Année 2016-2017 - S1

2I005 - 27 octobre 2016

Durée : 1h45 - Documents, calculettes et téléphones interdits

Inscrire votre numéro de groupe sur votre copie. La note (entre 0 et 60) est le minimum entre 60 et la somme des points obtenus (entre 0 et 75, barème indicatif).

Exercice 1 (26 points=3+6+6+5+6)

1. Soit E un ensemble, et $\equiv$ une relation binaire sur E.
   (a) Donner les conditions que doit vérifier $\equiv$ pour être une relation d'équivalence. Détailler.
   (b) On rappelle que, pour $x \in E$, la classe d'équivalence de x est notée $[x]_\equiv$. On rappelle aussi que l'ensemble quotient $E_{/\equiv}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de $\equiv$. On considère l'application $f : E \to E_{/\equiv}$ qui à tout $x \in E$ associe $f(x) = [x]_\equiv$. f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.
   (c) Soient F un ensemble, et $g : E_{/\equiv} \to F$ et $h : E \to F$ deux applications telles que, pour tout $x \in E$, $h(x) = g([x]_\equiv)$. Montrer que g est injective si et seulement si ($h(x) = h(x')$ implique $x \equiv x'$ pour tous $x, x' \in E$).
   (Rappel : $x \equiv x'$ si et seulement si $[x]_\equiv = [x']_\equiv$).
2. Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet. L'application $f : A^* \to A^*$ définie ci-dessous est-elle injective ? surjective ? bijective ?

$$f(u) = u \cdot b$$

3. Démontrer par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \frac{n}{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$$

   est vraie pour tout $n \geq 1$.

Solution

1. (a) cf cours. On demande que les différentes définitions soient données (réflexive : pour tout $x \in E$, $x \equiv x$, etc.)
   (b) f n'est pas nécessairement injective : si $x, x' \in E$ et $x \equiv x'$ alors $f(x) = f(x')$ même si $x \neq x'$. f est surjective : soit $y \in E_{/\equiv}$, alors il existe un x tel que $y = [x]_\equiv$ et $y = f(x)$. f n'est donc pas nécessairement bijective.

(c) Supposons g injective. Soient $x, x' \in E$ tels que $h(x) = h(x')$. Alors par définition, $g([x]_\equiv) = g([x']_\equiv)$. Or, g est injective, donc $[x]_\equiv = [x']_\equiv$ et $x \equiv x'$. Réciproquement, soient $y, y' \in E_{/\equiv}$ tels que $g(y) = g(y')$. Pour tout $x \in y$, $h(x) = g(y)$ et pour tout $x' \in y'$, $h(x') = g(y')$. Donc, $h(x) = h(x')$ pour tous $x \in y$, $x' \in y'$. Par hypothèse, cela signifie que $x \equiv x'$, pour tous $x \in y$ $x' \in y'$. Donc $[x]_\equiv = y = [x']_\equiv = y'$ et g est injective.

2. f est injective : soient $u, v \in A^*$ tels que $f(u) = f(v)$. Alors $u \cdot b = v \cdot b$ donc $u = v$. Par contre f n'est pas surjective : pour tout $u \in A^*$, $f(u) \neq \varepsilon$ (il y a d'autres contre-exemples). Donc f n'est pas bijective.

3. Cas de base $(n = 1)$: $\frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1 \times 2}$

Cas d'induction. Soit $n \geq 1$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n+1} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \\
\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+2)}{n+1(n+2)} &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} \\
\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} \\
\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} \\
\frac{n+1}{n+2} &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)}
\end{aligned}$$

et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2 (27 points = 3+6+3+5+2+8)

1. (a) Donner la définition d'un ordre bien fondé.

(b) Soit $\mathcal{P}$ une propriété sur un ensemble E muni d'un ordre bien fondé $\preceq$. Démontrer que si pour tout $x \in E$, ($\mathcal{P}(y)$ est vraie pour tout $y \prec x$) implique $\mathcal{P}(x)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.

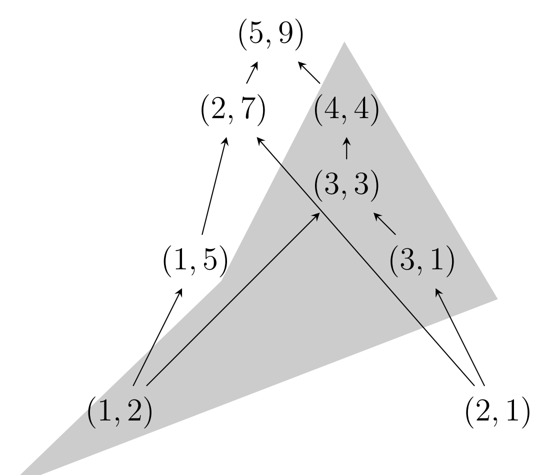
(c) Soit A un alphabet. L'ordre lexicographique sur A^* est-il bien fondé ? Justifier.

2. On définit la relation $\preceq$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $(n, m) \preceq (n', m')$ si $n \leq n'$ et $m \leq m'$, pour tous $n, m, n', m' \in \mathbb{N}$, avec $\leq$ la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{N}$. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?
3. Soit $E = \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,7),(3,1),(3,3),(4,4),(5,9))\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ordonné par la relation de la question **??**.
   (a) Représenter la relation d'ordre sur E par un graphe (sans les arcs de réflexivité ni de transitivité).
   (b) Pour la partie $A = \{(1,2),(3,1),(3,3),(4,4)\}$ de E, donner l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants. Donner, lorsqu'ils existent, la borne inférieure, la borne supérieure, le plus petit élément et le plus grand élément de A. Donner les éléments minimaux et les éléments maximaux de A.

Solution

1. (a) cf cours
   (b) cf cours
   (c) L'ordre lexicographique sur A^* n'est pas bien fondé : la suite (u_n) définie par $u_n = a^n b$ est infinie et strictement décroissante.
2. — $\preceq$ est réflexive car $\leq$ est réflexive. Donc, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ $n \leq n$ et $m \leq m$ donc $(n, m) \preceq (n, m)$.
   — $\preceq$ est antisymétrique : soient (n, m) et $(n', m') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $(n, m) \preceq (n', m')$ et $(n', m') \preceq (n, m)$. Alors, $n \leq n'$ et $m \leq m'$ et $n' \leq n$ et $m' \leq m$. La relation $\leq$ étant antisymétrique, $n = n'$ et $m = m'$ donc $(n, m) = (n', m')$.
   — $\preceq$ est transitive : soient $(n, m), (n', m') et (n'', m'') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $(n, m) \preceq (n', m')$ et $(n', m') \preceq (n'', m'')$. Alors $n \leq n'$, $m \leq m'$, $n' \leq n''$ et $m' \leq m''$. Donc, par transitivité de $\leq$, $n \leq n''$ et $m \leq m''$ donc $(n, m) \preceq (n'', m'')$.

   La relation $\preceq$ n'est pas un ordre total sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(1,2)$ et $(2,1)$ ne sont pas comparables par $\preceq$.



3. (a)

(b) Maj(A) $= \{(5,9),(4,4)\}$, Min(A) $= \emptyset$, borne inférieure n'existe pas, borne supérieure : $(4,4)$. Plus petit élément n'existe pas, plus grand élément est $(4,4)$. Les éléments minimaux sont $\{(1,2),(3,1)\}$ et l'unique élément maximal est $(4,4)$.

Exercice 3 (12 points = 2+5+5)

1. Soit $A = \{(,)\}$ l'alphabet constitué de la parenthèse ouvrante et de la parenthèse fermante. On considère le langage de Dyck $D \subseteq A^*$ défini inductivement par
   (B) $\varepsilon \in D$
   (I) — pour tout $u \in D$, $(u) \in D$
   — pour tous $u, v \in D$, $uv \in D$.
   (a) Lesquels des mots $()$, $()()($ et $((()))$ sont dans D ?
   (b) Montrer par induction structurelle que tout mot $u \in D$ contient autant de parenthèses ouvrantes que fermantes.
2. Soit A un alphabet. On considère l'ensemble ABS des arbres binaires stricts étiquetés par A, défini par
   (B) $(a, \emptyset, \emptyset) \in ABS$.
   (I) Pour tous $g, d \in ABS$, $(a, g, d) \in ABS$.
   Montrer par induction structurelle que pour tout $t \in ABS$, tout noeud de t a exactement 0 ou 2 fils.

Solution

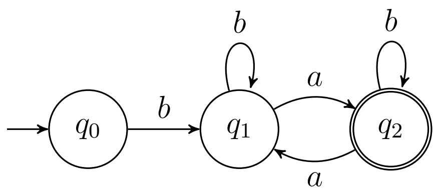
1. (a) $()$ et $((()))$ sont dans D
   (b) Cas de base : $\varepsilon \in D$ contient autant de parenthèses ouvrantes que fermantes (0).
   Cas d'induction : Soit $u, v \in D$ et supposons que u et v contiennent autant de parenthèses ouvrantes que fermantes. Notons $NO(u)$ (respectivement $NO(v)$) le nombre de parenthèses ouvrantes dans u (respectivement v) et $NF(u)$ (respectivement $NF(v)$) le nombre de parenthèses fermantes de u (respectivement de v). Alors $NO(uv) = NO(u) + NO(v) = NF(u) + NF(v) = NF(uv)$. Donc uv contient autant de parenthèses ouvrantes que fermantes.
   Conclusion : Tout mot $u \in D$ contient autant de parenthèses ouvrantes que fermantes.
2. Cas de base : Soit $a \in A$. L'arbre $(a, \emptyset, \emptyset)$ contient un noeud (la racine) qui a exactement 0 fils.
   Cas d'induction : soit $g, d \in ABS$, soit $a \in A$ et supposons que tous les noeuds de g et de d possèdent soit 2 fils soit 0 fils. Considérons l'arbre (a, g, d). Ses noeuds sont les noeuds de g, les noeuds de d et la racine étiquetée par a. Par hypothèse d'induction, tous les noeuds de g et de d possèdent soit 2 fils soit 0 fils. Par construction, la racine possède exactement deux fils.

En fait, pour être correct, il faut montrer en même temps que tout arbre dans ABS est non vide. Comme je ne l'ai pas précisé, on ne pénalise pas s'ils ne l'ont pas montré.

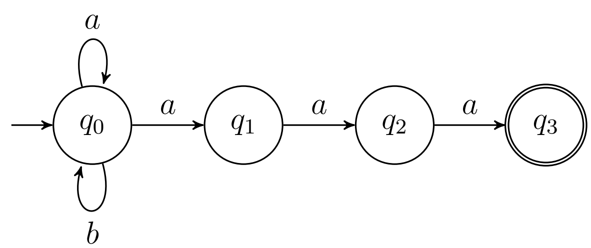
Exercice 4 (10 points = 2+4+4)

1. Donner la définition d'un langage reconnaissable sur A^*.
2. On considère les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ci-dessous, dans lesquels les états acceptants sont représentés par des doubles cercles.

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



   (a) L'automate $\mathcal{A}$ est-il déterministe ? complet ? Donner le langage accepté par $\mathcal{A}$ de façon informelle.

   (b) Donner le langage accepté par $\mathcal{B}$ de façon informelle. Existe-t-il un automate déterministe équivalent ? Justifier (on ne demande pas de construction).

Solution

1. Un langage L est reconnaissable s'il existe une automate fini $\mathcal{A}$ tel que $L(\mathcal{A}) = L$.
2. (a) $\mathcal{A}$ est déterministe mais non complet. $L(\mathcal{A})$ est l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ commençant par b et contenant un nombre impair de a.

   (b) $L(\mathcal{B})$ est l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ finissant par aaa. Il est non déterministe. On sait d'après le théorème de déterminisation que, pour tout automate non déterministe, il existe un automate déterministe équivalent, donc il existe bien un automate déterministe équivalent à $\mathcal{B}$.