

EXERCICE 13

Logique - Quantificateurs

quels que soient les prédicats F G ,

quelle que soit la constante a ,

$$(((\exists x, F(x)) \Rightarrow G(a)) \Leftrightarrow \forall x, (F(x) \Rightarrow G(a)))$$

Soit la constante a

Montrons $((\exists x, F(x)) \Rightarrow G(a)) \Leftrightarrow \forall x, (F(x) \Rightarrow G(a))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $(\exists x, F(x)) \Rightarrow G(a)$ (h1)

Montrons $\forall x, F(x) \Rightarrow G(a)$ (2)

($\forall I$)

Soit l'élément x

Montrons $F(x) \Rightarrow G(a)$ (3)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $F(x)$ (h2)

Montrons $G(a)$ (4)

($\Rightarrow E$)

Montrons $\exists x, F(x)$ (5)

($\exists I$)

Montrons $F(x)$ (6)

d'après (h2)

Montrons $(\exists x, F(x)) \Rightarrow G(a)$ (7)

d'après (h1)

Supposons que $\forall x, F(x) \Rightarrow G(a)$ (h3)

Montrons $(\exists x, F(x)) \Rightarrow G(a)$ (8)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $\exists x, F(x)$ (h4)

Montrons $G(a)$ (9)

($\exists E$)

Montrons $\exists x, F(x)$ (10)

d'après (h4)

Soit l'élément x

Supposons que $F(x)$ (h5)

Montrons $G(a)$ (11)

($\Rightarrow E$)

Montrons $F(x)$ (12)

d'après (h5)

Montrons $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{a})$ (13)

($\forall E$)

Montrons $\forall \mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{a})$ (14)

d'après (h3)