

En théorie des graphes et en informatique théorique, une coupe minimum d'un graphe est une coupe contenant un nombre minimal d'arêtes. Cette notion apparaît notamment dans le théorème flot-max/coupe-min et peut être utilisée dans différents contextes, notamment en vision artificielle.

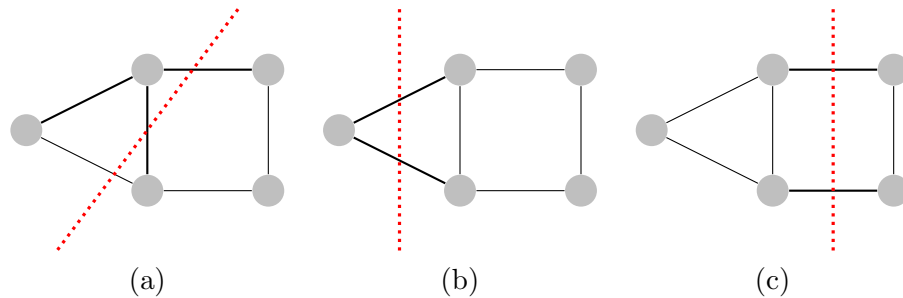


FIGURE 1 – Exemples de coupe dans un graphe non orienté. La coupe (a) est de cardinal 3 alors que les coupes (b) et (c) sont de cardinal 2 et sont minimales.

Nous avons vu en cours l'algorithme de Karger qui est un algorithme probabiliste simple de type Monte Carlo pour trouver une coupe minimum dans un graphe. Nous avons également abordé rapidement une variante (également probabiliste) fondée sur l'approche « diviser pour régner » et appelée algorithme de Karger-Stein.

Le but de ce TME est d'implanter ces algorithmes, de choisir et d'analyser des structures de données adaptées et d'effectuer des tests d'efficacité sur différentes familles de graphe.

Exercice 1 : Algorithme de Karger

Rappelons tout d'abord l'algorithme de Karger vu en cours :

Algorithme 1 : Algorithme de Karger

Entrée : $G = (V, E)$ un graphe non orienté avec $n = \#V$ et $m = \#E$

Sortie : S une coupe de G

tant que $\#V > 2$ **faire**

$e \leftarrow \boxed{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} E$
 $G \leftarrow G/e$

$\{v_1, v_2\} \leftarrow V$ \triangleright Il reste deux sommets dans V

retourner $S = \{ \text{sommets qui « apparaissent » dans } v_1 \}$

Au cours de l'exécution de cet algorithme, le graphe G donné en entrée peut être transformé en un multi-graphe et il est donc nécessaire de pouvoir exécuter cet algorithme sur un multi-graphe dans votre implantation.

1.a] Dans le cours, nous avons vu que l'opération de contraction d'arête « $G \leftarrow G/e$ » de la boucle **tant que** prend un temps $O(n)$ en utilisant une représentation du multi-graphe G par matrice d'adjacence.

Programmer une structure de donnée permettant de représenter un multi-graphe par matrice d'adjacence et une fonction réalisant l'opération de contraction (en prenant en entrée un (multi)-graphe et une arête).

1.b] Tester votre fonction sur différentes familles de graphe de votre choix (par exemple, mais sans s'y limiter, des cycles contenant n sommets, des graphes complets à n sommets, des graphes bipartis complets à $n = 2k$ sommets, des graphes aléatoires à n sommets où une arête est ajoutée à E avec une probabilité $0 < p < 1, \dots$).

Présenter et analyser la complexité expérimentale de votre implantation sur ces familles de graphe.

1.c] Une fois que la première opération de contraction a eu lieu dans l'algorithme de Karger, le graphe G est possiblement devenu un multi-graphe avec plusieurs arêtes entre deux sommets. Dans notre analyse théorique de la complexité de l'algorithme de Karger, nous avons supposé que l'arête e de l'opération de sélection aléatoire « $e \xleftarrow{\square\square} E$ » dans la boucle **tant que** est tirée uniformément aléatoirement parmi toutes les arêtes possibles. Expliquer en détail comment effectuer ce tirage aléatoire lorsque le multi-graphe G est représenté par une matrice d'adjacence. Planter cette fonction.

1.d] Utiliser les fonctions des questions précédentes pour terminer une implantation de l'algorithme de Karger utilisant une représentation par matrice d'adjacence. Présenter et analyser la complexité expérimentale obtenue pour les familles de graphe de la question **1.b]**. Comparer avec l'analyse théorique vue en cours.

Exercice 2 : Amplification du succès de l'algorithme

Comme nous l'avons vu en cours, cet algorithme probabiliste est de type Monte-Carlo et peut retourner une coupe du graphe qui n'est pas minimale.

2.a] Effectuer une étude expérimentale de la probabilité de succès de vos implantations de l'exercice précédent sur les familles de graphes de la question **1.b]** pour lesquelles vous connaissez la taille d'une coupe minimale. Comparer avec l'analyse théorique vue en cours.

Nous avons vu que pour augmenter la probabilité de succès, il est utile de répéter plusieurs fois l'algorithme de Karger. Nous obtenons ainsi l'algorithme de Karger itéré qui prend en entrée un entier T et exécute l'algorithme précédent $T \geq 1$ fois

Algorithme 2 : Algorithme de Karger itéré

Entrée : $G = (V, E)$ un graphe non orienté avec $n = \#V$ et $m = \#E$, T

Sortie : S une coupe de G

$m^* \leftarrow +\infty$

pour i de 1 à T **faire**

tant que $\#V > 2$ **faire**

$e \xleftarrow{\square\square} E$

$G \leftarrow G/e$

$\{v_1, v_2\} \leftarrow V$ \triangleright Il reste deux sommets dans V

$S = \{ \text{sommets qui } \ll \text{apparaissent} \gg \text{ dans } v_1 \}$

$m \leftarrow \text{cardinal de la coupe } (S, V \setminus S)$

si $m < m^*$ **alors**

$S^* \leftarrow S$

$m^* \leftarrow m$

retourner S^*

2.b] Adapter votre implantation de l'exercice précédent pour obtenir une implantation de l'algorithme de Karger itéré.

2.c] Effectuer une étude expérimentale de cette implantation sur les familles de graphes de la question **1.b]** pour lesquelles vous connaissez la taille d'une coupe minimale. (en fonction de T et du nombre de sommets du graphe). Comparer avec l'analyse théorique vue en cours.

Exercice 3 : Algorithme de Karger-Stein

Nous avons vu en cours dans l'analyse de la probabilité de succès de l'algorithme de Karger itéré que la probabilité d'erreur augmente lorsque le nombre de sommets diminue et devient proche de 1/2 lorsque le nombre de sommets restants est de l'ordre de $n/\sqrt{2}$ (cf. Figure 2).

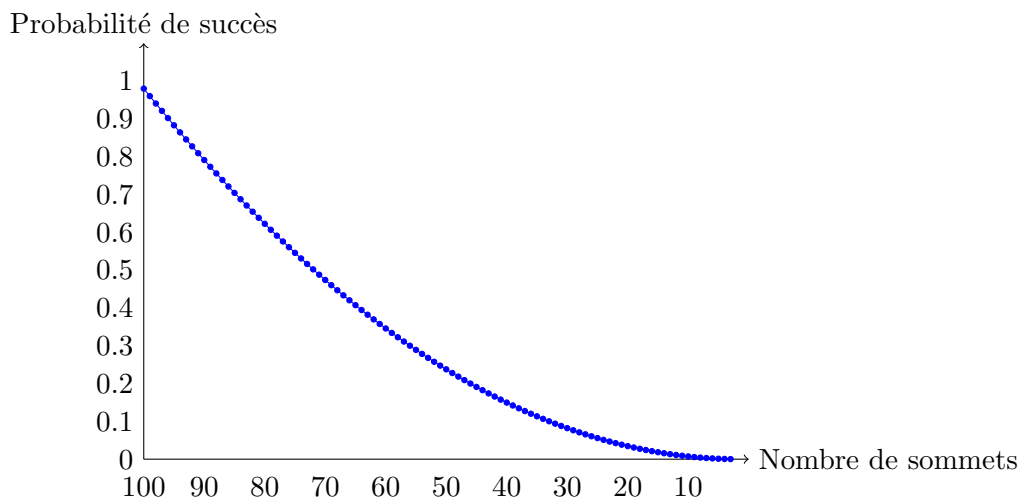


FIGURE 2 – Probabilité de succès de l'algorithme de Karger en fonction du nombre de sommets restants

D. Karger et Stein ont suggéré une approche « diviser pour régner » pour améliorer l'algorithme de Karger où l'algorithme effectue deux contractions partielles indépendantes du graphe jusqu'à ce qu'il reste environ $n/\sqrt{2}$ sommets et cherche récursivement une coupe minimale dans les deux multi-graphes obtenus (et retourne la coupe obtenue de plus petit cardinal).

Algorithme 3 : Algorithme de contraction partielle $\text{CONTRACTIONPARTIELLE}(G, t)$

Entrée : $G = (V, E)$ un graphe non orienté avec $n = \#V$ et $m = \#E$; $t \leq n \in \mathbb{N}$

Sortie : G' un multi-graphe à t sommets

tant que $\#V > t$ **faire**

$e \leftarrow \text{choix aléatoire de } E$
 $G \leftarrow G/e$

▷ Il reste t sommets dans le graphe

retourner G

Algorithme 4 : Algorithme de Karger-Stein $\text{KARGERSTEIN}(G)$

Entrée : $G = (V, E)$ un graphe non orienté avec $n = \#V$ et $m = \#E$, T

Sortie : S une coupe de G

$m^* \leftarrow +\infty$

si $\#V \leq 6$ **alors**

retourner une coupe minimale de G

▷ par recherche exhaustive

sinon

$t \leftarrow \lceil 1 + \#V/\sqrt{2} \rceil$

$G_1 \leftarrow \text{CONTRACTIONPARTIELLE}(G, t)$

$S_1 \leftarrow \text{KARGERSTEIN}(G_1)$; $m_1 \leftarrow$ cardinal de la coupe $(S_1, V \setminus S_1)$

$G_2 \leftarrow \text{CONTRACTIONPARTIELLE}(G, t)$

$S_2 \leftarrow \text{KARGERSTEIN}(G_2)$; $m_2 \leftarrow$ cardinal de la coupe $(S_2, V \setminus S_2)$

si $m_1 < m_2$ **alors**

retourner S_1

sinon

retourner S_2

3.a] Adapter les implantations des exercices **1** et **2** pour obtenir une implantation de l'algorithme de Karger-Stein.

3.b] Effectuer une étude expérimentale de cette implantation sur les familles de graphes de la question **1.b]** pour lesquelles vous connaissez la taille d'une coupe minimale.

Comparer expérimentalement avec l'algorithme de Karger itéré et avec la borne théorique de la question **3.c]**.