Année 2019–2020

LU2IN005 - 13 novembre 2019

Durée : 1h30 - Documents, calculettes et téléphones interdits

Inscrire votre numéro de groupe sur votre copie. La note (entre 0 et 60) est le minimum entre 60 et la somme des points obtenus (entre 0 et 66).

Exercice 1 (17 points= 2+5+2+2+2+3+1)

1. Donner tous les triplets de la relation ternaire $R \subseteq \mathbb{N}^3$ définie par :
   $(x, y, z) \in R$ si $x + y + z \leq 2$.

   $R = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,0,2),(0,2,0),(2,0,0),(0,1,1),(1,1,0),(1,0,1)\}$

2. On considère la relation binaire H définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $(x, y) \in H$ si $xy = 1$.
   Cette relation est-elle réflexive ? symétrique ? antisymétrique ? transitive ?
   Est-ce une fonction ?

   La relation H n'est pas réflexive car pour $x = 2$, on a $x.x = 4 \neq 1$ donc $(x, x) \notin H$.
   Elle est symétrique car si $(x, y) \in H$ on a $xy = yx = 1$ donc $(y, x) \in H$.
   Elle n'est pas antisymétrique car $(2, \frac{1}{2}) \in H$ et $(\frac{1}{2}, 2) \in H$ avec $2 \neq \frac{1}{2}$.
   Elle n'est pas transitive car $(2, \frac{1}{2}) \in H$ et $(\frac{1}{2}, 2) \in H$ mais $(2, 2) \notin H$.
   C'est une fonction car pour tout $x \neq 0$ il y a exactement un $y = \frac{1}{x}$ tel que $(x, y) \in H$.

3. Soit $f : E \to F$ une application. Donner les définitions de (a) f injective,
   (b) f surjective.

   cf. cours.

4. L'application $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $f(x, y) = xy$ est-elle injective ? surjective ?

   L'application f n'est pas injective car $f(2, 3) = f(1, 6) = 6$. Elle est surjective car pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n = f(1, n)$.

5. On rappelle que pour $f : E \to F$, une partie A de E et une partie B de F, on définit :
   $f(A) = \{y \in F \mid \text{ il existe } x \in A, y = f(x)\}$ et $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.
   (a) Montrer que pour toute partie A de E, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
   (b) Montrer que si f est injective, alors pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.
   (c) Pour $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{a, b\}$, $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$, $A = \{1\}$, donner $f(A)$ et $f^{-1}(f(A))$.

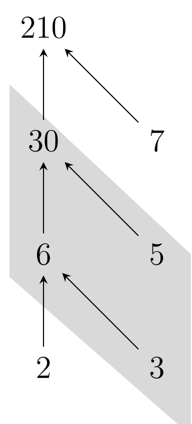
(a) Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$.
(b) Supposons f injective. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$, donc $f(x) \in f(A)$. On en déduit qu'il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$. Mais f étant injective, $x = x'$ donc $x \in A$.
(c) $f(A) = \{a\}$ et $f^{-1}(f(A)) = \{1, 2\}$ qui contient A strictement.

Exercice 2 **(17 points= 3+4+2+8)**

1. Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\preceq$.
   (a) Soit A une partie de E. Donner la définition d'un majorant de A dans E et la définition de la borne supérieure de A. Donner la définition d'un ordre bien fondé.
   (b) Démontrer que l'ordre $\preceq$ sur E est bien fondé si et seulement si toute partie non vide de E admet au moins un élément minimal.

   cf. cours.

2. Soit le sous-ensemble $E = \{2, 3, 5, 6, 7, 30, 210\}$ de $\mathbb{N}$ ordonné par la relation « divise ».
   (a) Représenter la relation d'ordre par un graphe (sans les arcs de réflexivité et de transitivité).
   (b) Pour le sous-ensemble $A = \{3, 5, 6, 30\}$ de E, donner l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants. Donner, lorsqu'ils existent, la borne inférieure, la borne supérieure, le plus petit élément et le plus grand élément, les éléments minimaux et les éléments maximaux.



Maj$(A) = \{30, 210\}$
borne supérieure : 30
plus grand élément : 30
éléments maximaux : 30
Min$(A) = \emptyset$
pas de borne inférieure
pas de plus petit élément
élément minimaux : 3 et 5.

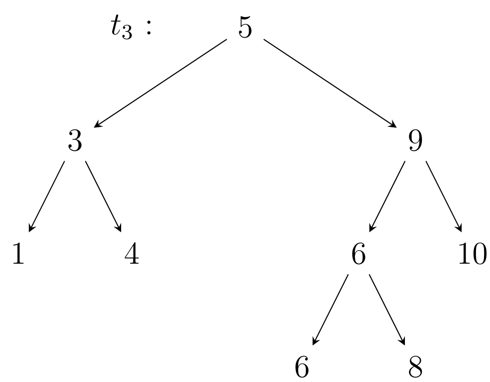
Exercice 3 (18 points = 3+1+3+2+3+6)

1. On considère la suite définie par $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$, et $u_0 = 2$, $u_1 = 3$. Montrer que $u_n = 2^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Il faut une récurrence complète. La propriété est vraie pour $n = 0$ car $2^0+1 = 2 = u_0$ et pour $n = 1$ car $2^1 + 1 = 3 = u_1$. Supposons $u_k = 2^k + 1$ pour tout $k < n$. Alors $u_{n-1} = 2^{n-1} + 1$ et $u_{n-2} = 2^{n-2} + 1$. Donc $u_n = 3(2^{n-1} + 1) - 2(2^{n-2} + 1) = 2^n + 2^{n-1} + 3 - 2^{n-1} - 2 = 2^n + 1$ et la propriété est vraie pour n.

2. On considère l'ensemble AB des arbres binaires sur l'alphabet $\mathbb{N}$, défini inductivement par :
   $$\begin{cases} (B_{ab}): & \emptyset \in AB, \\ (I_{ab}): & \text{Si } g \text{ et } d \text{ appartiennent à } AB \text{ et } n \in \mathbb{N}, \text{ alors } t = (n, g, d) \text{ appartient à } AB. \end{cases}$$
   Dans toute la suite, on notera simplement n pour l'arbre binaire $(n, \emptyset, \emptyset)$.
   Le parcours infixe est l'application $Inf\colon AB \to \mathbb{N}^*$ (les mots sur l'alphabet $\mathbb{N}$) définie inductivement par :
   $$\begin{cases} (B_{Inf}): & Inf(\emptyset) = \varepsilon \\ (I_{Inf}): & \text{Si } t = (n, g, d) \text{ appartient à } AB, \text{ alors } Inf(t) = Inf(g).n.Inf(d). \end{cases}$$
   Soient les arbres $t_1 = 3$, $t_2 = (2, 5, 7)$ et $t_3 = (5, (3, 1, 4), (9, (6, 6, 8), 10))$.
   (a) Dessiner t_3. (b) Donner $Inf(t_1)$, $Inf(t_2)$ et $Inf(t_3)$.
   (c) L'application Inf est-elle injective ? surjective ?

   t_3 :



   $Inf(t_1) = 3$
   $Inf(t_2) = 5.2.7$
   $Inf(t_3) = 1.3.4.5.6.6.8.9.10$

   L'application Inf n'est pas injective car 5.2.7 peut aussi être obtenu par l'arbre $(7, (2, 5, \emptyset), \emptyset)$.
   Elle est surjective car toute suite d'entiers peut être obtenue par le parcours infixe d'un arbre dont tous les sous-arbres droits sont vides. Montrons la surjectivité par récurrence sur la longueur du mot de $\mathbb{N}^*$.
   Le mot ε est obtenue par le parcours infixe de l'arbre vide d'après (B_{Inf}). Supposons la propriété vraie pour un mot de longueur n et soit w un mot de longueur $n + 1$. Alors $w = u.k$ où u est de longueur n. Soit t l'arbre tel que $Inf(t) = u$ d'après l'hypothèse de récurrence. On construit l'arbre t' pour w en considérant k comme

la racine et t comme le sous-arbre gauche, le sous-arbre droit étant vide. On a alors bien d'après (I_{Inf}) : $Inf(t') = Inf(t).k.\varepsilon = u.k = w$.

3. On définit inductivement l'application $N : AB \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ par :
$$\begin{cases} (B_N): & N(\emptyset) = \emptyset, \\ (I_N): & \text{Si } g \text{ et } d \text{ appartiennent à } AB \text{ et } n \in \mathbb{N}, \text{ alors } N((n,g,d)) = N(g) \cup N(d) \cup \{n\}. \end{cases}$$

et le sous-ensemble ABR de AB par :
$$\begin{cases} (B_{abr}): & \emptyset \in ABR, \\ (I_{abr}): & \text{Si } g \text{ et } d \text{ appartiennent à } ABR \text{ et } n \in \mathbb{N}, \text{ avec pour tout } k \in N(g),\ k \leq n \\ & \quad \text{et pour tout } k \in N(d), k > n, \text{ alors } t = (n,g,d) \text{ appartient à } ABR. \end{cases}$$
(a) Donner $N(t_1)$, $N(t_2)$ et $N(t_3)$ et dire pour chacun des 3 arbres s'il est dans ABR.

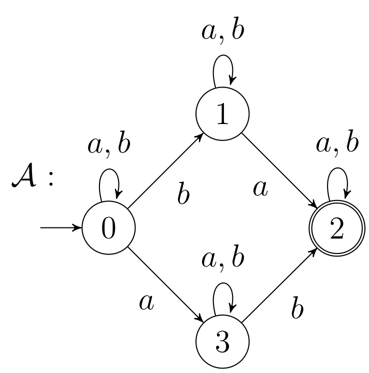
$N(t_1) = \{3\}$, $N(t_2) = \{2,5,7\}$, $N(t_3) = \{1,3,4,5,6,8,9,10\}$.
Les arbres t_1 et t_3 sont dans ABR mais pas t_2.

(b) Montrer par induction que pour tout $t \in ABR$, si $Inf(t) = k_1k_2\ldots k_p$, alors la suite $(k_i)_{1 \leq i \leq p}$ est croissante (au sens large). Par convention, on suppose que la suite est égale à ε si $p = 0$, cette suite étant croissante.

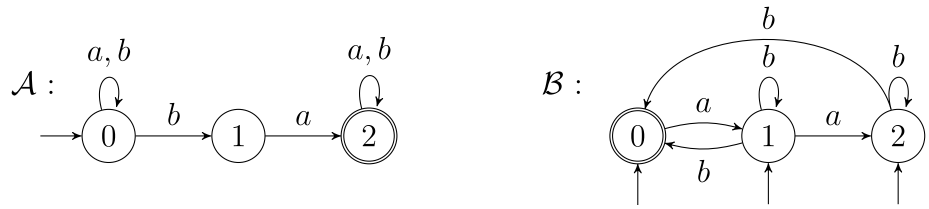
Pour l'arbre vide, la convention permet de dire que la suite vide est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que la propriété est satisfaite pour les arbres g et d de ABR, ce qui signifie que les deux suites $Inf(g) = k_1k_2\ldots k_p$ et $Inf(d) = h_1h_2\ldots h_r$ sont croissantes. Pour l'arbre $t = (n,g,d)$, d'après (I_{abr}), tous les k_i sont inférieurs ou égaux à n et tous les h_j sont strictement supérieurs à n. Ainsi, $k_p \leq n < h_1$ et pour $Inf(t) = Inf(g).n.Inf(d)$, on obtient bien une suite croissante d'entiers.

Exercice 4 (14 points = 2+3+4+5) On se place sur l'alpabet $A = \{a,b\}$.

1. Dessiner un automate *non déterministe* acceptant les mots contenant au moins un a et au moins un b.



2. On considère les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ci-dessous.



(a) Donner informellement la description du langage $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est l'ensemble des mots contenant le facteur ba.

(b) Les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont-ils déterministes ? complets ? Justifier les réponses.

L'automate $\mathcal{A}$ n'est ni déterministe (transitions $0 \xrightarrow{b} 0$ et $0 \xrightarrow{b} 1$) ni complet (pas de transition d'étiquette b partant de 1).
L'automate $\mathcal{B}$ n'est ni déterministe (transitions $2 \xrightarrow{b} 2$ et $2 \xrightarrow{b} 0$) ni complet (pas de transition d'étiquette b partant de 0).

(c) Déterminiser $\mathcal{B}$.