

47 DISTRIBUTIVITÉ DE LA DISJONCTION 2/2

Connecteurs

Montrons que

quelles que soient les propositions P Q R ,
 $((P \vee (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee R)))$

Montrons ($\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{R})$) $\Leftrightarrow ((\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{P} \vee \mathbf{R}))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{R})$ (h1)

Montrons ($\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{P} \vee \mathbf{R})$ (2)

($\Rightarrow I$)

Supposons que $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$ (h2)

Montrons $\mathbf{P} \vee \mathbf{R}$ (3)

($\vee E$)

Montrons $\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{R})$ (4)

d'après (h1)

Supposons que \mathbf{P} (h3)

Montrons $\mathbf{P} \vee \mathbf{R}$ (5)

($\vee Ig$)

Montrons \mathbf{P} (6)

d'après (h3)

Supposons que $\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{R}$ (h4)

Montrons $\mathbf{P} \vee \mathbf{R}$ (7)

($\vee E$)

Montrons $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$ (8)

d'après (h2)

Supposons que \mathbf{P} (h5)

Montrons $\mathbf{P} \vee \mathbf{R}$ (9)

($\vee Ig$)

Montrons \mathbf{P} (10)

d'après (h5)

Supposons que \mathbf{Q} (h6)

Montrons $\mathbf{P} \vee \mathbf{R}$ (11)

($\vee Id$)

Montrons \mathbf{R} (12)

($\Rightarrow E$)

Montrons \mathbf{Q} (13)

d'après (h6)

Montrons $\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{R}$ (14)

d'après (h4)

Supposons que $(P \vee Q) \Rightarrow (P \vee R)$ (h7)

Montrons $P \vee (Q \Rightarrow R)$ (15)

(TE)

Supposons que P (h8)

Montrons $P \vee (Q \Rightarrow R)$ (16)

(\vee Ig)

Montrons P (17)

d'après (h8)

Supposons que $\neg P$ (h9)

Montrons $P \vee (Q \Rightarrow R)$ (18)

(\vee Id)

Montrons $Q \Rightarrow R$ (19)

(\Rightarrow I)

Supposons que Q (h10)

Montrons R (20)

(\vee E)

Montrons $P \vee R$ (21)

(\Rightarrow E)

Montrons $P \vee Q$ (22)

(\vee Id)

Montrons Q (23)

d'après (h10)

Montrons $(P \vee Q) \Rightarrow (P \vee R)$ (24)

d'après (h7)

Supposons que P (h11)

Montrons R (25)

(\perp E)

Montrons \perp (26)

(\neg E)

Montrons P (27)

d'après (h11)

Montrons $\neg P$ (28)

d'après (h9)

Supposons que R (h12)

[] [] [] [] [] Montrons R (29)
d'après (h12)