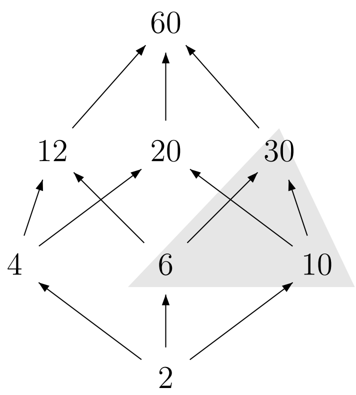
Année 2009-2010 - S2

LI214 - 10 juin 2010

Durée : 2h - Documents, calculettes et téléphones interdits

Inscrire votre nom sur la copie et la cacheter, puis inscrire votre numéro d'anonymat sous le logo UPMC et le reporter sur toutes les copies intercalaires. Conserver l'étiquette portant votre numéro d'anonymat, elle sera demandée pour toute consultation de copie.
La note (entre 0 et 60) est le minimum entre 60 et la somme des points obtenus (entre 0 et 74).

Exercice 1 (16 points= 2+8+3+3) 1. On considère l'ensemble d'entiers naturels $E = \{2, 4, 6, 10, 12, 20, 30, 60\}$ ordonné par la relation « x divise y ».
(a) Représenter la relation d'ordre sur E par un graphe (sans les arcs de réflexivité et de transitivité).
(b) Pour la partie $A = \{6, 10, 30\}$ de E, donner l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants. A admet-elle une borne inférieure ? une borne supérieure ? un plus petit élément ? un plus grand élément ? Donner les éléments minimaux et les éléments maximaux de A. Justifier les réponses.



L'ensemble des majorants de A est $\{30, 60\}$, A a donc un plus grand élément 30, qui est aussi sa borne supérieure et son unique élément minimal. L'ensemble des minorants de A est $\{2\}$. Comme 2 n'appartient pas à A, 2 est la borne inférieure de A et A n'admet pas de plus petit élément. Ses éléments minimaux sont 6 et 10.

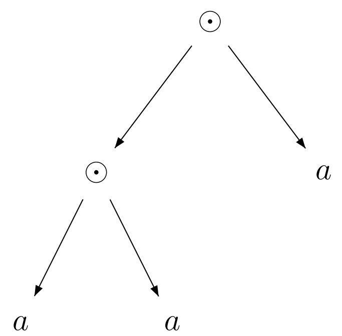
2. On considère l'ensemble $B = \{1, 2, 3\}$ et $F = \mathcal{P}(B)$ l'ensemble des parties de B. Représenter la relation d'inclusion sur F par un graphe (sans les arcs de réflexivité et de transitivité). Que peut-on dire des ensembles E muni de la division et F muni de l'inclusion ? (répondre en une seule phrase).

La relation d'inclusion sur F est représentée par un graphe obtenu à partir de celui qui est associé à E en appliquant à ses éléments l'application $f : E \mapsto F$ définie par : $f(2) = \emptyset$,

$f(4) = \{1\}$, $f(6) = \{2\}$, $f(10) = \{3\}$, $f(12) = \{1, 2\}$, $f(20) = \{1, 3\}$, $f(30) = \{2, 3\}$ et $f(60) = \{1, 2, 3\}$. Cette application est une bijection qui conserve l'ordre, de même que son inverse f^{-1}. Par exemple, 6 divise 30 et $f(6) \subseteq f(30)$. De même, $\{1, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ et $f^{-1}(\{1, 3\}) = 20$ divise $f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = 60$.
Les deux ensembles ordonnés E et F sont donc isomorphes.

Exercice 2 (8 points = 5+3) Soit l'ensemble $\mathcal{T}$ des termes construits sur $F_0 \cup F_2$, avec $F_0 = \{a, b\}$ et $F_2 = \{\odot\}$.

1. Dessiner un arbre de hauteur 3 représentant un terme de $\mathcal{T}$; donner une définition inductive adaptée pour les termes de $\mathcal{T}$; donner une définition inductive de la fonction $nba : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{N}$ qui à un terme associe le nombre de a qui y apparaissent.



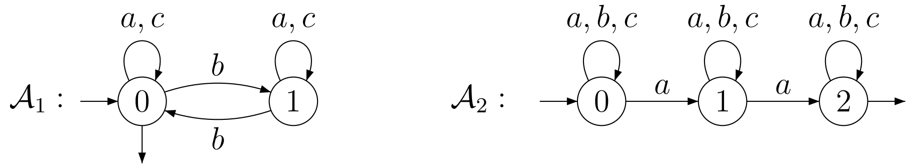
Les termes de $\mathcal{T}$ sont définis par :
(B) a et b appartiennent à $\mathcal{T}$,
(I) si t_1 et t_2 sont des termes de $\mathcal{T}$ alors $t = \odot(t_1, t_2)$ est aussi un terme de $\mathcal{T}$.
La fonction $nba : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{N}$ est définie inductivement par :
(B) $nba(a) = 1$, $nba(b) = 0$,
(I) si t_1 et t_2 sont des termes de $\mathcal{T}$ et $t = \odot(t_1, t_2)$ alors $nba(t) = nba(t_1) + nba(t_2)$.

2. Soit l'interprétation h de ces termes ayant pour domaine $\mathbb{N}$, avec $h(a) = a_D = 5$, $h(b) = b_D = 2$ et $h_\odot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $h_\odot(m, n) = m + n$. Déterminer h^* et justifier la réponse. On rappelle la définition inductive de la valeur $h^*(t)$ d'un terme t de cet ensemble :
(B) $h^*(a) = h(a)$, $h^*(b) = h(b)$
(I) $h^*(t) = h_\odot(h^*(t_1), h^*(t_2))$ pour un terme $t = \odot(t_1, t_2)$.

On démontre par induction que pour tout terme $t \in \mathcal{T}$, $h^*(t) = 5nba(t) + 2nbb(t)$, où l'application nbb est définie de manière analogue à nba, mais pour le nombre de b dans un terme.
En effet, la propriété est vraie pour a et b puisque :
$h^*(a) = a_D = 5$ avec $nba(a) = 1$, $nbb(a) = 0$ et $5 \times 1 + 2 \times 0 = 5$,
$h^*(b) = b_D = 2$ avec $nba(b) = 0$, $nbb(b) = 1$ et $5 \times 0 + 2 \times 1 = 2$.
Pour l'induction, on suppose que $h^*(t_1) = 5nba(t_1) + 2nbb(t_1)$ et $h^*(t_2) = 5nba(t_2) + 2nbb(t_2)$. La définition inductive de h^* implique $h^*(t) = h^*(t_1) + h^*(t_2)$ donc $h^*(t) =$

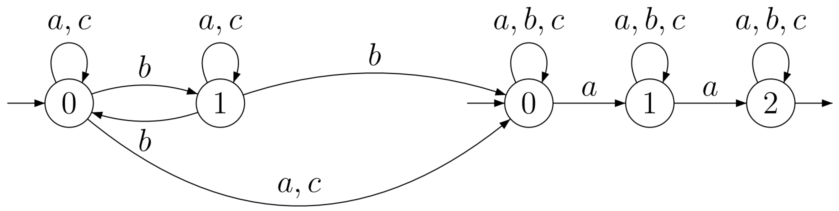
$5nba(t_1) + 2nbb(t_1) + 5nba(t_2) + 2nbb(t_2)$. Ainsi, en utilisant la définition inductive de nba, on obtient bien $h^*(t) = 5(nba(t_1) + nba(t_2)) + 2(nba(t_1) + nba(t_2)) = 5nba(t) + 2nbb(t)$.

Exercice 3 (12 points=4+4+4) On se place sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ et on considère les automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ suivants :

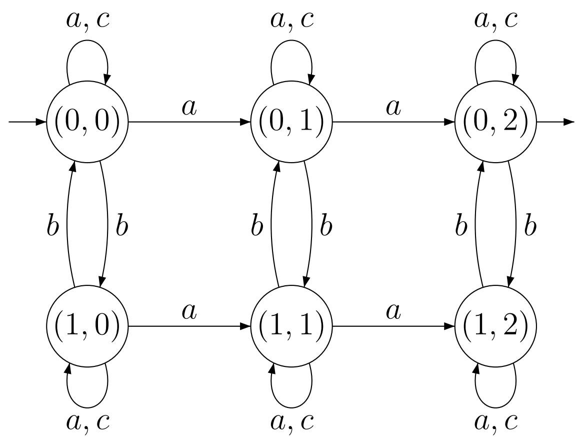


On note $L_1 = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$ et $L_2 = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$. **En explicitant les constructions**, construire à partir des automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$: a) un automate acceptant la concaténation des langages L_1L_2, b) un automate acceptant l'intersection des langages $L_1 \cap L_2$ et c) un automate déterministe acceptant L_2.

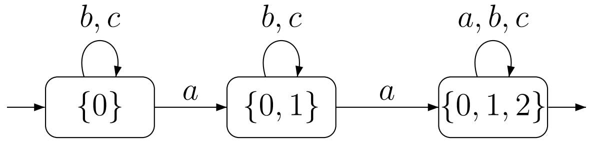
a) Concaténation.



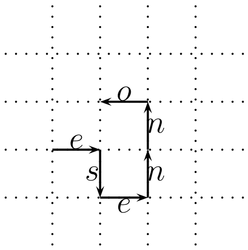
b) Intersection.

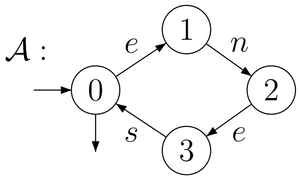


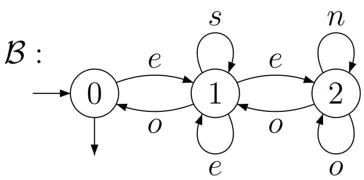
c) Déterminisation.



Exercice 4 (12 points=8+4) On considère l'alphabet $A = \{n, s, e, o\}$ qui représente des mouvements possibles (nord, sud, est, ouest) sur une grille. Par exemple, le chemin représenté ci-dessous sur la gauche correspond au mot $w = esenno$.

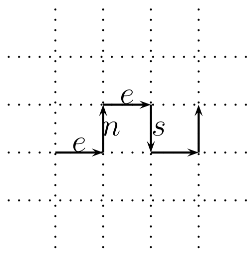






1. Pour l'automate $\mathcal{A}$ ci-dessus au centre, décrire (par un dessin) les chemins acceptés et donner une expression rationnelle pour le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Pour l'automate $\mathcal{B}$ ci-dessus à droite, donner, **en explicitant les calculs**, une expression rationnelle pour $\mathcal{L}(\mathcal{B})$.

   Le langage accepté par $\mathcal{A}$ est $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = (enes)^*$, on représente par exemple ci-dessous $enesen$, le motif continuant vers la droite :

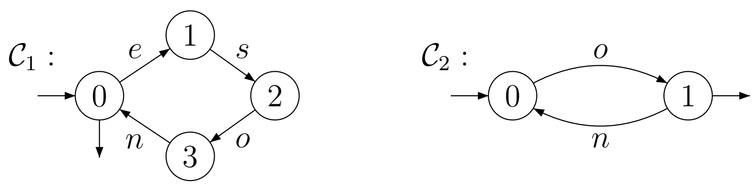
   Les équations associées à $\mathcal{B}$ sont les suivantes :
   $L_0 = eL_1 + \varepsilon$
   $L_1 = sL_1 + eL_1 + oL_0 + eL_2$
   $L_2 = nL_2 + oL_2 + oL_1$

   Le lemme d'Arden appliqué à L_2 (ε n'appartient pas à $n+o$) donne : $L_2 = (n+o)^*oL_1$, qu'on introduit dans l'équation associée à L_1 : $L_1 = (s + e + e(n + o)^*o)L_1 + oL_0$. On applique à nouveau le lemme d'Arden : $L_1 = (s+e+e(n+o)^*o)^*oL_0$, puis dans la première équation : $L_0 = e(s+e+e(n+o)^*o)^*oL_0+\varepsilon$ donc $L_0 = [e(s+e+e(n+o)^*o)^*o]^*$.

2. Construire un automate $\mathcal{C}_1$ acceptant les chemins qui parcourent un nombre quelconque de fois ($n \geq 0$) un même carré toujours dans le même sens et un automate $\mathcal{C}_2$ acceptant les chemins non vides en forme d'escaliers montant de l'est vers l'ouest.

   Ici l'énoncé est ambigü, car il y a de nombreux carrés possibles, donc on choisit par exemple le carré représenté par l'expression rationnelle : $(eson)^*$, ce qui correspond

à l'automate ci-dessous (à gauche).
De même, il y a de nombreux escaliers répondant à la spécification, donc on choisit par exemple une répétition de o suivi de n. Pour avoir un chemin non vide, on commence par exemple par o, ce qui donne $o(no)^*$ avec l'automate ci-dessous à droite.



Exercice 5 (11 points=4+4+3) 1. On considère deux formules F et G du calcul propositionnel. Démontrer que $F \models G$ si et seulement si $F \to G$ est valide.

Voir le cours.

2. Donner une forme normale conjonctive et une forme normale disjonctive pour la fonction booléenne f définie par : $f(x,y) = x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y}$.

On remarque que f est déjà sous forme disjonctive. La table de vérité de f est :

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

En appliquant la méthode du cours, on obtient la forme conjonctive avec les lignes produisant la valeur 0 de f, donc $f(x,y) = (x + \overline{y})(\overline{x} + y)$.

3. Montrer que $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \models (p \to q)$, où p et q sont deux propositions.

Pour montrer cette conséquence sémantique, on considère une interprétation quelconque I qui rend vrai le membre gauche : $I(p)I(q) + \overline{I(p)} \cdot \overline{I(q)} = 1$. D'après ce qui précède, on obtient ou bien $I(p) = I(q) = 1$ ou bien $I(p) = I(q) = 0$. Or $I(p \to q) = I(q) + \overline{I(p)}$ vaut 1 dans les deux cas. Donc la conséquence est vraie.

Exercice 6 (4 points) En utilisant les symboles du monde de Tarski, `Cube(.)`, `Tet(.)`, `Large(.)`, `LeftOf(.,.)`, = , les quantificateurs $\exists$, $\forall$, et les connecteurs booléens, écrire
a) une formule exprimant : tous les grands cubes sont à gauche de tous les tétraèdres

$$\forall x\ \forall y\ ((\texttt{Cube}(x) \wedge \texttt{Large}(x) \wedge \texttt{Tet}(y)) \to \texttt{LeftOf}(x,y))$$

b) une formule exprimant : il y a au plus un grand cube.

$$\forall x\ \forall y\ ((\texttt{Cube}(x) \wedge \texttt{Large}(x) \wedge \texttt{Cube}(y) \wedge \texttt{Large}(y)) \to x = y)$$

Exercice 7 (11 points=4+5+2) Dans le calcul des prédicats, pour une formule F, on note $V(F)$ l'ensemble de ses variables, $L(F)$ l'ensemble de ses variables libres et $B(F)$ l'ensemble de ses variables liées.

1. Donner une définition inductive de l'ensemble des variables libres d'une formule.

   Voir cours.

2. On considère la formule $G : \forall y \exists z((P(x, z) \lor Q(y, z)) \to \forall y R(z, y)$.
   Souligner les occurrences libres de variables dans G. Donner $L(G)$ et $B(G)$.

   $\forall y \exists z((P(\underline{x}, z) \lor Q(y, z)) \to \forall y R(\underline{z}, y)$
   donc $L(G) = \{x, z\}$ et $B(G) = V(G) \setminus L(G) = \{y\}$.

3. Décrire en français la formule $H : \forall x \forall y(R(f(x, y), a) \to (R(x, a) \lor R(y, a)))$ lorsqu'on l'interprète dans la structure $\mathcal{M}$ de domaine $D = \mathbb{R}$, avec la constante 0 pour a, la multiplication pour f et l'égalité pour R.

   Dans la structure considérée, la formule H exprime que *si le produit de deux nombres réels est nul, alors l'un de ces deux nombres est nul.*