

23 LOIS DE DE MORGAN 1/4

Quantificateurs

quel que soit le prédicat F ,

$$(\neg (\exists x, F(x)) \Leftrightarrow (\forall x, \neg (F(x))))$$

Montrons $\neg (\exists x, \mathbf{F} (\mathbf{x})) \Leftrightarrow (\forall x, \neg (\mathbf{F} (\mathbf{x})))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $\neg (\exists x, \mathbf{F} (\mathbf{x}))$ (h1)

Montrons $\forall x, \neg (\mathbf{F} (\mathbf{x}))$ (2)

($\forall I$)

Soit l'élément a

Montrons $\neg (\mathbf{F} (\mathbf{a}))$ (3)

($\neg I$)

Supposons que $\mathbf{F} (\mathbf{a})$ (h2)

Montrons \perp (4)

($\neg E$)

Montrons $\exists x, \mathbf{F} (\mathbf{x})$ (5)

($\exists I$)

Montrons $\mathbf{F} (\mathbf{a})$ (6)

d'après (h2)

Montrons $\neg (\exists x, \mathbf{F} (\mathbf{x}))$ (7)

d'après (h1)

Supposons que $\forall x, \neg (\mathbf{F} (\mathbf{x}))$ (h3)

Montrons $\neg (\exists x, \mathbf{F} (\mathbf{x}))$ (8)

($\neg I$)

Supposons que $\exists x, \mathbf{F} (\mathbf{x})$ (h4)

Montrons \perp (9)

($\exists E$)

Montrons $\exists x, \mathbf{F} (\mathbf{x})$ (10)

d'après (h4)

Soit l'élément a

Supposons que $\mathbf{F} (\mathbf{a})$ (h5)

Montrons \perp (11)

($\neg E$)

Montrons $\mathbf{F} (\mathbf{a})$ (12)

d'après (h5)

Montrons $\neg (\mathbf{F} (\mathbf{a}))$ (13)

($\forall E$)

Montrons $\forall x, \neg (\mathbf{F} (\mathbf{x}))$ (14)

d'après (h3)