Université Paris 6 Vendredi 17 Novembre 2017

Master ANDROIDE–M1–MOGPL

Examen réparti 1

Durée 2h - Notes de cours et TD autorisées

Le barême est donné à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 : modélisation et test d'optimalité [5 pts]

Un constructeur automobile passe les commandes de 50, 65, 100 et 70 unités d'une pièce mécanique pour les 4 prochains mois auprès d'un sous-traitant. Ces quantités doivent être livrées aux mois indiqués, sans avance ni retard. Le sous-traitant a toutefois la possibilité de fabriquer d'avance certaines quantités et de les stocker jusqu'au mois de livraison. Le coût de fabrication d'une pièce varie d'un mois à l'autre. Il est de 5, 8, 4 et 7 euros par unité pour les mois 1, 2, 3, 4. Initialement les stocks du sous-traitant sont vides. Les coûts de stockage subis par le sous-traitant pour les pièces fabriquées en avance sont de 2 Euros par unité (ce coût ne s'applique qu'au reliquat de fin de mois, pour les mois 1, 2, 3, 4). A la fin du mois 4, on estime que les pièces restantes peuvent être toutes revendues au prix de 6 euros par unité. Dans cet exercice on s'intéresse à la recherche d'une politique de fabrication des pièces qui coûte le moins cher possible.

1°) En notant x_i le nombre d'unités fabriquées au mois i et r_i le reliquat en fin de mois i, exprimer le coût total de fabrication en fonction des $x_i,\ i = 1,\dots,4$, le coût total de stockage en fonction des $r_i,\ i = 1,\dots,4$ et le bénéfice lié à la revente des éventuels reliquats r_4 du quatrième mois. En déduire le coût global de la politique π qui consiste à fabriquer 115 unités le premier mois, 170 le troisième mois et 0 les autres mois.

2°) Formuler un programme linéaire $\mathcal{P}$ sous forme standard qui permette de déterminer la politique optimale pour ce problème (on admettra que les variables peuvent être définies comme réelles même si elles désignent des quantités sensées être entières).

3°) Déterminer les variables de $\mathcal{P}$ qui sont en base pour la solution π et montrer que cette politique est optimale.

Exercice 2 : méthode en deux phases [5 pts]

Soit $\mathcal{P}$ le programme linéaire suivant :

$$\min z = x_1 + x_2$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & \geq & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ 4x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \end{array}\right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

1°) Mettre $\mathcal{P}$ sous forme standard avec un second membre positif et montrer que la base associée aux variables d'écart n'est pas réalisable.

2°) Résoudre $\mathcal{P}$ par la méthode en deux phases (après ajout éventuel d'une ou plusieurs variables artificielles si c'est utile). On utilisera la méthode des tableaux pour effectuer toute itération de l'algorithme du simplexe. On prendra soin de spécifier la solution optimale et la valeur de l'objectif à l'optimum.

Exercice 3 : PL, dualité et résolution graphique [5 pts]

Soit $\mathcal{P}$ le programme linéaire suivant :

$$\min -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & \geq & -8 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 7 \end{array}\right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

1°) Mettre le problème $\mathcal{P}$ sous forme canonique (notée $\mathcal{C}$) avec un second membre positif en toutes ses composantes.

2°) Formuler le dual $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ et le résoudre graphiquement.

3°) Déduire des questions précédentes la solution optimale du problème $\mathcal{P}$.

4°) Si l'on impose de plus que $x_4 = 1$, déterminer la nouvelle solution optimale du problème $\mathcal{P}$ ainsi modifié et l'impact de cette nouvelle contrainte sur la valeur de l'objectif à l'optimum.

Exercice 4 : résolution d'un jeu [5 pts]

On considère le jeu "Pierre-Feuille-Ciseaux" dans lequel deux joueurs choisissent simultanément un coup parmi "Pierre" (P), "Feuille" (F) et "Ciseaux" (C) en le symbolisant de la main comme suit :

La pierre bat les ciseaux (en les émoussant) ce qui rapporte 1 point au gagnant (-1 au perdant), les ciseaux battent la feuille (en la coupant) ce qui rapporte 2 points au gagnant (-2 au perdant), la feuille bat la pierre (en l'enveloppant) ce qui rapporte 3 points au gagnant (-3 au perdant). Ainsi chaque coup bat un autre coup, fait match nul contre le deuxième (son homologue) et est battu par le troisième.

1°) Donner le tableau des gains du joueur 1 pour ce jeu en mettant en ligne les coups du joueur 1 et en colonne les coups du joueur 2 dans l'ordre P, F, C.

2°) Les deux joueurs s'affrontent en itérant un grand nombre de fois ce jeu. Soit $p = (p_1, p_2, p_3)$ le vecteur de probabilités caractérisant la stratégie du joueur 1 et $q = (q_1, q_2, q_3)$ celui caractérisant la stratégie du joueur 2. Exprimer en fonction de p_1, p_2, p_3 l'espérance de gain du joueur 1 face aux stratégies pures du joueur 2 (stratégies respectivement définies par $q = (1, 0, 0)$, $q = (0, 1, 0)$ et $q = (0, 0, 1)$). En déduire le programme linéaire que le joueur 1 doit résoudre pour déterminer sa stratégie optimale sous l'hypothèse que son adversaire joue également de manière optimale.

3°) Ecrire le système d'inéquations linéaires qui caractérise les stratégies optimales du joueur 1 et déterminer l'unique stratégie optimale du joueur 1.