

26 LOIS DE DE MORGAN 4/4

Quantificateurs

quel que soit le prédicat F ,

$$((\exists x, F(x)) \Leftrightarrow \neg(\forall x, \neg(F(x))))$$

Montrons ($\exists x, F(x)$) $\Leftrightarrow \neg(\forall x, \neg(F(x)))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $\exists x, F(x)$ (h1)

Montrons $\neg(\forall x, \neg(F(x)))$ (2)

($\neg I$)

Supposons que $\forall x, \neg(F(x))$ (h2)

Montrons \perp (3)

($\exists E$)

Montrons $\exists x, F(x)$ (4)

d'après (h1)

Soit l'élément a

Supposons que $F(a)$ (h3)

Montrons \perp (5)

($\neg E$)

Montrons $F(a)$ (6)

d'après (h3)

Montrons $\neg(F(a))$ (7)

($\forall E$)

Montrons $\forall x, \neg(F(x))$ (8)

d'après (h2)

Supposons que $\neg(\forall x, \neg(F(x)))$ (h4)

Montrons $\exists x, F(x)$ (9)

(A)

Supposons que $\neg(\exists x, F(x))$ (h5)

Montrons \perp (10)

($\neg E$)

Montrons $\forall x, \neg(F(x))$ (11)

($\forall I$)

Soit l'élément a

Montrons $\neg(F(a))$ (12)

($\neg I$)

Supposons que $F(a)$ (h6)

Montrons \perp (13)

($\neg E$)

Montrons $\exists x, F(x)$ (14)

($\exists I$)

Montrons $F(a)$ (15)

d'après (h6)

Montrons $\neg(\exists x, F(x))$ (16)

d'après (h5)

Montrons $\neg(\forall x, \neg(F(x)))$ (17)

d'après (h4)