

EXERCICE 34

Logique - Quantificateurs

quels que soient les prédicats F G ,

$$\forall y, ((F(y) \wedge (\forall z, G(z))) \Rightarrow (\exists x, (F(x) \wedge G(x))))$$

$$\text{Montrons } \forall y, (F(y) \wedge (\forall z, G(z))) \Rightarrow (\exists x, (F(x) \wedge G(x))) \quad (1)$$

($\forall I$)

Soit l'élément y

$$\text{Montrons } (F(y) \wedge (\forall z, G(z))) \Rightarrow (\exists x, (F(x) \wedge G(x))) \quad (2)$$

($\Rightarrow I$)

$$\text{Supposons que } F(y) \wedge (\forall z, G(z)) \quad (h1)$$

$$\text{Montrons } \exists x, (F(x) \wedge G(x)) \quad (3)$$

($\exists I$)

$$\text{Montrons } F(y) \wedge G(y) \quad (4)$$

($\wedge I$)

$$\text{Montrons } F(y) \quad (5)$$

($\wedge E$)

$$\text{Montrons } F(y) \wedge (\forall z, G(z)) \quad (6)$$

d'après (h1)

$$\text{Montrons } G(y) \quad (7)$$

($\forall E$)

$$\text{Montrons } \forall x, G(x) \quad (8)$$

($\wedge E$)

$$\text{Montrons } F(y) \wedge (\forall z, G(z)) \quad (9)$$

d'après (h1)