Année 2009-2010 - S1

LI214 - 13 novembre 2009

Durée : 2h - Documents, calculettes et téléphones interdits

Inscrire votre nom sur la copie et la cacheter, puis inscrire votre numéro d'anonymat, et le reporter sur toutes les copies intercalaires. Conserver l'étiquette portant votre numéro d'anonymat, elle sera demandée pour toute consultation de copie.
La note (entre 0 et 60) est le minimum entre 60 et la somme des points obtenus (entre 0 et 76).

Exercice 1 (10 points) Dans chacun des quatre cas suivants, indiquer si l'application est injective, surjective, bijective. Justifier les réponses.

$e : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $e(x) = 3x + 1$ $\quad$ $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$ définie par $f(x) = 3x + 1$
$g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ définie par $g(x) = x + 2$ si $x < 0$ et $g(x) = x - 1$ si $x \geq 0$
$h : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ définie par $h(x) = -x + 4$.

Solution
Rappels : une application ℓ définie de A dans B est
- *injective si : $\ell(x) = \ell(y)$ dans B implique que $x = y$ dans A.*
- *surjective si : tout élément y de B a un antécédent x dans A : $y = f(x)$.*
- *bijective si elle est à la fois injective et surjective.*

Pour les quatre fonctions de l'exercice :
- Si $3x + 1 = 3y + 1$, alors $3(x - y) = 0$ donc $x - y = 0$ et $x = y$ aussi bien sur $\mathbb{N}$ que sur Q, donc e et f sont injectives.
- f est surjective car tout élément q de $\mathbb{Q}$ peut s'écrire sous la forme $q = 3x + 1$ avec $x = \frac{q-1}{3} \in \mathbb{Q}$. Par conséquent f est injective et surjective donc bijective.
- En revanche certains éléments de $\mathbb{N}$ n'ont pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$, par exemple $5 = 3 \times \frac{4}{3} + 1$, $\frac{4}{3}$ est le seul nombre qui satisfait cette équation mais $\frac{4}{3} \notin \mathbb{N}$. L'application e n'est donc pas surjective et *a fortiori* pas bijective.

- $g(]-\infty, 0[\cap\mathbb{Z}) =]-\infty, 2[$ et $g([0, +\infty[\cap Z) = [-1, +\infty[$ donc $g(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
  Plus précisément l'application g est surjective car si $y \in \mathbb{N} \subset g(\mathbb{N})$, $g(y + 1) = y$ et si $y < 0$, $y \in]-\infty, 0[\cap\mathbb{Z}$ et $g(y - 2) = y$.
  $g(]-\infty, 0[\cap\mathbb{Z}) \cap g([0, +\infty[\cap Z) = [-1, 2[\cap\mathbb{Z} \neq \emptyset$.
  g n'est donc pas injective. Plus précisément par exemple $0 = g(-2) = g(1)$.
- L'application h est injective ($-x + 4 = -y + 4 \longrightarrow x = y$) et surjective (pour tout $y \in \mathbb{Z}$, $-(-y - 4) + 4 = y$ donc $x = -y - 4 \in \mathbb{Z}$ est l'antécédent de y par h) donc h est bijective.

Exercice 2 (3 points) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $8^n - 1$ est un multiple de 7.

Solution
Remarque : Un argument simple pour démontrer le résultat consisterait à s'appuyer sur la

formule $a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}$ qui permet de dire que $a-b$ divise $a^n - b^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $a = 8$ et $b = 1$, mais ici il est explicitement demandé de faire la démonstration par récurrence.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante : $8^n - 1$ est un multiple de 7, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons tout d'abord que $\mathcal{P}(0)$ est vraie : si $n = 0$, $8^n - 1 = 1 - 1 = 0$ est un multiple de 7 donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons à présent que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $8^n - 1 = 7k$. Alors examinons ce qui se passe pour $8^{n+1} - 1$. Nous décomposons 8^{n+1} en 8 fois 8^n pour utiliser l'égalité $8^n - 1 = 7k$ sous la forme $8^n = 7k + 1$:

$$8^{n+1} - 1 = 8 \times 8^n - 1 = 8 \times (7k+1) - 1$$

Nous développons cette égalité et regroupons les termes pour mettre le facteur 7 en évidence

$$8^{n+1} - 1 = 8 \times 7k + 8 - 1 = 7 \times (8k) + (8-1) = 7 \times (8k) + 7 = 7 \times (8k+1)$$

Par conséquent $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

En conclusion, nous avons donc à la fois :

- $\mathcal{P}(0)$ vraie
- si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

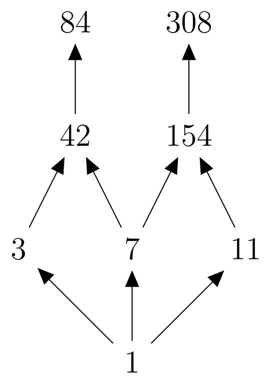
Par conséquent, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 **(10 points= 2+8)**

Soit l'ensemble $E = \{1, 3, 7, 11, 42, 84, 154, 308\}$, ordonné par la relation « x divise y ».

1. Représenter la relation d'ordre par un graphe (sans les arcs de réflexivité et de transitivité).
2. Pour le sous-ensemble $B = \{7, 42, 154\}$ de E, donner l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants. B admet-il une borne inférieure ? une borne supérieure ? un minimum ? un maximum ? Donner les éléments minimaux et les éléments maximaux de B. Justifier les réponses.

Solution



Rappel de cours : Un majorant (resp. minorant) d'une partie B d'un ensemble ordonné E est un élément x de E tel que tous les éléments de B sont inférieurs (resp. supérieurs) à x. Visuellement sur le graphe un majorant (resp. minorant) se trouve placé au-dessus resp. en dessous) des éléments de B dans le graphe et il y a un chemin qui mène de chaque élément de B à ce majorant (resp. minorant), le sous-graphe de B est ramassé à son sommet (resp. en bas) dans E, comme une gerbe de tiges qui serait liée. Pour la relation de divisibilité un majorant (minorant) de B est un multiple du ppcm (resp. un diviseur du pgcd) des éléments de B.

Le ppcm des éléments de B est 462, le pgcd est 7. Ni 462 ni aucun de ses multiples n'est un élément de E donc l'ensemble des majorants de B est $\emptyset$.

En revanche 7 est élément de E et 7 admet pour diviseur 1 dans B et l'ensemble des minorants de B est $\{1, 7\}$.

Rappel de cours : La borne supérieure (resp. borne inférieure) d'une partie majorée (resp. minorée) B d'un ensemble ordonné E est, s'il existe, le plus petit majorant (resp. le plus grand minorant) de B).Visuellement les tiges de la gerbe sont liées et la borne supérieure (resp. inférieure) est l'endroit le plus proche de B, le plus bas (resp. haut) où la gerbe est liée par au dessus (resp. en dessous).

Le plus grand des deux minorants de B est 7, donc B admet une borne inférieure B.

B n'a pas de majorant donc pas de plus petit majorant, c'est-à-dire pas de borne supérieure.

Rappel de cours : Un maximum (resp. minimum) d'une partie B d'un ensemble ordonné E est un majorant (resp. minorant) de B qui appartient à B.

B n'a pas de majorant dans E donc *a fortiori* pas de majorant dans B donc pas de maximum.

En revanche B a un minorant 7 qui appartient à B donc B a un minimum qui est 7.

Rappel de cours : Un élément maximal (resp. minimal) d'une partie B d'un ensemble ordonné E est un élément de B qui n'a pas d'éléments supérieurs (resp. inférieurs) dans B. Visuellement ce sont les éléments les plus élevés (resp. bas) de B : aucune flèche n'en part (resp. n'y arrive).

B a deux éléments maximaux 42 et 154 et un élément minimal 7.

Exercice 4 **(12 points= 2+5+2+3)**

1. Donner la définition d'un ordre bien fondé pour un ensemble ordonné $(E, \leq)$.
2. Démontrer que l'ordre de $(E, \leq)$ est bien fondé si et seulement si toute partie non vide de E admet au moins un élément minimal.
3. Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$ et l'ensemble A^* des mots sur cet alphabet, ordonné par l'ordre lexicographique $\preceq$ associé à l'ordre $a < b$.
   (a) Ranger les éléments $b^2, a^4, ab, a^3b, a^2b^2, a^2b, a^2$ pour l'ordre $\preceq$.
   (b) Donner une suite infinie strictement décroissante dans A^* pour $\preceq$.

Solution

1. Un ordre $\leq$ est bien fondé sur un ensemble E s'il n'exite pas de suite infinie strictement décroissante dans E.
2. Nous allons montrer les deux implications :

– Montrons que si $\leq$ est bien fondée sur E alors toute partie non vide de E admet au moins un élément minimal. Pour cela nous allons montrer la contraposée qui a l'avantage d'exprimer des propriétés plus constructives : nous supposons donc qu'il existe une partie non vide A de E qui n'admet pas d'élément minimal. Puisque A est non vide, A contient au moins un élément x_0. A n'admet pas d'élément minimal donc il existe $x_1 \neq x_0$ dans A tel que $x_1 \leq x_0$, c'est-à-dire $x_1 < x_0$. De même il existe x_2 élément de A tel que $x_2 < x_1$ et ainsi de suite, on construit donc une suite infinie strictement décroissante d'éléments de A.
  Nous avons donc montré que s'il existe une partie non vide A de E qui n'admet pas d'élément minimal, alors on peut construire une suite infinie strictement décroissante d'éléments de A, donc de E et donc que $\leq$ n'est pas bien fondée sur E.
– Dans l'autre sens, nous voulons montrer que si toute partie non vide de E admet au moins un élément minimal, alors $\leq$ est un ordre bien fondé sur E. Considérons là encore la contraposée : supposons qu'il existe une suite infinie strictement décroissante d'éléments de E, $\cdots < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < x_0$, soit $A = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$, A est une partie non vide de E qui n'admet pas d'élément minimal.
  Nous venons donc de montrer que si $\leq$ n'est pas une relation bien fondée alors il existe une partie non vide de E qui n'admet pas d'élément minimal.
  Nous en déduisons donc sa contraposée : si toute partie non vide de E admet au moins un élément minimal alors nécessairement $\leq$ est une relation d'ordre bien fondée.

Nous avons montré les deux sens de l'équivalence donc les deux propriétés sont équivalentes.

3. (a) *Un mot m_1 est inférieur à un autre m_2 selon l'ordre lexicographique s'il coïncide avec ce mot mais est plus court (préfixe) ou si à la première position où ils diffèrent la lettre de m_1 est inférieure à celle de m_2. Autrement dit : $m_1 = a_1 \dots a_n \prec m_2 = b_1 \dots b_p$ si*
   – *$n < p$ et $a_i = b_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$*
   – *ou s'il existe $i \geq 1$ tel que $a_k = b_k$ pour tout $1 \leq k < i$ et $a_i < b_i$.*

   Les mots proposés sont :

b^2	`bb`
a^4	`aaaa`
ab	`ab`
a^3b	`aaab`
a^2b^2	`aabb`
a^2	`aa`

   `bb` est forcément le plus grand des 6 puisque tous les mots commencent par `a` sauf lui (ce sera le 6ème). Tous les autres mots ont au moins deux lettres dont la première est un `a` et donc on compare la deuxième lettre.

   À nouveau, parmi les mots restants seul `ab` a un `b` en deuxième lettre donc est le plus grand des 5 mots commençant par `a` (ce sera le 5ème).

   Il reste un seul mot de deux lettres `aa` qui est donc plus petit (ce sera le 1er) que les 3 autres qui commencent par `aa` mais ont au moins trois lettres (il s'agit d'un préfixe).

   Il nous reste à ordonner les mots d'au moins trois lettres : `aaaa`, `aaab` et `aabb`. Ils ont tous quatre lettres dont les deux premières sont `aa`. On compare la troisième lettre : seul `aabb` a un `b` comme troisième lettre, il est donc plus grand que les deux autres (ce sera le 4ème).

Il reste à comparer textttaaaa et `aaab` : la différence se fait au niveau de la quatrième lettre `a` pour le premier (ce sera le 2ème) et `b` pour le second (ce sera le 3ème).
On récapitule le résultat : $a^2 \preceq a^4 \preceq a^3b \preceq a^2b \preceq a^2b^2 \preceq ab \preceq b^2$.

(b) Pour tout n, $a^n \prec a^{n+1}$ puisque le premier est préfixe du second. Mais $a^{n+1}b \prec a^nb$ puisque les deux mots coincident jusqu'en position n et en position $n+1$ il y a `a` dans le premier et `b` dans le second. La suite $(a^nb)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante.

Exercice 5 (5 points)

Dans le calcul propositionnel, soit $\mathcal{F}$ un ensemble fini de formules et G une formule. Démontrer que $\mathcal{F} \models G$ si et seulement si $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$ n'est pas satisfaisable.

Solution

Rappel de cours : Le séquent $\mathcal{F} \models G$ est vrai si toute interprétation I qui satisfait toutes les formules de $\mathcal{F}$ satisfait aussi G.
Un ensemble de formules $\mathcal{E}$ n'est pas satisfaisable s'il n'existe pas d'interprétation qui satisfasse toutes les formules de $\mathcal{E}$ en même temps.
Une interprétation ne satisfait pas une formule G si et seulement si elle satisfait la formule $\neg G$.

Nous allons montrer les deux sens de l'équivalence :

- Supposons que $\mathcal{F} \models G$, alors soit I une interprétation :

  ou bien I satisfait $\mathcal{F}$ et alors I satisfait G (puisque $\mathcal{F} \models G$) et I ne satisfait pas $\neg G$ donc I ne satisfait pas $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$

  ou bien I ne satisfait pas $\mathcal{F}$ et alors *a fortiori* I ne satisfait pas $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$

  Donc si $\mathcal{F} \models G$, aucune interprétation ne satisfait $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$ et $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$ n'est pas satisfaisable.
- Supposons à présent que $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$ n'est pas satisfaisable, soit I une interprétation qui satisfait $\mathcal{F}$, elle ne satisfait pas $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$ donc puisqu'elle satisfait toutes les formules de $\mathcal{F}$ mais qu'il existe au moins ne formule de $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$ pour laquelle I n'est pas satisfaite, c'est que I ne satisfait pas $\neg G$ donc que I satisfait G. Nous venons de montrer que si $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$ n'est pas satisfaisable alors tout interprétation I qui satisfait $\mathcal{F}$ satisfait G, soit $\mathcal{F} \models G$.

On a montré les deux sens de l'équivalence et on conclut donc que $\mathcal{F} \models G$ si et seulement si $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$ n'est pas satisfaisable.

Exercice 6 (14 points = 2+3+3+2+4)

1. On considère l'ensemble $\mathcal{B}$ contenant exactement les arbres binaires non vides étiquetés par l'alphabet $A = \{a, b, \odot\}$ qui satisfont : (i) tout noeud qui n'est pas une feuille est étiqueté par $\odot$ et possède exactement deux fils et (ii) toute feuille est étiquetée par a ou par b.

   (a) Les deux arbres réduits respectivement à a et b étant de hauteur 1, dessiner deux arbres distincts de hauteur 3.

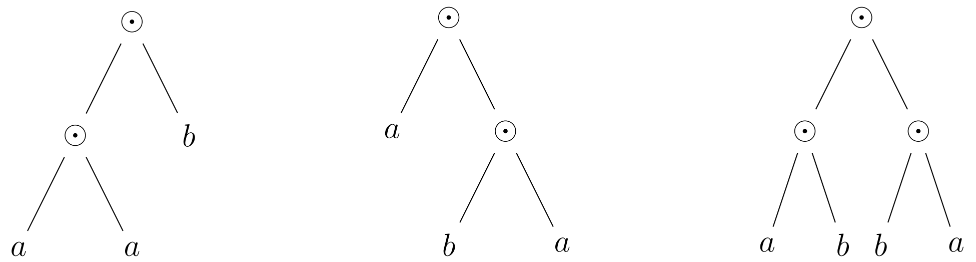
   (b) Donner une définition inductive de l'ensemble $\mathcal{B}$.

   (c) Donner une définition inductive de la fonction nba définie sur $\mathcal{B}$ qui associe à un arbre t le nombre $nba(t)$ de feuilles d'étiquette a de t.

2. Donner une bijection de $\mathcal{B}$ dans l'ensemble des termes construits sur $F_0 \cup F_2$, avec $F_0 = \{a, b\}$ et $F_2 = \{\odot\}$.
3. On considère l'interprétation h de ces termes ayant pour domaine $V = \mathbb{N}$, avec $h(a) = 2$, $h(b) = 3$, et $h_\odot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $h_\odot(m, n) = m \times n$. On rappelle la définition inductive de l'interprétation $h^*(t)$ d'un terme t de cet ensemble :
(B) $h^*(a) = h(a)$, $h^*(b) = h(b)$
(I) $h^*(t) = h_\odot(h^*(t_1), h^*(t_2))$ pour un terme $t = \odot(t_1, t_2)$ qui pourra être noté $t_1 \odot t_2$.
En remarquant que l'interprétation de $\odot$ est commutative et associative, déterminer h^* et justifier la réponse.

Solution

1. (a) Voici deux arbres incomplets de hauteur 3 et un arbre complet :



   (b) Définition inductive des arbres de $\mathcal{B}$:
   (B) Les deux arbres réduits aux feuilles a et b sont des arbres de $\mathcal{B}$
   (I) Si g et d sont deux arbres de $\mathcal{B}$ alors $(\odot, g, d)$ est un arbre de $\mathcal{B}$.

   (c) Définition inductive de nba :
   (B) Pour les deux arbres réduits à des feuilles : $nba(a) = 1$ et $nba(b) = 0$
   (I) Pour un arbre $t = (\odot, g, d)$ de $\mathcal{B}$, on a : $nba(t) = nba(g) + nba(d)$.
   Bien sûr, on obtient une définition inductive similaire pour la fonction nbb qui associe à un arbre le nombre de feuilles d'étiquette b.

2. On définit inductivement l'application $f : \mathcal{B} \mapsto T(F_0 \cup F_2)$ par $f(a) = a$, $f(b) = b$ et pour tout arbre $(\odot, g, d)$, le terme associé est $f(\odot, g, d) = \odot(f(g), f(d))$ qu'on note aussi $f(g) \odot f(d)$.
Cette application est bijective (on montre qu'elle est injective et surjective par induction structurelle), son inverse est l'application qui associe un arbre à un terme comme vu en cours. Cette bijection permet d'identifier un terme et l'arbre qui lui correspond, en particulier en appliquant les fonctions nba et nbb à des termes.

3. L'interprétation de la fonction $\odot$ étant la multiplication sur les entiers naturels, qui est associative et commutative, on devine que pour tout terme t, on a : $h^*(t) = 2^{nba(t)} \times 3^{nbb(t)}$.
On doit le montrer par induction :
(B) si $t = a$, on a : $h^*(t) = h(a) = 2 = 2^1 \times 3^0$ et si $t = b$, alors $h^*(t) = h(b) = 3 = 2^0 \times 3^1$.
(I) Pour un terme $t = t_1 \odot t_2$, on a $h^*(t) = h^*(t_1) \times h^*(t_2)$ par définition de h^*, donc $h^*(t) = 2^{nba(t_1)} \times 3^{nbb(t_1)} \times 2^{nba(t_2)} \times 3^{nbb(t_2)}$ par l'hypothèse d'induction, donc $h^*(t) = 2^{nba(t_1)+nba(t_2)} \times 3^{nbb(t_1)+nbb(t_2)}$, c'est-à-dire $h^*(t) = 2^{nba(t)} \times 3^{nbb(t)}$ en utilisant la définition inductive des fonctions nba et nbb.

Exercice 7 (12 points = 8+4) On considère la fonction booléenne $M : \mathbb{B}^3 \mapsto \mathbb{B}$ définie par $M(x, y, z) = 1$ si et seulement si la majorité des variables vaut 1 (*i.e.* au moins deux des trois).

1. Donner les formes normales disjonctive et conjonctive de M, ainsi que celles de sa fonction duale $\tilde{M}$.
2. Sur l'ensemble $\{p, q, r\}$ de variables propositionnelles, on considère la formule F associée à la forme normale conjonctive de M (donc de la forme $F_1 \wedge \ldots \wedge F_k$). Démontrer que $F \models p \vee q \vee r$.

Solution

1. On peut faire plusieurs raisonnements pour déterminer une forme disjonctive de M :

   Première approche : $M(x, y, z) = 1$ si et seulement au moins deux variables sur trois valent 1 et on ne se préoccupe pas de la valeur de la troisième variable :
   soit x et y et alors $xy = 1$, soit y et z et alors $yz = 1$, soit z et x et alors $zx = 1$.
   Donc $M(x, y, z) = 1$ si et seulement si $xy = 1$ ou $yz = 1$ ou $zx = 1$.
   C'est-à-dire si et seulement si $xy + yz + zx = 1$,
   Donc une forme disjonctive de $M(x, y, z)$ est $xy + yz + zx$.

   Deuxième approche : on se préoccupe de la valeur des trois variables comme c'est le cas si on dresse la table de vérité de M alors on constate que $M(x, y, z) = 1$ si et seulement si
   x, y et z valent 1 (donc $xyz = 1$) ou si deux d'entre eux valent 1 et l'autre vaut 0 :
   soit x vaut 0 et $y = z = 1$ (et $\overline{x}yz = 1$),
   soit y vaut 0 et $x = z = 1$ (et $x\overline{y}z = 1$),
   soit z vaut 0 et $x = y = 1$ (et $xy\overline{z} = 1$),
   Donc $M(x, y, z) = 1$ vaut 1 si et seulement si
   $xyz = 1$ ou $\overline{x}yz = 1$ ou $x\overline{y}z = 1$ ou $xy\overline{z} = 1$,
   C'est-à-dire si et seulement si $xyz + \overline{x}yz + x\overline{y}z + xy\overline{z} = 1$
   Donc une autre forme disjonctive pour $M(x, y, z)$ est $xyz + \overline{x}yz + x\overline{y}z + xy\overline{z}$.

   Quant à la forme normale conjonctive, on considère la table de vérité pour examiner quand $M(x, y, z) = 0$ c'est-à-dire exactement quand deux au moins des trois variables vaut 0 :
   x, y et z valent 0 (donc $x + y + z = 0$),
   x vaut 1 et $y = z = 0$ (donc $\overline{x} + y + z = 0$),
   y vaut 1 et $x = z = 0$ (donc $x + \overline{y} + z = 0$)
   ou z vaut 1 et $x = y = 0$ (donc $x + y + \overline{z} = 0$).
   Donc $M(x, y, z) = 0$ si et seulement si $x + y + z = 0$ ou $\overline{x} + y + z = 0$ ou $x + \overline{y} + z = 0$ ou $x + y + \overline{z} = 0$.
   Autrement dit il faut et il suffit qu'une de ces 4 sommes soit égale à 0 pour que $M(x, y, z)$ soit égale à 0.
   Donc il faut et il suffit que ces 4 sommes soient égales à 1 pour que $M(x, y, z) = 1$.
   C'est-à-dire qu'une forme normale conjonctive de M est $(x + y + z)(\overline{x} + y + z)(x + \overline{y} + (x + y + \overline{z})$.

   Par définition $\tilde{M}(x, y, z) = \overline{M(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})}$

Si on utilise la première forme normale disjonctive, alors

$$\tilde{M}(x,y,z) = \overline{\overline{x}\,\overline{y} + \overline{y}\,\overline{z} + \overline{z}\,\overline{x}} = \overline{(\overline{x}\,\overline{y})}\;\overline{(\overline{y}\,\overline{z})}\;\overline{(\overline{z}\,\overline{x})} = (\overline{\overline{x}}+\overline{\overline{y}})(\overline{\overline{y}}+\overline{\overline{z}})(\overline{\overline{z}}+\overline{\overline{x}}) = (x+y)(y+z)(z+x).$$

Avec la seconde forme normale disjonctive de M,

$$\tilde{M}(x,y,z) = \overline{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z} = \overline{(\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z})}\;\overline{(x\overline{y}\,\overline{z})}\;\overline{(\overline{x}y\overline{z})}\;\overline{(\overline{x}\,\overline{y}z)}$$

soit $\tilde{M}(x,y,z) = (x+y+z)\,(\overline{x}+y+z)\,(x+\overline{y}+z)\,(x+y+\overline{z}) = M(x,y,z)$.
On a appliqué dans chacun des deux cas chacune des deux lois de de Morgan.

On peut aussi se convaincre à partir de la première formule $\tilde{M}(x,y,z) = (x+y)(y+z)(z+x)$ que $\tilde{M}(x,y,z) = M(x,y,z)$ en remarquant que $(x+y)(y+z)(z+x)$ vaut 1 si et seulement si $x+y=1$ et $y+z=1$ et $x+z=1$, ce qui n'est possible que si au plus une des variables vaut 0, ce qui est exactement la définition de $M(x,y,z)=1$.

2. Avec la forme normale conjonctive de M $((x+y+z)\,(\overline{x}+y+z)\,(x+\overline{y}+z)\,(x+y+\overline{z}))$, on obtient sur $\{p,q,r\}$ la formule F suivante : $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$, qu'on peut donc décrire sous la forme $F = F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4$. Toute interprétation I telle que $I(F)=1$ est donc telle que $I(F_i)=1$ pour $i=1,2,3,4$ donc en particulier, $I(F_1)=1$. Comme $F_1 = p \vee q \vee r$, on en déduit que $F \models p \vee q \vee r$.

Exercice 8 (4 points) En utilisant les symboles de prédicat du monde de Tarski, `Cube(.)`, `Large(.)`, =, $\neq$, les quantificateurs $\exists$, $\forall$, et les connecteurs booléens, écrire :

1. une formule exprimant : **a** ou **b** est un cube et **a** ou **c** est grand.
2. une formule exprimant : il existe au moins deux cubes, et l'un de ces deux cubes au moins est grand.

Solution

1. $(\texttt{Cube}(\mathbf{a}) \vee \texttt{Cube}(\mathbf{b})) \wedge (\texttt{Large}(\mathbf{a}) \vee \texttt{Large}(\mathbf{c}))$
2. $\exists x \exists y (x \neq y \wedge \texttt{Cube}(x) \wedge \texttt{Cube}(y) \wedge (\texttt{Large}(x) \vee \texttt{Large}(y)))$

Exercice 9 (6 points) Dans le calcul des prédicats, on note $L(F)$ l'ensemble des variables libres d'une formule F et $B(F)$ l'ensemble des variables liées de F.
On considère la formule F : $\exists x R(x,z) \supset \forall z (R(y,z) \vee Q(y,z))$.
Souligner les occurrences libres de variables dans F. Donner $L(F)$ et $B(F)$.

Solution
Rappel de cours : une occurrence de variable est liée si elle est précédée d'un quantificateur ($\exists, \forall$) qui la lie. Une occurrence d'une variable est libre si aucun des quantificateurs qui la précède ne la lie.

Une variable est libre si au moins une de ses occurrences est libre. Une variable est liée si toutes ses occurrences sont liées.

Il y a ici trois noms de variables :
- x présent dans $\exists x R(x,z)$, cette variable est liée justement par le $\exists x$ qui précède son utilisation dans $R(x,z)$

- y présent dans $\forall z(R(y,z) \vee Q(y,z))$, cette variable n'est liée par aucun quantificateur donc cette variable est libre
- z qui apparaît dans $\exists x R(x,z)$ sans quantificateur préalable sur z donc cette occurrence de z est libre ; et ensuite il y a à nouveau le nom z dans $\forall z(R(y,z) \vee Q(y,z))$, cette occurrence de z est liée justement par le $\forall z$ qui précède son utilisation dans $(R(y,z) \vee Q(y,z))$.

En résumé graphiquement : $\exists x R(x, \underline{z}) \supset \forall z(R(\underline{y}, z) \vee Q(\underline{y}, z))$.

Voilà pour les occurrences, quant aux variables :
- x a une seule occurrence, qui est liée, donc x est une variable liée,
- y a une seule occurrence, qui est libre, donc y est une variable libre,
- z a à la fois une occurrence libre et une occurrence liée, donc c'est une variable libre par définition.

On a donc $L(F) = \{y, z\}$ et $B(F) = \{x\}$.