L'intégration numérique

La méthode des trapèzes

Objectif

On désire calculer une approximation de

$$\int_a^b f(t)dt$$

par une formule du type

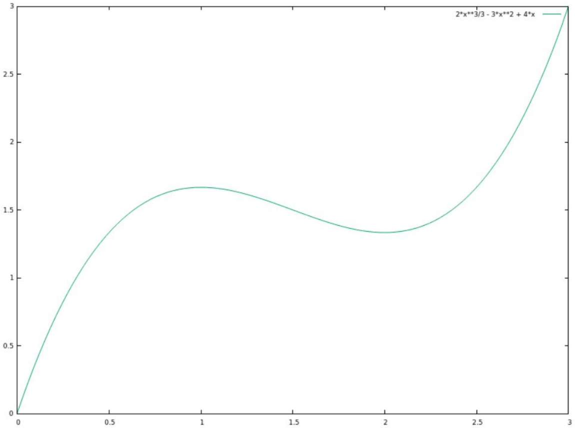
$$I_f = \sum_{i=1}^{n} y_i . f(x_i)$$

où les x_i sont n points de $[a, b]$ et y_i des coefficients réels.

Toutes les formules découpent $[a, b]$ en sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ et approchent f par des polynômes dans chaque sous-intervalle en calculant la valeur exacte de l'intégrale du polynôme sur chaque sous-intervalle.

Graphe de f(x)

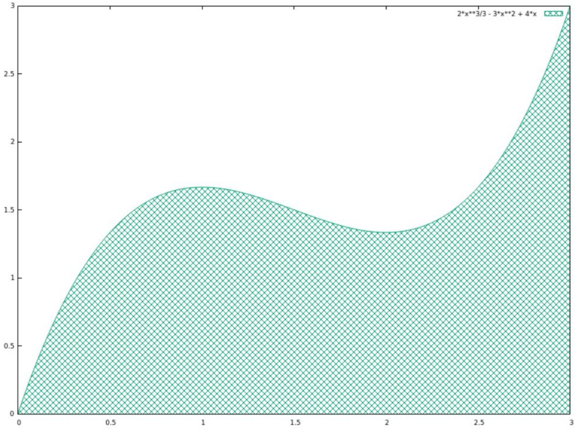
$$f(x) = \frac{2}{3}.x^3 - 3.x^2 + 4.x$$



L'aire sous la courbe

$f(x) = \frac{2}{3}.x^3 - 3.x^2 + 4.x$

$\int_a^b f(t)dt$ est l'aire sous la courbe.



La méthode des rectangles

On découpe l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ avec

$$x_i = a + i.\frac{b-a}{n} \text{ pour } i = 0, .., n$$

Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on approche $f(x)$ par le polynôme constant $f(x_i)$.

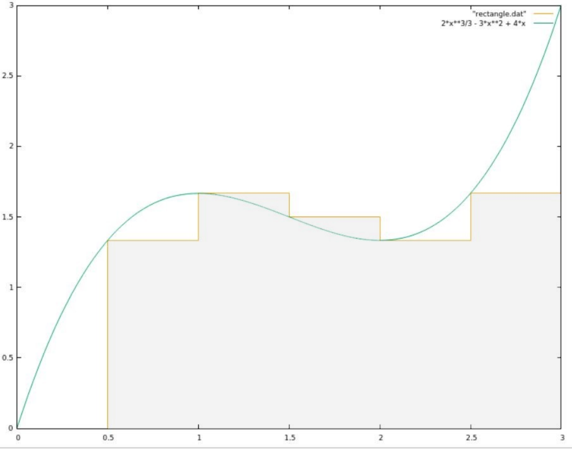
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)dx = f(x_i).(x_{i+1} - x_i) = f(x_i).\frac{b-a}{n}$$

d'où la formule des rectangles

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt \approx I_R(f) = \tfrac{b-a}{n}.\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\tfrac{b-a}{n}\right)}$$

Interprétation géométrique

$$f(x) = \frac{2}{3}.x^3 - 3.x^2 + 4.x$$



Calcul de l'erreur

Théorème :

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I_R(f)\right| \leq \frac{M_1.(b-a)^2}{2n}$$

où $M_1 = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$

La convergence est logarithmique en $\dfrac{1}{n}$

Démonstration

Si $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$f(x) - f(x_i) = (x - x_i).f'(c) \Rightarrow |f(x) - f(x_i)| \leq M_1.(x - x_i)$$

d'où

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)dx \right| \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)|\, dx$$

$$\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} M_1.(x - x_i)dx \leq \frac{M_1.(b-a)^2}{2.n^2}$$

d'où

$$\left| \int_a^b f(t)dt - I_R(f) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)|\, dx \leq \frac{M_1.(b-a)^2}{2n}$$

La méthode des trapèzes

On découpe l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ avec

$$x_i = a + i.\frac{b-a}{n} \text{ pour } i = 0, .., n$$

Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on approche $f(x)$ par le polynôme de degré 1

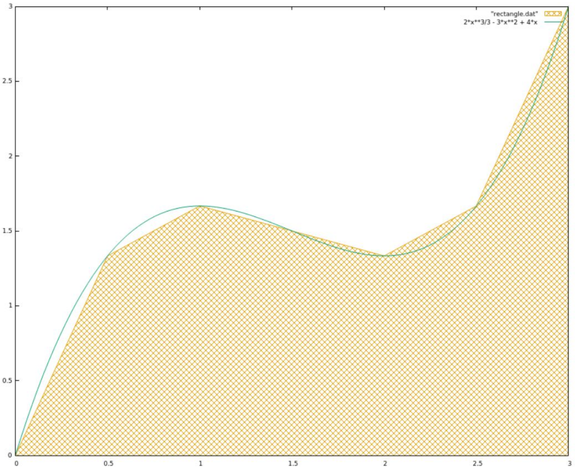
$$g_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1} - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.(x - x_i).$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(x)dx = f(x_i).(x_{i+1} - x_i) + \frac{f(x_{i+1} - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2}$$
$$= \frac{b-a}{2n}.(f(x_{i+1}) + f(x_i))$$

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt \approx I_T(f) = \frac{b-a}{2n}.\left(f(a) + 2.f(x_1) + ... + 2.f(x_{n-1}) + f(b)\right)}$$

Interprétation géométrique

$$f(x) = \frac{2}{3}.x^3 - 3.x^2 + 4.x$$



Calcul de l'erreur

Théorème :

$$\left| \int_a^b f(t)dt - I_T(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12.n^2}.M_2$$

où $M_2 = \sup_{x \in [a,b]} \left| f^{(2)}(x) \right|$

La convergence est logarithmique en $\dfrac{1}{n^2}$

$$I_R(f) = \frac{b-a}{n}.\left(f(a) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})\right)$$

pas si différent de

$$I_T(f) = \frac{b-a}{2n}.\left(f(a) + 2.f(x_1) + ... + 2.f(x_{n-1}) + f(b)\right)$$

Démonstration

Lemme : Si $g(x)$ est une fonction C^2 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(a) = g(b) = 0$ alors

$$\int_a^b g''(x).(x-a).(x-b)dx = 2.\int_a^b g(x)dx$$

$\int_a^b g''(x).(x-a).(x-b)dx = [g'(x).(x-a).(x-b)]_a^b - \int_a^b g'(x)(2.x-a-b)dx$

$= -[g(x).(2.x-a-b)]_a^b + \int_a^b 2.g(x)dx$

CQFD.

On l'applique à $f(x) - g_i(x)$ sur $[x_i, x_{i+1}] \Rightarrow$

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) - g_i(x)dx\right| = \left|\frac{1}{2}.\int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(x).(x-x_i).(x-x_{i+1})dx\right|$$

$$\leq \frac{M_2}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i).(x_{i+1}-x)dx = \frac{M_2}{2}\frac{(b-a)^3}{6.n^3}$$

CQFD.

Le code en C

$$I_T(f) = \frac{b-a}{2n}.(f(a) + 2.f(x_1) + ... + 2.f(x_{n-1}) + f(b))$$

```
double trapeze(double (*f)(double), double a,
               double b, long n)
{
  double aux1, x1, h;
  h = (b-a)/n;
  aux1 = 0;
  for(x1=a+h; x1 < b - h/2; x1 += h)
    aux1 += f(x1);
  return  (h/2)*(f(a)+ 2*aux1 + f(b)) ;
}
```

Fin

La méthode de Simpson

Méthode de Simpson - I

n **doit être pair**

On découpe l'intervalle $[a, b]$ en $n/2$ sous-intervalles $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ avec

$$x_i = a + i.\frac{b-a}{n} \text{ pour } i = 0, .., n$$

Sur l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, on approche $f(x)$ par le polynôme de degré 2 qui passe par les trois points $(x_{2i}, f(x_{2i}))$, $(x_{2i+1}, f(x_{2i+1}))$ et $(x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$.

Remarque : en posant $x = x_{2i} + \dfrac{b-a}{n}.(t+1)$

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \frac{b-a}{n} \int_{-1}^{1} f\left(x_{2i} + \frac{b-a}{n}.(t+1)\right) dt$$

On se ramène donc aux points $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$ et $(1, f(1))$.

Méthode de Simpson- II

Le poynôme de degré 2 qui passe par les points

$$(-1, f(-1)), (0, f(0)) \text{ et } (1, f(1))$$

est

$$\begin{aligned}
g(X) &= f(-1).\frac{X.(X-1)}{(-1).(-1-1)} + f(0).\frac{(X+1).(X-1)}{(0+1).(0-1)} + f(1).\frac{X.(X+1)}{1.(1+1)} \\
&= f(-1).\frac{X.(X-1)}{2} + f(0).(X+1).(X-1) + f(1).\frac{X.(X+1)}{2} \\
&= f(-1).L_{-1}(X) + f(0).L_0(X) + f(1).L_1(X)
\end{aligned}$$

Méthode de Simpson- III

$$\int_{-1}^{1} L_{-1}(x)dx \; = \int_{-1}^{1} L_{1}(x)dx \; = \frac{1}{3} \text{ et } \int_{-1}^{1} L_{0}(x)dx = \frac{4}{3}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} g(x)dx &= \tfrac{b-a}{n} \int_{-1}^{1} f\left(x_{2i} + \tfrac{b-a}{n}.(t+1)\right) dt \\ &= \tfrac{b-a}{3.n} \left(f(x_{2i}) + 4.f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{I_S(f) = \tfrac{b-a}{3n}.(f(x_0) + 4.f(x_1) + 2.f(x_2) + ... + 2.f(x_{n-2}) + 4.f(x_{n-1}) + f(x_n))}$$

Calcul de l'erreur

Théorème :

$$\left| \int_a^b f(t)dt - I_S(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{180.n^4}.M_4$$

où $M_4 = \sup_{x\in[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|$

Rectangles : vrai dans $\mathbb{R}_0[X]$ mais pas pour $P(X) = X - x_i$

Trapèzes : vrai pour $\mathbb{R}_1[X]$ mais pas pour $P(X) = (X - x_i)^2$

Simpson : $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{3.n} \left(f(x_{2i}) + 4.f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right)$
Vrai pour $\mathbb{R}_2[X]$ et ... aussi pour $P(X) = (X - x_{2i+1})^3$ parce que x_{2i+1} est le milieu de x_{2i} et x_{2i+2}

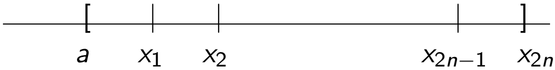
$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{3.n}\left(f(x_{2i}) + 4.f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right)$$

$$P(X) = (X - x_{2i+1})^3$$

Le code en C

$$I_S(f) = \frac{b-a}{3n}.(f(x_0) + 4.f(x_1) + 2.f(x_2) + ... + 2.f(x_{n-2}) + 4.f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

```
double simpson(double (*f)(double), double a, double b, long n)
{
  double aux1, aux2, x1, x2, h, h2;
  h = (b-a)/n;
  h2 = 2*h ;
  aux1 = f(a+h);
  aux2 = 0;
  for(x1 = a + 3*h , x2 = a + h2; x1 < b; x1+= h2 , x2 += h2)
    {
      aux1 += f(x1);
      aux2 += f(x2);
    }
  return (h/3)*(f(a)+ 4*aux1 + 2*aux2 + f(b)) ;
}
```



Fin

La méthode de Newton-Côtes

Les points de Gauss

Méthode de Newton-Côtes

Soit $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ et $P_f(X)$ le polynôme interpolateur de Lagrange de f sur les x_i :

$$P_f(X) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i).L_i(X)$$

avec

$$L_i(X) = \frac{\prod_{j=0,\neq i}^{n}(X - x_j)}{\prod_{j=0,\neq i}^{n}(x_i - x_j)}$$

alors

$$\int_a^b f(t)dt \approx I_{NC}(f) = \int_a^b P_f(t)(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i.f(x_i)$$

où les λ_i ne dépendent que des x_i.

Calcul de l'erreur

Théorème :

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I_{NC}(f)\right| \leq \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+2}}{(n+1)!}$$

où $M_{n+1} = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$

La formule de Newton-Côtes est exacte sur $\mathbb{R}_n(X)$.

Rappel :

$$f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Calcul des λ_i

On utilise le fait que la formule est exacte sur la base canonique de $\mathbb{R}_n(X)$ $\left(1, X, X^2, .., X^n\right)$ donc

$$\forall\ 1 \leq k \leq n, \int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i.(x_i)^k$$

ce qui conduit au système linéaire

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}_{V} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda} = \underbrace{\begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}}_{B}$$

V est une matrice de Vandermonde.

Les polynômes de Gauss-Legendre

Soit $\int_{-1}^{1} f(t)dt$.

$\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

donc il existe une base L_n orthonormée pour ce produit scalaire telle que $d(L_n) = n$ et L_n unitaire (commence par X^n) : les polynômes de Gauss-Legendre

$$L_n = \frac{(n!)}{(2n)!}\left[\left(X^2 - 1\right)^n\right]^{(n)}$$

Théorème : $\forall n$, L_n n'a que des racines simples.

La formule de Gauss-Legendre

Théorème :
Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ les n racines simples du polynôme de Legendre L_n.
Soit $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ les coefficients correspondants au (x_i) pour la formule de Newton-Côtes.
Alors $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \omega_i . P(x_i)$$

Donc en utilisant le changement de variable $t = a + \frac{b-a}{2}.(u+1)$

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{2} . \sum_{i=1}^{n} \omega_i . f\left(a + \frac{b-a}{2}.(x_i+1)\right)$$

Démonstration

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Effetuons la division euclidienne de P par L_n.

$$P = Q.L_n + R \text{ avec } d(Q) < n \text{ et } d(R) < n$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_{-1}^{1} (QL_n + R)(x)dx = \int_{-1}^{1} R(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \omega_i.R(x_i)$$

Or $\forall\ 1 \leq i \leq n, P(x_i) = (QL_n + R)(x_i) = R(x_i)$ donc

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \omega_i.P(x_i)$$

CQFD.

Un exemple numérique

On veut approcher

$$\int_{0,5}^{3} 20.\log(20.x).(1,7.x^2 - 4,3.x + 2,2)dx = 156,24271785$$

Méthode des Trapèzes à 7 points :
$I_T = 165,17621570; err = 8.93$

Méthode de Simpson à 7 points :
$I_S = 156,11497162; err = 1.27e - 01$

Formule de Gauss-Legendre à 6 points :
$I_{GL} = 156,243158399; err = 4.41e - 04$