

## EXERCICE 13

### Logique - Quantificateurs

*quels que soient* les prédictats  $F$   $G$ ,  
*quelle que soit* la constante  $a$ ,

$$(((\exists x, F(x)) \Rightarrow G(a)) \Leftrightarrow \forall x, (F(x) \Rightarrow G(a)))$$

---

*Soit* la constante  $a$

Montrons  $( (\exists x, F(x)) \Rightarrow G(a) ) \Leftrightarrow \forall x, (F(x) \Rightarrow G(a))$  (1)

( $\Leftrightarrow I$ )

Supposons que  $(\exists x, F(x)) \Rightarrow G(a)$  (h1)

Montrons  $\forall x, F(x) \Rightarrow G(a)$  (2)

( $\forall I$ )

*Soit* l'élément  $x$

Montrons  $F(x) \Rightarrow G(a)$  (3)

( $\Rightarrow I$ )

Supposons que  $F(x)$  (h2)

Montrons  $G(a)$  (4)

( $\Rightarrow E$ )

Montrons  $\exists x, F(x)$  (5)

( $\exists I$ )

Montrons  $F(x)$  (6)

d'après (h2)

Montrons  $(\exists x, F(x)) \Rightarrow G(a)$  (7)

d'après (h1)

Supposons que  $\forall x, F(x) \Rightarrow G(a)$  (h3)

Montrons  $(\exists x, F(x)) \Rightarrow G(a)$  (8)

( $\Rightarrow I$ )

Supposons que  $\exists x, F(x)$  (h4)

Montrons  $G(a)$  (9)

( $\exists E$ )

Montrons  $\exists x, F(x)$  (10)

d'après (h4)

*Soit* l'élément  $x$

Supposons que  $F(x)$  (h5)

Montrons  $G(a)$  (11)

( $\Rightarrow E$ )

Montrons  $F(x)$  (12)

d'après (h5)

Montrons  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{a})$  (13)

( $\forall E$ )

Montrons  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{a})$  (14)

d'après (h3)