Numéro d'anonymat :

M1 Informatique.
UE MOGPL.

Examen du 17 janvier 2020. Durée : 1 heure 30 minutes

Une feuille recto-verso est autorisée, tout autre document est interdit. Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs. Le barème est indicatif et est susceptible d'être modifié.

Exercice 1 (7 points)

Jeudi 16 janvier 2020, 23h. L'étudiant Jarry Valeur étudie son trajet du lendemain en transport en commun pour atteindre à l'heure l'examen de MOGPL. En raison des grèves, le fonctionnement sera probablement perturbé, certaines lignes peut-être fermées. Jarry Valeur souhaite alors déterminer un trajet de la station Porte d'Auteuil (proche de son appartement) à la station Jussieu (proche du campus Pierre et Marie Curie) qui **minimise le nombre de changements de lignes** (sans tenir compte du nombre de stations du trajet).

On notera n le nombre de stations du réseau, et T le nombre de lignes (on ne considère que des lignes fonctionnant dans les deux sens et qui sont des chaînes de station).

Question 1 (1/7) — On considère le réseau de la figure 1 ci-après. Les nombres indiquent les numéros des lignes de métro (attention certaines lignes ne correspondent plus aux lignes actuelles !).

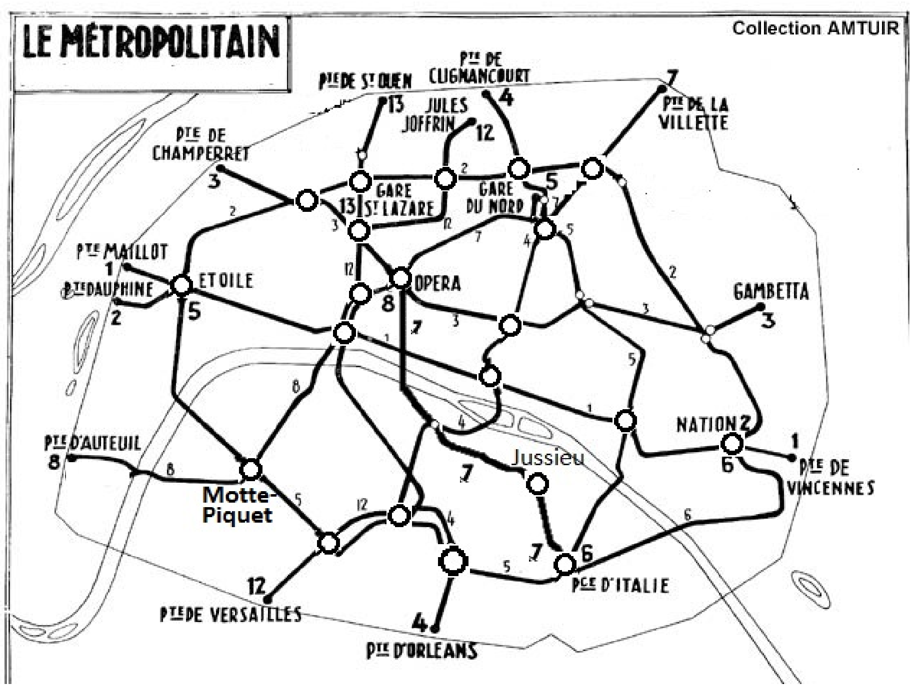


Figure 1 –

Le trajet consistant à prendre la ligne 8 de Porte d'Auteuil (à gauche du plan vers le bas) à Motte-Piquet, la ligne 5 de Motte-Piquet à Place d'Italie, et la ligne 7 de Place d'Italie à Jussieu, nécessite donc 2 changements. Donnez un trajet minimisant le nombre de changements (pas de justification demandée).

Question 2 (6/7) — On propose de résoudre ce problème par programmation dynamique. Pour cela, on définit pour toute station j, toute ligne ℓ et tout entier $k \in \{0, T-1\}$, $\lambda(j, \ell, k)$ qui vaut 1 s'il est possible d'atteindre (à partir de la station de départ s) la station j en faisant au plus k changements, de manière à ce que la dernière ligne de métro empruntée (celle pour arriver en j) soit la ligne ℓ. $\lambda(j, \ell, k)$ vaut 0 sinon.

Ainsi, dans l'exemple précédent, en partant de Porte d'Auteuil, $\lambda(Jussieu, 7, 2) = 1$ (grâce au trajet donné dans la question précédente) et $\lambda(Etoile, 2, 1) = 0$ (impossible d'atteindre Etoile depuis Porte d'Auteuil, avec au plus un changement, en terminant par la ligne 2 (cela serait possible en terminant par la ligne 5)).

1. (2 points) Comment calculer $\lambda(j, \ell, 0)$? Quelle est la complexité de ce calcul (pour l'effectuer pour tout j et tout ℓ) ?

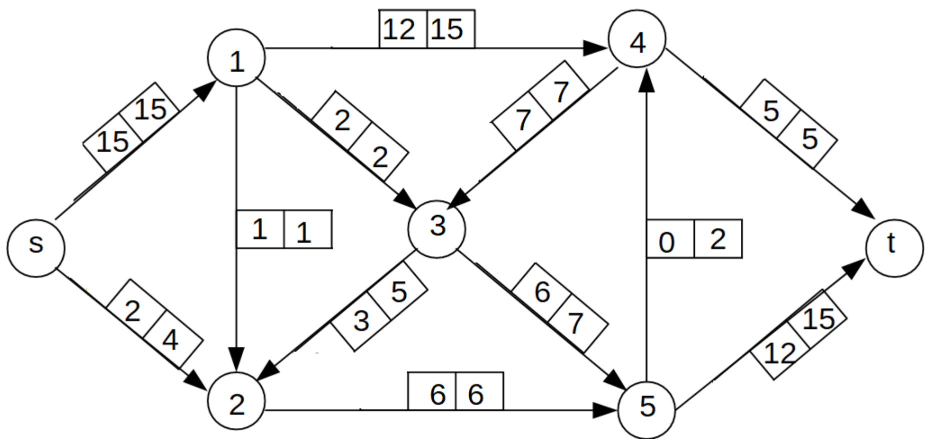
2. (2.5 points) Pour $k \geq 1$, expliquer comment calculer $\lambda(j, \ell, k)$ en fonction de valeurs $\lambda(j', \ell', k-1)$. Vous pourrez expliquer dans quel(s) cas $\lambda(j, \ell, k)$ vaut 1.

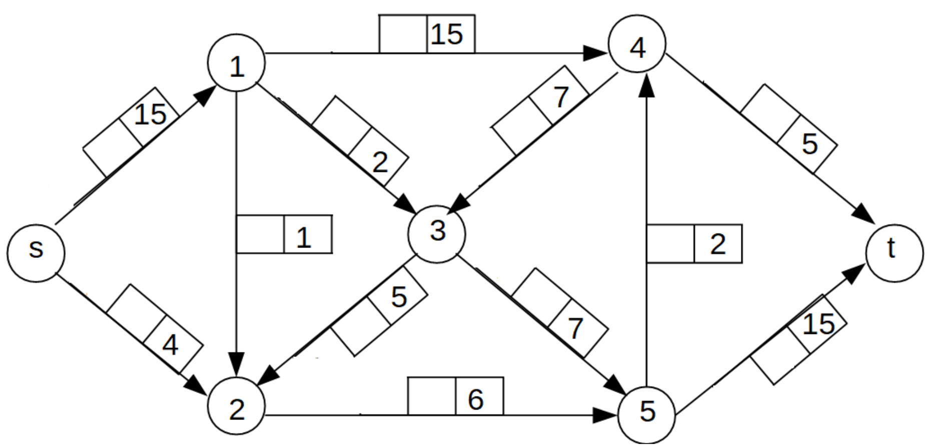
3. (0.5 point) Une fois calculées toutes les valeurs $\lambda(j, \ell, k)$, comment obtient-on le nombre de changements minimum ?

4. (1 point) Quelle est la complexité globale de la méthode ?

Exercice 2 (13 points)

Question 1 (3/13) — Appliquer l'algorithme de Ford et Fulkerson à partir du flot indiqué sur le réseau ci-dessous pour déterminer un flot maximum. Sur chaque arc, la première valeur correspond au flux (12 sur l'arc $(1,4)$ par exemple) et la deuxième à la capacité (15 sur l'arc $(1,4)$). Donner une coupe de capacité minimum.





Dans toute la suite de l'exercice, nous étudions la situation où chaque arc e possède deux valeurs : une capacité $c(e) \in \mathbb{N}$ et une **borne** $b(e) \in \mathbb{N}$ telles que $0 \leq b(e) \leq c(e)$. On considère qu'un flot ϕ dans ce réseau est admissible si sur chaque arc $b(e) \leq \phi_e \leq c(e)$ (et s'il respecte la loi de conservation du flux bien sûr). Par rapport au problème habituel, il y a donc une contrainte supplémentaire : sur chaque arc e, le flux doit être au moins égal à $b(e)$ (et toujours au plus égal à $c(e)$).

Question 2 (5/13) — On s'interroge dans cette question sur l'existence d'un flot admissible.

(a) (1 point) On considère l'exemple de la figure 2 ci-après, où sur chaque arc u sont notées $b(u)$ et $c(u)$ (sur $(2, 4)$, la borne est 3 et la capacité est 9).
Existe-t-il un flot admissible ? Pourquoi ?

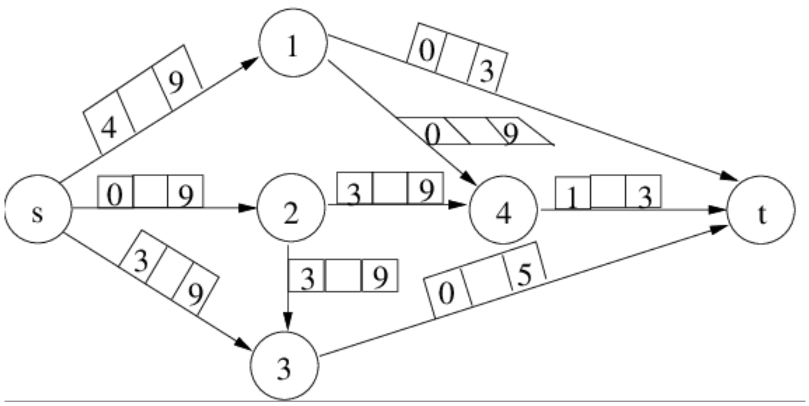


FIGURE 2 –

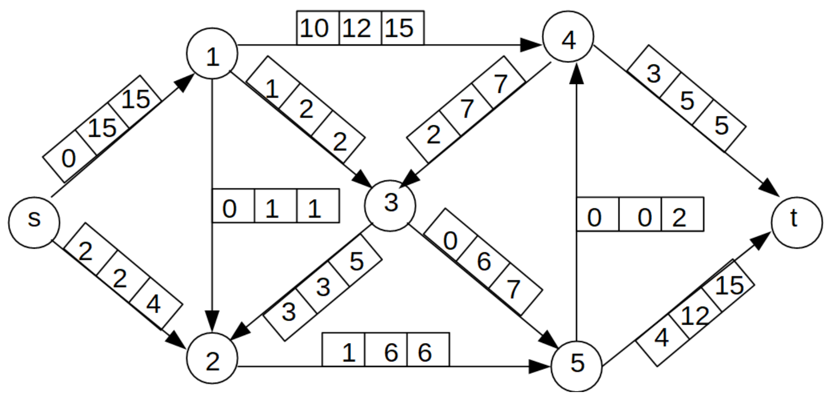
(b) (2 points) De manière générale, soit T un ensemble de sommets ne contenant ni s ni t.
Soit ϕ un flot admissible sur le réseau. En notant $\omega^+(T)$ l'ensemble des arcs sortant de T et $\omega^-(T)$ l'ensemble des arcs entrant en T, à quoi est égal $V(\phi) = \sum_{e \in \omega^+(T)} \phi_e - \sum_{e \in \omega^-(T)} \phi_e$?
(une justification rapide suffit)
En déduire que s'il existe un flot admissible, alors $\sum_{e \in \omega^+(T)} c(e) \geq \sum_{e \in \omega^-(T)} b(e)$.

(c) (2 points) Peut-on modifier une seule valeur (une borne ou une capacité) dans le réseau de la figure 2 de manière à ce qu'il existe un flot admissible ? Si oui, vous donnerez la modification et un flot admissible, si non vous expliquerez pourquoi.

Question 3 (5/13) — On considère dans cette question qu'il existe un flot admissible ϕ_0.

(a) (1.5 point) Définir une procédure de marquage permettant de savoir si l'on peut augmenter un flot admissible ϕ_0. Vous expliciterez simplement la manière de marquer les voisins (prédécesseurs/successeurs) d'un sommet (marqué) u. Une explication succincte suffit.

(b) (1 point) Appliquer la procédure de marquage sur le réseau suivant à partir du flot ϕ_0 indiqué (le flux sur chaque arc est indiqué en position médiane, par exemple sur $(1,4)$, la borne est 10, le flux est 12, et la capacité est 15).).



(c) (2.5 points) En vous servant d'un argument (précisément justifié) lié à une coupe, montrer que sur cette instance tout flot réalisable a une valeur inférieure ou égale à celle de ϕ_0.