Interro groupe 6, 07/12/2022

Exercice 1 [25%]

Rappel : $x \in \mathbb{R}^+$ ssi $x \in \mathbb{R}$ et $x \geq 0$.

1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto x^2$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

   Solution: Pas injective, $f(1) = f(-1)$. Pas surjective, $\nexists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = -1$. Donc, pas bijective.

2. La fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g : x \mapsto x^2$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

   Solution: Injective, puis $x \in \mathbb{R}^+$, $x^2 = y^2 \implies x = y$. Pour montrer ça, on suppose par absurde que $x \in \mathbb{R}^+$, $x^2 = y^2$, mais $x \neq y$. Si $x \neq y$, $x > y$ ou $x < y$. Supposons $x > y$, on a $xx > xy > yy$, mais $xx = x^2 = y^2 = yy$, donc absurde. Supposons $x < y$, on a $xx < xy < yy$, mais $xx = x^2 = y^2 = yy$, donc absurde.
   Pas surjective, $\nexists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = -1$. Donc, pas bijective.

3. La fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par $h : x \mapsto x^2$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

   Solution: Pas injective, $h(1) = h(-1)$, donc pas bijective. Surjective, $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $x^2 = y$. Il suffit de prendre $x = \sqrt{y}$, qui existe parce que $y \geq 0$.

4. La fonction $i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $i : x \mapsto x^2$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

   Solution: Injective et surjective (comme prouvé précédemment), donc bijective.

Exercice 2 [25%]

Qu'est-ce qu'un langage reconnaissable ? Tous les langages sont-ils reconnaissables ? Si non, donnez un exemple de langage qui n'est pas reconnaissable.

Solution: Un langage $L \subseteq A^*$ est reconnaissable s'il existe un automate fini $\mathcal{A}$ sur l'alphabet A tel que $L = L(\mathcal{A})$ (c-a-d, il existe un automate $\mathcal{A}$ qui reconnaisse L).
Le langage $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ n'est pas reconnaissable.

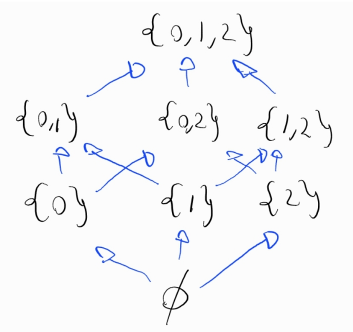
Exercice 3 [25%]

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On définit la relation $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ comme :

$$\mathcal{R} := \Big\{(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \Big| A \subseteq B\Big\}. \tag{1}$$

1. On considère $E := \{0, 1, 2\}$. Représenter la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par un graphe (sans les arcs de réflexivité et de transitivité)

   Solution:



2. On considère $E := \{0,1,2\} \subseteq \mathbb{N}$ (c-a-d, on voit E comme un sous-ensemble de $\mathbb{N}$). Donner l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Donner, lorsqu'ils existent, la borne inférieure, la borne supérieure, le plus petit élément, le plus grand élément, les éléments minimaux et les éléments maximaux de $\mathcal{P}(E)$ (sur la relation $\mathcal{R}$).

Solution:

$$\begin{aligned}
\text{Maj}(E) =& \{A \in \mathcal{P}(E) | 0 \in A, \text{ et } 1 \in A, \text{ et } 2 \in A\} && (2)\\
\text{Min}(E) =& \{\emptyset\} && (3)\\
\text{Inf}(E) =& \emptyset && (4)\\
\text{Sup}(E) =& \{0,1,2\} && (5)\\
\text{p.p.e.}(E) =& \emptyset && (6)\\
\text{p.g.e.}(E) =& \{0,1,2\} && (7)\\
\text{Minimaux}(E) =& \emptyset && (8)\\
\text{Maximaux}(E) =& \{0,1,2\} && (9)
\end{aligned}$$

3. On considère E un ensemble arbitraire. La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre ? Si oui , est-il un ordre total ?

Solution: Oui, c'est une relation d'ordre parce que $\mathcal{R}$ est,
Réflexive : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subseteq A$
Anti-symétrique :$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \subseteq B$ et $B \subseteq A \implies A = B$
Transitive : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), A \subseteq B$ et $B \subseteq C \implies A = C$.
La relation $\mathcal{R}$ n'est pas un ordre total. Dans l'exemple de l'exo 3.1, on voit que l'ensemble $\{0\}$ n'est contient pas $\{1\}$, et l'ensemble $\{1\}$ n'est contient pas $\{0\}$, donc il a des éléments incomparables.

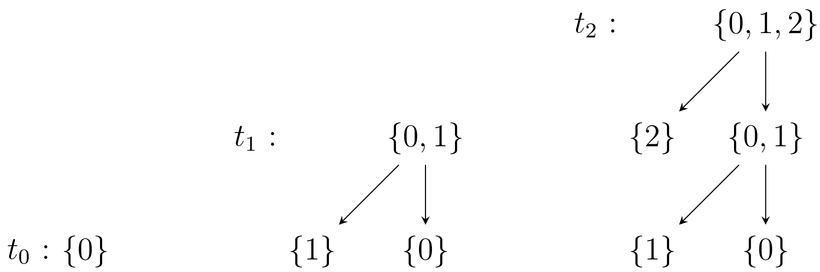
Exercice 4 [25%]
On considère des arbres binaires sur l'alphabet $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, en notant $\langle k \rangle$ pour l'arbre $(\{k\}, \emptyset, \emptyset)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathcal{F}$ est défini inductivement par :

(B) $t_0 = \langle 0 \rangle$ est dans $\mathcal{F}$.

(I) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $t_k = (P_k, g, d)$ est dans $\mathcal{F}$ alors $t_{k+1} = (P_{k+1}, \langle k+1 \rangle, t_k)$ est aussi dans $\mathcal{F}$.

1. Dessiner t_0, t_1 et t_2.

Solution:



2. En prenant $n(\langle 0 \rangle) = 1$ et $h(\langle 0 \rangle) = 0$, donner les définitions inductives des fonctions n (nombre de noeuds) et h (hauteur), en définissant $n(t_{k+1})$ en fonction de $n(t_k)$ et $h(t_{k+1})$ en fonction

de $h(t_k)$.

Solution: $n(t_{k+1}) = n(t_k) + 2$ et $h(t_{k+1}) = h(t_k) + 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. Montrer par induction que $n(t) = 2h(t) + 1$ pour tout $t \in \mathcal{F}$.

Solution: Pour t_0, on a bien la relation avec $h(t_0) = 0$ et $n(t_0) = 1$.
Supposons la propriété vraie pour t_k : $n(t_k) = 2h(t_k) + 1$.
Alors $n(t_{k+1}) = n(t_k) + 2 = 2h(t_k) + 1 + 2 = 2(h(t_k) + 1) + 1 = 2h(t_{k+1}) + 1$ donc la propriété est vraie sur tout $\mathcal{F}$.