

EXERCICE 9

Logique - Quantificateurs

quels que soient les prédicats F G ,

quelle que soit la constante a ,

$$(((\forall x, F(x)) \vee G(a)) \Leftrightarrow (\forall x, (F(x) \vee G(a))))$$

Soit la constante a

Montrons $((\forall x, F(x)) \vee G(a)) \Leftrightarrow (\forall x, (F(x) \vee G(a)))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $(\forall x, F(x)) \vee G(a)$ (h1)

Montrons $\forall x, (F(x) \vee G(a))$ (2)

($\forall E$)

Montrons $(\forall x, F(x)) \vee G(a)$ (3)

d'après (h1)

Supposons que $\forall x, F(x)$ (h2)

Montrons $\forall x, (F(x) \vee G(a))$ (4)

($\forall I$)

Soit l'élément x

Montrons $F(x) \vee G(a)$ (5)

($\vee I_g$)

Montrons $F(x)$ (6)

($\forall E$)

Montrons $\forall x, F(x)$ (7)

d'après (h2)

Supposons que $G(a)$ (h3)

Montrons $\forall x, (F(x) \vee G(a))$ (8)

($\forall I$)

Soit l'élément x

Montrons $F(x) \vee G(a)$ (9)

($\vee Id$)

Montrons $G(a)$ (10)

d'après (h3)

Supposons que $\forall x, (F(x) \vee G(a))$ (h4)

Montrons $(\forall x, F(x)) \vee G(a)$ (11)

(TE)

Supposons que $G(a)$ (h5)

Montrons $(\forall x, F(x)) \vee G(a)$ (12)

($\vee Id$)

Montrons $\mathbf{G}(\mathbf{a})$ (13)

d'après (h5)

Supposons que $\neg(\mathbf{G}(\mathbf{a}))$ (h6)

Montrons $(\forall x, \mathbf{F}(x)) \vee \mathbf{G}(\mathbf{a})$ (14)

($\forall I$)

Montrons $\forall x, \mathbf{F}(x)$ (15)

($\forall I$)

Soit l'élément x

Montrons $\mathbf{F}(x)$ (16)

(A)

Supposons que $\neg(\mathbf{F}(x))$ (h7)

Montrons \perp (17)

($\vee E$)

Montrons $\mathbf{F}(x) \vee \mathbf{G}(\mathbf{a})$ (18)

($\vee E$)

Montrons $\forall x, (\mathbf{F}(x) \vee \mathbf{G}(\mathbf{a}))$ (19)

d'après (h4)

Supposons que $\mathbf{F}(x)$ (h8)

Montrons \perp (20)

($\neg E$)

Montrons $\mathbf{F}(x)$ (21)

d'après (h8)

Montrons $\neg(\mathbf{F}(x))$ (22)

d'après (h7)

Supposons que $\mathbf{G}(\mathbf{a})$ (h9)

Montrons \perp (23)

($\neg E$)

Montrons $\mathbf{G}(\mathbf{a})$ (24)

d'après (h9)

Montrons $\neg(\mathbf{G}(\mathbf{a}))$ (25)

d'après (h6)