Numéro d'anonymat :

M1 Informatique.
UE MOGPL.

Examen du 19 janvier 2018. Durée : 2 heures

Une feuille recto-verso est autorisée, tout autre document est interdit.
Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs.

Le barème est indicatif et est susceptible d'être modifié.

Exercice 1 (6 points)

Question 1 (4/6) — On considère le problème d'affectation (à coût minimum) suivant.

	a	b	c	d	e
A	4	1	7	0	2
B	8	6	3	0	4
C	7	0	7	4	2
D	9	0	7	6	0
E	9	4	8	6	0

Appliquer l'algorithme hongrois pour résoudre le problème. Vous spécifierez à chaque étape : la matrice, un flot maximum (sans spécifier comment vous l'avez trouvé) et les sommets lignes et colonnes marqués, ainsi que les opérations sur les lignes et les colonnes.

2

Question 2 (2/6) — Dans un problème d'affectation, il n'y a pas a priori de paires interdites (toute 'ligne' est compatible avec toute 'colonne'). Proposer une manière de prendre en compte la présence de paires incompatibles, permettant d'appliquer ensuite l'algorithme hongrois. Vous préciserez ce qu'il se passe suivant qu'il existe ou non une solution sans paire incompatible.

Précision : il ne s'agit pas de concevoir un nouvel algorithme !

Exercice 2 (4 points)

Dans chacun des cas suivants dites si les affirmations sont vraies ou fausses. Aucune justification n'est demandée. *1 point par bonne réponse, -0.5 par mauvaise réponse (0 si pas de réponse). Au total pas de point négatif sur l'exercice globalement.*

1. Dans un problème d'affectation, l'algorithme hongrois peut nécessiter un nombre exponentiel d'itérations, si les coûts sont élevés (coûts exponentiels par rapport à la taille de la matrice).

   VRAI *FAUX*

2. On considère un problème d'affectation (à coût minimum) où certains éléments de la matrice d'entrée sont négatifs. Un ami vous dit : "aucun problème, tu additionnes une constante M à chaque case de la matrice, et (en choisissant M suffisamment grand) tu te ramènes au cas où les coûts sont positifs, et tu peux appliquer l'algorithme hongrois". Votre ami a raison.

   VRAI *FAUX*

3. Dans un problème de plus court chemin sur un graphe sans circuit, l'algorithme de Bellman fonctionne même si certains arcs ont des longueurs strictement négatives.

   VRAI *FAUX*

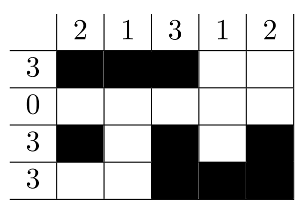
4. Soit f un flot maximum. Alors dans toute coupe minimum (A, B) ($s \in A$, $t \in B$), tout arc $e = (u, v)$ avec $u \in A$ et $v \in B$ est nécessairement saturé par f.

   VRAI *FAUX*

Exercice 3 (11 points)

On considère le problème de tomographie discrète suivant. Nous devons colorier les nm cases d'une matrice à n lignes et m colonnes en blanc ou en noir. Pour chaque ligne $\ell_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ nous connaissons le nombre n_i de cases noires de la ligne. De même, pour chaque colonne $c_j, j \in \{1, \ldots, m\}$ nous connaissons le nombre m_j de cases noires de la colonne. Voici un exemple avec une solution possible.

	2	1	3	1	2
3					
0					
3					
3					



Par rapport à votre projet, il n'y a donc pas de contrainte de contiguïté (pas de notion de bloc).

Dans tout l'exercice, nous supposerons que $\sum_{i=1}^{n} n_i = \sum_{j=1}^{m} m_j$. Nous noterons S cette somme (le nombre de cases noires).

Nous formulons le problème comme la recherche d'un flot maximum dans un graphe constitué :

— Des sommets s et t, d'un sommet ℓ_i pour chaque ligne et d'un sommet c_j pour chaque colonne ;

— D'un arc de s à chaque ℓ_i, d'un arc de chaque ℓ_i à chaque c_j, et d'un arc de chaque c_j à t.

Question 1 (2/11) — Indiquer (a) les capacités à mettre sur chaque arc, (b) la correspondance entre case noire et flux sur les arcs, (c) la condition sur le flot maximum à laquelle le problème de tomographie admet une solution.

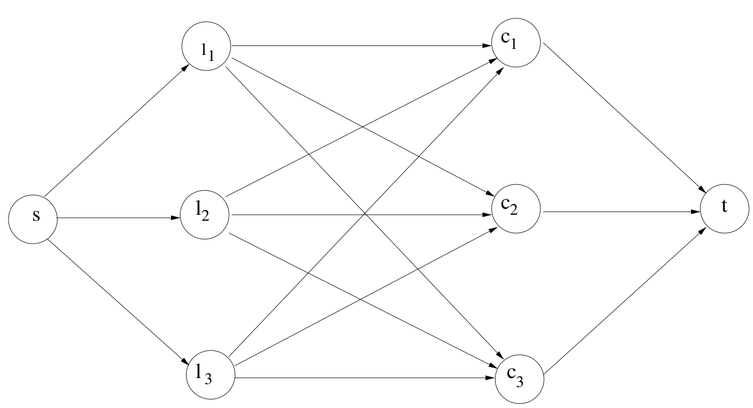
Question 2 (2/11) — Considérons la donnée suivante.

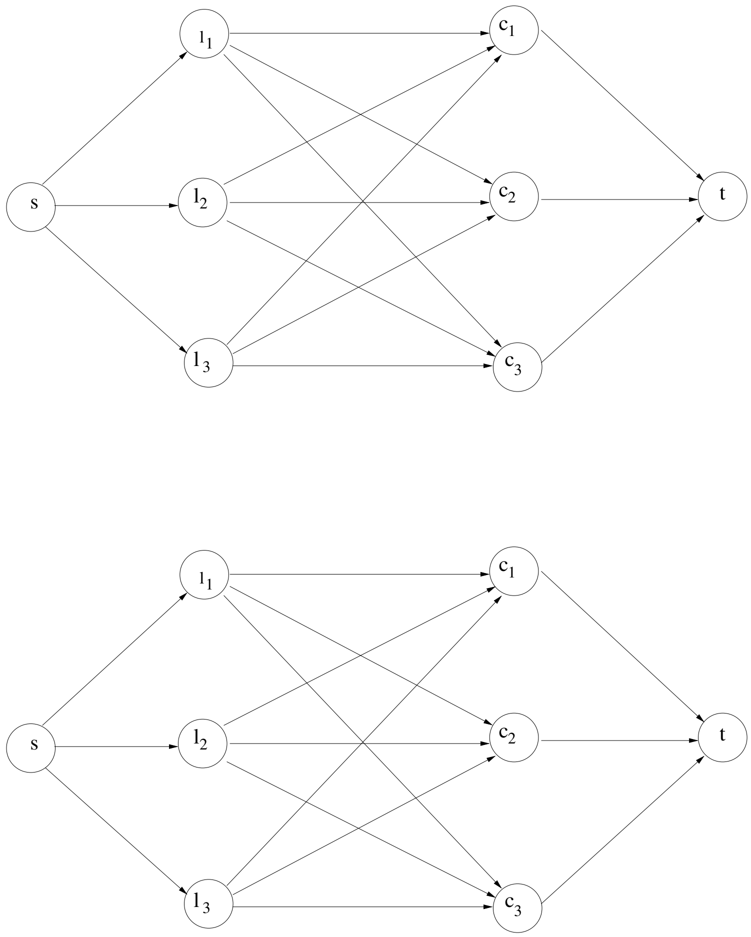
	2	2	1
1			
2			
2			

Appliquer l'algorithme de Ford et Fulkerson à partir du flot correspondant aux cases noires de la figure suivante. On représentera bien à chaque étape la procédure de marquage.

	2	2	1
1		■	
2		■	■
2	■		

NB : il peut y avoir plus de copies du graphe que nécessaire.





Question 3 (0.5/11) —

Représenter la solution obtenue sur la matrice ci-dessous.

	2	2	1
1			
2			
2			

Dans la suite, nous nous intéressons à établir des conditions pour que le problème de tomographie ait une solution. Nous supposons que $0 \leq \ell_i \leq m$ *et* $0 \leq c_j \leq n$.

Question 4 (1.5/11) —

Montrer (à l'aide d'un contre-exemple) que la condition $\sum_{i=1}^{n} n_i = \sum_{j=1}^{m} m_j$ (supposée vraie dans l'exercice) n'est pas une condition suffisante.

Nous supposons dans toute la suite que les n_i sont classées par valeur décroissante ($n_1 \geq n_2 \geq n_3 \dots$), et les m_j par valeur croissante ($m_1 \leq m_2 \leq m_3 \dots$) .

Question 5 (1.5/11) —

On note $S_i = \sum_{k=i+1}^{n} n_k$ (pour $i \in \{0, \dots, n\}$, avec par convention $S_n = 0$) et $P_j = \sum_{k=1}^{j} m_k$ (pour $j \in \{0, \dots, m\}$, avec par convention $P_0 = 0$).

Donner la capacité C_{ij} de la coupe où les sommets des i premières lignes et ceux des j premières colonnes sont du côté de s, les autres du côté de t.

Question 6 (0.5/11) — En déduire une condition nécessaire pour que le problème de tomographie ait une solution.

Question 7 (1.5/11) — Soit une $s-t$-coupe avec L l'ensemble des sommets-lignes du côté de s et R l'ensemble des sommets-colonnes du côté de s. Montrer que la capacité de cette coupe est au moins C_{ij} avec $i = |L|$ et $j = |R|$.

Question 8 (1.5/11) — Soit $C^* = \min\{C_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$. Déduire de la question précédente que C^* est la capacité d'une coupe minimum du graphe. Avec quelle complexité peut-on alors déterminer l'existence d'une solution au problème de tomograpgie ?