TD1 : Langages logiques

Les exercices annotés par le symbole ⋆ correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

Exercice 1.1 (Formalisation)

1. (Quantificateurs) Préciser à l'aide d'un quantificateur le sens du mot « un » dans les phrases suivantes et les formaliser dans le langage de la logique des prédicats.

   (1) *Mark suit un cours.*
   (2) *Un logicien a été champion du monde de natation.*
   (3) *Un entier naturel est pair ou impair.*
   (4) *Un enseignant-chercheur a toujours un nouveau sujet à étudier.*
   (5) *Un étudiant a besoin d'avoir un idéal.*

2. (Langage naturel) Formaliser les énoncés suivants dans le langage de la logique des prédicats.

   (1) *Tous les étudiants sont doués de raison.*
   (2) *Seuls les êtres humains sont doués de raison.*
   (3) *Aucun éléphant n'est doué de raison.*
   (4) *Tous les animaux, sauf les chiens, sont gentils avec les logiciens.*
   (5) *Chacun cherche son éléphant.*
   (6) *Chaque individu aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde.*

3. (Enoncé mathématique)
   (a) On considère l'énoncé : « *Tout nombre entier naturel x a un successeur qui est inférieur ou égal à tout entier strictement supérieur à x.* » Formaliser cet énoncé par une formule logique en utilisant les prédicats suivants :

$\text{entier}(x)$	« *x est un entier naturel* »
$\text{successeur}(x, y)$	« *x est successeur de y* »
$\inf(x, y)$	« *x est inférieur ou égal à y* »

   (b) On considère le symbole de prédicat p d'arité 2 tel que $p(x_1, x_2)$ signifie « *x_1 est un triangle équilatéral de hauteur x_2* ». Formaliser les deux énoncés :
   (F_1) « *il existe au plus un triangle équilatéral dont la hauteur est z* »
   (F_2) « *il existe un unique triangle équilatéral dont la hauteur est z* »
   où z est un symbole de variable. On pourra utiliser le prédicat $=$ d'arité 2 pour exprimer l'égalité.

Exercice 1.2 ((⋆) Variables libres, variables liées, clôture universelle)

1. On définit la formule $F = \forall y\,(p(f(g(x), y)) \wedge \forall x\,(q(g(z), x) \Rightarrow \exists z\, p(f(z, w))))$ à partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{w, x, y, z\}$.
   (a) Quels sont les symboles de fonction apparaissant dans cette formule ?
   (b) Quels sont les symboles de prédicat apparaissant dans cette formule ?
   (c) Quels sont les termes apparaissant en argument des symboles de prédicat de F ?
   (d) Déterminer l'ensemble $\text{Free}(F)$ des variables qui ont au moins une occurrence libre dans F.
   (e) Quelles sont les variables de $\text{Free}(F)$ qui admettent au moins une occurrence liée dans F ?
   (f) Déterminer une clôture universelle de la formule F.

2. A partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{x, y, z\}$ et $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ on définit la formule $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ suivante : $(\forall x((p(a, x) \wedge q(y, x)) \Rightarrow \exists x\, p(x, b))) \vee ((\exists y\, p(x, y)) \wedge q(x, z))$.
   (a) Dessiner l'arbre de syntaxe abstraite de la formule F.
   (b) Donner l'ensemble $\mathrm{Free}(F)$.
   (c) Indiquer, pour chacune des occurrences de x, si elle est quantifiée universellement, existentiellement, ou pas quantifiée.
   (d) Déterminer une clôture universelle de la formule F.
3. A partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{x, y, z\}$ et $\mathcal{F}_0 = \{a\}$ on définit les formules F_1 et $F_2 \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ suivantes $F_1 = \exists x(p(x, y) \wedge \forall x\, q(x)) \Rightarrow \exists y\, p(y, a)$ et $F_2 = \forall y(p(x, z) \vee q(y))$.
   (a) Donner les ensembles $\mathrm{Free}(F_1)$ et $\mathrm{Free}(F_2)$.
   (b) Soit la formule $F = \exists x(F_1 \vee F_2)$, donner l'ensemble $\mathrm{Free}(F)$.
   (c) Déterminer une clôture universelle de la formule F.
   (d) Renommer certains symboles de variable de F pour obtenir une formule F' logiquement équivalente à F et dans laquelle les quantificateurs portent sur des symboles de variable différents.
4. Soit la formule $G = p(a, g(h(x), b)) \wedge \forall x((\exists x \forall z\, p(x, f(b, y, z))) \vee \exists y\, q(x, h(y), z))$. Renommer certains symboles de variable de G pour obtenir une formule logiquement équivalente à G dans laquelle les quantificateurs portent sur des symboles de variable différents qui n'ont aucune occurrence libre dans la formule.
5. Soit F la formule $(\exists y\, p(y)) \Rightarrow (p(x) \vee (\forall z\, p(z)))$. Peut-on renommer certains symboles de variable de F pour obtenir une formule F' telle que :
   — F' est logiquement équivalente à F
   — le seul symbole de variable qui apparaît dans F' est le symbole x
   Si oui, donner la formule F', sinon justifier.

Exercice 1.3 (($\star$) Symboles d'une formule)
Soit la formule $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ où $X = \{x, x_1, x_2, x_3, z\}$ définie par :

$$(\forall x\, (s_1(s_2(x, x)) \wedge \exists x\, s_1(s_2(x, z)))) \wedge (s_3(s_4(x)) \wedge (\exists x\, s_1(s_2(x, z))))$$

1. Quels sont les symboles de fonction apparaissant dans F ? Donner l'arité de ces symboles.
2. Quels sont les symboles de prédicat apparaissant dans F ? Donner l'arité de ces symboles.
3. Déterminer l'ensemble $\mathrm{Free}(F)$.
4. Donner une clôture universelle de F.
5. On souhaite renommer certains symboles de variable pour obtenir une formule logiquement équivalente à F et dans laquelle les quantificateurs portent sur des symboles de variable différents. On propose la formule suivante :

$$\left(\forall x_1 \left(s_1 \left(s_2 \left(\square, \square\right)\right) \wedge \exists x_2\, s_1 \left(s_2 \left(\square, \square\right)\right)\right)\right) \wedge \left(s_3 \left(s_4 \left(\square\right)\right) \wedge \left(\exists x_3\, s_1 \left(s_2 \left(\square, \square\right)\right)\right)\right)$$

   Remplacer les $\square$ par les symboles de variable appropriés.

Exercice 1.4 (($\star$) Symboles d'une formule)

1. On considère les symboles s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 et s_6 appartenant à $X \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ à partir desquels on définit la formule $F = \forall s_1\,(s_2(s_3(s_1, s_4(s_5))) \Rightarrow s_6(s_4(s_1), s_5))$.
   (a) Quelles sont les formules atomiques apparaissant dans F ?
   (b) Déterminer à quel ensemble chacun des symboles s_1, s_2, s_3, s_4 et s_6 appartient (c-à-d déterminer s'il s'agit d'un symbole de variable de X, d'un symbole de fonction de $\mathcal{F}$ ou d'un symbole de prédicat de $\mathcal{P}$).
   (c) Que peut-on dire du symbole s_5 ? A quels ensembles peut-il appartenir ?
   (d) Quels sont les termes apparaissant en argument des symboles de prédicat de F ?
2. On considère les symboles s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 et s_6 appartenant à $X \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ à partir desquels on définit la formule $F = \exists s_3\,((s_1(s_2, s_3) \wedge s_4(s_5(s_2))) \Rightarrow \forall s_6\, s_1(s_5(s_6), s_3))$.
   (a) Quelles sont les formules atomiques apparaissant dans F ?
   (b) Déterminer à quels ensembles chacun des symboles s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 et s_6 peut appartenir (c-à-d déterminer s'il peut s'agir d'un symbole de variable de X, d'un symbole de constante de $\mathcal{F}_0$, d'un symbole de fonction de $\mathcal{F}$ ou d'un symbole de prédicat de $\mathcal{P}$).
3. On considère les symboles s_1, s_2, s_3, s_4 et s_5 appartenant à $X \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ à partir desquels on définit la formule $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ suivante : $F = (\exists s_1\, s_2(s_3(s_5, s_4, s_1))) \vee (\forall s_4\, s_2(s_3(s_1, s_4, s_5)))$
   (a) Quelles sont les formules atomiques apparaissant dans F ?
   (b) Déterminer à quels ensembles chacun des symboles s_1, s_2, s_3, s_4 et s_5 peut appartenir (c-à-d déterminer s'il peut s'agir d'un symbole de variable de X, d'un symbole de constante de $\mathcal{F}_0$, d'un symbole de fonction de $\mathcal{F}$ ou d'un symbole de prédicat de $\mathcal{P}$).
   (c) Si l'on suppose que s_5 est un symbole de variable, déterminer Free(F) et déterminer une clôture universelle de F.
   (d) Calculer $F[s_4 := s_1]$ (vous pouvez introduire des nouveaux symboles de variable si besoin).

Exercice 1.5 (($\star$) Occurrences libres et liées d'une variable, Clôture universelle)
A partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{x, y, z, w_1, w_2, w_3, \cdots\}$ on définit la formule $F = p(a, g(h(x), b)) \wedge \forall x(\exists x \forall z\, p(x, f(b, y, z)) \vee \exists y\, q(x, h(y), z))$.

1. Déterminer l'ensemble Free(F) des variables qui ont au moins une occurrence libre dans F.
2. Le symbole de variable x admet 3 occurrences dans la formule F, numérotées de 1 à 3 comme suit :
$$p(a, g(h(\underbrace{x}_{1}), b)) \wedge \forall x(\exists x \forall z\, p(\underbrace{x}_{2}, f(b, y, z)) \vee \exists y\, q(\underbrace{x}_{3}, h(y), z))$$
   Pour chacune de ces occurrences, déterminer si elle correspond à une occurrence libre de x, à une occurrence quantifiée universellement ($\forall x$) de x ou bien à une occurrence quantifiée existentiellement ($\exists x$) de x.
3. Déterminer une clôture universelle de la formule F.
4. Proposer une formule logique F' ayant la même signification que F, telle que Free(F') $\cap$ Bound(F') $= \emptyset$ et dans laquelle chaque symbole de variable est dans la portée d'au plus un quantificateur.

Exercice 1.6 (($\star$) Construction de formules)

1. Soit $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ la formule représentée par :

$$\left(\forall y \square \left(\square, \square \left(\square, \square\right)\right)\right) \Rightarrow \left(\left(\square\square \exists \square\square \left(\square \left(\square, \square\right)\right)\right) \vee \square \left(\square, \square\right)\right)$$

où chaque case peut contenir un unique symbole : soit un quantificateur, soit un symbole de l'ensemble $X = \{x, y, z\}$, soit un symbole de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_0 = \{k\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{f\}$, soit un symbole de l'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{P}_1 = \{p\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{q\}$. On souhaite que F vérifie les contraintes suivantes :
— x admet uniquement deux occurrences libres et une occurrence liée par le quantificateur $\forall$ dans F,
— y admet uniquement une occurrence liée par le quantificateur $\forall$ et une occurrence liée par le quantificateur $\exists$ dans F,
— z admet uniquement une occurrence libre dans F,

   (a) Remplir les cases de F pour que les contraintes soient respectées.

   (b) Dessiner l'arbre de syntaxe de la formule F et encadrer les occurrences libres de variable.

   (c) Proposer une clôture universelle F' de F puis renommer certains symboles de variable de F' pour obtenir une formule F'' logiquement équivalente à F' et dans laquelle les quantificateurs portent sur des symboles de variable différents.

2. Soit $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ la formule représentée par :

$$\left(\square\square \left(\square \left(\square, \square \left(\square\right)\right) \Rightarrow \square \left(\square\right)\right)\right) \vee \left(\square\square\square\square \left(\square \left(\square \left(\square, \square\right)\right) \Rightarrow \square \left(\square\right)\right)\right)$$

où chaque case peut contenir un unique symbole : soit un quantificateur, soit un symbole de l'ensemble $X = \{x, y, z\}$, soit un symbole de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{f\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{g\}$, soit un symbole de l'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{P}_1 = \{p\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{q\}$. On souhaite que F vérifie les contraintes suivantes :
— x admet uniquement une occurrence liée par le quantificateur $\forall$ dans F,
— y admet uniquement une occurrence liée par le quantificateur $\forall$ et une occurrence libre dans F,
— z admet uniquement une occurrence liée par le quantificateur $\exists$ dans F.
Compléter la formule F en respectant les contraintes.

3. On considère l'ensemble de symboles de variable $X = \{s_0\}$, l'ensemble de symboles de fonction $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_1 = \{s_1\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{s_2\}$, et l'ensemble de symboles de prédicat $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{P}_1 = \{s_3\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{s_4\}$. Définir une formule logique F syntaxiquement correcte en remplissant chaque case ci-dessous par un symbole de X, $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{P}$.

$$\forall \square \left(\square \left(\square \left(\square\right)\right) \wedge \square \left(\square \left(\square \left(\square\right), \square\right), \square\right)\right)$$

Exercice 1.7 (($\star$) Formules et substitutions)

1. Soit F la formule : $(\forall x\, s_1(s_2(x, y))) \wedge ((\exists y\, s_3(s_4(y), x)) \Rightarrow \forall z\, s_1(s_2(z, y)))$.

   (a) Dire pour chacun des symboles s_i s'il correspond à un prédicat ou une fonction, unaire ou binaire.

   (b) Calculer $F[y := h(x, z)]$.

2. Soit F la formule $(\forall y\, p(x, f(x, y))) \wedge (\exists x\, \exists y\, q(g(x), y, z))$.

(a) Déterminer l'ensemble Free(F).
(b) Donner une clôture universelle de F. Est-elle unique ? (justifier)
(c) Calculer $F[x := f(y, z)]$.

Exercice 1.8 (($\star$) Formules et substitutions)
A partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{x, y, z\}$ on définit les formules ci-dessous :

$$F_1 = \forall x\ (p(x, y, z) \Rightarrow \exists y\ (q(f(x, y), z) \vee \forall z\ (q(f(x, z), f(y, a)))))$$
$$F_2 = \forall x\ ((\exists z\, p(x, y, z)) \vee (\neg \forall y\ (q(f(x, y), z) \wedge q(f(x, z), f(y, a)))))$$

1. Quels sont les symboles de fonction et de constante apparaissant dans F_1 ? dans F_2 ?
2. Quels sont les symboles de prédicat apparaissant dans F_1 ? dans F_2 ?
3. Déterminer les ensembles Free(F_1) et Free(F_2) .
4. Déterminer une clôture universelle de F_1 et de F_2.
5. Calculer :

(a) $F_1[x := f(y, a)]$ et $F_2[x := f(y, a)]$ (b) $F_1[y := f(x, z)]$ et $F_2[y := f(x, z)]$
(c) $F_1[z := f(y, a)]$ et $F_2[z := f(y, a)]$

Exercice 1.9 (($\star$) Formules et substitutions)
Soit F la formule : $(\exists x\, (p(x, f(x)) \Rightarrow \forall x\, q(x))) \wedge (q(x) \vee \forall x\, p(f(x), x))$.

1. Dessiner l'arbre de syntaxe abstraite de la formule F.
2. On numérote les occurrences du symbole de variable x comme suit :

$$\Big(\exists x\ \Big(p(x_{(1)}, f(x_{(2)})) \Rightarrow \forall x\, q(x_{(3)})\Big)\Big) \wedge \Big(q(x_{(4)}) \vee \forall x\, p(f(x_{(5)}), x_{(6)})\Big)$$

Indiquer pour chacune des six occurrences de x s'il s'agit d'une occurrence quantifiée universellement, d'une occurrence quantifiée existentiellement ou d'une occurrence libre.

3. Calculer $F[x := h(z, w)]$. On note $F_1 = F[x := h(z, w)]$ cette formule.
4. Soit $F_2 = \forall z\, F_1$. Calculer $F_2[w := g(x, z, w)]$. On note $F_3 = F_2[w := g(x, z, w)]$ cette formule.
5. Déterminer Free(F_3).
6. Déterminer une clôture universelle de F_3.
7. Donner une formule logiquement équivalente à F_3 telle que chaque quantificateur porte sur un symbole de variable différent qui n'admet aucune occurrence libre dans la formule.

Exercice 1.10 (($\star$) Substitutions)

1. Soit F la formule $\exists y\, (((\forall y\, q(z, f(y, x))) \wedge p(y)) \Rightarrow q(f(x, y), z))$ (où x, y et z sont des symboles de variable). Calculer $F[x := g(x, y, z)]$ et $F[y := g(x, y, z)]$.
2. Soit F la formule $\forall x\, (q(x, y) \vee \exists x\, p(x, y, z))$ (où x, y et z sont des symboles de variable). Calculer $F[x := f(x, y, z)]$ et $F[y := f(x, y, z)]$.

Exercice 1.11 (($\star$) Substitutions)
Existe-t-il une substitution :

$$\Big[\underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{\textit{symbole de variable à compléter}}}}{\boxed{?}} := \underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{\textit{terme à compléter}}}}{\boxed{?}}\Big]$$

telle que :

1. $\forall x\, p(x,y,z) \left[\boxed{?} := \boxed{?}\right] = \forall x\, p(x,y,z)$
2. $\forall x\, p(x,y,z) \left[\boxed{?} := \boxed{?}\right] = \forall x\, p(x,f(z),z)$
3. $\forall x\, p(x,y,z) \left[\boxed{?} := \boxed{?}\right] = \forall x\, p(x,f(x),z)$
4. $\forall x\, p(x,y,z) \left[\boxed{?} := \boxed{?}\right] = \forall w\, p(w,f(x),z)$

Si cette substitution existe, compléter le symbole de variable et le terme, sinon expliquer brièvement pourquoi cette substitution n'existe pas.

Exercice 1.12 (($\star$) Clôture universelle, substitutions)
On considère les ensembles $X = \{x,y\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 = \{f\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \{p\}$. Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer s'il existe une formule $F \in \mathbb{F}(X,\mathcal{F},\mathcal{P})$ qui vérifie l'affirmation : donner la formule F si elle existe, sinon expliquer brièvement pourquoi cette formule n'existe pas.

1. une clôture universelle de F est la formule $\exists x\, p(x)$
2. une clôture universelle de F est la formule $\forall x\, p(x)$
3. une clôture universelle de F est la formule $\exists x\, p(f(x,y))$
4. une clôture universelle de F est la formule $\forall x\, p(f(x,y))$
5. $F[x := f(x,y)] = \exists z\, p(f(z,f(x,y)))$
6. $F[x := f(x,y)] = \exists y\, p(f(x,y))$
7. $F[x := f(x,y)] = \exists x\, p(f(x,y))$

Exercice 1.13 (($\star$) Formules et substitutions)

1. Soit F la formule $(\exists x\, p(x)) \Rightarrow (p(x) \vee (\forall x\, p(x)))$.
   (a) Déterminer l'ensemble $\mathrm{Free}(F)$.
   (b) Donner une formule F_1 logiquement équivalente à F qui utilise les symboles de variables x, y et z.
   (c) Soit $F_2 = F[x := f(x,y,z)]$. Calculer F_2.
   (d) Soit F_3 la formule $\forall y\, F_2$. Calculer $F_3[x := f(x,y,z)]$.
   (e) Donner deux formules (différentes) F' et F'' telles que $F = F'[z := x]$ et $F = F''[y := x]$.
   (f) Existe-t-il une formule F' telle que $F = F'[x := y]$? Si oui, donner F', sinon justifier.
2. Soit F la formule $(\forall x\, p(x,y)) \Rightarrow \exists y\, p(z,y)$.
   (a) Déterminer l'ensemble $\mathrm{Free}(F)$.
   (b) Donner toutes les clôtures universelles de F.
   (c) Existe-t-il une formule F_1 logiquement équivalente à F qui utilise les deux symboles de variables y et z et seulement ces deux symboles. Si oui, donner F_1, sinon justifier.
   (d) Existe-t-il une formule F_2 logiquement équivalente à F qui utilise les deux symboles de variables x et y et seulement ces deux symboles. Si oui, donner F_2, sinon justifier.
   (e) Existe-t-il une formule F_3 logiquement équivalente à F qui utilise les quatre symboles de variables w, x, y et z et seulement ces quatre symboles. Si oui, donner F_3, sinon justifier.
   (f) Calculer $F[x := f(x,y,z)]$ et $F[y := f(x,y,z)]$.

Exercice 1.14 (Expressions arithmétiques : définitions inductives)
On considère l'ensemble des expressions arithmétiques défini par l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ construit à partir d'un ensemble X de variables, et de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{F}_2 = \{+, -, \times, /\}$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.
2. Donner une définition inductive du nombre d'occurrences d'opérateurs $n_{\text{op}}(e)$, du nombre d'occurrences de constantes $n_{\text{cst}}(e)$ et du nombre d'occurrences de variables $n_{\text{var}}(e)$ dans une expression arithmétique e.
3. Particulariser le schéma de raisonnement par induction sur $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.
4. Montrer par induction que pour toute expression e on a :

$$n_{\text{op}}(e) = n_{\text{var}}(e) + n_{\text{cst}}(e) - 1$$

TD2 : Règles de déduction sur les connecteurs

Les exercices annotés par le symbole ⋆ correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

Exercice 2.1 (Règles de la Déduction Naturelle)
On considère la preuve de la figure 1. Quelles sont les règles de la déduction naturelle utilisées dans cette preuve ? Remplacer les « ? » par les noms de règle. Pouvez-vous trouver une preuve « plus simple » de la formule $(A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$?

⟨1⟩ montrons $(A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$
⟨2⟩ supposons $h_1 : A \wedge B$, montrons $C \Rightarrow A$
⟨3⟩ montrons $(A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$
⟨4⟩ montrons $(A \Rightarrow (C \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A))$
⟨5⟩ supposons $h_2 : A \Rightarrow (C \Rightarrow A)$, montrons $(A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$
⟨6⟩ supposons $h_3 : A \wedge B$, montrons $C \Rightarrow A$
⟨7⟩ montrons $A \Rightarrow (C \Rightarrow A)$
⟨7⟩ CQFD (?)
⟨8⟩ montrons A
⟨9⟩ montrons $A \wedge B$
⟨9⟩ CQFD (?)
⟨8⟩ CQFD (?)
⟨6⟩ CQFD (?)
⟨5⟩ CQFD (?)
⟨4⟩ CQFD (?)
⟨5⟩ montrons $A \Rightarrow (C \Rightarrow A)$
⟨6⟩ supposons $h_2 : A$, montrons $C \Rightarrow A$
⟨7⟩ supposons $h_3 : C$, montrons A
⟨7⟩ CQFD (?)
⟨6⟩ CQFD (?)
⟨5⟩ CQFD (?)
⟨3⟩ CQFD (?)
⟨4⟩ montrons $A \wedge B$
⟨4⟩ CQFD (?)
⟨2⟩ CQFD (?)
⟨1⟩ CQFD (?)

FIGURE 1 – Preuve de l'exercice 2.1

Exercice 2.2 (Connecteurs logiques)
Avec le système de la déduction naturelle, prouver les formules ci-dessous.

1. Implication et conjonction

$$
\begin{array}{lll}
 & (F_{1.1}) & (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B)) \\
 & (F_{1.2}) & (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \\
 & (F_{1.3}) & (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C))) \\
(\star) & (F_{1.4}) & (((A \wedge B) \Rightarrow C) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \\
 & (F_{1.5}) & (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C) \\
 & (F_{1.6}) & ((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))
\end{array}
$$

2. Implication, conjonction et disjonction

	$(F_{2.1})$	$A \Rightarrow (A \wedge (A \vee B))$
$(\star)$	$(F_{2.2})$	$(A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$
	$(F_{2.3})$	$((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \Rightarrow (A \wedge (B \vee C))$
	$(F_{2.4})$	$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$
	$(F_{2.5})$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \vee C) \Rightarrow (B \vee C))$
	$(F_{2.6})$	$(A \vee (B \vee C)) \Rightarrow ((A \vee B) \vee C)$
	$(F_{2.7})$	$((A \wedge B) \vee (A \vee B)) \Rightarrow (A \vee B)$
$(\star)$	$(F_{2.8})$	$((A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
$(\star)$	$(F_{2.9})$	$(A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B)$
$(\star)$	$(F_{2.10})$	$(A \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C))$

3. Implication, conjonction, disjonction et négation

$(\star)$	$(F_{3.1})$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
	$(F_{3.2})$	$(A \wedge \neg(A \wedge B)) \Rightarrow \neg B$
	$(F_{3.3})$	$(A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$
$(\star)$	$(F_{3.4})$	$(\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
$(\star)$	$(F_{3.5})$	$((A \vee \neg B) \wedge B) \Rightarrow A)$
$(\star)$	$(F_{3.6})$	$((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
$(\star)$	$(F_{3.7})$	$(\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
$(\star)$	$(F_{3.8})$	$(A \wedge B) \Rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
$(\star)$	$(F_{3.9})$	$A \Rightarrow ((\neg A \vee B) \Rightarrow B)$
$(\star)$	$(F_{3.10})$	$(B \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B))$
$(\star)$	$(F_{3.11})$	$((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$
$(\star)$	$(F_{3.12})$	$(A \vee \neg(B \vee C)) \Rightarrow (\neg C \vee A)$
$(\star)$	$(F_{3.13})$	$((A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)) \Rightarrow (A \vee B)$
$(\star)$	$(F_{3.14})$	$(A \vee (B \wedge C)) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \vee (A \Rightarrow C))$
$(\star)$	$(F_{3.15})$	$(A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(\neg A \vee B)$
$(\star)$	$(F_{3.16})$	$(\neg(A \wedge B) \wedge A) \Rightarrow \neg B$
$(\star)$	$(F_{3.17})$	$(((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \vee (A \wedge B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

4. Raisonnement par l'absurde, tiers exclu

	$(F_{4.1})$	$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
	$(F_{4.2})$	$A \vee (A \Rightarrow B)$
$(\star)$	$(F_{4.3})$	$(A \Rightarrow \neg A) \vee (\neg A \Rightarrow A)$
$(\star)$	$(F_{4.4})$	$(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$
	$(F_{4.5})$	$\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
	$(F_{4.6})$	$A \Rightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B))$
	$(F_{4.7})$	$((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
	$(F_{4.8})$	$((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee B)$
$(\star)$	$(F_{4.9})$	$((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
$(\star)$	$(F_{4.10})$	$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$
$(\star)$	$(F_{4.11})$	$(\neg A \Rightarrow (A \wedge \neg A)) \Rightarrow A$
$(\star)$	$(F_{4.12})$	$((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)) \Rightarrow (A \vee (B \Rightarrow C))$
$(\star)$	$(F_{4.13})$	$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$
$(\star)$	$(F_{4.14})$	$\neg(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$
$(\star)$	$(F_{4.15})$	$\neg(A \vee \neg B) \vee \neg(\neg A \wedge B)$
$(\star)$	$(F_{4.16})$	$\neg(A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$

Exercice 2.3 Anissa, Boris et Julie ont un examen de logique à passer. On suppose que : (A) l'un des trois au moins révisera pour l'examen ; (B) si Anissa ne révise pas, alors Boris non plus ; (C) si Anissa révise, alors Julie aussi. En utilisant le système de la déduction naturelle, prouver que Julie révisera son examen (on pourra utiliser la formule $(F_{4.1})$ de l'exercice 2.2 sans la redémontrer).

Exercice 2.4 Anna et Mathias sont accusés d'un crime et déclarent :

Anna : « *Mathias est coupable.* »
Mathias : « *Nous sommes tous les deux innocents.* »

1. On suppose que tous les deux ont menti. Peut-on déterminer qui est coupable, qui ne l'est pas ?
2. On suppose maintenant que les coupables mentent et que les innocents disent la vérité. Peut-on déterminer qui est coupable, qui ne l'est pas ?

Formaliser vos raisonnements en utilisant le système de la déduction naturelle (on pourra utiliser la formule $(F_{3.1})$ de l'exercice 2.2 sans la redémontrer).

Exercice 2.5 Anna et Julie sont interrogées au sujet d'un crime et déclarent :

Anna : « *Julie est coupable.* »
Julie : « *Si je suis coupable, alors Anna l'est aussi.* »

1. Montrer que l'une au moins des deux déclarations est vraie.
2. On suppose maintenant que les innocents disent la vérité et que les coupables mentent. Montrer qu'exactement l'une des deux est coupable.

Formaliser vos raisonnements en utilisant le système de la déduction naturelle.

TD3 : Interprétation des fonctions, des prédicats et des connecteurs

Les exercices annotés par le symbole $\star$ correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

Exercice 3.1 (($\star$) Interprétation des termes)

1. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonctions avec $\mathcal{F}_0 = \{k_1, k_2\}$, $\mathcal{F}_1 = \{f\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{g\}$.
   (a) Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \{k_1, k_2, f, g\}$.

   On définit une structure $\mathbf{M}$ dont le domaine est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels comme suit :

   $$\begin{array}{lll} k_1^{\mathbf{M}} = 3 & f^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & g^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ k_2^{\mathbf{M}} = 1 & f^{\mathbf{M}}(n) = n & g^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) = n_1 \times n_2 \end{array}$$

   (b) Calculer $[g(f(k_1), g(k_2, k_1))]^{\mathbf{M}}$.
   (c) Montrer par induction que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $[t]^{\mathbf{M}} = 3^n$.
2. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{r, s\}$.
   (a) Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \{a, b, r, s\}$.

   On définit une structure $\mathbf{M}$ dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs comme suit :

   $$\begin{array}{lll} a^{\mathbf{M}} = 2 & r^{\mathbf{M}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & s^{\mathbf{M}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ b^{\mathbf{M}} = 0 & r^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) = n_1 + n_2 & s^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) = n_1 - n_2 \end{array}$$

   (b) Calculer $[s(s(b, a), r(a, b))]^{\mathbf{M}}$.
   (c) Montrer par induction que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe un entier $z \in \mathbb{Z}$ tel que $[t]^{\mathbf{M}} = 2 \times z$.
3. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_2 = \{\otimes\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\odot\}$ et $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$.
   (a) Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.
   (b) On définit une structure $\mathbf{M}$ dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels comme suit :

   $$\begin{array}{lll} a^{\mathbf{M}} = 2 & \odot^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & \otimes^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ b^{\mathbf{M}} = 4 & \odot^{\mathbf{M}}(n) = 2 * n & \otimes^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) = n_1 * n_2 \end{array}$$

      i. Calculer $[\otimes(\odot(b), a)]^{\mathbf{M}}$
      ii. Montrer que pour tout $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[t]^{\mathbf{M}} = 2^n$.
4. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_0 = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{f\}$.
   (a) Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$.

(b) Soit la structure $\mathbf{M}$ de domaine $|\mathbf{M}| = \{0, 1, 2\}$ définie par :

$$\begin{array}{ll} a^{\mathbf{M}} = 0 & f^{\mathbf{M}} : \{0,1,2\} \to \{0,1,2\} \\ b^{\mathbf{M}} = 1 & f^{\mathbf{M}}(n) = (n+1) \bmod 3 \\ c^{\mathbf{M}} = 2 & \end{array}$$

où pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, m mod 3 désigne le reste de la division entière de m par 3. On rappelle qu'étant donnés deux entiers quelconques q_1 et q_2, $((q_1 \bmod 3) + q_2) \bmod 3 = (q_1 + q_2) \bmod 3$. Pour tout terme t, on note $f^0(t) = t$ et $f^{m+1}(t) = f(f^m(t))$.

i. Calculer $[f^3(b)]^{\mathbf{M}}$.

ii. Montrer (par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$) que pour tout symbole de constante $k \in \mathcal{F}_0$, $[f^m(k)]^{\mathbf{M}} = \left(m + k^{\mathbf{M}}\right) \bmod 3$.

iii. Montrer (par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$) que pour tout terme t, $[f^{m+1}(t)]^{\mathbf{M}} = [f^m(f(t))]^{\mathbf{M}}$.

iv. Montrer (par induction sur t) que pour tout terme t, $[f^m(t)]^{\mathbf{M}} = \left(m + [t]^{\mathbf{M}}\right) \bmod 3$ pour tout entier m.

5. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{a\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{f, g\}$.

(a) Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

(b) On définit une structure $\mathbf{M}$ dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels comme suit :

$$\begin{array}{lll} a^{\mathbf{M}} = (1,0) & f^{\mathbf{M}} : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) & g^{\mathbf{M}} : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\ & f^{\mathbf{M}}((n_1, n_2)) = (max(n_1, n_2), min(n_1, n_2)) & g^{\mathbf{M}}((n_1, n_2)) = (n_1 + n_2, n_1 \times n_2) \end{array}$$

i. Calculer $[g(f(g(a)))]^{\mathbf{M}}$.

ii. Montrer pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, $[t]^{\mathbf{M}} = (1, 0)$.

6. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ avec $\mathcal{F}_0 = \{a\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{f, g\}$ et $\mathbf{M}$ une structure telle que $|\mathbf{M}| = \mathbb{N}$, $a^{\mathbf{M}} = 0$, $f^{\mathbf{M}}(n) = n + 1$ et $g^{\mathbf{M}}(n) = n + 2$.

(a) Particulariser la définition de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour cet ensemble de symboles.

(b) Calculer $[f(g(f(f(a))))]^{\mathbf{M}}$.

(c) Montrer que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, $[f(g(t))]^{\mathbf{M}} = [g(f(t))]^{\mathbf{M}}$.

(d) Montrer que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[t]^{\mathbf{M}} = [f^n(a)]^{\mathbf{M}}$. (notation : $f^0(t) = t$ et $f^{n+1}(t) = f(f^n(t))$.)

(e) Montrer qu'il existe un terme t tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[t]^{\mathbf{M}} \neq [g^n(a)]^{\mathbf{M}}$.

(f) Proposer une structure $\mathbf{M}'$ telle que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, $[t]^{\mathbf{M}} = 7$.

Exercice 3.2 (($\star$) Entiers naturels et Termes)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{a\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{s\}$. Etant donné un entier naturel n, on note $s^n(a)$ le terme :

$$s^n(a) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ s(s^k(a)) & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$$

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
2. Montrer que $\mathcal{T}_0(\mathcal{F}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{s^n(a)\}$.
3. Pour chacune des structures $\mathbf{M}$ suivantes, exprimer $[s^n(a)]^{\mathbf{M}}$ en fonction de n.

   (a) $\mathbf{M}$ est la structure de domaine $\mathbb{N}$ telle que $a^{\mathbf{M}} = 0$ et $s^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction définie par $s^{\mathbf{M}}(n) = n + 1$.
   (b) $\mathbf{M}$ est la structure de domaine $\mathbb{N}$ telle que $a^{\mathbf{M}} = 1$ et $s^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction définie par $s^{\mathbf{M}}(n) = 2n$.
   (c) $\mathbf{M}$ est la structure de domaine $\mathbb{N}$ telle que $a^{\mathbf{M}} = 1$ et $s^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction définie par $s^{\mathbf{M}}(n) = n + 2$.

4. On définit une structure $\mathbf{M}$ dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels comme suit :

$$a^{\mathbf{M}} = (0, 1) \qquad \begin{array}{l} s^{\mathbf{M}} : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\ s^{\mathbf{M}}((n_1, n_2)) = (n_2, n_2 + n_1) \end{array}$$

   (a) Calculer $[s(s(a))]^{\mathbf{M}}$.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $[s^n(a)]^{\mathbf{M}} = (u_n, u_{n+1})$ où u_n est le n-ième nombre de Fibonacci défini par :

$$u_0 = 0 \qquad u_1 = 1 \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \ (n \geq 2)$$

5. On définit une structure $\mathbf{M}$ dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels comme suit :

$$a^{\mathbf{M}} = (1, 1) \qquad \begin{array}{l} s^{\mathbf{M}} : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\ s^{\mathbf{M}}((n_1, n_2)) = (n_1 + 1, n_1 \times n_2) \end{array}$$

   (a) Calculer $[s^3(a)]^{\mathbf{M}}$.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $[s^n(a)]^{\mathbf{M}} = (n + 1, n!)$.

Exercice 3.3 (($\star$) Entiers naturels et termes)
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_0 = \{Z\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{S\}$.

1. Soit $\oplus$ une fonction sur les paires de termes définie par :

$$\oplus : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \times \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \to \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \qquad \oplus\,(t_1, t_2) = \begin{cases} t_2 & \text{si } t_1 = Z \\ S(\oplus(t, t_2)) & \text{si } t_1 = S(t) \end{cases}$$

   Calculer $\oplus(S(S(Z)), S(Z))$.

2. Soit $\mathbf{M}$ une structure dont le domaine est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et telle que $Z^{\mathbf{M}} = 0$ et $S^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction définie par $S^{\mathbf{M}}(n) = n + 1$.
   (a) Calculer $[\oplus(S(S(Z)), S(Z))]^{\mathbf{M}}$.
   (b) Montrer par induction sur t_1, que pour tous termes t_1 et t_2, $[\oplus(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}} = [t_1]^{\mathbf{M}} + [t_2]^{\mathbf{M}}$.

Exercice 3.4 (($\star$) Mots et termes)
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{f_a, f_b\}$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ donné.
2. Soit la structure $\mathbf{M}_1$ dont le domaine $|\mathbf{M}_1| = \{A, B\}^\star$ est l'ensemble des mots de longueur finie constitués des lettres A et B, et définie par :

$$\begin{array}{lll} a^{\mathbf{M}_1} = A & f_a^{\mathbf{M}_1} : \{A, B\}^\star \to \{A, B\}^\star & f_b^{\mathbf{M}_1} : \{A, B\}^\star \to \{A, B\}^\star \\ b^{\mathbf{M}_1} = B & f_a^{\mathbf{M}_1}(w) = Aw & f_b^{\mathbf{M}_1}(w) = Bw \end{array}$$

   où Aw (resp. Bw) est le mot obtenu en ajoutant la lettre A (resp. la lettre B) au début du mot w.

(a) Calculer $[f_a(f_b(b))]^{\mathbf{M}_1}$.

(b) Pour quel terme t a-t-on $[t]^{\mathbf{M}_1} = ABBA$?

(c) Etant donné un mot $w \in \{A, B\}^\star$, on note $nb_A(w)$ (resp. $nb_B(w)$) le nombre d'occurrences de A (resp. de B) dans le mot w.

   i. Exprimer $nb_A(Aw)$ en fonction de $nb_A(w)$. En déduire une expression de $nb_A([f_a(t)]^{\mathbf{M}_1})$ en fonction de $nb_A([t]^{\mathbf{M}_1})$.

   ii. Exprimer $nb_B(Aw)$ en fonction de $nb_B(w)$. En déduire une expression de $nb_B([f_a(t)]^{\mathbf{M}_1})$ en fonction de $nb_B([t]^{\mathbf{M}_1})$.

   iii. Exprimer $nb_A(Bw)$ en fonction de $nb_A(w)$. En déduire une expression de $nb_A([f_b(t)]^{\mathbf{M}_1})$ en fonction de $nb_A([t]^{\mathbf{M}_1})$.

   iv. Exprimer $nb_B(Bw)$ en fonction de $nb_B(w)$. En déduire une expression de $nb_B([f_b(t)]^{\mathbf{M}_1})$ en fonction de $nb_B([t]^{\mathbf{M}_1})$.

3. Soit la structure $\mathbf{M}_2$ dont le domaine $|\mathbf{M}_2| = \mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs, et définie par :

$$\begin{array}{lll} a^{\mathbf{M}_2} = 1 & f_a^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & f_b^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ b^{\mathbf{M}_2} = -1 & f_a^{\mathbf{M}_2}(k) = k+1 & f_b^{\mathbf{M}_2}(k) = k-1 \end{array}$$

(a) Calculer $[f_a(f_b(b))]^{\mathbf{M}_2}$.

(b) Montrer (par induction sur t) que $[t]^{\mathbf{M}_2} = nb_A([t]^{\mathbf{M}_1}) - nb_B([t]^{\mathbf{M}_1})$.

Exercice 3.5 (Arbres binaires et termes)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{k\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{f\}$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
2. Si $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, à quoi correspond $[t]^{\mathbf{M}}$ lorsque :

   (a) $\mathbf{M}$ est la structure de domaine $\mathbb{N}$ telle que $k^{\mathbf{M}} = 1$ et $f^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction définie par $f^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) = n_1 + n_2$?

   (b) $\mathbf{M}$ est la structure de domaine $\mathbb{N}$ telle que $k^{\mathbf{M}} = 0$ et $f^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction définie par $f^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) = 1 + \max(n_1, n_2)$?

3. Définir une structure $\mathbf{M}$ telle que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, $[t]^{\mathbf{M}} = \tau(t)$ où $\tau(t)$ désigne la taille d'un terme définie inductivement par :

$$\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = k \\ 1 + \tau(t_1) + \tau(t_2) & \text{si } t = f(t_1, t_2) \end{cases}$$

Exercice 3.6 (($\star$) Relations et termes)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_1 = \{\odot\}$ et $\mathcal{F}_0$ contient une infinité de symboles de constante numérotés par des entiers :

$$\mathcal{F}_0 = \{k_0, k_1, k_2, \cdots\} = \bigcup_{i \geq 0} \{k_i\}$$

Etant donné un entier naturel n, on note $\odot^n(k_i)$ le terme :

$$\odot^n(k_i) = \begin{cases} k_i & \text{si } n = 0 \\ \odot(\odot^m(k_i)) & \text{si } n = m + 1 \end{cases}$$

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
2. Soit $\mathbf{M}_1$ la structure dont le domaine est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels définie par :
$$\begin{array}{ll} k_i^{\mathbf{M}_1} = (i, 0) & \odot^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \text{pour tout } k_i \in \mathcal{F}_0 & \odot^{\mathbf{M}_1}((n_1, n_2)) = (n_1, n_1 + n_2) \end{array}$$
   (a) Calculer $[\odot(\odot(\odot(k_5)))]^{\mathbf{M}_1}$.
   (b) Montrer par induction que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe deux entiers naturels i et n tels que $[t]^{\mathbf{M}_1} = (i, i \times n)$.
   (c) Montrer par récurrence que pour tous entiers naturels n et i il existe un terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ tel que $[t]^{\mathbf{M}_1} = (i, i \times n)$.
   (d) En déduire que $\left\{[t]^{\mathbf{M}_1} \mid t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})\right\} = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_2 \text{ est un multiple de } n_1\}$
3. Soit $\mathbf{M}_2$ la structure dont le domaine est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels définie par :
$$\begin{array}{ll} k_i^{\mathbf{M}_2} = (i, i) & \odot^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \text{pour tout } k_i \in \mathcal{F}_0 & \odot^{\mathbf{M}_2}((n_1, n_2)) = (n_1, n_2 + 1) \end{array}$$
   (a) Calculer $[\odot^5(k_3)]^{\mathbf{M}_2}$.
   (b) Montrer (par récurrence sur n) que $[\odot^n(k_m)]^{\mathbf{M}_2} = (m, m + n)$.
   (c) Soient n_1, n_2, n et m des entiers naturels tels que $[\odot^n(k_m)]^{\mathbf{M}_2} = (n_1, n_2)$. Exprimer n et m en fonction de n_1 et n_2. En déduire que si $n_1 \leq n_2$, alors il existe un terme t tel que $[t]^{\mathbf{M}_2} = (n_1, n_2)$.
   (d) Montrer par induction sur t, que si $[t]^{\mathbf{M}_2} = (n_1, n_2)$ alors $n_1 \leq n_2$.
   (e) En déduire que $\left\{[t]^{\mathbf{M}_2} \mid t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})\right\} = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_1 \leq n_2\}$.
4. Soit $\mathbf{M}_3$ la structure dont le domaine est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels définie par :
$$\begin{array}{ll} k_i^{\mathbf{M}_3} = (0, i) & \odot^{\mathbf{M}_3} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \text{pour tout } k_i \in \mathcal{F}_0 & \odot^{\mathbf{M}_3}((n_1, n_2)) = (n_1 + 1, n_2 + 1) \end{array}$$
   (a) Calculer $[\odot^3(k_5)]^{\mathbf{M}_3}$.
   (b) Montrer (par récurrence sur n) que $[\odot^n(k_m)]^{\mathbf{M}_3} = (n, m + n)$.
   (c) Soient n_1, n_2, n et m des entiers naturels tels que $[\odot^n(k_m)]^{\mathbf{M}_3} = (n_1, n_2)$. Exprimer n et m en fonction de n_1 et n_2. En déduire que $[\odot^n(k_m)]^{\mathbf{M}_3} = [\odot^m(k_n)]^{\mathbf{M}_2}$.
   (d) En déduire que $\left\{[t]^{\mathbf{M}_3} \mid t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})\right\} = \left\{[t]^{\mathbf{M}_2} \mid t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})\right\}$.

Exercice 3.7 (Evaluation d'expressions booléennes)
Soit $x \cdot \overline{y} + (\overline{y} + x)$ une expression booléenne. En utilisant la définition des opérateurs booléens calculer le résultat de l'évaluation de cette expression, puis le vérifier à l'aide d'un raisonnement équationnel lorsque :

1. $x = y = 1$
2. $x = 0$ et $y = 1$

Exercice 3.8 (Raisonnement équationnel)
A l'aide d'un raisonnement équationnel, montrer les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{llll} (1) & \overline{\overline{x} + y} + z \equiv \left(\overline{\overline{x}} + z\right) \cdot (\overline{y} + z) & (2) & (\overline{x} + y) \cdot \overline{\overline{\overline{y}} + \overline{x}} \equiv 0 \\ (3) & \overline{x \cdot \overline{y}} + \overline{\overline{x} + y} \equiv 1 & (4) & \overline{(x + \overline{y}) \cdot y} + x \equiv 1 \\ (5) & \overline{x + y} + (x \cdot y) \equiv (\overline{x} + y) \cdot (\overline{y} + x) & & \end{array}$$

Exercice 3.9 (Raisonnement équationnel, structures et interprétations)
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{a_1, a_2, s, o\}$ un ensemble de symboles de fonction contenant uniquement quatre constantes. Dans cet exercice, on considère uniquement des structures dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $|\mathbf{M}| = \{\text{rouge}, \text{vert}\}$. On note $\mathbf{E}$ l'ensemble de ces structures. Chaque structure $\mathbf{M}$ de $\mathbf{E}$ associe donc une couleur (soit vert, soit rouge) aux constantes de $\mathcal{F}_0$. Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \{\text{est\_rouge}\}$ l'ensemble contenant uniquement un prédicat unaire. On suppose que pour les structures $\mathbf{M}$ de $\mathbf{E}$, l'interprétation de ce symbole de prédicat est :

$$\text{est\_rouge}^{\mathbf{M}} = \{\text{rouge}\}$$

Etant données une constante $k \in \mathcal{F}_0$ et une structure $\mathbf{M} \in \mathbf{E}$, on note $x_k^{\mathbf{M}}$ la valeur booléenne de $\mathbf{I_M}(\text{est\_rouge}(k))$ et on a donc :

$$\begin{array}{lll}[\text{est\_rouge}(k)]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I_M}(\text{est\_rouge}(k)) = x_k^{\mathbf{M}} = 1 & \text{si et seulement si} & k^{\mathbf{M}} = \text{rouge} \\ [\text{est\_rouge}(k)]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I_M}(\text{est\_rouge}(k)) = x_k^{\mathbf{M}} = 0 & \text{si et seulement si} & k^{\mathbf{M}} = \text{vert}\end{array}$$

1. Soit k_1 et k_2 deux constantes de $\mathcal{F}_0$.
   (a) Proposer une formule $F_{k_1,k_2} \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ permettant d'exprimer que k_1 et k_2 ont la même couleur.
   (b) Calculer l'expression booléenne $f\left(x_{k_1}^{\mathbf{M}}, x_{k_2}^{\mathbf{M}}\right) = [F_{k_1,k_2}]^{\mathbf{M}}$.
   (c) Etant donnés $k_1, k_2, k_3 \in \mathcal{F}_0$, montrer que :

$$f\left(x_{k_1}^{\mathbf{M}}, x_{k_2}^{\mathbf{M}}\right) \cdot f\left(x_{k_1}^{\mathbf{M}}, x_{k_3}^{\mathbf{M}}\right) \equiv \left(x_{k_1}^{\mathbf{M}} \cdot x_{k_2}^{\mathbf{M}} \cdot x_{k_3}^{\mathbf{M}}\right) + \left(\overline{x_{k_1}^{\mathbf{M}}} \cdot \overline{x_{k_2}^{\mathbf{M}}} \cdot \overline{x_{k_3}^{\mathbf{M}}}\right)$$

2. On souhaite que :
   - si s est vert, alors a_1 et o ont la même couleur
   - si s est rouge, alors a_2 et o ont la même couleur

   (a) Proposer deux formules F_1 et F_2 de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ exprimant ces deux propriétés.
   (b) Calculer l'expression booléenne $[F_1 \wedge F_2]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $x_s^{\mathbf{M}}$, $f\left(x_o^{\mathbf{M}}, x_{a_1}^{\mathbf{M}}\right)$ et $f\left(x_o^{\mathbf{M}}, x_{a_2}^{\mathbf{M}}\right)$.
   (c) Montrer que :

$$[F_1 \wedge F_2]^{\mathbf{M}} \equiv x_o^{\mathbf{M}} \cdot \left(x_s^{\mathbf{M}} \cdot x_{a_2}^{\mathbf{M}} + \overline{x_s^{\mathbf{M}}} \cdot x_{a_1}^{\mathbf{M}} + x_{a_1}^{\mathbf{M}} \cdot x_{a_2}^{\mathbf{M}}\right) + \overline{x_o^{\mathbf{M}}} \cdot \left(x_s^{\mathbf{M}} \cdot \overline{x_{a_2}^{\mathbf{M}}} + \overline{x_s^{\mathbf{M}}} \cdot \overline{x_{a_1}^{\mathbf{M}}} + \overline{x_{a_1}^{\mathbf{M}}} \cdot \overline{x_{a_2}^{\mathbf{M}}}\right)$$

   (d) Montrer que pour tous booléens x, y et z, $x \cdot z + \overline{x} \cdot y + y \cdot z \equiv x \cdot z + \overline{x} \cdot y$. En déduire que :

$$[F_1 \wedge F_2]^{\mathbf{M}} \equiv x_o^{\mathbf{M}} \cdot \left(x_s^{\mathbf{M}} \cdot x_{a_2}^{\mathbf{M}} + \overline{x_s^{\mathbf{M}}} \cdot x_{a_1}^{\mathbf{M}}\right) + \overline{x_o^{\mathbf{M}}} \cdot \left(x_s^{\mathbf{M}} \cdot \overline{x_{a_2}^{\mathbf{M}}} + \overline{x_s^{\mathbf{M}}} \cdot \overline{x_{a_1}^{\mathbf{M}}}\right)$$

   (e) Montrer que pour tous booléens x, y et z, $x \cdot y + \overline{x} \cdot z \equiv \overline{x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{z}}$. En déduire que si l'on suppose que $[F_1 \wedge F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, alors $x_o^{\mathbf{M}} \equiv x_s^{\mathbf{M}} \cdot x_{a_2}^{\mathbf{M}} + \overline{x_s^{\mathbf{M}}} \cdot x_{a_1}^{\mathbf{M}}$.

Exercice 3.10 (Structures et interprétations)
A partir des ensembles $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{c, d\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p, q\}$ on définit la formule :

$$F = (p(c, d) \Rightarrow q(c, d)) \Rightarrow (\neg p(c, d) \Rightarrow \neg q(c, d))$$

1. Soit $\mathbf{M}$ une structure, calculer $[F]^{\mathbf{M}}$.
2. Définir une structure $\mathbf{M}_1$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$.

3. Définir une structure $\mathbf{M}_2$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$.

Exercice 3.11 (Structures et interprétations)
A partir des ensembles $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p, eq\}$ où eq désigne le prédicat d'égalité, on définit la formule $F = p(a, b) \Rightarrow eq(a, b)$.

1. Existe-t-il une structure $\mathbf{M}$ dont le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ est un singleton et telle que $[F]^{\mathbf{M}} = 0$? Pourquoi ?
2. On considère des structures $\mathbf{M}$ dont le domaine d'interprétation contient uniquement deux éléments distincts ($|\mathbf{M}| = \{k_1, k_2\}$).
   (a) Combien d'interprétations sont possibles pour le prédicat p ?
   (b) Combien d'interprétations des symboles de constante a et b sont telles que $[eq(a, b)]^{\mathbf{M}} = 1$?
3. Définir une structure $\mathbf{M}_1$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_1} = 0$ et une structure $\mathbf{M}_2$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 1$.

Exercice 3.12 (($\star$) Structures et interprétations)

1. A partir des ensembles $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ où $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\odot\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\oplus\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p\}$, on définit la formule $F = p(\odot(a), \oplus(a, b)) \Rightarrow p(\oplus(a, b), \odot(a))$.
   (a) Définir une structure $\mathbf{M}_1$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$.
   (b) Définir une structure $\mathbf{M}_2$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$.
2. A partir des ensembles $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ où $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{r, s\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p\}$, on définit la formule $F = p(b, s(a, r(b, a))) \wedge p(s(b, b), a)$.
   (a) Définir une structure $\mathbf{M}_1$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$.
   (b) Définir une structure $\mathbf{M}_2$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$.
3. A partir des ensembles $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ où $\mathcal{F}_0 = \{k_1, k_2\}$, $\mathcal{F}_1 = \{f\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{g\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p\}$, on définit la formule $F = p(f(k_1), k_1) \vee p(g(k_1, f(k_1)), k_2)$.
   (a) Définir une structure $\mathbf{M}_1$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$.
   (b) Définir une structure $\mathbf{M}_2$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$.
4. A partir des ensembles $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ où $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\odot\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\otimes\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p\}$, on définit la formule $F = p(\odot(a), \odot(b)) \Rightarrow (p(\otimes(a, b), a) \vee p(\otimes(a, b), b))$.
   (a) Définir une structure $\mathbf{M}_1$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$.
   (b) Définir une structure $\mathbf{M}_2$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$.

Exercice 3.13 (($\star$) Structures et interprétations)
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{k_i\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \odot\}$, et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p, q\}$ un ensemble de symboles de prédicat.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F}$.
2. Donner une définition inductive du nombre d'occurrences $nb_{op}(t)$ de symboles de $\mathcal{F}_2$, et du nombre d'occurrences $nb_k(t)$ de symboles de constante de $\mathcal{F}_0$, dans un terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
3. Montrer par induction sur $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ que $nb_{op}(t) = nb_k(t) - 1$.

4. Soit $\mathbf{M}_1$ la structure dont le domaine $|\mathbf{M}_1| = \wp_f(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ (chaque élément E de $|\mathbf{M}_1|$ est donc un ensemble fini d'entiers) telle que :

$$\begin{array}{ll} k_i^{\mathbf{M}_1} = \{0, 1, \cdots, i\} & \oplus^{\mathbf{M}_1} : \wp_f(\mathbb{N}) \times \wp_f(\mathbb{N}) \to \wp_f(\mathbb{N}) \\ \quad\;\; = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq i\} & \oplus^{\mathbf{M}_1}(E_i, E_j) = E_i \cup E_j \\ & \\ \ominus^{\mathbf{M}_1} : \wp_f(\mathbb{N}) \times \wp_f(\mathbb{N}) \to \wp_f(\mathbb{N}) & \odot^{\mathbf{M}_1} : \wp_f(\mathbb{N}) \times \wp_f(\mathbb{N}) \to \wp_f(\mathbb{N}) \\ \ominus^{\mathbf{M}_1}(E_i, E_j) = E_i \setminus E_j & \odot^{\mathbf{M}_1}(E_i, E_j) = E_i \cap E_j \end{array}$$

   (a) Calculer $[\oplus(k_i, k_j)]^{\mathbf{M}_1}$ lorsque $i \leq j$.
   (b) Calculer $[\ominus(k_i, k_j)]^{\mathbf{M}_1}$ lorsque $i \geq j$.
   (c) Calculer $[\odot(k_i, k_j)]^{\mathbf{M}_1}$ lorsque $i \leq j$.
   (d) Donner un terme t tel que $[t]^{\mathbf{M}_1} = \{2, 3, 7\}$.

5. Etant donnés deux termes $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, on définit la formule :

$$F_{t_1,t_2} = (p(t_1, t_2) \Rightarrow q(\odot(t_1, t_2), t_1)) \wedge (q(\odot(t_1, t_2), t_1) \Rightarrow p(t_1, t_2))$$

   (a) Montrer que $[F_{t_1,t_2}]^{\mathbf{M}} = 1$ lorsque $\mathbf{M}$ est une structure telle que :

$$p^{\mathbf{M}} = \big\{(m_1, m_2) \in |\mathbf{M}| \times |\mathbf{M}| \mid \big(\odot^{\mathbf{M}}(m_1, m_2), m_1\big) \in q^{\mathbf{M}}\big\}$$

   (b) On complète la structure $\mathbf{M}_1$ de la question 4 en interprétant le symbole q par la relation d'égalité sur les ensembles :

$$q^{\mathbf{M}_1} = \{(E_1, E_2) \mid E_1 = E_2\}$$

   Si la structure $\mathbf{M}_1$ vérifie la propriété de la question précédente, quelle est la relation sur les ensembles définie par $p^{\mathbf{M}_1}$?

Exercice 3.14 (($\star$) Structures et interprétations)

1. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_2 = \{f\}$, $\mathcal{F}_1 = \{g\}$ et $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$.
   (a) Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.
   (b) Soit la structure $\mathbf{M}_1$ suivante définie sur $\mathbb{N}$, $|\mathbf{M}_1| = \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lll} a^{\mathbf{M}_1} = 1 & g^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & f^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ b^{\mathbf{M}_1} = 3 & g^{\mathbf{M}_1}(n) = 2n + 1 & f^{\mathbf{M}_1}(n_1, n_2) = n_1 * n_2 \end{array}$$

      i. Calculer $[g(f(a, g(b)))]^{\mathbf{M}_1}$.
      ii. Montrer que pour tout $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $[t]^{\mathbf{M}_1} = 2k + 1$.
   (c) On considère maintenant l'ensemble des symboles de prédicat $\mathcal{P} = \{p\}$ contenant l'unique prédicat unaire p et la formule F=$(p(a) \wedge p(b)) \Rightarrow (p(f(g(a), g(b))) \vee p(g(a)))$.
      i. Définir une structure $\mathbf{M}_2$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 1$. (justifier)
      ii. Définir une structure $\mathbf{M}_3$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_3} = 0$. (justifier)

Exercice 3.15 (Structures et interprétations)
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{f\}$. Etant donné un entier naturel n et un symbole de constante $k \in \mathcal{F}_0$, on note $f^n(k)$ le terme :

$$f^n(k) = \begin{cases} k & \text{si } n = 0 \\ f(f^m(k)) & \text{si } n = m + 1 \end{cases}$$

On admettra sans démonstration que $f^{n+m}(k) = f^n(f^m(k))$ et que $\mathcal{T}_0(\mathcal{F}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{f^n(k) \mid k \in \mathcal{F}_0\}$. Soit $\mathbf{M}$ une structure de domaine $|\mathbf{M}| = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_1 \neq n_2\}$ telle que pour tout couple $(n_1, n_2) \in |\mathbf{M}|$, $f^{\mathbf{M}}((n_1, n_2)) = (n_2, n_1)$.

1. Montrer par récurrence sur n que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, pour toute constante $k \in \mathcal{F}_0$, $[f^{2n}(k)]^{\mathbf{M}} = k^{\mathbf{M}}$ et $[f^{2n+1}(k)]^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{M}}(k^{\mathbf{M}})$.
2. On considère le prédicat binaire $p \in \mathcal{P}_2$ à partir duquel pour tout entier $i \in \mathbb{N}$ et toute constante $k \in \mathcal{F}_0$, on définit la formule atomique $F_{i,k} = p(k, f^i(k))$. Compléter la structure $\mathbf{M}$ en définissant l'interprétation $p^{\mathbf{M}}$ de p pour que $[\neg F_{2i,k} \wedge F_{2i+1,k}]^{\mathbf{M}} = 1$ pour tout entier i et toute constante k.

Exercice 3.16 (Formules valides, formules satisfiables)
On définit les formules suivantes :

$$\begin{array}{l|l} F_a = (p(a) \wedge \neg p(f(a))) \Rightarrow \neg p(f(a)) & G_a = p(a) \wedge \neg p(f(a)) \\ F_b = (p(b) \wedge \neg p(f(b))) \Rightarrow \neg p(f(a)) & G_b = p(b) \wedge \neg p(f(b)) \\ F_c = (p(c) \wedge \neg p(f(c))) \Rightarrow \neg p(f(a)) & G_c = p(c) \wedge \neg p(f(c)) \end{array}$$

1. Montrer que la formule $(G_a \wedge (G_b \wedge G_c)) \Rightarrow \neg p(f(a))$ est valide.
2. Montrer que la formule $F_a \wedge (F_b \wedge F_c)$ n'est pas valide.

Exercice 3.17 (Formules valides, formules satisfiables)
Soit $A, B \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ deux formules atomiques. Les formules suivantes sont-elles satisfiables ? sont-elles valides ?

$$\begin{array}{ll} F_1 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) & F_2 = ((A \vee B) \wedge \neg A) \Rightarrow B \\ F_3 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A) & F_4 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B) \\ F_5 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow A & F_6 = A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \\ F_7 = (A \wedge \neg A) \Rightarrow B & F_8 = (\neg A \vee B) \Rightarrow (B \Rightarrow A) \\ F_9 = (A \vee \neg A) \Rightarrow B & F_{10} = (\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \\ F_{11} = (\neg A \vee B) \wedge \neg(\neg B \Rightarrow \neg A) & F_{12} = (A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B) \end{array}$$

Exercice 3.18 (($\star$) Conséquence sémantique)

1. Soit F une formule non satisfiable et G une formule ni valide, ni non satisfiable.

   (a) A-t-on $F \models G$? (Justifier) (b) A-t-on $G \models F$? (Justifier)
   (c) A-t-on $\neg F \models G$? (Justifier) (d) A-t-on $G \models \neg F$? (Justifier)

2. Mêmes questions si F une formule valide et G une formule ni valide, ni non satisfiable.

Exercice 3.19 (Conséquence sémantique)
Soit $A, B, C \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ trois formules atomiques. Les conséquences sémantiques suivantes sont-elles vérifiées ?

$$\begin{array}{ll} (1) : \{A \vee B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow C\} \models C & (2) : A \Rightarrow B \models \neg B \Rightarrow \neg A \\ (3) : \{A \vee B, \neg A\} \models B & (4) : A \Rightarrow B \models B \Rightarrow A \\ (5) : \{\neg(A \vee B), C \Rightarrow B\} \models \neg(A \vee C) & (6) : A \Rightarrow B \models \neg A \Rightarrow \neg B \\ (7) : \{A \Rightarrow B, \neg B\} \models \neg A & (8) : \{A \Rightarrow B, \neg A\} \models \neg B \\ (9) : \{\neg B \Rightarrow \neg A, A\} \models B & (10) : \{\neg A \Rightarrow \neg B, A\} \models B \end{array}$$

Exercice 3.20 ((⋆) Formules valides, formules satisfiables, formules équivalentes)
Soit F_1 et F_2 deux formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$.

1. Montrer que si F_1 est valide alors $F_1 \wedge F_2 \models\!\mid F_2$.
2. Montrer que si F_1 est insatisfiable alors $F_1 \vee F_2 \models\!\mid F_2$.

Exercice 3.21 ((⋆) Formules valides/satisfiables/équivalentes, conséquence sémantique)

1. Soit F la formule $((A \vee \neg B) \wedge B) \Rightarrow A$.
   (a) Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, calculer l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I_M}(A)$ et $\mathbf{I_M}(B)$ (sans effectuer de simplification).
   (b) En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que F est une formule valide (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
   (c) A-t-on $(A \vee \neg B) \wedge B \models A$? (justifier)
   (d) Soit F_1 une formule quelconque. A-t-on $\neg F \models F_1$? (justifier)
   (e) Soit F_2 une formule telle que $F \models F_2$. La formule F_2 est-elle satisfiable ? valide ? (justifier)
2. Soit $F_1 = (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ et $F_2 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$ deux formules.
   (a) Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, calculer les expressions booléennes $[F_1]^{\mathbf{M}}$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I_M}(A)$ et $\mathbf{I_M}(B)$ (sans effectuer de simplification).
   (b) En utilisant un raisonnement équationnel, simplifier les expressions booléennes $[F_1]^{\mathbf{M}}$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
   (c) En déduire que $F_1 \models\!\mid F_2 \models\!\mid B \Rightarrow A$.
3. Soit $F = (A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$ et $F' = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ deux formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, où A et B sont deux formules atomiques.
   (a) Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, calculer les expressions booléennes $[F]^{\mathbf{M}}$ et $[F']^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I_M}(A)$ et $\mathbf{I_M}(B)$ (sans effectuer de simplification).
   (b) En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que les expressions booléennes $[F]^{\mathbf{M}}$ et $[F']^{\mathbf{M}}$ sont équivalentes à l'expression booléenne :
   $$(\overline{\mathbf{I_M}(A)} + \mathbf{I_M}(B)) \cdot (\overline{\mathbf{I_M}(B)} + \mathbf{I_M}(A))$$
   (c) Peut-on en déduire que $F \models\!\mid (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$? Justifier.
   (d) En déduire que F est une formule valide si et seulement si $A \models\!\mid B$ (justifier avec une démonstration).
4. Soit les formules $F_1 = (\neg A \vee A) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ et $F_2 = (B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \vee A)$.
   (a) Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, calculer les expressions booléennes $[F_1]^{\mathbf{M}}$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I_M}(A)$ et $\mathbf{I_M}(B)$ (sans effectuer de simplification).
   (b) En utilisant un raisonnement équationnel, simplifier les expressions booléennes $[F_1]^{\mathbf{M}}$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
   (c) Les formule F_1 et F_2 sont-elles satisfiables ? valides ? (justifier)
   (d) Soit la formule $F_3 = (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \vee A)$, que pouvez-vous dire de $[F_3]^{\mathbf{M}}$? (justifier)
   (e) A-t-on $\neg F_2 \models F_1$? (justifier)
5. Soit F la formule $(A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)$.

   (a) Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, calculer l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I_M}(A)$ et $\mathbf{I_M}(B)$ (sans effectuer de simplification).
   (b) En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que la formule F est insatisfiable (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
   (c) Soit F' une formule quelconque, a-t-on $F \models F'$?

6. A partir d'une formule atomique A, on définit les formules $F_1 = (\neg A \Rightarrow (A \vee \neg A)) \Rightarrow A$ et $F_2 = ((A \wedge \neg A) \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A$.
   (a) Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, calculer les expressions booléennes $[F_1]^{\mathbf{M}}$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I_M}(A)$ (sans effectuer de simplification).
   (b) En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que $F_1 \models\mid F_2$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
   (c) La formule F_1 est-elle satisfiable ? valide ? (justifier)
   (d) A-t-on : (i) $A \vee F_1 \models \mathsf{false}$? (ii) $F_1 \models \mathsf{true}$? (iii) $\neg A \wedge F_1 \models \mathsf{false}$? (iv) $A \models \neg A \vee F_1$?

7. On considère les formules atomiques $A, B, C \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ à partir desquelles sont définies les formules $F_1 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ et $F_2 = (\neg A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$.
   (a) Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, calculer les expressions booléennes $[F_1]^{\mathbf{M}}$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I_M}(A)$, $\mathbf{I_M}(B)$ et $\mathbf{I_M}(C)$ (sans effectuer de simplifications).
   (b) A l'aide d'un raisonnement équationnel, en indiquant le nom de l'équivalence utilisée à chaque étape, transformer ces expressions pour montrer que $F_1 \models\mid F_2$.

8. On considère les formules atomiques $A, B \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ à partir desquelles sont définies les formules $F_1 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow A$ et $F_2 = A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.
   (a) Construire et simplifier (par un raisonnement équationnel) les expressions booléennes $[F_1]^{\mathbf{M}}$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}$.
   (b) A-t-on $F_1 \models\mid F_2$? (justifier)

9. On considère les formules atomiques $A, B \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ à partir desquelles sont définies les formules $F_1 = (A \Rightarrow \neg A) \vee (\neg A \Rightarrow A)$ et $F_2 = (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$.
   (a) Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, calculer les expressions booléennes $[F_1]^{\mathbf{M}}$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I_M}(A)$ et $\mathbf{I_M}(B)$ (sans effectuer de simplifications).
   (b) A l'aide d'un raisonnement équationnel, en indiquant le nom de l'équivalence utilisée à chaque étape, montrer que les formules F_1 et F_2 sont valides.

10. On considère les formules atomiques $A, B \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ à partir desquelles est définie la formule $F = ((B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B))$.
   (a) Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, calculer l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I_M}(A)$ et $\mathbf{I_M}(B)$ (sans effectuer de simplification).
   (b) En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que la formule F est valide.
   (c) Quelle propriété doit vérifier F' pour que la relation $F \models F'$ soit vérifiée ? Justifier.

11. On considère les formules atomiques $A, B \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ à partir desquelles est définie la formule $F = ((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \vee (A \wedge B)$.
   (a) Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, calculer l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I_M}(A)$ et $\mathbf{I_M}(B)$ (sans effectuer de simplification).
   (b) En utilisant un raisonnement équationnel, simplifier l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée). En déduire que $F \models\mid A \Rightarrow B$.

(c) La formule F est-elle satisfiable ? est-elle valide ? (justifier)

(d) Soit F' une formule quelconque.

i. A-t-on $F \wedge (A \wedge \neg B) \models F'$? (justifier)

ii. Quelle propriété doit vérifier F' pour que $F \vee A \models F'$? (justifier)

12. Soit $F_1 = (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$ et $F_2 = A \Rightarrow B$ deux formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$.

(a) Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, donner (sans simplification) les expressions booléennes $[F_1]^{\mathbf{M}}$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}$.

(b) Montrer que $F_1 \models F_2$.

(c) Que pouvez-vous en déduire sur la formule $F_1 \Rightarrow F_2$?

Exercice 3.22 (($\star$) Interprétation des formules)

1. Soit A et B deux formules atomiques, $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ une formule construite à partir de A et B, et $\mathbf{M}$ une structure.

(a) L'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ obtenue à partir de F sans effectuer de simplification est :

$$[F]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)}} + \overline{\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)}$$

Déterminer une formule F possible.

(b) En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que $[F]^{\mathbf{M}} = 1$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée). Que pouvez-vous en déduire sur la formule F ?

2. Soit A une formule atomique, $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ une formule construite à partir de A, et $\mathbf{M}$ une structure.

(a) L'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ obtenue à partir de F sans effectuer de simplification est :

$$[F]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)}} + \left(\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) \cdot \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)}\right)$$

Déterminer une formule F possible.

(b) En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que $[F]^{\mathbf{M}} = 0$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée). Que pouvez-vous en déduire sur la formule F ?

3. Soit A une formule atomique, et $\mathbf{M}$ une structure (les deux questions sont indépendantes).

(a) Donner une formule F, construite à partir de A telle que :

$$[F]^{\mathbf{M}} = \overline{\left(\overline{\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)}} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)\right) \cdot \left(\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)}\right)}$$

sans simplification.

(b) En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que $[F]^{\mathbf{M}} = 1$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée). Que pouvez-vous en déduire sur la formule F ?

Exercice 3.23 (Conséquence sémantique)

Soient F_1 et F_2 deux formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ ni valides ni non satisfiables telles que $F_1 \models F_2$ et $F_2 \not\models F_1$.

1. Pour chacune des conditions suivantes, dire s'il existe une structure $\mathbf{M}$ la vérifiant. Justifier vos réponses.

(a) $[F_1]^{\mathbf{M}} = 0$ et $[F_2]^{\mathbf{M}} = 0$

(b) $[F_1]^{\mathbf{M}} = 0$ et $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$

(c) $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ et $[F_2]^{\mathbf{M}} = 0$

(d) $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ et $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$

2. Pour chacune des formules suivantes, dire si elle est valide, non satisfiable ou ni l'un ni l'autre. Justifier vos réponses.

   (a) $F_1 \Rightarrow F_2$

   (b) $F_1 \wedge F_2$

   (c) $F_1 \wedge \neg F_2$

Exercice 3.24 (Conséquence sémantique)
Retrouver les conclusions obtenues dans les exercices 2.3, 2.4 et 2.5 en utilisant la notion de conséquence sémantique.

TD4 : Règles de déduction sur les quantificateurs

Les exercices annotés par le symbole $\star$ correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

Exercice 4.1 En utilisant les règles de la déduction naturelle, prouver les formules suivantes.

1. Quantificateur universel

$$\begin{array}{lll} & (G_1) & (\forall x\ (p(x) \wedge q(x))) \Rightarrow (\forall x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x)) \\ & (G_2) & (\forall x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x)) \Rightarrow \forall x\ (p(x) \wedge q(x)) \\ (\star) & (G_3) & (\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x)) \Rightarrow \forall x\ (p(x) \vee q(x)) \end{array}$$

2. Quantificateur existentiel

$$\begin{array}{lll} (\star) & (G_4) & (\exists x\ (p(x) \wedge q(x))) \Rightarrow (\exists x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x)) \\ & (G_5) & (\exists x\ (p(x) \vee q(x))) \Rightarrow (\exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)) \\ & (G_6) & (\exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)) \Rightarrow \exists x\ (p(x) \vee q(x)) \end{array}$$

3. Ordre sur les quantificateurs

$$\begin{array}{ll} (G_7) & (\exists x\ \exists y\ r(x,y)) \Rightarrow (\exists y\ \exists x\ r(x,y)) \\ (G_8) & (\exists x\ \forall y\ r(x,y)) \Rightarrow (\forall y\ \exists x\ r(x,y)) \end{array}$$

4. Quantification et implication

$$\begin{array}{ll} (G_9) & ((\forall x\ (p(x) \Rightarrow q(x))) \wedge (\exists x\ p(x))) \Rightarrow \exists x\ q(x) \\ (G_{10}) & (\forall x\ (p(x) \Rightarrow \neg q(x))) \Rightarrow \neg \exists x\ (p(x) \wedge q(x)) \end{array}$$

5. Equivalences entre quantificateurs

$$\begin{array}{lll} (\star) & (G_{11}) & (\forall x\ \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \exists x\ p(x)) \\ & (G_{13}) & (\exists x\ \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \forall x\ p(x)) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} (\star) & (G_{12}) & (\neg \exists x\ p(x)) \Rightarrow (\forall x\ \neg p(x)) \\ & (G_{14}) & (\neg \forall x\ p(x)) \Rightarrow (\exists x\ \neg p(x)) \end{array}$$

6. « tiers exclu » sur les quantificateurs

$$(G_{15}) \quad (\forall x\ p(x)) \vee (\exists x\ \neg p(x))$$

Exercice 4.2 ($\star$)
En utilisant les règles de la déduction naturelle, prouver la formule $(F_1 \wedge F_2) \Rightarrow F_3$ lorsque :

1. $F_1 = \forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x))$, $F_2 = \exists x\,(q(x) \Rightarrow r(x))$, et $F_3 = \exists x\,(p(x) \Rightarrow r(x))$
2. $F_1 = \exists x\,(p(x) \Rightarrow q(x))$, $F_2 = \forall x\,(q(x) \Rightarrow r(x))$ et $F_3 = \exists x\,(p(x) \Rightarrow r(x))$

Exercice 4.3 ($\star$)
En utilisant les règles de la déduction naturelle, prouver les formules :

$$\begin{array}{ll} (F_1) & \forall x\,((\exists y\,\forall z\,p(x,y,z)) \Rightarrow \exists z\,p(x,z,z)) \\ (F_2) & \exists x\,\forall y\,\neg p(x,y) \Rightarrow \neg \forall x \exists y\,p(x,y) \\ (F_3) & \forall x\,(p(x,f(x)) \vee \exists y\,p(x,f(y))) \Rightarrow \forall x\,\exists y\,p(x,y) \\ (F_4) & ((\forall x\,p(x)) \wedge (\exists x\,(p(x) \Rightarrow q(x)))) \Rightarrow \exists x\,q(x) \\ (F_5) & (\neg \exists x\,(p(x) \Rightarrow q(x))) \Rightarrow \forall x\,\neg q(x) \end{array}$$

Exercice 4.4 En utilisant les règles de la déduction naturelle prouver les formules suivantes (dans toutes ces formules, a est un symbole de constante).

(G_1)	$((\forall x\, p(x)) \wedge q(a)) \Leftrightarrow \forall x\, (p(x) \wedge q(a))$	(G_2)	$((\forall x\, p(x)) \vee q(a)) \Leftrightarrow \forall x\, (p(x) \vee q(a))$
(G_3)	$((\exists x\, p(x)) \wedge q(a)) \Leftrightarrow \exists x\, (p(x) \wedge q(a))$	(G_4)	$((\exists x\, p(x)) \vee q(a)) \Leftrightarrow \exists x\, (p(x) \vee q(a))$
(G_5)	$((\forall x\, p(x)) \Rightarrow q(a)) \Leftrightarrow \exists x\, (p(x) \Rightarrow q(a))$	(G_6)	$((\exists x\, p(x)) \Rightarrow q(a)) \Leftrightarrow \forall x\, (p(x) \Rightarrow q(a))$
(G_7)	$(q(a) \Rightarrow (\forall x\, p(x))) \Leftrightarrow \forall x\, (q(a) \Rightarrow p(x))$	(G_8)	$(q(a) \Rightarrow (\exists x\, p(x))) \Leftrightarrow \exists x\, (q(a) \Rightarrow p(x))$

Exercice 4.5 (($\star$) Involutions et bijections)
On considère un langage logique avec variables muni du symbole de fonction unaire $f \in \mathcal{F}_1$ et du symbole de prédicat binaire eq $\in \mathcal{P}_2$ d'égalité. Formellement ce prédicat désigne une relation d'équivalence qui est une congruence pour f, c-à-d vérifie les quatre formules suivantes :

(F_1)	$\forall x\, \mathrm{eq}(x, x)$	(réflexivité)
(F_2)	$\forall x\, \forall y\, (\mathrm{eq}(x, y) \Rightarrow \mathrm{eq}(y, x))$	(symétrie)
(F_3)	$\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((\mathrm{eq}(x, y) \wedge \mathrm{eq}(y, z)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, z))$	(transitivité)
(F_4)	$\forall x\, \forall y\, (\mathrm{eq}(x, y) \Rightarrow \mathrm{eq}(f(x), f(y)))$	(congruence)

On considère les formules F_5, F_6 et F_7 qui expriment respectivement que la fonction f est involutive, injective et surjective :

(F_5)	$\forall x\, \mathrm{eq}(x, f(f(x)))$	(involution)
(F_6)	$\forall x_1\, \forall x_2\, (\mathrm{eq}(f(x_1), f(x_2)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1, x_2))$	(injection)
(F_7)	$\forall y\, \exists x\, \mathrm{eq}(y, f(x))$	(surjection)

1. En utilisant les règles de la déduction naturelle, montrer que toute fonction involutive est injective, c-à-d que la formule F_6 est prouvable à partir des hypothèses F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5. Afin d'alléger la preuve, on pourra utiliser les trois règles dérivées suivantes qui permettent d'éliminer deux ou trois quantificateurs universels (simultanément) en tête d'une formule à partir d'une hypothèse pour prouver une formule.

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$, $h : \forall x\, \forall y\, A$ montrons $A[x := t_1][y := t_2]$
$\langle i \rangle$	CQFD ($D^2_\forall$ avec h)

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$, $h : \forall x\, \forall y\, \forall z\, A$ montrons $A[x := t_1][y := t_2][z := t_3]$
$\langle i \rangle$	CQFD ($D^3_\forall$ avec h)

   Indication. Il s'agit de formaliser le raisonnement suivant : si $f(x_1) = f(x_2)$, alors en appliquant f des deux côtés de l'égalité on obtient $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ et puisque f est involutive on a $f(f(x_1)) = x_1$ et $f(f(x_2)) = x_2$ et donc $x_1 = x_2$.

2. En utilisant les règles de la déduction naturelle, montrer que toute fonction involutive est surjective, c-à-d que la formule F_7 est prouvable à partir des hypothèses F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5.
   Indication. Il s'agit de formaliser le raisonnement suivant : étant donné y, $x = f(y)$ vérifie $y = f(x)$ car $f(f(y)) = y$ puisque f est involutive.

Exercice 4.6 (($\star$) Logique équationnelle)
On considère un langage logique comprenant le symbole de prédicat d'égalité d'arité 2 noté *eq* et on ajoute aux règles de la déduction naturelle les deux règles suivantes permettant de raisonner sur des formules contenant ce prédicat.

$\langle i\rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons $eq(t,t)$
$\langle i\rangle$	CQFD (I_{eq})

$\langle i\rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$	
	montrons $F[x := t]$	
	$\langle i+1\rangle$	montrons $F[x := t']$
		$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+1\rangle$	CQFD
	$\langle i+2\rangle$	montrons $eq(t,t')$
		$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+2\rangle$	CQFD
$\langle i\rangle$	CQFD (E_{eq})	

La règle I_{eq} est un axiome et énonce que la formule $eq(t,t)$ est prouvable pour tout terme t. La règle E_{eq} exprime que si l'on dispose d'une preuve de la formule $F[x := t']$ (c-à-d d'une preuve de la formule F dans laquelle x est substitué par le terme t') et d'une preuve de l'égalité $eq(t,t')$, alors on peut prouver la formule $F[x := t]$ (c-à-d la formule F dans laquelle x est substitué par le terme t). Prouver les deux formules ci-dessous exprimant que l'égalité est symétrique et transitive :

1. $\forall x\, \forall y\, (eq(x,y) \Rightarrow eq(y,x))$
   Indication : étant données trois variables x', y' et w et la formule $F = eq(y', w)$, calculer $F[w := y']$ et $F[w := x']$ pour comprendre comment utiliser la règle E_{eq}.
2. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((eq(x,y) \wedge eq(y,z)) \Rightarrow eq(x,z))$
   Indication : étant données trois variables x', z' et w et la formule $F = eq(w, z')$, calculer $F[w := y']$ et $F[w := x']$ pour comprendre comment utiliser la règle E_{eq}.

Exercice 4.7 ($\star$)

Le but de cet exercice est de prouver la formule $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$ en utilisant la règle du Tiers Exclu : c'est la preuve demandée dans la question 4. Cette preuve s'obtient « directement » à partir des preuves des questions 1 et 3. Dans cet exercice les preuves demandées devront être obtenues en utilisant les règles de la déduction naturelle et les règles dérivées du formulaire.

1. Prouver la formule $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$ à partir de l'hypothèse $h_1 : \forall y\, p(y)$. On note B_1 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_1}\rangle$	supposons $h_1 : \forall y\, p(y)$, montrons $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$
	preuve à compléter
$\langle 1_{B_1}\rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***) **preuve** B_1

   Indication : on suppose que l'on dispose d'un nombre infini dénombrable de symboles de variable, et il est donc possible d'appliquer la règle $I_\exists$ en utilisant un « nouveau » symbole de variable.
2. Prouver la formule $(\neg\forall y\, p(y)) \Rightarrow (\exists y\, \neg p(y))$. On note B_2 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_2}\rangle$	montrons $(\neg\forall y\, p(y)) \Rightarrow (\exists y\, \neg p(y))$
	preuve à compléter
$\langle 1_{B_2}\rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***) **preuve** B_2

3. Compléter la preuve B_3 ci-dessous de la formule $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$ à partir de l'hypothèse

$h_2 : \neg\forall y\, p(y)$.

$\langle 1_{B_3} \rangle$	supposons $h_2 : \neg\forall y\, p(y)$, montrons $\exists x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$
$\langle 2_{B_3} \rangle$	montrons $\exists y\, \neg p(y)$
$\langle 1_{B_2} \rangle$	montrons $(\neg\forall y\, p(y)) \Rightarrow (\exists y\, \neg p(y))$
	...
$\langle 1_{B_2} \rangle$	CQFD **preuve B_2**
$\langle 3_{B_3} \rangle$	montrons ***formule à compléter***
	preuve à compléter
$\langle 3_{B_3} \rangle$	CQFD ***nom de la règle à compléter***
$\langle 2_{B_3} \rangle$	CQFD ($E_\Rightarrow$)
$\langle 3_{B_3} \rangle$	soit une nouvelle variable z, supposons h_3 : ***formule à compléter***
	montrons ***formule à compléter***
	preuve à compléter
$\langle 3_{B_3} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)
$\langle 1_{B_3} \rangle$	CQFD ($E_\exists$) **preuve B_3**

4. Construire une preuve de la formule $\exists x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$ à partir des preuves B_1 et B_3 (ne pas recopier le contenu des preuves B_1 et B_3, indiquer seulement les hypothèses et les formules prouvées par ces boîtes).
5. On se place dans un bar quelconque et on interprète la formule atomique $p(x)$ par l'énoncé « *x boit un verre* ». Décrire en langage naturel (en français par exemple) ce qu'exprime la formule $\exists x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$.

Exercice 4.8

Le but de cet exercice est de prouver l'affirmation : « *Dans tout village, il ne peut pas exister de barbier qui rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes et uniquement ceux-là.* ». Les preuves demandées devront être obtenues en utilisant les règles de la déduction naturelle et les règles dérivées du formulaire. Si vous n'avez pas réussi à construire une preuve B_i vous pouvez quand même l'utiliser dans les questions qui suivent.

1. Prouver la formule $\neg((\neg A \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$. On note B_1 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_1} \rangle$	montrons $\neg((\neg A \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$
	preuve à compléter
$\langle 1_{B_1} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***) **preuve B_1**

2. Soit r un prédicat binaire tel que $r(t_1, t_2)$ signifie que t_1 rase t_2. La formule F_t, qui exprime que t rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes et uniquement ceux-là, peut être définie à partir du prédicat r comme suit :

$$\text{formule } F_t \;:\; \forall y\; (\underbrace{(\neg r(y,y) \Rightarrow r(t,y))}_{\text{si } y \text{ ne se rase pas lui-même alors } t \text{ rase } y} \wedge \underbrace{(r(t,y) \Rightarrow \neg r(y,y))}_{\text{si } t \text{ rase } y \text{ alors } y \text{ ne se rase pas lui-même}})$$

Soit t un terme (ne contenant pas d'occurrence du symbole de variable y), prouver la formule $\neg F_t$. On note B_2 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_2} \rangle$	montrons $\neg\forall y\; ((\neg r(y,y) \Rightarrow r(t,y)) \wedge (r(t,y) \Rightarrow \neg r(y,y)))$
	preuve à compléter
$\langle 1_{B_2} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***) **preuve B_2**

Indication : on pourra utiliser la preuve B_1 de la question précédente en supposant que la formule A est la formule $r(t,t)$ et donc utiliser directement la boîte ci-dessous :

$\langle 1_{B_1} \rangle$	montrons $\neg((\neg r(t,t) \Rightarrow r(t,t)) \wedge (r(t,t) \Rightarrow \neg r(t,t)))$	
	ne pas recopier le contenu la preuve B_1 sur votre copie	
$\langle 1_{B_1} \rangle$	CQFD	**preuve** B_1

3. Prouver la formule F_1 qui exprime qu'il ne peut exister de personne qui rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes et uniquement ceux-là. On note B_3 la preuve obtenue.

$\langle 1_{B_3} \rangle$	montrons $\neg \exists x \, \forall y \; ((\neg r(y,y) \Rightarrow r(x,y)) \wedge (r(x,y) \Rightarrow \neg r(y,y)))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{B_3} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** B_3

Indication : on pourra utiliser la preuve B_2 de la question précédente en remplaçant t par n'importe quel terme ne contenant pas d'occurrence du symbole de variable y, et donc utiliser directement la boîte ci-dessous (en remplaçant le ? par un terme) :

$\langle 1_{B_2} \rangle$	montrons $\neg \forall y \left(\left(\neg r(y,y) \Rightarrow r\left(\boxed{?}, y\right) \right) \wedge \left(r\left(\boxed{?}, y\right) \Rightarrow \neg r(y,y) \right) \right)$	
	ne pas recopier le contenu la preuve B_2 sur votre copie	
$\langle 1_{B_2} \rangle$	CQFD	**preuve** B_2

Une autre façon de formuler cette affirmation consiste à exprimer que pour tout individu x, il existe un individu y tel que soit y ne se rase pas lui-même et x ne rase pas y, soit y se rase lui-même et x rase y. La formule F_2 ci-dessous correspond à cette formulation :

$$\text{formule } F_2 \; : \; \forall x \, \exists y \; (\underbrace{(\neg r(y,y) \wedge \neg r(x,y))}_{\substack{y \text{ ne se rase pas lui-même} \\ \text{et } x \text{ ne rase pas } y}} \vee \underbrace{(r(y,y) \wedge r(x,y))}_{\substack{y \text{ se rase lui-même} \\ \text{et } x \text{ rase } y}})$$

Le but des deux questions qui suivent est de prouver la formule $F_2 \Rightarrow F_1$.

4. Soit A et B deux formules atomiques quelconques. Prouver la formule :

$$((\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)) \Rightarrow \neg((\neg A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg A))$$

On note P_1 la preuve obtenue :

$\langle 1_{P_1} \rangle$	montrons $((\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)) \Rightarrow \neg((\neg A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg A))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{P_1} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** P_1

5. Compléter la preuve P_2 ci-dessous de la formule $F_2 \Rightarrow F_1$.

$\langle 1_{P_2} \rangle$	montrons $(\forall x \, \exists y \; ((\neg r(y,y) \wedge \neg r(x,y)) \vee (r(y,y) \wedge r(x,y))))$	
	$\Rightarrow (\neg \exists x \, \forall y \; ((\neg r(y,y) \Rightarrow r(x,y)) \wedge (r(x,y) \Rightarrow \neg r(y,y))))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{P_2} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** P_2

Indication : après avoir construit un contexte d'hypothèse (à l'aide des règles d'introduction), la preuve peut s'obtienir en appliquant les règles d'élimination des quantificateurs $\exists$ et $\forall$ ainsi que la preuve P_1 de la question précédente en supposant que la formule A est la formule $r(\Box, \Box)$ et que la formule B est la formule $r(\bigcirc, \Box)$, où $\Box$ et $\bigcirc$ désignent deux symboles de variable qui dépendent des symboles choisis lors de l'application des règles sur les quantificateurs, et donc en utilisant directement la boîte ci-dessous.

$\langle 1_{P_1} \rangle$	montrons $((\neg r(\square,\square) \wedge \neg r(\bigcirc,\square)) \vee (r(\square,\square) \wedge r(\bigcirc,\square)))$ $\Rightarrow \neg((\neg r(\square,\square) \Rightarrow r(\bigcirc,\square)) \wedge (r(\bigcirc,\square) \Rightarrow \neg r(\square,\square)))$	
	ne pas recopier le contenu la preuve P_1 sur votre copie	
$\langle 1_{P_1} \rangle$	CQFD	**preuve** P_1

Exercice 4.9

Lorsque p désigne le prédicat pion de Edukera, la phrase « *il existe au plus un pion* » peut être exprimée par les deux formules équivalentes suivantes :

$$F_1 = \forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)) \qquad \text{et} \qquad F_2 = \forall x\,\neg p(x) \vee \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$$

où eq désigne le prédicat d'égalité. Dans les questions qui suivent nous allons montrer l'équivalence entre ces deux formules.

1. Preuve de $F_1 \Rightarrow F_2$

   (a) Prouver la formule $\forall x\,\neg p(x) \vee \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$ à partir de l'hypothèse $h_2 : \forall x\,\neg p(x)$. On note B_1 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_1} \rangle$	supposons $h_2 : \forall x\,\neg p(x)$, montrons $\forall x\,\neg p(x) \vee \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{B_1} \rangle$	CQFD (***preuve à compléter***)	**preuve** B_1

   (b) Soit B une preuve de $\forall x\,\neg p(x) \vee \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$ dans un contexte d'hypothèse contenant une unique hypothèse $h_1 : \forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$. Dans la preuve B, quelle règle de la déduction naturelle faut-il appliquer pour pouvoir utiliser directement la preuve B_1 (remarquer que dans la preuve B_1 l'hypothèse h_1 n'est pas disponible) ? On note B_2 la preuve correspondant à la boîte 1_{B_2} :

$\langle 1_B \rangle$	supposons $h_1 : \forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$ montrons $\forall x\,\neg p(x) \vee \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$			
	$\ddots$			
	$\langle 1_{B_2} \rangle$	supposons $h_2 : \forall x\,\neg p(x)$, montrons $\forall x\,\neg p(x) \vee \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$		
		$\langle 1_{B_1} \rangle$	montrons $\forall x\,\neg p(x) \vee \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$ sans utiliser ***nom de l'hypothèse à compléter***	
			$\ldots$	
		$\langle 1_{B_1} \rangle$	CQFD $(\cdots)$	**preuve** B_1
	$\langle 1_{B_2} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)		**preuve** B_2
	$\cdot^{\cdot^{\cdot}}$			
$\langle 1_B \rangle$	CQFD $(\cdots)$			

   (c) Prouver la formule $\exists x\,\neg\neg p(x) \Rightarrow \exists x\,p(x)$. On note B_3 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_3} \rangle$	montrons $\exists x\,\neg\neg p(x) \Rightarrow \exists x\,p(x)$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{B_3} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** B_3

   (d) Soit B_6 une preuve de $\exists x\,p(x)$ dans un contexte d'hypothèse contenant une unique hypothèse $h_3 : \neg\forall x\,\neg p(x)$. Dans la preuve B_6, on souhaite prouver la formule $\exists x\,\neg\neg p(x) \Rightarrow$

$\exists x\, p(x)$. Quelle règle de la déduction naturelle faut-il appliquer pour pouvoir utiliser directement la preuve B_3 pour prouver cette formule (remarquer que dans la preuve B_3 aucune hypothèse n'est disponible) ? On note B_4 la preuve correspondant à la boîte 1_{B_4} :

$\langle 1_{B_6}\rangle$ supposons $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$, montrons $\exists x\, p(x)$
$\ddots$
$\langle 1_{B_4}\rangle$ montrons $\exists x\, \neg\neg p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$
$\langle 1_{B_3}\rangle$ montrons $\exists x\, \neg\neg p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$
sans utiliser ***nom de l'hypothèse à compléter***
$\ldots$
$\langle 1_{B_3}\rangle$ CQFD $(\cdots)$ **preuve** B_3
$\langle 1_{B_4}\rangle$ CQFD (***nom de la règle à compléter***) **preuve** B_4
$\iddots$
$\langle 1_{B_6}\rangle$ CQFD $(\cdots)$ **preuve** B_6

(e) Prouver la formule $\exists x\, \neg\neg p(x)$ à partir de l'hypothèse $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$. On note B_5 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_5}\rangle$ supposons $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$, montrons $\exists x\, \neg\neg p(x)$
preuve à compléter
$\langle 1_{B_5}\rangle$ CQFD (***nom de la règle à compléter***) **preuve** B_5

(f) Prouver la formule $\exists x\, p(x)$ à partir de l'hypothèse $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$. On note B_6 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_6}\rangle$ supposons $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$, montrons $\exists x\, p(x)$
preuve à compléter
$\langle 1_{B_6}\rangle$ CQFD (***nom de la règle à compléter***) **preuve** B_6

Indication : on pourra utiliser les preuve B_4 et B_5.

(g) Soit B_{10} une preuve de $\exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))$ dans un contexte d'hypothèse contenant une unique hypothèse $h_1 : \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y))$. Dans la preuve B_{10}, quelle règle de la déduction naturelle faut-il appliquer pour pouvoir utiliser directement la preuve B_6 (remarquer que dans la preuve B_6 l'hypothèse h_1 n'est pas disponible) ? On note B_7 la preuve correspondant à la boîte 1_{B_7} :

$\langle 1_{B_{10}}\rangle$ supposons $h_1 : \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y))$, montrons $\exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))$
$\ddots$
$\langle 1_{B_7}\rangle$ supposons $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$, montrons $\exists x\, p(x)$
$\langle 1_{B_6}\rangle$ montrons $\exists x\, p(x)$
sans utiliser ***nom de l'hypothèse à compléter***
$\ldots$
$\langle 1_{B_1}\rangle$ CQFD $(\cdots)$ **preuve** B_6
$\langle 1_{B_7}\rangle$ CQFD (***nom de la règle à compléter***) **preuve** B_7
$\iddots$
$\langle 1_{B_{10}}\rangle$ CQFD $(\cdots)$ **preuve** B_{10}

(h) A partir des hypothèses $h_1 : \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y))$, $h_4 : p(z)$ et $h_5 : p(w)$, prouver la formule $\mathrm{eq}(z, w)$. On note B_8 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_8}\rangle$ supposons $h_1 : \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y))$, $h_4 : p(z)$, $h_5 : p(w)$, montrons $\mathrm{eq}(z, w)$
preuve à compléter
$\langle 1_{B_8}\rangle$ CQFD (***nom de la règle à compléter***) **preuve** B_8

(i) A partir des hypothèses $h_1 : \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$ et $h_4 : p(z)$, prouver la formule $\exists x (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$. On note B_9 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_9} \rangle$	supposons $h_1 : \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)), h_4 : p(z)$	
	montrons $\exists x (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{B_9} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** B_9

Indication : on pourra utiliser la preuve B_8.

(j) Prouver la formule $\exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$ à partir des hypothèses $h_3 : \neg \forall x\, \neg p(x)$ et $h_1 : \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$. On note B_{10} la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_{10}} \rangle$	supposons $h_1 : \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)), h_3 : \neg \forall x\, \neg p(x)$	
	montrons $\exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{B_{10}} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** B_{10}

Indication : on pourra utiliser les preuves B_7 et B_9.

(k) Prouver la formule :

$$(\forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))) \Rightarrow (\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))))$$

$\langle 1 \rangle$	montrons $(\forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))) \Rightarrow (\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))))$
	preuve à compléter
$\langle 1 \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)

Indication : on pourra utiliser les preuves B_2 et B_{10}.

2. Preuve de $F_2 \Rightarrow F_1$ (sous hypothèses)

Dans cette question, afin de s'affranchir de l'utilisation de la règle d'affaiblissement lors de la construction de preuves à partir de preuves déjà établies, dans chaque preuve on fait uniquement figurer explicitement les hypothèses utilisées dans la preuve (les autres hypothèses éventuellement présentes sont omises).

(a) Prouver la formule $\forall x\, \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$ à partir de l'hypothèse $h_1 : \forall x\, \neg p(x)$. On note B_1 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_1} \rangle$	supposons $h_1 : \forall x\, \neg p(x)$, montrons $\forall x\, \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{B_1} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** B_1

(b) Quelles sont les deux propriétés de l'égalité qui sont nécessaires pour établir $\mathrm{eq}(x_1, y_1)$ à partir des hypothèses $\mathrm{eq}(z, x_1)$ et $\mathrm{eq}(z, y_1)$. On note h^1_{eq} et h^2_{eq} ces deux propriétés. Construire la preuve de la formule $(\mathrm{eq}(z, x_1) \wedge \mathrm{eq}(z, y_1)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1, y_1)$ à partir des hypothèses h^1_{eq} et h^2_{eq}. On note B_2 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_2} \rangle$	supposons h^1_{eq} : ***formule à compléter***, h^2_{eq} : ***formule à compléter***	
	montrons $(\mathrm{eq}(z, x_1) \wedge \mathrm{eq}(z, y_1)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1, y_1)$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{B_2} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** B_2

(c) A partir des hypothèses $h_3 : p(z) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \text{eq}(z,y))$ et $h_{pxy} : p(x_1) \wedge p(y_1)$, prouver la formule $\text{eq}(z,x_1) \wedge \text{eq}(z,y_1)$. On note B_3 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_3} \rangle$	supposons $h_3 : p(z) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \text{eq}(z,y)), h_{pxy} : p(x_1) \wedge p(y_1)$, montrons $\text{eq}(z,x_1) \wedge \text{eq}(z,y_1)$ ***preuve à compléter***	
$\langle 1_{B_3} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** B_3

(d) Prouver la formule $\forall x\,\forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \text{eq}(x,y))$ à partir des hypothèses h^1_{eq}, h^2_{eq} et $h_2 : \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \text{eq}(x,y)))$. On note B_4 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_4} \rangle$	supposons h^1_{eq} : ***formule à compléter***, h^2_{eq} : ***formule à compléter***, $h_2 : \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \text{eq}(x,y)))$ montrons $\forall x\,\forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \text{eq}(x,y))$ ***preuve à compléter***	
$\langle 1_{B_4} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** B_4

Indication : on pourra utiliser les preuves B_2 et B_3.

(e) Prouver la formule :

$$(\forall x\,\neg p(x) \vee \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \text{eq}(x,y)))) \Rightarrow (\forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \text{eq}(x,y)))$$

à partir de hypothèses h^1_{eq} et h^2_{eq}.

$\langle 1 \rangle$	supposons h^1_{eq} : ***formule à compléter***, h^2_{eq} : ***formule à compléter*** montrons $(\forall x\,\neg p(x) \vee \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \text{eq}(x,y)))) \Rightarrow (\forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \text{eq}(x,y)))$ ***preuve à compléter***
$\langle 1 \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)

Indication : on pourra utiliser les preuves B_1 et B_4.

TME Edukera sur les échiquiers : Structures

Les exercices sur les échiquiers proposés sur la plateforme Edukera reposent sur un mécanisme permettant de vérifier si des propriétés sur les pièces placées sur un échiquier exprimées par une formule logique sont satisfaites par un échiquier donné. Par exemple, avec l'échiquier de la figure 2, la formule exprimant que tous les pions sont sur la même ligne est "vraie" tandis que la formule exprimant que le fou est de la même couleur que le cavalier est "fausse". Il est ici possible de déplacer les pièces de cet échiquier pour changer le résultat de l'interprétation de ces deux formules.

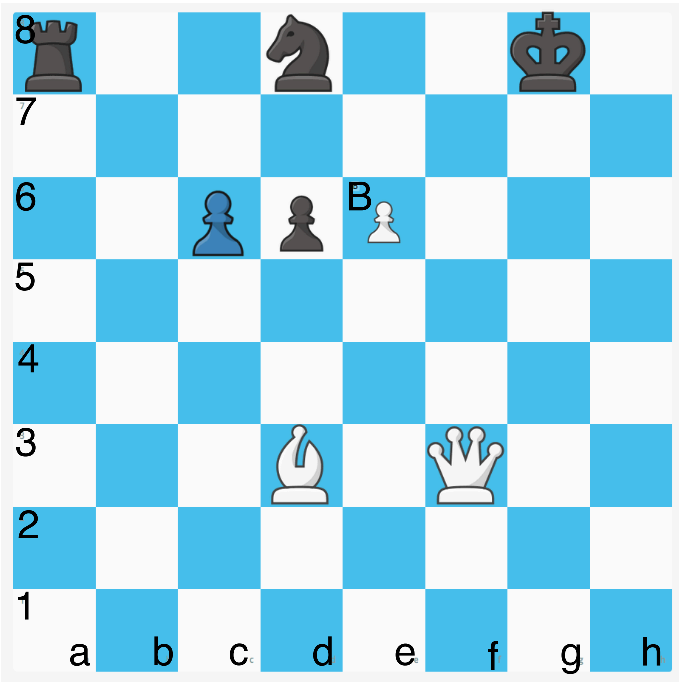

Figure 2 – Exemple d'échiquier de la plateforme Edukera

1 Termes

Syntaxe : définition de l'ensemble des termes

L'ensemble $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ des termes considérés contient uniquement des constantes et des variables (la signature utilisée ne contient aucun symbole de fonction d'arité strictement positive) désignant des pièces sur un échiquier. Ces termes sont construits à partir d'un ensemble $\mathcal{F}_0$ contenant 8 symboles de constante (les 8 premières lettres de l'alphabet en majuscule) et d'un ensemble X contenant 26 symboles de variable (les lettres de l'alphabet en minuscule).

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}\}$$
$$X = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h}, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}, \mathrm{l}, \mathrm{m}, \mathrm{n}, \mathrm{o}, \mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r}, \mathrm{s}, \mathrm{t}, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}$$

Les symboles de constante vont servir à nommer des pièces sur l'échiquier.

Interprétation des termes : construction d'un échiquier

Les termes désignent des pièces positionnées sur un échiquier contenant 8 colonnes (les abscisses de gauche à droite sont désignées par les lettres a, b, c, d, e, f, g et h) et 8 lignes (les ordonnées du bas vers le haut sont désignées par les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8). Par exemple, le pion nommé B sur l'échiquier de la figure 2 se trouve sur la case de coordonnées (e,6).

A chaque pièce placée sur l'échiquier, on associe une position, une espèce, une couleur et une taille (il y a au plus une pièce par case de l'échiquier). L'ensemble Pos des positions possibles contient l'ensemble des coordonnées de l'échiquier :

$$\mathrm{Pos} = \left\{ \begin{array}{cccccccc} (\mathrm{a},8) & (\mathrm{b},8) & (\mathrm{c},8) & (\mathrm{d},8) & (\mathrm{e},8) & (\mathrm{f},8) & (\mathrm{g},8) & (\mathrm{h},8) \\ (\mathrm{a},7) & (\mathrm{b},7) & (\mathrm{c},7) & (\mathrm{d},7) & (\mathrm{e},7) & (\mathrm{f},7) & (\mathrm{g},7) & (\mathrm{h},7) \\ (\mathrm{a},6) & (\mathrm{b},6) & (\mathrm{c},6) & (\mathrm{d},6) & (\mathrm{e},6) & (\mathrm{f},6) & (\mathrm{g},6) & (\mathrm{h},6) \\ (\mathrm{a},5) & (\mathrm{b},5) & (\mathrm{c},5) & (\mathrm{d},5) & (\mathrm{e},5) & (\mathrm{f},5) & (\mathrm{g},5) & (\mathrm{h},5) \\ (\mathrm{a},4) & (\mathrm{b},4) & (\mathrm{c},4) & (\mathrm{d},4) & (\mathrm{e},4) & (\mathrm{f},4) & (\mathrm{g},4) & (\mathrm{h},4) \\ (\mathrm{a},3) & (\mathrm{b},3) & (\mathrm{c},3) & (\mathrm{d},3) & (\mathrm{e},3) & (\mathrm{f},3) & (\mathrm{g},3) & (\mathrm{h},3) \\ (\mathrm{a},2) & (\mathrm{b},2) & (\mathrm{c},2) & (\mathrm{d},2) & (\mathrm{e},2) & (\mathrm{f},2) & (\mathrm{g},2) & (\mathrm{h},2) \\ (\mathrm{a},1) & (\mathrm{b},1) & (\mathrm{c},1) & (\mathrm{d},1) & (\mathrm{e},1) & (\mathrm{f},1) & (\mathrm{g},1) & (\mathrm{h},1) \end{array} \right\}$$

Chaque pièce appartient à une espèce (les espèces sont présentées sur la figure 3), est d'une certaine taille (grande, moyenne ou petite) et d'une certaine couleur (blanche, noire, bleue). Les ensembles d'espèces, de tailles et de couleurs sont définis par :

$$\mathrm{Esp} = \{\mathrm{e\_roi}, \mathrm{e\_reine}, \mathrm{e\_tour}, \mathrm{e\_fou}, \mathrm{e\_cavalier}, \mathrm{e\_pion}\}$$
$$\mathrm{Tailles} = \{\mathrm{t\_petit}, \mathrm{t\_moyen}, \mathrm{t\_grand}\}$$
$$\mathrm{Couleurs} = \{\mathrm{c\_blanc}, \mathrm{c\_noir}, \mathrm{c\_bleu}\}$$

e_roi e_reine e_tour e_fou e_cavalier e_pion

FIGURE 3 – Espèces des pièces de l'échiquier de la plateforme Edukera

Certaines pièces ont un nom : il s'agit d'une constante de $\mathcal{F}_0$. Par convention la valeur `None` sert à nommer les pièces anonymes (i.e. sans nom). Deux pièces différentes ne peuvent pas avoir le même nom lorsque ce nom est un élément de $\mathcal{F}_0$. Autrement dit tous les symboles de $\mathcal{F}_0$ ne servent pas nécessairement à nommer une pièce de l'échiquier et un nom de $\mathcal{F}_0$ ne peut pas servir à nommer deux pièces différentes. Un échiquier E est la donnée d'une grille sur laquelle sont disposées des pièces et est représenté par un ensemble de quintuplets. Chaque quintuplet $((x, y), e, t, c, n) \in E$ est un élément du produit cartésien :

$$\text{Pos} \times \text{Esp} \times \text{Tailles} \times \text{Couleurs} \times (\mathcal{F}_0 \cup \{\texttt{None}\})$$

et exprime qu'une pièce de nom n ($n = \texttt{None}$ si la pièce n'a pas de nom), d'espèce e, de taille t et de couleur c se trouve à la position (x, y) sur l'échiquier E. L'ensemble des échiquiers possibles est donc :

$$\mathbf{E} = \wp(\text{Pos} \times \text{Esp} \times \text{Tailles} \times \text{Couleurs} \times (\mathcal{F}_0 \cup \{\texttt{None}\}))$$

où lorsque S est un ensemble, $\wp(S)$ désigne l'ensemble des parties de S.

Exercice 1 Donner les éléments de l'ensemble E correspondant à l'échiquier représenté sur la figure 2 (sur cette figure, les pièces qui ne sont pas des pions sont toutes grandes et seul le petit pion blanc a un nom qui est B).

Interprétation des termes : construction d'une structure à partir d'un échiquier

Etant donné un échiquier $E \in \mathbf{E}$, on construit une structure $\mathbf{M}_E$ permettant d'interpréter l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$. La structure $\mathbf{M}_E$ est définie par :

— un domaine d'interprétation correspondant à l'ensemble de tous les quintuplets représentant les pièces positionnées sur l'échiquier E, auquel on ajoute un élément particulier (Error) :

$$|\mathbf{M}_E| = \{((x, y), e, t, c, n) \in E\} \cup \{\text{Error}\}$$

— une fonction d'interprétation qui associe un élément de $|\mathbf{M}_E|$ à chaque symbole de constante de $\mathcal{F}_0$ désignant une pièce de l'échiquier E : il s'agit du quintuplet correspondant à cette pièce sur l'échiquier (si aucune pièce de nom n se trouve sur l'échiquier, l'interprétation de n déclenche une erreur qui peut être vue comme une valeur particulière Error du domaine d'interprétation) :

$$n^{\mathbf{M}_E} = \begin{cases} ((x, y), e, t, c, n) & \text{si } ((x, y), e, t, c, n) \in E \\ \text{Error} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2 On considère à nouveau l'échiquier représenté sur la figure 2. Quelle est la valeur de $\text{A}^{\mathbf{M}_E}$? de $\text{B}^{\mathbf{M}_E}$?

2 Formules logiques

Symboles de prédicat

Les formules logiques de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ expriment des propriétés sur les pièces d'un échiquier. Elles sont construites à partir de l'ensemble X de symboles de variable, de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ de symboles de constante et de l'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ de symboles de prédicat où :

$$\mathcal{P}_1 = \{\text{roi}, \text{reine}, \text{tour}, \text{fou}, \text{cavalier}, \text{pion}, \text{blanc}, \text{noir}, \text{bleu}, \text{petit}, \text{moyen}, \text{grand}\}$$

$$\mathcal{P}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{droiteDe}, \text{gaucheDe}, \text{basDe}, \text{hautDe}, \text{plusPetit}, \text{plusGrand}, \\ \text{idLigne}, \text{idColonne}, \text{idTaille}, \text{idCouleur}, = \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{P}_3 = \{\text{entre}\}$$

Interprétation des prédicats : construction d'une structure à partir d'un échiquier (suite)

Etant donné un échiquier E, l'interprétation d'un symbole de prédicat $p \in \mathcal{P}_k$ $(k \in \{1, 2, 3, \})$ est un ensemble de k-uplets de valeurs du domaine d'interprétation, c'est-à-dire un ensemble de k-uplets de quintuplets correspondant aux pièces placées sur l'échiquier. L'interprétation des prédicats d'espèce, de couleur et de taille de $\mathcal{P}_1$ est définie en examinant les quintuplets de E et en considérant la propriété souhaitée. Par exemple, l'interprétation du prédicat pion avec la structure $|\mathbf{M}_E|$ est définie par :

$$\text{pion}^{\mathbf{M}_E} = \{((x, y), \text{e\_pion}, t, c, n) \in E\}$$

Si E est l'échiquier représenté sur la figure 2, on a donc :

$$\text{pion}^{\mathbf{M}_E} = \left\{ \begin{array}{l} ((\text{c}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_bleu}, \text{t\_grand}, \texttt{None}), ((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None}), \\ ((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}) \end{array} \right\}$$

L'interprétation des prédicats de $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ est similaire mais nécessite des opérations de comparaison sur les composants des quintuplets de E. Par exemple, l'interprétation du prédicat plusPetit avec la structure $|\mathbf{M}_E|$ est définie par :

$$\text{plusPetit}^{\mathbf{M}_E} = \left\{ \begin{array}{l} (((x_1, y_1), e_1, t_1, c_1, n_1), ((x_2, y_2), e_2, t_2, c_2, n_2)) \in E \times E \\ \mid \left(\begin{array}{ll} & (t_1 = \text{t\_petit et } (t_2 = \text{t\_moyen ou } t_2 = \text{t\_grand})) \\ \text{ou} & (t_1 = \text{t\_moyen et } t_2 = \text{t\_grand}) \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

Si E est l'échiquier représenté sur la figure 2, on a donc :

$$\text{plusPetit}^{\mathbf{M}_E} = \left\{ \begin{array}{l} (((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}), ((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None})), \\ (((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}), ((\text{c}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_bleu}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}), ((\text{d}, 3), \text{e\_fou}, \text{c\_blanc}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}), ((\text{f}, 3), \text{e\_reine}, \text{c\_blanc}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}), ((\text{a}, 8), \text{e\_tour}, \text{c\_noir}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}), ((\text{d}, 8), \text{e\_cavalier}, \text{c\_noir}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{e}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_blanc}, \text{t\_petit}, \text{B}), ((\text{g}, 8), \text{e\_roi}, \text{c\_noir}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None}), ((\text{c}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_bleu}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None}), ((\text{d}, 3), \text{e\_fou}, \text{c\_blanc}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None}), ((\text{f}, 3), \text{e\_reine}, \text{c\_blanc}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None}), ((\text{a}, 8), \text{e\_tour}, \text{c\_noir}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None}), ((\text{d}, 8), \text{e\_cavalier}, \text{c\_noir}, \text{t\_grand}, \texttt{None})), \\ (((\text{d}, 6), \text{e\_pion}, \text{c\_noir}, \text{t\_moyen}, \texttt{None}), ((\text{g}, 8), \text{e\_roi}, \text{c\_noir}, \text{t\_grand}, \texttt{None})) \end{array} \right\}$$

Exercice 3 Etant donné un échiquier E, définir $p^{\mathbf{M}_E}$ pour tous les symboles de prédicat de $\mathcal{P}$.

Exercice 4 On considère à nouveau l'échiquier E représenté sur la figure 2. Donner les éléments de l'ensemble $p^{\mathbf{M}_E}$ pour tous les symboles de prédicat de $\mathcal{P}$.

3 Exercices Edukera

L'intérêt des exercices ne réside pas uniquement dans l'élaboration d'une solution. Il est tout aussi important de comprendre pourquoi une solution est correcte que de comprendre ce qui la rendrait fausse. Pour que vos solutions aient du sens, vous devez :

— toujours poser sur l'échiquier au moins une pièce de chaque type apparaissant dans la formule (roi, reine, ...)
— une fois que vous avez trouvé une configuration satisfaisant la formule, bougez, modifiez les pièces pour bien comprendre pouquoi la formule est satisfaite

Voici la liste des exercices et questions qu'il vous est conseillé de faire.

Échiquier 1 - compréhension des prédicats portant sur la taille et la position

1. plusGrand
2. entre
3. droiteDe
4. basDe
5. hautDe
6. gaucheDe
7. ensemble des prédicats

Pour les échiquiers suivants, il vous est précisé, pour chaque question, les pièces que vous devez au minimum poser sur le plateau.

Échiquier 4 - formules avec quantificateurs

28. deux reines de tailles différentes
29. deux reines de tailles différentes
30. deux pions de tailles différentes
31. deux rois de tailles différentes
32. deux pions et une autre pièce sur le plateau. Que se passe-t-il s'il n'y a aucun pion sur le plateau ?
33. deux rois et une autre pièce sur le plateau. Que se passe-t-il s'il n'y a aucun roi sur le plateau ?
34. deux reines et une autre pièce sur le plateau. Que se passe-t-il s'il n'y a aucune reine sur le plateau ?
35. un reine et un pion. Pouvez-vous trouver un plateau qui ne satisfait pas la formule ?
36. deux reines, deux pions et deux rois avec le plus de tailles différentes possibles.
37. deux petites, deux moyennes et deux grandes pièces de types les plus variés possibles
38. trois reines, trois pions et trois rois de tailles les plus variées possibles

Échiquier 5 - combinaison de quantificateurs

39. Est-il possible de ne pas satisfaire la première formule ?
40. 3 pièces quelconques. A partir de combien de pièces n'est-il plus possible de satisfaire la formule ?

Échiquier 6 - formalisation

Dans cet exercice, vous devez écrire la formule logique correspondant à la phrase donnée et placer des pièces pour que cette formule soit satisfaite par le plateau. Vous devez répondre aux questions 42, 43, 45, 49, 52, 53 et 63.

Échiquier 9 - formalisation

Dans cet exercice, vous devez écrire la formule logique correspondant à la phrase donnée et placer des pièces pour que cette formule soit satisfaite par le plateau. Vous devez répondre aux questions 77, 78 et 79. Pour la question 79, la formule obtenue se décompose en deux parties, une partie exprimant qu'il n'y a pas de pion et l'autre partie exprimant qu'il y a un pion et donnant la condition à vérifier dans ce cas.

Échiquier 10 - combinaison de quantificateurs

80. 81. 82. 83. deux pièces
84. 85. deux rois
86. les contraintes imposées par les formules

TD5 : Interprétation des variables et des quantificateurs

Les exercices annotés par le symbole $\star$ correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

Exercice 5.1 (Interprétation des termes et valuations)
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{s\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\otimes\}$ et soit $t = s(\otimes(s(s(a)), \otimes(x, s(y))))$ un terme de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.
2. Dessiner l'arbre représentant le terme t.
3. On considère une structure $\mathbf{M}$ de domaine $\mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{array}{lll} a^{\mathbf{M}} = 2 & s^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & \otimes^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ b^{\mathbf{M}} = 3 & s^{\mathbf{M}}(n) = n + 1 & \otimes^{\mathbf{M}}(n, m) = n \times m \end{array}$$

   (a) Calculer $[t]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}}$ en fonction de $\mathrm{v}(x)$ et $\mathrm{v}(y)$.
   (b) Soit une valuation v_1 telle que $\mathrm{v}_1(x) = 5$ et $\mathrm{v}_1(y) = 1$. Calculer $[t]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}_1}$.
   (c) Déterminer une valuation $\mathrm{v}_2 : X \to \mathbb{N}$ telle que $[t]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}_2} = 33$.
   (d) Calculer $[t]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}_3}$ pour la valuation $\mathrm{v}_3 = \mathrm{v}_1[x \leftarrow 7]$.

Exercice 5.2 (($\star$) Interprétation des termes)
On considère un langage de termes avec un seul symbole de variable : $X = \{x\}$. L'ensemble des symboles de fonction de ce langage est $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f, g\}$ (f et g sont des symboles de fonctions unaires).

1. Particulariser la définition de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ pour X et $\mathcal{F}$.
2. Donner une définition inductive du nombre $\mathrm{nb}_f(t)$ de symboles f et du nombre $\mathrm{nb}_g(t)$ de symboles g apparaissant dans un terme t.
3. Soit $\mathbf{M}_1$ une structure dont le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}_1| = \mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs et telle que :

$$\begin{array}{ll} f^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & g^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ f^{\mathbf{M}_1}(n) = n + 1 & g^{\mathbf{M}_1}(n) = n - 1 \end{array}$$

   Montrer (par induction) que pour tout terme $t \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$, $[t]^{\mathbf{M}_1}_{\mathrm{v}} = \mathrm{v}(x) + \mathrm{nb}_f(t) - \mathrm{nb}_g(t)$ pour toute valuation v.
4. Soit $\mathbf{M}_2$ une structure dont le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}_2| = \mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs et telle que :

$$\begin{array}{ll} f^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & g^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ f^{\mathbf{M}_2}(n) = 2 \times n & g^{\mathbf{M}_2}(n) = -n \end{array}$$

   Montrer (par induction) que pour tout terme $t \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$, $[t]^{\mathbf{M}_2}_{\mathrm{v}} = 2^{\mathrm{nb}_f(t)} \times \mathrm{v}(x) \times (-1)^{\mathrm{nb}_g(t)}$ pour toute valuation v.

Exercice 5.3 (($\star$) Interprétation des formules)
On considère un plateau carré contenant N cases dans lesquelles peuvent être placées des pièces qui sont soit rondes soit carrées. Chaque case est désignée par ses coordonnées (ℓ, c) (désignant respectivement un numéro de ligne et un numéro de colonne) et contient au plus une pièce. Une

pièce est représentée par un tuple (p, ℓ, c) où $p \in \{\bigcirc, \square\}$ désigne la forme de la pièce, ℓ le numéro de ligne et c le numéro de colonne où se trouve la pièce. On peut représenter un plateau par l'ensemble des pièces qu'il contient.
Etant donné un plateau P, on définit une structure $\mathbf{M}_P$ dont le domaine est $|\mathbf{M}_P| = P$. On considère l'ensemble de prédicats $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ où $\mathcal{P}_1 = \{\text{est\_rond}, \text{est\_carre}\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{\text{est\_a\_gauche}\}$ et tel que :
- est_rond(x) signifie que la pièce x située sur le plateau est ronde
- est_carre(x) signifie que la pièce x située sur le plateau est carrée
- est_a_gauche(x, y) signifie que la pièce x est dans une case qui se trouve à gauche de la case contenant la pièce y : une case de coordonnées (ℓ, c) est à gauche d'une case de coordonnées (ℓ', c') lorsque $c < c'$

1. Voici un exemple de plateau noté P_{ex} lorsque $N = 36$ (les coordonnées de chaque case figurent en bas des cases).

(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)
$\square$ (4,0)	$\bigcirc$ (4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
(3,0)	$\bigcirc$ (3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
(2,0)	(2,1)	(2,2)	$\square$ (2,3)	(2,4)	(2,5)
(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	$\bigcirc$ (0,4)	(0,5)

$$P_{\text{ex}} = \left\{ \begin{array}{l} (\square, 4, 0), \\ (\bigcirc, 4, 1), \\ (\bigcirc, 3, 1), \\ (\square, 2, 3), \\ (\bigcirc, 0, 4) \end{array} \right\}$$

   (a) Définir les ensembles $\text{est\_rond}^{\mathbf{M}_P}$, $\text{est\_carre}^{\mathbf{M}_P}$ et $\text{est\_a\_gauche}^{\mathbf{M}_P}$ obtenus à partir d'un plateau P quelconque. Donner les éléments de ces ensembles pour le plateau P_{ex} donné en exemple.

   (b) On considère l'énoncé « *Il existe une pièce ronde située à gauche de toutes les pièces carrées.* ».

      i. Proposer une formule F permettant d'exprimer cet énoncé.

      ii. Montrer que $[F]_{\text{v}}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} = 0$ (pour toute valuation v).

      iii. Proposer un plateau P_{new} tel que $[F]_{\text{v}}^{\mathbf{M}_{P_{\text{new}}}} = 1$ (pour toute valuation v).

2. Voici un exemple de plateau noté P_{ex} lorsque $N = 16$ (les coordonnées de chaque case figurent en bas des cases).

(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\square$ (2,0)	(2,1)	$\square$ (2,2)	(2,3)
(1,0)	$\bigcirc$ (1,1)	(1,2)	$\bigcirc$ (1,3)
$\square$ (0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)

$$P_{\text{ex}} = \left\{ \begin{array}{l} (\square, 2, 0), \\ (\square, 2, 2), \\ (\bigcirc, 1, 1), \\ (\bigcirc, 1, 3), \\ (\square, 0, 0) \end{array} \right\}$$

   (a) Calculer $[F_1]_{\text{v}}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}}$ (pour toute valuation v) avec $F_1 = \forall x\, (\text{est\_rond}(x) \Rightarrow \exists y\, \text{est\_a\_gauche}(y, x))$.

   (b) Calculer $[F_2]_{\text{v}}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}}$ (pour toute valuation v) avec $F_2 = \forall x\, (\text{est\_rond}(x) \Rightarrow \forall y\, \text{est\_a\_gauche}(y, x))$.

   (c) Est-il possible, en déplaçant une seule pièce, d'inverser la valeur de $[F_1]_{\text{v}}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}}$ (pour toute valuation v) ? Justifier votre réponse.

(d) Est-il possible, en déplaçant une seule pièce, d'inverser la valeur de $[F_2]_{\mathrm{v}}^{\mathbf{M}_{P_{\mathrm{ex}}}}$ (pour toute valuation v) ? Justifier votre réponse.

Exercice 5.4 (($\star$) Interprétation des termes et des formules)
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{0\}$, $\mathcal{F}_1 = \{c\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \otimes\}$ et X un ensemble de symboles de variable. On considère l'ensemble $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ des termes avec variables. Soit t le terme $t = \oplus(x, \otimes(y, c(z)))$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \{0, c, \oplus, \otimes\}$.
2. Dessiner l'arbre représentant le terme t.
3. On définit la structure $\mathbf{M}$ dont le domaine $|\mathbf{M}|$ est l'ensemble des parties $\wp(A)$ de l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Chaque élément $m \in |\mathbf{M}|$ est donc un sous-ensemble de l'ensemble A. Les symboles de $\mathcal{F}$ sont interprétés comme suit.

$0^{\mathbf{M}} = \emptyset \in \|\mathbf{M}\|$ (ensemble vide)	$c^{\mathbf{M}} : \|\mathbf{M}\| \to \|\mathbf{M}\|$ $c^{\mathbf{M}}(E) = \overline{E} = A \backslash E = \{e \in A \| e \notin E\}$ (complémentaire de E)
$\oplus^{\mathbf{M}} : \|\mathbf{M}\| \times \|\mathbf{M}\| \to \|\mathbf{M}\|$ $\oplus^{\mathbf{M}}(E_1, E_2) = E_1 \cup E_2$ (union)	$\otimes^{\mathbf{M}} : \|\mathbf{M}\| \times \|\mathbf{M}\| \to \|\mathbf{M}\|$ $\otimes^{\mathbf{M}}(E_1, E_2) = E_1 \cap E_2$ (intersection)

Par exemple, on a :

$$c^{\mathbf{M}}(\{1,3,6\}) = \{1,2,3,4,5,6,7\} \backslash \{1,3,6\} = \{2,4,5,7\}$$
$$\oplus^{\mathbf{M}}(\{1,2,4,7\}, \{1,2,3,4\}) = \{1,2,4,7\} \cup \{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4,7\}$$
$$\otimes^{\mathbf{M}}(\{1,2,4,7\}, \{1,2,3,4\}) = \{1,2,4,7\} \cap \{1,2,3,4\} = \{1,2,4\}$$

On considère la valuation $\mathrm{v}_1 : X \to |\mathbf{M}|$ telle que $\mathrm{v}_1(x) = \{5,6,7\}$, $\mathrm{v}_1(y) = \emptyset$ et $\mathrm{v}_1(z) = \{4\}$. Calculer $[t]_{\mathrm{v}_1}^{\mathbf{M}}$.

4. On considère à présent l'ensemble de symboles de prédicat $\mathcal{P} = \{\mathrm{eq}\}$ contenant un unique élément eq correspondant au prédicat d'arité 2 d'égalité dont l'interprétation est définie par $\mathrm{eq}^{\mathbf{M}} = \{(E_1, E_2) \mid E_1 = E_2\}$.
   (a) Soit F_1 la formule $\exists z\, \mathrm{eq}(x, \oplus(y, z))$. Quelle propriété sur $\mathrm{v}(x)$ et $\mathrm{v}(y)$ doit être vérifiée pour que $[F_1]_{\mathrm{v}}^{\mathbf{M}} = 1$?
   (b) Soit F_2 la formule $\forall x\, \forall y\, (F_1 \Rightarrow \mathrm{eq}(\otimes(y, c(x)), 0))$. Calculer $[F_2]_{\mathrm{v}}^{\mathbf{M}}$.

Exercice 5.5 (Quantification de formules atomiques)
On considère une structure $\mathbf{M}$ dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et dans laquelle l'interprétation du symbole de prédicat $p \in \mathcal{P}_2$ est définie par $p^{\mathbf{M}} = \{(x, y) \mid y = 2x\}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont satisfaites par $\mathbf{M}$?

(F_1) $p(0,0)$	(F_2) $p(1,1)$	(F_3) $\exists x\, p(1,x)$
(F_4) $\exists x\, p(x,1)$	(F_5) $\exists x\, p(x,2)$	(F_6) $\forall x\, p(1,x)$
(F_7) $\forall x\, p(x,1)$	(F_8) $\exists x\, \exists y\, p(x,y)$	(F_9) $\exists x\, \forall y\, p(x,y)$
(F_{10}) $\forall x\, \exists y\, p(x,y)$	(F_{11}) $\forall x\, \forall y\, p(x,y)$	

Exercice 5.6 (Domaine d'interprétation)
On considère un langage comprenant l'égalité (prédicat = d'arité 2) ainsi qu'un symbole de prédicat p d'arité 2. Soit les deux formules :

$$(F_1)\ \forall x\,\forall y\,(p(x,y) \Rightarrow \neg(x=y)) \qquad (F_2)\ \forall x\,\exists y\,(p(x,y) \wedge \neg(x=y))$$

Pour chacune de ces deux formules, déterminer s'il existe une structure $\mathbf{M}$ qui la satisfait :

1. lorsque le domaine d'interprétation de $\mathbf{M}$ est un singleton,
2. lorsque le domaine d'interprétation de $\mathbf{M}$ contient uniquement deux éléments,
3. lorsque le domaine d'interprétation de $\mathbf{M}$ est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et lorsque $p^{\mathbf{M}} = \{(x,y) \mid x \text{ est divisible par } y\}$.

Exercice 5.7 (($\star$) Interprétation des formules)

1. Soit l'ensemble de symbole de fonction $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, l'ensemble de symboles de prédicat $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p, q\}$ et X un ensemble de symboles de variables. Soit $\mathbf{M}$ une structure dont le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}| = \{d\}$ contient un unique élément.
   (a) Soit $\mathrm{v} : X \to |\mathbf{M}|$ une valuation et $x \in X$ un symbole variable quelconque. Que vaut $\mathrm{v}(x)$?
   (b) Que vaut $f^{\mathbf{M}}(d)$?
   (c) Combien d'interprétations $p^{\mathbf{M}}$ du symbole de prédicat p existe-t-il ? Donner ces interprétations.
   (d) Soit la formule $F = p(x, f(x)) \Rightarrow q(f(x), x)$ (avec $x \in X$).
      i. Quelles sont les interprétations $p^{\mathbf{M}}$ et $q^{\mathbf{M}}$ possibles des prédicats p et q pour que $[F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}} = 1$?
      ii. Quelles sont les interprétations $p^{\mathbf{M}}$ et $q^{\mathbf{M}}$ possibles des prédicats p et q pour que $[F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}} = 0$?
2. Soit l'ensemble de symbole de fonction $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, l'ensemble de symboles de prédicat $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p\}$ et X un ensemble de symboles de variable. Soit $\mathbf{M}$ une structure dont le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}| = \{d_1, d_2\}$ contient exactement deux éléments distincts.
   (a) Soit $v : X \to |\mathbf{M}|$ une valuation et $x \in X$ un symbole variable quelconque. Quelles sont les valeurs possibles de $v(x)$?
   (b) Combien d'interprétations $f^{\mathbf{M}}$ du symbole de fonction f existe-t-il ? Donner ces interprétations.
   (c) Combien d'interprétations $p^{\mathbf{M}}$ du symbole de prédicat p existe-t-il ? (on ne demande pas de donner ces interprétations)
   (d) Soit la formule $F = \forall x\,(p(x, f(x)) \Rightarrow p(f(x), x))$ et v une valuation quelconque.
      i. Donner l'expression $[F]^{\mathbf{M}}_v$ et la développer en utilisant le fait que $|\mathbf{M}| = \{d_1, d_2\}$.
      ii. Parmi les interprétations possibles de f données dans la question 2, existe-t-il une interprétation de f telle que $[F]^{\mathbf{M}}_v = 1$ quelle que soit l'interprétation de p ? Si oui laquelle ? Justifier votre réponse.
      iii. On considère l'interprétation $p^{\mathbf{M}} = \{(d_1, d_2)\}$. Pour chacune des interprétations possibles de f données dans la question 2, donner la valeur de $[F]^{\mathbf{M}}_v$. Justifier vos réponses.

$\mathbf{M}$	$\lvert\mathbf{M}\rvert$		$r^{\mathbf{M}}$
$\mathbf{M}_1$	$\mathbb{N}$	(entiers naturels)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_1 < n_2\}$
$\mathbf{M}_2$	$\mathbb{N}$	(entiers naturels)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_1 \leq n_2\}$
$\mathbf{M}_3$	$\mathbb{Z}$	(entiers relatifs)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n_1 < n_2\}$
$\mathbf{M}_4$	$\mathbb{Z}$	(entiers relatifs)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n_1 \leq n_2\}$
$\mathbf{M}_5$	$\mathbb{Q}$	(nombres rationnels)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid n_1 < n_2\}$
$\mathbf{M}_6$	$\mathbb{Q}$	(nombres rationnels)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid n_1 \leq n_2\}$
$\mathbf{M}_7$	$\wp(\mathbb{N})$	(parties de $\mathbb{N}$)	$\{(E_1, E_2) \in \wp(\mathbb{N}) \times \wp(\mathbb{N}) \mid E_1 \subset E_2\}$
$\mathbf{M}_8$	$\wp(\mathbb{N})$	(parties de $\mathbb{N}$)	$\{(E_1, E_2) \in \wp(\mathbb{N}) \times \wp(\mathbb{N}) \mid E_1 \subseteq E_2\}$

Table 1 – Structures de l'exercice 5.9

Exercice 5.8 (($\star$) Interprétation des formules)
Soit F la formule $(\forall x\, p(x, f(x))) \Rightarrow (\exists x\, q(f(x), x))$. On considère la structure $\mathbf{M}$ dont le domaine d'interprétation $\lvert\mathbf{M}\rvert = \mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels et telle que :

$$\begin{array}{lll} f^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & p^{\mathbf{M}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} & q^{\mathbf{M}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ f^{\mathbf{M}}(n) = n + 2 & p^{\mathbf{M}} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 + n_2 \text{ est pair}\} & q^{\mathbf{M}} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 \leq n_2\} \end{array}$$

Montrer que $[F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}} = 0$ pour toute valuation v.

Exercice 5.9 (Interprétation des formules)
Quelles sont parmi les formules closes ci-dessous celles qui sont satisfaites par les structures du tableau 1 ?

$$\begin{array}{l} (F_1)\ \forall x\ (\neg r(x,x) \wedge \forall y\ ((r(x,y) \Rightarrow \neg r(y,x)) \wedge \forall z\ ((r(x,y) \wedge r(y,z)) \Rightarrow r(x,z)))) \\ (F_2)\ \exists x\ \forall y\ r(x,y) \qquad (F_3)\ \forall x\ \exists y\ r(x,y) \qquad (F_4)\ \exists x\ \forall y\ r(y,x) \\ (F_5)\ \forall x\ \exists y\ r(y,x) \qquad (F_6)\ \forall x\ \forall y\ (r(x,y) \Rightarrow \exists z\ (r(x,z) \wedge r(z,y))) \end{array}$$

Exercice 5.10 (($\star$) Interprétation des formules)
On considère les deux formules :

$$(F_1)\ \ \forall x_1\, \forall x_2\, (\mathrm{eq}(f(x_1), f(x_2)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1, x_2)) \qquad (F_2)\ \ \forall y\, \exists x\, \mathrm{eq}(y, f(x))$$

Soit $\mathbf{M}$ une structure telle que $\lvert\mathbf{M}\rvert = \{a\}$ et $\mathrm{eq}^{\mathbf{M}} = \{(a, a)\}$. Montrer que $[F_1]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}} = 1$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}} = 1$ où v est une valuation quelconque.

Exercice 5.11 (($\star$) Interprétation des formules)

1. Soit $\mathbf{M}$ une structure telle que $\lvert\mathbf{M}\rvert = \{a, b, c\}$ et F_1 la formule $\exists x\, \forall y\, p(x, y)$.
   (a) Proposer une interprétation $p^{\mathbf{M}}$ de p telle que $p^{\mathbf{M}}$ contienne exactement 3 éléments (c-à-d 3 paires d'éléments de $\lvert\mathbf{M}\rvert$) et telle que $[F_1]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}} = 1$ (quelle que soit la valuation v) et montrer que $[F_1]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}} = 1$.
   (b) Proposer une interprétation $p^{\mathbf{M}}$ de p telle que $p^{\mathbf{M}}$ contienne exactement 3 éléments (c-à-d 3 paires d'éléments de $\lvert\mathbf{M}\rvert$) et telle que et $[F_1]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}} = 0$ (quelle que soit la valuation v) et montrer que $[F_1]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}} = 0$.
2. Soit F_2 la formule $\exists x\, ((\forall y\, p(x, y)) \Rightarrow \exists z\, p(z, x))$.

(a) Le domaine d'interprétation d'une structure peut-il être vide ?

(b) Montrer que si eq désigne le prédicat d'égalité, c-à-d si $\mathrm{eq}^{\mathbf{M}} = \{(k, k) \mid k \in |\mathbf{M}|\}$, alors $[\exists x\, \mathrm{eq}(x, x)]_{\mathrm{v}}^{\mathbf{M}} = 1$ (quelle que soit la valuation v).

(c) Montrer que la formule F_2 est valide.

3. A-t-on $F_2 \models F_1$? $F_1 \models F_2$? Justifier vos réponses.

Exercice 5.12 (($\star$) Satisfiabilité)

On considère les deux formules $F_1 = \forall x\, \exists y\, p(x, y)$ et $F_2 = \exists y\, \forall x\, p(x, y)$.

1. Définir une structure $\mathbf{M}_1$ telle que $[F_1]_{\mathrm{v}}^{\mathbf{M}_1} = [F_2]_{\mathrm{v}}^{\mathbf{M}_1} = 1$ pour toute valuation v.
2. Définir une structure $\mathbf{M}_2$ telle que $[F_1]_{\mathrm{v}}^{\mathbf{M}_2} = [F_2]_{\mathrm{v}}^{\mathbf{M}_2} = 0$ pour toute valuation v.
3. Définir une structure $\mathbf{M}_3$ telle que $[F_1]_{\mathrm{v}}^{\mathbf{M}_3} = 1$ et $[F_2]_{\mathrm{v}}^{\mathbf{M}_3} = 0$ pour toute valuation v.
4. Existe-t-il une structure $\mathbf{M}_4$ telle que $[F_1]_{\mathrm{v}}^{\mathbf{M}_4} = 0$ et $[F_2]_{\mathrm{v}}^{\mathbf{M}_4} = 1$ pour toute valuation v. Pourquoi ?

Exercice 5.13 (($\star$) Formules satisfiables, formules valides)

Montrer que les formules ci-dessous sont satisfiables mais ne sont pas valides.

$$\begin{array}{ll}
(F_1) & \forall y\, \exists x\, (p(x, y) \wedge (\forall z\, (p(z, y) \Rightarrow x = z))) \\
(F_2) & \forall x\, \forall y\, (q(x, y) \Rightarrow \exists z\, (q(x, z) \wedge q(z, y))) \\
(F_3) & (\forall y\, \exists x\, p(x, y)) \Rightarrow \exists x\, p(x, x) \\
(F_4) & \forall x\, ((\exists y\, p(x, y)) \Rightarrow \exists z\, p(z, x))
\end{array}$$

Exercice 5.14 (($\star$) Formules satisfiables, formules valides)

Pour chacune des formules ci-dessous, pouvez-vous trouver une structure qui satisfait la formule ? qui l'invalide ? La formule est-elle satisfiable ? valide ?

$$\begin{array}{ll}
(F_1) & (\exists x\, p(x)) \Rightarrow (\forall x\, p(x)) \\
(F_2) & (\forall x\, p(x)) \Rightarrow (\exists x\, p(x)) \\
(F_3) & \forall x\, (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)) \\
(F_4) & (\forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)) \Rightarrow \forall x\, (p(x) \wedge q(x)) \\
(F_5) & \exists x\, (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)) \\
(F_6) & (\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)) \Rightarrow \exists x\, (p(x) \wedge q(x)) \\
(F_7) & \forall x\, (p(x) \vee q(x)) \Rightarrow (\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)) \\
(F_8) & (\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)) \Rightarrow \forall x\, (p(x) \vee q(x)) \\
(F_9) & \exists x\, (p(x) \vee q(x)) \Rightarrow (\exists x\, p(x) \vee \exists x\, q(x)) \\
(F_{10}) & (\exists x\, p(x) \vee \exists x\, q(x)) \Rightarrow \exists x\, (p(x) \vee q(x)) \\
(F_{11}) & \exists x\, (p(f(x)) \vee (q(g(x)) \vee \neg p(f(a)))) \\
(F_{12}) & \exists y\, ((\forall x\, p(y, x)) \vee (\exists x\, (p(x, x) \wedge \neg p(x, y))))
\end{array}$$

Exercice 5.15 (($\star$) Formules valides, formules prouvables)

1. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_0 = \{a\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{f\}$, X un ensemble de symboles de variable et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \{p\}$ un ensemble contenant un unique symbole de prédicat p d'arité 1. Pour chacune des deux formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ci-dessous, déterminer si la formule est valide (et dans ce cas en fournir une preuve en utilisant les règles de la déduction naturelle), ou si elle n'est pas valide (et dans ce cas construire une structure $\mathbf{M}$ que vous utiliserez pour démontrer que la formule n'est pas valide).

$$F_1 = (\forall x\ (p(x) \wedge \neg p(f(x)))) \Rightarrow \neg p(f(a)) \qquad F_2 = \forall x\ ((p(x) \wedge \neg p(f(x))) \Rightarrow \neg p(f(a)))$$

2. On considère les deux formules $F_1 = \forall x\, \exists y\, p(x, y)$ et $F_2 = \forall x\, p(x, f(x))$. Pour chacune des deux formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ci-dessous, déterminer si la formule est valide (et dans ce cas en fournir une preuve en utilisant les règles de la déduction naturelle), ou si elle n'est pas valide (et dans ce cas construire une structure $\mathbf{M}$ que vous utiliserez pour démontrer que la formule n'est pas valide).

$$F_1 \Rightarrow F_2 \qquad\qquad F_2 \Rightarrow F_1$$