

Corrigé Exercice 1 (5 pts)

1) [2 pts] On prend x_{ij} pour la quantité de produit j fabriquée sur le site i . Le PL s'écrit alors :

$$\begin{array}{ll} \min z' = & 5x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + 8x_{21} + 7x_{22} + 10x_{23} \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 10000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 10000 \\ x_{11} + x_{21} \leq 6000 \\ x_{12} + x_{22} \leq 8000 \\ x_{13} + x_{23} \leq 5000 \end{array} \right. \\ & x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, j = 1, 2, 3 \end{array}$$

2) [0.5 pt] Le dual de \mathcal{P} s'écrit comme le PL ci-dessus à ceci près que le second membre doit être divisé par 1000.

3) [1.5 pts] On vérifie déjà que le vecteur $y = (2, 0, 7, 7, 10)$ est une solution réalisable de \mathcal{P} . On construit alors la solution du dual associée par le TEC. On obtient : $x_{11} = 6, x_{12} = 0, x_{13} = 4, x_{21} = 0, x_{22} = 8, x_{23} = 1$. Cette solution est bien duale réalisable et de même valeur (128), on est bien à l'optimum sur les deux solutions.

4) [1 pt] La politique optimale du problème initial se déduit de la solution précédente en multipliant les variables par 1000. Il faut donc produire 6000 de produit 1 sur le site 1, 8000 de produit 2 sur le site 2, 4000 de produit 3 sur le site 1 et 1000 de produit 3 sur le site 2. Le coût total est 128000.

Corrigé Exercice 2 (5 pts)

1) [2.5 pts] soit 1 par itération correcte et 0.5 pour l'unicité.

$$\begin{array}{ll} \max z = & 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 8x_4 \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + e_1 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + e_2 = 2 \end{array} \right. \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, e_i \geq 0, i = 1, 2. \end{array}$$

Base initiale $\{e_1, e_2\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	
e_1	2	1	1	3	1	0	7
e_2	1	2	1	1	0	1	2
	3	8	-5	8	0	0	0

x_2 entre en base et e_2 sort

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	
e_1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	6
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
	-1	0	-9	4	0	4	-8

x_4 entre en base et x_2 sort

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	
e_1	-1	-5	-2	0	1	-3	1
x_4	1	2	1	1	0	1	2
	-5	-8	-13	0	0	-8	-16

On est à l'optimum, la solution est $x = (0, 0, 0, 2)$ de valeur 16.

2) [1 pt] L'objectif initial s'écrit en fonction des variables hors base (dans la base optimale) $z = 16 - 5x_1 - 8x_2 - 13x_3 - 8e_2$. Si le coefficient de x_1 dans la fonction objectif passe de 2 à 1, il faut retirer x_1 ce qui donne $z' = 16 - 6x_1 - 8x_2 - 13x_3 - 8e_2$. La solution reste optimale et la valeur n'a pas changé.

3) [1.5 pts] L'objectif initial s'écrit en fonction des variables hors base (dans la base optimale) $z = 16 - 5x_1 - 8x_2 - 13x_3 - 8e_2$. Si le coefficient de x_4 dans la fonction objectif passe de 8 à 3, il faut retirer $5x_4$, comme $x_4 = 2 - x_1 - 2x_2 - x_3 - e_2$ en fonction des variables hors base, on a $5x_4 = 10 - 5x_1 - 10x_2 - 5x_3 - 5e_2$ ce qui donne $z' = 6 + 2x_2 - 8x_3 - 3e_2$. Le tableau est alors :

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	
e_1	-1	-5	-2	0	1	-3	1
x_4	1	2	1	1	0	1	2
	0	2	-8	0	0	-3	-6

La solution n'est plus optimale. On fait entrer x_2 en base et x_4 sort.

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	
e_1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	6
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
	-1	0	-9	-1	0	-4	-8

On est à l'optimum, la solution est $x = (0, 1, 0, 0)$ de valeur 8.

Corrigé exercice 3

Initialisation : $E^*(j) = 0$ pour $j > 21$ (plus précisément pour $j = 22, \dots, 27$), on a 0 euro si

on a dépassé 21. Récurrence : pour $j \leq 21$, si l'on s'arrête on gagne j , sinon en espérance on gagne $\frac{\sum_{k=j+1}^{j+6} E^*(k)}{6}$.

Récurrence : pour $j \leq 21$, si l'on s'arrête on gagne j , sinon en espérance on gagne $\frac{\sum_{k=j+1}^{j+6} E^*(k)}{6}$.

On prend donc la décision qui maximise le résultat :

$$E^*(j) = \max(j, \frac{\sum_{k=j+1}^{j+6} E^*(k)}{6})$$

Flot maximum (4 points)

- 1)[0.5 point] La coupe est de capacité $4+9+8=21$.
 2)[3.5 points] Il y a deux étapes d'augmentation (trois étapes en tout) : par exemple à la première étape un chemin augmentant $s, 1, 3, t$, puis à la deuxième étape un chemin augmentant $s, 2, 5, 4, 3, t$. A la troisième étape les sommets $s, 1, 2, 4, 5$ sont marqués, le flot est maximum de valeur 10. (S, T) avec $S = \{s, 1, 2, 4, 5\}$ est une coupe minimum.

Corrigé exercice 5

1.5 pour la construction de R . 1.5 pour l'équivalence des solutions et la justification.

On adapte simplement la construction faite pour le problème de couplage. On construit le réseau R suivant :

- R contient les sommets A, B de G et deux nouveaux sommets s et t ;
- A chaque arête (i, j) de E avec $i \in A$ et $j \in B$, on met un arc (i, j) de capacité 1 (attention à ne pas mettre ∞ ici);
- On met un arc de s à tout sommet de A avec une capacité 2, et un arc de tout sommet de B à t de capacité 2.

Le graphe G est cycle-partitionnable si et seulement s'il existe un flot de valeur $2|A|$ dans R . En effet, s'il existe un ensemble d'arêtes E' tel que tout sommet est de degré 2 dans G , en faisant passer un flux 1 sur les arcs correspondants, un flux 2 sur les arcs issus de s et arrivant en t (et 0 ailleurs) on obtient un flot de valeur $2|A|$. De même, si l'on a un flot de valeur $2|A|$, les capacités étant entières il existe un flot entier de valeur $2|A|$. Alors chaque sommet de L ou R il existe exactement deux arcs (entre L et R) ayant un flux de 1. Les arêtes correspondantes sont une cycle-partition.

