Rappels d'algèbre linéaire

Patrice Perny

LIP6 - Sorbonne Université

13 septembre 2024

I) Rappels d'algèbre linéaire

Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Définition (Espace Vectoriel)

On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ tout triplet $(E, +, .)$ tel que :

1. *E est un ensemble dont les éléments sont appelés vecteurs*
2. *$+$ est une loi de composition interne sur E telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif. L'élément neutre pour $+$ noté 0 est appelé le vecteur nul.*
3. *$.$ définie sur $\mathbb{R} \times E$ est une loi de composition externe qui à toute paire (λ, x) associe le vecteur $\lambda.x \in E$ telle que :*
   - $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu)x = \lambda.x + \mu.x$
   - $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall(x, y) \in E^2, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
   - $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$
   - $\forall x \in E, 1.x = x$

Exemple L'ensemble $(\mathbb{R}^n, +, .)$ muni des opérations :

- $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + x_2, \ldots, x_n + y_n)$
- $\lambda.(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$

Sous-espace vectoriel, sous-espace engendré

Définition (Sous-espace vectoriel)

Une partie F d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $0 \in F$
- $\forall(x, y) \in F, x + y \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in F, \lambda.x \in F$

Définition (Sous-espace engendré)

Soit A une partie d'un espace vectoriel E. On appelle sous-espace engendré par A l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A, c'est-à-dire l'ensemble noté Vect A formé du vecteur nul et des vecteurs de la forme $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_k$ où les λ_k sont des scalaires et les a_k des vecteurs de A.

Exemple

$\mathbb{R}^2$ est un sous espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ engendré par l'ensemble de vecteurs $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Familles génératrices

Définition (Combinaison linéaire)

Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. On dit qu'un vecteur $x \in E$ est combinaison linéaire *des vecteurs de $\mathcal{F}$ si et seulement s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de réels tels que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.*

Définition (Famille génératrice)

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice *de E si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ (i.e. Vect $\mathcal{F} = E$).*

Propriétés

1. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
2. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille finie, génératrice de E et J une partie de I. $(x_i)_{i \in J}$ est aussi une famille génératrice de E si et seulement si, pour tout $k \in I \setminus J$, x_k est combinaison linéaire des vecteurs de $(x_i)_{i \in I}$

Familles libres

Définition (Famille libre)

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{F}$ est libre *si et seulement si la seule combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathcal{F}$ est celle dont tous les coefficients sont nuls. Formellement cela s'écrit :*

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = 0$$

On dit alors que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont linéairement indépendants.

Remarque : par convention, $\emptyset$ est libre.

Exemple : Les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants, ils forment une famille libre.

Propriétés

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Si une partie A de E est libre et si x est un vecteur de E alors $A \cup \{x\}$ est libre si et seulement si x n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de A (i.e. $x \notin Vect\ A$)

Familles liées

Définition (Famille liée)

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{F}$ est liée *si et seulement si elle n'est pas libre. On dit alors que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont* linéairement dépendants.

Exemple : Les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ sont liés.

Propriétés

- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Si une partie A de E est libre et si x est un vecteur de E alors $A \cup \{x\}$ est liée si et seulement si x est combinaison linéaire des vecteurs de A (i.e. $x \in Vect\ A$)

Bases

Définition (Base)

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{F}$ est une base *de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice.*

Soit $B = (e_i)_{i \in I}$ une base de E, alors tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de B. Dans ce cas, si $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ les coefficients $(\lambda_i)_{i \in I}$ sont appellés les coordonnées de x dans B.

Exemple : Base canonique de $\mathbb{R}^n$: $(e_1, \dots, e_n)$ avec $(e_j)_i = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à 0.

1. *E admet au moins une base finie.*
2. *Toutes les bases de E ont le même cardinal ($= dim E$).*

Proposition

Une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n est une base si et seulement si elle est libre.

II) Résolution de système d'équations linéaires

Système linéaire

Définition (Système linéaire)

Un système linéaire à m équations et n inconnues est un système d'équations de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \quad (S)$$

où les coefficients a_{ij} et b_j sont fixés (ici on supposera dans $\mathbb{R}$) et les quantités $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les inconnues du système.

Notation matricielle : $Ax = b$ où $A \in \mathcal{M}_{mn}$ et $b = \mathbb{R}^m$

Résoudre (S) signifie trouver tous les vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient simultanément toutes les équations du système (S).

Système linéaire échelonné

Définition

Un système linéaire est dit échelonné si sa matrice est échelonnée selon les lignes, c'est-à-dire que chaque ligne non nulle commence par un nombre de zéros strictement supérieur au nombre de zéros débutant la ligne précédente.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 4 \\ & & & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{(échelonné)}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ & & & & 2x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ & & & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right. . \quad \text{(pas échelonné)}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ & & & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{(pas échelonné)}$$

Réduction à un système échelonné

Théorème (de Gauss-Jordan)

Tout système linéaire se ramène à un système échelonné équivalent en utilisant trois types d'opérations élémentaires :

- *remplacer une équation L_i par $L_i + \lambda L_j$* $(\lambda \neq 0)$
- *remplacer une équation L_i par λL_i* $(\lambda \neq 0)$
- *intervertir deux équations*

L'algorithme qui permet d'échelonner un système linéaire quelconque s'appelle la méthode du pivot ou méthode de Gauss-Jordan.

Méthode du pivot pour échelonner un système linéaire

- Si $a_{11} = 0$ on intervertit deux lignes (ou 2 inconnues) pour ramener un coefficient différent de 0 en haut à gauche.
- Si $a_{11} \neq 0$ on garde L_1 et on utilise a_{11} comme pivot pour faire disparaitre x_1 des équations $L_2, \ldots, L_m$ en remplaçant L_i par $L_i' = L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$ (ou par $L_i' = a_{11} L_i - a_{i1} L_1$).
- on itère avec le sous système $L_2', \ldots, L_m'$ et les inconnues $x_2, \ldots, x_n$ pour indentifier un nouveau pivot et ainsi de suite jusqu'à ce que les coefficents a_{ij} des lignes restantes soient tous nuls.

Exemple 1 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 4z & = & 5 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & - & z & = & 1 & \\ & - & 3y & + & 6z & = & 3 & L_2 - 2L_1 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 2 & L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & - & z & = & 1 & \\ & - & 3y & + & 6z & = & 3 & \\ & & & - & 2z & = & 0 & L_3' - \frac{2}{3} L_2' \end{array}\right.$$

Méthode du pivot pour échelonner un système linéaire

Exemple 2 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2w & = & 4 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & - & 3w & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1 & \\ & & y & + & 4z & - & 5w & = & 5 & L_2' = 2L_2 - 3L_1 \\ & & 3y & + & 12z & - & 15w & = & 7 & L_3' = 2L_3 - 3L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1 & \\ & & y & + & 4z & - & 5w & = & 5 & \\ & & & & & & 0 & = & -8 & L_3'' = L_3' - 3L_2' \end{array}\right.$$

Méthode du pivot pour échelonner un système linéaire

Exemple 3 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 5 \\ 5x & + & 10y & - & 8z & = & 12 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & - & 2z & = & 2 & \\ & & & & z & = & 1 & L_2' = L_2 - 2L_1 \\ & & & & 2z & = & 2 & L_3' = L_3 - 5L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & - & 2z & = & 2 & \\ & & & & z & = & 1 & \\ & & & & 0 & = & 0 & L_3'' = L_3' - 2L_2' \end{array}\right.$$

Algorithme de Gauss-Jordan

variante avec selection du pivot maximum et normalisation du pivot

```
Gauss-Jordan
   r = 0                                        (r indice de ligne du dernier pivot trouvé)
   Pour j de 1 jusqu'à n                        (j décrit tous les indices de colonnes)
   |   Rechercher max(|A[i,j]|,r+1 ≤ i ≤ m)
   |   Noter k l'indice de ligne du maximum  (A[k,j] est le pivot)
   |   Si A[k,j]≠0 alors                        (A[k,j] valeur de la ligne k et colonne j)
   |   |   r=r+1                                (r future ligne servant de pivot)
   |   |   Diviser la ligne k par A[k,j]        (On normalise,le pivot prenne la valeur 1)
   |   |   Échanger les lignes k et r           (On place la ligne du pivot en position r)
   |   |   Pour i de 1 jusqu'à m                (On simplifie les autres lignes)
   |   |   |   Si i≠r alors
   |   |   |   |   Soustraire à la ligne i la ligne r multipliée par A[i,j]
   |   |   |   Fin Si                               (de façon à annuler A[i,j])
   |   |   Fin Pour
   |   Fin Si
   Fin Pour
Fin Gauss-Jordan
```

Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot

Mettre le système sous forme échelonnée. Lorsqu'on s'arête il reste alors $m - r$ lignes de la forme $0 = \beta_i$ appellées équations de compatibilités et $n - r$ inconnues ne correspondant pas aux colonnes des pivots. On a alors 3 cas :

1. si $r = m = n$ (système de Cramer), on a alors une solution unique qui s'obtient en résolvant en "remontant" le système échelonné.
2. sinon, si les équations de compatibilité ne sont pas toutes satisfaites alors le système n'admet aucune solution.
3. sinon (les équations de compatibilité sont toutes satisfaites) le système admet une infinité de solutions que l'on obtient en faisant passer dans le second membre les $m - r$ inconnues ne correspondant pas aux colonnes des pivots (inconnues auxiliaires) et on exprime les r premières inconnues correspondant aux colonnes des pivots (inconnues principales) en fonction des inconnues auxiliaires. Cela fournit une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions.

Exemples

Exemple 1 (suite) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & - & 3y & + & 6z & = & 3 \\ & & & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

On est dans le cas 1 ($r = n = m = 3$), il y a une solution unique que l'on obtient en résolvant le système triangulaire : $(3, -1, 0)$.

Exemple 2 (suite) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1 \\ & & y & + & 4z & - & 5w & = & 5 \\ & & & & & & 0 & = & -8 \end{array}\right.$$

On est dans le cas 2, il n'y a pas de solution du fait de la troisième équation.

Exemple 3 (suite) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ & & & & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

On est dans le cas 3, il y a une infinité de solutions de la forme $(4 - 2y, y, 1), y \in \mathbb{R}$.

III) Inversion d'une matrice

Matrice Inverse

Définition (Inverse d'une matrice)

Soit M une matrice carrée d'ordre n, la matrice inverse de M, lorsqu'elle existe, est une matrice carrée d'ordre n notée M^{-1} et telle que :
$MM^{-1} = M^{-1}M = Id$.

Proposition

Une matrice carrée d'ordre n admet une inverse si et seulement si les n vecteurs colonnes qui la composent sont linéairement indépendants, ils forment alors une base de $\mathbb{R}^n$ (on a une définition équivalente en utilisant les vecteurs lignes). Quand il existe une matrice inverse, elle est unique.

Propriétés

- $Id^{-1} = Id$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- si A est inversible alors la solution du système linéaire $Ax = b$ est $x = A^{-1}b$

Méthode du pivot sur une matrice

- Les opérations faites dans la méthode du pivot pour échelonner un système linéaire peuvent être appliquées à une matrice pour la mettre sous forme triangulaire supérieure
- ces opérations qui manipulent des lignes reviennent à multiplier la matrice courante à gauche par une autre matrice carrée d'ordre n inversible.
  - $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ s'obtient par $M \leftarrow (\mathrm{Id} + \lambda E_{ij})M$
  - $L_i \leftarrow \lambda L_j$ s'obtient par $M \leftarrow (\mathrm{Id} + (\lambda - 1)E_{ij})M$
  - $L_i \leftrightarrow L_j$ s'obtient par $M \leftarrow (\mathrm{Id} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})M$

  où E_{ij} est la matrice qui vaut 1 en position (i, j) et 0 partout ailleurs.

Exemple

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul du rang d'une matrice

Définition (Rang d'une matrice)

On appelle rang d'une matrice à m lignes et n colonnes la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses colonnes.

Calcul du rang d'une matrice A

1. appliquer la méthode du pivot à la matrice pour la rendre triangulaire supérieure
2. le rang de la matrice est alors le nombre de lignes non-nulles obtenues.

Proposition

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si elle est de rang plein (c'est-à-dire $\mathrm{rang}(A) = n$ si A est de taille $n \times n$).

Exemple de calcul de rang

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \\ \\ L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas le rang est 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \\ \\ L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas le rang est 2.

En pratique on combine le test de rang et l'inversion...

Algorithme d'inversion d'une matrice

L'algorithme d'inversion d'une matrice M par la méthode du pivot fonctionne alors en trois étapes :

1. A partir de M on obtient une matrice triangulaire $T = M_1 M$ par la méthode du pivot (M_1 est le produit de matrices de transformations élémentaires). On vérifie qu'elle est de rang plein avant de continuer.
2. A partir de T on fait apparaitre une matrice diagonale de la forme $D = M_2 T$ (M_2 est le produit des matrices de transformation élémentaires)
3. A partir de D on obtient la matrice identité par des opérations du type $I = M_3 D$ (M_3 est le produit des matrices de transformations de normalisation)

On a donc : $\mathrm{Id} = M_3 D = M_3 M_2 T = M_3 M_2 M_1 M$. Donc $M^{-1} = M_3 M_2 M_1$.

En pratique on applique les transformations simultanément sur M et sur Id pour se souvenir des transformations et obtenir M^{-1} :

$$[M|Id] \rightarrow [M_1 M|M_1] \rightarrow [M_2 M_1 M|M_2 M_1] \rightarrow [Id|M^{-1}]$$

On peut aussi normaliser plus tôt pour faire apparaître des 1 sur la diagonale avant la dernière étape si ca simplifie les calculs.

Exemple d'inversion de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ L_3 + L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 2L_1 + L_3 \\ -4L_2 + L_3 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 2L_1 + L_2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} L_1/4 \\ -L_2/4 \\ -L_3/4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Transposition

Définition

Soit A un matrice de taille (m, n), on appelle transposée de A la matrice A^t de taille (n, m) de terme général $a'_{ji} = a_{ij}$ pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La notion de transposition s'applique aussi aux vecteurs (ce sont des matrices particulières). La transposée d'un vecteur colonne de taille $(m, 1)$ est un vecteur ligne de taille $(1, m)$ et inversement.

Propriétés

- $(A^t)^t = A$
- $(AB)^t = B^t A^t$
- Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est inversible si et seulement si A^t est inversible, auquel cas $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

IV) Changement de base

Changement de Base

Définition (Matrice de passage)

Soient $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension n. Les vecteurs de B' peuvent s'écrire dans la base B selon les relations :

$$\begin{array}{lllllllll} e'_1 & = & p_{11}e_1 & + & p_{21}e_2 & + & \dots & + & p_{n1}e_n \\ e'_2 & = & p_{12}e_1 & + & p_{22}e_2 & + & \dots & + & p_{n2}e_n \\ \dots & & & & & & & & \\ e'_n & = & p_{1n}e_1 & + & p_{2n}e_2 & + & \dots & + & p_{nn}e_n \end{array}$$

On appelle matrice de passage *de B à B' la matrice carrée P suivante :*

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice de passage

Propriétés

- Soient x et x' les coordonnées d'un même vecteur de E dans les bases B et B' respectivement, et P la matrice de passage de B à B' on a $x = Px'$
- P est inversible et son inverse P^{-1} est telle que $x' = P^{-1}x$
- Soit trois bases B, B', B'' de E. Si P est la matrice de passage de B à B' et si P' est la matrice de passage de B' à B'' alors PP' est la matrice de passage de B à B''.

Exemple : Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une autre base définie par $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_2 - e_3$ et $e'_3 = e_1 - e_3$, la matrice de passage de B à B' est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Application linéaire

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application de E dans F. On dit que f est linéaire *si :*

- $\forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Cas particulier : si $E = F$ on dit que f est un endomorphisme.

Changement de base pour une application linéaire

Définition (Matrice d'une application linéaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels munis respectivement des bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$. Etant donné une application linéaire $f : E \to F$ on appelle matrice de f dans les bases B, B' *la matrice A de taille (m, n) telle que $y = f(x) \Leftrightarrow y = Ax$*

Théorème

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie. Soient B et B' deux bases de E et soient C et C' deux bases de F. Soient P la matrice de passage de B à B' et Q la matrice de passage de C à C'. Soient A la matrice de f dans les bases B et C, et A' la matrice de f dans les bases B' et C' alors on a la relation :

$$A' = Q^{-1}AP$$

Cas particulier : si $E = F$ (endomorphisme) et $B = C$, $B' = C'$ alors $A' = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de B à B'.