

EXERCICE 21

Logique - Connecteurs

Montrons que

quelles que soient les propositions $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$,
 $(\mathbf{P} \Rightarrow ((\mathbf{R} \Rightarrow \neg \mathbf{Q}) \Rightarrow ((\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \Rightarrow \neg \mathbf{R})))$

Montrons $\mathbf{P} \Rightarrow ((\mathbf{R} \Rightarrow \neg \mathbf{Q}) \Rightarrow ((\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \Rightarrow \neg \mathbf{R}))$ (1)

($\Rightarrow I$)

Supposons que \mathbf{P} (h1)

Montrons $(\mathbf{R} \Rightarrow \neg \mathbf{Q}) \Rightarrow ((\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \Rightarrow \neg \mathbf{R})$ (2)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $\mathbf{R} \Rightarrow \neg \mathbf{Q}$ (h2)

Montrons $(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \Rightarrow \neg \mathbf{R}$ (3)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ (h3)

Montrons $\neg \mathbf{R}$ (4)

($\neg I$)

Supposons que \mathbf{R} (h4)

Montrons \perp (5)

($\neg E$)

Montrons \mathbf{Q} (6)

($\Rightarrow E$)

Montrons \mathbf{P} (7)

d'après (h1)

Montrons $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ (8)

d'après (h3)

Montrons $\neg \mathbf{Q}$ (9)

($\Rightarrow E$)

Montrons \mathbf{R} (10)

d'après (h4)

Montrons $\mathbf{R} \Rightarrow \neg \mathbf{Q}$ (11)

d'après (h2)