

EXERCICE 15

Logique - Quantificateurs

quels que soient les prédictats F G ,
quelle que soit la constante a ,

$$((G(a) \Rightarrow (\exists x, F(x))) \Leftrightarrow \exists x, (G(a) \Rightarrow F(x)))$$

Soit la constante a

Montrons $(G(a) \Rightarrow (\exists x, F(x))) \Leftrightarrow \exists x, (G(a) \Rightarrow F(x))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $G(a) \Rightarrow (\exists x, F(x))$ (h1)

Montrons $\exists x, G(a) \Rightarrow F(x)$ (2)

($\exists E$)

Supposons que $G(a)$ (h2)

Montrons $\exists x, G(a) \Rightarrow F(x)$ (3)

($\exists E$)

Montrons $\exists x, F(x)$ (4)

($\Rightarrow E$)

Montrons $G(a)$ (5)

d'après (h2)

Montrons $G(a) \Rightarrow (\exists x, F(x))$ (6)

d'après (h1)

Soit l'élément x

Supposons que $F(x)$ (h3)

Montrons $\exists x, G(a) \Rightarrow F(x)$ (7)

($\exists I$)

Supposons que $G(a)$ (h4)

Montrons $F(x)$ (8)

d'après (h3)

Supposons que $\neg(G(a))$ (h5)

Montrons $\exists x, G(a) \Rightarrow F(x)$ (9)

($\exists I$)

Supposons que $G(a)$ (h6)

Montrons $F(a)$ (10)

($\perp E$)

Montrons \perp (11)

($\neg E$)

Montrons $G(a)$ (12)

d'après (h6)

Montrons $\neg(\mathbf{G}(\alpha))$ (13)

d'après (h5)

Supposons que $\exists x, \mathbf{G}(\alpha) \Rightarrow \mathbf{F}(x)$ (h7)

Montrons $\mathbf{G}(\alpha) \Rightarrow (\exists x, \mathbf{F}(x))$ (14)

($\exists E$)

Montrons $\exists x, \mathbf{G}(\alpha) \Rightarrow \mathbf{F}(x)$ (15)

d'après (h7)

Soit l'élément x

Supposons que $\mathbf{G}(\alpha) \Rightarrow \mathbf{F}(x)$ (h8)

Montrons $\mathbf{G}(\alpha) \Rightarrow (\exists x, \mathbf{F}(x))$ (16)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $\mathbf{G}(\alpha)$ (h9)

Montrons $\exists x, \mathbf{F}(x)$ (17)

($\exists I$)

Montrons $\mathbf{F}(x)$ (18)

($\Rightarrow E$)

Montrons $\mathbf{G}(\alpha)$ (19)

d'après (h9)

Montrons $\mathbf{G}(\alpha) \Rightarrow \mathbf{F}(x)$ (20)

d'après (h8)