

EXERCICE 27

Logique - Quantificateurs

quel que soit le prédicat **P**,

$$(\neg (\exists x, \neg (\mathbf{P} (x))) \Leftrightarrow (\forall x, \mathbf{P} (x)))$$

Montrons $\neg (\exists x, \neg (\mathbf{P} (x))) \Leftrightarrow (\forall x, \mathbf{P} (x))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $\neg (\exists x, \neg (\mathbf{P} (x)))$ (h1)

Montrons $\forall x, \mathbf{P} (x)$ (2)

($\forall I$)

Soit l'élément a

Montrons $\mathbf{P} (a)$ (3)

(A)

Supposons que $\neg (\mathbf{P} (a))$ (h2)

Montrons \perp (4)

($\neg E$)

Montrons $\exists x, \neg (\mathbf{P} (x))$ (5)

($\exists I$)

Montrons $\neg (\mathbf{P} (a))$ (6)

d'après (h2)

Montrons $\neg (\exists x, \neg (\mathbf{P} (x)))$ (7)

d'après (h1)

Supposons que $\forall x, \mathbf{P} (x)$ (h3)

Montrons $\neg (\exists x, \neg (\mathbf{P} (x)))$ (8)

($\neg I$)

Supposons que $\exists x, \neg (\mathbf{P} (x))$ (h4)

Montrons \perp (9)

($\exists E$)

Montrons $\exists x, \neg (\mathbf{P} (x))$ (10)

d'après (h4)

Soit l'élément a

Supposons que $\neg (\mathbf{P} (a))$ (h5)

Montrons \perp (11)

($\neg E$)

Montrons $\mathbf{P} (a)$ (12)

($\forall E$)

Montrons $\forall x, \mathbf{P} (x)$ (13)

d'après (h3)

Montrons $\neg (\mathbf{P} (\mathbf{a}))$ (14)

d'après (h5)