Examen du module LU2IN003
Vendredi 20 mai 2022

1 Exercice sur les arbres (10 points)

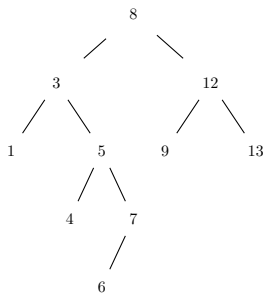
Dans tout cet exercice, les arbres binaires sont étiquetés dans $\mathbb{N}$.

Questions de cours

1. 1. Rappeler la définition inductive de l'ensemble ABR des arbres binaires de recherche.
   2. Dessiner l'arbre binaire de recherche T_0 obtenu à partir de l'arbre vide par insertions successives des clefs $8, 3, 1, 5, 4, 7, 6, 12, 9, 13$ (on rappelle que l'insertion se fait aux feuilles).
   Donner la hauteur de T_0, la taille de T_0 (c'est-à-dire son nombre de nœuds) et le parcours infixe de T_0.

Solution:

1. Voir cours.
2. Arbre T_0 :

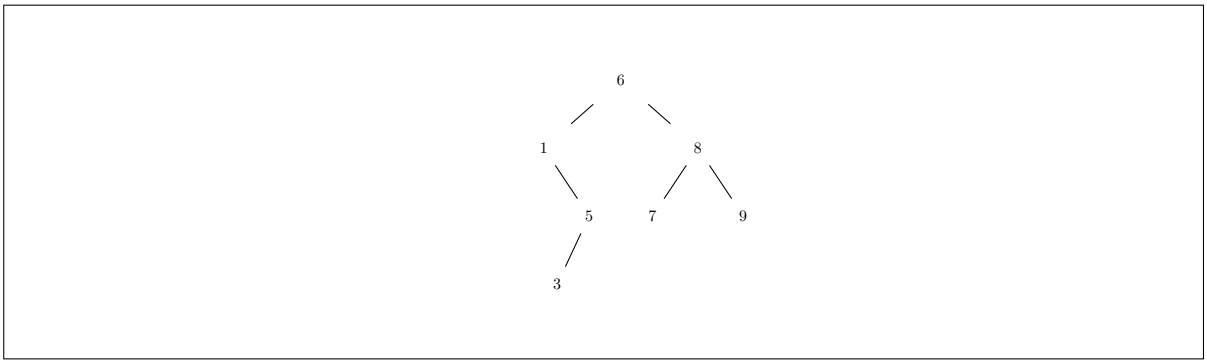


Hauteur : 5. Taille : 10. Parcours infixe : $[1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13]$.

2. 1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une liste d'entiers naturels soit le parcours infixe d'un ABR (on ne demande pas de justification).
   2. Dessiner l'arbre binaire de recherche T_1 dont le parcours préfixe est $[6, 1, 5, 3, 8, 7, 9]$.

Solution:

1. Voir cours.
2. Arbre T_1 :



Arbres binaires de recherche dénombrés

Un arbre binaire de recherche *dénombré* est un arbre binaire de recherche dont chaque nœud x contient une information supplémentaire : la taille du fils gauche de x.
Voici une définition inductive de l'ensemble $ABRT$ des arbres binaires de recherche dénombrés. $T \in ABRT$ si :

Base $T = \emptyset$;

Induction $T = (x, t, G, D)$ où :
- $x \in \mathbb{N}$, $G \in ABRT$, $D \in ABRT$, t est égal à la taille de G ;
- toutes les clefs de G sont inférieures strictement à x ;
- toutes les clefs de D sont supérieures strictement à x.

Pour manipuler les arbres binaires de recherche dénombrés dans les questions suivantes, nous utilisons les primitives :
- `estABTvide(T)` teste si l'arbre T est vide ;
- si T est non vide :
  - `T.clef` désigne l'étiquette (ou clef) de T,
  - `T.ng` désigne la taille du sous-arbre gauche de T,
  - `T.gauche` désigne le sous-arbre gauche de T,
  - `T.droit` désigne le sous-arbre droit de T.

On considère l'arbre binaire de recherche dénombré `Tex` représenté par la figure 1.

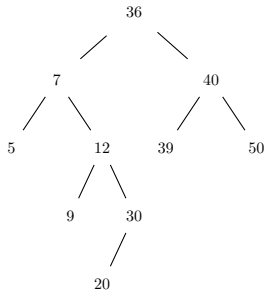


FIGURE 1 – L'arbre binaire dénombré `Tex`. Les nœuds sont étiquetés uniquement par leur clef sur cette figure.

3. Donner les valeurs de `Tex.ng`, `Tex.gauche.ng`, `Tex.droit.gauche.ng`

Solution: `Tex.ng` vaut 6, `Tex.gauche.ng` vaut 1, `Tex.droit.gauche.ng` vaut 0.

On définit une fonction `taille` sur les arbres binaires dénombrés :

```
def taille(T):
  if estABRTvide(T):
    res = 0
  else:
    print("appel␣sur␣T␣de␣racine␣", T.clef)
    res = 1 + T.ng + taille(T.droit)
    print("taille␣de␣T␣de␣racine␣", T.clef, "␣:␣", res)
  return res
```

4. Exécuter l'appel de `taille(Tex)`, en donnant les affichages successifs et le résultat final.

Solution:

```
appel sur T de racine  36
appel sur T de racine  40
appel sur T de racine  50
taille de T de racine  50  :  1
taille de T de racine  40  :  3
taille de T de racine  36  :  10
```

La valeur retournée est 10.

5. Montrer, par induction structurelle sur ABRT, que pour tout arbre binaire de recherche dénombré T, `taille(T)` se termine et retourne le nombre de nœuds de T.

Solution:

Base Si $T = \emptyset$ alors il n'y a pas d'appel récursif, `taille(T)` se termine et retourne 0, qui est bien le nombre de nœuds de T.

Induction Soit $T = (x, t, G, D)$ un arbre binaire de recherche dénombré. Par hypothèse d'induction, G et D sont deux arbres binaires de recherche dénombrés tels que la propriété soit vérifiée. `taille(T)` fait un appel à `taille(T.droit)`, qui se termine donc `taille(T)` se termine. `taille(T)` retourne `1 + T.ng + taille(T.droit)`, où `T.ng` est égal au nombre de nœuds de G (par définition de `T.ng`) et `taille(T.droit)` est égal au nombre de nœuds de D (par hypothèse d'induction). Donc `taille(T)` retourne le nombre de nœuds de T.

Conclusion Pour tout arbre binaire de recherche dénombré T, `taille(T)` se termine et retourne le nombre de nœuds de T.

6. Pour un arbre binaire de recherche dénombré T de taille n et de hauteur h, calculer la complexité comptée en nombre d'additions effectuées par `taille(T)` dans le meilleur cas et dans le pire cas. Justifier vos réponses.

Solution: Dans le meilleur cas, le sous-arbre droit de T est vide et `taille(T)` effectue 2 additions. Donc la complexité meilleur cas est en $\Omega(1)$.

Dans le pire cas, pour une hauteur h fixée, la branche droite de T contient h sommets et `taille(T)` effectue $2h$ additions. Donc complexité pire cas en $\mathcal{O}(h)$.

Remarque : le "pire du pire" pour un arbre de taille n est le cas où l'arbre est filiforme ; dans ce cas, `taille(T)` effectue $2n$ additions.

7. On considère dans cette question que T est un arbre binaire de recherche dénombré H-équilibré de taille n.
   1. En étudiant le meilleur des cas, démontrer que la complexité de `taille(T)` est en $\Omega(\log(n))$.
      Indication : en appelant $c(h)$ la complexité meilleur cas de `taille(T)` pour T de hauteur h, donner une relation de récurrence permettant de calculer $c(h)$. Résoudre alors la suite.
   2. En déduire que, pour T arbre binaire de recherche dénombré H-équilibré de taille n, la complexité de `taille(T)` est en $\Theta(\log(n))$. Justifier votre réponse.

Solution:

1. Si T est H-équilibré de hauteur h alors le sous-arbre droit de T a une hauteur supérieure ou égale à $h-2$. Dans le meilleur cas, elle vaut $h-2$. Donc $c(h) = c(h-2)+2$ si $h \geq 2$, $c(0) = 0$, $c(1) = 2$. Par conséquent, $c(h) = h$ si h est pair et $c(h) = h+1$ si h est impair. Puisque T est H-équilibré, h est en $\Theta(\log(n)$, donc la complexité de `taille(T)` est en $\Omega(\log(n))$.
2. Dans le pire des cas, on obtient du $\mathcal{O}(h)$ ($2h$ additions), soit du $\mathcal{O}(\log(n))$ si T est H-équilibré On en conclut que, pour T arbre binaire de recherche dénombré H-équilibré de taille n, la complexité de `taille(T)` est en $\Theta(\log(n))$.

Recherche du k-ème plus petit élément

Le *k-ème plus petit élément* d'un ensemble E de n entiers tous différents, avec $n \geq k \geq 1$, est l'élément x de E tel qu'il y a exactement $k-1$ éléments de E strictement inférieurs à x.

Par exemple, le 3-ème plus petit élément de $\{8, 5, 3, 4, 1, 6, 7\}$ est 4.

8. Dans cette question l'ensemble E est représenté par une liste non triée L. Voici une méthode permettant de déterminer le k-ème plus petit élément de L :
   (1) trier la liste L en ordre croissant ;
   (2) accéder au k-ème élément de la liste triée.
   1. Quelle est la complexité minimale de cette méthode pour une liste représentée par un tableau ? Justifiez votre réponse et précisez un algorithme de tri dont la complexité est égale à cette complexité minimale.
   2. Même question que précédemment si la liste est représentée par une liste doublement chaînée circulaire.

Solution:

1. La complexité minimale pour trier n entiers est $\mathcal{O}(n \log n)$. On peut utiliser le tri fusion, ou le tri par tas pour un tableau. La phase (2) est en $\Theta(1)$ grâce à l'accès direct. Donc, la complexité minimale de cette méthode est en $\mathcal{O}(n \log n)$.
2. On peut trier une liste doublement chaînée circulaire en $\mathcal{O}(n \log n)$ par le tri fusion. La phase (2) est en $\Theta(k)$ car il n'y a pas d'accès direct. Comme $k \leq n$, la complexité minimale de cette méthode est en $\mathcal{O}(n \log n)$.

Dans la suite de l'exercice, l'ensemble E est représenté par un arbre binaire de recherche dénombré.

On définit une fonction `ABRT_k_eme(T, k)` sur les arbres binaires de recherche dénombrés :

```
def ABRT_k_eme(T, k):
    """hypothese : k <= taille(T)"""
    print("appel avec k = ", k, "sur T de racine ", T.clef)

    if k == (T.ng + 1) :
```

```
        res = T.clef
    elif k <= T.ng:
        res = ABRT_k_eme(T.gauche, k)
    else:
        res = ABRT_k_eme(T.droit, k - (T.ng + 1))
    print("retour pour T de racine ", T.clef ,": ", res)
    return res
```

9. Exécuter l'appel de `ABRD_k_eme(Tex,6)`, en donnant les affichages successifs et le résultat final.

Solution:

```
appel avec k =  6 sur  T de racine  36
appel avec k =  6 sur  T de racine  7
appel avec k =  4 sur  T de racine  12
appel avec k =  2 sur  T de racine  30
retour pour  T de racine  30 :  30
retour pour  T de racine  12 :  30
retour pour  T de racine  7 :  30
retour pour  T de racine  36 :  30
```

La valeur retournée est 30.

10. Montrer par induction structurelle sur l'ensemble ABRT que, pour tout arbre binaire de recherche dénombré T et pour tout k tel que $0 < k \leq taille(T)$, `ABRD_k_eme(T, k)` se termine et calcule la k-ème plus petite clef de T.
Vous veillerez à énoncer clairement la propriété $\mathcal{P}(T)$, pour $T \in ABRT$ à démontrer.

Solution: On démontre la propriété $\mathcal{P}(T)$: « pour tout $k \in \{1, \ldots, taille(T)\}$, l'appel `ABRD_k_eme(T, k)` se termine et calcule la k-ème plus petite clef de T. »

Base Si $T = \emptyset$ alors il n'y a aucun k tel que $0 < k \leq taille(T)$ et $\mathcal{P}(\emptyset)$ est vraie.

Induction Soit $T = (x, t, G, D) \in ABRT$ tel que $\mathcal{P}(D)$ et $\mathcal{P}(G)$ sont vérifiées. Soit également $k \in \{1, \ldots, taille(T)\}$. On considère l'appel `ABRD_k_eme(T, k)`. On rappelle que $t = T.ng$. Trois cas sont possibles.

- $k = t + 1$: il n'y a pas d'appel récursif donc `ABRD_k_eme(T, k)` se termine ; dans ce cas, il y a exactement $t = k - 1$ clefs de T qui sont inférieures à x, x est donc la k-ème plus petite clef de T et c'est la valeur calculée par la fonction.
- $k \leq t$: il y a un appel à `ABRD_k_eme(G, k)`, qui se termine donc `ABRD_k_eme(T, k)` se termine ; dans ce cas, la k-ème plus petite clef de T est dans le sous-arbre gauche G de T et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, la fonction calcule la k-ème plus petite clef de G, qui est aussi la k-ème plus petite clef de T.
- $k > t+1$: il y a un appel à `ABRD_k_eme(D, k - (t+1))`, qui se termine donc `ABRD_k_eme(T, k)` se termine ; dans ce cas la k-ème plus petite clef de T est dans le sous-arbre droit D de T et c'est la $k-(t+1)$-ème plus petite clef de D ; par hypothèse de récurrence, l'appel à `ABRD_k_eme(D,k-(t+1))` calcule la $k-(t+1)$-ème plus petite clef de D, qui est aussi la k-ème plus petite clef de T.

Conclusion La propriété est vraie pour tout arbre binaire de recherche dénombré T et pour tout entier k tel que $0 < k \leq taille(T)$.

11. 1. Quelle est la complexité, comptée en nombre de comparaisons entre clefs, de la recherche de la k-ème plus petite clef dans un arbre de recherche dénombré de taille n dans le meilleur cas ? Dans le pire cas ?

2. Mêmes questions pour un arbre de recherche dénombré H-équilibré.

Solution:

1. Dans le meilleur cas, la k-ème plus petite clef est à la racine et la complexité est en $\Omega(1)$. Dans le pire cas l'arbre est filiforme et la complexité est en $O(n)$.
2. Dans le meilleur cas, la k-ème plus petite clef est à la racine et la complexité est en $\Omega(1)$. Dans le pire cas, la k-ème plus petite clef est dans une des feuilles les plus profondes. La hauteur d'un arbre H-équilibré est en $O(\log n)$. La complexité dans le pire cas est donc en $O(\log n)$.

2 Exercice sur les graphes (7.5 points)

Dans cet exercice, $G = (V, E)$ désigne un graphe non orienté. On rappelle que les graphes considérés sont sans boucle ni arête multiple.

1. On considère **uniquement** dans cette question le graphe non orienté $G_1 = (V_1, E_1)$ avec $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et les arêtes $E_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$.
   1. Donner la représentation de G_1 sous la forme d'une matrice sommet-sommet ;
   2. Donner, pour tous les sommets $u \in V_1$, le degré $d(u)$ de u pour le graphe G_1 ;
   3. Dans le cas d'un graphe $G = (V, E)$ non orienté quelconque, quelle est la complexité du calcul de $d(u)$ pour tout sommet u dans le pire et le meilleur des cas pour une représentation par une matrice sommet-sommet ? Justifier votre réponse.

Solution:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2.

$u \in V_1$	1	2	3	4	5
$d(u)$	3	2	2	2	3

3. L'algorithme pour calculer $d(u)$ compte le nombre de 1 présents dans la u-ème ligne de la matrice sommet-sommet. Il y a un nombre d'opérations proportionnel au nombre de sommets dans tous les cas. La complexité est donc en $\Theta(n)$ où n est le nombre de sommets de G.

2. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Démontrer que $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$.

Solution: On prouve par récurrence faible sur le nombre d'arêtes $m \in \mathbb{N}$ la propriété $P(m)$: «si un graphe G a m arêtes, alors la somme des degrés de ses sommets est égale à $2m$.»

Base $m = 0$. Le graphe n'a pas d'arête et tous ses sommets ont donc un degré 0. La somme des degrés de ses sommets est donc égale à $0 = 2m$.

Induction Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $P(m)$ soit vérifiée. Soit $G = (V, E)$ un graphe à $m + 1$ arêtes et soit $\{u, v\} \in E$. Soit H le graphe obtenu en supprimant l'arête e de G.
Comme le graphe H a m arêtes, la somme des degrés de ses sommets est égale à $2m$ par $P(m)$. On remarque qu'enlever l'arête $\{u, v\}$ du graphe G fait baisser de 1 les degrés des sommets u et v et ne change pas le degré des autres sommets. Ainsi, la somme des degrés des sommets de G est $2m + 2$, ce qui prouve $P(m + 1)$.

Conclusion La propriété $P(m)$ pour $m \geq 0$ est donc vérifiée par récurrence faible.

3. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté minimal connexe avec $|V| \geq 1$. Démontrer par récurrence sur le nombre de sommets $n = |V|$ du graphe G que $|E| = |V| - 1$.

Solution: On prouve par récurrence forte sur $n \geqslant 1$ la propriété $P(n)$: «si un graphe G minimal connexe a n sommets, alors il a $n-1$ arêtes.»

Base $n = 1$. Un graphe à 1 sommet forcément n'a pas d'arête (on suppose que les graphes sont sans boucle).

Induction Soit $n > 1$ tel que $P(i)$ est vraie pour tout $1 \leqslant i < n$. On veut prouver $P(n)$.

Soit $G = (V, E)$ un graphe minimal connexe à n sommets et soit e une arête de G. Comme G est minimal connexe, le graphe $H = (V, E - \{e\})$ obtenu en enlevant l'arête e n'est pas connexe. Soient C_1 et C_2 les composantes connexes de H et soit n_1 et n_2 leur nombre de sommets respectifs. On a donc $n_1 + n_2 = n$.

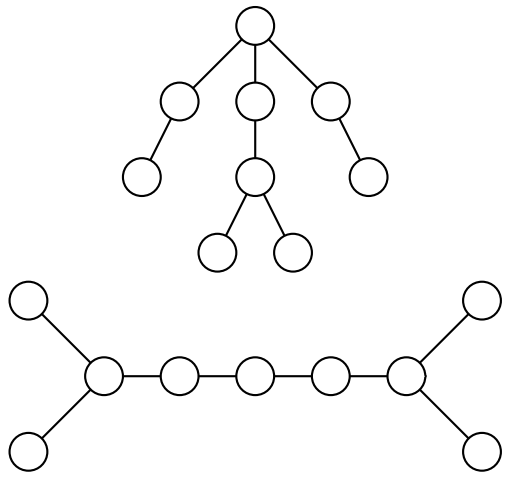
C_1 et C_2 sont connexes ; de plus, comme G est minimal connexe, C_1 et C_2 le sont aussi. Par hypothèse de récurrence appliquée à C_1 et C_2, elles ont donc respectivement $n_1 - 1$ et $n_2 - 1$ arêtes.

Comme G contient les arêtes de C_1, de C_2 et e, on trouve donc que G a $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n - 1$ arêtes, ce qui prouve $P(n)$.

Conclusion La propriété $P(n)$ est donc vérifiée pour $n \geq 1$.

4. Dessiner deux arbres différents qui ont chacun 2 sommets de degré 3, 3 sommets de degré 2, et où tous les autres sommets sont des feuilles (c'est à dire des sommets de degré 1). Pour chacun des arbres, indiquer leur nombre de feuilles.

Solution: Par exemple :



Il y a d'autres solutions, mais elles ont toutes exactement 4 feuilles.

5. Soit $T = (V, E)$ un **arbre**. Soient a son nombre de sommets de degré 3, b son nombre de sommets de degré 2 et c son nombre de feuilles. On suppose que T n'a aucun sommet de degré 4 ou plus.
   1. Exprimer en fonction de a, b et c le nombre de sommets de T ;
   2. Exprimer en fonction de a, b et c la somme des degrés des sommets de T ;
   3. Exprimer c en fonction de a et de b.

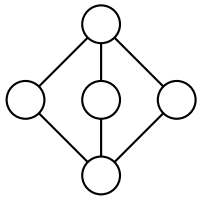
Solution:

1. $|V| = a + b + c$
2. $\sum_{v \in V} d(v) = 3a + 2b + c$.
3. Comme la somme des degrés des sommets d'un graphe vaut $2|E|$ et que dans un arbre, $|E| = |V| - 1$, on trouve $3a + 2b + c = 2a + 2b + 2c - 2$, d'où $c = a + 2$.

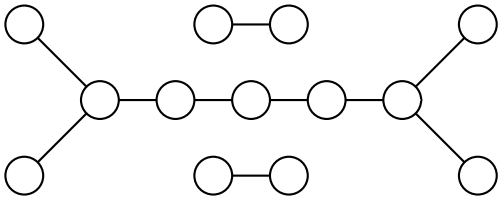
6. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté qui a 2 sommets de degré 3, 3 sommets de degré 2 et aucun sommet de degré 4 ou plus.
   1. Si G est un arbre, calculer son nombre de feuilles c ;
   2. Donner un exemple où G n'est pas un arbre et a strictement moins de c sommets de degré 1 ;
   3. Donner un exemple où G n'est pas un arbre et a strictement plus de c sommets de degré 1.

Solution:

1. On utilise le résultat de la question précédente avec $a = 2$ et $b = 3$, on trouve $c = 4$.
2. Pour avoir moins de feuilles qu'un arbre, il faut que le graphe ne soit pas acyclique. Par exemple, le graphe ci-dessous n'en a pas :



3. Pour avoir plus de feuilles qu'un arbre, il faut que le graphe ne soit pas connexe. Par exemple, le graphe ci-dessous en a 8 :



3 QCM de cours (4 points)

Un seul choix est possible. Une bonne réponse = 0.5 points. Une mauvaise réponse = -0.25 points.

1. (½ point) Dans les deux questions suivantes, on considère la fonction de tri définie comme suit :

```
def triMystere(tab):
    n = len(tab)
    for i in range(n):
        for j in range(0, n-i-1):
            if tab[j] > tab[j+1] :
                tab[j], tab[j+1] = tab[j+1], tab[j]
```

   La dernière ligne échange `tab[j]` et `tab[j+1]`. Quel est l'invariant de boucle $\mathcal{I}(j)$ de la boucle interne de `triMystere` placé juste après cet échange ?

   - ◯ `tab[0..j+1]` est constitué des $j+2$ plus petits éléments du tableau initial et est trié en ordre croissant ;
   - ◯ `tab[j..n-1]` contient les $n-j$ plus grands éléments du tableau initial et est trié en ordre croissant ;
   - ◯ `tab[j+1..n-1]` contient les $n-j-1$ les plus grands éléments du tableau initial et est trié en ordre croissant ;
   - √ **Aucun des choix précédents.**

2. (½ point) Une seule des affirmations est vérifiée, laquelle ?
   - ◯ La fonction `triMystere(tab)` est un tri par sélection et sa complexité est $\Theta(n^2)$;
   - ◯ La fonction `triMystere(tab)` est un tri par sélection et sa complexité est $\mathcal{O}(n \log n)$;
   - √ **La fonction `triMystere(tab)` est un tri à Bulles et sa complexité est $\Theta(n^2)$;**
   - ◯ La fonction `triMystere(tab)` est un tri à Bulles et sa complexité est $\mathcal{O}(n \log n)$;
   - ◯ Aucun des choix précédents.

3. (½ point) Quel est le tas obtenu par insertions successives des clefs 8, 3, 5, 4, 1, 2.
   - ◯ $[\mathbf{6}, 1, 2, 3, 8, 4, 5]$;
   - √ $[\mathbf{6}, 1, 3, 2, 8, 4, 5]$ **;**
   - ◯ $[\mathbf{6}, 1, 3, 2, 5, 4, 8]$;
   - ◯ Aucun des choix précédents.

4. (½ point) On considère le tas $[\mathbf{9}, 1, 2, 5, 3, 8, 6, 8, 7, 10]$. Quel est le tas obtenu après suppression du minimum ?
   - ◯ $[\mathbf{8}, 2, 5, 3, 8, 7, 6, 8, 10]$;
   - √ $[\mathbf{8}, 2, 3, 5, 7, 8, 6, 8, 10]$ **;**
   - ◯ $[\mathbf{8}, 2, 3, 5, 7, 6, 8, 8, 10]$;
   - ◯ Aucun des choix précédents.

5. (½ point) On considère le graphe non orienté $G_1 = (V_1, E_1)$ représenté par la figure 2.

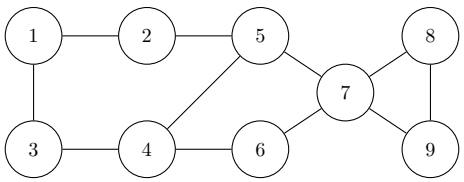


FIGURE 2 – Un graphe non orienté $G_1 = (V_1, E_1)$.

   Une seule affirmation est correcte, laquelle ?

- √ $L = (5, 7, 4, 6, 2, 3, 8, 9, 1)$ **est un parcours générique de** G_1 **;**
- ◯ $L = (7, 5, 4, 1, 2, 3, 6, 8, 9)$ est un parcours générique de G_1 ;
- ◯ $L = (9, 7, 5, 4, 3, 1, 2, 6, 8)$ n'est pas un parcours générique de G_1.
- ◯ Aucun des choix précédents.

6. (½ point) On considère le graphe non orienté G_1 représenté par la figure 2. Une seule des affirmations est vérifiée, laquelle ?
   - ◯ Le parcours en largeur $L = (5, 2, 4, 6, 7, 1, 3, 8, 9)$ de G_1 a pour graphe de liaison en largeur $\mathcal{A} = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{(5, 2), (5, 4), (5, 7), (2, 3), (2, 1), (4, 6), (7, 8), (7, 9)\})$;
   - √ **Le parcours en largeur** $L = (5, 2, 4, 7, 1, 3, 6, 8, 9)$ **de** G_1 **a pour graphe de liaison en largeur** $\mathcal{A} = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{(5, 2), (5, 4), (5, 7), (2, 1), (4, 3), (4, 6), (7, 8), (7, 9)\})$ **;**
   - ◯ Le parcours en largeur $L = (7, 8, 9, 5, 6, 2, 4, 3, 1)$ de G_1a pour graphe de liaison en largeur $\mathcal{A} = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{(7, 8), (7, 5), (7, 6), (8, 9), (5, 2), (5, 4), (2, 3), (3, 1)\})$;
   - ◯ Aucun des choix précédents.

7. (½ point) On considère le graphe orienté $G_2 = (V_2, A_2)$ représenté par la figure 3. Que valent les

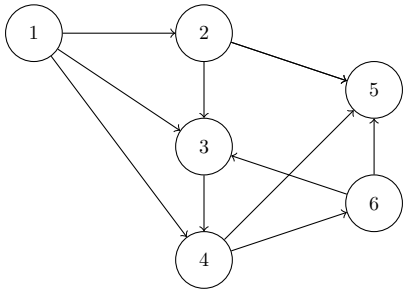


FIGURE 3 – Le graphe orienté $G_2 = (V_2, A_2)$

intervalles $[pre[u], post[u]]$, $u \in V_2$ pour le parcours en profondeur $L = (1, 4, 5, 6, 3, 2)$?

- ◯

$u \in V_2$	1	2	3	4	5	6
$[pre[u], post[u]]$	[1,12]	[8,11]	[9,10]	[2,5]	[3,4]	[6,7]

- √

$u \in V_2$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$[pre[u], post[u]]$	**[1,12]**	**[10,11]**	**[6,7]**	**[2,9]**	**[3,4]**	**[5,8]**

- ◯

$u \in V_2$	1	2	3	4	5	6
$[pre[u], post[u]]$	[1,10]	[11,12]	[7,8]	[2,5]	[3,4]	[6,9]

8. (½ point) On considère le parcours en profondeur $L = (1, 4, 5, 6, 3, 2)$ du graphe orienté $G_2 = (V_2, A_2)$ représenté par la figure 3. Une seule affirmation est correcte, laquelle ?
   - ◯ $(6, 5)$ et $(2, 5)$ sont des arcs transverses, et $(3, 4)$ est un arc avant ;
   - ◯ $(3, 4)$ est un arc arrière, $(2, 5)$ est un arc transverse et $(2, 3)$ est un arc de liaison ;
   - √ $(3, 4)$ **est un arc arrière,** $(1, 3)$ **est un arc avant et** $(2, 5)$ **est un arc transverse ;**
   - ◯ Aucun des choix précédents.