Synthèse Bibliographique

Étude de Variantes du Problème de Sac à Dos
dans le Cadre des Jeux de Fantasy Cyclisme

Yuxiang ZHANG
Louiza CHENAOUI
Kenan ALSAFADI

Novembre 2025

UM4IN211 : Initiation à la REChercher (IREC)
Master Intelligence Artificielle, Algorithmes, Interaction et Décision (AI2D)
Sorbonne Université

Encadrant : Thibaut Lust
LIP6, Sorbonne Université

Résumé

Cette synthèse bibliographique examine les approches d'optimisation pour les jeux de fantasy cyclisme, en se concentrant sur les modélisations basées sur le problème du sac à dos (knapsack) et ses variantes multi-étapes. L'analyse couvre les modèles de programmation linéaire en nombres entiers, les méthodes de résolution exactes et approchées, ainsi que les perspectives d'analyse post-optimale. La synthèse identifie les principaux défis computationnels et propose des directions de recherche futures pour ce domaine émergent situé à l'intersection de la recherche opérationnelle et des sports analytics. Notre analyse a permis d'identifier plusieurs perspectives, notamment le développement d'approches intégrant l'optimisation multi-périodes et l'analyse de robustesse dans le contexte spécifique du cyclisme fantasy.

Mots-clés : fantasy cyclisme, sac à dos (knapsack) multi-étapes, optimisation combinatoire, PLNE, analyse post-optimale, sports analytics

1 Introduction

1.1 Contexte et problématique

Le fantasy cyclisme est une catégorie émergente des jeux de fantasy sports. Le principe pour le participant, qui endosse le rôle de manager sportif, est de composer une équipe de coureurs pour une compétition multi-étapes (comme le Tour de France) afin de maximiser les points accumulés. Cette sélection est soumise à une contrainte budgétaire stricte, chaque coureur possédant un coût et un rendement estimé (les points potentiels). Le défi principal consiste à choisir l'ensemble optimal de coureurs dont la somme des coûts ne dépasse pas le budget, tout en maximisant la valeur totale. L'environnement est rendu dynamique par la possibilité d'effectuer des transferts entre les étapes pour ajuster la formation en fonction des performances, des abandons ou des changements stratégiques. Ces transferts sont généralement limités en nombre et peuvent impliquer des coûts additionnels, ajoutant une dimension stratégique supplémentaire.

D'un point de vue académique, cette problématique s'inscrit dans le cadre des problèmes d'optimisation combinatoire et présente des similarités avec le problème classique du sac à dos (knapsack). Cependant, elle s'en distingue par plusieurs aspects : la dimension multi-périodes introduite par les différentes étapes, la possibilité de modifier la composition de l'équipe via des transferts, et les contraintes spécifiques liées aux règles du cyclisme (nombre de coureurs par type, contraintes par équipe professionnelle, etc.). La complexité de ce problème réside dans l'arbitrage entre l'optimisation instantanée (le choix initial) et l'optimisation globale (les opportunités de transferts ultérieurs).

Pour comprendre la dynamique de ces jeux et valider les stratégies, l'analyse post-optimale permet d'aborder ces questions de manière systématique. Elle permet d'étudier a posteriori les décisions optimales en connaissant toutes les performances réelles des coureurs, d'identifier les coureurs importants, les combinaisons synergiques, et d'évaluer l'impact des règles du jeu sur les stratégies optimales. C'est pourquoi cet article de synthèse vise à cartographier les outils méthodologiques nécessaires à l'intégration de la modélisation dynamique et de l'analyse de robustesse.

1.2 Délimitation du champ d'étude

Cette synthèse se concentre spécifiquement sur les applications du problème de sac à dos (knapsack) au fantasy cyclisme, en excluant les autres sports fantasy. Nous nous limitons aux approches d'optimisation déterministes et post-optimales, laissant de côté les méthodes purement heuristiques ou les approches basées sur l'apprentissage automatique.

Le périmètre couvre les modèles de programmation linéaire en nombres entiers pour la sélection d'équipe et la gestion des transferts, ainsi que les méthodes d'analyse de robustesse pour l'évaluation de la stabilité des solutions.

2 État de l'art

Cette revue de littérature s'appuie sur une sélection stratégique de sept articles qui couvrent l'ensemble du spectre de recherche autour du fantasy cyclisme et des problèmes de sac à dos (knapsack) multi-étapes. L'analyse identifie trois axes principaux : la modélisation optimisationnelle, le contexte sportif, et l'analyse de robustesse des solutions.

Les travaux de Beliën et ses collaborateurs constituent la base de notre étude. Leur premier article de 2011 [Beliën et al., 2011] a marqué une étape importante en démontrant l'applicabilité pratique des méthodes de programmation linéaire en nombres entiers (MIP) à travers l'étude du jeu Gigabike. Cette application concrète, structurée en trois étapes — problème de sac à dos (knapsack) par période, gestion multi-périodes avec budget et transferts, contraintes logiques sur les transferts — a permis d'obtenir des solutions optimales significativement supérieures aux performances des meilleurs joueurs humains. Ces résultats ont validé l'approche méthodologique et souligné le potentiel d'amélioration offert par l'optimisation mathématique dans le domaine des jeux fantasy.

Fort de ces résultats prometteurs, Beliën et ses collaborateurs ont développé en 2017 un cadre MIP générique pour l'analyse ex-post des jeux de fantasy sports [Beliën et al., 2017]. Ce modèle flexible intègre l'ensemble des contraintes caractéristiques du domaine : limitations budgétaires, composition d'équipe équilibrée, et gestion stratégique des transferts sur plusieurs périodes. La méthodologie développée permet de maximiser les points totaux tout en considérant les coûts de transaction associés aux transferts, offrant ainsi un cadre formel adaptable à divers sports. Cette généralisation est importante, étendant l'applicabilité des approches d'optimisation au-delà du cyclisme vers l'ensemble des sports fantasy.

Sur le plan théorique, l'article de Bampis et al. (2022) [Bampis et al., 2022] fournit les fondements algorithmiques les plus récents pour aborder la dimension temporelle de notre problème. En formalisant le problème du sac à dos (knapsack) multi-étapes avec transitions entre périodes, les auteurs développent un PTAS pour un nombre constant d'étapes, établissant ainsi des garanties de performance théoriques pour cette classe de problèmes. L'analyse de la relaxation linéaire et la modélisation ILP proposée offrent des pistes méthodologiques précieuses pour notre étude des transitions d'équipe dans le fantasy cyclisme.

La revue de Durán (2021) [Durán, 2021] sur les sports analytics fournit un contexte général pour notre problématique. Cette synthèse bibliographique couvre la planification, l'assignation et l'analyse de performances. Elle montre le développement des méthodes d'optimisation dans le domaine sportif. L'identification des défis computationnels et des tendances récentes est utile pour notre travail sur le fantasy cyclisme.

Dans une perspective plus spécifique, l'article récent d'Ausloos (2024) [Ausloos, 2024] apporte une critique essentielle sur l'influence des règles sportives dans les stratégies d'optimisation. Par une analyse statistique comparative entre la méthode UCI classique et des indicateurs alternatifs de performance, l'étude démontre comment la définition des contraintes et des métriques de scoring modifie la hiérarchie des coureurs et les décisions optimales. Ces résultats soulignent l'importance d'une modélisation fine des règles spécifiques du jeu dans l'élaboration des stratégies.

Les travaux de Pisinger et Saidi (2017) [Pisinger & Saidi, 2017] sur l'analyse de tolérance pour le sac à dos (knapsack) 0-1 fournissent le cadre théorique complet pour l'analyse post-optimale qui est au cœur de notre problématique. Leurs algorithmes de programmation dynamique pour l'analyse de tolérance exacte, complétés par des méthodes approximatives basées sur des bornes supérieures, permettent d'évaluer la robustesse de la solution optimale face aux perturbations des coefficients. Cette méthodologie est directement applicable à l'étude de la stabilité des équipes optimales dans le fantasy cyclisme.

Plus récemment, les travaux de Kumabe et Yoshida (2024) [Kumabe & Yoshida, 2024] sur la sensibilité moyenne du problème du sac à dos offrent un cadre méthodologique précieux pour concevoir des solutions stables. Leur algorithme, qui présente une faible sensibilité moyenne en alliant classification des objets, méthode gloutonne modifiée et mécanisme exponentiel (pour une sélection robuste et non déterministe), garantit que la solution finale est peu affectée par de légères perturbations dans les données. Cette propriété est essentielle dans notre contexte d'étude, où les performances des coureurs sont sujettes à une variabilité importante.

3 Modélisation du problème

3.1 Présentation du modèle de Beliën et al. (2017)

Le modèle proposé par Beliën, Goossens et Van Reeth (2017) [Beliën et al., 2017] constitue le cadre formel le plus complet pour l'analyse ex-post des jeux de fantasy sports. Cette modélisation en programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) permet de déterminer la stratégie optimale de sélection d'équipe et de gestion des transferts lorsque toutes les performances des joueurs sont connues a posteriori.

3.2 Ensembles et indices

Le modèle fait intervenir les ensembles suivants : l'ensemble des joueurs $P = \{1, 2, \dots, |P|\}$ représentant les coureurs cyclistes, l'ensemble des types de joueurs $\Pi = \{1, 2, \dots, |\Pi|\}$ avec $P_\pi \subseteq P$ désignant les joueurs de type π, l'ensemble des périodes de transfert $T = \{1, 2, \dots, |T|\}$, l'ensemble des événements $\Theta = \{1, 2, \dots, |\Theta|\}$ correspondant aux courses cyclistes, les ensembles de jeux $G \subseteq \Theta$ pour l'attribution des prix, avec $t_G \in T$ comme période de référence pour le budget restant dans l'ensemble G, et les rangs $e \in E_G = \{1, 2, \dots, |E_G|\}$ pour lesquels un prix est attribué.

3.3 Paramètres du modèle

Les paramètres principaux incluent les points $v_{p\tau}$ obtenus par le joueur p dans l'événement τ, le coût c_{pt} du joueur p durant la période t, le budget total disponible B, le nombre maximal de transferts autorisés A_t en période t, le nombre maximal de joueurs D_τ marquant des points dans l'événement τ, la pénalité L par transfert utilisé, le poids ε du critère de départage basé sur le budget restant, les nombres minimal $n_{\pi t}$ et maximal $N_{\pi t}$ de joueurs de type π en période t, l'indicateur de participation $a_{p\tau}$ valant 1 si le joueur p a participé à l'événement τ, la valeur ω_{eG} du prix pour l'obtention du rang e dans l'ensemble G, le score H_{eG} de l'adversaire ayant obtenu le rang e, le budget restant R_{eG} du participant ayant obtenu le rang e, et le nombre maximal Q_π de joueurs de type π dans le pool de joueurs.

3.4 Variables de décision

Le modèle emploie plusieurs variables de décision : $x_{pt} \in \{0, 1\}$ indique si le joueur p est dans l'équipe en période t, $y_{p\tau} \in \{0, 1\}$ indique si le joueur p marque des points dans l'événement τ, $r_t \geq 0$ représente le budget restant en période t, $z_{pt} \in \{0, 1\}$ identifie les transferts entrants du joueur p en période t, $s_{pt} \in \{0, 1\}$ désigne les joueurs remplaçants, $w_{eG} \in \{0, 1\}$ indique l'obtention du rang e dans l'ensemble G, et $q_p \in \{0, 1\}$ définit l'appartenance au pool de joueurs.

3.5 La fonction objectif

La fonction objectif principale maximise la somme des points marqués $\sum_{p\in P} \sum_{\tau\in\Theta} v_{p\tau} y_{p\tau}$ par l'ensemble des joueurs sélectionnés sur tous les événements, tout en appliquant une pénalité proportionnelle $-L \sum_{p\in P} \sum_{t\in T} z_{pt}$ au nombre total de transferts effectués, et en valorisant le budget restant en fin de saison $+\varepsilon r_{|T|}$ comme critère de départage, où ε est un poids positif faible assurant que ce critère n'intervient qu'en cas d'égalité.

3.6 Les contraintes du modèle

3.6.1 Contraintes de composition d'équipe

Les contraintes de composition d'équipe imposent un nombre minimal $\sum_{p\in P_\pi} x_{pt} \geq n_{\pi t}$ et maximal $\sum_{p\in P_\pi} x_{pt} \leq N_{\pi t}$ de joueurs de chaque type π dans chaque période t. Ces contraintes garantissent une composition d'équipe équilibrée selon les règles spécifiques du sport. Dans Gigabike, ces contraintes ne s'appliquent pas car il n'y a pas de types de joueurs ($\Pi = \emptyset$). L'équipe doit simplement contenir exactement 30 coureurs.

3.6.2 Contraintes budgétaires initiales

La contrainte budgétaire initiale établit que la somme des coûts des joueurs sélectionnés dans la première période plus le budget restant doit égaler le budget total : $\sum_{p \in P} c_{p1} x_{p1} + r_1 = B$. Cette contrainte garantit que la sélection initiale respecte la limite budgétaire imposée par le jeu. Pour Gigabike, le budget CQ initial est de 20,000 points et la sélection des 30 coureurs doit respecter cette limite stricte.

3.6.3 Contraintes budgétaires dynamiques et de transfert

Les contraintes budgétaires dynamiques et de transfert gèrent l'évolution du budget entre les périodes. La contrainte $\sum_{p \in P} c_{pt}(x_{pt} - x_{p,t-1}) = r_{t-1} - r_t$ pour $t > 1$ établit l'équilibre budgétaire entre périodes, où le coût net des transferts est financé par le budget restant de la période précédente. La contrainte $z_{pt} \geq x_{pt} - x_{p,t-1}$ identifie les transferts entrants en forçant la variable z_{pt} à 1 lorsqu'un joueur rejoint l'équipe. Finalement, la contrainte $\sum_{p \in P} z_{pt} \leq A_t$ limite le nombre total de transferts par période. Dans Gigabike, ces contraintes permettent 5 transferts maximum par période avec report du budget restant.

3.6.4 Contraintes d'attribution des points

Les contraintes d'attribution des points comprennent deux aspects essentiels. Premièrement, la contrainte $y_{p\tau} \leq x_{pt}$ stipule qu'un joueur ne peut marquer des points que s'il fait partie de l'équipe durant la période contenant l'événement. Deuxièmement, la contrainte $\sum_{p \in P} y_{p\tau} \leq D_\tau$ limite le nombre de joueurs pouvant contribuer aux points dans chaque événement. Cette dernière contrainte est importante pour Gigabike où seulement les 8 meilleurs coureurs ($D_\tau = 8$) par course marquent des points pour l'équipe.

3.6.5 Contraintes des joueurs remplaçants

Le système de remplaçants est modélisé par trois contraintes principales. La contrainte $\sum_{p \in P_\pi} s_{pt} = 1$ impose exactement un remplaçant par type de joueur. La contrainte $s_{pt} \leq x_{pt}$ garantit que le remplaçant fait partie de l'équipe sélectionnée. La contrainte $y_{p\tau} \leq (1 - s_{pt}) + \sum_{p' \in P_\pi \backslash p}(1 - a_{p'\tau}) x_{p't}$ détermine qu'un joueur remplaçant ne peut marquer des points que s'il n'est pas désigné comme remplaçant ou si au moins un titulaire de son type n'a pas participé à l'événement. Ces contraintes ne s'appliquent pas à Gigabike qui n'utilise pas ce système.

3.6.6 Contraintes de domaine des variables

Les domaines des variables sont définis par des contraintes de nature : les variables $x_{pt}, y_{p\tau}, z_{pt}, s_{pt}$ sont binaires ($\in \{0, 1\}$) pour modéliser les décisions discrètes de sélection, tandis que le budget restant r_t est une variable continue non-négative (≥ 0).

3.7 Extensions du modèle

3.7.1 Scénario avec pool de joueurs

Dans cette extension, les participants sélectionnent d'abord un pool de joueurs avant de former des équipes spécifiques. La contrainte $x_{pt} \leq q_p$ garantit que seuls les joueurs du pool peuvent être sélectionnés. La contrainte $\sum_{p \in P_\pi} q_p \leq Q_\pi$ limite la taille du pool par type de joueur. La variable $q_p \in \{0, 1\}$ définit l'appartenance au pool. Cette extension n'est pas applicable à Gigabike.

3.7.2 Maximisation des gains monétaires

Cette extension reformule l'objectif pour maximiser les gains monétaires avec la fonction $\sum_G \sum_{e \in E_G} \omega_{eG} w_{eG}$. La contrainte clé $\sum_{p \in P} \sum_{\tau \in G} v_{p\tau} y_{p\tau} + \varepsilon r_{t_G} - w_{eG}(H_{eG} + \varepsilon R_{eG}) \geq 0$ stipule qu'un rang e n'est obtenu que si le score de l'équipe dépasse celui du participant réel ayant ce rang, en considérant également le budget restant comme critère de départage. La contrainte $\sum_{e \in E_G} w_{eG} \leq 1$ garantit qu'au plus un rang est obtenu par ensemble de jeux. Cette formulation est particulièrement utile pour Gigabike qui propose de nombreux prix catégoriels.

3.8 Résultats sélectionnés et justification

Parmi les nombreuses contributions de l'article de Beliën et al. (2017), nous avons délibérément choisi de nous concentrer sur trois éléments essentiels pour notre étude de Gigabike.

Premièrement, le **modèle MIP principal** (présenté dans les sections 3.2 à 3.6) constitue le cœur méthodologique de l'article. Sa présentation complète est indispensable car il représente la formalisation la plus générale du problème de fantasy sports, dont toutes les autres variantes ne sont que des cas particuliers. Ce modèle sert de référence pour identifier les contraintes spécifiquement applicables à Gigabike.

Deuxièmement, l'**extension pour la maximisation des gains monétaires** (présentée dans la section 3.7.2) a été retenue car elle correspond à un enjeu stratégique important pour Gigabike. En effet, contrairement à de nombreux jeux de fantasy, Gigabike propose une multitude de prix (par course, par mois, au général), ce qui rend cette formulation particulièrement pertinente pour analyser les stratégies de maximisation des revenus plutôt que du simple score total.

Troisièmement, l'**analyse de sensibilité des règles du jeu** (décrite dans la section 4 de l'article original) offre une perspective méta-stratégique essentielle. Elle démontre la valeur du modèle comme outil de conception et d'équilibrage du jeu, nous permettant d'évaluer si les paramètres actuels de Gigabike (budget de 20 000, 5 transferts par période) sont optimaux et de fournir des recommandations basées sur des analyses quantitatives rigoureuses.

4 Analyse post-optimale pour le problème de sac à dos

4.1 Introduction à l'analyse de tolérance

L'analyse post-optimale est une étape importante de la résolution des problèmes d'optimisation combinatoire, car elle quantifie la stabilité de la solution optimale retenue lorsque les données d'entrée sont sujettes à variation.

La modélisation du problème de sélection d'équipe (Section 3) repose sur des pronostics de performance qui sont, par nature, très incertains. Cette instabilité est amplifiée dans le contexte des courses cyclistes multi-étapes par des facteurs imprévisibles comme les abandons, les disqualifications ou les blessures. L'article d'Ausloos (2024) [Ausloos, 2024] illustre concrètement ce défi : en analysant l'impact des remplacements et des retraits sur les classements finaux des équipes, il démontre que les résultats sont structurellement instables. Cette observation concrète nous rappelle que la meilleure équipe sur le papier n'a que peu de valeur si elle est fragilisée par le premier imprévu. Il devient donc essentiel, non seulement de calculer la sélection optimale, mais aussi de quantifier sa robustesse face aux variations de données, ce qui est l'objet de l'analyse post-optimale.

Pour le problème du sac à dos (knapsack) en nombres entiers (0-1), ce volet est traité par l'analyse de tolérance, formalisée par Pisinger et Saidi (2017) [Pisinger & Saidi, 2017]. Son objectif est de déterminer les intervalles de variation des coefficients (poids, valeurs) pour lesquels la solution optimale actuelle reste inchangée. Elle se distingue ainsi de l'analyse de sensibilité classique en PLNE par son focus sur la préservation de la solution plutôt que sur l'évolution de la valeur objective.

4.2 Définitions formelles des limites de tolérance

Soit KP une instance du problème de sac à dos (knapsack) 0-1 avec une solution optimale x^* et une valeur optimale z^*. Les problèmes perturbés sont définis pour les profits et les poids. Pour la perturbation des profits, on substitue p_k par $p_k + \Delta p_k$ dans la fonction objectif. Pour la perturbation des poids, on substitue w_k par $w_k + \Delta w_k$ dans la contrainte de capacité. Les limites de tolérance exactes sont définies comme les intervalles les plus larges pour lesquels la solution optimale x^* reste optimale, avec des définitions formelles pour les bornes inférieures et supérieures des profits et des poids.

4.3 Méthodes exactes pour l'analyse de tolérance

Pisinger et Saidi proposent un algorithme exact basé sur la programmation dynamique avec une complexité amortie de $O(c \log n)$ par item. L'idée centrale repose sur la réutilisation des sous-problèmes dans une structure arborescente. L'algorithme calcule les limites de tolérance en résolvant des sous-problèmes où chaque item est successivement retiré, utilisant des relations précises entre la solution originale et les solutions des sous-problèmes pour déterminer les intervalles de tolérance.

La structure arborescente qui exploite les sous-problèmes chevauchants est au cœur de la réduction de complexité. Chaque niveau de l'arbre ajoute $n/2^i$ items à 2^i sous-problèmes, pour une complexité totale de $O(nc \log n)$. L'architecture de cette procédure permet une réutilisation optimale des calculs intermédiaires et élimine les redondances dans la résolution de sous-problèmes similaires.

4.4 Méthodes approximatives

L'utilisation de la borne supérieure de Dantzig permet d'obtenir des limites de tolérance approximatives en temps $O(\log n)$ par item. Cette borne, calculée à partir de la solution du problème relaxé, fournit une estimation rapide mais potentiellement sous-optimale des intervalles de tolérance. Une alternative plus rapide mais moins précise utilise la borne de Dembo-Hammer, calculable en temps constant mais avec une qualité de solution généralement inférieure.

4.5 Résultats expérimentaux et comparaisons

Les tests expérimentaux sur différentes catégories d'instances montrent que l'algorithme exact résout toutes les instances en moins d'une seconde, tandis que les approches approximatives sont extrêmement rapides mais moins précises. La qualité des limites de tolérance varie significativement selon le type d'instance, avec des intervalles plus larges pour les instances non corrélées et plus étroits pour les instances fortement corrélées. Ces résultats soulignent l'importance du compromis entre précision et temps de calcul dans le choix de la méthode d'analyse.

5 Conclusion et Perspectives

Le présent travail a réalisé une synthèse critique des outils d'optimisation mathématique pertinents pour l'analyse des jeux de fantasy cyclisme. Il s'est concentré sur l'intégration de deux champs : le cadre MIP générique de Beliën et al. (2017) [Beliën et al., 2017] (Section 3) pour la modélisation multi-étapes, et les méthodes d'Analyse Post-Optimale de Pisinger et Saidi (2017) [Pisinger & Saidi, 2017] (Section 4) pour l'analyse de tolérance. La contribution de cette synthèse vient de la démonstration que la modélisation dynamique de type sac à dos (knapsack) peut être avantageusement complétée par une analyse de tolérance des solutions.

Cette étude a permis de mettre en avant les perspectives suivantes. L'analyse de tolérance étudiée (Pisinger et Saidi, 2017) pourrait constituer une base pour de nouvelles applications dans le fantasy cyclisme. Deux axes semblent particulièrement prometteurs : l'identification des coureurs critiques, dont la variation de performance impacte le plus la solution optimale, et la gestion robuste des transferts, via l'évaluation systématique de la stabilité de l'équipe face aux incertitudes.

Cependant, l'adaptation de ces méthodes au modèle dynamique de Beliën pose plusieurs défis méthodologiques. La gestion de la dimension temporelle et des transferts introduit une complexité accrue, nécessitant le développement d'approches novatrices pour l'analyse de sensibilité dans un contexte dynamique. Cette complexité substantielle appelle à l'élaboration d'algorithmes optimisés et de méthodes d'approximation efficaces.

Au-delà des contributions théoriques, l'intégration de ces analyses a des implications pratiques directes. Ces outils pourraient être intégrés dans des plateformes d'aide à la décision pour les participants, des systèmes de recommandation de transferts robustes et des analyses de risque personnalisées. Pour les organisateurs de jeux, ces analyses pourraient guider la conception de règles équilibrées et stimulantes.

Références

[Ausloos, 2024] Ausloos, M. (2024). *Should one (be allowed to) replace the Cipollini's ?*. Annals of Operations Research, 1-19. DOI : 10.1007/s10479-024-06206-y.

[Bampis et al., 2022] Bampis, E., Escoffier, B., & Teiller, A. (2022). *Multistage knapsack*. Journal of Computer and System Sciences, 126, 106-118. DOI : 10.1016/j.jcss.2022.01.002.

[Beliën et al., 2017] Beliën, J., Goossens, D., & Van Reeth, D. (2017). *Optimization modelling for analyzing fantasy sport games*. INFOR : Information Systems and Operational Research, 55(4), 275-294. DOI : 10.1080/03155986.2017.1279899.

[Beliën et al., 2011] Beliën, J., Goossens, D., Van Reeth, D., & De Boeck, L. (2011). *Using mixed-integer programming to win a cycling game*. INFORMS Transactions on Education, 11(3), 93-99. DOI : 10.1287/ited.1110.0062.

[Durán, 2021] Durán, G. (2021). *Sports scheduling and other topics in sports analytics : a survey with special reference to Latin America*. TOP, 29(1), 125-155.

[Kumabe & Yoshida, 2024] Kumabe, S., & Yoshida, Y. (2024). *Average sensitivity of the knapsack problem*. arXiv preprint arXiv :2405.13343.

[Pisinger & Saidi, 2017] Pisinger, D., & Saidi, A. (2017). *Tolerance analysis for 0-1 knapsack problems*. European Journal of Operational Research, 258(3), 866-876. DOI : 10.1016/j.ejor.2016.10.054.