

45 DISTRIBUTIVITÉ DE LA CONJONCTION 2/2

Connecteurs

Montrons que

quelles que soient les propositions P Q R ,
 $((P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)))$

Montrons ($\mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$) $\Leftrightarrow ((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vee (\mathbf{P} \wedge \mathbf{R}))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $\mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$ (h1)

Montrons ($\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vee (\mathbf{P} \wedge \mathbf{R})$ (2)

($\vee E$)

Montrons $\mathbf{Q} \vee \mathbf{R}$ (3)

($\wedge Ed$)

Montrons $\mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$ (4)

d'après (h1)

Supposons que \mathbf{Q} (h2)

Montrons ($\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vee (\mathbf{P} \wedge \mathbf{R})$ (5)

($\vee Ig$)

Montrons $\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$ (6)

($\wedge I$)

Montrons \mathbf{P} (7)

($\wedge Eg$)

Montrons $\mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$ (8)

d'après (h1)

Montrons \mathbf{Q} (9)

d'après (h2)

Supposons que \mathbf{R} (h3)

Montrons ($\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vee (\mathbf{P} \wedge \mathbf{R})$ (10)

($\vee Id$)

Montrons $\mathbf{P} \wedge \mathbf{R}$ (11)

($\wedge I$)

Montrons \mathbf{P} (12)

($\wedge Eg$)

Montrons $\mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$ (13)

d'après (h1)

Montrons \mathbf{R} (14)

d'après (h3)

Supposons que ($\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vee (\mathbf{P} \wedge \mathbf{R})$ (h4)

Montrons $\mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$ (15)

($\vee E$)

Montrons ($\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$) \vee ($\mathbf{P} \wedge \mathbf{R}$) (16)

d'après (h4)

Supposons que $\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$ (h5)

Montrons $\mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$ (17)

($\wedge I$)

Montrons \mathbf{P} (18)

($\wedge Eg$)

Montrons $\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$ (19)

d'après (h5)

Montrons $\mathbf{Q} \vee \mathbf{R}$ (20)

($\vee Ig$)

Montrons \mathbf{Q} (21)

($\wedge Ed$)

Montrons $\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$ (22)

d'après (h5)

Supposons que $\mathbf{P} \wedge \mathbf{R}$ (h6)

Montrons $\mathbf{P} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$ (23)

($\wedge I$)

Montrons \mathbf{P} (24)

($\wedge Eg$)

Montrons $\mathbf{P} \wedge \mathbf{R}$ (25)

d'après (h6)

Montrons $\mathbf{Q} \vee \mathbf{R}$ (26)

($\vee Id$)

Montrons \mathbf{R} (27)

($\wedge Ed$)

Montrons $\mathbf{P} \wedge \mathbf{R}$ (28)

d'après (h6)