TD1 : Langages logiques

Les exercices annotés par le symbole $\star$ correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur le site moodle de l'UE.

Exercice 1.1 (Formalisation)

1. (Quantificateurs) Préciser à l'aide d'un quantificateur le sens du mot « un » dans les phrases suivantes et les formaliser dans le langage de la logique des prédicats.

   (1) *Un entier naturel est pair ou impair.*
   (2) *Un enseignant-chercheur a toujours un nouveau sujet à étudier.*
   (3) *Un étudiant a besoin d'avoir un idéal.*

2. (Enoncé mathématique)

   (a) On considère l'énoncé : « *Tout nombre entier naturel x a un successeur qui est inférieur ou égal à tout entier strictement supérieur à x.* » Formaliser cet énoncé par une formule logique en utilisant les prédicats suivants :

entier(x)	« *x est un entier naturel* »
successeur(x, y)	« *x est successeur de y* »
inf(x, y)	« *x est inférieur ou égal à y* »

   (b) On considère le symbole de prédicat p d'arité 2 tel que $p(x_1, x_2)$ signifie « *x_1 est un triangle équilatéral de hauteur x_2* ». Formaliser les deux énoncés :

   (F_1) « *il existe au plus un triangle équilatéral dont la hauteur est z* »
   (F_2) « *il existe un unique triangle équilatéral dont la hauteur est z* »

   où z est un symbole de variable. On pourra utiliser le prédicat $=$ d'arité 2 pour exprimer l'égalité.

Exercice 1.2 (($\star$) Variables libres, variables liées, clôture universelle)
On définit la formule $F = \forall y\,(p(f(g(x), y)) \wedge \forall x\,(q(g(z), x) \Rightarrow \exists z\, p(f(z, w))))$ à partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{w, x, y, z\}$.

1. Quels sont les symboles de fonction apparaissant dans cette formule ?
2. Quels sont les symboles de prédicat apparaissant dans cette formule ?
3. Quels sont les termes apparaissant en argument des symboles de prédicat de F ?
4. Déterminer l'ensemble Free(F) des variables qui ont au moins une occurrence libre dans F.
5. Quelles sont les variables de Free(F) qui admettent au moins une occurrence liée dans F ?
6. Déterminer une clôture universelle de la formule F.

Exercice 1.3 (($\star$) Symboles d'une formule)
Soit la formule $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ où $X = \{x, x_1, x_2, x_3, z\}$ définie par :

$$(\forall x\,(s_1(s_2(x, x)) \wedge \exists x\, s_1(s_2(x, z)))) \wedge (s_3(s_4(x)) \wedge (\exists x\, s_1(s_2(x, z))))$$

On souhaite renommer certains symboles de variable pour obtenir une formule logiquement équivalente à F et dans laquelle les quantificateurs portent sur des symboles de variable différents. On propose la formule suivante :

$$\left(\forall x_1 \left(s_1\left(s_2\left(\square, \square\right)\right) \wedge \exists x_2\, s_1\left(s_2\left(\square, \square\right)\right)\right)\right) \wedge \left(s_3\left(s_4\left(\square\right)\right) \wedge \left(\exists x_3\, s_1\left(s_2\left(\square, \square\right)\right)\right)\right)$$

Remplacer les $\square$ par les symboles de variable appropriés.

Exercice 1.4 (($\star$) Symboles d'une formule)
On considère les symboles s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 et s_6 appartenant à $X \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ à partir desquels on définit la formule $F = \forall s_1\, (s_2(s_3(s_1, s_4(s_5))) \Rightarrow s_6(s_4(s_1), s_5))$.

1. Quelles sont les formules atomiques apparaissant dans F ?
2. Déterminer à quel ensemble chacun des symboles s_1, s_2, s_3, s_4 et s_6 appartient (c-à-d déterminer s'il s'agit d'un symbole de variable de X, d'un symbole de fonction de $\mathcal{F}$ ou d'un symbole de prédicat de $\mathcal{P}$).
3. Que peut-on dire du symbole s_5 ? A quels ensembles peut-il appartenir ?

Exercice 1.5 (($\star$) Construction de formules)
Soit $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ la formule représentée par :

$$\Big(\forall\, y \boxed{} \Big(\boxed{}, \boxed{} \Big(\boxed{}, \boxed{}\Big)\Big)\Big) \Rightarrow \Big(\Big(\boxed{}\boxed{} \exists \boxed{}\boxed{} \Big(\boxed{} \Big(\boxed{}, \boxed{}\Big)\Big)\Big) \vee \boxed{} \Big(\boxed{}, \boxed{}\Big)\Big)$$

où chaque case peut contenir un unique symbole : soit un quantificateur, soit un symbole de l'ensemble $X = \{x, y, z\}$, soit un symbole de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_0 = \{k\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{f\}$, soit un symbole de l'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{P}_1 = \{p\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{q\}$. On souhaite que F vérifie les contraintes suivantes :

— x admet uniquement deux occurrences libres et une occurrence liée par le quantificateur $\forall$ dans F,
— y admet uniquement une occurrence liée par le quantificateur $\forall$ et une occurrence liée par le quantificateur $\exists$ dans F,
— z admet uniquement une occurrence libre dans F,

1. Remplir les cases de F pour que les contraintes soient respectées.
2. Dessiner l'arbre de syntaxe de la formule F et encadrer les occurrences libres de variable.
3. Proposer une clôture universelle F' de F puis renommer certains symboles de variable de F' pour obtenir une formule F'' logiquement équivalente à F' et dans laquelle les quantificateurs portent sur des symboles de variable différents.

Exercice 1.6 (($\star$) Substitutions)
Existe-t-il une substitution :

$$\begin{array}{ccc} \textbf{\textit{symbole de variable à compléter}} & & \textbf{\textit{terme à compléter}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Big[\boxed{?} & := & \boxed{?}\Big] \end{array}$$

telle que :

1. $\forall x\, p(x, y, z) \Big[\boxed{?} := \boxed{?}\Big] = \forall x\, p(x, y, z)$
2. $\forall x\, p(x, y, z) \Big[\boxed{?} := \boxed{?}\Big] = \forall x\, p(x, f(z), z)$
3. $\forall x\, p(x, y, z) \Big[\boxed{?} := \boxed{?}\Big] = \forall x\, p(x, f(x), z)$
4. $\forall x\, p(x, y, z) \Big[\boxed{?} := \boxed{?}\Big] = \forall w\, p(w, f(x), z)$

Si cette substitution existe, compléter le symbole de variable et le terme, sinon expliquer brièvement pourquoi cette substitution n'existe pas.

Exercice 1.7 (Expressions arithmétiques : définitions inductives)
On considère l'ensemble des expressions arithmétiques défini par l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ construit à partir d'un ensemble X de variables, et de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{F}_2 = \{+, -, \times, /\}$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.
2. Donner une définition inductive du nombre d'occurrences d'opérateurs $n_{\mathrm{op}}(e)$, du nombre d'occurrences de constantes $n_{\mathrm{cst}}(e)$ et du nombre d'occurrences de variables $n_{\mathrm{var}}(e)$ dans une expression arithmétique e.
3. Particulariser le schéma de raisonnement par induction sur $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.
4. Montrer par induction que pour toute expression e on a :

$$n_{\mathrm{op}}(e) = n_{\mathrm{var}}(e) + n_{\mathrm{cst}}(e) - 1$$

TD2 : Règles de déduction sur les connecteurs

Les exercices annotés par le symbole $\star$ correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur le site moodle de l'UE.

Exercice 2.1 (Connecteurs logiques)
Avec le système de la déduction naturelle, prouver les formules ci-dessous.

1. Implication et conjonction

$$(F_{1.2}) \quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

2. Implication, conjonction et disjonction

$$\begin{array}{ll} (F_{2.1}) & A \Rightarrow (A \wedge (A \vee B)) \\ (F_{2.3}) & ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \Rightarrow (A \wedge (B \vee C)) \\ (F_{2.5}) & (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \vee C) \Rightarrow (B \vee C)) \end{array}$$

3. Implication, conjonction, disjonction et négation

$$\begin{array}{lll} & (F_{3.2}) & (A \wedge \neg(A \wedge B)) \Rightarrow \neg B \\ & (F_{3.3}) & (A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B) \\ (\star) & (F_{3.10}) & (B \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)) \end{array}$$

4. Raisonnement par l'absurde, tiers exclu

$$\begin{array}{lll} & (F_{4.1}) & (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \\ & (F_{4.2}) & A \vee (A \Rightarrow B) \\ & (F_{4.5}) & \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B) \\ & (F_{4.6}) & A \Rightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)) \\ (\star) & (F_{4.15}) & \neg(A \vee \neg B) \vee \neg(\neg A \wedge B) \end{array}$$

Exercice 2.2 Anna et Julie sont interrogées au sujet d'un crime et déclarent :

Anna : « *Julie est coupable.* »
Julie : « *Si je suis coupable, alors Anna l'est aussi.* »

1. Montrer que l'une au moins des deux déclarations est vraie.
2. On suppose maintenant que les innocents disent la vérité et que les coupables mentent. Montrer qu'exactement l'une des deux est coupable.

Formaliser vos raisonnements en utilisant le système de la déduction naturelle.

TD3 : Interprétation des fonctions, des prédicats et des connecteurs

Les exercices annotés par le symbole $\star$ correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur le site moodle de l'UE.

Exercice 3.1 (($\star$) Entiers naturels et Termes)
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{a\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{s\}$. Etant donné un entier naturel n, on note $s^n(a)$ le terme :

$$s^n(a) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ s(s^k(a)) & \text{si } n = k+1 \end{cases}$$

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
2. On définit une structure $\mathbf{M}$ dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels comme suit :

$$a^{\mathbf{M}} = (1,1) \qquad \begin{array}{l} s^{\mathbf{M}} : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\ s^{\mathbf{M}}((n_1, n_2)) = (n_1 + 1, n_1 \times n_2) \end{array}$$

   (a) Calculer $[s^3(a)]^{\mathbf{M}}$.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $[s^n(a)]^{\mathbf{M}} = (n+1, n!)$.

Exercice 3.2 (($\star$) Entiers naturels et termes)
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_0 = \{Z\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{S\}$.

1. Soit $\oplus$ une fonction sur les paires de termes définie par :

$$\oplus : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \times \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \to \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \qquad \oplus(t_1, t_2) = \begin{cases} t_2 & \text{si } t_1 = Z \\ S(\oplus(t, t_2)) & \text{si } t_1 = S(t) \end{cases}$$

   Calculer $\oplus(S(S(Z)), S(Z))$.
2. Soit $\mathbf{M}$ une structure dont le domaine est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et telle que $Z^{\mathbf{M}} = 0$ et $S^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction définie par $S^{\mathbf{M}}(n) = n + 1$.

   (a) Calculer $[\oplus(S(S(Z)), S(Z))]^{\mathbf{M}}$.

   (b) Montrer par induction sur t_1, que pour tous termes t_1 et t_2, $[\oplus(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}} = [t_1]^{\mathbf{M}} + [t_2]^{\mathbf{M}}$.

Exercice 3.3 (Structures et interprétations)
A partir des ensembles $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{c, d\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p, q\}$ on définit la formule :

$$F = (p(c,d) \Rightarrow q(c,d)) \Rightarrow (\neg p(c,d) \Rightarrow \neg q(c,d))$$

1. Soit $\mathbf{M}$ une structure, calculer $[F]^{\mathbf{M}}$.
2. Définir une structure $\mathbf{M}_1$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$.
3. Définir une structure $\mathbf{M}_2$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$.

Exercice 3.4 (Structures et interprétations)
A partir des ensembles $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p, eq\}$ où eq désigne le prédicat d'égalité, on définit la formule $F = p(a,b) \Rightarrow eq(a,b)$.

1. Existe-t-il une structure $\mathbf{M}$ dont le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ est un singleton et telle que $[F]^{\mathbf{M}} = 0$? Pourquoi ?
2. On considère des structures $\mathbf{M}$ dont le domaine d'interprétation contient uniquement deux éléments distincts ($|\mathbf{M}| = \{k_1, k_2\}$).
   (a) Combien d'interprétations sont possibles pour le prédicat p ?
   (b) Combien d'interprétations des symboles de constante a et b sont telles que $[eq(a,b)]^{\mathbf{M}} = 1$?
3. Définir une structure $\mathbf{M}_1$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_1} = 0$ et une structure $\mathbf{M}_2$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 1$.

Exercice 3.5 (($\star$) Conséquence sémantique)
Soit F une formule non satisfiable et G une formule ni valide, ni non satisfiable.

(a)	A-t-on $F \models G$?	(Justifier)	(b)	A-t-on $G \models F$?	(Justifier)
(c)	A-t-on $\neg F \models G$?	(Justifier)	(d)	A-t-on $G \models \neg F$?	(Justifier)

Exercice 3.6 (($\star$) Formules valides, formules satisfiables, formules équivalentes)
Soit F_1 et F_2 deux formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$.

1. Montrer que si F_1 est valide alors $F_1 \wedge F_2 \models\!\mid F_2$.
2. Montrer que si F_1 est insatisfiable alors $F_1 \vee F_2 \models\!\mid F_2$.

Exercice 3.7 (($\star$) Formules valides/satisfiables/équivalentes, conséquence sémantique)

1. On considère les formules atomiques $A, B, C \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ à partir desquelles sont définies les formules $F_1 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ et $F_2 = (\neg A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$.
   (a) Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, calculer les expressions booléennes $[F_1]^{\mathbf{M}}$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I_M}(A)$, $\mathbf{I_M}(B)$ et $\mathbf{I_M}(C)$ (sans effectuer de simplifications).
   (b) A l'aide d'un raisonnement équationnel, en indiquant le nom de l'équivalence utilisée à chaque étape, transformer ces expressions pour montrer que $F_1 \models\!\mid F_2$.

Exercice 3.8 (($\star$) Interprétation des formules)
Soit A et B deux formules atomiques, $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ une formule construite à partir de A et B, et $\mathbf{M}$ une structure.

1. L'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ obtenue à partir de F sans effectuer de simplification est :

$$[F]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I_M}(A) + \overline{\mathbf{I_M}(B)}} + \overline{\overline{\mathbf{I_M}(A)} \cdot \mathbf{I_M}(B)}$$

   Déterminer une formule F possible.
2. En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que $[F]^{\mathbf{M}} = 1$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée). Que pouvez-vous en déduire sur la formule F ?

TD4 : Règles de déduction sur les quantificateurs

Les exercices annotés par le symbole ⋆ correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur le site moodle de l'UE.

Exercice 4.1 En utilisant les règles de la déduction naturelle, prouver les formules suivantes.

1. Quantificateur universel

$$(G_1) \quad (\forall x\ (p(x) \wedge q(x))) \Rightarrow (\forall x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x))$$

2. Quantificateur existentiel

$$(G_5) \quad (\exists x\ (p(x) \vee q(x))) \Rightarrow (\exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x))$$

3. Ordre sur les quantificateurs

$$(G_8) \quad (\exists x\ \forall y\ r(x,y)) \Rightarrow (\forall y\ \exists x\ r(x,y))$$

4. Quantification et implication

$$(G_9) \quad ((\forall x\ (p(x) \Rightarrow q(x))) \wedge (\exists x\ p(x))) \Rightarrow \exists x\ q(x)$$

5. Equivalences entre quantificateurs

$$(G_{14}) \quad (\neg \forall x\ p(x)) \Rightarrow (\exists x\ \neg p(x))$$

6. « tiers exclu » sur les quantificateurs

$$(G_{15}) \quad (\forall x\ p(x)) \vee (\exists x\ \neg p(x))$$

Exercice 4.2 (⋆)
Le but de cet exercice est de prouver la formule $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$ en utilisant la règle du Tiers Exclu : c'est la preuve demandée dans la question 4. Cette preuve s'obtient « directement » à partir des preuves des questions 1 et 3. Dans cet exercice les preuves demandées devront être obtenues en utilisant les règles de la déduction naturelle et les règles dérivées du formulaire.

1. Prouver la formule $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$ à partir de l'hypothèse $h_1 : \forall y\, p(y)$. On note B_1 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_1} \rangle$	supposons $h_1 : \forall y\, p(y)$, montrons $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{B_1} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** B_1

Indication : on suppose que l'on dispose d'un nombre infini dénombrable de symboles de variable, et il est donc possible d'appliquer la règle $I_\exists$ en utilisant un « nouveau » symbole de variable.

2. Prouver la formule $(\neg \forall y\, p(y)) \Rightarrow (\exists y\, \neg p(y))$. On note B_2 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_2} \rangle$	montrons $(\neg \forall y\, p(y)) \Rightarrow (\exists y\, \neg p(y))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{B_2} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** B_2

3. Compléter la preuve B_3 ci-dessous de la formule $\exists x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$ à partir de l'hypothèse $h_2 : \neg\forall y\, p(y)$.

$\langle 1_{B_3}\rangle$	supposons $h_2 : \neg\forall y\, p(y)$, montrons $\exists x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$		
	$\langle 2_{B_3}\rangle$	montrons $\exists y\, \neg p(y)$	
		$\langle 1_{B_2}\rangle$	montrons $(\neg\forall y\, p(y)) \Rightarrow (\exists y\, \neg p(y))$
			...
		$\langle 1_{B_2}\rangle$	CQFD **preuve B_2**
		$\langle 3_{B_3}\rangle$	montrons ***formule à compléter***
			preuve à compléter
		$\langle 3_{B_3}\rangle$	CQFD ***nom de la règle à compléter***
	$\langle 2_{B_3}\rangle$	CQFD $(E_{\Rightarrow})$	
	$\langle 3_{B_3}\rangle$	soit une nouvelle variable z, supposons h_3 : ***formule à compléter***	
		montrons ***formule à compléter***	
		preuve à compléter	
	$\langle 3_{B_3}\rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	
$\langle 1_{B_3}\rangle$	CQFD $(E_{\exists})$ **preuve B_3**		

4. Construire une preuve de la formule $\exists x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$ à partir des preuves B_1 et B_3 (ne pas recopier le contenu des preuves B_1 et B_3, indiquer seulement les hypothèses et les formules prouvées par ces boîtes).
5. On se place dans un bar quelconque et on interprète la formule atomique $p(x)$ par l'énoncé « *x boit un verre* ». Décrire en langage naturel (en français par exemple) ce qu'exprime la formule $\exists x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$.

TME Edukera sur les échiquiers : Structures

Les exercices sur les échiquiers proposés sur la plateforme Edukera reposent sur un mécanisme permettant de vérifier si des propriétés sur les pièces placées sur un échiquier exprimées par une formule logique sont satisfaites par un échiquier donné. Par exemple, avec l'échiquier de la figure 1, la formule exprimant que tous les pions sont sur la même ligne est "vraie" tandis que la formule exprimant que le fou est de la même couleur que le cavalier est "fausse". Il est ici possible de déplacer les pièces de cet échiquier pour changer le résultat de l'interprétation de ces deux formules.

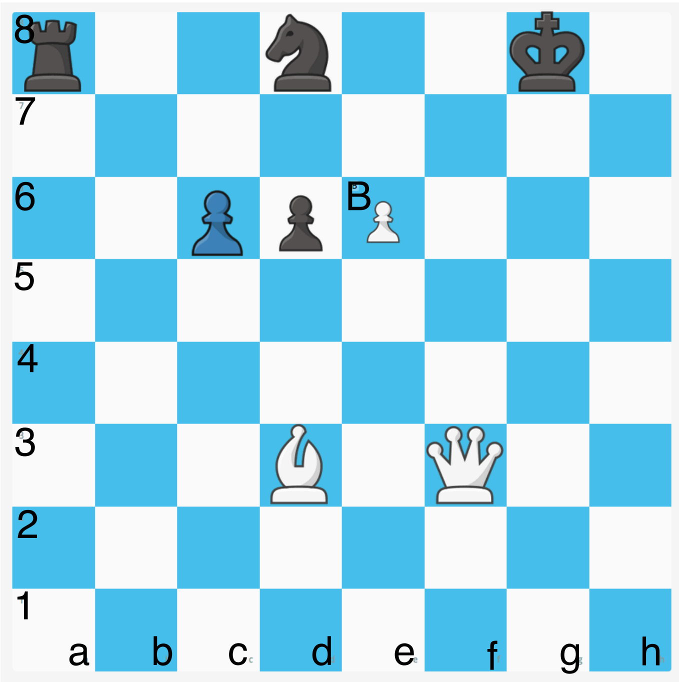

FIGURE 1 – Exemple d'échiquier de la plateforme Edukera

1 Termes

Syntaxe : définition de l'ensemble des termes

L'ensemble $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ des termes considérés contient uniquement des constantes et des variables (la signature utilisée ne contient aucun symbole de fonction d'arité strictement positive) désignant des pièces sur un échiquier. Ces termes sont construits à partir d'un ensemble $\mathcal{F}_0$ contenant 8 symboles de constante (les 8 premières lettres de l'alphabet en majuscule) et d'un ensemble X contenant 26 symboles de variable (les lettres de l'alphabet en minuscule).

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{\mathrm{A, B, C, D, E, F, G, H}\}$$
$$X = \{\mathrm{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}\}$$

Les symboles de constante vont servir à nommer des pièces sur l'échiquier.

Interprétation des termes : construction d'un échiquier

Les termes désignent des pièces positionnées sur un échiquier contenant 8 colonnes (les abscisses de gauche à droite sont désignées par les lettres a, b, c, d, e, f, g et h) et 8 lignes (les ordonnées du bas vers le haut sont désignées par les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8). Par exemple, le pion nommé B sur l'échiquier de la figure 1 se trouve sur la case de coordonnées (e,6).

A chaque pièce placée sur l'échiquier, on associe une position, une espèce, une couleur et une taille (il y a au plus une pièce par case de l'échiquier). L'ensemble Pos des positions possibles contient l'ensemble des coordonnées de l'échiquier :

$$\mathrm{Pos} = \left\{ \begin{array}{cccccccc} (\mathrm{a},8) & (\mathrm{b},8) & (\mathrm{c},8) & (\mathrm{d},8) & (\mathrm{e},8) & (\mathrm{f},8) & (\mathrm{g},8) & (\mathrm{h},8) \\ (\mathrm{a},7) & (\mathrm{b},7) & (\mathrm{c},7) & (\mathrm{d},7) & (\mathrm{e},7) & (\mathrm{f},7) & (\mathrm{g},7) & (\mathrm{h},7) \\ (\mathrm{a},6) & (\mathrm{b},6) & (\mathrm{c},6) & (\mathrm{d},6) & (\mathrm{e},6) & (\mathrm{f},6) & (\mathrm{g},6) & (\mathrm{h},6) \\ (\mathrm{a},5) & (\mathrm{b},5) & (\mathrm{c},5) & (\mathrm{d},5) & (\mathrm{e},5) & (\mathrm{f},5) & (\mathrm{g},5) & (\mathrm{h},5) \\ (\mathrm{a},4) & (\mathrm{b},4) & (\mathrm{c},4) & (\mathrm{d},4) & (\mathrm{e},4) & (\mathrm{f},4) & (\mathrm{g},4) & (\mathrm{h},4) \\ (\mathrm{a},3) & (\mathrm{b},3) & (\mathrm{c},3) & (\mathrm{d},3) & (\mathrm{e},3) & (\mathrm{f},3) & (\mathrm{g},3) & (\mathrm{h},3) \\ (\mathrm{a},2) & (\mathrm{b},2) & (\mathrm{c},2) & (\mathrm{d},2) & (\mathrm{e},2) & (\mathrm{f},2) & (\mathrm{g},2) & (\mathrm{h},2) \\ (\mathrm{a},1) & (\mathrm{b},1) & (\mathrm{c},1) & (\mathrm{d},1) & (\mathrm{e},1) & (\mathrm{f},1) & (\mathrm{g},1) & (\mathrm{h},1) \end{array} \right\}$$

Chaque pièce appartient à une espèce (les espèces sont présentées sur la figure 2), est d'une certaine taille (grande, moyenne ou petite) et d'une certaine couleur (blanche, noire, bleue). Les ensembles d'espèces, de tailles et de couleurs sont définis par :

$$\mathrm{Esp} = \{\mathrm{e\_roi, e\_reine, e\_tour, e\_fou, e\_cavalier, e\_pion}\}$$
$$\mathrm{Tailles} = \{\mathrm{t\_petit, t\_moyen, t\_grand}\}$$
$$\mathrm{Couleurs} = \{\mathrm{c\_blanc, c\_noir, c\_bleu}\}$$

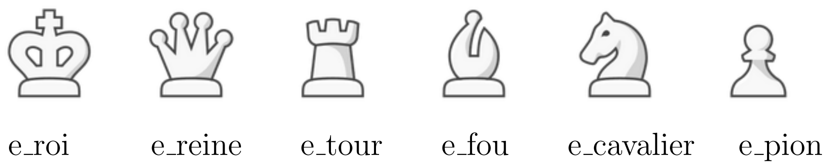

FIGURE 2 – Espèces des pièces de l'échiquier de la plateforme Edukera

Certaines pièces ont un nom : il s'agit d'une constante de $\mathcal{F}_0$. Par convention la valeur `None` sert à nommer les pièces anonymes (i.e. sans nom). Deux pièces différentes ne peuvent pas avoir le même nom lorsque ce nom est un élément de $\mathcal{F}_0$. Autrement dit tous les symboles de $\mathcal{F}_0$ ne servent pas nécessairement à nommer une pièce de l'échiquier et un nom de $\mathcal{F}_0$ ne peut pas servir à nommer deux pièces différentes. Un échiquier E est la donnée d'une grille sur laquelle sont disposées des pièces et est représenté par un ensemble de quintuplets. Chaque quintuplet $((x, y), e, t, c, n) \in E$ est un élément du produit cartésien :

$$\text{Pos} \times \text{Esp} \times \text{Tailles} \times \text{Couleurs} \times (\mathcal{F}_0 \cup \{\texttt{None}\})$$

et exprime qu'une pièce de nom n ($n =$ `None` si la pièce n'a pas de nom), d'espèce e, de taille t et de couleur c se trouve à la position (x, y) sur l'échiquier E. L'ensemble des échiquiers possibles est donc :

$$\mathbf{E} = \wp(\text{Pos} \times \text{Esp} \times \text{Tailles} \times \text{Couleurs} \times (\mathcal{F}_0 \cup \{\texttt{None}\}))$$

où lorsque S est un ensemble, $\wp(S)$ désigne l'ensemble des parties de S.

Exercice 1 Donner les éléments de l'ensemble E correspondant à l'échiquier représenté sur la figure 1 (sur cette figure, les pièces qui ne sont pas des pions sont toutes grandes et seul le petit pion blanc a un nom qui est B).

Interprétation des termes : construction d'une structure à partir d'un échiquier

Etant donné un échiquier $E \in \mathbf{E}$, on construit une structure $\mathbf{M}_E$ permettant d'interpréter l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$. La structure $\mathbf{M}_E$ est définie par :

— un domaine d'interprétation correspondant à l'ensemble de tous les quintuplets représentant les pièces positionnées sur l'échiquier E, auquel on ajoute un élément particulier (Error) :

$$|\mathbf{M}_E| = \{((x, y), e, t, c, n) \in E\} \cup \{\text{Error}\}$$

— une fonction d'interprétation qui associe un élément de $|\mathbf{M}_E|$ à chaque symbole de constante de $\mathcal{F}_0$ désignant une pièce de l'échiquier E : il s'agit du quintuplet correspondant à cette pièce sur l'échiquier (si aucune pièce de nom n se trouve sur l'échiquier, l'interprétation de n déclenche une erreur qui peut être vue comme une valeur particulière Error du domaine d'interprétation) :

$$n^{\mathbf{M}_E} = \begin{cases} ((x, y), e, t, c, n) & \text{si } ((x, y), e, t, c, n) \in E \\ \text{Error} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2 On considère à nouveau l'échiquier représenté sur la figure 1. Quelle est la valeur de $\text{A}^{\mathbf{M}_E}$? de $\text{B}^{\mathbf{M}_E}$?

2 Formules logiques

Symboles de prédicat

Les formules logiques de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ expriment des propriétés sur les pièces d'un échiquier. Elles sont construites à partir de l'ensemble X de symboles de variable, de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ de symboles de constante et de l'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ de symboles de prédicat où :

$$\mathcal{P}_1 = \{\text{roi}, \text{reine}, \text{tour}, \text{fou}, \text{cavalier}, \text{pion}, \text{blanc}, \text{noir}, \text{bleu}, \text{petit}, \text{moyen}, \text{grand}\}$$

$$\mathcal{P}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{droiteDe}, \text{gaucheDe}, \text{basDe}, \text{hautDe}, \text{plusPetit}, \text{plusGrand}, \\ \text{idLigne}, \text{idColonne}, \text{idTaille}, \text{idCouleur}, = \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{P}_3 = \{\text{entre}\}$$

Interprétation des prédicats : construction d'une structure à partir d'un échiquier (suite)

Etant donné un échiquier E, l'interprétation d'un symbole de prédicat $p \in \mathcal{P}_k$ $(k \in \{1, 2, 3, \})$ est un ensemble de k-uplets de valeurs du domaine d'interprétation, c'est-à-dire un ensemble de k-uplets de quintuplets correspondant aux pièces placées sur l'échiquier. L'interprétation des prédicats d'espèce, de couleur et de taille de $\mathcal{P}_1$ est définie en examinant les quintuplets de E et en considérant la propriété souhaitée. Par exemple, l'interprétation du prédicat pion avec la structure $|\mathbf{M}_E|$ est définie par :

$$\text{pion}^{\mathbf{M}_E} = \{((x, y), \text{e\_pion}, t, c, n) \in E\}$$

Si E est l'échiquier représenté sur la figure 1, on a donc :

$$\text{pion}^{\mathbf{M}_E} = \left\{ \begin{array}{l} ((\text{c}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_bleu}, \text{t\_grand}, \texttt{None}), ((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None}), \\ ((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}) \end{array} \right\}$$

L'interprétation des prédicats de $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ est similaire mais nécessite des opérations de comparaison sur les composants des quintuplets de E. Par exemple, l'interprétation du prédicat plusPetit avec la structure $|\mathbf{M}_E|$ est définie par :

$$\text{plusPetit}^{\mathbf{M}_E} = \left\{ \begin{array}{l} (((x_1, y_1), e_1, t_1, c_1, n_1), ((x_2, y_2), e_2, t_2, c_2, n_2)) \in E \times E \\ \mid \left(\begin{array}{ll} & (t_1 = \text{t\_petit et } (t_2 = \text{t\_moyen ou } t_2 = \text{t\_grand})) \\ \text{ou} & (t_1 = \text{t\_moyen et } t_2 = \text{t\_grand}) \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

Si E est l'échiquier représenté sur la figure 1, on a donc :

$$\text{plusPetit}^{\mathbf{M}_E} = \left\{ \begin{array}{l} (((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}), ((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None})), \\ (((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}), ((\text{c}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_bleu}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}), ((\text{d}, 3), \text{e\_fou}, \text{c\_blanc}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}), ((\text{f}, 3), \text{e\_reine}, \text{c\_blanc}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}), ((\text{a}, 8), \text{e\_tour}, \text{c\_noir}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}), ((\text{d}, 8), \text{e\_cavalier}, \text{c\_noir}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}), ((\text{g}, 8), \text{e\_roi}, \text{c\_noir}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None}), ((\text{c}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_bleu}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None}), ((\text{d}, 3), \text{e\_fou}, \text{c\_blanc}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None}), ((\text{f}, 3), \text{e\_reine}, \text{c\_blanc}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None}), ((\text{a}, 8), \text{e\_tour}, \text{c\_noir}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None}), ((\text{d}, 8), \text{e\_cavalier}, \text{c\_noir}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None}), ((\text{g}, 8), \text{e\_roi}, \text{c\_noir}, \text{t\_grand}, \texttt{None})) \end{array} \right\}$$

Exercice 3 Etant donné un échiquier E, définir $p^{\mathbf{M}_E}$ pour tous les symboles de prédicat de $\mathcal{P}$.

Exercice 4 On considère à nouveau l'échiquier E représenté sur la figure 1. Donner les éléments de l'ensemble $p^{\mathbf{M}_E}$ pour tous les symboles de prédicat de $\mathcal{P}$.

3 Exercices Edukera

L'intérêt des exercices ne réside pas uniquement dans l'élaboration d'une solution. Il est tout aussi important de comprendre pourquoi une solution est correcte que de comprendre ce qui la rendrait fausse. Pour que vos solutions aient du sens, vous devez :

— toujours poser sur l'échiquier au moins une pièce de chaque type apparaissant dans la formule (roi, reine, ...)
— une fois que vous avez trouvé une configuration satisfaisant la formule, bougez, modifiez les pièces pour bien comprendre pouquoi la formule est satisfaite

Voici la liste des exercices et questions qu'il vous est conseillé de faire.

Échiquier 1 - compréhension des prédicats portant sur la taille et la position

1. plusGrand
2. entre
3. droiteDe
4. basDe
5. hautDe
6. gaucheDe
7. ensemble des prédicats

Pour les échiquiers suivants, il vous est précisé, pour chaque question, les pièces que vous devez au minimum poser sur le plateau.

Échiquier 4 - formules avec quantificateurs

28. deux reines de tailles différentes
29. deux reines de tailles différentes
30. deux pions de tailles différentes
31. deux rois de tailles différentes
32. deux pions et une autre pièce sur le plateau. Que se passe-t-il s'il n'y a aucun pion sur le plateau ?
33. deux rois et une autre pièce sur le plateau. Que se passe-t-il s'il n'y a aucun roi sur le plateau ?
34. deux reines et une autre pièce sur le plateau. Que se passe-t-il s'il n'y a aucune reine sur le plateau ?
35. un reine et un pion. Pouvez-vous trouver un plateau qui ne satisfait pas la formule ?
36. deux reines, deux pions et deux rois avec le plus de tailles différentes possibles.
37. deux petites, deux moyennes et deux grandes pièces de types les plus variés possibles
38. trois reines, trois pions et trois rois de tailles les plus variées possibles

Échiquier 5 - combinaison de quantificateurs

39. Est-il possible de ne pas satisfaire la première formule ?
40. 3 pièces quelconques. A partir de combien de pièces n'est-il plus possible de satisfaire la formule ?

Échiquier 6 - formalisation

Dans cet exercice, vous devez écrire la formule logique correspondant à la phrase donnée et placer des pièces pour que cette formule soit satisfaite par le plateau. Vous devez répondre aux questions 42, 43, 45, 49, 52, 53 et 63.

Échiquier 9 - formalisation

Dans cet exercice, vous devez écrire la formule logique correspondant à la phrase donnée et placer des pièces pour que cette formule soit satisfaite par le plateau. Vous devez répondre aux questions 77, 78 et 79. Pour la question 79, la formule obtenue se décompose en deux parties, une partie exprimant qu'il n'y a pas de pion et l'autre partie exprimant qu'il y a un pion et donnant la condition à vérifier dans ce cas.

Échiquier 10 - combinaison de quantificateurs

80. 81. 82. 83. deux pièces
84. 85. deux rois
86. les contraintes imposées par les formules

TD5 : Interprétation des variables et des quantificateurs

Les exercices annotés par le symbole $\star$ correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

Exercice 5.1 (Interprétation des termes et valuations)
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{s\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\otimes\}$ et soit $t = s(\otimes(s(s(a)), \otimes(x, s(y))))$ un terme de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.
2. Dessiner l'arbre représentant le terme t.
3. On considère une structure $\mathbf{M}$ de domaine $\mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{array}{lll} a^{\mathbf{M}} = 2 & s^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & \otimes^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ b^{\mathbf{M}} = 3 & s^{\mathbf{M}}(n) = n + 1 & \otimes^{\mathbf{M}}(n, m) = n \times m \end{array}$$

   (a) Calculer $[t]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}}$ en fonction de $\mathrm{v}(x)$ et $\mathrm{v}(y)$.
   (b) Soit une valuation v_1 telle que $\mathrm{v}_1(x) = 5$ et $\mathrm{v}_1(y) = 1$. Calculer $[t]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}_1}$.
   (c) Déterminer une valuation $\mathrm{v}_2 : X \to \mathbb{N}$ telle que $[t]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}_2} = 33$.
   (d) Calculer $[t]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}_3}$ pour la valuation $\mathrm{v}_3 = \mathrm{v}_1[x \leftarrow 7]$.

Exercice 5.2 (Quantification de formules atomiques)
On considère une structure $\mathbf{M}$ dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et dans laquelle l'interprétation du symbole de prédicat $p \in \mathcal{P}_2$ est définie par $p^{\mathbf{M}} = \{(x, y) \mid y = 2x\}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont satisfaites par $\mathbf{M}$?

$$\begin{array}{llllll} (F_1) & p(0,0) & (F_2) & p(1,1) & (F_3) & \exists x\, p(1,x) \\ (F_4) & \exists x\, p(x,1) & (F_5) & \exists x\, p(x,2) & (F_6) & \forall x\, p(1,x) \\ (F_7) & \forall x\, p(x,1) & (F_8) & \exists x\, \exists y\, p(x,y) & (F_9) & \exists x\, \forall y\, p(x,y) \\ (F_{10}) & \forall x\, \exists y\, p(x,y) & (F_{11}) & \forall x\, \forall y\, p(x,y) & & \end{array}$$

Exercice 5.3 (Domaine d'interprétation)
On considère un langage comprenant l'égalité (prédicat $=$ d'arité 2) ainsi qu'un symbole de prédicat p d'arité 2. Soit les deux formules :

$$(F_1)\ \forall x\, \forall y\, (p(x,y) \Rightarrow \neg(x = y)) \qquad (F_2)\ \forall x\, \exists y\, (p(x,y) \wedge \neg(x = y))$$

Pour chacune de ces deux formules, déterminer s'il existe une structure $\mathbf{M}$ qui la satisfait :

1. lorsque le domaine d'interprétation de $\mathbf{M}$ est un singleton,
2. lorsque le domaine d'interprétation de $\mathbf{M}$ contient uniquement deux éléments,
3. lorsque le domaine d'interprétation de $\mathbf{M}$ est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et lorsque $p^{\mathbf{M}} = \{(x, y) \mid x \text{ est divisible par } y\}$.

Exercice 5.4 (($\star$) Interprétation des formules)

1. Soit $\mathbf{M}$ une structure telle que $|\mathbf{M}| = \{a, b, c\}$ et F_1 la formule $\exists x\, \forall y\, p(x, y)$.

(a) Proposer une interprétation $p^{\mathbf{M}}$ de p telle que $p^{\mathbf{M}}$ contienne exactement 3 éléments (c-à-d 3 paires d'éléments de $|\mathbf{M}|$) et telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$ (quelle que soit la valuation v) et montrer que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$.

(b) Proposer une interprétation $p^{\mathbf{M}}$ de p telle que $p^{\mathbf{M}}$ contienne exactement 3 éléments (c-à-d 3 paires d'éléments de $|\mathbf{M}|$) et telle que et $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 0$ (quelle que soit la valuation v) et montrer que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 0$.

2. Soit F_2 la formule $\exists x\, ((\forall y\, p(x, y)) \Rightarrow \exists z\, p(z, x))$.

(a) Le domaine d'interprétation d'une structure peut-il être vide ?

(b) Montrer que si eq désigne le prédicat d'égalité, c-à-d si $\mathrm{eq}^{\mathbf{M}} = \{(k, k) \mid k \in |\mathbf{M}|\}$, alors $[\exists x\, \mathrm{eq}(x, x)]_v^{\mathbf{M}} = 1$ (quelle que soit la valuation v).

(c) Montrer que la formule F_2 est valide.

3. A-t-on $F_2 \models F_1$? $F_1 \models F_2$? Justifier vos réponses.

Exercice 5.5 (($\star$) Formules satisfiables, formules valides)
Montrer que la formule ci-dessous est satisfiable mais n'est pas valide.

$$(F_3) \quad (\forall y\, \exists x\, p(x, y)) \Rightarrow \exists x\, p(x, x)$$

Exercice 5.6 (($\star$) Formules valides, formules prouvables)
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_0 = \{a\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{f\}$, X un ensemble de symboles de variable et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \{p\}$ un ensemble contenant un unique symbole de prédicat p d'arité 1. Pour chacune des deux formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ci-dessous, déterminer si la formule est valide (et dans ce cas en fournir une preuve en utilisant les règles de la déduction naturelle), ou si elle n'est pas valide (et dans ce cas construire une structure $\mathbf{M}$ que vous utiliserez pour démontrer que la formule n'est pas valide).

$$F_1 = (\forall x\ (p(x) \land \neg p(f(x)))) \Rightarrow \neg p(f(a)) \qquad F_2 = \forall x\ ((p(x) \land \neg p(f(x))) \Rightarrow \neg p(f(a)))$$