

## EXERCICE 9

### Logique - Quantificateurs

*quels que soient* les prédictats  $F$   $G$ ,  
*quelle que soit* la constante  $a$ ,

$$(((\forall x, F(x)) \vee G(a)) \Leftrightarrow (\forall x, (F(x) \vee G(a))))$$

---

*Soit* la constante  $a$

*Montrons*  $((\forall x, F(x)) \vee G(a)) \Leftrightarrow (\forall x, (F(x) \vee G(a)))$  (1)

( $\Leftrightarrow I$ )

*Supposons que*  $(\forall x, F(x)) \vee G(a)$  (h1)

*Montrons*  $\forall x, (F(x) \vee G(a))$  (2)

( $\forall E$ )

*Montrons*  $(\forall x, F(x)) \vee G(a)$  (3)

*d'après* (h1)

*Supposons que*  $\forall x, F(x)$  (h2)

*Montrons*  $\forall x, (F(x) \vee G(a))$  (4)

( $\forall I$ )

*Soit* l'élément  $x$

*Montrons*  $F(x) \vee G(a)$  (5)

( $\vee Ig$ )

*Montrons*  $F(x)$  (6)

( $\forall E$ )

*Montrons*  $\forall x, F(x)$  (7)

*d'après* (h2)

*Supposons que*  $G(a)$  (h3)

*Montrons*  $\forall x, (F(x) \vee G(a))$  (8)

( $\forall I$ )

*Soit* l'élément  $x$

*Montrons*  $F(x) \vee G(a)$  (9)

( $\vee Id$ )

*Montrons*  $G(a)$  (10)

*d'après* (h3)

*Supposons que*  $\forall x, (F(x) \vee G(a))$  (h4)

*Montrons*  $(\forall x, F(x)) \vee G(a)$  (11)

( $TE$ )

*Supposons que*  $G(a)$  (h5)

*Montrons*  $(\forall x, F(x)) \vee G(a)$  (12)

( $\vee Id$ )

Montrons  $\mathbf{G}(\alpha)$  (13)

d'après (h5)

Supposons que  $\neg(\mathbf{G}(\alpha))$  (h6)

Montrons  $(\forall x, \mathbf{F}(x)) \vee \mathbf{G}(\alpha)$  (14)

( $\forall I$ )

Montrons  $\forall x, \mathbf{F}(x)$  (15)

( $\forall I$ )

Soit l'élément  $x$

Montrons  $\mathbf{F}(x)$  (16)

(A)

Supposons que  $\neg(\mathbf{F}(x))$  (h7)

Montrons  $\perp$  (17)

( $\forall E$ )

Montrons  $\mathbf{F}(x) \vee \mathbf{G}(\alpha)$  (18)

( $\forall E$ )

Montrons  $\forall x, (\mathbf{F}(x) \vee \mathbf{G}(\alpha))$  (19)

d'après (h4)

Supposons que  $\mathbf{F}(x)$  (h8)

Montrons  $\perp$  (20)

( $\neg E$ )

Montrons  $\mathbf{F}(x)$  (21)

d'après (h8)

Montrons  $\neg(\mathbf{F}(x))$  (22)

d'après (h7)

Supposons que  $\mathbf{G}(\alpha)$  (h9)

Montrons  $\perp$  (23)

( $\neg E$ )

Montrons  $\mathbf{G}(\alpha)$  (24)

d'après (h9)

Montrons  $\neg(\mathbf{G}(\alpha))$  (25)

d'après (h6)