Année 2016-2017 - S1

2I005 - 5 janvier 2017

Durée : 2h - Documents, calculettes et téléphones interdits

Inscrire votre numéro d'anonymat sur votre copie et le reporter sur toutes les copies intercalaires. La note (entre 0 et 60) est le minimum entre 60 et la somme des points obtenus (entre 0 et 69, barème indicatif).

Exercice 1 (20 points=8+6+6)

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\preceq$ et soit A une partie de E.

1. Donner la définition d'un majorant de A, de la borne supérieure de A, du plus grand élément de A, d'un élément maximal de A.
2. Montrer que si A admet un plus grand élément alors cet élément est l'unique élément maximal. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.
3. Dans cette question uniquement, on suppose que la relation d'ordre $\preceq$ est *totale*. Montrer qu'alors, si A admet un élément maximal, cet élément est unique. Montrer de plus que dans ce cas, cet élément maximal est le plus grand élément de A.

Solution

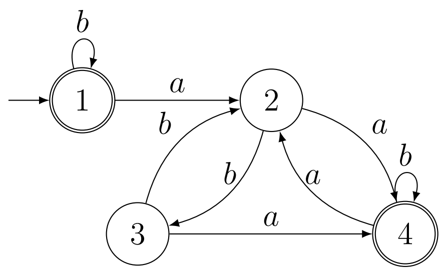
1. cf cours
2. Supposons que A admet un plus grand élément $M \in A$. Alors, pour tout $a \in A$, $a \preceq M$. Donc, pour tout $a \in A$, si $M \preceq a$, alors $M = a$ (par antisymétrie de la relation d'ordre), et M est un élément maximal. De plus cet élément maximal est unique : supposons qu'il existe M' un autre élément maximal. Alors, comme $M' \preceq M$, mais comme M' est un élément maximal, alors $M' = M$.

   La réciproque n'est pas vraie. Soit $E = \mathbb{N} \cup \{a\}$ et $\preceq$ définie comme étant la relation d'ordre usuelle sur les entiers naturels. (a n'est donc en relation avec aucun autre élément) et soit $A = E$. A admet un unique élément maximal a, mais pas de majorant, donc pas de plus grand élément.
3. Supposons que A admet un élément maximal M. Alors pour tout $a \in A$, si $M \preceq a$ alors $M = a$. Soit M' un autre élément maximal. Si $M \preceq M'$ alors $M = M'$. Sinon, comme l'ordre est total, alors $M' \preceq M$ et $M' = M$. De plus M est un majorant de A : soit $a \in A$, si $M \preceq a$ alors $M = a$. Comme l'ordre est total, on en déduit que pour tout $a \in A$, $a \preceq M$. Donc M est un majorant de A dans A, c'est le plus grand élément de A.

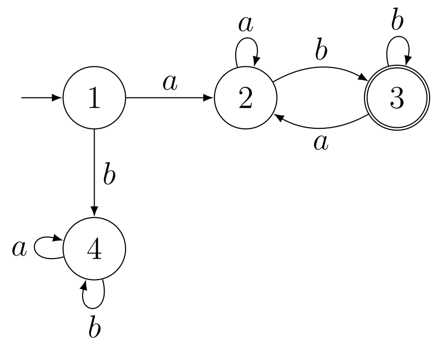
Exercice 2 (26 points=4+2+4+4+4+4+4) On se place sur un alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Construire un automate reconnaissant le langage des mots de Σ^* ne contenant pas deux b consécutifs.
2. On considère les deux automates suivants $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, avec $L = L(\mathcal{A})$ et $M = L(\mathcal{B})$.

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



   (a) Ces automates sont-ils complets ? déterministes ?

   (b) Décrire informellement les langages L et M.

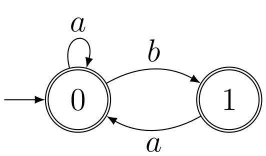
   (c) Construire un automate reconnaissant $L \cdot M$. Cet automate est-il déterministe ?

   (d) *En utilisant le lemme d'Arden*, donner une expression rationnelle du langage accepté par $\mathcal{B}$.

   (e) Construire l'automate minimal équivalent à $\mathcal{A}$.

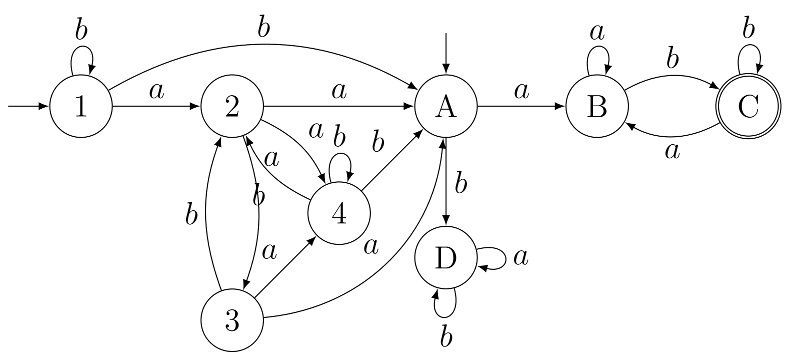
3. Démontrer que le langage $L_p = \{a^n b^p \mid n > p\}$ n'est pas reconnaissable.

Solution

1. 

2. (a) Les deux automates sont complets et déterministes.

   (b) L est l'ensemble des mots contenant un nombre pair de a et M l'ensemble des mots commençant par un a et finissant par un b.

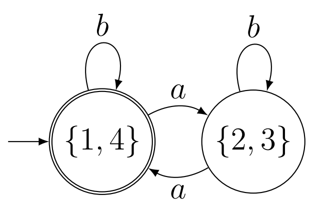
   (c) 

(d) Les équations

$$L_1 = a \cdot L_2 + b \cdot L_4 \quad (1)$$
$$L_2 = a \cdot L_2 + b \cdot L_3 \quad (2)$$
$$L_3 = a \cdot L_2 + b \cdot L_3 + \varepsilon \quad (3)$$
$$L_4 = a \cdot L_4 + b \cdot L_4 \quad (4)$$

On applique le lemme d'Arden sur (4) avec $X = L_4$, $K = (a + b)$ et $M = \emptyset$ on obtient $L_4 = (a+b)^* \cdot \emptyset$ donc $L_4 = \emptyset$. On applique ensuite le lemme d'Arden sur (3) avec $X = L_3$, $K = b$ et $M = a \cdot L_2 + \varepsilon$. On obtient $L_3 = b^*(a \cdot L_2 + \varepsilon)$. On remplace L_3 dans (2) : $L_2 = a \cdot L_2 + b \cdot b^*(a \cdot L_2 + \varepsilon) = (a + b^+ a)L_2 + b^+ = b^* a L_2 + b^+$. On applique le lemme d'Arden avec $X = L_2$, $K = b^* a$ et $M = b^+$. On obtient $L_2 = (b^* a)^* b^+$. On remplace L_2 et L_4 dans (1) et on obtient $L_1 = a(b^* a)^* b^+$.

(e) On construit les classes d'équivalence à l'aide de l'algorithme de Moore : pour $\sim_0$ on a deux classes d'équivalence : $\{1, 4\}$ et $\{2, 3\}$. De plus, $1 \cdot a = 2 = 4 \cdot a$ et $1 \cdot b = 1 \sim_0 4 = 4 \cdot b$. Donc $1 \sim_1 4$. Par ailleurs, $2 \cdot a = 4 = 3 \cdot a$ et $2 \cdot b = 3 \sim_0 2 = 3 \cdot b$ donc $2 \sim_1 3$. $\sim_0 = \sim_1 = \sim$ donc l'automate minimal équivalent à $\mathcal{A}$ est



3. Supposons que L_p est reconnaissable. Alors il existe un automate $\mathcal{A}_p$ qui le reconnait. Soit N le nombre d'états de $\mathcal{A}_p$, et considérons le mot $w = a^{N+1} b^N \in L_p$. Soit $s_0 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{a} s_2 \cdots \xrightarrow{a} s_{N+1} \xrightarrow{b^N} s_{2N+1}$ une exécution acceptante de $\mathcal{A}_p$ sur w. Donc il existe nécessairement $0 \leq i < j \leq N + 1$ avec $s_i = s_j$. On peut donc réécrire l'exécution acceptante ci-dessus ainsi : $s_0 \xrightarrow{a^{n_1}} s_i \xrightarrow{a^{n_2}} s_j \xrightarrow{a^{n_3}} s_{N+1} \xrightarrow{b^N} s_{2N+1}$, avec $n_2 > 0$ et $n_1 + n_2 + n_3 = N + 1$. On a donc une autre exécution acceptante de $\mathcal{A}_p$: $s_0 \xrightarrow{a^{n_1}} s_i \xrightarrow{a^{n_3}} s_{N+1} \xrightarrow{b^N} s_{2N+1}$, avec $n_1 + n_3 < N + 1$ donc le mot $a^{n_1+n_3} b^N$ est accepté par $\mathcal{A}_p$. Or $a^{n_1+n_3} b^N \notin L_p$ car $n_1 + n_3 \leq N$. Donc $\mathcal{A}_p$ n'existe pas et L_p n'est pas reconnaissable.

Exercice 3 (11 points = 4+2+2+3)

1. On note $\sim$ l'équivalence sémantique de formules du calcul propositionnel. Montrer que, pour deux formules F et G du calcul propositionnel, $F \sim G$ si et seulement si la formule $F \leftrightarrow G$ est valide.
2. La formule $F = p \to (p \to q)$ est-elle valide ? satisfaisable ? non satisfaisable ? Justifier.
3. A-t-on $(\neg q \to \neg p) \sim (p \to q)$? Justifier.

4. Soit $\mathcal{F} = \{p \to (q \to r), \neg p\}$. A-t-on $\mathcal{F} \models \neg r$? Justifier.

Solution

1. cf cours
2. La formule F n'est pas valide car avec $I(p) = 1$ et $I(q) = 0$ on a $I(F) = 0$. Elle est satisfaisable car avec $I(p) = I(q) = 1$ on a $I(F) = 1$ (par exemple). Comme elle est satisfaisable, elle n'est pas non satisfaisable.
3. $I(\neg q \to \neg p) = \overline{I(\neg q)} + I(\neg p) = I(q) + \overline{I(p)} = I(p \to q)$ donc $(\neg q \to \neg p) \sim (p \to q)$.
4. Avec $I(p) = 0$, $I(r) = 1$ on a $I(p \to (q \to r)) = 1$ et $I(\neg p) = 1$ et $I(\neg r) = 0$, donc $\mathcal{F} \not\models \neg r$.

Exercice 4 **(12 points = 3+2+4+3)**

1. Soit f la fonction booléenne décrite par $f(x, y, z, t) = (\bar{t} + x\overline{z})(\overline{x} + y)(\overline{z} + t)(z + \overline{y})$. Donner une forme normale conjonctive et une forme normale disjonctive pour f.
2. Alice, Bob, Cynthia et David dînent au restaurant et hésitent à prendre un dessert. On sait que :
   (A) si David prend un dessert, alors Alice aussi mais Cynthia n'en prend pas.
   (B) si Alice prend un dessert, alors Bob aussi.
   (C) si Cynthia prend un dessert alors David aussi.
   (D) si Cynthia ne prend pas de dessert, alors Bob non plus.

   (a) Exprimer les 4 propositions en fonction des propositions p : *Alice prend un dessert*, q : *Bob prend un dessert*, r : *Cynthia prend un dessert*, et s : *David prend un dessert*.

   (b) Pour une interprétation I, exprimer $I(A)$, $I(B)$, $I(C)$ et $I(D)$ en fonction de $I(p)$, $I(q)$, $I(r)$, et $I(s)$.

   (c) **Sans table de vérité**, dire qui prend un dessert et qui n'en prend pas.

Solution

1. $f(x, y, z, t) = (\bar{t} + x\overline{z})(\overline{z} + t)(z + \overline{y})(\overline{x} + y) = (\bar{t}\overline{z} + x\overline{z} + x\overline{z}t)(z + \overline{y})(\overline{x} + y) = (\bar{t}\overline{z} + x\overline{z})(z + \overline{y})(\overline{x} + y) = (\bar{t}\overline{z}\overline{y} + x\overline{z}\overline{y})(\overline{x} + y) = \bar{t}\overline{z}\overline{y}\overline{x}$ qui est à la fois une forme normale conjonctive et disjonctive.

   (a) $A = s \to (p \wedge \neg r)$, $B = p \to q$, $C = r \to s$, $D = \neg r \to \neg q$.

   (b) $I(A) = \overline{I(s)} + I(p)\overline{I(r)}$, $I(B) = \overline{I(p)} + I(q)$, $I(C) = \overline{I(r)} + I(s)$ et $I(D) = I(r) + \overline{I(q)}$.

   (c) En posant $I(p) = x$, $I(q) = y$, $I(r) = z$ et $I(s) = t$, on a $I(A \wedge B \wedge C \wedge D) = f(x, y, z, t) = \bar{t}\overline{z}\overline{y}\overline{x}$. Donc personne ne prend de dessert.