M1 Informatique.
UE MOGPL.

Examen du 17 janvier 2020. Durée : 1 heure 30 minutes

Une feuille recto-verso est autorisée, tout autre document est interdit. Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs. Le barème est indicatif et est susceptible d'être modifié.

Eléments de correction

Exercice 1 (7 points)

Jeudi 16 janvier 2020, 23h. L'étudiant Jarry Valeur étudie son trajet du lendemain en transport en commun pour atteindre à l'heure l'examen de MOGPL. En raison des grèves, le fonctionnement sera probablement perturbé, certaines lignes peut-être fermées. Jarry Valeur souhaite alors déterminer un trajet de la station Porte d'Auteuil (proche de son appartement) à la station Jussieu (proche du campus Pierre et Marie Curie) qui **minimise le nombre de changements de lignes** (sans tenir compte du nombre de stations du trajet).

On notera n le nombre de stations du réseau, et T le nombre de lignes (on ne considère que des lignes fonctionnant dans les deux sens et qui sont des chaînes de station).

Question 1 (1/7) — On considère le réseau de la figure 1 ci-après. Les nombres indiquent les numéros des lignes de métro (attention certaines lignes ne correspondent plus aux lignes actuelles !).

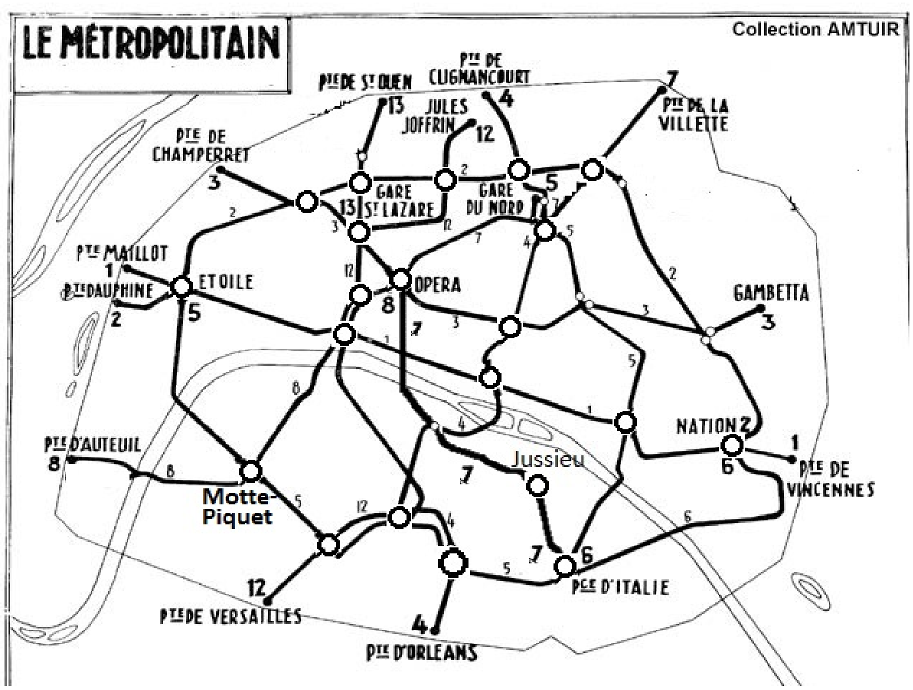


FIGURE 1 –

Le trajet consistant à prendre la ligne 8 de Porte d'Auteuil (à gauche du plan vers le bas) à Motte-Piquet, la ligne 5 de Motte-Piquet à Place d'Italie, et la ligne 7 de Place d'Italie à Jussieu, nécessite donc 2 changements. Donnez un trajet minimisant le nombre de changements (pas de justification demandée).

Prendre la 8 de Porte d'Auteuil à Opéra, puis la 7 d'Opéra à Jussieu.

Question 2 (6/7) — On propose de résoudre ce problème par programmation dynamique. Pour cela, on définit pour toute station j, toute ligne ℓ et tout entier $k \in \{0, T-1\}$, $\lambda(j, \ell, k)$ qui vaut 1 s'il est possible d'atteindre (à partir de la station de départ s) la station j en faisant au plus k changements, de manière à ce que la dernière ligne de métro empruntée (celle pour arriver en j) soit la ligne ℓ. $\lambda(j, \ell, k)$ vaut 0 sinon.

Ainsi, dans l'exemple précédent, en partant de Porte d'Auteuil, $\lambda(Jussieu, 7, 2) = 1$ (grâce au trajet donné dans la question précédente) et $\lambda(Etoile, 2, 1) = 0$ (impossible d'atteindre Etoile depuis Porte d'Auteuil, avec au plus un changement, en terminant par la ligne 2 (cela serait possible en terminant par la ligne 5)).

1. (2 points) Comment calculer $\lambda(j, \ell, 0)$? Quelle est la complexité de ce calcul (pour l'effectuer pour tout j et tout ℓ) ?

   Il s'agit de voir si le sommet j est accessible à partir de s avec uniquement la ligne ℓ : il suffit de voir si s et j sont sur la ligne ℓ ! On regarde cela pour chaque j et pour chaque ℓ, donc $O(nT)$ au global.

2. (2.5 points) Pour $k \geq 1$, expliquer comment calculer $\lambda(j, \ell, k)$ en fonction de valeurs $\lambda(j', \ell', k-1)$. Vous pourrez expliquer dans quel(s) cas $\lambda(j, \ell, k)$ vaut 1.

   Pour un sommet j **de la ligne** ℓ, $\lambda(j, \ell, k)$ vaut 1 s'il existe un sommet j' de la ligne ℓ et une ligne ℓ' tels que $\lambda(j', \ell', k-1) = 1$ (on peut alors prendre la ligne ℓ pour aller de j' à j et faire au plus k changements) ; sinon (j n'est pas sur la ligne ℓ, ou $\lambda(j', \ell', k-1) = 0$ pour tout sommet j' de la ligne ℓ et toute ligne ℓ') $\lambda(j, \ell, k) = 0$.

3. (0.5 point) Une fois calculées toutes les valeurs $\lambda(j, \ell, k)$, comment obtient-on le nombre de changements minimum ?

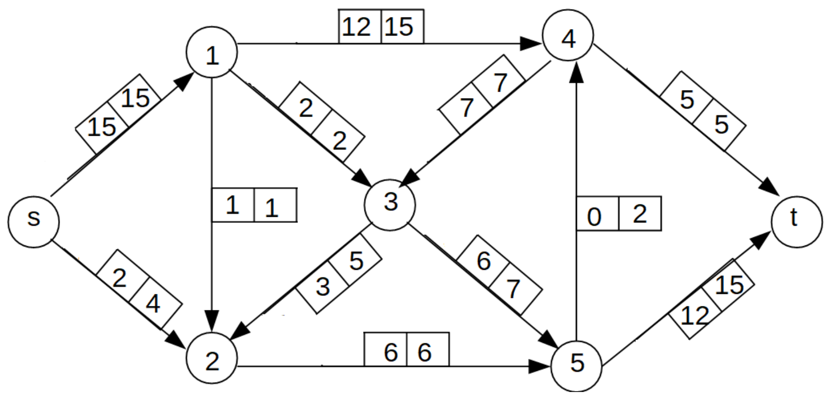
   Il suffit de trouver le plus petit k tel qu'il existe ℓ avec $\lambda(j, \ell, k) = 1$.

4. (1 point) Quelle est la complexité globale de la méthode ?

   L'initialisation se fait en $O(nT)$. Ensuite, chaque calcul de $\lambda(j, \ell, k)$ peut se faire en $O(n)$ ($O(nT)$ si on fait le test pour tout j', tout ℓ', mais on peut faire en $O(n)$ en précalculant pour chaque j' s'il existe ℓ' telle que $\lambda(j', \ell', k)$). Il y a $O(nTT)$ valeurs à calculer, donc la phase principale est en $O(n^2T^2)$ (optimisé) ou $O(n^2T^3)$ (non optimisé). La dernière étape a une complexité plus faible, donc la complexité globale est en $O(n^2T^2)$.

Exercice 2 (13 points)

Question 1 (3/13) — Appliquer l'algorithme de Ford et Fulkerson à partir du flot indiqué sur le réseau ci-dessous pour déterminer un flot maximum. Sur chaque arc, la première valeur correspond au flux (12 sur l'arc $(1, 4)$ par exemple) et la deuxième à la capacité (15 sur l'arc $(1, 4)$). Donner une coupe de capacité minimum.



Chaîne augmentante : $(s, 2, 3, 5, t)$, augmentation de 1 (diminution de 1 sur $(2, 3)$).
A l'itération d'après les sommets $s, 1, 2, 3, 4$ sont marqués, le flot est optimal (de valeur 18).
$(S, \overline{S})$ avec $S = \{s, 1, 2, 3, 4\}$ est une coupe min.

Dans toute la suite de l'exercice, nous étudions la situation où chaque arc e possède deux valeurs : une capacité $c(e) \in \mathbb{N}$ et une **borne** $b(e) \in \mathbb{N}$ telles que $0 \leq b(e) \leq c(e)$. On considère qu'un flot ϕ dans ce réseau est admissible si sur chaque arc $b(e) \leq \phi_e \leq c(e)$ (et s'il respecte la loi de conservation du flux bien sûr). Par rapport au problème habituel, il y a donc une contrainte supplémentaire : sur chaque arc e, le flux doit être au moins égal à $b(e)$ (et toujours au plus égal à $c(e)$).

Question 2 (5/13) — On s'interroge dans cette question sur l'existence d'un flot admissible.

(a) (1 point) On considère l'exemple de la figure 2 ci-après, où sur chaque arc u sont notées $b(u)$ et $c(u)$ (sur $(2, 4)$, la borne est 3 et la capacité est 9).
Existe-t-il un flot admissible ? Pourquoi ?

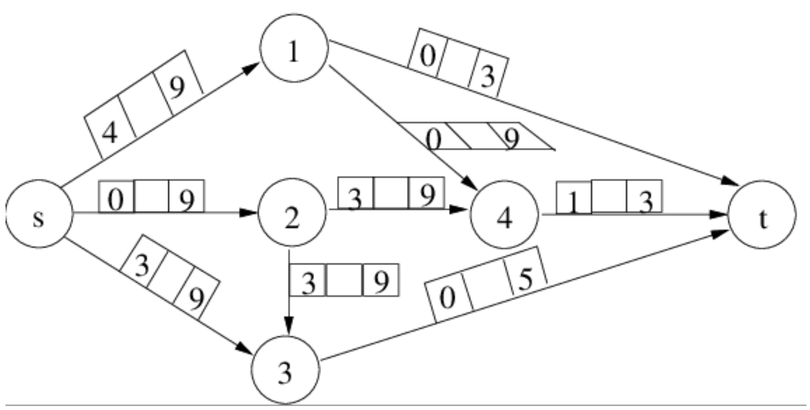


FIGURE 2 –

Il n'y a pas de flot admissible : au moins 6 unités doivent entrer en 3 (3 depuis 2, 3 depuis s), alors qu'au plus 5 peuvent en sortir.

(b) (2 points) De manière générale, soit T un ensemble de sommets ne contenant ni s ni t.
Soit ϕ un flot admissible sur le réseau. En notant $\omega^+(T)$ l'ensemble des arcs sortant de T et $\omega^-(T)$ l'ensemble des arcs entrant en T, à quoi est égal $V(\phi) = \sum_{e \in \omega^+(T)} \phi_e - \sum_{e \in \omega^-(T)} \phi_e$? (une justification rapide suffit)

En déduire que s'il existe un flot admissible, alors $\sum_{e\in\omega^+(T)} c(e) \geq \sum_{e\in\omega^-(T)} b(e)$.

> $V(\phi) = \sum_{e\in\omega^+(T)} \phi_u - \sum_{u\in\omega^-(T)} \phi_u = 0$, par conservation du flot (tout ce qui entre en T doit en sortir, vu que s et t ne sont pas dans T).
> Or : $b(e) \leq \phi_e \leq c(e)$, donc $0 = V(\phi) \leq \sum_{e\in\omega^+(T)} c(e) - \sum_{e\in\omega^-(T)} b(e)$, ce qui est l'inégalité demandée.

(c) (2 points) Peut-on modifier une seule valeur (une borne ou une capacité) dans le réseau de la figure 2 de manière à ce qu'il existe un flot admissible ? Si oui, vous donnerez la modification et un flot admissible, si non vous expliquerez pourquoi.

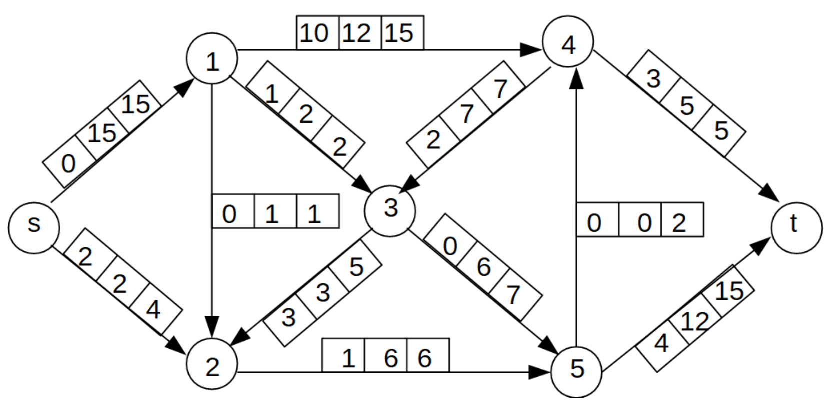
> C'est impossible : il faut effectuer (au moins) un changement sur les arcs incidents au sommet 3, mais également si l'on prend $T = \{1, 4\}$, au moins 7 unités entrent dans 4 et au plus 6 unités en sortent, donc il faut modifier aussi l'un des 4 arcs entrant ou sortant de T. Il faut ainsi effectuer au moins deux changements.

Question 3 (5/13) — On considère dans cette question qu'il existe un flot admissible ϕ_0.

(a) (1.5 point) Définir une procédure de marquage permettant de savoir si l'on peut augmenter un flot admissible ϕ_0. Vous expliciterez simplement la manière de marquer les voisins (prédécesseurs/successeurs) d'un sommet (marqué) u. Une explication succincte suffit.

> A partir d'un sommet u marqué :
> — pour tout arc (u, v) marquer v si $\phi(u, u) < c(u, v)$: marquage classique, traduisant une augmentation possible du flux sur (u, v).
> — pour tout arc (w, u) marque w si $\phi(w, u) > b(w, u)$: on peut baisser le flux sur (w, u) s'il est strictement supérieur à la borne.

(b) (1 point) Appliquer la procédure de marquage sur le réseau suivant à partir du flot ϕ_0 indiqué (le flux sur chaque arc est indiqué en position médiane, par exemple sur $(1, 4)$, la borne est 10, le flux est 12, et la capacité est 15).).



> Lors de la procédure, les sommets $s, 1, 2, 4$ sont marqués.

(c) (2.5 points) En vous servant d'un argument (précisément justifié) lié à une coupe, montrer que sur cette instance tout flot réalisable a une valeur inférieure ou égale à celle de ϕ_0.

> Soit $S = \{s, 1, 2, 4\}$ l'ensemble des sommets marqués. Par conservation du flot on a pour n'importe quel flot ϕ $v(\phi) = \sum_{e\in\omega^+(S)} \phi_e - \sum_{e\in\omega^-(S)} \phi_e$. Avec les inégalités sur les flux sur chaque arc on a $v(\phi) \leq \sum_{e\in\omega^+(S)} c(e) - \sum_{e\in\omega^-(S)} b(e)$.
> Ici : $\sum_{e\in\omega^+(S)} c(e) = 6 + 2 + 7 + 5 = 20$, et $\sum_{e\in\omega^-(S)} b(e) = 3 + 0 = 3$, donc $v(\phi) \leq 17 = v(\phi_0)$.