

EXERCICE 35

Logique - Connecteurs

quelles que soient les propositions **P** **Q**,

$$((Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow ((\neg Q \Rightarrow P) \Rightarrow ((P \Rightarrow (P \wedge Q)) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow \neg(P \wedge Q)) \Rightarrow (\neg P \wedge Q))))))$$

Montrons $(Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow ((\neg Q \Rightarrow P) \Rightarrow ((P \Rightarrow (P \wedge Q)) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow \neg(P \wedge Q)) \Rightarrow (\neg P \wedge Q))))$ (1)
($\Rightarrow I$)

Supposons que $Q \Rightarrow \neg P$ (h1)

Montrons $(\neg Q \Rightarrow P) \Rightarrow ((P \Rightarrow (P \wedge Q)) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow \neg(P \wedge Q)) \Rightarrow (\neg P \wedge Q)))$ (2)
($\Rightarrow I$)

Supposons que $\neg Q \Rightarrow P$ (h2)

Montrons $(P \Rightarrow (P \wedge Q)) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow \neg(P \wedge Q)) \Rightarrow (\neg P \wedge Q))$ (3)
($\Rightarrow I$)

Supposons que $P \Rightarrow (P \wedge Q)$ (h3)

Montrons $(\neg P \Rightarrow \neg(P \wedge Q)) \Rightarrow (\neg P \wedge Q)$ (4)
($\Rightarrow I$)

Supposons que $\neg P \Rightarrow \neg(P \wedge Q)$ (h4)

Montrons $\neg P \wedge Q$ (5)
(TE)

Supposons que P (h5)

Montrons $\neg P \wedge Q$ (6)
($\wedge I$)

Montrons $\neg P$ (7)
($\Rightarrow E$)

Montrons Q (8)
($\wedge Ed$)

Montrons $P \wedge Q$ (9)
($\Rightarrow E$)

Montrons P (10)
d'après (h5)

Montrons $P \Rightarrow (P \wedge Q)$ (11)
d'après (h3)

Montrons $Q \Rightarrow \neg P$ (12)
d'après (h1)

Montrons Q (13)
($\wedge Ed$)

Montrons $P \wedge Q$ (14)
($\Rightarrow E$)

Montrons P (15)

d'après (h5)

Montrons $\mathbf{P} \Rightarrow (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$ (16)

d'après (h3)

Supposons que $\neg \mathbf{P}$ (h6)

Montrons $\neg \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$ (17)

(\wedge)

Montrons $\neg \mathbf{P}$ (18)

d'après (h6)

Montrons \mathbf{Q} (19)

(A)

Supposons que $\neg \mathbf{Q}$ (h7)

Montrons \perp (20)

($\neg E$)

Montrons \mathbf{P} (21)

($\Rightarrow E$)

Montrons $\neg \mathbf{Q}$ (22)

d'après (h7)

Montrons $\neg \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{P}$ (23)

d'après (h2)

Montrons $\neg \mathbf{P}$ (24)

d'après (h6)