

EXERCICE 41

Logique - Connecteurs

Montrons que

quelles que soient les propositions **A** **B**,
 $((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)))$

Montrons ($\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$) $\Leftrightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$ (h1)

Montrons ($\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ (2)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ (h2)

Montrons $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ (3)

($\wedge I$)

Montrons \mathbf{A} (4)

($\vee E$)

Montrons $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ (5)

d'après (h2)

Supposons que \mathbf{A} (h3)

Montrons \mathbf{A} (6)

d'après (h3)

Supposons que \mathbf{B} (h4)

Montrons \mathbf{A} (7)

($\Leftrightarrow Ed$)

Montrons $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$ (8)

d'après (h1)

Montrons \mathbf{B} (9)

d'après (h4)

Montrons \mathbf{B} (10)

($\vee E$)

Montrons $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ (11)

d'après (h2)

Supposons que \mathbf{A} (h5)

Montrons \mathbf{B} (12)

($\Leftrightarrow Eg$)

Montrons $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$ (13)

d'après (h1)

Montrons \mathbf{A} (14)

d'après (h5)

Supposons que \mathbf{B} (h6)

Montrons \mathbf{B} (15)

d'après (h6)

Supposons que $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ (h7)

Montrons $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$ (16)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que \mathbf{A} (h8)

Montrons \mathbf{B} (17)

($\wedge Ed$)

Montrons $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ (18)

($\Rightarrow E$)

Montrons $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ (19)

($\vee Ig$)

Montrons \mathbf{A} (20)

d'après (h8)

Montrons $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ (21)

d'après (h7)

Supposons que \mathbf{B} (h9)

Montrons \mathbf{A} (22)

($\wedge Eg$)

Montrons $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ (23)

($\Rightarrow E$)

Montrons $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ (24)

($\vee Id$)

Montrons \mathbf{B} (25)

d'après (h9)

Montrons $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ (26)

d'après (h7)