

EXERCICE 37

Logique - Quantificateurs

quelle que soit la relation R ,

$$((\forall z, \exists y, \forall x, ((R(x, y) \Leftrightarrow R(x, z)) \wedge \neg(R(x, x)))) \Rightarrow \neg((\exists z, \forall x, R(x, z))))$$

Montrons $(\forall z, \exists y, \forall x, ((R(x, y) \Leftrightarrow R(x, z)) \wedge \neg(R(x, x)))) \Rightarrow \neg((\exists z, \forall x, R(x, z)))$ (1)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $\forall z, \exists y, \forall x, ((R(x, y) \Leftrightarrow R(x, z)) \wedge \neg(R(x, x)))$ (h1)

Montrons $\neg((\exists z, \forall x, R(x, z)))$ (2)

($\neg I$)

Supposons que $\exists z, \forall x, R(x, z)$ (h2)

Montrons \perp (3)

($\exists E$)

Montrons $\exists z, \forall x, R(x, z)$ (4)

d'après (h2)

Soit l'élément x

Supposons que $\forall x^0, R(x^0, x)$ (h3)

Montrons \perp (5)

($\neg E$)

Montrons $R(x, x)$ (6)

($\forall E$)

Montrons $\forall x^0, R(x^0, x)$ (7)

d'après (h3)

Montrons $\neg(R(x, x))$ (8)

ajout de variable

Soit l'élément x^1

Montrons $\neg(R(x, x))$ (9)

($\exists E$)

Montrons $\exists x^0, \forall o, ((R(o, x^0) \Leftrightarrow R(o, x^1)) \wedge \neg(R(o, o)))$ (10)

($\forall E$)

Montrons $\forall z, \exists y, \forall x, ((R(x, y) \Leftrightarrow R(x, z)) \wedge \neg(R(x, x)))$ (11)

d'après (h1)

Soit l'élément x^0

Supposons que $\forall o, ((R(o, x^0) \Leftrightarrow R(o, x^1)) \wedge \neg(R(o, o)))$ (h4)

Montrons $\neg(R(x, x))$ (12)

($\wedge Ed$)

Montrons $(R(x, x^0) \Leftrightarrow R(x, x^1)) \wedge \neg(R(x, x))$ (13)

($\forall E$)

Montrons $\forall o, ((R(o, x^0) \Leftrightarrow R(o, x^1)) \wedge \neg(R(o, o)))$ (14)

L L L L L L L L *d'après* (h4)