Numéro de la place :

Examen LU2IN003

Vendredi 19 mai 2023, 2 heures
Aucun document autorisé

Exercice 1 : Calcul du saut (10 points)
Dans cet exercice, on considère un tableau tab de n entiers non vide ($n > 0$). Un **saut** est un couple d'entiers (i, j) avec $0 \leq i \leq j < n$ et la **valeur** associée est $tab[j] - tab[i]$. On à calculer pour un tableau tab non vide, la valeur maximale $\mathcal{S}(tab)$ d'un saut.

1. On note dans cette question $tab_1 = (3, 5, 1, 2, 8, 3)$.
   (a) Quelle sont les valeurs des sauts $(2, 5)$ et $(1, 3)$ pour le tableau tab_1 ? Justifiez votre réponse ;
   (b) Quelle est la valeur $\mathcal{S}(tab_1)$? Justifiez votre réponse.

2. Soient max et min les valeurs maximales et minimales stockées dans le tableau tab.
   (a) Démontrez que $\mathcal{S}(tab) \geq 0$;
   (b) Démontrez que $\mathcal{S}(tab) \leq max - min$;
   (c) Est-ce que l'égalité $\mathcal{S}(tab) = max - min$ est toujours vérifiée ? Justifiez votre réponse.

3. On considère la suite d'ensembles de couples d'entiers définie par $S_{-1} = \{(0,0)\}$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $S_i = \{(i,j), j \in \{i, \ldots, n-1\}\}$.
   (a) Donnez les ensembles S_i pour un tableau de taille $n = 6$ et $i \in \{0, \ldots, 5\}$;
   (b) Démontrez que dans le cas général, $\bigcup_{i=0}^{n-1} S_i$ est l'ensemble de tous les sauts d'un tableau *tab* de taille n.

4. On considère la fonction itérative `indiceMax(tab)` pour *tab* un tableau de n entiers donné par l'Algorithme 1. L'instruction `for j in range(1,len(tab))` consiste à prendre les valeurs de j dans l'ordre $(1, 2, \ldots, n-1)$.

```
def indiceMax(tab):
        jstar=0
        for j in range(1,len(tab)):
                if tab[j]>tab[jstar]:
                        jstar=j
        return jstar
```

Algorithme 1 : Définition de la fonction itérative `indiceMax`.

   (a) Démontrez que `indiceMax(tab)` se termine ;
   (b) Que retourne cette fonction ? Exprimez un invariant de boucle.
   (c) Quel est le nombre de comparaisons effectuées par l'appel `indiceMax(tab)` pour un tableau de taille n. Justifiez votre réponse.

(d) En déduire la complexité de cette fonction. Justifiez votre réponse.

On considère maintenant la fonction itérative `sautMax` définie par l'Algorithme 2. On rappelle que tab est un tableau de n entiers non vide ($n \geq 1$).

L'instruction `for i in range(0,len(tab))` consiste à prendre les valeurs de i dans l'ordre $(0, 1, \ldots, n-1)$. L'instruction `(resi,resj)=(i,jmax)` affecte la valeur de i à $resi$ et celle de $jmax$ à $resj$. La fonction retourne les deux valeurs $resi$ et $resj$.

Enfin, pour deux entiers i et j tels que $0 \leq i \leq j \leq n$, la notation Python `tab[i:j]` désigne le sous-tableau $tab[i \ldots j-1]$ de tab. Par extension, `tab[i:]` correspond à $tab[i \ldots n-1]$ et `tab[:j]` à $tab[0 \ldots j-1]$.

```python
def sautMax(tab):
    n=len(tab)
    resi=0;resj=0
    for i in range(0,len(tab)):
        jmax=i+indiceMax(tab[i:])
        if (tab[jmax]-tab[i])>(tab[resj]-tab[resi]):
            (resi,resj)=(i,jmax)
    return (resi,resj)
```

Algorithme 2 : Définition de la fonction itérative `sautMax`.

5. Démontrez la terminaison de la fonction `sautMax`.

6. On définie les suites d'entiers suivantes :
   — Pour tout $i^\star \in \{-1, 0, \dots, n-1\}$, $resi_{i^\star}$ et $resj_{i^\star}$ vérifient $resi_{-1} = resj_{-1} = 0$ et pour $i^\star \geq 0$, $resi_{i^\star}$ et $resj_{i^\star}$ sont les valeurs respectives des variables $resi$ et $resj$ à la fin de l'itération $i = i^\star$;
   — Pour tout $i^\star \in \{0, \dots n-1\}$, $jmaxx_{i^\star}$ désigne la valeur de la variable $jmax$ à la fin de l'itération $i = i^\star$.
   (a) Donnez les valeurs des suites $resi_{i^\star}$, $resj_{i^\star}$ et $jmax_{i^\star}$ pour $tab_2 = (4, 3, 5, 7, 1, 6)$.
   (b) Démontrez dans le cas général que, pour tout $i^\star \in \{0, \dots, n-1\}$, le couple $(i^\star, jmax_{i^\star}) \in S_{i^\star}$ et est un saut de valeur maximale dans $S_{i^\star}$ (la suite des ensembles $S_{i^\star}$ a été définie dans la question 3).

7. Pour tout $i^\star \in \{-1, 0, \ldots, n-1\}$, on considère l'invariant de boucle $\mathcal{P}(i^\star)$: le couple $(resi_{i^\star}, resj_{i^\star})$ est un saut de valeur maximale dans $\bigcup_{i=-1}^{i^\star} S_i$.
   (a) Démontrez par récurrence que pour tout $i^\star \in \{-1, 0, \ldots n-1\}$, $\mathcal{P}(i^\star)$ est vérifiée ;
   (b) En déduire la validité de la fonction `sautMax`.

8. On souhaite maintenant évaluer la complexité de la fonction `sautMax`.
   (a) Pour $i^\star \in \{0, \ldots, n-1\}$, quel est le nombre de comparaisons $c_{i^\star}$ effectuées par l'itération $i = i^\star$? Justifiez votre réponse.
   (b) Quel est le nombre de comparaisons totales effectuées ? Justifiez votre réponse.
   (c) En déduire la complexité de la fonction `sautMax`.

Exercice 2 : Diamètre, rayon et sommets centraux d'un graphe (6 points)

Dans tout cet exercice, on ne considère que des graphes non-orientés connexes.

1. Soit G_1 le graphe défini par la matrice sommet-sommet suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Dessinez le graphe G_1.

   (b) Donnez une représentation de G_1 par liste d'adjacence.

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. On rappelle que la distance $d(u, v)$ entre deux sommets u et v est le nombre d'arêtes d'une plus courte chaîne entre u et v.

On définit l'**excentricité** $\varepsilon(u)$ d'un sommet u de G comme la distance de u au sommet $v \in V$ le plus éloigné de u. Plus formellement, $\varepsilon(u) = \max_{v \in V} d(u, v)$.

Le **diamètre** $\delta(G)$ de G est l'excentricité maximum d'un sommet. Plus formellement, $\delta(G) = \max_{u \in V} \varepsilon(u)$. Deux sommets à distance $\delta(G)$ l'un de l'autre sont dits **diamétralement opposés**.

À l'inverse, un **sommet central** est un sommet d'excentricité minimum. L'excentricité d'un sommet central est appelée le **rayon** $r(G)$ du graphe. Ainsi, $r(G) = \min_{u \in V} \varepsilon(u)$.

2. Cette question porte à nouveau sur le graphe G_1 de la question 1.

   (a) Donnez une plus courte chaîne entre les sommets 1 et 5. À quelle distance sont-ils ?

   (b) Quel est le sommet le plus loin de 2 ? Quelle est l'excentricité de 2 ?

   (c) Quel est le diamètre de G_1 ? Donnez deux sommets diamétralement opposés.

   (d) Quel est le rayon de G_1. Donnez un sommet central. Est-il unique ?

3. (a) Quel parcours pouvez-vous utilisez pour connaître l'excentricité d'un sommet u ? Justifiez.

   (b) Donnez une méthode simple pour calculer le rayon d'un graphe. Donnez sa complexité en fonction de la complexité $c(n, m)$ du parcours que vous avez choisi à la question précédente.

4. (a) Prouver que le diamètre d'un graphe est toujours inférieur ou égal au double de son rayon.
   (b) Donnez un graphe dont le diamètre est égal au double du rayon.
   (c) Le diamètre d'un graphe peut-il être égal à son rayon ? Justifiez.

Exercice 3 : QCM (4 points) Un seul choix est possible. Une bonne réponse = $\frac{1}{3}$ points. Une mauvaise réponse = -$\frac{1}{6}$ points. Si la note globale du QCM est négative, on la considère égale à 0.

1. Pour démontrer $a \Rightarrow b$ par en utilisant la contraposée, il faut :
   - ◯ démontrer que si a est faux, alors b est faux ;
   - ◯ démontrer que si b est faux, alors a est faux ;
   - ◯ démontrer que l'on si b est faux, alors a est vraie ;
   - ◯ Aucun des choix précédents.
2. Une seule de ces affirmations est vraie, laquelle ?
   - ◯ Pour un tableau de n entiers trié en ordre croissant, la complexité du tri par insertion est en $\Theta(n)$;
   - ◯ Pour un tableau de n entiers trié en ordre croissant, la complexité du tri à bulles est en $\Theta(n)$;
   - ◯ Pour un tableau de n entiers trié en ordre croissant, la complexité du tri par sélection est en $\Theta(n)$;
   - ◯ Les trois affirmations précédentes sont fausses.
3. Soit T un arbre binaire ayant 5 noeuds à deux fils et 3 noeuds à un fils. Une seule de ces affirmations est vraie, laquelle ?
   - ◯ La taille de T est 11 ;
   - ◯ La taille de T est 8 ;
   - ◯ La taille de T est 14 ;
   - ◯ Plusieurs valeurs sont possibles pour la taille de T.
4. L'ABR obtenu par insertions successives des clefs 7, 3, 10, 2, 9 et 5 a pour parcours préfixe
   - ◯ $(7, 2, 5, 3, 9, 10)$;
   - ◯ $(7, 3, 2, 5, 9, 10)$;
   - ◯ $(7, 3, 2, 5, 10, 9)$;
   - ◯ Aucune des réponses précédentes.
5. On considère l'ABR obtenu par insertions successives des clefs 10, 7, 15, 12, 9, 2, 18, et 11. Quel est le parcours préfixe de l'ABR obtenu quand on a supprimé la clef 15 en utilisant l'algorithme de suppression du cours ?
   - ◯ $(10, 7, 2, 9, 18, 11, 12)$;
   - ◯ $(10, 7, 2, 9, 12, 11, 18)$;
   - ◯ $(10, 7, 2, 9, 11, 12, 18)$;
   - ◯ Aucune des réponses précédentes.
6. La taille maximale d'un arbre binaire de hauteur h est égale à
   - ◯ $2^{h+1} - 1$;
   - ◯ $2 \times h + 1$;

- ◯ $2^h - 1$;
- ◯ Aucune des réponses précédentes.

7. On souhaite insérer la clefs 1 dans le tas $T = (9, 3, 5, 4, 8, 9, 6, 7, 10, 12)$.
   - ◯ Après l'insertion, on obtient le tas $(10, 1, 3, 4, 5, 10, 6, 7, 8, 9, 12)$;
   - ◯ Après l'insertion, on obtient le tas $(10, 1, 3, 4, 8, 5, 6, 7, 10, 12, 9)$;
   - ◯ C'est impossible car T n'est pas un tas ;
   - ◯ Aucune des réponses précédentes.
8. La suppression du minimum du tas $T = (10, 1, 2, 3, 5, 10, 4, 7, 17, 15, 18)$ donne le tas :
   - ◯ $(9, 2, 3, 5, 10, 15, 4, 7, 17, 18)$;
   - ◯ $(9, 2, 5, 3, 10, 15, 4, 7, 18, 17)$;
   - ◯ $(9, 2, 5, 3, 15, 10, 4, 7, 17, 18)$;
   - ◯ Aucune des réponses précédentes.
9. Soit $G = (V, E)$ un graphe de 75 arêtes. Soit n sont nombre de sommets. Une seule affirmation est vérifié, laquelle ?
   - ◯ Si $n \leq 75$, alors G est connexe ;
   - ◯ Si G est connexe, alors $n \leq 75$;
   - ◯ Si $n = 75$, alors G est un arbre ;
   - ◯ Les trois affirmations précédentes sont fausses.
10. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. G est un arbre si et seulement si une seule des affirmations suivantes est vérifiée, laquelle ?
    - ◯ G est acyclique ;
    - ◯ G est connexe et il existe une arête $e \in E$ telle que le graphe $G' = (V, E - \{e\})$ n'est plus connexe ;
    - ◯ G est connexe et pour toute arête $e \in E$, le graphe $G' = (V, E - \{e\})$ n'est plus connexe.
11. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté défini par $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et les arcs $E = \{(1, 3), (1, 5), (1, 6), (2, 6), (4, 2), (5, 6), (5, 7), (6, 4), (7, 3)\}$. Une seule affirmation est correcte, laquelle ?
    - ◯ $L = (1, 5, 3, 7, 6, 4, 2)$ est un parcours en profondeur ;
    - ◯ $L = (1, 5, 7, 3, 2, 6, 4)$ n'est pas un parcours en profondeur ;
    - ◯ $L = (1, 6, 4, 2, 3, 5, 7)$ est un parcours en profondeur ;
    - ◯ Les trois affirmations précédentes sont fausses.
12. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté défini dans la question précédente. On considère le parcours en profondeur $L = (1, 3, 5, 2, 6, 4, 7)$. Une seule affirmation est correcte, laquelle ?
    - ◯ $(2, 6)$ est un arc de liaison, $(7, 3)$ est un arc transverse et $(4, 2)$ est un arc arrière ;
    - ◯ $(1, 5)$ est un arc de liaison, $(5, 6)$ est un arc avant et $(7, 3)$ est un arc arrière ;
    - ◯ $(5, 7)$ est un arc de laison, $(1, 6)$ est un arc avant et $(5, 6)$ est un arc transverse ;
    - ◯ Les trois affirmations précédentes sont fausses.