P}$  a pour solution optimale le vecteur  $x = (0, \frac{11}{5}, \frac{2}{5})$ , développer une procédure de séparation et évaluation pour résoudre ce problème (*indication* : on adaptera la méthode vue en cours pour la programmation linéaire en nombres entiers, on fera la séparation d'abord sur  $x_3$  puis sur  $x_1$  et on utilisera une résolution graphique trouver les valeurs optimales des relaxations continues). On développera l'arborescence de recherche et on déterminera la solution optimale.

### Exercice 4 : jeu et PL (6 pts)

On considère un jeu à deux joueurs  $J_1, J_2$  dans lequel  $J_1$  a trois stratégies nommées "Haut", "Moyen" "Bas" et  $J_2$  a trois stratégies nommées "Gauche", "Centre", "Droite". Les gains de  $J_1$  sont donnés dans le tableau ci-dessous et les gains de  $J_2$  sont l'opposé des gains de  $J_1$  (jeu à somme nulle).

$J_1 \backslash J_2$	Gauche	Centre	Droite
Haut	0	-2	3
Moyen	2	0	-4
Bas	-3	4	0

- 1) Si  $J_1$  annonce qu'il joue une stratégie mixte qui consiste à jouer Haut, Moyen et Bas avec les probabilités  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ , quelle est alors la stratégie optimale de  $J_2$  et l'espérance de gain de  $J_2$  ?
- 2) Plus généralement, si  $J_1$  annonce qu'il joue une stratégie mixte qui consiste à jouer Haut, Moyen et Bas avec les probabilités  $(p_1, p_2, p_3)$  exprimer en fonction de  $p_1, p_2, p_3$  l'espérance de gain de  $J_2$  s'il joue optimalement. Quelle est alors l'espérance de gain de  $J_1$  ?
- 3) Ecrire le programme linéaire qui permet de calculer la ou les stratégie(s) mixte(s) optimale(s) pour  $J_1$ .
- 4) Montrer que toute stratégie mixte optimale pour  $J_1$  vérifie nécessairement  $p_1 \leq \frac{4}{9}$  et  $p_2 \leq \frac{1}{3}$ . Déterminer alors la ou les stratégie(s) optimale(s) pour  $J_1$ .