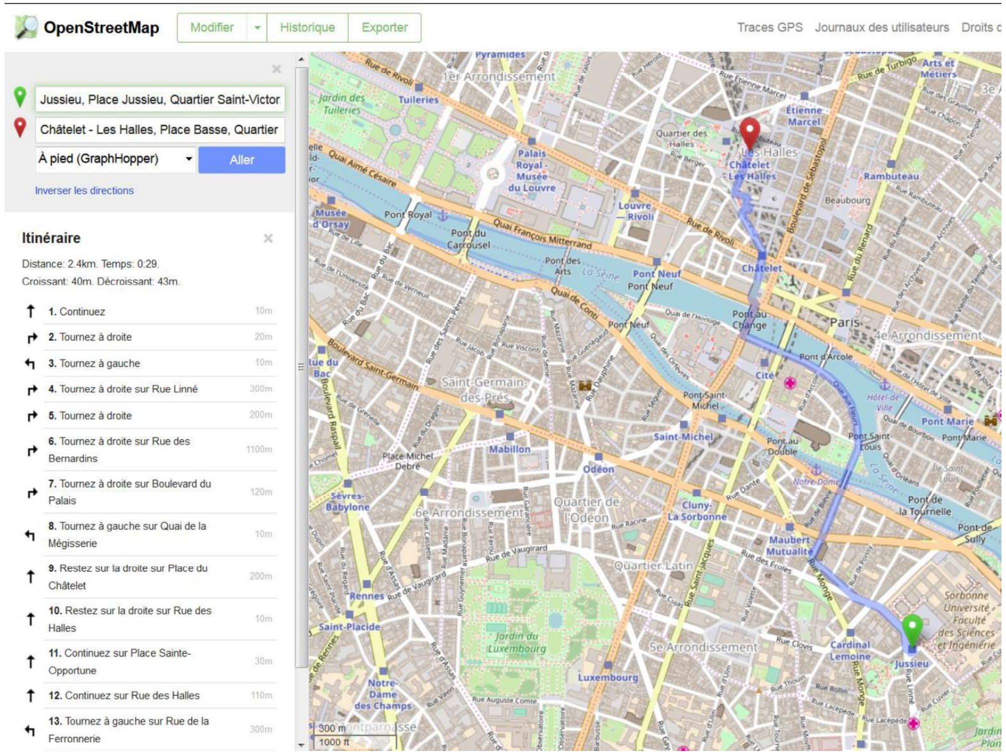
Algorithmes basés sur des parcours : algorithmes de Dijkstra et de Prim

- Plus courts chemins : algorithme de Dijkstra
- Arbre couvrant de coût minimum : algorithme de Prim

LU3IN003 - Chargés de cours : Fanny Pascual et Olivier Spanjaard.



Plus courts chemins
(chemins de coûts minimum)

Définition du problème

Soit G=(S,A) un graphe orienté (n sommets, m arcs).
Soit c : A→R une fonction coût sur les arcs.
Soient un sommet origine s et un sommet destination d.

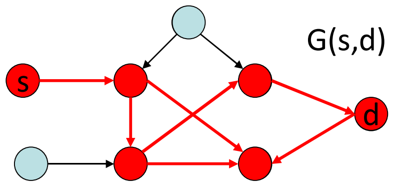
Coût d'un chemin $l = (a_1,a_2,\dots,a_p)$, noté $c(l)$ de G : $\sum_{k=1..p} c(a_k)$.

Etant donnés 2 sommets s et d, on veut :

a) savoir s'il existe un chemin de coût minimum de s à d ;
b) si oui, déterminer un tel chemin.

Le sous-graphe G(s,d)

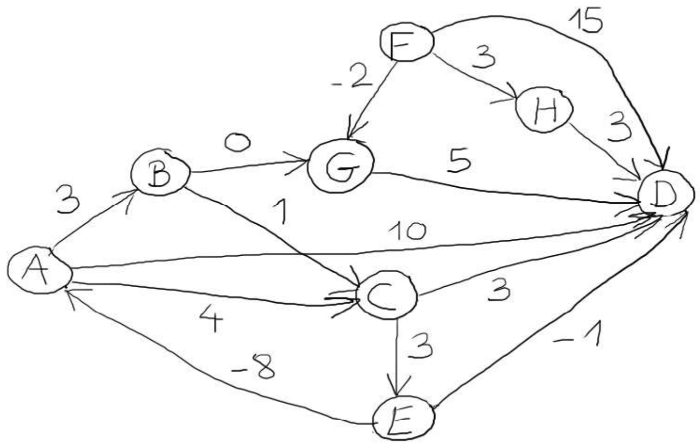
Les sommets x du graphe qui n'appartiennent pas à un chemin de s à d peuvent être supprimés de G.
G(s,d) est le sous-graphe de G obtenu après suppression de ces sommets.



G(s,d) : sous-graphe rouge

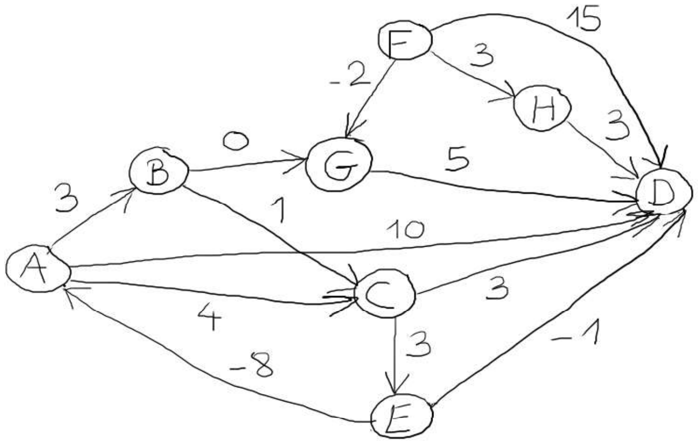
Propriété :
c chemin de s à d dans G ⇔ c chemin de s à d dans G(s,d)

Quiz Quel est le coût d'un chemin de coût minimum entre F et D dans G ?



A. 3
B. 6
C. 15
D. Il n'y a pas de chemin de coût minimum entre F et D.

Quiz Quel est le coût d'un chemin de coût minimum entre A et D dans G ?



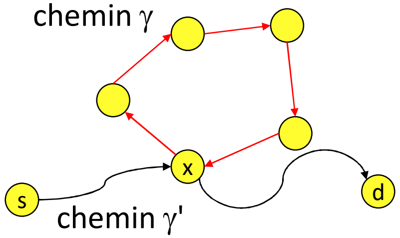
A. 6
B. 7
C. 10
D. Il n'y a pas de chemin de coût minimum entre A et D.

Définition :
Un circuit est dit absorbant si son coût est strictement négatif.

Propriété :
Il existe un chemin de s à d de coût minimum ⇔
- il existe un chemin de s à d dans G.
- il n'existe pas de circuit absorbant dans G(s,d).

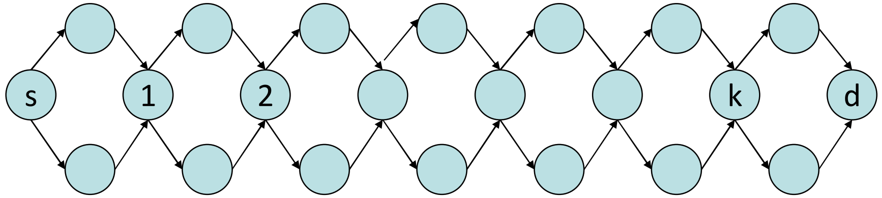
Propriété :
Un chemin de coût minimum de s à d est élémentaire.

Preuve : Si γ est un chemin de coût minimum de s à d,
tout chemin élémentaire γ' extrait de γ satisfait $c(\gamma') \leq c(\gamma)$.



Un chemin élémentaire n'empruntant pas 2 fois le même arc,
le nombre de chemins de s à d à examiner est fini.

Remarque : il peut être très grand (exponentiel en n).



$n = 3(k+1) +1$
Nombre de chemins de s à d : $2^{(k+1)} = 2^{((n-1)/3)}$.

Arborescence des chemins de coût minimum

Hypothèses :
- Le sommet s est une racine de G;
- G ne possède pas de circuit absorbant.

Propriété :
G possède une arborescence couvrante H de racine s telle que
pour tout sommet x de G, le chemin de s à x dans H est
un chemin de coût minimum de s à x dans G.

H est appelée arborescence des chemins de coût minimum d'origine s.

Arborescence des chemins de coût minimum

Soit H une arborescence couvrante de racine s dans G.
Soit d(x) le coût du chemin de s à x dans H.

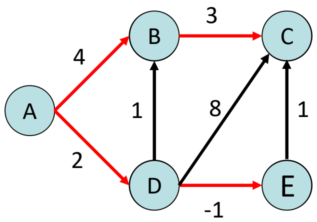
Propriété :
H est une arborescence des chemins de coût minimum pour G
si et seulement si pour tout arc (x,y) de G on a :

$$d(y) \leq d(x) + c(x,y).$$

Cette propriété est à la base de la plupart des algorithmes
de calcul des chemins de coût minimum.

Quiz

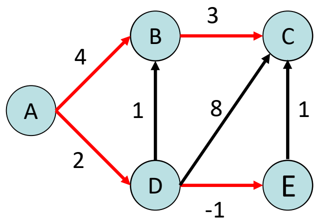
L'arborescence en rouge est une arborescence des chemins de coût minimum.



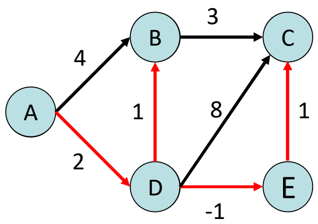
A. Vrai
B. Faux

Quiz

L'arborescence en rouge est une arborescence des chemins de coût minimum.



A. Vrai
B. Faux :



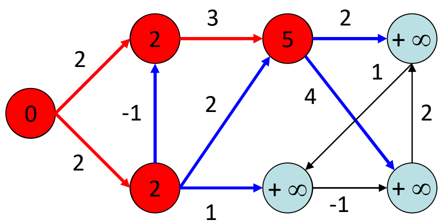
Notations :
Soit H=(X,U) l'arborescence « couvrante » (de racine s) en cours.

Si $x \in X$, le coût du chemin de s à x dans H est noté d(x).
Si $x \notin X$, on fixe d(x)= $+\infty$

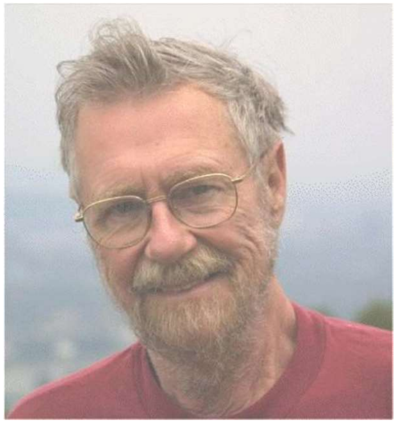
Un arc (x,y) de G, avec $x \in X$ est dit incompatible pour H si :
$d(y) > d(x) + c(x,y)$

H : arborescence couvrante :
- sommets et arcs rouges
- valeurs d(x) dans les sommets rouges

Arcs incompatibles en bleu



Coûts positifs ou nuls : algorithme de Dijkstra



Edsger Dijkstra (1930-2002)

Informaticien néerlandais.

1959 : publication de « l'algorithme de Dijkstra ».

1972 : Prix Turing (science et art des langages de programmation, Algol).

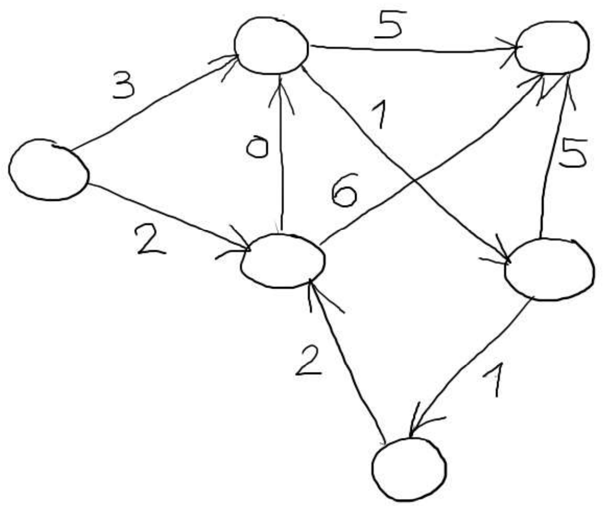
Coûts positifs ou nuls : algorithme de Dijkstra

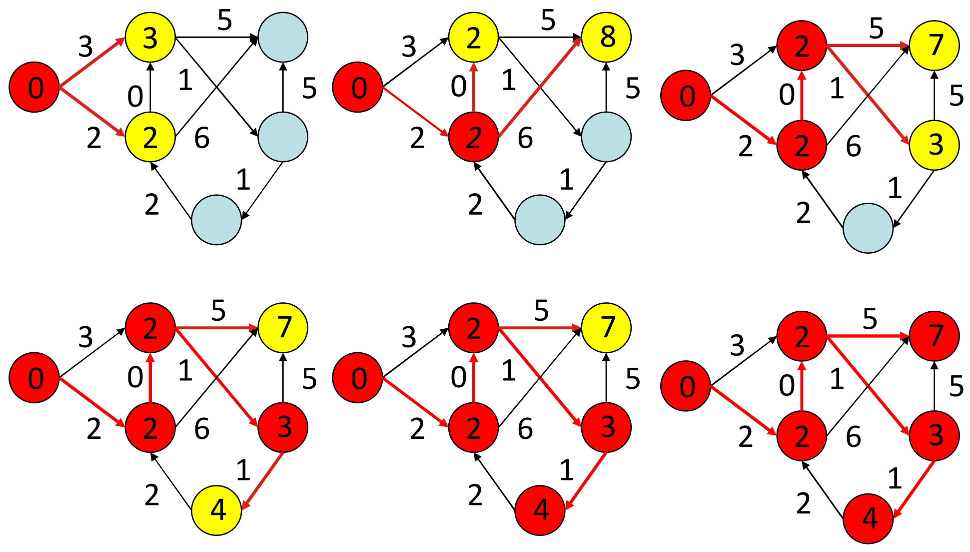
Donnée :
Graphe orienté G=(S,A),
Sommet s racine de G,
Fonction coût c sur les arcs telle que pour tout arc (x,y) : $c(x,y) \geq 0$.

Algorithme de Dijkstra :
Initialisation;
Pour k de 1 à n faire
    Soit x un sommet ouvert tel que d(x) est minimum ;
    Examiner(x);
FinPour.
// d(x) le coût du chemin de s à x dans H

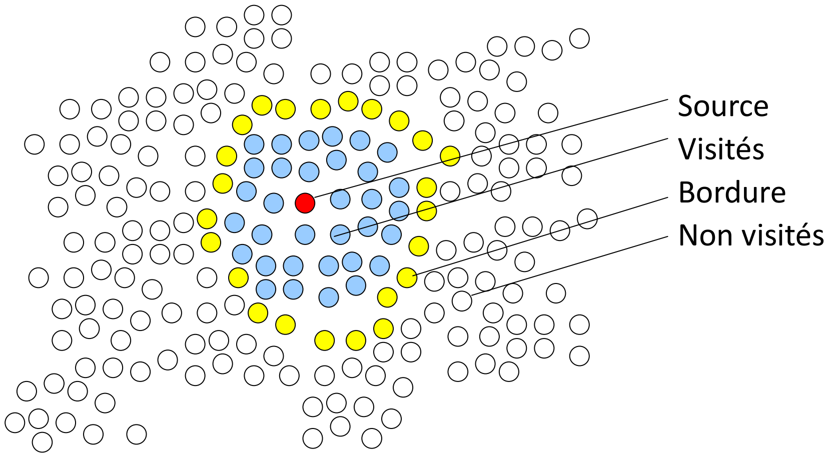
Initialisation
    $d(s_1) = 0$; ouvrir(s_1);
    Pour tout k de 2 à n faire
        $d(s_k) = +\infty$;
    Fin Pour

Examiner(x)
    Pour tout successeur y de x faire
        Si $d(y) > d(x)+c(x,y)$ alors
            $d(y) = d(x)+c(x,y)$;
            pred(y) = x;
            Si y n'est pas ouvert, ouvrir(y)
            FinSi
        FinSi
    FinPour
    fermer(x);



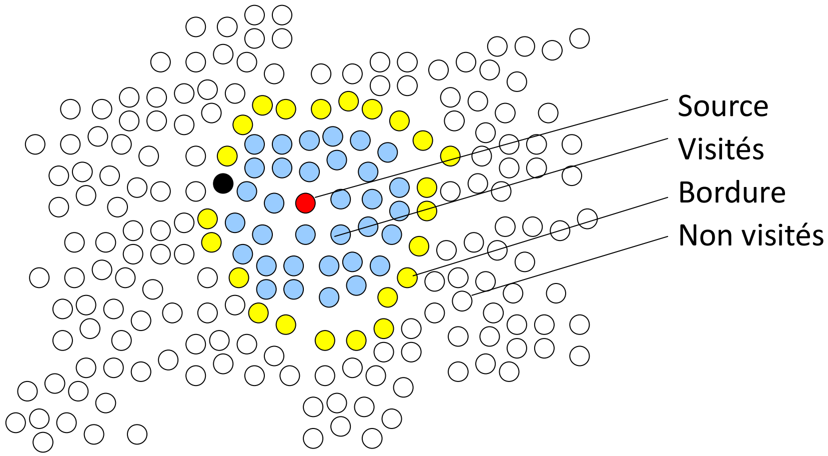


Interprétation physique



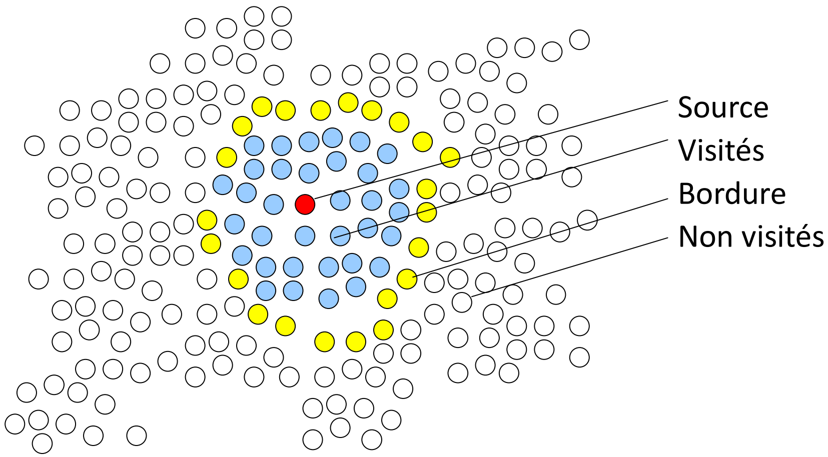
Front de propagation autour de la source = ronds dans l'eau

Interprétation physique



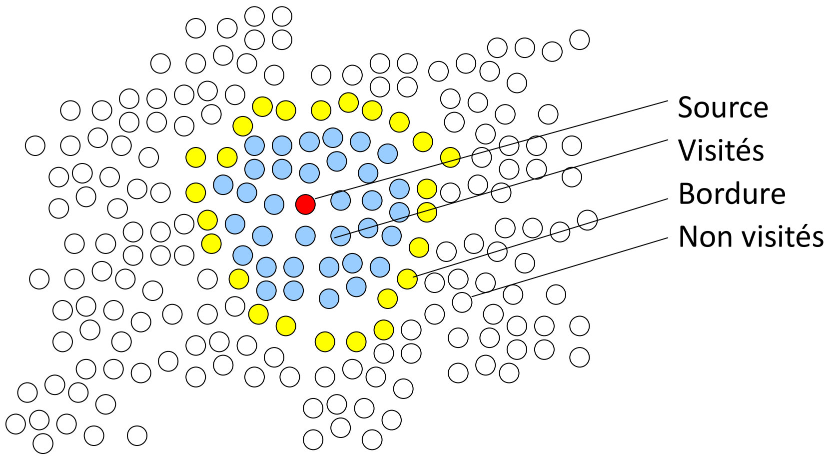
Front de propagation autour de la source = ronds dans l'eau

Interprétation physique



Front de propagation autour de la source = ronds dans l'eau

Interprétation physique



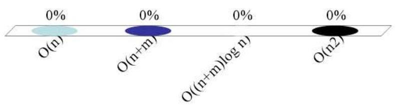
Front de propagation autour de la source = ronds dans l'eau

Quiz

Quelle est la complexité de l’algorithme de Dijkstra ?

Initialisation;
Pour k de 1 à n faire
    Soit x un sommet ouvert
        tel que d(x) est minimum ;
    Examiner(x)
FinPour

A. O(n)
B. O(n+m)
C. O((n+m)log n)
D. $O(n^2)$



Complexité de l’algorithme de Dijkstra.

Initialisation;
Pour k de 1 à n faire
    Soit x un sommet ouvert tel que d(x) est minimum ;
    Examiner(x)
FinPour

1) Initialisation : O(n)
2) Recherche d’un sommet ouvert / d minimum : O(n)
3) Examiner(x) : $O(d^+(x))$

Complexité de l’algorithme : $O(n^2)$.

L’ensemble dynamique O des sommets ouverts peut être géré en utilisant une structure de données implémentant le type de données abstrait TAS.

On peut alors implémenter l’algorithme de Dijkstra avec une complexité de O((n+m)log(n)).

Tas

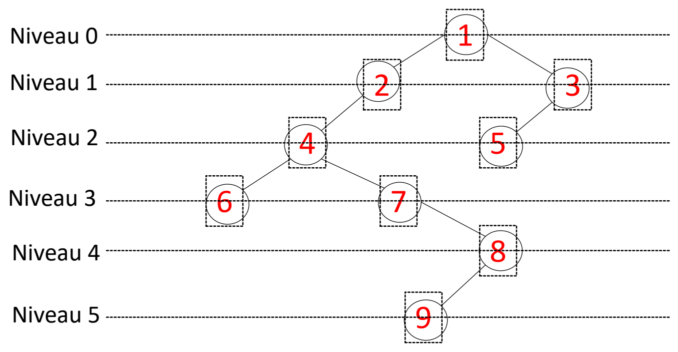
Soit E un ensemble dynamique où chaque élément e est affecté d’une priorité prio(e).

Opérations d’un tas

- CréerTas(E) crée un ensemble E vide
- Insérer(e,p,E) insère l’élément e de priorité p dans E
- BaisserPriorité(e,p,E) met la priorité de e à p dans E
- SupprimerMin(E) supprime dans E un élément de priorité minimum
- Min(E) renvoie un élément de priorité minimum de E

Numérotation hiérarchique des sommets d'un arbre binaire.

Ordre croissant des numéros :
1) de haut en bas (par niveaux croissants)
2) de gauche à droite.



Arbre binaire parfait A de hauteur h :

1) les niveaux 0,1,..,h-1 de A sont complets (i.e : le niveau j contient 2^j sommets);

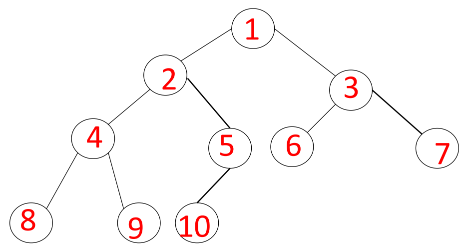
2) les j sommets du niveau h sont constitués:
- si j=2q, des 2 fils des q premiers sommets du niveau h-1
- si j=2q+1, des 2 fils des q premiers sommets du niveau h-1 du fils gauche du $(q+1)^{\text{ième}}$ sommet du niveau h-1.

Propriétés :
1) Il existe un seul arbre binaire parfait à n sommets (P_n)
2) La hauteur de (P_n) est $\lfloor \log_2 n \rfloor$

Arbre binaire parfait

Arbre tel que tous les niveaux sauf éventuellement le dernier sont remplis, et dans ce cas les feuilles du dernier niveau sont regroupées à gauche.

Exemple: L'arbre parfait à 10 sommets.



Tournoi
Un tournoi T pour (E,prio) est un arbre binaire sur E tel que :
pour tout sommet x distinct de la racine, prio(père(x)) ≤ prio(x).

Tas : tournoi parfait.

Propriétés

1) les sous-arbres T(x) de T sont des tas;

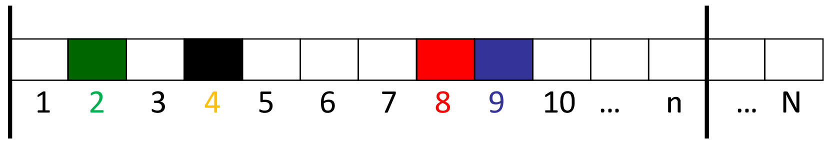
2) racine(T) est un sommet de priorité minimum.

3) Propriétés liées à la numérotation num
- num(fg(x))=2∗num(x) , num(fd(x))=2∗num(x) + 1,
- num (père(x))= num (x) / 2 (pour x≠rac(T))
- EST_FEUILLE(x)⇔ 2∗num (x)> n
- num(DERNIERE_FEUILLE(T)) = n

Représentation d'un tas par un couple (TAB[1..N],n)

Valide si la constante N majore le nombre maximal d'éléments dans E

Les indices {1..n} de TAB correspondent aux numéros des sommets de T.



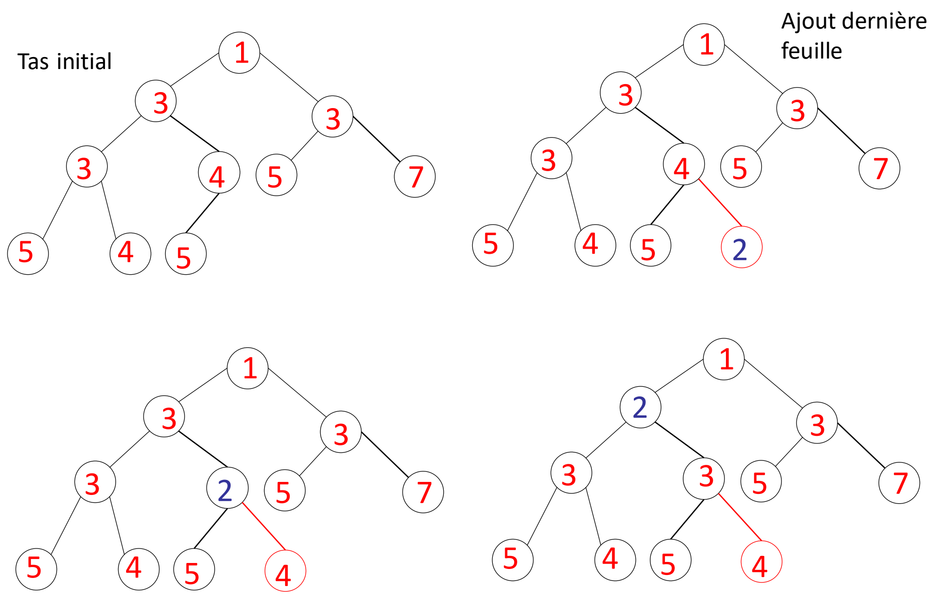
sommet x (indice 4 dans TAB):

fils gauche de x (indice 8 dans TAB)

fils droit de x (indice 9 dans TAB)

père de x (indice 2 dans TAB)

Exemple: Insérer(e,2,T)



Remontée dernière feuille

Tas final

Opérations sur un tas

Insertion d'un élément de priorité k.
On utilise un tas T pour gérer (E,prio).

```
Procédure Insérer(e,k,T) ;
f:=Créer_Dernière_Feuille(e,k,T);
x:=f;
Tantque x≠rac(T) et x.prio<père(x).prio faire
            Echanger(x,père(x));
    x:=père(x)
FinTantque.
```

Complexité: $O(\log_2 n)$ (si la complexité de Echanger est O(1)).

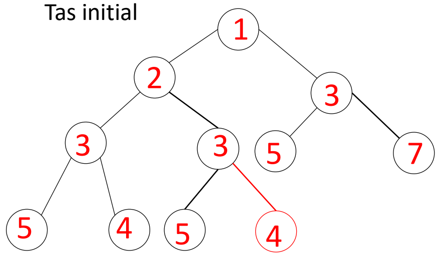
Suppression d'un élément de priorité minimale.

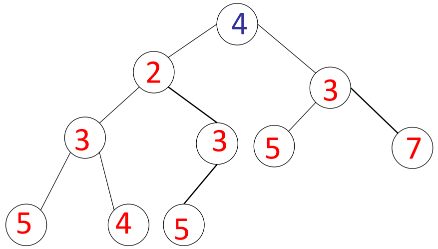
```
Procédure Supprimer_Min(T);
Echanger(rac(T),Dernière_Feuille(T));
Couper_Dernière_Feuille(T);
x:=rac(T);
Tantque (non Est_Feuille(x,T) et
            x.prio>Filsmin(x).prio) faire
            Echanger(x,Filsmin(x));
    x:=Filsmin(x)
Fintantque.
```

Complexité : $O(\log_2 (n))$

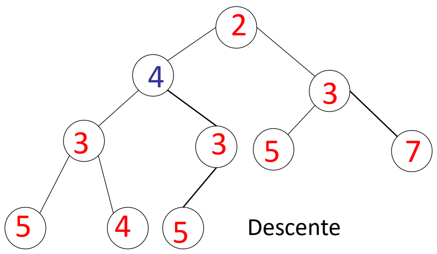
Exemple: Supprimer_Min(T)

Tas initial

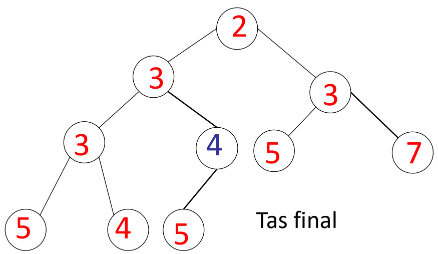




Echange racine-dernière feuille
Couper dernière feuille



Descente



Tas final

Baisser la priorité d'un élément
(en ayant un pointeur sur cet élément)

La priorité de l'élément e passe à p :

```
Procédure Baisser_Priorité (T,e,p);
e.Prio :=p;
x:=e ;
Tantque x≠rac(T) et x.prio<père(x).prio faire
            Echanger(x,père(x));
    x:=père(x)
Fintantque.
```

Complexité : $O(\log_2 (n))$

Gestion de l'ensemble des sommets ouverts dans l'algorithme de Dijkstra.

L'ensemble dynamique est O ;
La priorité d'un sommet ouvert x est d(x) : coût du chemin de s à x dans l'arborescence H courante.

Soients à la fin de l'itération k :
- F l'ensemble des sommets fermés,
- O l'ensemble des sommets ouverts,

Un sommet ouvert z de priorité minimale est à la racine du tas.
Donc, pour calculer z , complexité O(1)

Gestion de l'ensemble des sommets ouverts dans l'algorithme de Dijkstra.

Algorithme de Dijkstra :
$d(s_1) = 0$; ouvrir(s_1);
Pour tout k de 2 à n faire
    $d(s_k) = +\infty$;
Fin Pour

Pour k de 1 à n faire
    Soit x un sommet ouvert tel que d(x) est minimum ;
    Examiner(x);
FinPour.

Examiner(x)
Pour tout successeur y de x faire
    Si $d(y) > d(x)+c(x,y)$ alors
        $d(y) = d(x)+c(x,y)$;
        $pred(y) = x$;
        Si y n'est pas ouvert, ouvrir(y)
        FinSi
    FinSi
FinPour
fermer(x);

Il faut insérer dans O chaque successeur y de z non couvert (c'est-à-dire ni dans O ni dans F) avec la priorité $d(z) + c(z,y)$.
Complexité : $O(\log(n))$ par successeur

Pour chaque successeur y de z tel que y est ouvert et (z,y) est incompatible, il faut remplacer la priorité de y par la nouvelle évaluation de y : c'est-à-dire $d(z) + c(z,y)$.
Complexité : $O(\log(n))$ par successeur

Il faut supprimer z du tas :
Complexité : $O(\log(n))$ par sommet supprimé.

Il en résulte que si les sommets sont examinés dans l'ordre $(z_1,z_2,\ldots,z_n)$, le nombre total d'opérations de mise à jour du tas est majoré par :

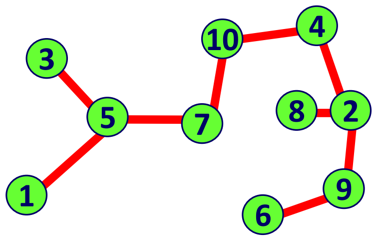
$$C \log(n)(n+d^+(z_1)+\ldots+d^+(z_n)) = C\,(n+m)\log(n).$$

Complexité globale : $O((n+m)\log(n))$

Arbre couvrant de coût minimum

Application : conception de réseau

Une entreprise de télécommunication doit relier un ensemble de clients. Le coût de connection de deux clients est connu. But : relier les clients à un coût minimal.



Nombreuses applications :
- conception de réseau (hydraulique, electrique, communication…)
- utilisé pour d'autres problèmes : clustering, imagerie, relaxation de problèmes difficiles (arbre de Steiner, voyageur de commerce), etc.

Définition du problème

Donnée :

Un graphe non orienté connexe G =(S,A) (n sommets, m arêtes)

Une fonction coût c : A $\rightarrow$ R (valuation des arêtes)

Rappel :

Un arbre couvrant de G est un graphe partiel de G qui est un arbre.

(On identifiera un arbre couvrant à son ensemble d'arêtes)

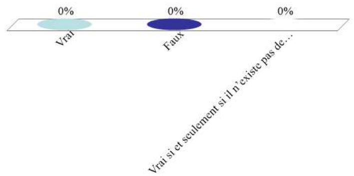
Définition :
Soit H un arbre couvrant, le coût de H, noté aussi c(H) est la somme $\sum_{e \in H} c(e)$ des coûts de ses arêtes.

Problème :
Déterminer un arbre couvrant H* de G de coût minimum.

Quiz

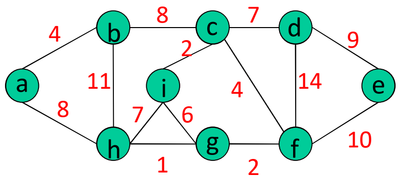
Soit G un graphe. Il existe toujours un arbre couvrant de coût minimum de G.

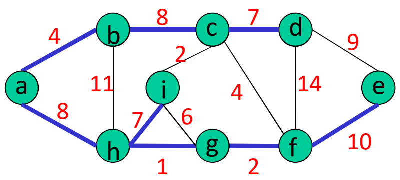
A. Vrai
B. Faux
C. Vrai si et seulement si il n'existe pas de circuit absorbant dans G.



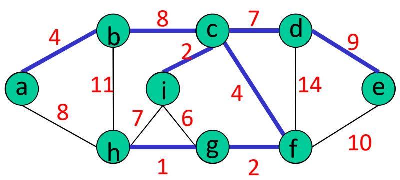
Exemple

Graphe G :





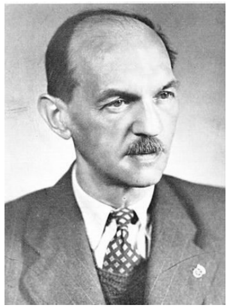
Arbre couvrant de coût = 47



Arbre couvrant de coût = 37

Algorithme de Prim

Algorithme découvert par Jarnik en 1930, puis par Prim en 1957.
algorithme aussi dit : de Jarnik-Prim, ou de Jarnik-Prim-Dijkstra.



Vojtech Jarnik (1897-1970)
mathématicien tchèque.

Robert C. Prim (1921)
mathématicien et informaticien américain (laboratoires Bell).

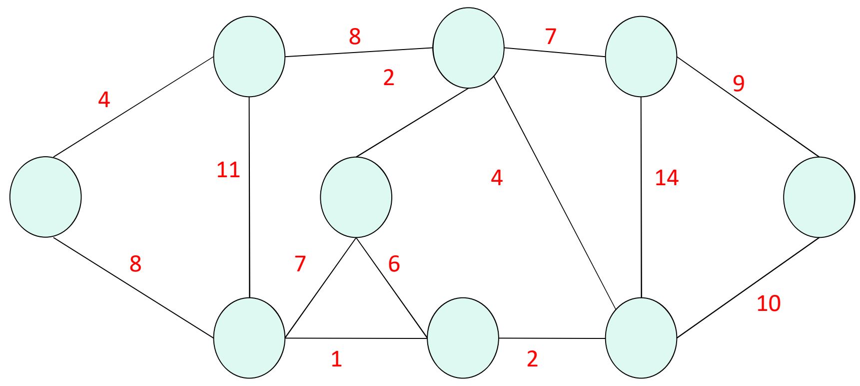
Algorithme de Prim

Algorithme de Prim :

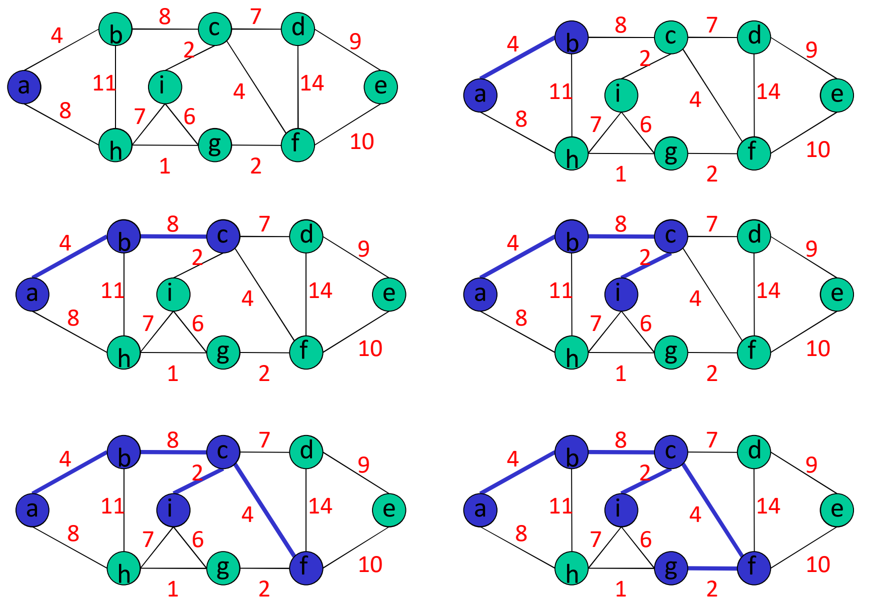
d(s_1) = 0; ouvrir(s1);
Pour tout k de 2 à n faire d(s_k) = + ∞ ;
FinPour
Pour k de 1 à n faire
    Soit x un sommet ouvert tel que d(x) est minimum ;
    Examiner(x);
FinPour.

Examiner(x)

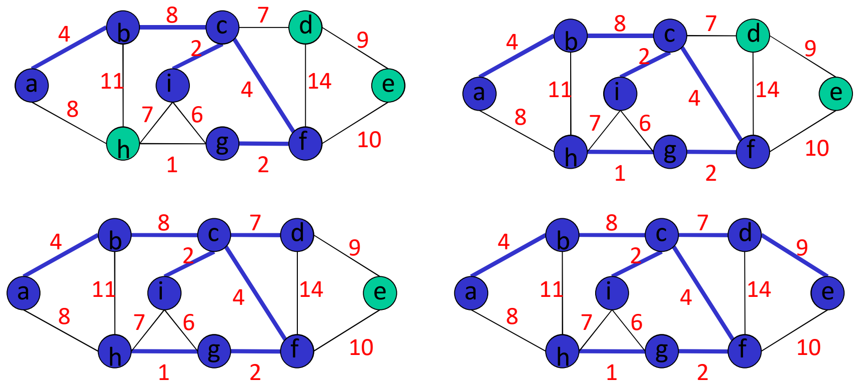
Pour tout voisin y de x faire
    Si d(y) > c(x,y) alors
        d(y) = c(x,y); père(y)=x; Si y n'est pas ouvert ouvrir(y);
    FinSi
FinPour
fermer(x);



Une exécution de l'algorithme de Prim



Une exécution de l'algorithme de Prim (fin)



Algorithme très proche de celui de Dijkstra :

```
d(s_1) = 0; ouvrir(s_1);
Pour tout k de 2 à n faire
        d(s_k) = + ∞ ;
FinPour
Pour k de 1 à n faire
    Soit x un sommet ouvert tel que d(x) est minimum ;
    Examiner(x);
FinPour.
```

Examiner(x) dans Dijkstra :	**Examiner(x) dans Prim :**

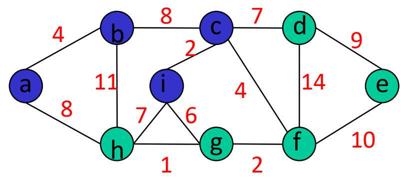
Pour tout successeur y de x faire
Si d(y) > d(x)+c(x,y)
alors d(y)= d(x)+c(x,y);
père(y)=x;
Si y n'est pas ouvert ouvrir(y);
FinSi
FinPour
fermer(x);
	Pour tout successeur y de x faire
	Si d(y) > c(x,y)
	alors d(y)= c(x,y);
	père(y)=x;
	Si y n'est pas ouvert ouvrir(y);
	FinSi
	FinPour
	fermer(x);

Complexité de l'algorithme de Prim

Même complexité que l'algorithme de Dijkstra : dépend de l'implémentation choisie.
En utilisant un tas : complexité en O(m log n)

Validité de l'algorithme de Prim : définition préliminaire

Définition d'un co-cycle :
Soit G=(S,A). Soit U un ensemble de sommets de S.
Le co-cycle de U est l'ensemble des arêtes de A ayant une extrémité dans U et une extrémité dans S\U.



L'algorithme de Prim retourne un arbre couvrant de coût minimum.

Preuve : Soit G=(S,A)
- Soit T l'arbre couvrant retourné par l'algo. de Prim.
  et T_i l'arbre à la fin de l'itération i de l'algo.
-Soit T* un arbre couvrant de coût minimum (un ACCM).

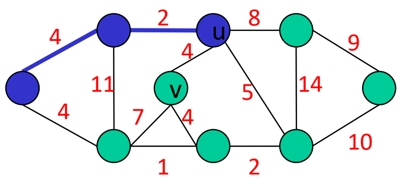
Si T= T* → T est un ACCM.

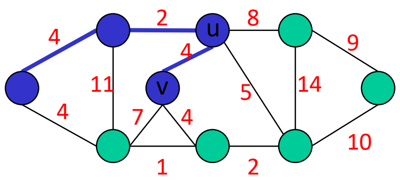
L'algorithme de Prim retourne un arbre couvrant de coût minimum.

Preuve : Soit G=(S,A)
- Soit T l'arbre couvrant retourné par l'algo. de Prim.
  et T_i l'arbre à la fin de l'itération i de l'algo.
-Soit T* un arbre couvrant de coût minimum (un ACCM).

Si T= T* → T est un ACCM.

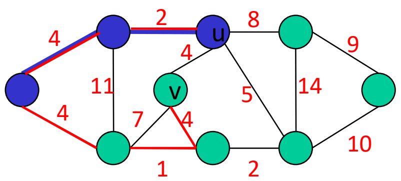
Sinon : Soit e={u,v} la première arête de A\ T* choisie par l'algo.
On suppose que cette arête a été choisie à l'itération k et que u a été ajoutée avant v (i.e. $u \in T_{k-1}$ et $T_{k-1} \cup \{e\} = T_k$) :





L'algorithme de Prim retourne un arbre couvrant de coût minimum.

Soit C la chaîne de u à v dans T* .



C U {e} forme un cycle.
Soit e* une arête de C différence de e et qui est dans le co-cycle de T_{k-1}
Par construction coût(e*)≥ coût(e) .

En remplaçant e* par e dans T* on obtient un arbre couvrant T_1* tel que coût(T_1*) ≤ coût(T*)
→ T_1* est un ACCM qui a une arête en commun de plus avec T.

On continue ce processus jusqu'à ce que T_k*=T → T est un ACCM.