Numéro d'anonymat :

Examen LU2IN003

Mercredi 19 Mai 2021, 1.5 heures
aucun document autorisé

Exercice 1 – Arbres binaires balisés (10 points)

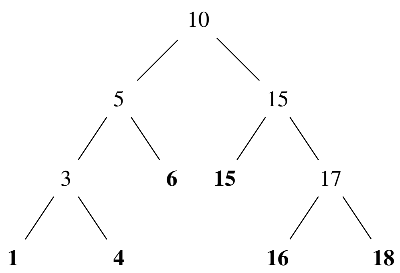
On rappelle qu'un arbre binaire **strict** est un arbre binaire **non vide** dans lequel tout nœud a 0 ou 2 fils.
Un *arbre binaire balisé* sur $\mathbb{N}$ (noté ABB) est un arbre binaire **strict** étiqueté sur $\mathbb{N}$ dans lequel tout nœud a une clé qui est supérieure ou égale à toutes les clés de son sous-arbre gauche et qui est strictement inférieure à toutes les clés de son sous-arbre droit.
Les clés des nœuds internes sont appelées *balises* et les clés des feuilles sont appelées *valeurs*. Dans un ABB, on ne s'intéresse qu'aux valeurs (stockées aux feuilles), les balises ne servent qu'à diriger la recherche.
Dans les preuves, on utilisera la définition inductive des ABB. B est un ABB si :

Base $B = (x, \emptyset, \emptyset)$ avec $x \in \mathbb{N}$;

Induction $B = (b, G, D)$ avec $b \in \mathbb{N}$ et :

- G et D sont des ABB ;
- toutes les clefs de G sont inférieures ou égales à b ;
- toutes les clefs de D sont strictement supérieures à b.

Voici un exemple d'ABB, que l'on appellera $B1$:



Les valeurs de $B1$ sont : 1, 4, 6, 15, 16, 18. Les balises de $B1$ sont : 10, 5, 15, 3, 17.
Pour manipuler les ABB, on utilise les primitives définies sur les arbres binaires : `AB.clef`, `AB.gauche`, `AB.droit`, auxquelles on ajoute les fonctions :
– `ABfeuille(x)` qui retourne un arbre binaire réduit à une feuille d'étiquette x,
– `estABfeuille(B)` qui teste si un arbre binaire B est réduit à une feuille.

Question 1

On note $ni(B)$ le nombre de nœuds internes et $f(B)$ le nombre de feuilles d'un arbre balisé B.

1. Que valent $ni(B1)$ et $f(B1)$?
2. Donner une définition inductive de $ni(B)$ et de $f(B)$.
3. Prouver par induction que, pour tout arbre balisé B : $f(B) = ni(B) + 1$.

Question 2

1. Soit $B2$ un arbre balisé dont les valeurs sont 4, 7, 3, 5, 1, 8. Combien $B2$ a-t-il de nœuds internes ?
2. Dessiner un arbre balisé contenant les valeurs 4, 7, 3, 5, 1, 8 (le choix des balises est laissé libre mais il doit bien sûr être judicieux).
3. Pouvez-vous dessiner un arbre balisé contenant les mêmes valeurs (c'est-à-dire 4, 7, 3, 5, 1, 8) et n'ayant pas la même forme ? Si oui, le dessiner.
4. Un arbre balisé est-il nécessairement parfait ? Justifier la réponse.

La fonction `ABBinfixe(B)` définie ci-dessous calcule le parcours infixe des valeurs d'un ABB.

```
def ABBinfixe(B):
  if estABfeuille(B):
    return [B.clef]
  return ABBinfixe(B.gauche) + ABBinfixe(B.droit)
```

Question 3

1. Prouver par induction structurelle que, pour tout arbre balisé B, `ABBinfixe(B)` retourne la liste des valeurs de B rangée en ordre strictement croissant.
2. Montrer, par induction structurelle, que le nombre $c(f)$ de concaténations effectuées par `ABBinfixe(B)` est égal à $f - 1$, où f est le nombre de valeurs de B.
3. En déduire la complexité de `ABBinfixe(B)` en fonction du nombre de nœuds n de l'arbre balisé B lorsque les listes sont représentées par des listes circulaires doublement chaînées. Justifier votre réponse.

La fonction `ABBcherche(B,x)` définie ci-dessous teste si un entier est une valeur d'un ABB.

```
def ABBcherche(B,x):
  b = B.clef
  print("Appel␣a␣partir␣de␣b␣=␣", b)
  if estABfeuille(B):
    res = (x == b)
  else:
    if x <= b:
      res = ABBcherche(B.gauche,x)
    else:
      res = ABBcherche(B.droit,x)
  print("Valeur␣de␣retour␣en␣b␣=␣", b, "␣:␣", res)
  return res
```

Question 4

1. Exécuter l'appel de `ABBcherche(B1,5)`, en ne donnant que les affichages. Préciser la valeur retournée.
2. Calculer `ABBcherche(B1,1)`, `ABBcherche(B1,10)`, `ABBcherche(B1,15)`.
3. Prouver que, pour tout arbre balisé B et pour tout $x \in \mathbb{N}$, `ABBcherche(B,x)` se termine et retourne la valeur `True` si x est une valeur de B et la valeur `False` sinon.
4. Pour un arbre balisé B ayant f valeurs, calculer la complexité pire cas et la complexité meilleur cas de `ABBcherche(B,x)` en fonction de f.

Exercice 2 – Graphes biconnexes et point d'articulation (12 points + 2 bonus)

Dans cet exercice, $G = (V, E)$ est un graphe **non orienté connexe**. On rappelle qu'un graphe est *connexe* si pour tout couple de sommets $(x, y) \in V^2$, il existe une chaîne qui relie x à y dans G. Une chaîne (resp. un cycle) est *élémentaire* si elle (resp. il) ne passe pas deux fois par le même sommet.

Question 1
On considère dans cette question le graphe non orienté connexe $G_1 = (V_1, E_1)$ avec $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$.

1. Représentez G_1 graphiquement.
2. Donnez la représentation de G_1 sous la forme d'une matrice sommet-sommet.
3. Donnez la représentation de G_1 sous la forme de listes d'adjacence.
4. Représentez graphiquement le sous-graphe induit $G_2 = (V_1 - \{3\}, E_1)$. G_2 est il connexe ? Justifiez votre réponse dans la négative.

Question 2

Soit G un graphe non orienté connexe et la relation $\mathcal{R}$ définie sur V^2 de la manière suivante : pour tout couple $(x, y) \in V^2$, $x\mathcal{R}y$ si il existe un cycle élémentaire qui contient x et y.

Par convention, on considère que, pour tout $x \in V$, $x\mathcal{R}x$. De même, pour tout arête $e = \{x, y\} \in E$, $c = (x, y, x)$ est un cycle élémentaire et donc $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.

Un graphe $G = (V, E)$ est *biconnexe* si $\mathcal{R} = V \times V$.

1. Donnez la relation $\mathcal{R}$ associée au graphe G_1. On pourra la représenter sous la forme d'une matrice $M_{\mathcal{R}}$ à valeur dans $\{0, 1\}$ de taille $V \times V$ avec $M_{\mathcal{R}}[x, y] = 1$ si $x\mathcal{R}y$.
2. Est-ce que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ? Justifiez votre réponse.
3. Est-ce que le graphe G_1 de la question 1 est biconnexe ? Dans la négative, quelles sont les arêtes que l'on peut rajouter au minimum pour obtenir à partir de G_1 un graphe biconnexe.

Question 3
On considère dans cette question la liste $L = (1, 3, 5, 4, 2)$.

1. Est-ce que L est un parcours générique de G_1 ? Dans l'affirmative, donnez un graphe de liaison associé. Est-ce que le graphe de liaison est unique ? Justifiez votre réponse.
2. Rappeler la définition d'un parcours en largeur. Est-ce que L est un parcours en largeur ? Dans l'affirmative, donnez un graphe de liaison en largeur associé. Dans le cas général, est-ce que le graphe de liaison d'un parcours en largeur est unique ? Justifiez votre réponse.
3. Rappeler la définition d'un parcours en profondeur. Est-ce que L est un parcours en profondeur ? Dans l'affirmative, donnez un graphe de liaison en profondeur associé.

Question 4
Un *point d'articulation* de $G = (V, E)$ est un sommet $x \in V$ tel que le sous-graphe induit $G' = (V - \{x\}, E)$ n'est pas connexe. Est-ce que le graphe G_1 de la question 1 possède un ou plusieurs points d'articulation ? Dans l'affirmative, quels sont-ils ?

Question 5
On rappelle que $G = (V, E)$ est un graphe non orienté connexe. Montrez que, si G est biconnexe, alors G ne possède pas de point d'articulation. Pour cela, vous pouvez démontrer la contraposée.

Question 6
On suppose dans cette question que G ne possède pas de point d'articulation. On souhaite démontrer que G est alors biconnexe.

Pour cela, on suppose le résultat suivant : soient x, y et z trois sommets distincts tels que x et y sont inclus dans un cycle élémentaire C et que l'arête $\{y, z\} \in E$. Alors, il existe un cycle élémentaire C' qui contient x et z.

1. Démontrez par récurrence sur i la propriété $\Pi(i)$ suivante pour $i \geq 2$: soit $x_1, x_2, \ldots x_i$ une chaîne élémentaire constituée de i sommets. Alors il existe un cycle contenant x_1 et x_i.
2. En déduire que si G ne possède pas de point d'articulation, alors G est biconnexe.

Question 7
On souhaite maintenant développer un algorithme qui détermine si un graphe connexe $G = (V, E)$ est biconnexe.

1. Citez le nom d'un algorithme du cours qui permet de déterminer si un graphe G est connexe.
2. En déduire le principe d'un algorithme (décrit en maximum trois phrases) pour déterminer si un graphe G connexe est biconnexe.

Question 8 – Bonus
Supposons que G ne possède pas de point d'articulation. Soient x, y et z trois sommets distincts tels que x et y sont inclus dans un cycle élémentaire C et que l'arête $\{y, z\} \in E$. Démontrez qu'il existe un cycle élémentaire C' qui contient x et z.