

Examen du 19/05/2023
Durée 1h30

Inscrire votre numéro d'anonymat sur votre copie.

Tout appareil électronique interdit.

Les seuls documents autorisés sont le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et celui des règles de la Déduction Naturelle.

Le barème sur 34 points est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (0,5+1+2,5+(2,5+2,5)=9 points)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{f\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{g\}$.

- Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

On définit une structure **M** dont le domaine d'interprétation est l'ensemble \mathbb{Z} comme suit :

$$\begin{aligned} f^M : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} & g^M : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ f^M(n) &= -n & g^M(n_1, n_2) &= n_1 \times n_2, \end{aligned}$$

- Calculer $[f(g(f(a), g(b, f(b))))]^M$ en fonction de a^M et b^M .
- Déterminer a^M et b^M pour que la propriété « pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe un entier relatif n tel que $[t]^M = 2n$ » soit vérifiée. Montrer que c'est bien le cas.
- Nous considérons maintenant les prédictats p et q , une variable x et la formule $F = p(f(x)) \Rightarrow q(g(x, f(x)))$.
 - Définir une structure **M₁** et une valuation v_1 telle $[F]_{v_1}^{M_1} = 1$. Justifier votre réponse.
 - Définir une structure **M₂** et une valuation v_2 telle $[F]_{v_2}^{M_2} = 0$. Justifier votre réponse.

Exercice 2 (4+5+2=11 points)

Les preuves demandées devront être obtenues en utilisant les règles de la déduction naturelle et les règles dérivées du formulaire. Si vous n'avez pas réussi à construire une preuve B_i vous pouvez quand même l'utiliser dans les questions qui suivent.

Soit p , q et s des prédictats unaires et r un prédictat binaire.

- Compléter la preuve B_1 ci-dessous de la formule $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$ à partir de l'hypothèse h_1 : $\neg \exists x p(x)$

$\langle 1_{B_1} \rangle$ supposons $h_1 : \neg \exists x p(x)$, montrons $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$ <u>preuve à compléter</u>
$\langle 1_{B_1} \rangle$ CQFD (<i>nom de la règle à compléter</i>) preuve B_1

Indication : on suppose que l'on dispose d'un nombre infini dénombrable de symboles de variable, et il est donc possible d'appliquer la règle I_{\exists} en utilisant un « nouveau » symbole de variable.

- Soit B_2 une sous-boîte d'une boîte B contenant les trois hypothèses :

$$h_A : (\exists x p(x)) \Rightarrow \exists x q(x) \quad h_B : \forall x (q(x) \Rightarrow \exists y r(x, y)) \quad h_C : \forall x \forall y (r(x, y) \Rightarrow s(x))$$

Ces trois hypothèses sont donc utilisables dans la boîte B_2 . Compléter la preuve B_2 ci-dessous de la formule $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$ à partir de l'hypothèse $h_2 : \exists x p(x)$.

$\langle 1_B \rangle$	supposons $h_A : (\exists x p(x)) \Rightarrow \exists x q(x)$, $h_B : \forall x (q(x) \Rightarrow \exists y r(x, y))$, $h_C : \forall x \forall y (r(x, y) \Rightarrow s(x))$, montrons ...	
$\cdot \cdot \cdot$		
$\langle 1_{B_2} \rangle$	supposons $h_2 : \exists x p(x)$, montrons $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$	
$\langle 2_{B_2} \rangle$	montrons $\exists x q(x)$	
	<i>preuve à compléter</i>	
$\langle 2_{B_2} \rangle$	CQFD (<i>nom de la règle à compléter</i>)	
$\langle 3_{B_2} \rangle$	soit une nouvelle variable x_1 , supposons $h_3 : q(x_1)$, montrons $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$	
	<i>preuve à compléter</i>	
$\langle 3_{B_2} \rangle$	CQFD (<i>nom de la règle à compléter</i>)	
$\langle 1_{B_2} \rangle$	CQFD (E_\exists)	preuve B_2
$\cdot \cdot \cdot$		
$\langle 1_B \rangle$	CQFD (\cdots)	

3. Quelle règle de la déduction naturelle permet de prouver la formule $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$ à partir des hypothèses h_A , h_B et h_C en utilisant les preuves précédentes ? Compléter la preuve B ci-dessous en utilisant cette règle. On pourra utiliser les boîtes B_1 et B_2 des questions précédentes sans recopier le contenu de ces preuves.

$\langle 1_B \rangle$	supposons $h_A : (\exists x p(x)) \Rightarrow \exists x q(x)$, $h_B : \forall x (q(x) \Rightarrow \exists y r(x, y))$, $h_C : \forall x \forall y (r(x, y) \Rightarrow s(x))$	
	montrons $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$	
	<i>preuve à compléter</i>	
$\langle 1_B \rangle$	CQFD (<i>nom de la règle à compléter</i>)	preuve B

Exercice 3 ((2+2)+(2+2+1)+(1+2+2)=14 points)

Soit X un ensemble de variables et p un prédicat unaire.

1. Soit \mathbf{M} une structure quelconque.
 - (a) Soit $v_1 : X \rightarrow |\mathbf{M}|$ et $v_2 : X \rightarrow |\mathbf{M}|$ deux valuations quelconques. A-t-on $[\forall z p(z)]_{v_1}^{\mathbf{M}} = [\forall z p(z)]_{v_2}^{\mathbf{M}}$? (justifier)
 - (b) Soit $v : X \rightarrow |\mathbf{M}|$ une valuation telle que $[\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = 0$ et $m \in |\mathbf{M}|$ un élément quelconque du domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$. A-t-on $[p(x)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 0$? (justifier)
2. Soit F_1 la formule $\exists x (p(x) \Rightarrow \forall z p(z))$, \mathbf{M} une structure quelconque et $v : X \rightarrow |\mathbf{M}|$ une valuation quelconque.
 - (a) En supposant que $[\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = 1$, montrer que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$.
 - (b) En supposant que $[\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = 0$, montrer que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$.
 - (c) Que pouvez-vous en déduire sur la formule F_1 ?
3. Soit F_2 la formule $\forall x (p(x) \Rightarrow \forall z p(z))$.
 - (a) Etant donné une structure \mathbf{M} et une valuation $v : X \rightarrow |\mathbf{M}|$, donner l'expression booléenne $[F_2]_v^{\mathbf{M}}$.
 - (b) En supposant que $|\mathbf{M}| = \{k\}$ est un singleton (i.e. contient un unique élément k), montrer que $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 1$.
 - (c) La formule F_2 est-elle valide ? si oui en donner une preuve en utilisant les règles de la déduction naturelle, si non construire une structure \mathbf{M} telle que $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 0$ pour toute valuation v . Justifier votre réponse.

Corrigé de l'examen du 19/05/2023

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

(1). Définition inductive de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$:

$a \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

$b \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

Si $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, alors $f(t) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

Si t_1 et $t_2 \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, alors $g(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

(2).

$$\begin{aligned} [f(g(f(a), g(b, f(b))))]^{\mathbf{M}} &= f^{\mathbf{M}}(g^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}(a^{\mathbf{M}}), g^{\mathbf{M}}(b^{\mathbf{M}}, f^{\mathbf{M}}(b^{\mathbf{M}})))) \\ &= f^{\mathbf{M}}(g^{\mathbf{M}}(-a^{\mathbf{M}}, g^{\mathbf{M}}(b^{\mathbf{M}}, -b^{\mathbf{M}}))) \\ &= f^{\mathbf{M}}(g^{\mathbf{M}}(-a^{\mathbf{M}}, b^{\mathbf{M}} \times -b^{\mathbf{M}})) = f^{\mathbf{M}}(-a^{\mathbf{M}} \times b^{\mathbf{M}} \times -b^{\mathbf{M}}) \\ &= -a^{\mathbf{M}} \times (b^{\mathbf{M}})^2 \end{aligned}$$

(3). Pour que la propriété soit vérifiée dans le cas de base, il faut que $a^{\mathbf{M}}$ et $b^{\mathbf{M}}$ soient des valeurs paires. On choisit par exemple $a^{\mathbf{M}} = 2 = 2 \times 1$ et $b^{\mathbf{M}} = -4 = 2 \times -2$. Montrons maintenant la propriété dans le cas général :

Soient t_1 et t_2 deux termes, en supposant, par hypothèse d'induction, que $[t_1]^{\mathbf{M}} = 2n_1$ et $[t_2]^{\mathbf{M}} = 2n_2$, avec n_1 et $n_2 \in \mathbb{Z}$ il vient :

$$\begin{aligned} [f(t_1)]^{\mathbf{M}} &= f^{\mathbf{M}}([t_1]^{\mathbf{M}}) \\ &= f^{\mathbf{M}}(2n_1) \quad (\text{par hypothèse d'induction}) \\ &= -2 \times n_1 \\ &= 2 \times (-n_1) \quad \text{avec } -n_1 \in \mathbb{Z} \\ [g(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}} &= g^{\mathbf{M}}([t_1]^{\mathbf{M}}, [t_2]^{\mathbf{M}}) \\ &= g^{\mathbf{M}}(2n_1, 2n_2) \quad (\text{par hypothèse d'induction}) \\ &= 2 \times (2 \times n_1 \times n_2) \quad \text{avec } 2 \times n_1 \times n_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

4. $[F]_v^{\mathbf{M}} = [p(f(x)) \Rightarrow q(g(x, f(x)))]_v^{\mathbf{M}} = \overline{[p(f(x))]_v^{\mathbf{M}}} + [q(g(x, f(x)))]_v^{\mathbf{M}}$ avec
 — $[g(x, f(x))]_v^{\mathbf{M}} = g^{\mathbf{M}}(v(x), f^{\mathbf{M}}(v(x))) = -v^2(x)$
 — $[f(x)]_v^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{M}}(v(x)) = -v(x)$

4.a. Considérons \mathbf{M}_1 identique à \mathbf{M} , $v_1(x) = 2$ et $q^{\mathbf{M}_1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ est pair}\}$. On obtient $[g(x, f(x))]_{v_1}^{\mathbf{M}_1} = -v_1^2(x) = -4 \in q^{\mathbf{M}_1}$, donc $[q(g(x, f(x)))]_{v_1}^{\mathbf{M}} = 1$ et $[F]_{v_1}^{\mathbf{M}_1} = 1$ quelle que soit l'interprétation du prédicat p , de $a^{\mathbf{M}_1}$ et $b^{\mathbf{M}_1}$.

4.b. Considérons \mathbf{M}_2 identique à \mathbf{M} , $v_2(x) = 1$, $p^{\mathbf{M}_2} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ est impair}\}$ et $q^{\mathbf{M}_2} = q^{\mathbf{M}_1}$. On obtient $[f(x)]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} = -v_2(x) = -1 \in p^{\mathbf{M}_2}$ et $[g(x, f(x))]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} = -v_2^2(x) = -1 \notin q^{\mathbf{M}_2}$ donc $\overline{[p(f(x))]_{v_2}^{\mathbf{M}_2}} = 0$, $[q(g(x, f(x)))]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} = 0$ et $[F]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} = 0$ quelle que soit l'interprétation de $a^{\mathbf{M}_2}$ et $b^{\mathbf{M}_2}$.

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.

$\langle 1_{B_1} \rangle$	supposons $h_1 : \neg \exists x p(x)$, montrons $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$
$\langle 2_{B_1} \rangle$	soit une nouvelle variable z , montrons $p(z) \Rightarrow s(z)$
$\langle 3_{B_1} \rangle$	supposons $h_2 : p(z)$, montrons $s(z)$
$\langle 4_{B_1} \rangle$	montrons $\neg \exists x p(x)$
$\langle 4_{B_1} \rangle$	CQFD (Ax avec h_1)
$\langle 5_{B_1} \rangle$	montrons $\exists x p(x)$
$\langle 6_{B_1} \rangle$	montrons $p(z)$
$\langle 6_{B_1} \rangle$	CQFD (Ax avec h_2)
$\langle 5_{B_1} \rangle$	CQFD (I_{\exists})
$\langle 3_{B_1} \rangle$	CQFD (D_{\perp}^2)
$\langle 2_{B_1} \rangle$	CQFD (I_{\Rightarrow})
$\langle 1_{B_1} \rangle$	CQFD (I_{\exists})
	preuve B_1

$\langle 1_B \rangle$ supposons $h_A : (\exists x p(x)) \Rightarrow \exists x q(x)$, $h_B : \forall x (q(x) \Rightarrow \exists y r(x, y))$, $h_C : \forall x \forall y (r(x, y) \Rightarrow s(x))$
montrons ...

$\langle 1_{B_2} \rangle$	supposons $h_2 : \exists x p(x)$, montrons $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$
$\langle 2_{B_2} \rangle$	montrons $\exists x q(x)$
$\langle 2_{B_2} \rangle$	CQFD (D_{\Rightarrow} avec h_A, h_2)
$\langle 3_{B_2} \rangle$	soit une nouvelle variable x_1 , supposons $h_3 : q(x_1)$, montrons $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$
$\langle 4_{B_2} \rangle$	montrons $p(x_1) \Rightarrow s(x_1)$
$\langle 5_{B_2} \rangle$	supposons $h_4 : p(x_1)$, montrons $s(x_1)$
$\langle 6_{B_2} \rangle$	montrons $\exists y r(x_1, y)$
$\langle 7_{B_2} \rangle$	montrons $q(x_1) \Rightarrow \exists y r(x_1, y)$
$\langle 7_{B_2} \rangle$	CQFD (D_{\forall} avec h_B)
$\langle 8_{B_2} \rangle$	montrons $q(x_1)$
$\langle 8_{B_2} \rangle$	CQFD (Ax avec h_3)
$\langle 6_{B_2} \rangle$	CQFD (E_{\Rightarrow})
$\langle 7_{B_2} \rangle$	soit une nouvelle variable y_1 , supposons $h_5 : r(x_1, y_1)$ montrons $s(x_1)$
$\langle 8_{B_2} \rangle$	montrons $r(x_1, y_1) \Rightarrow s(x_1)$
$\langle 9_{B_2} \rangle$	montrons $\forall y (r(x_1, y) \Rightarrow s(x_1))$
$\langle 9_{B_2} \rangle$	CQFD (D_{\forall} avec h_C)
$\langle 8_{B_2} \rangle$	CQFD (E_{\forall})
$\langle 9_{B_2} \rangle$	montrons $r(x_1, y_1)$
$\langle 9_{B_2} \rangle$	CQFD (Ax avec h_5)
$\langle 7_{B_2} \rangle$	CQFD (E_{\Rightarrow})
$\langle 5_{B_2} \rangle$	CQFD (E_{\exists})
$\langle 4_{B_2} \rangle$	CQFD (I_{\Rightarrow})
$\langle 3_{B_2} \rangle$	CQFD (I_{\exists})
$\langle 1_{B_2} \rangle$	CQFD (E_{\exists})
	preuve B_2

$\langle 1_B \rangle$ CQFD (\dots)

$\langle 1_B \rangle$	supposons $h_A : (\exists x p(x)) \Rightarrow \exists x q(x)$, $h_B : \forall x (q(x) \Rightarrow \exists y r(x, y))$, $h_C : \forall x \forall y (r(x, y) \Rightarrow s(x))$ montrons $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$
$\langle 1_{B_2} \rangle$	supposons $h_2 : \exists x p(x)$, montrons $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$
\dots	
$\langle 1_{B_2} \rangle$	CQFD (E_{\exists})
	preuve B_2
$\langle 1_{B_1} \rangle$	supposons $h_1 : \neg \exists x p(x)$, montrons $\exists x (p(x) \Rightarrow s(x))$
\dots	
$\langle 1_{B_1} \rangle$	CQFD (I_{\exists})
	preuve B_1
$\langle 1_B \rangle$	CQFD (D_{TE})
	preuve B

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3.

(1.a). $[\forall z p(z)]_{v_1}^{\mathbf{M}} = [\forall z p(z)]_{v_2}^{\mathbf{M}}$ car la formule $\forall z p(z)$ est close (i.e. ne contient pas de variables libres).

(1.b). Puisque $[\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = 0$ on peut seulement en déduire qu'il existe un élément m_2 du domaine $|\mathbf{M}|$ tel que $[p(x)]_{v[x \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}} = 0$ mais pour un élément quelconque $m \in |\mathbf{M}|$ on peut avoir $[p(x)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 1$ (par exemple pour $|\mathbf{M}| = \mathbb{N}$, $p^{\mathbf{M}} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$, $m = 0$ et $m_2 = 1$).

(2.a). Si l'on suppose $[\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = 1$, alors on a $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$ puisque pour chaque élément $m_1 \in |\mathbf{M}|$ on a :

$$[p(x) \Rightarrow \forall z p(z)]_{v[x \leftarrow m_1]}^{\mathbf{M}} = \overline{[p(x)]_{v_1}^{\mathbf{M}}} + [\forall z p(z)]_{v_1}^{\mathbf{M}} = \overline{[p(x)]_{v_1}^{\mathbf{M}}} + [\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = \overline{[p(x)]_{v_1}^{\mathbf{M}}} + 1 = 1$$

Puisque $\forall z p(z)$ est une formule close on a l'égalité $[\forall z p(z)]_{v_1}^{\mathbf{M}} = [\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}}$.

(2.b). Si l'on suppose $[\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = 0$, alors on a $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$. En effet, puisque $[\forall z p(z)]_v^{\mathbf{M}} = 0$, pour un certain élément $m_2 \in |\mathbf{M}|$, on a $[p(z)]_{v[x \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}} = 0$ et donc $m_2 \notin p^{\mathbf{M}}$. En posant $v_2 = v[x \leftarrow m_2]$, on a donc $[p(x)]_{v_2}^{\mathbf{M}} = 0$ et il vient alors :

$$[p(x) \Rightarrow \forall z p(z)]_{v_2}^{\mathbf{M}} = \overline{[p(x)]_{v_2}^{\mathbf{M}}} + [\forall z p(z)]_{v_2}^{\mathbf{M}} = \overline{0} + [\forall z p(z)]_{v_2}^{\mathbf{M}} = 1 + [\forall z p(z)]_{v_2}^{\mathbf{M}} = 1$$

(2.c). D'après les deux questions précédentes, la formule F_1 est valide.

(3.a).

$$\begin{aligned} [F_2]_v^{\mathbf{M}} &= \prod_{m \in |\mathbf{M}|} [p(x) \Rightarrow \forall z p(z)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = \prod_{m \in |\mathbf{M}|} \left(\overline{[p(x)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}} + [\forall z p(z)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} \right) \\ &= \prod_{m \in |\mathbf{M}|} \left(\overline{[p(x)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}} + \prod_{n \in |\mathbf{M}|} [p(z)]_{v[x \leftarrow m, z \leftarrow n]}^{\mathbf{M}} \right) \end{aligned}$$

(3.b). Soit \mathbf{M} une structure telle que $|\mathbf{M}| = \{k\}$. On a :

$$[F_2]_v^{\mathbf{M}} = \overline{[p(x)]_{v[x \leftarrow k]}^{\mathbf{M}}} + \prod_{n \in |\mathbf{M}|} [p(z)]_{v[x \leftarrow k, z \leftarrow n]}^{\mathbf{M}} = \overline{[p(x)]_{v[x \leftarrow k]}^{\mathbf{M}}} + [p(z)]_{v[z \leftarrow k]}^{\mathbf{M}} = 1$$

car :

- soit $k \in p^{\mathbf{M}}$ et il vient $\overline{[p(z)]_{v[z \leftarrow k]}^{\mathbf{M}}} = 1$ donc $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 1$
- soit $k \notin p^{\mathbf{M}}$ et il vient $\overline{[p(x)]_{v[x \leftarrow k]}^{\mathbf{M}}} = 1$ donc $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 1$

(3.c). La formule F_2 n'est pas valide. En effet, considérons par exemple la structure \mathbf{M} telle que $|\mathbf{M}| = \mathbb{N}$ et $p^{\mathbf{M}} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$. On a alors $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 0$ puisque par exemple pour $m = 2$ on a :

- $\overline{[p(x)]_{v[x \leftarrow 2]}^{\mathbf{M}}} = 0$
- $\prod_{n \in \mathbb{N}} [p(z)]_{v[x \leftarrow 2, z \leftarrow n]}^{\mathbf{M}} = 0$ car $\prod_{n \in \mathbb{N}} [p(z)]_{v[x \leftarrow 2, z \leftarrow n]}^{\mathbf{M}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} [p(z)]_{v[z \leftarrow n]}^{\mathbf{M}} = 0$ puisque $[p(z)]_{v[z \leftarrow n]}^{\mathbf{M}} = 0$
pour $n = 3$ par exemple