Mathématiques Discrètes

LU2IN005

Année 2021-2022 **Partiel du 9 novembre 2021** Durée : 1h30

Documents, calculettes et téléphones interdits. Inscrire votre numéro de groupe sur votre copie. La note (entre 0 et 20) est le minimum entre 20 et la somme des points obtenus (entre 0 et 23). **Le barême est donné à titre indicatif.**

Exercice 1 (Total : 7 points)

(1) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E.

a. (1½ points) On suppose que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive et telle que, pour tous $x, y, z \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $z\mathcal{R}x$. Montrer qu'alors la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

> **Solution:** Si $\mathcal{R}$ est réflexive, il reste à montrer qu'elle est symétrique et transitive. Soient $x, y \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$. Alors, comme $\mathcal{R}$ est réflexive, $x\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}y$ implique que $y\mathcal{R}x$. Donc $\mathcal{R}$ est symétrique. Soient $x, y, z \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Alors $z\mathcal{R}x$ et par symétrie de $\mathcal{R}$, $x\mathcal{R}z$. Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

b. (1½ points) Montrer que si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, alors elle vérifie la propriété que pour tous x, y, z tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $z\mathcal{R}x$.

> **Solution:** Soient $x, y, z \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Alors par transitivité de $\mathcal{R}$, $x\mathcal{R}z$, et par symétrie de $\mathcal{R}$, $z\mathcal{R}x$.

(2) Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application. On rappelle la définition de f^n, pour tout $n \in N$:

$$f^0(x) = x$$
$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$$

a. (1½ points) Soit $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i < j$ et soit $e \in E$ tel que $f^i(e) = f^j(e)$. Montrer que si f est injective, alors pour tout $0 \leq n \leq i$, $f^{i-n}(e) = f^{j-n}(e)$. On utilisera une récurrence sur n.

> **Solution:**
> — Cas de base : $f^i(e) = f^j(e)$ par hypothèse.
> — Cas d'induction : Soit $0 \leq n < i$ et supposons que $f^{i-n}(e) = f^{j-n}(e)$. Alors $f(f^{i-n-1}(e)) = f(f^{j-n-1}(e))$ par définition, et par injectivité de f, $f^{i-n-1}(e)) = f^{j-n-1}(e)$. Donc $f^{i-(n+1)}(e)) = f^{j-(n+1)}(e)$.
> — Conclusion : Pour tout $0 \leq n \leq i$, $f^{i-n}(e) = f^{j-n}(e)$.

b. (1½ points) Montrer que si f est injective et non surjective, alors il existe un élément $e \in E$ tel que, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, $f^i(e) \neq f^j(e)$. On pourra utiliser le résultat de la question (a).

> **Solution:** Si f est non surjective, il existe un élément $e \in E$ tel que $e \neq f(x)$ pour tout $x \in E$. Supposons qu'il existe $i < j \in \mathbb{N}$ tels que $f^i(e) = f^j(e)$, alors comme f est injective, d'après la question (a), pour $n = i$, $f^0(e) = f^{j-i}(e)$ donc $e = f(f^{j-i-1}(e))$ ce qui est en contradiction avec le fait que $e \neq f(x)$ pour tout $x \in E$. Donc, pour tout $i < j \in \mathbb{N}$, $f^i(e) \neq f^j(e)$.

c. (1 point) En déduire que si f est injective et non surjective, E est infini.

> **Solution:** Or, $\{f^i(e) \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq E$, et les éléments de cet ensemble devant être deux à deux distincts, E contient nécessairement un nombre infini d'éléments.

Exercice 2 (Total : 7 points)

(1) Soit $\mathcal{P}$ une propriété sur les éléments d'un ensemble ordonné $(E, \preceq)$ bien fondé.

a. (1 point) Énoncer le principe d'induction bien fondée.

> **Solution:**
> Si (pour tout $x \in E$, (si pour tout $y \prec x, P(y)$), alors $P(x)$)) alors pour tout $e \in E, P(e)$.

b. (2 points) Démontrer que le principe d'induction bien fondée est correct.

> **Solution:** Soit $X = \{x \in E \mid P(x) \text{ est faux}\}$. Si X est non vide, alors, puisque $\preceq$ est bien fondée, X admet un élément minimal x_0. Tout élément $y \prec x_0$ n'appartient donc pas à X et vérifie donc $P(y)$. En utilisant l'hypothèse, on en déduit que $P(x_0)$ est vrai ce qui contredit $x_0 \in X$. Donc X est vide, ce qui signifie que pour tout $e \in E$, $P(e)$ est vrai.

(2) Soit $E = \{(1,1), (0,2), (2,3), (4,1), (4,3), (3,0), (3,1), (2,8), (9,1)\}$ un ensemble muni de la relation binaire $\preceq$ définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)$ si et seulement si $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$, ou $\leq$ est l'ordre naturel sur les entiers.

a. (1½ points) Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.

> **Solution:** Montrons que $\preceq$ est réflexive : Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$. Par réflexivité de $\leq$, $x_1 \leq x_1$ et $x_2 \leq x_2$. Donc $(x_1, x_2) \preceq (x_1, x_2)$. Montrons que $\preceq$ est antisymétrique : Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)$ et

$(y_1, y_2) \preceq (x_1, x_2)$. Donc $x_1 \leq y_1$ et $y_1 \leq x_1$. Par antisymétrie de $\leq$, $x_1 = y_1$. De même, $x_2 \leq y_2$ et $y_2 \leq x_2$ donc $x_2 = y_2$. Donc $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.
Montrons que $\preceq$ est transitive : Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)$ et $(y_1, y_2) \preceq (z_1, z_2)$. Donc $x_1 \leq y_1$ et $y_1 \leq z_1$. Par transitivité de $\leq$, on a $x_1 \leq z_1$. De même on déduit que $x_1 \leq z_2$. Donc $(x_1, x_2) \preceq (z_1, z_2)$.
Donc $\preceq$ est bien une relation d'ordre.

b. (½ point) Représenter $(E, \preceq)$ par un graphe (sans les arcs de transitivité ni de réflexivité).

c. (2 points) Pour la partie $A = \{(x, y) \in E \mid x + y \leq 5\}$ donner l'ensemble des minorants et l'ensemble des majorants. S'ils existent, donner la borne inférieure, la borne supérieure, le plus petit élément et le plus grand élément. Donner les éléments minimaux et les éléments maximaux.

Solution: Majorants : $\{(4, 3)\}$, Minorants : $\emptyset$, borne inférieure n'existe pas, borne supérieure : $(4, 3)$, pas de plus petit élément, pas de plus grand élément, éléments minimaux : $\{(0, 2), (1, 1), (3, 0\}$, éléments maximaux :$\{(2, 3), (4, 1)\}$.

Exercice 3 (Total : 7 points)

(1) Soit un alphabet $A = \{a, b\}$. On rappelle que pour tout mot $w \in A^*$, on note respectivement $|w|_a$ et $|w|_b$ le nombre de a et de b dans w. On définit par induction structurelle l'ensemble $L \subseteq A^*$ suivant :
— $b \in L$
— pour tous mots u et v dans L, $a.u.v \in L$.

a. (1½ points) Montrer que pour tout mot $w \in L$, $|w|_b = |w|_a + 1$.

Solution: On le montre par induction structurelle.
— $|b|_b = 1$, $|b|_a + 1 = 0 + 1$, donc on a bien $|b|_b = |b|_a + 1$.
— Soit $w = a.u.v \in L$ avec $u, v \in L$ et supposons que $|u|_b = |u|_a + 1$ et $|v|_b = |v|_a + 1$. Or, $|a.u.v|_b = |u|_b + |v|_b = |u|_a + 1 + |v|_a + 1 = (1 + |u|_a + |v|_a) + 1 = |a.u.v|_a + 1$.
Donc pour tout mot $w \in L$, $|w|_b = |w|_a + 1$

b. (3 points) On rappelle que, pour tout mot $u, v \in A^*$, u est un préfixe de v si il existe un mot $w \in A^*$ tel que $u.w = v$. Le mot vide ε est préfixe de tous les mots. Le mot u est un *préfixe propre* de v si u est un préfixe de v et $u \neq v$. Montrer que pour tout mot $w \in L$, pour tout préfixe propre w' de w, $|w'|_a \geq |w'|_b$. On pourra utiliser le résultat de la question (a).

Solution: On le montre par induction structurelle.

— Si $w = b$, w n'a qu'un seul préfixe propre : ε, et $|\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b = 0$.

— Soit $w = a.u.v$ avec $u, v \in L$. Soit w' un préfixe propre de w. On fait une étude de cas sur w'. Si $w' = \varepsilon$, alors $|\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b = 0$. Si $w' = a$, alors $|a|_a = 1 \geq |a|_b$. Si $w' = au'$ avec u' préfixe propre de u, alors par hypothèse d'induction, $|u'|_a \geq |u'|_b$. Donc $|w'|_a = 1 + |u'|_a \geq 1 + |u'|_b \geq |u'|_b = |w'|_b$. Si $w' = au$, alors d'après le résultat de la question précédente, on sait $|u|_b = |u|_a + 1$ donc $|au|_a = 1 + |u|_a = |u|_b = |au|_b$. Donc $|w'|_a \geq |w'|_b$. Si enfin $w' = auv'$ avec v' préfixe propre de v, alors par hypothèse d'induction, $|v'|_a \geq |v'|_b$ et d'après la question précédente, $|u|_b = |u|_a + 1$. Donc $|w'|_a = 1 + |u|_a + |v'|_a = |u|_b + |v'|_a \geq |u|_b + |v'|_b$. Donc $|w'|_a \geq |w'|_b$.

(2) On considère un alphabet de symboles $E = \{\odot, \oplus, \bar{}, (,)\}$ et un ensemble infini de symboles de variables X. On définit par induction structurelle l'ensemble F de la façon suivante :

— $x \in F$, pour tout $x \in X$,

— si $f \in F$ alors $\bar{f} \in F$,

— si $f_1, f_2 \in F$ alors $(f_1 \odot f_2) \in F$ et $(f_1 \oplus f_2) \in F$

a. (1 point) Définir une fonction $\mathit{nbparo} : F \to \mathbb{N}$ et une fonction $\mathit{nbparf} : F \to \mathbb{N}$ qui associent respectivement à chaque élément f de F le nombre de parenthèses ouvrantes et le nombre de parenthèses fermantes apparaissant dans f.

Solution: On définit ces fonctions par induction structurelle :

$$\begin{aligned}
\mathit{nbparo}(x) &= 0 \text{ pour tout } x \in X \\
\mathit{nbparo}(\bar{f}) &= \mathit{nbparo}(f) \text{ pour tout } f \in F \\
\mathit{nbparo}((f_1 \odot f_2)) &= \mathit{nbparo}(f_1) + \mathit{nbparo}(f_2) + 1 \text{ pour tous } f_1, f_2 \in F \\
\mathit{nbparo}((f_1 \oplus f_2)) &= \mathit{nbparo}(f_1) + \mathit{nbparo}(f_2) + 1 \text{ pour tous } f_1, f_2 \in F
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathit{nbparf}(x) &= 0 \text{ pour tout } x \in X \\
\mathit{nbparf}(\bar{f}) &= = \mathit{nbparf}(f) \text{ pour tout } f \in F \\
\mathit{nbparf}((f_1 \odot f_2)) &= \mathit{nbparf}(f_1) + \mathit{nbparf}(f_2) + 1 \text{ pour tous } f_1, f_2 \in F \\
\mathit{nbparf}((f_1 \oplus f_2)) &= \mathit{nbparf}(f_1) + \mathit{nbparf}(f_2) + 1 \text{ pour tous } f_1, f_2 \in F
\end{aligned}$$

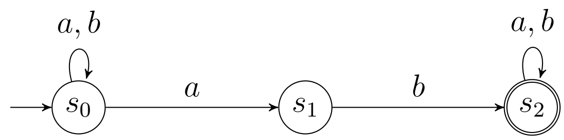
b. ($1\frac{1}{2}$ points) Montrer par induction structurelle que pour tout $f \in F$, $\mathit{nbparo}(f) = \mathit{nbparf}(f)$.

Solution: $nbparo(x) = 0 = nbparf(x)$ pour tout $x \in X$.
Si $f = \bar{f}'$ alors $nbparo(\bar{f}') = nbparo(f')nbparf(f')$ par hypothèse d'induction. Or $nbparf(\bar{f}') = nbparf(f')$ donc $nbparo(\bar{f}') = nbparf(\bar{f}')$
Si $f = (f_1 \circ f_2)$ avec $\circ \in \{\oplus, \odot\}$, alors

$$\begin{aligned} nbparo((f_1 \circ f_2)) &= nbparo(f_1) + nbparo(f_2) + 1 \\ &= nbparf(f_1) + nbparf(f_2) + 1 \text{ par hypothèse d'induction} \\ &= nbparf((f_1 \circ f_2)) \end{aligned}$$

Exercice 4 (Total : 2 points)

Soit l'automate $\mathcal{A}$ sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ représenté ci-dessous.



(1) (½ point) Le mot *aaba* est-il accepté par $\mathcal{A}$? Le mot *bbba* ? Justifier.

Solution: *aaba* est accepté par l'automate car il est étiquette de l'exécution acceptante : $s_0 \xrightarrow{a} s_0 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{b} s_2 \xrightarrow{a} s_2$.
bbba n'est pas accepté par l'automate car il est étiquette de deux exécutions, qui sont toutes rejetantes : $s_0 \xrightarrow{b} s_0 \xrightarrow{b} s_0 \xrightarrow{a} s_0 \xrightarrow{a} s_0$, et $s_0 \xrightarrow{b} s_0 \xrightarrow{b} s_0 \xrightarrow{b} s_0 \xrightarrow{a} s_1$.

(2) (½ point) L'automate $\mathcal{A}$ est-il complet ? déterministe ? Justifier.

Solution: L'automate n'est pas complet : il n'y a aucune transition partant de l'état s_1 et étiquetée par a. Il n'est pas déterministe : (s_0, a, s_0) et (s_0, a, s_1) sont dans la relation de transition.

(3) (1 point) Décrire informellement $L(\mathcal{A})$.

Solution: $L(\mathcal{A})$ est l'ensemble des mots contenant le facteur *ab*.