

EXERCICE 32

Logique - Quantificateurs

quels que soient les prédictats \mathbf{F} \mathbf{G} ,

$$((\forall x, (\mathbf{F}(x) \wedge (\neg(\exists y, \mathbf{F}(y)) \vee (\forall y, \mathbf{G}(y))))) \Rightarrow (\forall x, (\mathbf{F}(x) \vee \mathbf{G}(x))))$$

$$\text{Montrons } (\forall x, (\mathbf{F}(x) \wedge (\neg(\exists y, \mathbf{F}(y)) \vee (\forall y, \mathbf{G}(y))))) \Rightarrow (\forall x, (\mathbf{F}(x) \vee \mathbf{G}(x))) \quad (1)$$

($\Rightarrow I$)

Supposons que $\forall x, (\mathbf{F}(x) \wedge (\neg(\exists y, \mathbf{F}(y)) \vee (\forall y, \mathbf{G}(y))))$ (h1)

$$\text{Montrons } \forall x, (\mathbf{F}(x) \vee \mathbf{G}(x)) \quad (2)$$

($\forall I$)

Soit l'élément x

$$\text{Montrons } \mathbf{F}(x) \vee \mathbf{G}(x) \quad (3)$$

($\vee Ig$)

Montrons $\mathbf{F}(x)$ (4)

($\wedge Eg$)

Montrons $\mathbf{F}(x) \wedge (\neg(\exists y, \mathbf{F}(y)) \vee (\forall y, \mathbf{G}(y)))$ (5)

($\forall E$)

Montrons $\forall x, (\mathbf{F}(x) \wedge (\neg(\exists y, \mathbf{F}(y)) \vee (\forall y, \mathbf{G}(y))))$ (6)

d'après (h1)