

25 LOIS DE DE MORGAN 3/4

Quantificateurs

quel que soit le prédicat F ,

$$((\forall x, F(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists x, \neg(F(x))))$$

Montrons ($\forall x, F(x)$) $\Leftrightarrow \neg(\exists x, \neg(F(x)))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $\forall x, F(x)$ (h1)

Montrons $\neg(\exists x, \neg(F(x)))$ (2)

($\neg I$)

Supposons que $\exists x, \neg(F(x))$ (h2)

Montrons \perp (3)

($\exists E$)

Montrons $\exists x, \neg(F(x))$ (4)

d'après (h2)

Soit l'élément a

Supposons que $\neg(F(a))$ (h3)

Montrons \perp (5)

($\neg E$)

Montrons $F(a)$ (6)

($\forall E$)

Montrons $\forall x, F(x)$ (7)

d'après (h1)

Montrons $\neg(F(a))$ (8)

d'après (h3)

Supposons que $\neg(\exists x, \neg(F(x)))$ (h4)

Montrons $\forall x, F(x)$ (9)

($\forall I$)

Soit l'élément a

Montrons $F(a)$ (10)

(A)

Supposons que $\neg(F(a))$ (h5)

Montrons \perp (11)

($\neg E$)

Montrons $\exists x, \neg(F(x))$ (12)

($\exists I$)

Montrons $\neg(F(a))$ (13)

 *d'après* (h5)
Montrons $\neg(\exists x, \neg(F(x)))$ (14)
d'après (h4)