

EXERCICE 27

Logique - Quantificateurs

quel que soit le prédicat P ,

$$(\neg(\exists x, \neg(P(x)))) \Leftrightarrow (\forall x, P(x)))$$

Montrons $\neg(\exists x, \neg(P(x))) \Leftrightarrow (\forall x, P(x))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $\neg(\exists x, \neg(P(x)))$ (h1)

Montrons $\forall x, P(x)$ (2)

($\forall I$)

Soit l'élément a

Montrons $P(a)$ (3)

(A)

Supposons que $\neg(P(a))$ (h2)

Montrons \perp (4)

($\neg E$)

Montrons $\exists x, \neg(P(x))$ (5)

($\exists I$)

Montrons $\neg(P(a))$ (6)

d'après (h2)

Montrons $\neg(\exists x, \neg(P(x)))$ (7)

d'après (h1)

Supposons que $\forall x, P(x)$ (h3)

Montrons $\neg(\exists x, \neg(P(x)))$ (8)

($\neg I$)

Supposons que $\exists x, \neg(P(x))$ (h4)

Montrons \perp (9)

($\exists E$)

Montrons $\exists x, \neg(P(x))$ (10)

d'après (h4)

Soit l'élément a

Supposons que $\neg(P(a))$ (h5)

Montrons \perp (11)

($\neg E$)

Montrons $P(a)$ (12)

($\forall E$)

Montrons $\forall x, P(x)$ (13)

    *d'après* (h3)

Montrons $\neg(\mathbf{P}(\alpha))$ (14)

 *d'après* (h5)