

## EXERCICE 29

### Logique - Quantificateurs

*quelle que soit* la proposition **P**,

*quel que soit* le prédicat **Q**,

$$((\forall x, (P \vee Q(x))) \Leftrightarrow (P \vee (\forall x, Q(x))))$$

---

Montrons  $(\forall x, (P \vee Q(x))) \Leftrightarrow (P \vee (\forall x, Q(x)))$  (1)

( $\Leftrightarrow I$ )

Supposons que  $\forall x, (P \vee Q(x))$  (h1)

Montrons  $P \vee (\forall x, Q(x))$  (2)

(TE)

Supposons que  $P$  (h2)

Montrons  $P \vee (\forall x, Q(x))$  (3)

( $\vee I$ )

Montrons  $P$  (4)

d'après (h2)

Supposons que  $\neg P$  (h3)

Montrons  $P \vee (\forall x, Q(x))$  (5)

( $\vee Id$ )

Montrons  $\forall x, Q(x)$  (6)

( $\forall I$ )

Soit l'élément  $x$

Montrons  $Q(x)$  (7)

( $\vee E$ )

Montrons  $P \vee Q(x)$  (8)

( $\vee E$ )

Montrons  $\forall x, (P \vee Q(x))$  (9)

d'après (h1)

Supposons que  $P$  (h4)

Montrons  $Q(x)$  (10)

( $\perp E$ )

Montrons  $\perp$  (11)

( $\neg E$ )

Montrons  $P$  (12)

d'après (h4)

Montrons  $\neg P$  (13)

d'après (h3)

Supposons que  $Q(x)$  (h5)

Montrons  $Q(x)$  (14)

d'après (h5)

Supposons que  $P \vee (\forall x, Q(x))$  (h6)

Montrons  $\forall x, (P \vee Q(x))$  (15)

( $\vee E$ )

Montrons  $P \vee (\forall x, Q(x))$  (16)

d'après (h6)

Supposons que  $P$  (h7)

Montrons  $\forall x, (P \vee Q(x))$  (17)

( $\forall I$ )

Soit l'élément  $x$

Montrons  $P \vee Q(x)$  (18)

( $\vee I_g$ )

Montrons  $P$  (19)

d'après (h7)

Supposons que  $\forall x, Q(x)$  (h8)

Montrons  $\forall x, (P \vee Q(x))$  (20)

( $\forall I$ )

Soit l'élément  $x$

Montrons  $P \vee Q(x)$  (21)

( $\vee Id$ )

Montrons  $Q(x)$  (22)

( $\vee E$ )

Montrons  $\forall x, Q(x)$  (23)

d'après (h8)