

EXERCICE 42

Logique - Connecteurs

Montrons que

quelles que soient les propositions $P Q R$,
 $((P \vee (Q \vee R)) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \Rightarrow R)))$

Montrons ($\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$) $\Rightarrow ((\neg \mathbf{P} \Rightarrow \neg \mathbf{Q}) \Rightarrow ((\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{R}) \Rightarrow \mathbf{R}))$ (1)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$ (h1)

Montrons ($\neg \mathbf{P} \Rightarrow \neg \mathbf{Q}$) $\Rightarrow ((\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{R}) \Rightarrow \mathbf{R})$ (2)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $\neg \mathbf{P} \Rightarrow \neg \mathbf{Q}$ (h2)

Montrons ($\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{R}$) $\Rightarrow \mathbf{R}$ (3)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{R}$ (h3)

Montrons \mathbf{R} (4)

($\vee E$)

Montrons $\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$ (5)

d'après (h1)

Supposons que \mathbf{P} (h4)

Montrons \mathbf{R} (6)

($\Rightarrow E$)

Montrons \mathbf{P} (7)

d'après (h4)

Montrons $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{R}$ (8)

d'après (h3)

Supposons que $\mathbf{Q} \vee \mathbf{R}$ (h5)

Montrons \mathbf{R} (9)

($\vee E$)

Montrons $\mathbf{Q} \vee \mathbf{R}$ (10)

d'après (h5)

Supposons que \mathbf{Q} (h6)

Montrons \mathbf{R} (11)

($\Rightarrow E$)

Montrons \mathbf{P} (12)

(A)

Supposons que $\neg \mathbf{P}$ (h7)

Montrons \perp (13)

($\neg E$)

Montrons \mathbf{Q} (14)

d'après (h6)

Montrons $\neg \mathbf{Q}$ (15)
 $(\Rightarrow E)$

Montrons $\neg \mathbf{P}$ (16)
d'après (h7)

Montrons $\neg \mathbf{P} \Rightarrow \neg \mathbf{Q}$ (17)
d'après (h2)

Montrons $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{R}$ (18)
d'après (h3)

Supposons que \mathbf{R} (h8)

Montrons \mathbf{R} (19)
d'après (h8)