

23 LOIS DE DE MORGAN 1/4

Quantificateurs

quel que soit le prédicat F,

$$(\neg(\exists x, F(x)) \Leftrightarrow (\forall x, \neg(F(x))))$$

Montrons $\neg(\exists x, F(x)) \Leftrightarrow (\forall x, \neg(F(x)))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $\neg(\exists x, F(x))$ (h1)

Montrons $\forall x, \neg(F(x))$ (2)

($\forall I$)

Soit l'élément a

Montrons $\neg(F(a))$ (3)

($\neg I$)

Supposons que $F(a)$ (h2)

Montrons \perp (4)

($\neg E$)

Montrons $\exists x, F(x)$ (5)

($\exists I$)

Montrons $F(a)$ (6)

d'après (h2)

Montrons $\neg(\exists x, F(x))$ (7)

d'après (h1)

Supposons que $\forall x, \neg(F(x))$ (h3)

Montrons $\neg(\exists x, F(x))$ (8)

($\neg I$)

Supposons que $\exists x, F(x)$ (h4)

Montrons \perp (9)

($\exists E$)

Montrons $\exists x, F(x)$ (10)

d'après (h4)

Soit l'élément a

Supposons que $F(a)$ (h5)

Montrons \perp (11)

($\neg E$)

Montrons $F(a)$ (12)

d'après (h5)

Montrons $\neg(F(a))$ (13)

$(\forall E)$

Montrons $\forall x, \neg (\mathbf{F} (x))$ (14)

d'après (h3)