

**Examen du 19/05/2023**

**Durée 1h30**

**Inscrire votre numéro d'anonymat sur votre copie.**

Tout appareil électronique interdit.

Les seuls documents autorisés sont le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et celui des règles de la Dédution Naturelle.

Le barème sur 34 points est donné à titre indicatif.

**Exercice 1 (0,5+1+2,5+(2,5+2,5)=9 points)**

Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  un ensemble de symboles de fonction avec  $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \{f\}$  et  $\mathcal{F}_2 = \{g\}$ .

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ .

On définit une structure  $\mathbf{M}$  dont le domaine d'interprétation est l'ensemble  $\mathbb{Z}$  comme suit :

$$\begin{aligned} f^{\mathbf{M}} : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} & g^{\mathbf{M}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ f^{\mathbf{M}}(n) &= -n & g^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) &= n_1 \times n_2, \end{aligned}$$

2. Calculer  $[f(g(f(a), g(b, f(b))))]^{\mathbf{M}}$  en fonction de  $a^{\mathbf{M}}$  et  $b^{\mathbf{M}}$ .
3. Déterminer  $a^{\mathbf{M}}$  et  $b^{\mathbf{M}}$  pour que la propriété « pour tout terme  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ , il existe un entier relatif  $n$  tel que  $[t]^{\mathbf{M}} = 2n$  » soit vérifiée. Montrer que c'est bien le cas.
4. Nous considérons maintenant les prédicats  $p$  et  $q$ , une variable  $x$  et la formule  $F = p(f(x)) \Rightarrow q(g(x, f(x)))$ .
  - (a) Définir une structure  $\mathbf{M}_1$  et une valuation  $v_1$  telle  $[F]_{v_1}^{\mathbf{M}_1} = 1$ . Justifier votre réponse.
  - (b) Définir une structure  $\mathbf{M}_2$  et une valuation  $v_2$  telle  $[F]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} = 0$ . Justifier votre réponse.

**Exercice 2 (4+5+2=11 points)**

Les preuves demandées devront être obtenues en utilisant les règles de la déduction naturelle et les règles dérivées du formulaire. Si vous n'avez pas réussi à construire une preuve  $B_i$  vous pouvez quand même l'utiliser dans les questions qui suivent.

Soit  $p$ ,  $q$  et  $s$  des prédicats unaires et  $r$  un prédicat binaire.

1. Compléter la preuve  $B_1$  ci-dessous de la formule  $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$  à partir de l'hypothèse  $h_1 : \neg \exists x p(x)$

$\langle 1_{B_1} \rangle$	supposons $h_1 : \neg \exists x p(x)$ , montrons $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$
	<b>preuve à compléter</b>
$\langle 1_{B_1} \rangle$	CQFD ( <b>nom de la règle à compléter</b> ) <b>preuve <math>B_1</math></b>

*Indication* : on suppose que l'on dispose d'un nombre infini dénombrable de symboles de variable, et il est donc possible d'appliquer la règle  $I_{\exists}$  en utilisant un « nouveau » symbole de variable.

2. Soit  $B_2$  une sous-boîte d'une boîte  $B$  contenant les trois hypothèses :

$$h_A : (\exists x p(x)) \Rightarrow \exists x q(x) \quad h_B : \forall x (q(x) \Rightarrow \exists y r(x, y)) \quad h_C : \forall x \forall y (r(x, y) \Rightarrow s(x))$$

Ces trois hypothèses sont donc utilisables dans la boîte  $B_2$ . Compléter la preuve  $B_2$  ci-dessous de la formule  $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$  à partir de l'hypothèse  $h_2 : \exists x p(x)$ .

$\langle 1_B \rangle$	supposons $h_A : (\exists x p(x)) \Rightarrow \exists x q(x)$ , $h_B : \forall x (q(x) \Rightarrow \exists y r(x, y))$ , $h_C : \forall x \forall y (r(x, y) \Rightarrow s(x))$ , montrons ...
$\vdots$	
$\langle 1_{B_2} \rangle$	supposons $h_2 : \exists x p(x)$ , montrons $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$
$\langle 2_{B_2} \rangle$	montrons $\exists x q(x)$ <i>preuve à compléter</i>
$\langle 2_{B_2} \rangle$	CQFD ( <i>nom de la règle à compléter</i> )
$\langle 3_{B_2} \rangle$	soit une nouvelle variable $x_1$ , supposons $h_3 : q(x_1)$ , montrons $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$ <i>preuve à compléter</i>
$\langle 3_{B_2} \rangle$	CQFD ( <i>nom de la règle à compléter</i> )
$\langle 1_{B_2} \rangle$	CQFD ( $E\exists$ ) <span style="float: right;"><b>preuve <math>B_2</math></b></span>
$\vdots$	
$\langle 1_B \rangle$	CQFD ( $\dots$ )

3. Quelle règle de la déduction naturelle permet de prouver la formule  $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$  à partir des hypothèses  $h_A$ ,  $h_B$  et  $h_C$  en utilisant les preuves précédentes ? Compléter la preuve  $B$  ci-dessous en utilisant cette règle. On pourra utiliser les boîtes  $B_1$  et  $B_2$  des questions précédentes sans recopier le contenu de ces preuves.

$\langle 1_B \rangle$	supposons $h_A : (\exists x p(x)) \Rightarrow \exists x q(x)$ , $h_B : \forall x (q(x) \Rightarrow \exists y r(x, y))$ , $h_C : \forall x \forall y (r(x, y) \Rightarrow s(x))$ montrons $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$ <i>preuve à compléter</i>
$\langle 1_B \rangle$	CQFD ( <i>nom de la règle à compléter</i> ) <span style="float: right;"><b>preuve <math>B</math></b></span>

**Exercice 3 ((2+2)+(2+2+1)+(1+2+2)=14 points)**

Soit  $X$  un ensemble de variables et  $p$  un prédicat unaire.

- Soit  $\mathbf{M}$  une structure quelconque.
  - Soit  $v_1 : X \rightarrow |\mathbf{M}|$  et  $v_2 : X \rightarrow |\mathbf{M}|$  deux valuations quelconques. A-t-on  $[\forall z p(z)]_{v_1}^{\mathbf{M}} = [\forall z p(z)]_{v_2}^{\mathbf{M}}$  ? (justifier)
  - Soit  $v : X \rightarrow |\mathbf{M}|$  une valuation telle que  $[\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = 0$  et  $m \in |\mathbf{M}|$  un élément quelconque du domaine d'interprétation  $|\mathbf{M}|$ . A-t-on  $[p(x)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 0$  ? (justifier)
- Soit  $F_1$  la formule  $\exists x (p(x) \Rightarrow \forall z p(z))$ ,  $\mathbf{M}$  une structure quelconque et  $v : X \rightarrow |\mathbf{M}|$  une valuation quelconque.
  - En supposant que  $[\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = 1$ , montrer que  $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$ .
  - En supposant que  $[\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = 0$ , montrer que  $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$ .
  - Que pouvez-vous en déduire sur la formule  $F_1$  ?
- Soit  $F_2$  la formule  $\forall x (p(x) \Rightarrow \forall z p(z))$ .
  - Etant donné une structure  $\mathbf{M}$  et une valuation  $v : X \rightarrow |\mathbf{M}|$ , donner l'expression booléenne  $[F_2]_v^{\mathbf{M}}$ .
  - En supposant que  $|\mathbf{M}| = \{k\}$  est un singleton (i.e. contient un unique élément  $k$ ), montrer que  $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 1$ .
  - La formule  $F_2$  est-elle valide ? si oui en donner une preuve en utilisant les règles de la déduction naturelle, si non construire une structure  $\mathbf{M}$  telle que  $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 0$  pour toute valuation  $v$ . Justifier votre réponse.

**Corrigé de l'examen du 19/05/2023**

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

(1). Définition inductive de  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$  :

$a \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ .

$b \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ .

Si  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ , alors  $f(t) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ .

Si  $t_1$  et  $t_2 \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ , alors  $g(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ .

(2).

$$\begin{aligned} [f(g(f(a), g(b, f(b))))]^{\mathbf{M}} &= f^{\mathbf{M}}(g^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}(a^{\mathbf{M}}), g^{\mathbf{M}}(b^{\mathbf{M}}, f^{\mathbf{M}}(b^{\mathbf{M}})))) \\ &= f^{\mathbf{M}}(g^{\mathbf{M}}(-a^{\mathbf{M}}, g^{\mathbf{M}}(b^{\mathbf{M}}, -b^{\mathbf{M}}))) \\ &= f^{\mathbf{M}}(g^{\mathbf{M}}(-a^{\mathbf{M}}, b^{\mathbf{M}} \times -b^{\mathbf{M}})) = f^{\mathbf{M}}(-a^{\mathbf{M}} \times b^{\mathbf{M}} \times -b^{\mathbf{M}}) \\ &= -a^{\mathbf{M}} \times (b^{\mathbf{M}})^2 \end{aligned}$$

(3). Pour que la propriété soit vérifiée dans le cas de base, il faut que  $a^{\mathbf{M}}$  et  $b^{\mathbf{M}}$  soient des valeurs paires. On choisit par exemple  $a^{\mathbf{M}} = 2 = 2 \times 1$  et  $b^{\mathbf{M}} = -4 = 2 \times -2$ . Montrons maintenant la propriété dans le cas général :

Soient  $t_1$  et  $t_2$  deux termes, en supposant, par hypothèse d'induction, que  $[t_1]^{\mathbf{M}} = 2n_1$  et  $[t_2]^{\mathbf{M}} = 2n_2$ , avec  $n_1$  et  $n_2 \in \mathbb{Z}$  il vient :

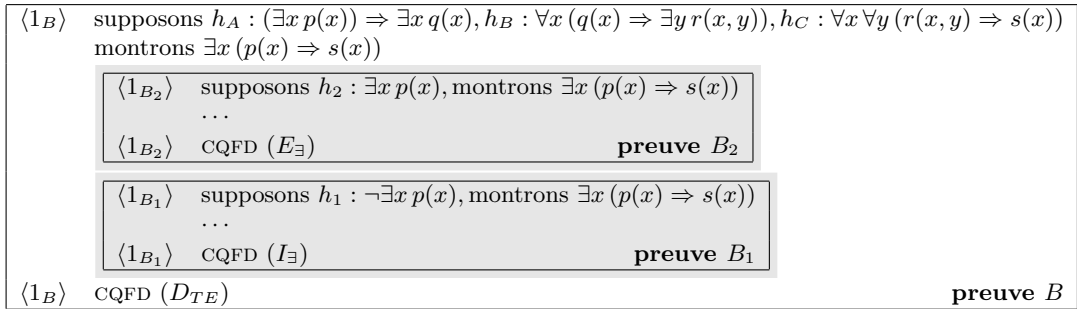
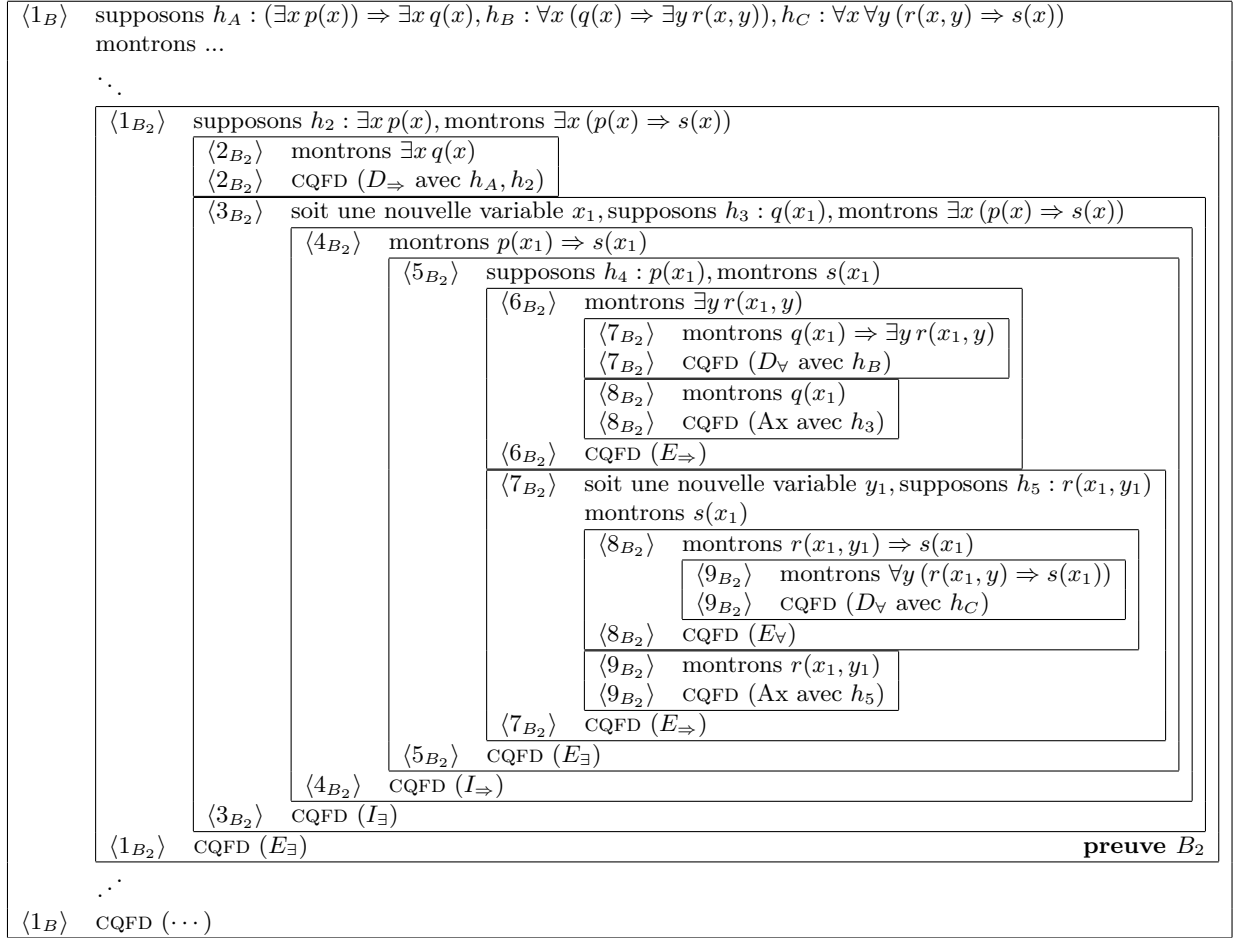
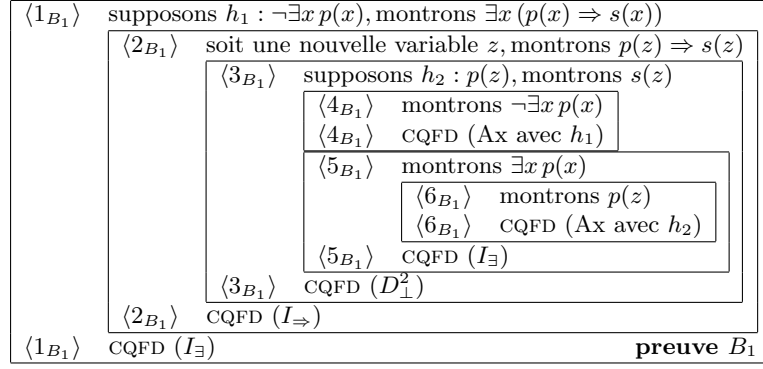
$$\begin{aligned} [f(t_1)]^{\mathbf{M}} &= f^{\mathbf{M}}([t_1]^{\mathbf{M}}) \\ &= f^{\mathbf{M}}(2n_1) && \text{(par hypothèse d'induction)} \\ &= -2 \times n_1 \\ &= 2 \times (-n_1) && \text{avec } -n_1 \in \mathbb{Z} \\ [g(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}} &= g^{\mathbf{M}}([t_1]^{\mathbf{M}}, [t_2]^{\mathbf{M}}) \\ &= g^{\mathbf{M}}(2n_1, 2n_2) && \text{(par hypothèse d'induction)} \\ &= 2 \times (2 \times n_1 \times n_2) && \text{avec } 2 \times n_1 \times n_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

4.  $[F]_v^{\mathbf{M}} = [p(f(x)) \Rightarrow q(g(x, f(x)))]_v^{\mathbf{M}} = \overline{[p(f(x))]_v^{\mathbf{M}}} + [q(g(x, f(x)))]_v^{\mathbf{M}}$  avec
- $[g(x, f(x))]_v^{\mathbf{M}} = g^{\mathbf{M}}(v(x), f^{\mathbf{M}}(v(x))) = -v^2(x)$
  - $[f(x)]_v^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{M}}(v(x)) = -v(x)$

4.a. Considérons  $\mathbf{M}_1$  identique à  $\mathbf{M}$ ,  $v_1(x) = 2$  et  $q^{\mathbf{M}_1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ est pair}\}$ . On obtient  $[g(x, f(x))]_{v_1}^{\mathbf{M}_1} = -v_1^2(x) = -4 \in q^{\mathbf{M}_1}$ , donc  $[q(g(x, f(x)))]_{v_1}^{\mathbf{M}_1} = 1$  et  $[F]_{v_1}^{\mathbf{M}_1} = 1$  quelle que soit l'interprétation du prédicat  $p$ , de  $a^{\mathbf{M}_1}$  et  $b^{\mathbf{M}_1}$ .

4.b. Considérons  $\mathbf{M}_2$  identique à  $\mathbf{M}$ ,  $v_2(x) = 1$ ,  $p^{\mathbf{M}_2} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ est impair}\}$  et  $q^{\mathbf{M}_2} = q^{\mathbf{M}_1}$ . On obtient  $[f(x)]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} = -v_2(x) = -1 \in p^{\mathbf{M}_2}$  et  $[g(x, f(x))]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} = -v_2^2(x) = -1 \notin q^{\mathbf{M}_2}$  donc  $[p(f(x))]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} = 0$ ,  $[q(g(x, f(x)))]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} = 0$  et  $[F]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} = 0$  quelle que soit l'interprétation de  $a^{\mathbf{M}_2}$  et  $b^{\mathbf{M}_2}$ .

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.



► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3.

(1.a).  $[\forall z p(z)]_{v_1}^{\mathbf{M}} = [\forall z p(z)]_{v_2}^{\mathbf{M}}$  car la formule  $\forall z p(z)$  est close (i.e. ne contient pas de variables libres).

(1.b). Puisque  $[\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = 0$  on peut seulement en déduire qu'il existe un élément  $m_2$  du domaine  $|\mathbf{M}|$  tel que  $[p(x)]_{v[x \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}} = 0$  mais pour un élément quelconque  $m \in |\mathbf{M}|$  on peut avoir  $[p(x)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 1$  (par exemple pour  $|\mathbf{M}| = \mathbb{N}$ ,  $p^{\mathbf{M}} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ,  $m = 0$  et  $m_2 = 1$ ).

(2.a). Si l'on suppose  $[\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = 1$ , alors on a  $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$  puisque pour chaque élément  $m_1 \in |\mathbf{M}|$  on a :

$$[p(x) \Rightarrow \forall z p(z)]_{\underbrace{v[x \leftarrow m_1]}_{v_1}}^{\mathbf{M}} = \overline{[p(x)]_{v_1}^{\mathbf{M}}} + [\forall z p(z)]_{v_1}^{\mathbf{M}} = \overline{[p(x)]_{v_1}^{\mathbf{M}}} + [\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = \overline{[p(x)]_{v_1}^{\mathbf{M}}} + 1 = 1$$

Puisque  $\forall z p(z)$  est une formule close on a l'égalité  $[\forall z p(z)]_{v_1}^{\mathbf{M}} = [\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}}$ .

(2.b). Si l'on suppose  $[\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = 0$ , alors on a  $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$ . En effet, puisque  $[\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = 0$ , pour un certain élément  $m_2 \in |\mathbf{M}|$ , on a  $[p(z)]_{v[z \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}} = 0$  et donc  $m_2 \notin p^{\mathbf{M}}$ . En posant  $v_2 = v[x \leftarrow m_2]$ , on a donc  $[p(x)]_{v_2}^{\mathbf{M}} = 0$  et il vient alors :

$$[p(x) \Rightarrow \forall z p(z)]_{v_2}^{\mathbf{M}} = \overline{[p(x)]_{v_2}^{\mathbf{M}}} + [\forall z p(z)]_{v_2}^{\mathbf{M}} = \overline{0} + [\forall z p(z)]_{v_2}^{\mathbf{M}} = 1 + [\forall z p(z)]_{v_2}^{\mathbf{M}} = 1$$

(2.c). D'après les deux questions précédentes, la formule  $F_1$  est valide.

(3.a).

$$\begin{aligned} [F_2]_v^{\mathbf{M}} &= \prod_{m \in |\mathbf{M}|} [p(x) \Rightarrow \forall z p(z)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = \prod_{m \in |\mathbf{M}|} \left( \overline{[p(x)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}} + [\forall z p(z)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} \right) \\ &= \prod_{m \in |\mathbf{M}|} \left( \overline{[p(x)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}} + \prod_{n \in |\mathbf{M}|} [p(z)]_{v[x \leftarrow m, z \leftarrow n]}^{\mathbf{M}} \right) \end{aligned}$$

(3.b). Soit  $\mathbf{M}$  une structure telle que  $|\mathbf{M}| = \{k\}$ . On a :

$$[F_2]_v^{\mathbf{M}} = \overline{[p(x)]_{v[x \leftarrow k]}^{\mathbf{M}}} + \prod_{n \in |\mathbf{M}|} [p(z)]_{v[x \leftarrow k, z \leftarrow n]}^{\mathbf{M}} = \overline{[p(x)]_{v[x \leftarrow k]}^{\mathbf{M}}} + [p(z)]_{v[z \leftarrow k]}^{\mathbf{M}} = 1$$

car :

- soit  $k \in p^{\mathbf{M}}$  et il vient  $[p(z)]_{v[z \leftarrow k]}^{\mathbf{M}} = 1$  donc  $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 1$
- soit  $k \notin p^{\mathbf{M}}$  et il vient  $\overline{[p(x)]_{v[x \leftarrow k]}^{\mathbf{M}}} = 1$  donc  $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 1$

(3.c). La formule  $F_2$  n'est pas valide. En effet, considérons par exemple la structure  $\mathbf{M}$  telle que  $|\mathbf{M}| = \mathbb{N}$  et  $p^{\mathbf{M}} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ . On a alors  $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 0$  puisque par exemple pour  $m = 2$  on a :

- $\overline{[p(x)]_{v[x \leftarrow 2]}^{\mathbf{M}}} = 0$
- $\prod_{n \in \mathbb{N}} [p(z)]_{v[x \leftarrow 2, z \leftarrow n]}^{\mathbf{M}} = 0$  car  $\prod_{n \in \mathbb{N}} [p(z)]_{v[x \leftarrow 2, z \leftarrow n]}^{\mathbf{M}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} [p(z)]_{v[z \leftarrow n]}^{\mathbf{M}} = 0$  puisque  $[p(z)]_{v[z \leftarrow n]}^{\mathbf{M}} = 0$  pour  $n = 3$  par exemple