

46 DISTRIBUTIVITÉ DE LA DISJONCTION 1/2

Connecteurs

Montrons que

quelles que soient les propositions P Q R ,
 $((P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)))$

Montrons ($\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R})$) $\Leftrightarrow ((\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{P} \vee \mathbf{R}))$ (1)

($\Leftrightarrow I$)

Supposons que $\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R})$ (h1)

Montrons ($\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{P} \vee \mathbf{R})$ (2)

($\vee E$)

Montrons $\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R})$ (3)

d'après (h1)

Supposons que \mathbf{P} (h2)

Montrons ($\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{P} \vee \mathbf{R})$ (4)

($\wedge I$)

Montrons $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$ (5)

($\vee Ig$)

Montrons \mathbf{P} (6)

d'après (h2)

Montrons $\mathbf{P} \vee \mathbf{R}$ (7)

($\vee Ig$)

Montrons \mathbf{P} (8)

d'après (h2)

Supposons que $\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R}$ (h3)

Montrons ($\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{P} \vee \mathbf{R})$ (9)

($\wedge I$)

Montrons $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$ (10)

($\vee Id$)

Montrons \mathbf{Q} (11)

($\wedge Eg$)

Montrons $\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R}$ (12)

d'après (h3)

Montrons $\mathbf{P} \vee \mathbf{R}$ (13)

($\vee Id$)

Montrons \mathbf{R} (14)

($\wedge Ed$)

Montrons $\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R}$ (15)

d'après (h3)

Supposons que ($\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{P} \vee \mathbf{R})$ (h4)

Montrons $\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R})$ (16)

($\vee E$)

Montrons $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$ (17)

($\wedge Eg$)

Montrons $(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{P} \vee \mathbf{R})$ (18)

d'après (h4)

Supposons que \mathbf{P} (h5)

Montrons $\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R})$ (19)

($\vee Ig$)

Montrons \mathbf{P} (20)

d'après (h5)

Supposons que \mathbf{Q} (h6)

Montrons $\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R})$ (21)

($\vee E$)

Montrons $\mathbf{P} \vee \mathbf{R}$ (22)

($\wedge Ed$)

Montrons $(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{P} \vee \mathbf{R})$ (23)

d'après (h4)

Supposons que \mathbf{P} (h7)

Montrons $\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R})$ (24)

($\vee Ig$)

Montrons \mathbf{P} (25)

d'après (h7)

Supposons que \mathbf{R} (h8)

Montrons $\mathbf{P} \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R})$ (26)

($\vee Id$)

Montrons $\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R}$ (27)

($\wedge I$)

Montrons \mathbf{Q} (28)

d'après (h6)

Montrons \mathbf{R} (29)

d'après (h8)