

## 25 LOIS DE DE MORGAN 3/4

### Quantificateurs

*quel que soit* le prédicat **F**,

$$((\forall x, F(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists x, \neg(F(x))))$$

---

Montrons  $(\forall x, F(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists x, \neg(F(x)))$  (1)

( $\Leftrightarrow I$ )

Supposons que  $\forall x, F(x)$  (h1)

Montrons  $\neg(\exists x, \neg(F(x)))$  (2)

( $\neg I$ )

Supposons que  $\exists x, \neg(F(x))$  (h2)

Montrons  $\perp$  (3)

( $\exists E$ )

Montrons  $\exists x, \neg(F(x))$  (4)

d'après (h2)

Soit l'élément  $a$

Supposons que  $\neg(F(a))$  (h3)

Montrons  $\perp$  (5)

( $\neg E$ )

Montrons  $F(a)$  (6)

( $\forall E$ )

Montrons  $\forall x, F(x)$  (7)

d'après (h1)

Montrons  $\neg(F(a))$  (8)

d'après (h3)

Supposons que  $\neg(\exists x, \neg(F(x)))$  (h4)

Montrons  $\forall x, F(x)$  (9)

( $\forall I$ )

Soit l'élément  $a$

Montrons  $F(a)$  (10)

(A)

Supposons que  $\neg(F(a))$  (h5)

Montrons  $\perp$  (11)

( $\neg E$ )

Montrons  $\exists x, \neg(F(x))$  (12)

( $\exists I$ )

Montrons  $\neg(F(a))$  (13)

*d'après* (h5)

*Montrons*  $\neg (\exists x, \neg (\mathbf{F} (x)))$  (14)

*d'après* (h4)