

### Corrigé Exercice 1 (5 pts)

1) [2 pts] On prend  $x_{ij}$  pour la quantité de produit  $j$  fabriquée sur le site  $i$ . Le PL s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \min z' &= 5x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + 8x_{21} + 7x_{22} + 10x_{23} \\ \text{s.c.} \quad &\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} & \leq 10000 \\ x_{11} & + x_{21} & \leq 10000 \\ & x_{12} & + x_{22} & \leq 6000 \\ & & x_{13} & + x_{23} & \leq 8000 \\ & & & & & \leq 5000 \end{cases} \\ &x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

2) [0.5 pt] Le dual de  $\mathcal{P}$  s'écrit comme le PL ci-dessus à ceci près que le second membre doit être divisé par 1000.

3) [1.5 pts] On vérifie déjà que le vecteur  $y = (2, 0, 7, 7, 10)$  est une solution réalisable de  $\mathcal{P}$ . On construit alors la solution du dual associée par le TEC. On obtient :  $x_{11} = 6, x_{12} = 0, x_{13} = 4, x_{21} = 0, x_{22} = 8, x_{23} = 1$ . Cette solution est bien duale réalisable et de même valeur (128), on est bien à l'optimum sur les deux solutions.

4) [1 pt] La politique optimale du problème initial se déduit de la solution précédente en multipliant les variables par 1000. Il faut donc produire 6000 de produit 1 sur le site 1, 8000 de produit 2 sur le site 2, 4000 de produit 3 sur le site 1 et 1000 de produit 3 sur le site 2. Le coût total est 128000.

### Corrigé Exercice 2 (5 pts)

1) [2.5 pts] soit 1 par itération correcte et 0.5 pour l'unicité.

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 8x_4 \\ \text{s.c.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + e_1 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + e_2 = 2 \end{cases} \\ &x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, e_i \geq 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$

Base initiale  $\{e_1, e_2\}$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$e_1$	$e_2$
$e_1$	2	1	1	3	1	0
$e_2$	1	2	1	1	0	1
	3	8	-5	8	0	0

$x_2$  entre en base et  $e_2$  sort

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$e_1$	$e_2$
$e_1$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
$x_2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	-1	0	-9	4	0	4

$x_4$  entre en base et  $x_2$  sort

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$e_1$	$e_2$
$e_1$	-1	-5	-2	0	1	-3
$x_4$	1	2	1	1	0	1
	-5	-8	-13	0	0	-8
						-16

On est à l'optimum, la solution est  $x = (0, 0, 0, 2)$  de valeur 16.

2) [1 pt] L'objectif initial s'écrit en fonction des variables hors base (dans la base optimale)  $z = 16 - 5x_1 - 8x_2 - 13x_3 - 8e_2$ . Si le coefficient de  $x_1$  dans la fonction objectif passe de 2 à 1, il faut retirer  $x_1$  ce qui donne  $z' = 16 - 6x_1 - 8x_2 - 13x_3 - 8e_2$ . La solution reste optimale et la valeur n'a pas changé.

3) [1.5 pts] L'objectif initial s'écrit en fonction des variables hors base (dans la base optimale)  $z = 16 - 5x_1 - 8x_2 - 13x_3 - 8e_2$ . Si le coefficient de  $x_4$  dans la fonction objectif passe de 8 à 3, il faut retirer  $5x_4$ , comme  $x_4 = 2 - x_1 - 2x_2 - x_3 - e_2$  en fonction des variables hors base, on a  $5x_4 = 10 - 5x_1 - 10x_2 - 5x_3 - 5e_2$  ce qui donne  $z' = 6 + 2x_2 - 8x_3 - 3e_2$ . Le tableau est alors :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$e_1$	$e_2$
$e_1$	-1	-5	-2	0	1	-3
$x_4$	1	2	1	1	0	1
	0	2	-8	0	0	-3
						-6

La solution n'est plus optimale. On fait entrer  $x_2$  en base et  $x_4$  sort.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$e_1$	$e_2$
$e_1$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
$x_2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	-1	0	-9	-1	0	-4
						-8

On est à l'optimum, la solution est  $x = (0, 1, 0, 0)$  de valeur 8.

### Corrigé exercice 3

Initialisation :  $E^*(j) = 0$  pour  $j > 21$  (plus précisément pour  $j = 22, \dots, 27$ ), on a 0 euro si on a dépassé 21.

Récurrence : pour  $j \leq 21$ , si l'on s'arrête on gagne  $j$ , sinon en espérance on gagne  $\frac{\sum_{k=j+1}^{j+6} E^*(k)}{6}$ .  
On prend donc la décision qui maximise le résultat :

$$E^*(j) = \max\left(j, \frac{\sum_{k=j+1}^{j+6} E^*(k)}{6}\right)$$

### Flot maximum (4 points)

1)[0.5 point] La coupe est de capacité  $4+9+8=21$ .

2)[3.5 points] Il y a deux étapes d'augmentation (trois étapes en tout) : par exemple à la première étape un chemin augmentant  $s, 1, 3, t$ , puis à la deuxième étape un chemin augmentant  $s, 2, 5, 4, 3, t$ . A la troisième étape les sommets  $s, 1, 2, 4, 5$  sont marqués, le flot est maximum de valeur 10.  $(S, T)$  avec  $S = \{s, 1, 2, 4, 5\}$  est une coupe minimum.

### Corrigé exercice 5

1.5 pour la construction de  $R$ . 1.5 pour l'équivalence des solutions et la justification.

On adapte simplement la construction faite pour le problème de couplage. On construit le réseau  $R$  suivant :

- $R$  contient les sommets  $A, B$  de  $G$  et deux nouveaux sommets  $s$  et  $t$ ;
- A chaque arête  $(i, j)$  de  $E$  avec  $i \in A$  et  $j \in B$ , on met un arc  $(i, j)$  de capacité 1 (attention à ne pas mettre  $\infty$  ici);
- On met un arc de  $s$  à tout sommet de  $A$  avec une capacité 2, et un arc de tout sommet de  $B$  à  $t$  de capacité 2.

Le graphe  $G$  est cycle-partitionnable si et seulement si il existe un flot de valeur  $2|A|$  dans  $R$ . En effet, si il existe un ensemble d'arêtes  $E'$  tel que tout sommet est de degré 2 dans  $G$ , en faisant passer un flux 1 sur les arcs correspondants, un flux 2 sur les arcs issus de  $s$  et arrivant en  $t$  (et 0 ailleurs) on obtient un flot de valeur  $2|A|$ . De même, si l'on a un flot de valeur  $2|A|$ , les capacités étant entières il existe un flot entier de valeur  $2|A|$ . Alors chaque sommet de  $L$  ou  $R$  il existe exactement deux arcs (entre  $L$  et  $R$ ) ayant un flux de 1. Les arêtes correspondantes sont une cycle-partition.