

EXERCICE 35

Logique - Quantificateurs

quelle que soit la proposition P ,
quels que soient les prédicats F G ,

$$\forall x, \forall y, (((F(x) \Rightarrow P) \wedge ((\forall z, F(z)) \wedge G(x))) \Rightarrow P)$$

$$\text{Montrons } \forall x y, ((F(x) \Rightarrow P) \wedge ((\forall z, F(z)) \wedge G(x))) \Rightarrow P \quad (1)$$

($\forall I$)

Soit l'élément x

$$\text{Montrons } \forall y, ((F(x) \Rightarrow P) \wedge ((\forall z, F(z)) \wedge G(x))) \Rightarrow P \quad (2)$$

($\forall I$)

Soit l'élément y

$$\text{Montrons } ((F(x) \Rightarrow P) \wedge ((\forall z, F(z)) \wedge G(x))) \Rightarrow P \quad (3)$$

($\Rightarrow I$)

$$\text{Supposons que } (F(x) \Rightarrow P) \wedge ((\forall z, F(z)) \wedge G(x)) \quad (h1)$$

$$\text{Montrons } P \quad (4)$$

($\Rightarrow E$)

$$\text{Montrons } F(x) \quad (5)$$

($\forall E$)

$$\text{Montrons } \forall x, F(x) \quad (6)$$

($\wedge Eg$)

$$\text{Montrons } (\forall x^0, F(x^0)) \wedge G(x) \quad (7)$$

($\wedge Ed$)

$$\text{Montrons } (F(x) \Rightarrow P) \wedge ((\forall z, F(z)) \wedge G(x)) \quad (8)$$

d'après (h1)

$$\text{Montrons } F(x) \Rightarrow P \quad (9)$$

($\wedge Eg$)

$$\text{Montrons } (F(x) \Rightarrow P) \wedge ((\forall z, F(z)) \wedge G(x)) \quad (10)$$

d'après (h1)