Licence d'Informatique LI 214 — UPMC — Corrigé du partiel du 12 mars 2014

Solution de l'exercice 1

1. (a) *A priori* il faut utiliser le principe de récurrence forte puisque u_{n+1} s'exprime en fonction de tous les u_i, avec $0 \leq i \leq n$, mais une récurrence simple suffit, après transformation de la définition des u_n.

   (b) Montrons que $u_n \leq 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Avec une récurrence forte.
   Base $n = 0$: $u_0 = 1$ et $2^0 = 1$ donc $u_0 \leq 2^0$.
   Induction Soit $n > 0$, supposons que $u_i \leq 2^i$ pour tout $i < n$. Alors

   $$u_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1 \leq 2^n$$

   Conclusion

   $$\left.\begin{array}{l} u_0 \leq 2^0 \\ \forall n > 0 : ((\forall i < n \quad u_i \leq 2^i) \Rightarrow u_n \leq 2^n) \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Avec une récurrence simple. On remarque que :
   $u_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n-1} u_i + u_n = 2u_n$ si $n \geq 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$ si $n \geq 1$.
   Base $n = 0$: $u_0 = 1$ et $2^0 = 1$ donc $u_0 \leq 2^0$ et $n = 1$: $u_1 = 1$ et $2^1 = 2$ donc $u_1 \leq 2^1$.
   Induction Soit $n \leq 1$, supposons que $u_n \leq 2^n$. Alors $u_{n+1} = 2u_n \leq 2.2^n = 2^{n+1}$.
   Conclusion

   $$\left.\begin{array}{l} u_0 \leq 2^0 \text{ et } u_1 \leq 2^1 \\ \forall n \geq 1 : (u_n \leq 2^n \Rightarrow u_{n+1} \leq 2^{n+1}) \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? $\forall x \in \mathbb{R}, |x - x| = 0 \leq 2$ donc $x\mathcal{R}x$. $\mathcal{R}$ est réflexive.
   $\mathcal{R}$ est-elle transitive ? $0\mathcal{R}2$ et $2\mathcal{R}4$ mais $0 \not\mathcal{R} 4$ donc $\mathcal{R}$ n'est pas transitive.
   $\mathcal{R}$ est-elle symétrique ? $\forall x, y \in \mathbb{R}, |y - x| = |x - y|$ donc $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$. $\mathcal{R}$ est symétrique.
   $\mathcal{R}$ est-elle antisymétrique ? $0\mathcal{R}2$ et $2\mathcal{R}0$ mais $0 \neq 2$ donc $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.
   $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre ? $\mathcal{R}$ non transitive $\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre.
   $\mathcal{R}$ est-elle une fonction ? $0\mathcal{R}1$ et $0\mathcal{R}2$ donc $\mathcal{R}$ n'est pas une fonction.

3. Fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^a$ où a est impair.
   Puisque a est impair, f est strictement croissante donc injective. f est continue, $lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc f est surjective. f est injective et surjective donc f est bijective.

   Fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$.
   $g(2) = g(-2) = 4$ donc g n'est pas injective. -1 n'a pas d'antécédent donc g n'est pas surjective. g n'est pas injective (ni surjective) donc g n'est pas bijective.

   Fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $h(x) = x^2$. h est injective car $x, y \in \mathbb{N}$ et $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$.
   2 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$ donc h n'est pas surjective. h n'est pas surjective donc h n'est pas bijective.

Solution de l'exercice 2

1. (a) voir cours

   (b) voir cours

   (c) Si A a au moins deux lettres a et b avec $a < b$ alors $(a^n b)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite infinie strictement décroissante donc l'ordre lexicographique n'est pas bien fondé.

(d) Soit $v \in A^*$ et soit $n = |v|$: $u \leq_{mil} v \Rightarrow |u| \leq |v| \Rightarrow u \in A^n$. Il n'y a donc qu'un nombre fini de u tels que $u \leq_{mil} v$. Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors elle ne peut pas être infinie strictement décroissante car il n'y a qu'un nombre fini d'éléments inférieurs à u_0 dans l'ordre militaire. Par conséquent l'ordre militaire est bien fondé.

2. (a) à faire seul

   (b) $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Minorants de B : $\{1\}$	Majorants de B : $\emptyset$
Borne inférieure de B : 1	Borne supérieure de B : n'existe pas
Plus petit élément de B : 1	Plus grand élément de B : n'existe pas
Éléments minimaux de B : $\{1\}$	Éléments maximaux de B : $\{4, 6\}$.

Solution de l'exercice 3

1. $n(\emptyset) = 0$ et $n((a, g, d)) = 1 + n(g) + n(d)$ pour $a \in A$, $g \in AB$ et $d \in AB$.
2. $ar(\emptyset) = 0$ et, pour $a \in A$, $g \in AB$ et $d \in AB$:

$$ar((a, g, d)) = \begin{cases} 0 & \text{si } g = \emptyset \text{ et } d = \emptyset \\ 2 + n(g) + n(d) & \text{si } g \neq \emptyset \text{ et } d \neq \emptyset \\ 1 + n(g) & \text{si } g \neq \emptyset \text{ et } d = \emptyset \\ 1 + n(d) & \text{si } g = \emptyset \text{ et } d \neq \emptyset \end{cases}$$

3. Montrons que la propriété $\mathcal{P}(T) : n(T) = ar(T) + 1$ est vraie pour tout arbre T non vide.
   Base Si $T = (a, \emptyset, \emptyset))$ alors $n(T) = 1$ et $ar(T) = 0$ donc $n(T) = ar(T) + 1$.
   Induction On distingue trois cas.
   — Soit g, d deux arbres non vides. Supposons que $n(g) = ar(g)+1$ et $n(d) = ar(d)+1$.
   Soit $a \in A$ et $T = (a, g, d)$. Alors :
   $n(T) = 1 + n(g) + n(d) = 1 + ar(g) + 1 + ar(d) + 1 = ar(T) + 1$.
   — Soit g un arbre non vide. Supposons que $n(g) = ar(g) + 1$.
   Soit $a \in A$ et $T = (a, g, \emptyset)$. Alors $n(T) = 1 + n(g) = 1 + ar(g) + 1 = ar(T) + 1$.
   — Le cas où g est vide et d non vide est analogue.
   Conclusion

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{P}((a, \emptyset, \emptyset)) \text{ est vraie} \\ \forall t \in AB, t \text{ non vide }, \forall a \in A : [\mathcal{P}(t) \Rightarrow (\mathcal{P}((a, t, \emptyset)) \text{ et } \mathcal{P}((a, \emptyset, t)))] \\ \forall g, d \in AB, g, d \text{ non vides }, \forall a \in A : [(\mathcal{P}(g) \text{ et } \mathcal{P}(d)) \Rightarrow \mathcal{P}((a, g, d))] \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(T) \text{ est vraie pour tout arbre } T \text{ non vide.}$$

4. Montrons que la propriété $\mathcal{Q}(u) : \widetilde{\widetilde{u}} = u$ est vraie pour tout $u \in A*$.
   Base $\widetilde{\widetilde{\varepsilon}} = \widetilde{\varepsilon} = \varepsilon$ donc $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ est vraie.
   Induction Soit $u \in A^*$. Supposons que $\widetilde{\widetilde{u}} = u$. Soit $a \in A$. Alors :
   $\widetilde{\widetilde{a.u}} = \widetilde{\widetilde{u}.a} = a.\widetilde{\widetilde{u}} = a.u$.
   Conclusion

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{Q}(\varepsilon) \text{ est vraie} \\ \forall u \in A^*, \forall a \in A : (\mathcal{Q}(u) \Rightarrow \mathcal{Q}(a.u)) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{Q}(u) \text{ est vraie pour tout } u \in A^*.$$