

Examen

Représentations et Méthodes Numériques

18 janvier 2021

Durée : 1h30. SANS DOCUMENT.

Tout objet connecté doit être éteint et rangé.

Les vraies calculatrices non connectées sont autorisées.

Exercice 1 – Représentations - 6 points

1. (1 point) Quel est le codage de $A23D_{[16]}$ en base 10 ?

2. (1 point) Quel est le codage de $7534_{[10]}$ en base 16 ?

3. (1 point) Écrire une fonction pgcd en C qui calcule qui retourne le PGCD de deux entiers a et b non signés sur 16 bits en utilisant uniquement la soustraction comme opérateur algébrique.

4. (1 point) Quel est le codage de $1 + 2^{-24} + 2^{-25}$ en simple précision en arrondi au plus près (sans espace) ?

5. (2 points) Récrire l'expression suivante pour éviter une soustraction catastrophique : $\sqrt{1 + x} - 1$.

Exercice 2 – Algèbre linéaire - 8 points

1. (2 points) Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$. On note C la matrice définie par blocs

$$C = \begin{pmatrix} I & A & 0 \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

où I est la matrice identité de taille n . Montrer que C est inversible et donner son inverse.

2. (4 points) Soit la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. La suite vérifie $u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n = (-1)^{n+1}$ donc l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}$ est $(-1)^{n+1} \begin{pmatrix} -u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & -u_{n+2} \end{pmatrix}$. On veut calculer l'inverse des matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 21 & 13 \\ 13 & 8 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 144 & 89 \\ 89 & 55 \end{pmatrix}$ en utilisant l'algorithme de Gauß-Jordan en place avec une arithmétique flottante en base 10 avec 5 chiffres de mantisse et un arrondi vers 0. Normalement $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 13 \\ 13 & -21 \end{pmatrix}$ et $A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -55 & 89 \\ 89 & -144 \end{pmatrix}$.

Que devient la matrice A_1 après réduction de la première colonne ?

Même question pour A_2 .

3. (2 point) Calculer la décomposition LU de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 – Polynômes - 6 points

On veut calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$ avec les valeurs $y_0 = 4$, $y_1 = 4$ et $y_2 = 8$.

1. **(1,5 point)** Quel est le système linéaire associé à ce problème ?

2. **(3 points)** Calculer la base de Lagrange L_0, L_1, L_2 associée aux points x_0, x_1, x_2 sous forme développée.

3. **(1,5 points)** Quel est alors le polynôme interpolateur de Lagrange aux points donnés ?