Examen
Représentations et Méthodes Numériques
13 janvier 2022

Durée : 1h30. SANS DOCUMENT.
Tout objet connecté doit être éteint et rangé.
Les vraies calculatrices non connectées sont autorisées.

Exercice 1 – Représentations - 6 points

1. (**1 point**) Quel est le codage de $2^{25}+3$ en simple précision en arrondi au plus près (sans espace) ?

2. (**1 point**) Quel est la plus petite valeur d'un entier non signé codé sur n bits ?

3. (**2 points**) On considère l'équation suivante $f(x) = -x^2 + 3$.
   Si l'on débute l'itération de Newton avec $x_0 = 1$, quelle est la valeur de x_1 ?

4. (**2 points**) Calculer le pgcd p et les coefficients u et v de Bézout de $a = 264$ et $b = 198$ tels que $a \times u + b \times v = p$.

Exercice 2 – Polynômes - 6 points

On veut calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0 = -3$, $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$ avec les valeurs $y_0 = 8$, $y_1 = 4$ et $y_2 = 4$.

1. (**1,5 point**) Quel est le système linéaire associé à ce problème ?

2. (**3 points**) Calculer la base de Lagrange L_0, L_1, L_2 associée aux points x_0, x_1, x_2 sous forme développée.

3. (**1,5 points**) Quel est alors le polynôme interpolateur de Lagrange aux points donnés ?

Exercice 3 – Algèbre linéaire - 8 points

1. (**2 point**) Calculer la décomposition LU de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. (**2 points**) Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$. On note C la matrice définie par blocs

$$C = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ A & I & 0 \\ -BA & B & I \end{pmatrix},$$

où I est la matrice identité de taille n. Montrer que C est inversible et donner son inverse.

3. (**4 points**) Soit la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. La suite vérifie $u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n = (-1)^{n+1}$ donc l'inverse de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{smallmatrix}\right)$ est $(-1)^{n+1}\left(\begin{smallmatrix} -u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & -u_{n+2} \end{smallmatrix}\right)$.
On veut calculer l'inverse des matrices $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 21 & 13 \\ 13 & 8 \end{smallmatrix}\right)$ et $A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 144 & 89 \\ 89 & 55 \end{smallmatrix}\right)$ en utilisant l'algorithme de Gauß-Jordan en place avec une arithmétique flottante en base 10 avec 5 chiffres de mantisse et un arrondi vers 0.
Normalement $A_1^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -8 & 13 \\ 13 & -21 \end{smallmatrix}\right)$ et $A_2^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -55 & 89 \\ 89 & -144 \end{smallmatrix}\right)$.
Que devient la matrice A_1 après réduction de la première colonne ?
Même question pour A_2.