Université Paris 6 Vendredi 6 Novembre 2015
MASTER ANDROIDE–M1–MOGPL

Examen réparti 1

Durée 2h - Notes de cours et TD autorisées

Le barême est donné à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 : optimisation d'un planning [4 pts]

Une société emploie des vigiles pour la surveillance de ses sites de production. Pour l'année courante, les besoins sont respectivement de 4200, 8300, 6300, 2700 heures.hommes pour les périodes printemps, été, automne, hiver (10 heures.hommes représentent indifféremment 1 homme travaillant 10 heures, 5 hommes travaillant 2 heures ou 10 hommes travaillant 1h par exemple). La main d'oeuvre est recrutée auprès de trois agences d'interim A, B, C pouvant fournir du personnel permettant respectivement de couvrir jusqu'à 7500, 10000 et 8100 heures.hommes de surveillance dans l'année. Les coûts de personnel interimaire dépendent de l'agence et de la saison ; ils sont exprimés en euros par heure.homme et sont résumés dans le tableau suivant :

	Printemps	Eté	Automne	Hiver
A	11	13	9	19
B	12	16	10	14
C	14	13	12	15

Ecrire un programme linéaire qui permet de trouver un plan de recrutement annuel optimal, c'est-à-dire une organisation annuelle des emplois intérimaires tenant compte des disponibilités et couvrant les besoins tout en minimisant le coût total (on ne demande pas de résoudre le programme linéaire obtenu).

Exercice 2 : simplexe et dualité [2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 pts]

On considère le programme linéaire $\mathcal{P}$ suivant :

$$\min z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 1000 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 1500 \end{array} \right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

1°) Mettre le problème $\mathcal{P}$ sous forme standard. Montrer que la solution $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{2000}{3}, \frac{500}{3}, 0)$ correspond à un sommet réalisable du polyèdre des contraintes de $\mathcal{P}$. Déterminer les vecteurs constituant la base associée à ce sommet, préciser les variables en base et les variables hors base.

2°) En utilisant la méthode révisée du simplexe à partir de la base obtenue à la question précédente, déterminer la solution optimale du problème $\mathcal{P}$ et la valeur de la fonction objectif à l'optimum.

3°) Ecrire le dual $\mathcal{D}$ du problème $\mathcal{P}$ et faire une résolution graphique de $\mathcal{D}$ (on précisera les valeurs de la solution optimale de $\mathcal{D}$ et de la fonction objectif à l'optimum). En déduire la solution optimale de $\mathcal{P}$ et vérifier ainsi le résultat obtenu à la question précédente.

4°) Déduire des résultats précédents la solution optimale du problème $\mathcal{P}'$ obtenu à partir de $\mathcal{P}$ en remplaçant l'objectif par $\min z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3$.

5°) On considère maintenant le problème $\mathcal{P}''$ obtenu à partir de $\mathcal{P}$ en modifiant le second membre $(1000, 1500)$ en $(1500, 1000)$. Déterminer sans faire d'itération du simplexe la solution optimale de $\mathcal{P}''$.

Exercice 3 : carrés magiques [3 + 1 + 2 = 6 pts]

Un carré magique d'ordre n est composé des entiers de 1 à n^2 écrits sous la forme d'un tableau carré. Ces nombres sont disposés de sorte que leurs sommes sur chaque rangée, sur chaque colonne et sur les deux diagonales principales soient égales. On nomme alors *constante magique* la valeur K_n de ces sommes. Un exemple est donné ci-dessous pour le cas $n = 4$ qui correspond à la constante magique $K_4 = 34$:

$C_1 =$

3	10	15	6
13	8	1	12
2	11	14	7
16	5	4	9

Dans cet exercice on s'intéresse à la recherche de carrés magiques d'ordre n par la programmation mathématique.

1°) En utilisant K_n formuler le problème de la recherche d'un carré magique d'ordre n par un système de contraintes linéaires portant sur des variables 0-1 qui indiquent si une case (i, j) contient la valeur k (on ne demande pas de résoudre le problème). Donner le nombre de variables et de contraintes du problème en fonction de n.

2°) On s'intéresse maintenant au cas $n = 4$ et au problème "max P magic-square" qui consiste à trouver un carré magique qui maximise la somme des valeurs situées dans les cases marquées d'une croix ci-dessous (formant la lettre P). Formuler ce problème comme un problème de programmation linéaire en variables 0-1.

×	×	×	×
×			×
×	×	×	×
×			

3°) On s'intéresse maintenant aux carrés magiques alternés, c'est-à-dire tels que deux cases contiguës ne contiennent pas des nombres de même parité. Le carré C_1 n'est donc plus admissible. En revanche le carré suivant vérifie cette nouvelle contrainte :

$C_2 =$

7	14	11	2
10	5	4	15
1	12	13	8
16	3	6	9

On s'intéresse à résoudre le problème "max P magic-square" sur le sous-ensemble des carrés magiques alternés. Modéliser ce problème comme un programme linéaire en variables entières (on ne vous demande pas de calculer la solution optimale).