Sorbonne Université	**LRC**	M1 ANDROIDE
ANNÉE 2018-2019	**Examen Réparti 2**	M1 DAC

Correction : **Eléments de correction**
Durée 2h - documents et calculatrices non autorisés
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif

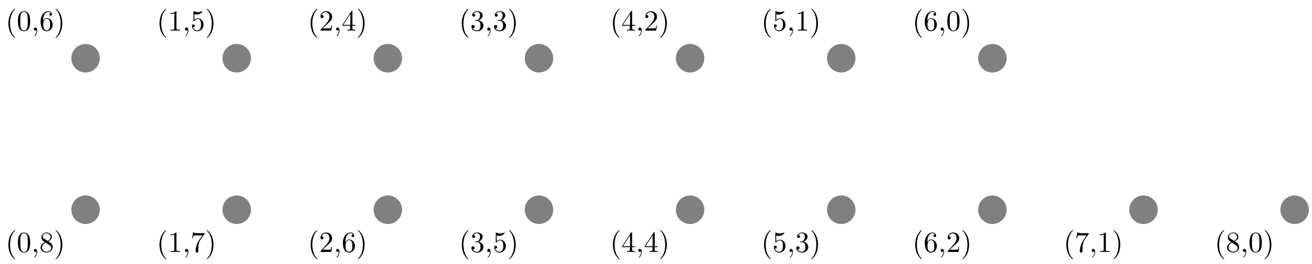
1 Logique épistémique

Exercice 1 – Modélisation et annonces publiques – *9 points*

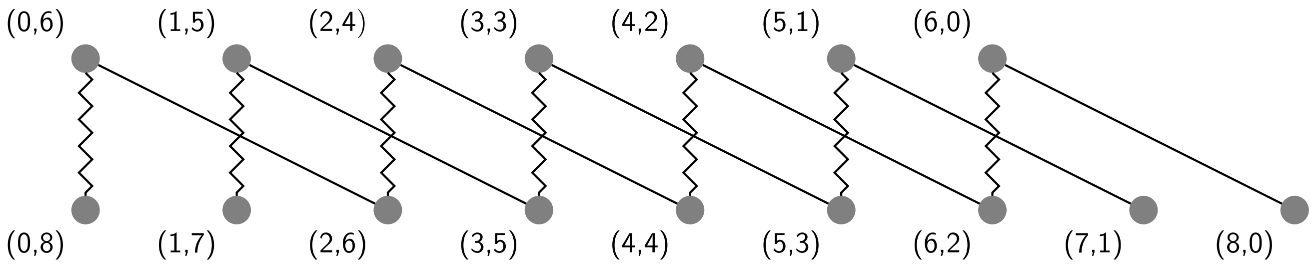
Un roi fait venir deux peintres qu'il tient prisonniers (Robert et Sonia) dans une pièce, et leur fait porter à chacun une paire de lunettes. Le roi pose ensuite devant les deux prisonniers un tableau, qui comporte des points de couleurs. Le roi leur dit alors :

> "Sur ce tableau, il y a des points jaunes et rouge, et seulement de ces couleurs. Robert, tu ne peux voir que les points de couleur jaunes. Sonia, tu ne peux voir que les points de couleur rouge. Il y a au total 8 ou 6 points. "

1. (1pt) La figure suivante indique les différents mondes possibles, où un monde (x, y) signifie que Robert voit x points et Sonia voit y. Reproduisez cette disposition sur votre copie, et ajoutez les relations d'accessibilité correspondantes à Robert et Sonia. ()Vous supposerez que les relations sont implicitement réflexives et symétriques).



Correction : Les relations snake correspondent à celles de Robert, les droites à celles de Sonia. Note : le modèle consiste en effet en 2 composantes connexes : soit les deux peintres voient chacun un nombre de points pairs, soit les deux peintres voient chacun un nombre de points impairs.



2. (1.5 pt) Supposons à présent que la situation réelle soit la suivante : Robert voit 4 points et Sonia voit 4 points, correspondant au monde $(4, 4)$. Par ailleurs, on utilisera les propositions xn pour signifier "X voit exactement n points." Ainsi, par exemple, on peut écrire la formule $K_r(s2)$, qui signifie que Robert sait que Sonia voit 2 points.

   Donner les formules de logique épistémique correspondantes aux énoncés suivants :

   (a) Robert sait que Sonia ne voit pas 0 point.

   (b) Robert sait que Sonia sait qu'il ne voit pas 2 point.

   (c) tout le monde sait que Robert ne voit pas 0 point.

(d) il est connaissance commune que Sonia ne voit pas 0 point.

(e) il est connaissance distribuée que Robert voit 4 points et que Sonia voit 4 points.

Correction :Les modalités de groupe E, C, D portent implicitement sur $\{R, S\}$.

(a) $K_r \neg s0$

(b) $K_r K_s \neg r2$

(c) $E \neg s0$ (ou bien $K_r \neg s0 \wedge K_s \neg s0$)

(d) $C \neg s0$

(e) $D(r4 \wedge s4)$

3. (2.5pts) Indiquez, pour chacune de ces formules F, si elle est vraie dans le monde $(4, 4)$.

Correction :

(a) $M, (4, 4) \models K_r \neg s0$ ✓ [seul les mondes $(4, 4)$ et $(4, 2)$ sont accessibles, $\neg s0$ est vrai dans ces 2 mondes.]

(b) $M, (4, 4) \models K_r K_s \neg r2$ × [le monde $(2, 4)$ est accessible, et $r2$ est faux en ce monde.]

(c) $M, (4, 4) \models E \neg s0$ (ou bien $K_r \neg s0 \wedge K_s \neg s0$) : ✓ [mondes accessibles : $(4, 2)$, $(4, 4)$, $(2, 4)$, $\neg s0$ vrai en tous ces mondes.]

(d) $M, (4, 4) \models C_{R,S} \neg s0$: × [les mondes $(6, 0$ et $(8, 0)$ accessibles, en particulier, or $\neg s_0$ y est faux.]

(e) $M, (4, 4) \models D_{R,S}(r4 \wedge s4)$: ✓ [en connaissance distribuée, tous les mondes sont distinguables (aucune intersection des relations d'accessibilité), en particulier pour $(4, 4)$.]

4. (1.5pt) Indiquez si les formules suivantes sont vraies :

(i) $M, (4, 4) \models C \neg s1$

(ii) $M \models C \neg s0$

(iii) $M \models C \neg s0 \vee C \neg s1$

Correction :

(i) $M, (4, 4) \models C \neg s1$: ✓ [Aucun monde accessible depuis $(4, 4)$ où $s1$ est vrai. (Diffère de $s0$ par exemple)]

(ii) $M \models C \neg s0$: × [n'est pas vrai en $(8, 0)$, par exemple.]

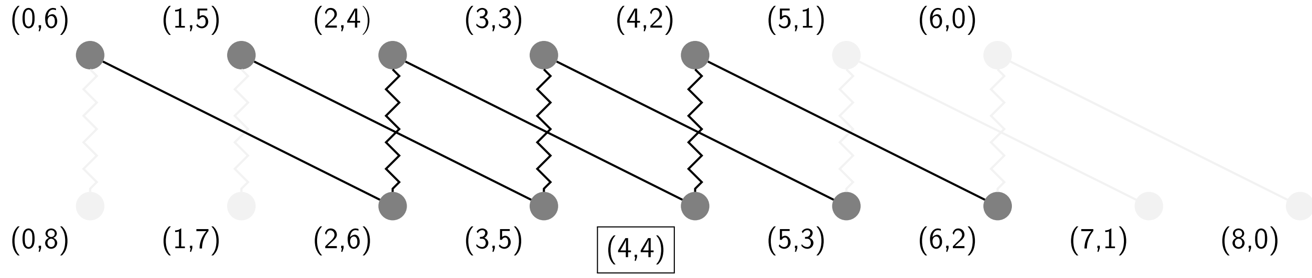
(iii) $M \models C \neg s0 \vee C \neg s1$: ✓ [soit le monde appartient la composante connexe des mondes (impair,impair) et la première partie de la disjonction est vraie, sot le monde appartient à la composante connexe des mondes (par,pair) et la deuxième partie de la disjonction est vraie.]

5. (1.5pt) Le roi explique ensuite :

> "Chaque jour, je vais demander publiquement à l'un de vous, alternativement, si il sait si le tableau comporte 6 ou 8 points. Si vous pouvez me répondre avec certitude, je vous libère tous les deux. Sinon, je vous condamne à regarder ce tableau pour le reste de vos jours."

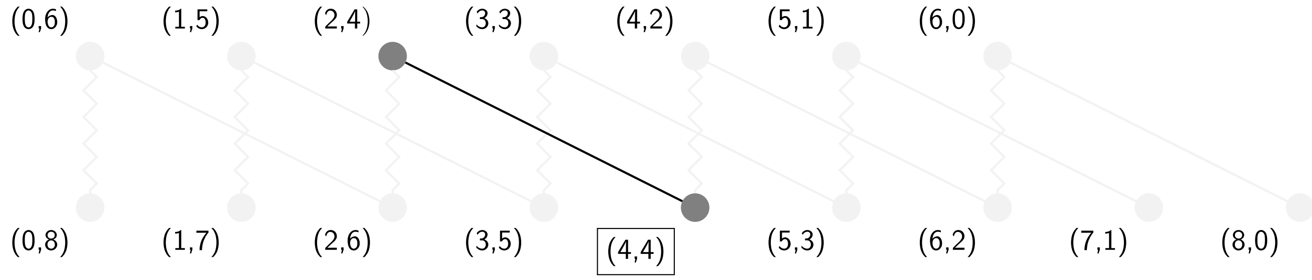
Le premier jour, la question est posée à Robert qui répond publiquement : "Je ne sais pas.". Le deuxième jour, la question est posée à Sonia qui répond également "Je ne sais pas".
Indiquez, après chaque jour, comment la structure est modifiée $i.e$ quels mondes sont éliminés).

Correction : Après la première réponse, les mondes $(8, 0)$ et $(7, 1)$ sont éliminés. En effet, Robert voyait 7 ou 8 points il pourrait répondre avec certitude qu'il y a 8 points.
Après la deuxième réponse, les mondes $(0, 8)$, $(1, 7)$, mais aussi $(5, 1)$ et $(6, 0)$ sont éliminés. En effet, prenons ce dernier monde comme exemple : après la première annonce, en $(6, 0)$, Sonia sait que le nombre de points est 6. Comme elle répond qu'elle ne sait pas ce monde est éliminé. Intuitivement, si Sonia ne voyait que 0 ou 1 point, sachant que Robert voit au plus 6 point, elle aurait pu répondre. La structure résultant après les deux annonces est la suivante, où l'on constate que ni Robert ni Sonia ne connaissent le nombre de point. [Note : on peut aussi accepter, par soucis de simplification, de ne considérer dès le début que les mondes dont les deux valeurs sont paires.]



6. (1pt) Est-il possible selon vous que, après un certain nombre de questions, Robert ou Sonia puisse répondre de manière certaine et indiquer le nombre de points ? Si oui, indiquez après combien en justifiant votre réponse. Si non, expliquez pourquoi.

   Correction : En suivant le même raisonnement, on constate que avec deux questions de plus, on obtient la structure suivante : Robert pourra donc à la question suivante répondre qu'il y a 8 points sur le tableau. (Remarquons qu'à ce moment là, Sonia hésite encore entre les mondes $(2, 4)$ et $(4, 4)$).



Références. L'exercice est librement inspiré de l'énigme décrite sur "The seemingly impossible escape" (Presh Talwalkar). Mind your Decisions Blog, puis reprise sur "The puzzle you can only solve with your best friend" (Brian Gallagher). *Facts so Romantic. The Nautilus Blog.* L'origine de l'énigme elle-même ne semble pas bien établie.

2 Annexe

2.1 Méthode des tableaux sémantiques pour la logique des propositions

La méthode des tableaux sémantiques permet d'établir si un ensemble de fomules logiques est valide, satisfiable ou insatisfiable.

2.1.1 Composantes

La méthode des tableaux est basée sur des règles syntaxiques de décomposition, qui distinguent deux types de formules, nommés α et β.

Nom	Formule α	α_1	α_2
$R_{\neg\neg}$	$\neg\neg\varphi$	φ	φ
$R_{\wedge}$	$\varphi_1 \wedge \varphi_2$	φ_1	φ_2
$R_{\neg\vee}$	$\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	$\neg\varphi_1$	$\neg\varphi_2$
$R_{\neg\rightarrow}$	$\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$	φ_1	$\neg\varphi_2$
$R_{\leftrightarrow}$	$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$	$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$	$\varphi_2 \rightarrow \varphi_1$

Nom	Formule β	β_1	β_2
$R_{\vee}$	$\varphi_1 \vee \varphi_2$	φ_1	φ_2
$R_{\neg\wedge}$	$\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\neg\varphi_1$	$\neg\varphi_2$
$R_{\rightarrow}$	$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$	$\neg\varphi_1$	φ_2
$R_{\neg\leftrightarrow}$	$\neg(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$	$\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$	$\neg(\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$

2.1.2 Satisfiabilité

La recherche d'un modèle pour un ensemble de formules $\mathcal{F}$ par la méthode des tableaux peut être représentée de différentes façons, nous utilisons ici une forme arborescente.

- Initialisation : créer un nœud racine, étiqueté par l'ensemble $\mathcal{F}$ et marqué comme non traité
- Décomposition itérative : choisir un nœud non traité et le marquer comme traité
  - si l'étiquette du nœud contient deux littéraux complémentaires, marquer le nœud comme fermé
  - sinon, si toutes les formules associées au nœud sont des variables propositionnelles, marquer le nœud comme ouvert
  - sinon, choisir une formule F de l'étiquette du nœud
    - si elle est de type α
      - créer un sous-nœud marqué comme non traité
      - lui associer l'étiquette $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ où α_1 et α_2 sont les formules obtenues par réécriture de F
    - sinon (si elle est de type β)
      - créer deux sous-nœuds marqués comme non traités
      - leur associer respectivement les étiquettes $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_1\}$ et $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_2\}$ où β_1 et β_2 sont les formules obtenues par réécriture de F

Si l'arbre contient une feuille ouverte, alors $\mathcal{F}$ est satisfiable.
Si toutes les feuilles de l'arbre sont fermées, alors $\mathcal{F}$ est insatisfiable.

2.2 Logique de description $\mathcal{ALC}$

2.2.1 Alphabet

- Concepts atomiques : A, B, C, ...
- Rôles atomiques : R, S, U, V, ...
- Symboles : $\{\sqcup, \sqcap, \exists, \forall, \neg, \top, \bot, .\}$
- Instances de concepts : a, b, ...

2.2.2 Base de connaissances

- TBox - Axiomes terminologiques :

  Définitions : $C \equiv D$

  Subsomptions : $C \sqsubseteq D$ (se lit *C est subsumé par D*)
- ABox - Assertions :

  Assertions de concepts : $a : C$

  Assertions de rôles : $\langle a, b\rangle : R$

2.2.3 Grammaire

$$
\begin{array}{ll}
\text{concept} ::= & \langle\text{concept atomique}\rangle \\
 & \mid \top \\
 & \mid \bot \\
 & \mid \neg\langle\text{concept}\rangle \\
 & \mid \langle\text{concept}\rangle \sqcap \langle\text{concept}\rangle \\
 & \mid \langle\text{concept}\rangle \sqcup \langle\text{concept}\rangle \\
 & \mid \exists\ \langle\text{rôle}\rangle.\langle\text{concept}\rangle \\
 & \mid \forall\ \langle\text{rôle}\rangle.\langle\text{concept}\rangle
\end{array}
$$

2.2.4 Sémantique de $\exists$ et $\forall$

Etant donné une interprétation $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, .^{\mathcal{I}})$, on a :

- $(\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} | \exists y, (x, y) \in R^{\mathcal{I}} \land y \in C^{\mathcal{I}}\}$
- $(\forall R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} | \forall y, (x, y) \in R^{\mathcal{I}} \rightarrow y \in C^{\mathcal{I}}\}$

2.2.5 Extension $\mathcal{I}$

Grammaire : Si R est un rôle, R^{-1} est un rôle.

Sémantique : $(R^{-1})^{\mathcal{I}} = \{(x, y) \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}, (y, x) \in R^{\mathcal{I}}\}$