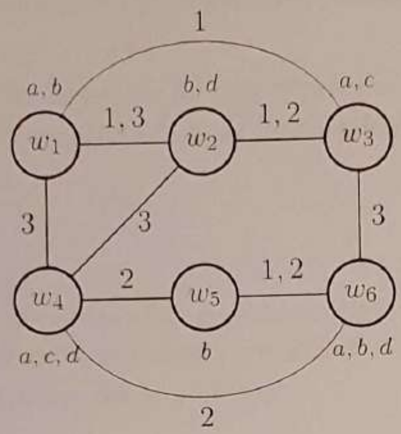
LRC - Examen réparti N° 2

Durée 1h30 - aucun document autorisé

Le barème sur 23 n'est donné qu'à titre indicatif

Exercice 1 – Annonces publiques – *4 points*

Le modèle M suivant est un modèle de la logique modale épistémique S5 qui comporte 6 mondes $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$. Les relations d'accessibilité sont réflexives et symétriques (mais pas représentées pour alléger la notation).



1. Indiquez en le justifiant si les deux assertions suivantes sont vraies :
   - $M \models D_{\{1,2\}} b \vee D_{\{1,2\}} \neg b$
   - $M \models D_{\{1,3\}} b \vee D_{\{1,3\}} \neg b$

On considère les annonces publiques suivantes :

(i) Agent 3 : Je ne sais pas **si** d

(ii) Agent 1 : Je ne sais pas que 3 sait que a

(iii) Agent 2 : Je sais que 3 ne sait pas que c

(iv) Agent 1 : Je sais que b

2. Indiquez après chaque annonce les modifications effectuées sur la structure de Kripke en considérant les annonces selon la séquence indiquée.
3. Pouvez-vous trouver *une autre séquence* des mêmes annonces qui amène à ce qu'il ne reste aucun monde possible à la fin de la séquence.

Exercice 2 – Intervalles d'Allen – *3 points*

On considère les intervalles de temps t_A et t_B tels que

- P_1 : t_A et t_B commencent en même temps.
- P_2 : t_A se finit (strictement) avant t_B.

1. Indiquer les ensembles de relations d'Allen entre t_A et t_B correspondant à chacune des propriétés P_1 et P_2. Montrer qu'en cumulant ces deux propriétés on arrive à la relation $t_A\{s\}t_B$.
2. On considère t_C tel que $P_3 : t_C\{<, m, o, s, d\}t_A$.
   Calculer par composition la relation entre t_C et t_B.

3. On fournit le graphe temporel (déjà propagé) suivant :

$$\begin{tikzcd} t_A \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "{<, m, o, s, d}"'] & & t_B \\ & t_D \arrow[ur, "{e, =, e^t}"'] & \end{tikzcd}$$

Ajouter dans ce graphe la contrainte $P_4 : t_D\{>, m^t\}t_A$ et la propager entièrement en utilisant l'algorithme d'Allen et en détaillant les étapes.
Tracer le graphe final obtenu.

Exercice 3 – Résolution – *2.5 points*

On considère Σ l'ensemble de 7 clauses suivant. Les lettres grecques représentent des constantes, les lettres X, Y et Z des variables, les lettres R_1, R_2, R_3 et Q_1 des prédicats d'arité 2 et Q_2 un prédicat d'arité 1.

- $C_1 : R_3(\alpha, \beta)$
- $C_2 : \neg R_1(X, \alpha) \vee \neg R_1(X, \beta) \vee \neg Q_2(X)$
- $C_3 : Q_1(\delta, \alpha)$
- $C_4 : R_1(\varepsilon, \alpha)$
- $C_5 : \neg Q_1(X, Y) \vee \neg R_2(Z, Y) \vee Q_2(Z)$
- $C_6 : \neg R_1(X, Y) \vee \neg R_3(Y, Z) \vee R_1(X, Z)$
- $C_7 : R_2(\gamma, \alpha)$

1. Montrer par résolution que $\Sigma \vdash Q_2(\gamma)$.
2. Montrer par résolution que $\Sigma \vdash \neg Q_2(\varepsilon)$.

Exercice 4 – Logique réifiée d'Allen et formes normales – *4.5 points*

Alan et Billy tirent chacun dans un ballon en direction d'une fenêtre. Ils tirent en même temps, mais le ballon d'Allan va plus vite et atteint la fenêtre en premier, la cassant.

On considère l'évènement $tir(X)$ correspondant au tir d'un ballon par une personne X vers la fenêtre, l'évènement commençant au moment où la personne tire dans le ballon et s'achevant quand le ballon passe le seuil de la fenêtre. On considère de plus le fluent $bris$ indiquant si la fenêtre est brisée ou non à un moment donné. On se donne de plus les constantes a pour Alan, b pour Billy, ainsi que les constantes t_A, t_B, t_C et t_D correspondant à des intervalles d'Allen. t_A correspond au tir d'Alan, t_B à celui de Billy, t_C et t_D correspondent respectivement à un moment avant la fin du tir d'Alan et à un moment après la fin de ce tir.

On représente cela par l'ensemble de faits suivant :

- $F_1 : OCCURS(tir(a), t_A)$
- $F_2 : OCCURS(tir(b), t_B)$
- $F_3 : t_A\{s\}t_B$
- $F_4 : t_C\{<, m, o, s, d\}t_A$
- $F_5 : t_D\{>, m^t\}t_A$

On considère maintenant les règles suivantes :

- $R_1 : \forall T.((T\{<, m, o, s, d\}t_A \wedge T\{<, m, o, s, d\}t_B) \rightarrow \neg HOLDS(bris, T))$
- $R_2^a : \forall T.[(\exists X.OCCURS(tir(X), T)) \rightarrow \exists T_2.(T_2\{>, m^t\}T \wedge HOLDS(bris, T_2))]$
- $R_2^b : \forall T_2.[(\exists T.\exists X.(OCCURS(tir(X), T) \wedge T_2\{>, m^t\}T)) \rightarrow HOLDS(bris, T_2)]$
- $R_3 : \forall T_1.\forall T_2.\forall T_3.[(T_1\{<, m, o, s, d\}T_2 \wedge T_2\{s\}T_3) \rightarrow T_1\{<, m, o, s, d\}T_3]$

1. Indiquer le sens de la règle R_1.

2. Indiquer le sens des règles R_2^a et R_2^b en expliquant la différence entre les deux.
3. A quoi correspond la règle R_3 ?
4. Traduire R_1, R_2^a et R_2^b sous forme clausale.
5. La théorie Σ de l'exercice 3 sur la résolution correspond à certaines des informations présentées ici. Indiquer :
   - laquelle des règles R_2^a ou R_2^b a été utilisée, et
   - quels sont les résultats prouvés dans l'exercice (c'est-à-dire à quoi correspondent Q_2, γ et ε).

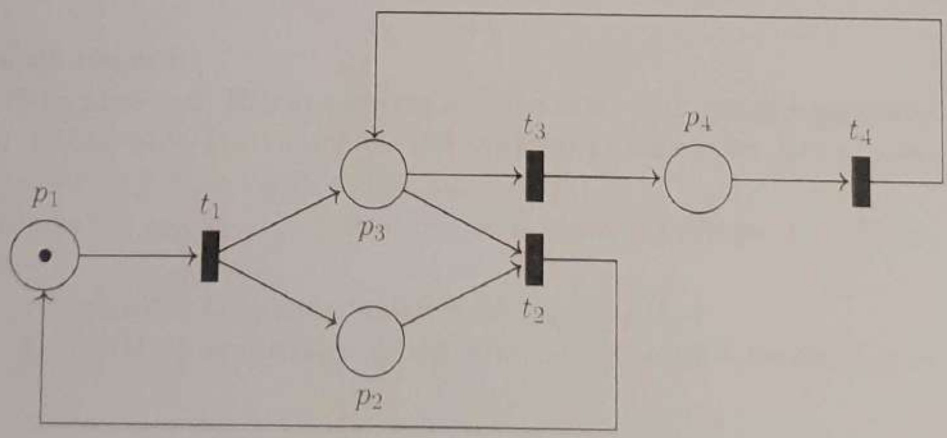
Exercice 5 – Prolog – *3 points*

1. Définir le prédicat `dernier/2` tel que `dernier(L, X)` est satisfait si `X` est le dernier élément de la liste `L`.
   Par exemple `dernier([a,b,c], X)` doit unifier `X` avec `c`
   et `dernier([18, 12, 17, 21], X)` doit unifier `X` avec `21`.
2. Que donne la requête `dernier(L, 4)` ?
3. On considère qu'on dispose d'un ensemble de faits représentant des axiomes d'inclusion exprimant des subsomptions $C \sqsubseteq D$ entre concepts C et D atomiques, par exemple
```
subs(souris, animal).
subs(chien, canide).
subs(canide, chien).
subs(canide, animal).
```
   Définir le prédicat `subsS/2` permettant de répondre à des requêtes de subsomption $C \sqsubseteq_S D$ que l'on peut prouver à partir des axiomes fournis, en gérant la transitivité et en évitant les boucles.
   Par exemple, les requêtes suivantes doivent réussir
```
subsS(souris, animal).
subsS(chien, animal).
subsS(chien, chien).
```
   mais la requête `subsS(chien, souris).` doit échouer.

Exercice 6 – Réseau de Petri et LTL – *6 points*

Les deux questions sont indépendantes.

1. On considère le réseau de Petri suivant



   (a) Donner son graphe des marquages accessibles.
   (b) Donner une exécution qui vérifie la formule temporelle $\varphi_1 = GFt_1$ et une exécution qui ne la vérifie pas, en justifiant succinctement.

2. On considère le graphe des marquages accessibles suivant, associé à un réseau de Petri contenant 3 places et 5 transitions, notées de t_1 à t_5, et de marquage initial $(1,0,0)$.

$$\begin{tikzcd}
(1,0,0) \arrow[r, "t_1"] & (0,2,0) \arrow[r, "t_2"] & (0,1,3) \arrow[r, "t_3"] \arrow[l, bend left, "t_4"] & (1,1,0) \arrow[ll, bend right, "t_5"']
\end{tikzcd}$$

(a) Indiquer, en justifiant succinctement, si le réseau de Petri correspondant est (i) borné, (ii) vivant, (iii) quasi-vivant, (iv) sans blocage, (v) réversible.

(b) Indiquer si les formules temporelles suivantes sont valides, satisfiables ou insatisfiables pour le réseau de Petri marqué correspondant ? Les réponses doivent être justifiées.

- $\varphi_2 = X(t_2 \vee t_4)$
- $\varphi_3 = Ft_3$
- $\varphi_4 = G((XXt_5) \to t_2)$
- $\varphi_5 = (Ft_3)\mathcal{U}(Xt_5)$

Annexes

Relations d'Allen

Les flèches indiquent les relations transposées : $a \, R \, b \iff b \, R^t \, a$

precedes	meets	overlaps	ended by	contains	starts	equals	started by	during	ends	overlapped by	met by	preceded by
a b	a b	a b	a b	a b	a b	a b	a b	a b	a b	a b	a b	b a
$<$	m	o	e^t	d^t	s	$=$	s^t	d	e	o^t	m^t	$>$

Composition des relations d'Allen

	$<$	m	o	e^t	d^t	s	$=$	s^t	d	e	o^t	m^t	$>$
$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$< mosd$	$< mosd$	$< mosd$	$< mosd$	tout
m	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	m	m	m	osd	osd	osd	$e^t = e$	$d^t s^t o^t m^t >$
o	$<$	$<$	$< mo$	$< mo$	$< moe^t d^t$	o	o	$oe^t d^t$	osd	osd	Concur	$d^t s^t o^t$	$d^t s^t o^t m^t >$
e^t	$<$	m	o	e^t	d^t	o	e^t	d^t	osd	$e^t = e$	$d^t s^t o^t$	$d^t s^t o^t$	$d^t s^t o^t m^t >$
d^t	$< m$ $oe^t d^t$	$oe^t d^t$	$oe^t d^t$	d^t	d^t	$oe^t d^t$	d^t	d^t	Concur	$d^t s^t o^t$	$d^t s^t o^t$	$d^t s^t o^t$	$d^t s^t o^t$ $m^t >$
s	$<$	$<$	$< mo$	$< mo$	$< moe^t d^t$	s	s	$s = s^t$	d	d	deo^t	m^t	$>$
$=$	$<$	m	o	e^t	d^t	s	$=$	s^t	d	e	o^t	m^t	$>$
s^t	$< mo$ $e^t d^t$	$oe^t d^t$	$oe^t d^t$	d^t	d^t	$s = s^t$	s^t	s^t	deo^t	o^t	o^t	m^t	$>$
d	$<$	$<$	$< mosd$	$< mosd$	tout	d	d	$deo^t m^t >$	d	d	$deo^t m^t >$	$>$	$>$
e	$<$	m	osd	$e = e^t$	$d^t s^t o^t m^t >$	d	e	$o^t m^t >$	d	e	$o^t m^t >$	$>$	$>$
o^t	$< mo$ $e^t d^t$	$oe^t d^t$	Concur	$d^t s^t o^t$	$d^t s^t o^t m^t >$	deo^t	o^t	$o^t m^t >$	deo^t	o^t	$o^t m^t >$	$>$	$>$
m^t	$< mo$ $e^t d^t$	$s = s^t$	deo^t	m^t	$>$	deo^t	m^t	$>$	deo^t	m^t	$>$	$>$	$>$
$>$	tout	deo^t $m^t >$	deo^t $m^t >$	$>$	$>$	deo^t $m^t >$	$>$	$>$	deo^t $m^t >$	$>$	$>$	$>$	$>$

où Concur$=oe^t d^t s = s^t deo^t$

et tout$=< moe^t d^t s = s^t deo^t m^t >$

LTL : sémantique de chemin

Soit $\mathcal{M} = \langle W, R, I \rangle$ un modèle de Kripke respectant la sérialité (tout monde a au moins un successeur).

Étant donné $w \in W$, on note Π_w l'ensemble des chemins commençant par w (soit, formellement, $\Pi_w = \{w_0, w_1, \ldots | w_0 = w, \forall i \in \mathbb{N},\ w_i \in W$ et $(w_i, w_{i-1}) \in R\}$).

Étant donné un chemin $\pi = w_0, w_1, \ldots$, on pose $\pi(i) = w_i$ (monde à l'étape i) et $\pi^i = w_i, w_{i-1}, w_{i-2}, \cdots$ (chemin décalé de i).

Soit Π un ensemble de chemins basé sur ce modèle ($\Pi \subseteq \bigcup_{w \in W} \Pi_w$).

Pour tout chemin de $\pi \in \Pi$, la sémantique de $\mathcal{M}, \pi \models \varphi$ (qui se lit π vérifie φ dans $\mathcal{M}$) est définie comme suit :

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, \pi \models p & \text{ssi} & \pi(0) \in I(p) \\
\mathcal{M}, \pi \models \neg\varphi & \text{ssi} & \mathcal{M}, \pi \not\models \varphi \\
\mathcal{M}, \pi \models \varphi \wedge \psi & \text{ssi} & \mathcal{M}, \pi \models \varphi \text{ et } \mathcal{M}, \pi \models \psi \\
\mathcal{M}, \pi \models \varphi \vee \psi & \text{ssi} & \mathcal{M}, \pi \models \varphi \text{ ou } \mathcal{M}, \pi \models \psi \\
\mathcal{M}, \pi \models X\varphi & \text{ssi} & \mathcal{M}, \pi^1 \models \varphi \\
\mathcal{M}, \pi \models F\varphi & \text{ssi} & \exists i \in \mathbb{N}, \mathcal{M}, \pi^i \models \varphi \\
\mathcal{M}, \pi \models G\varphi & \text{ssi} & \forall i \in \mathbb{N}, \mathcal{M}, \pi^i \models \varphi \\
\mathcal{M}, \pi \models \varphi U \psi & \text{ssi} & \exists i \in \mathbb{N}, \mathcal{M}, \pi^i \models \psi \text{ et } \forall k \in \{0, \ldots, i-1\}, \mathcal{M}, \pi^k \models \varphi
\end{array}
$$

On dit que φ est *valide* pour $(\mathcal{M}, \Pi)$ (noté $(\mathcal{M}, \Pi) \models \varphi$) ssi φ est vérifié dans $\mathcal{M}$ par tout chemin de Π (i.e. $\forall \pi \in \Pi, \mathcal{M}, \pi \models \varphi$).

On dit que φ est *satisfiable* pour $(\mathcal{M}, \Pi)$ ssi il existe au moins un chemin de Π qui vérifie φ dans $\mathcal{M}$, c'est-à-dire ssi $\neg\varphi$ n'est pas valide pour $(\mathcal{M}, \Pi)$.

Réseau de Petri et LTL

Un réseau de Petri marqué vérifie une formule LTL si et seulement si toute trace d'exécution du réseau vérifie la formule. La formule est alors dite valide pour le réseau marqué.

Une formule LTL est satisfiable pour un réseau de Petri marqué s'il existe une trace d'exécution du réseau qui vérifie la formule.