

EXERCICE 52

Logique - Connecteurs

Montrons que

quelles que soient les propositions **A B C**,
 $((A \wedge B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C))$

Montrons $((A \wedge B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C))$ (1)

$(\Leftrightarrow I)$

Supposons que $(A \wedge B) \Rightarrow C$ (h1)

Montrons $(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$ (2)

(TE)

Supposons que A (h2)

Montrons $(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$ (3)

$(\vee Id)$

Montrons $B \Rightarrow C$ (4)

$(\Rightarrow I)$

Supposons que B (h3)

Montrons C (5)

$(\Rightarrow E)$

Montrons $A \wedge B$ (6)

$(\wedge I)$

Montrons A (7)

d'après (h2)

Montrons B (8)

d'après (h3)

Montrons $(A \wedge B) \Rightarrow C$ (9)

d'après (h1)

Supposons que $\neg A$ (h4)

Montrons $(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$ (10)

$(\vee Ig)$

Montrons $A \Rightarrow C$ (11)

$(\Rightarrow I)$

Supposons que A (h5)

Montrons C (12)

$(\perp E)$

Montrons \perp (13)

$(\neg E)$

Montrons A (14)

d'après (h5)

Montrons $\neg A$ (15)

d'après (h4)

Supposons que $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}) \vee (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})$ (h6)

Montrons $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{C}$ (16)

$(\vee E)$

Montrons $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}) \vee (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})$ (17)

d'après (h6)

Supposons que $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}$ (h7)

Montrons $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{C}$ (18)

$(\Rightarrow I)$

Supposons que $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ (h8)

Montrons \mathbf{C} (19)

$(\Rightarrow E)$

Montrons \mathbf{A} (20)

$(\wedge Eg)$

Montrons $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ (21)

d'après (h8)

Montrons $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}$ (22)

d'après (h7)

Supposons que $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}$ (h9)

Montrons $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{C}$ (23)

$(\Rightarrow I)$

Supposons que $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ (h10)

Montrons \mathbf{C} (24)

$(\Rightarrow E)$

Montrons \mathbf{B} (25)

$(\wedge Ed)$

Montrons $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ (26)

d'après (h10)

Montrons $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}$ (27)

d'après (h9)