SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Mathématiques Discrètes

LU2IN005

ANNÉE 2022-2023 — **Examen du 9 janvier 2023** — Durée : 2h

Tous documents interdits. La note (entre 0 et 20) est le minimum entre 20 et la somme des points obtenus avec un barême sur 21+ 2 points de bonus supplémentaires. **Le barême est donné à titre indicatif.**

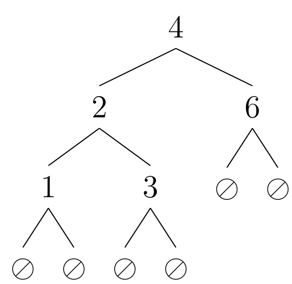
Exercice 1 (Total : 5 points)

(1) On définit l'ensemble ABS des arbres binaires *stricts* étiquetés sur un alphabet A :
— pour tout $a \in A$, $(a, \oslash, \oslash) \in ABS$ (cet arbre est appelé une feuille, et a est son étiquette).
— pour tout arbre $g \in ABS$ et $d \in ABS$, pour toute lettre $a \in A$, $(a, g, d) \in ABS$.

On rappelle que la fonction n qui associe à un arbre $t \in ABS$ son nombre de nœuds est définie par induction structurelle par :
— pour tout $a \in A$, $n(a, \oslash, \oslash) = 1$
— pour tout $a \in A$, pour tout $g, d \in ABS$, $n(a, g, d) = 1 + n(g) + n(d)$.

On rappelle également que la fonction pref : $ABS \to A^*$ qui associe à un arbre $t \in ABS$ la séquence de ses étiquettes lues par un parcours en profondeur préfixe est définie par induction structurelle par :
— pour tout $a \in A$, $\text{pref}(a, \oslash, \oslash) = a$
— pour tout $a \in A$, pour tout $g, d \in ABS$, $\text{pref}(a, g, d) = a \cdot \text{pref}(g) \cdot \text{pref}(d)$

a. (½ point) Soit t l'arbre binaire strict représenté par :



Donner pref(t).

Solution: $\text{pref}(t) = 42136$.

b. (1 point) Montrer par induction structurelle que pout tout $t \in ABS$, $n(t)$ est impair.

Solution:
— Soit $a \in A$. Par définition, $n(a, \oslash, \oslash) = 1$, donc $n(a, \oslash, \oslash)$ est impair et la propriété est vraie pour le cas de base.

— Soit $t = (a, g, d)$ pour $a \in A$, $g, d \in ABS$ et supposons que $n(g)$ et $n(d)$ sont impairs, c'est-à-dire qu'il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $n(g) = 2k + 1$ et $n(d) = 2k' + 1$. Par définition, $n(a, g, d) = 1 + n(g) + n(d) = 1 + 2k + 1 + 2k' + 1 = 2(k + k' + 1) + 1$. Donc $n(a, g, d)$ est impair.

Donc, pour tout $t \in ABS$, $n(t)$ est impair.

c. (1 point) Montrer par induction structurelle que pour tout $t \in ABS$, si $\text{pref}(t) = w_1 \dots w_n$, alors w_n est l'étiquette d'une feuille de t.

Solution:

— Soit $t = (a, \oslash, \oslash)$ pour $a \in A$. Alors par définition de pref, $\text{pref}(t) = a$, qui est l'étiquette d'une feuille de t.

— Soit $t = (a, g, d)$ pour $a \in A$, et $g, d \in ABS$ et supposons par hypothèse d'induction que $\text{pref}(g) = u_1 \cdots u_m$ avec u_m étiquette d'une feuille de g, et $\text{pref}(d) = v_1 \cdots v_p$ avec v_p étiquette d'une feuille de d. Par construction des ABS, g et d ne sont pas vides, donc $m, p > 0$. Par définition de pref, on a que $\text{pref}(t) = a u_1 \cdots u_m v_1 \cdots v_p$. De plus, v_p étant l'étiquette d'une feuille de d, c'est également l'étiquette d'une feuille de t, par construction de t.

Donc, pour tout $t \in ABS$, la dernière lettre de son parcours préfixe est l'étiquette d'une feuille.

(2) On définit une fonction $f : ABS \to \{x, \overline{x}\}^*$ de la façon suivante : pour $t \in ABS$ tel que $\text{pref}(t) = w_1 \dots w_{2n+1}$, $f(t) = x_1 \dots x_{2n}$ avec $x_i = \overline{x}$ si w_i est l'étiquette d'une feuille de t, et $x_i = x$ sinon.

a. (1/2 point) Donner $f(t)$ pour l'arbre t dessiné plus haut, et vérifier que $f(t)$ est de longueur paire.

Solution: $\text{pref}(t) = 42136$ et $f(t) = xx\overline{x}\overline{x}$.

b. (2 points) Montrer que pour tout $t \in ABS$, le nombre de x apparaissant dans $f(t)$ est égal au nombre de $\overline{x}$, c'est-à-dire que $|f(t)|_x = |f(t)|_{\overline{x}}$. Vous pourrez vous appuyer sur les questions précédentes.

Solution:

— Soit $t = (a, \oslash, \oslash)$ pour $a \in A$. Alors $f(t) = \varepsilon$, donc $|f(t)|_x = 0 = |f(t)|_{\overline{x}}$.

— Soit $t = (a, g, d)$ pour $a \in A$ et $g, d \in ABS$ et supposons par hypothèse d'induction que $|f(g)|_x = |f(g)|_{\overline{x}}$ et $|f(d)|_x = |f(d)|_{\overline{x}}$. On pose $\text{pref}(g) = u_1 \cdots u_{2m+1}$ et $\text{pref}(d) = v_1 \cdots v_{2p+1}$. On a alors

$f(g) = x_1 \cdots x_{2m}$ et $f(d) = x'_1 \cdots x'_{2p}$. Par définition, $\mathrm{pref}(t) = a{\cdot}\mathrm{pref}(g){\cdot}\mathrm{pref}(d) = a{\cdot}u_1 \cdots u_{2m+1}v_1 \cdots v_{2p+1}$. D'après la question c, u_{2m+1} est l'étiquette d'une feuille de g, donc d'une feuille de t. Alors, $f(t) = x \cdot x_1 \cdots x_{2m}x_{2m+1}x'_1 \cdots x'_{2p} = x \cdot f(g) \cdot \overline{x} \cdot f(d)$.
Donc $|f(t)|_x = 1 + |f(g)|_x + |f(d)|_x = 1 + |f(g)|_{\overline{x}} + [f(d)|_{\overline{x}}$ par hypothèse d'induction. Donc $|f(t)|_x = |f(t)|_{\overline{x}}$.

c. (2 points (bonus)) Montrer que pour tout $t \in ABS$, pour tout préfixe w de $f(t)$, $|w|_x \geq |w|_{\overline{x}}$.

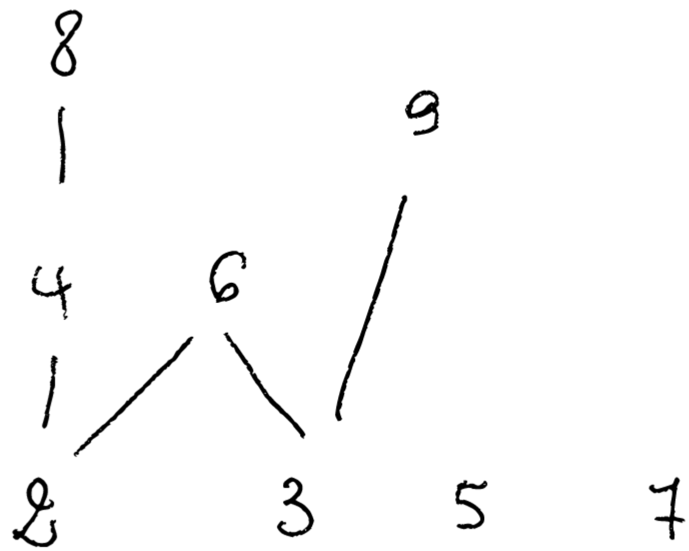
Solution:

- Soit $t = (a, \oslash, \oslash)$ avec $a \in A$. Alors $f(t) = \varepsilon$ et le seul préfixe de $f(t)$ est ε qui est tel que $|\varepsilon|_x = |\varepsilon|_{\overline{x}}$.
- Soit $t = (a, g, d)$ pour $a \in A$ et $g, d \in ABS$. Supposons que pour tout préfixe u de $f(g)$, $|u|_x \geq |u|_{\overline{x}}$, et pour tout préfixe v de $f(d)$, $|v|_x \geq |v|_{\overline{x}}$. Soit $f(t) = x_1 \ldots x_{2n}$. Par construction de f, $f(t) = xf(g)\overline{x}f(d)$ (voir question précédente), et soit w un préfixe de $f(t)$. Plusieurs cas sont possibles :
  - Si $w = \varepsilon$, alors $|w|_x = 0 \geq 0 = |w|_{\overline{x}}$.
  - Si $w = x$, alors $|w|_x \geq |w|_{\overline{x}}$.
  - Si $w = xu$ avec u préfixe de $f(g)$, alors par hypothèse d'induction, $|u|_x \geq |u|_{\overline{x}}$. Donc, $|w|_x = 1 + |u|_x \geq |u|_{\overline{x}} = |w|_{\overline{x}}$.
  - Si $w = xf(g)\overline{x}$, alors par hypothèse d'induction, $|f(g)|_x \geq |f(g)|_{\overline{x}}$. Donc, $|w|_x = 1 + |u|_x \geq 1 + |u|_{\overline{x}} = |w|_{\overline{x}}$.
  - Si $w = xf(g)\overline{x}v$ avec v préfixe de $f(d)$, alors par hypothèse d'induction, $|f(g)|_x \geq |f(g)|_{\overline{x}}$, et $|v|_x \geq |v|_{\overline{x}}$. Donc, $|w|_x = 1 + |f(g)|_x + |u|_x \geq 1 + |f(g)|_{\overline{x}} + |u|_{\overline{x}} = |w|_{\overline{x}}$.

Exercice 2 (Total : 5½ points)

Soit $E = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, muni de la relation d'ordre $|$ définie par $n|m$ si et seulement si n est un diviseur de m.

(1) (½ point) Soit $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Représenter la relation d'ordre $|$ sur A par un graphe sans les arcs de réflexivité ni de transitivité.



Solution:

(2) (2 points) Donner l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de A dans E. Donner, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus petit élément, le plus grand élément, les éléments maximaux et les éléments minimaux.

Solution:

— Les majorants de A dans E sont les multiples communs de 5, 6, 7, 8 et 9

— Il n'y a pas de minorant de A dans E.

— La borne supérieure est le plus petit multiple commun de 5, 6, 7, 8 et 9, soit $2520 = 5 * 7 * 8 * 9$.

— La borne inférieure n'existe pas

— Il n'y a pas de plus grand élément

— Il n'y a pas de plus petit élément

— Les éléments maximaux sont 5,6,7,8,9

— Les éléments minimaux sont 2,3,5,7.

(3) (2 points) Soit X un sous-ensemble non vide de E. Montrer que X admet (au moins) un élément minimal pour la relation $|$.

Solution: Comme $(\mathbb{N}, \leq)$ l'ensemble des entiers naturels muni de la relation d'ordre usuelle est un ordre bien fondé, on sait que X admet un élément minimal pour $\leq$. Soit n un tel élément minimal. Supposons qu'il existe $m \in X$ tel que $m|n$. Alors, $m \leq n$ et comme n est un élément minimal de X pour $\leq$, $m = n$. Donc n est un élément minimal de X pour $|$.

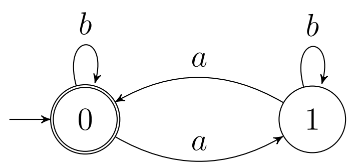
(4) (1 point) Que peut-on en déduire sur l'ordre $(E, |)$? Justifier.

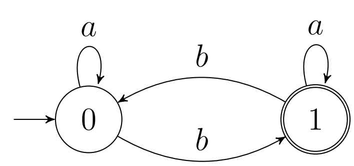
Solution: Comme toute partie non vide de E admet un élément minimal, on en déduit que $(E, |)$ est un ordre bien fondé.

Exercice 3 (Total : 6½ points)

On se place sur l'alphabet $A = \{a, b\}$.

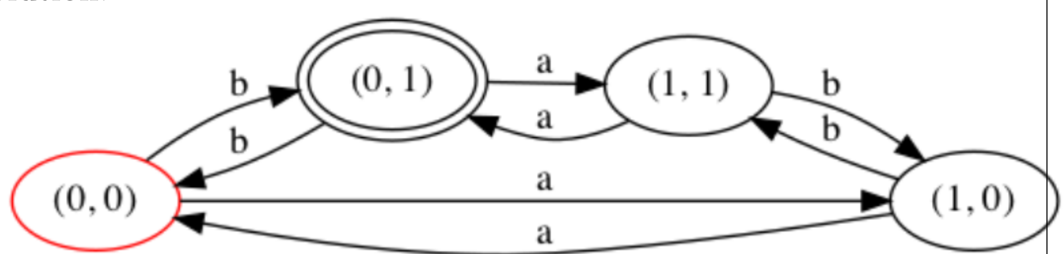
(1) a. (½ point) Donner un automate acceptant les mots contenant un nombre pair de a et un automate acceptant les mots contenant un nombre impair de b.

Solution: 

et 

b. (1 point) En déduire un automate acceptant L_1, le langage des mots contenant un nombre pair de a et un nombre impair de b.

Solution:



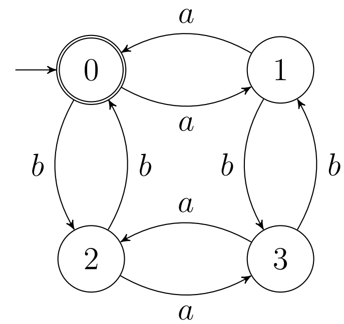
(2) (2 points) Le langage $L_2 = \{a^{2n}b^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est-il reconnaissable ? Démontrer.

Solution: Supposons L_2 reconnaissable. Soit $\mathcal{A}$ un automate fini tel que $L(\mathcal{A}) = L_2$, et soit N le nombre d'états de $\mathcal{A}$. Soit $w = a^{2N}b^{2N+1}$ un mot de L_2, donc accepté par $\mathcal{A}$. Soit $s_0 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{a} \dots \xrightarrow{a} s_{2N} \xrightarrow{b^{2N+1}} s_f$ une exécution acceptante de l'automate $\mathcal{A}$ sur w. Comme il n'y a que N états dans $\mathcal{A}$, on sait qu'il existe $0 \leq i < j \leq 2N$ tels que $s_i = s_j$ et l'exécution ci-dessus peut donc se réécrire $s_0 \xrightarrow{a^i} s_i \xrightarrow{a^{j-i}} s_i \xrightarrow{a^{2N-j}} s_{2N} \xrightarrow{b^{2N+1}} s_f$, avec $j - i > 0$. Il existe donc une autre exécution acceptante de $\mathcal{A}$: $s_0 \xrightarrow{a^i} s_i \xrightarrow{a^{2N-j}} s_{2N} \xrightarrow{b^{2N+1}} s_f$, d'étiquette $a^{2N-j+i}b^{2N+1}$. Or, comme $j - i > 0$, $2N - j + i < 2N$, donc $a^{2N-j+i}b^{2N+1} \notin L_2$, ce qui contredit l'hypothèse que $L(\mathcal{A}) = L_2$.

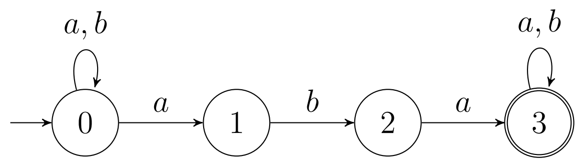
Donc L_2 n'est pas reconnaissable.

(3) On considère les deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ suivants :

$\mathcal{B}$

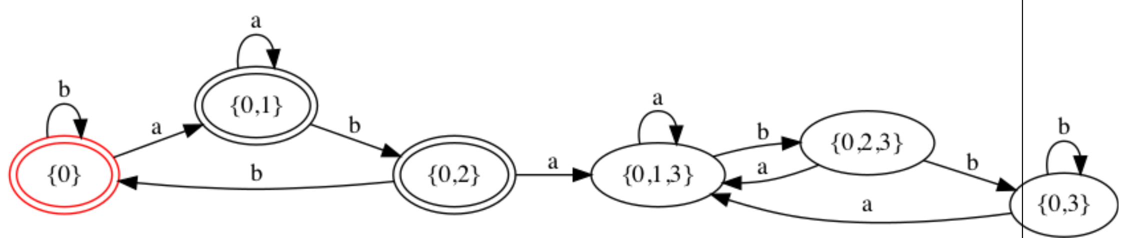


$\mathcal{A}$



a. (1½ points) Donner un automate reconnaissant le complémentaire de $L(\mathcal{A})$.

Solution:



b. (1½ points) Donner une expression régulière pour l'automate $\mathcal{B}$.

Solution:

$$\begin{aligned}
L_0 &= aL_1 + bL_2 + \varepsilon && (1)\\
L_1 &= aL_0 + bL_3 && (2)\\
L_2 &= aL_3 + bL_0 && (3)\\
L_3 &= aL_2 + bL_1 && (4)
\end{aligned}$$

on remplace (2) dans (1) et (4)

$$\begin{aligned}
L_0 &= aaL_0 + abL_3 + bL_2 + \varepsilon && (1)\\
L_1 &= aL_0 + bL_3 && (2)\\
L_2 &= aL_3 + bL_0 && (3)\\
L_3 &= aL_2 + baL_0 + bbL_3 && (4)
\end{aligned}$$

puis (3) dans (1) et (4)

$$
\begin{aligned}
L_0 &= & aaL_0 + abL_3 + baL_3 + bbL_0 + \varepsilon && (1)\\
L_1 &= & aL_0 + bL_3 && (2)\\
L_2 &= & aL_3 + bL_0 && (3)\\
L_3 &= & aaL_3 + abL_0 + baL_0 + bbL_3 && (4)
\end{aligned}
$$

On applique le lemme d'Arden sur (4) : $(aa + bb)^*(abL_0 + baL_0)$, et on remplace L_3 dans (1) :
$L_0 = (aa+bb)L_0 + (ab+ba)((aa+bb)^*(abL_0+baL_0)) = (aa+bb+(ab+ba)(aa+bb)^*(ab+ba))L_0 + \varepsilon$ et on applique le lemme d'Arden sur L_0 :
$L_0 = (aa + bb + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba))^*$.

Exercice 4 (Total : 4 points)

(1) (½ point) Soit x et y deux variables booléennes. Montrer que $(x+y)\cdot(\overline{x}+y)\cdot\overline{y} = 0$.

Solution: $(x + y) \cdot (\overline{x} + y) \cdot \overline{y} = (x + y) \cdot ((\overline{x} \cdot \overline{y}) + (y \cdot \overline{y})) = (x + y) \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} = (x \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}) + (y \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}) = 0$

(2) (½ point) Soit F_1 et F_2 deux formules. Montrer que $F_1 \models F_2$ si et seulement si $F_1 \wedge \neg F_2$ est insatisfiable.

Solution: Supposons $F_1 \models F_2$ et montrons que $F_1 \wedge \neg F_2$ est insatisfiable. Soit $\mathbf{I}$ une interprétation quelconque, montrons que $\mathbf{I}(F_1 \wedge \neg F_2) = \mathbf{I}(F_1)\cdot\overline{\mathbf{I}(F_2)} = 0$. Si $\mathbf{I}(F_1) = 0$ alors on a bien $\mathbf{I}(F_1)\cdot\overline{\mathbf{I}(F_2)} = 0$. Sinon, si $\mathbf{I}(F_1) = 1$, alors puisque $F_1 \models F_2$ on a $\mathbf{I}(F_2) = 1$ et donc $\mathbf{I}(F_1) \cdot \overline{\mathbf{I}(F_2)} = 0$.
Supposons la formule $F_1 \wedge \neg F_2$ insatisfiable et montrons que $F_1 \models F_2$. Soit $\mathbf{I}$ une interprétation telle que $\mathbf{I}(F_1) = 1$, montrons que $\mathbf{I}(F_2) = 1$. Puisque $F_1 \wedge \neg F_2$ est insatisfiable, on a $\mathbf{I}(F_1 \wedge \neg F_2) = \mathbf{I}(F_1) \cdot \overline{\mathbf{I}(F_2)} = 0$ et puisque $\mathbf{I}(F_1) = 1$ on a donc $\overline{\mathbf{I}(F_2)} = 0$ et donc $\mathbf{I}(F_2) = 1$.

(3) Devant une armoire comportant deux portes (une porte à gauche et une porte à droite), Conrad et Paul font les déclarations suivantes :
— Conrad : « *derrière au moins une des deux portes, il y a du chocolat* »
— Paul : « *si il y a du chocolat derrière la porte de gauche, alors il y en a derrière la porte de droite.* »
On désigne par les symboles g et d les propositions suivantes :
— g : « *Il y a du chocolat derrière la porte de gauche.* »
— d : « *Il y a du chocolat derrière la porte de droite.* »

a. (½ point) Formaliser les déclarations de Conrad et Paul par deux formules F_1 et F_2 de la logique des propositions.

Solution: $F_1 = g \vee d$, $F_2 = g \rightarrow d$

b. (½ point) Soit $\mathbf{I}$ une interprétation quelconque. Exprimer $\mathbf{I}(F_1)$ et $\mathbf{I}(F_2)$ en fonction de $\mathbf{I}(g)$ et $\mathbf{I}(d)$.

Solution: $\mathbf{I}(F_1) = \mathbf{I}(g) + \mathbf{I}(d)$, $\mathbf{I}(F_2) = \overline{\mathbf{I}(g)} + \mathbf{I}(d)$

c. (1 point) En utilisant les questions 1 et 2, montrer que si Conrad et Paul disent tous les deux la vérité, alors il y a du chocolat derrière la porte de droite.

Solution: Il s'agit de montrer que $F_1 \wedge F_2 \models d$ ce qui, d'après la question 2, revient à montrer que la formule $F_1 \wedge F_2 \wedge \neg d$ est insatisfiable. Soit $\mathbf{I}$ une interprétation quelconque, en notant $x = \mathbf{I}(g)$ et $y = \mathbf{I}(d)$ on a $\mathbf{I}(F_1 \wedge F_2 \wedge \neg d) = (x + y) \cdot (\overline{x} + y) \cdot \overline{y}$ et donc $\mathbf{I}(F_1 \wedge F_2 \wedge \neg d) = 0$ d'après la question 1.

d. (1 point) On suppose à présent que Conrad dit la vérité et Paul ment. Que peut-on en déduire ? Justifier précisément la réponse en utilisant la notion d'interprétation.

Solution: Supposer que Conrad dit la vérité et Paul ment revient à considérer une interprétation $\mathbf{I}$ telle que $\mathbf{I}(F_1 \wedge \neg F_2) = 1$. Toujours en posant $x = \mathbf{I}(g)$ et $y = \mathbf{I}(d)$ on a :

$$\mathbf{I}(F_1 \wedge \neg F_2) = (x+y) \cdot \overline{(\overline{x} + y)} = (x+y) \cdot x \cdot \overline{y} = (x \cdot x \cdot \overline{y}) + (y \cdot x \cdot \overline{y}) = x \cdot \overline{y} = 1$$

On a donc $F_1 \wedge \neg F_2 \models g \wedge \neg d$ ce qui permet de conclure qu'il y a du chocolat derrière la porte de gauche mais pas derrière la porte de droite.