Vitesse de convergence - Limite de suite

Nombre de chiffres significatifs

en commun entre deux réels

En mathématiques, on s'intéresse souvent soit à l'erreur absolue

$$|x - y|$$

soit à l'erreur relative, pour $x + y \neq 0$,

$$\left|\frac{2(x-y)}{x+y}\right|$$

Sur ordinateur, on affiche les valeurs en base 10 :

$$\begin{aligned} x &= 2.468812156822351 \\ y &= 2.468158642682384 \end{aligned}$$

La question devient : quel est le nombre de chiffres significatifs en commun entre x et y ?

le nombre de chiffres significatifs communs entre x et y

Définition : le nombre de chiffres significatifs en commun entre x et y est définie par

$$C_{x,y} = -\log_{10}\left|\frac{2.(x-y)}{x+y}\right|$$

$$\Rightarrow |x-y| = \frac{|x+y|}{2} \times 10^{-C_{x,y}}$$

$$\begin{array}{rcl} x & = & a_1.a_2a_3a_4c_5c_6c_7c_8\ldots \\ y & = & a_1.a_2a_3a_4d_5d_6d_7d_8\ldots \end{array}$$

$\Rightarrow$ entre 3 et 4 ou entre 4 et 5 chiffres en commun entre x et y ?

Si $x \approx y$ alors

$$C_{x,y} \approx -\log_{10}\left|\frac{x-y}{x}\right| \approx -\log_{10}\left|\frac{x-y}{y}\right|$$

Exemple :

- $x = 1.41421356$ et $y = 1.41427845 \leftarrow C_{x,y} =$
- $x = 9.87452334$ et $y = 9.87901342 \leftarrow C_{x,y} =$
- $x = 10.07452334$ et $y = 10.07901342 \leftarrow C_{x,y} =$
- $x = -2.69998756$ et $y = -2.70001234 \leftarrow C_{x,y} =$

Exemple :

- $x = 1.41421356$ et $y = 1.41427845 \leftarrow C_{x,y} = 4,33$
- $x = 9.87452334$ et $y = 9.87901342 \leftarrow C_{x,y} =$
- $x = 10.07452334$ et $y = 10.07901342 \leftarrow C_{x,y} =$
- $x = -2.69998756$ et $y = -2.70001234 \leftarrow C_{x,y} =$

Exemple :

- $x = 1.41421356$ et $y = 1.41427845 \leftarrow C_{x,y} = 4, 33$

- $x = 9.87452334$ et $y = 9.87901342 \leftarrow C_{x,y} = 3, 3424$

- $x = 10.07452334$ et $y = 10.07901342 \leftarrow C_{x,y} =$

- $x = -2.69998756$ et $y = -2.70001234 \leftarrow C_{x,y} =$

Exemple :

- $x = 1.41421356$ et $y = 1.41427845 \leftarrow C_{x,y} = 4,33$

- $x = 9.87452334$ et $y = 9.87901342 \leftarrow C_{x,y} = 3,3424$

- $x = 10.07452334$ et $y = 10.07901342 \leftarrow C_{x,y} = 3,3477$

- $x = -2.69998756$ et $y = -2.70001234 \leftarrow C_{x,y} =$

Exemple :

- $x = 1.41421356$ et $y = 1.41427845 \leftarrow C_{x,y} = 4,33$

- $x = 9.87452334$ et $y = 9.87901342 \leftarrow C_{x,y} = 3,3424$

- $x = 10.07452334$ et $y = 10.07901342 \leftarrow C_{x,y} = 3,3477$

- $x = -2.69998756$ et $y = -2.70001234 \leftarrow C_{x,y} = 5,04$

Fin

Notion de vitesse de convergence

Les différents types d'algorithmes

On cherche à calculer ou approcher x_s.

- *Les algorithmes directs* : On calcule x_s en un nombre fini d'opérations (méthode de Gauss, méthode de Gauss-Jordan).
- *Les algorithmes itératifs* : On définit une suite x_n telle que $x_s = \lim_{n\to\infty} x_n$. On calcule x_s en un nombre infini d'opérations (méthode de Newton).
- *Les algorithmes approchés* : On calcule y_h tel que $y_h \approx x_s$ (approximation de Lagrange, méthode des trapèzes, méthode de Simpson).

Sur ordinateur

On cherche à calculer ou approcher x_s.

Les algorithmes directs $\Rightarrow$ *erreurs d'arrondi*.

Les algorithmes itératifs : **besoin d'un critère d'arrêt**

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \text{ qui mesure l'erreur absolue}$$

$$\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}\right| < \varepsilon \text{ qui mesure l'erreur relative}$$

$\Rightarrow$ *erreurs d'arrondi + erreur de terminaison finie*.

Attention, aucun des tests n'est fiable mathématiquement.

Les algorithmes approchés $\Rightarrow$ *erreurs d'arrondi + erreur de méthode*.

Vitesse de convergence

Soit un réel x_s et une suite x_n telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_s$.

La vitesse de convergence de la suite x_n quantifie la façon dont x_n tend vers x_s.

Soit une suite x_n convergeant vers x_s, soit $v_n = -\log_{10}\left|\frac{x_n - x_s}{x_s}\right|$ le nombre de chiffres significatifs en commun entre x_n et x_s, alors

Définition :

- la vitesse de convergence est logarithmique si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{n} = 0$,
- la vitesse de convergence est linéaire si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{n} = a \neq 0$,
- la vitesse de convergence est exponentielle si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{n} = \infty$.

Exemple 1

Convergence logarithmique : $|x_n - x_s| \approx \dfrac{K}{n^p}$.

$\Rightarrow \dfrac{|x_{n+1} - x_s|}{|x_n - x_s|} \approx \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p$.

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow v_n = \log_{10}(n)$$

$$\begin{array}{rcl}
x_{10} & = & 1,1 \\
x_{100} & = & 1,01 \\
\vdots & & \\
x_{10^k} & = & 1,\underbrace{000...00}_{k-1}1
\end{array}$$

Pour avoir un chiffre exact de plus il faut multiplier le temps calcul par 10 !

Exemple 2

Convergence linéaire : $p > 1$ et $|x_n - x_s| \approx \frac{K}{p^n}$.

$$\Rightarrow \frac{|x_{n+1} - x_s|}{|x_n - x_s|} \approx \frac{1}{p}.$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{10^n} \Rightarrow v_n = n$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1,1 \\ x_2 & = & 1,01 \\ \vdots & & \\ x_k & = & 1,\underbrace{000...00}_{k-1}1 \end{array}$$

On gagne un chiffre à chaque itération.

Exemple 3

Convergence exponentielle : $q > 1, p > 1$ et $|x_n - x_s| \approx \dfrac{K}{q^{(p^n)}}$

$\Rightarrow |x_{n+1} - x_s| \approx (|x_n - x_s|)^p$.

$$x_n = 1 + \frac{1}{(10)^{2^n}} \Rightarrow v_n = 2^n$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1,01 \\ x_2 & = & 1,0001 \\ \vdots & & \\ x_k & = & 1,\underbrace{000...00}_{2^k-1}1 \end{array}$$

Le nombre de chiffre exact double à chaque itération.

Si $p = 2$, on parle de convergence **quadratique**.

Comment identifier une vitesse de convergence

Ne pas oublier qu'on aura toujours affaire à :

- une convergence logarithmique ;
- une convergence linéaire ;
- une convergence exponentielle.

On étudie le rapport $\frac{|x_{n+1} - x_s|}{|x_n - x_s|}$ pour différente valeurs de n.

Si ce rapport augmente, c'est une convergence logarithmique ;

Si ce rapport reste constant, c'est une convergence linéaire ;

Si ce rapport diminue, c'est une convergence exponentielle.

$$
\begin{aligned}
x_{10} &= 0.500318894 \\
x_{11} &= 0.500159464 \\
x_{12} &= 0.500079736 \\
x_{13} &= 0.500039869 \\
x_{14} &= 0.500019934 \\
x_{15} &= 0.500009967
\end{aligned}
$$

La suite semble converger vers 0.5.

On regarde l'évolution de $\frac{|x_{n+1}-0.5|}{|x_n-0.5|}$

$$
\begin{aligned}
\frac{|x_{11}-0.5|}{|x_{10}-0.5|} &= 0.5000533 \\
\frac{|x_{13}-0.5|}{|x_{12}-0.5|} &= 0.5000125 \\
\frac{|x_{15}-0.5|}{|x_{14}-0.5|} &= 0.5
\end{aligned}
$$

La convergence est linéaire en $\frac{1}{2^n}$.

$$
\begin{aligned}
y_{10} &= 3.50993377483444 \\
y_{11} &= 1.65504751735530 \\
y_{12} &= 1.41551003807837 \\
y_{13} &= 1.41421356264512 \\
y_{14} &= 1.41421356237310 \\
y_{15} &= 1.41421356237310
\end{aligned}
$$

La suite semble devenir stationnaire à partir de y_{14}.

Calculons $-\log_{10}\left|\frac{y_n - y_{15}}{y_{15}}\right|$ pour $n = 11, 12, 13$.

$$
\begin{aligned}
-\log_{10}\left|\frac{y_{11}-y_{15}}{y_{15}}\right| &= 0.18 \\
-\log_{10}\left|\frac{y_{12}-y_{15}}{y_{15}}\right| &= 3,04 \\
-\log_{10}\left|\frac{y_{13}-y_{15}}{y_{15}}\right| &= 9.71
\end{aligned}
$$

Le nombre de chiffres significatifs exacts triple à chaque itération.
C'est une convergence exponentielle.

$$
\begin{aligned}
z_{10} &= 2.022857143 \\
z_{11} &= 2.015873016 \\
z_{12} &= 2.011661808 \\
z_{13} &= 2.008928571 \\
z_{14} &= 2.007054674 \\
z_{15} &= 2.005714286
\end{aligned}
$$

La suite semble converger vers 2.

$$
\begin{aligned}
\frac{|z_{11}-2|}{|z_{10}-2|} &= 0.6944 \\
\frac{|z_{13}-2|}{|z_{12}-2|} &= 0.7656 \\
\frac{|z_{15}-2|}{|z_{14}-2|} &= 0.81
\end{aligned}
$$

La convergence se ralentit. C'est une convergence logarithmique.

Si la convergence est logarithmique, i.e. en K/n^p, on aura

$$\frac{|z_{n+1}-2|}{|z_n-2|} \approx \left(\frac{n}{n+1}\right)^p$$

Pour $n = 10$, on obtient $p \approx 3.82$.

Pour $n = 12$, on obtient $p \approx 3.33$.

Pour $n = 14$, on obtient $p \approx 3.05$.

On semble se diriger vers une convergence logarithmique en $\frac{1}{n^3}$.

Fin

Étude des suites récurrentes d'ordre 1

Étude de suite

Deux étapes distinctes :

- étude de la convergence
- calcul de la limite si elle existe

La première étape ne se résout que par les mathématiques.

- $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$: mathématiquement divergente mais convergente sur ordinateur en virgule flottante.

- $x_{n+1} = 2 - x_n + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ avec $x_0 = 2$: mathématiquement convergente mais divergente sur ordinateur en virgule flottante.

Sur ordinateur, toute série dont les termes tendent vers zéro est convergente !

Points fixes et limites possibles

Supposons une fonction f suffisamment régulière. Si $x_{n+1} = f(x_n)$, x_n ne peut converger que vers un point fixe de f, i.e. vers a tel que $a = f(a)$.

Définition : Un point fixe a de f est dit **limite possible** pour f si $\exists\ \alpha > 0$ tel que $\forall x_0 \in \,]a-\alpha, a+\alpha[\,,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Théorème : Soit un point fixe a de f.

- si $|f'(a)| < 1$ alors a est limite possible pour f.
- si $|f'(a)| > 1$ alors a n'est pas limite possible pour f (sauf cas particulier).

Démonstration

Si $\left|f'(a)\right| < 1$ alors $\exists\ \alpha > 0$ et $0 < k < 1$ tels que

$$\forall\ x \in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[, \left|f'(x)\right| \leq k < 1$$

alors

$$\forall\ x_0 \in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[, \left|x_n - a\right| \leq \left|x_0 - a\right|.k^n$$

Par récurrence. Vrai pour $n = 0$. Si vrai au rang n alors en appliquant le théorème des accroissements finis $\exists c \in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[$ tel que

$$x_{n+1} - a = f(x_n) - f(a) = (x_n - a)f'(c)$$

d'où

$$\left|x_{n+1} - a\right| \leq \left|x_n - a\right|.k \leq \left|x_0 - a\right|.k^n.k \leq \left|x_0 - a\right|.k^{n+1}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Démonstration

Si $\left|f'(a)\right| > 1$ alors $\exists\ \alpha > 0$ et $k > 1$ tels que

$$\forall\ x \in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[, \left|f'(x)\right| \geq k > 1.$$

Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ alors

$$\exists\ n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0, x_n \in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[.$$

Donc

$$\left|x_n - a\right| \geq \left|x_{n_0} - a\right|.k^{n-n_0}$$

donc, si $x_{n_0} \neq a$, il y a une contradiction.

Vitesse de convergence des suites récurrentes

Théorème : Soit un point fixe a de f vérifiant $\left|f'(a)\right| < 1$, alors $\exists V \in \mathfrak{V}(a)$ tel que $\forall v_0 \in V$ et $v_0 \neq a$,

- si $f'(a) \neq 0$, la convergence est linéaire en $|f'(a)|^n$.
- si $f'(a) = 0$ alors la convergence est exponentielle (au moins quadratique).

Démonstration

Si $0 < \left|f'(a)\right| < 1$, $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \alpha > 0$ tel que

$$\forall\ x \in \left]a - \alpha, a + \alpha\right[\,, \left|f'(a)\right| - \varepsilon \leq \left|f'(x)\right| \leq \left|f'(a)\right| + \varepsilon.$$

On a toujours $x_{n+1} - a = f(x_n) - f(a) = (x_n - a)f'(c)$.

Donc, par récurence :

$$x_0 \in \left]a - \alpha, a + \alpha\right[$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(\left|f'(a)\right| - \varepsilon\right)^n . \left|x_0 - a\right| \leq \left|x_n - a\right| \leq \left(\left|f'(a)\right| + \varepsilon\right)^n . \left|x_0 - a\right|$$

La convergence est linéaire en $\left|f'(a)\right|^n$

Démonstration

a est limite possible donc $\exists\ \alpha > 0$ tel que

$$\forall x_0 \in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[, x_n \in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[.$$

Soit $2.M$ un majorant de $|f''|$ sur $]a-\alpha, a+\alpha[$.

$$\forall\ x \in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[, \exists\ c \text{ tel que}$$

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^2}{2}.f''(c)$$

Donc

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| \leq M. |x_n - a|^2$$

La convergence est au moins quadratique.

Exemple

Soit la suite récurrente définie par $x_{n+1} = u.x_n + \dfrac{v}{x_n}$.

1) Relation entre u et v pour que $\sqrt{2}$ soit point fixe

$$\sqrt{2} = \sqrt{2}.u + \frac{v}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow v = 2.(1-u)$$

2) Relation entre u et v pour que $\sqrt{2}$ soit limite possible

$$f'(x) = u - \frac{2.(1-u)}{x^2} \Rightarrow f'(\sqrt{2}) = 2.u - 1$$

donc

$$\left|f'(\sqrt{2})\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2u - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < u < 1$$

3) Relation entre u et v pour que $\sqrt{2}$ étant limite possible, la convergence soit maximale.

$$f'(\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow u = 1/2$$

Fin