

## EXERCICE 15

### Logique - Quantificateurs

*quels que soient* les prédicats  $F$   $G$ ,

*quelle que soit* la constante  $a$ ,

$$((G(a) \Rightarrow (\exists x, F(x))) \Leftrightarrow \exists x, (G(a) \Rightarrow F(x)))$$

---

Soit la constante  $a$

Montrons  $(G(a) \Rightarrow (\exists x, F(x))) \Leftrightarrow \exists x, (G(a) \Rightarrow F(x))$  (1)

( $\Leftrightarrow I$ )

Supposons que  $G(a) \Rightarrow (\exists x, F(x))$  (h1)

Montrons  $\exists x, G(a) \Rightarrow F(x)$  (2)

(TE)

Supposons que  $G(a)$  (h2)

Montrons  $\exists x, G(a) \Rightarrow F(x)$  (3)

( $\exists E$ )

Montrons  $\exists x, F(x)$  (4)

( $\Rightarrow E$ )

Montrons  $G(a)$  (5)

d'après (h2)

Montrons  $G(a) \Rightarrow (\exists x, F(x))$  (6)

d'après (h1)

Soit l'élément  $x$

Supposons que  $F(x)$  (h3)

Montrons  $\exists x, G(a) \Rightarrow F(x)$  (7)

( $\exists I$ )

Supposons que  $G(a)$  (h4)

Montrons  $F(x)$  (8)

d'après (h3)

Supposons que  $\neg(G(a))$  (h5)

Montrons  $\exists x, G(a) \Rightarrow F(x)$  (9)

( $\exists I$ )

Supposons que  $G(a)$  (h6)

Montrons  $F(a)$  (10)

( $\perp E$ )

Montrons  $\perp$  (11)

( $\neg E$ )

Montrons  $G(a)$  (12)

d'après (h6)

Montrons  $\neg (G(a))$  (13)

d'après (h5)

Supposons que  $\exists x, G(a) \Rightarrow F(x)$  (h7)

Montrons  $G(a) \Rightarrow (\exists x, F(x))$  (14)

( $\exists E$ )

Montrons  $\exists x, G(a) \Rightarrow F(x)$  (15)

d'après (h7)

Soit l'élément  $x$

Supposons que  $G(a) \Rightarrow F(x)$  (h8)

Montrons  $G(a) \Rightarrow (\exists x, F(x))$  (16)

( $\Rightarrow I$ )

Supposons que  $G(a)$  (h9)

Montrons  $\exists x, F(x)$  (17)

( $\exists I$ )

Montrons  $F(x)$  (18)

( $\Rightarrow E$ )

Montrons  $G(a)$  (19)

d'après (h9)

Montrons  $G(a) \Rightarrow F(x)$  (20)

d'après (h8)