Année 2019–2020

# LU2IN005 - 14 novembre 2019

Durée : 1h30 - Documents, calculettes et téléphones interdits

**Inscrire votre numéro de groupe sur votre copie**. La note (entre 0 et 60) est le minimum entre 60 et la somme des points obtenus (entre 0 et 66).

## Exercice 1 (16 points= 3+7+3+3)

On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ et la relation binaire $\mathcal{R} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ définie par : $(u, v) \in \mathcal{R}$ si et seulement si $u = u_1 \dots u_n$, $v = v_1 \dots v_n$ et il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $u = v_i \dots v_n v_1 \dots v_{i-1}$. Par exemple $(abc, bca) \in \mathcal{R}$, et $(abc, cab) \in \mathcal{R}$.

1. Soit $u = aabca$. Donner tous les mots $v \in \Sigma^*$ tels que $(u, v) \in \mathcal{R}$.
2. $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? transitive ? symétrique ? anti-symétrique ? Est-ce une relation d'équivalence ? une relation d'ordre ? Est-ce une fonction ? Justifier chacune de vos réponses.
3. L'application $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $f(x, y) = x$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. L'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie par $g(x) = (x, x)$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

### Solution

1. $abcaa$, $bcaaa$, $caaab$, $aaabc$, $aabca$.
2. La relation $\mathcal{R}$ est réflexive : soit un mot $u = u_1 \dots u_n$, alors pour $i = 1$, $u = u_i \dots u_n u_1 \dots u_{i-1}$. Elle est transitive : soient trois mots $u$, $v$ et $w$ et $i$, $j$ tels que $u = u_1 \dots u_n = v_i \dots v_n v_1 \dots v_{i-1}$ et $v = w_j \dots w_n w_1 \dots w_{j-1}$.Alors, $u = w_{(i+j)\%n} \dots w_n w_1 \dots w_{((i+j)\%n)-1}$ et $(u, w) \in \mathcal{R}$. Elle est symétrique : si $(u, v) \in \mathcal{R}$, il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $u_1 \dots u_n = v_i \dots v_n$, et $v_1 \dots v_n = u_{(n-i+2)\%n} \dots u_n u_1 \dots u_{((n-i+2)\%n)-1}$. Elle n'est pas anti-symétrique, car $(abc, cab) \in \mathcal{R}$ et $(cab, abc) \in \mathcal{R}$. C'est une relation d'équivalence, pas une relation d'ordre, pas une fonction.
3. $f$ n'est pas injective : $f(1, 1) = f(1, 2) = 1$. $f$ est surjective : soit $n \in \mathbb{N}$, alors $f(n, 1) = n$. $f$ n'est pas bijective.
4. $g$ est injective : soient $x, y \in \mathbb{N}$ avec $x \neq y$. Alors $g(x) = (x, x) \neq (y, y) = g(y)$. $g$ n'est pas surjective : si $x \neq y$, $(x, y)$ n'a pas d'antécédent par $g$. $g$ n'est pas bijective.

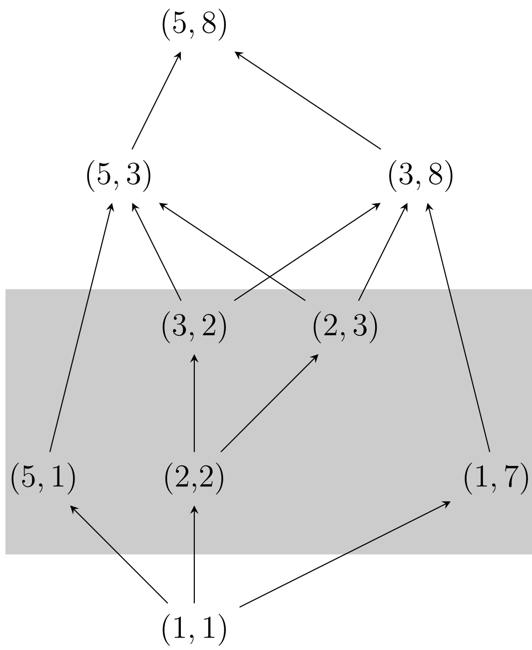
## Exercice 2 (21 points= 4+3+4+2+8)

1. Soit $E$ un ensemble muni d'une relation d'ordre $\sqsubseteq$. Montrer que si $E$ admet un plus grand élément, c'est aussi un élément maximal. Montrer que, si $\sqsubseteq$ est un ordre total, un élément maximal est aussi le plus grand élément.
2. Soit $(E, \preceq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre partiel bien fondé. Enoncer le principe d'induction sur les ordres bien fondés et le démontrer.
3. Soit le sous-ensemble $E = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(5,1),(5,3),(1,7),(3,8),(5,8)\}$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ordonné par l'ordre produit : $(a, b) \leq (a', b')$ si et seulement si $a \leq a'$ et $b \leq b'$.
   (a) Représenter la relation d'ordre par un graphe (sans les arcs de réflexivité et de transitivité).
   (b) Pour le sous-ensemble $A = \{(2,2),(2,3),(3,2),(5,1),(1,7)\}$ de $E$, donner l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants. Donner, lorsqu'ils existent, la borne inférieure, la borne supérieure, le plus petit élément et le plus grand élément, les éléments minimaux et les éléments maximaux.

**Tournez s.v.p.**

### Solution

1. Soit $M$ le plus grand élément de $E$, alors $M \in E$ et pour tout $a \in E$, $a \sqsubseteq M$. Soit donc $a \in E$ tel que $M \sqsubseteq a$, alors $M = a$ par antisymétrie de $\sqsubseteq$. Donc $M$ est aussi un élément maximal. Réciproquement, soit $M$ un élément maximal de $E$, avec $\sqsubseteq$ ordre total. Alors soit $a \in E$. Si $M \sqsubseteq a$, alors $M = a$. Sinon, comme l'ordre est total, alors $a \sqsubseteq M$. Donc, pour tout $a \in E$, $a \sqsubseteq M$, et $M \in E$, donc $M$ est le plus grand élément.
2. cours




3. L'ensemble des majorants est $\{(5, 8)\}$, l'ensemble des minorants est $\{(1, 1)\}$. Borne supérieure $(5, 8)$, borne inférieure $(1, 1)$. Plus grand élément n'existe pas, plus petit élément non plus. Eléments maximaux $\{(5, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 7)\}$, éléments minimaux $\{(5, 1)(2, 2)(1, 7)\}$.

## Exercice 3 (13 points = 3+3+4+3)

1. On considère la suite définie par $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$, avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $u_n = 1 - (-2)^n$. pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère l'ensemble $\mathcal{L}$ des listes d'entiers, défini inductivement par :
$$\begin{cases} (B) : & nil \in \mathcal{L}, \\ (I) : & \text{Si } \ell \in \mathcal{L} \text{ et } n \in \mathbb{N}, \text{ alors } n :: \ell \in \mathcal{L} \end{cases}$$
On définit par induction la fonction @par :
$$\begin{cases} (B) : & @(nil, \ell_2) = \ell_2, \\ (I) : & @(n :: \ell_1, \ell_2) = n :: @(\ell_1, \ell_2) \end{cases}$$
   (a) Donner la définition par induction structurelle de la fonction *length* : $\mathcal{L} \to \mathbb{N}$ qui calcule le nombre d'éléments d'une liste, en considérant que la liste vide *nil* contient 0 élément.
   (b) Démontrer par induction structurelle que, pour toutes listes $\ell_1, \ell_2$, $length(\ell_1 @ \ell_2) = length(\ell_1) + length(\ell_2)$.
   (c) Donner la définition par induction structurelle de *mult* : $\mathcal{L} \to \mathbb{N}$ qui calcule le produit des éléments d'une liste.

**Solution**

1. **Cas de base :** $u_0 = 0 = 1 - (-1)^0$, et $u_1 = 3 = 1 - (-2)$.
   **Cas d'induction :** Soit $n > 1$, et supposons que pour tout $k < n$, $u_k = 1 - (-2)^k$. Alors $u_n = 2u_{n-2} - u_{n-1} = 2(1 - (-2)^{n-2}) - 1 + (-2)^{n-1} = 2 - 2 * (-2)^{n-2} - 1 + (-2)^{n-1} = 1 + (-2) * (-2)^{n-2} + (-2)^{n-1} = 1 + (-2)^{n-1} + (-2)^{n-1} = 1 + 2(-2)^{n-1} = 1 - (-2)(-2)^{n-1} = 1 - (-2)^n$.
   **Conclusion :** On a montré par récurrence forte que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 1 - (-2)^n$.
2. (a) $\begin{cases} \mathit{length}(\mathit{nil}) & = 0 \\ \mathit{length}(n :: \ell) & = 1 + \mathit{length}(\ell) \end{cases}$

   (b) On fait une récurrence sur $\ell_1$. Pour le cas de base : Pour tout $\ell_2 \in \mathcal{L}$, $\mathit{length}(\mathit{nil}@\ell_2) = \mathit{length}(\ell_2)$ par définition de @. Soit $\ell_1 \in \mathcal{L}$ et supposons que pour tout $\ell_2$, $\mathit{length}(\ell_1 @ \ell_2) = \mathit{length}(\ell_1) + \mathit{length}(\ell_2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathit{length}(@(n :: \ell_1, \ell_2)) = \mathit{length}(n :: @(\ell_1, \ell_2))$ par définition de @.Par définition de *length*, $\mathit{length}(n :: @(\ell_1, \ell_2)) = 1 + \mathit{length}(@(\ell_1, \ell 2)$, et par hypothèse d'induction, $\mathit{length}(@(n :: \ell_1, \ell_2)) = 1 + \mathit{length}(\ell_1) + \mathit{length}(\ell_2) = \mathit{length}(n :: \ell_1) + \mathit{length}(\ell_2)$.

   (c) $\begin{cases} \mathit{mult}(\mathit{nil}) & = 1 \\ \mathit{mult}(n :: \ell) & = n * \mathit{mult}(\ell) \end{cases}$

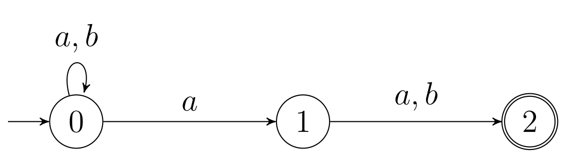
## Exercice 4 (16 points = 2+2+3+4+5)

On se place sur l'alpabet $A = \{a, b\}$.

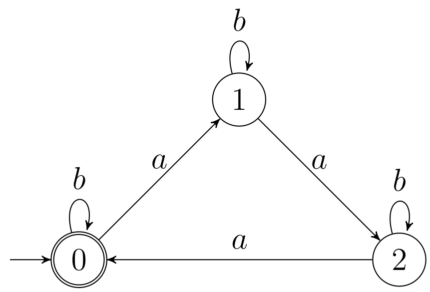
1. Donner un automate reconnaissant les mots dont l'avant-dernière lettre est un $a$.
2. Donner un automate reconnaissant les mots ayant un nombre de $a$ multiple de 3.
3. On considère les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ci-dessous.


   (a) Donner informellement la description du langage $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.
   (b) Les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont-ils déterministes ? complets ? Justifier les réponses.
   (c) Déterminiser $\mathcal{B}$.

**Solution**

1. 

2.




3. (a) $L(\mathcal{A})$ est l'ensemble des mots qui se terminent par $a$.

   (b) $\mathcal{A}$ est déterministe et complet. $\mathcal{B}$ est non déterministe (deux transitions étiquetées par $a$ depuis l'état 1), et non complet (pas de transition étiquetée par $b$ depuis l'état 1).

   (c)