Final Project Report

เรื่อง

Swing Option

จัดทำโดย

นายธนพัฒน์	ตราชู	6231325521
นายพงศภัค	พูลทัศฐาน	6231340921
นายสหัสวรรษ	ศิวะโกศิษฐ	6231367921
นายธนภัทร	สิริโภไคย	6241086526

นำเสนอ

รศ. ดร. ไทยศิริ เวทไว

รายงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของรายวิชา 2604495 วิศวกรรมการเงินเบื้องต้น

(Introduction to Financial Engineering)

ภาควิชาธนาคารและการเงิน คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคการศึกษาต้น ปีการศึกษา 2565

สารบัญ

1. ที่มาและความสำคัญ (Background and Significance)

ในตลาดซื้อขายสินค้าโภคภัณฑ์ มีตราสารอนุพันธ์ทางการเงินหลายชนิดที่ถูกนำมาใช้ในการบริหารความเสี่ยงในด้านราคาและปริมาณที่ผันผวนของสินค้าโภคภัณฑ์ ซึ่งหนึ่งในตราสารอนุพันธ์เหล่านั้นมีเครื่องมือทางการเงินอยู่ชนิดหนึ่งที่ได้รับความสนใจเป็นอย่างมากจากผู้ซื้อขายสินค้าโภคภัณฑ์ นั่นคือ Swing Option ซึ่ง Swing Option นั้นอาจถูกรู้จักในชื่อ Take-or-Pay หรือ Take-and-Pay Contract โดย Swing Option มีการซื้อขายกันนอกตลาดหลักทรัพย์ (Over-the-counter)

สาเหตุที่ Swing Option ได้รับความนิยมในตลาดซื้อขายสินค้าโภคภัณฑ์ เนื่องจาก Swing Option สามารถเพิ่มความยืดหยุ่นในด้านปริมาณที่ซื้อขายได้ โดยส่วนใหญ่แล้วผู้บริโภคมักจะกังวลในเรื่องของจำนวนสินค้าโภคภัณฑ์ว่าอาจมีไม่เพียงพอต่อความต้องการ รวมไปถึงอัตราการบริโภคของสินค้าโภคภัณฑ์นั้นมีความไม่แน่นอน นอกจากนี้สินค้าโภคภัณฑ์หลายอย่างนั้นไม่สามารถซื้อมากักเก็บไว้ได้ง่าย ยกตัวอย่างเช่น ก๊าซธรรมชาติ ไฟฟ้า และน้ำมัน ดังนั้นผู้บริโภคจึงต้องการความยืดหยุ่นในเรื่องปริมาณการซื้อ ซึ่ง Swing Option จะช่วยตอบสนองตวามต้องการในส่วนนี้ได้ เนื่องจากผู้ซื้อ Swing Option จะได้รับสิทธิ์ในการเพิ่มหรือลดปริมาณหน่วยของสินค้าโภคภัณฑ์ในการซื้อขายในแต่ละครั้ง โดยยังคงราคาต่อหน่วยสินค้าเดิมไว้เมื่อมีการใช้สิทธิ์ การซื้อ Swing Option ไว้ในครอบครองจึงมักช่วยในการบริหารจัดการความเสี่ยงเกี่ยวกับปริมาณความต้องการบริโภคสินค้าที่ไม่แน่นอนได้

2. วัตถุประสงค์ (Objectives)

- เพื่อศึกษาอนุพันธ์ทางการเงินที่นอกเหนือจากในชั้นเรียน
- เพื่อศึกษาการนำโมเดลราคาที่มีลักษณะ Mean-Reversion มาปรับใช้เข้ากับสินค้าโภคภัณฑ์
- เพื่อศึกษาการแปลงโมเดลราคาที่มีลักษณะ Mean-Reversion ให้อยู่ในรูป Binomial Tree
- เพื่อศึกษาการคำนวณราคาของ Swing Option เบื้องต้นจาก Binomial Tree
- เพื่อวิเคราะห์ถึงปัจจัยต่าง ๆ ที่มีผลกระทบต่อราคาของ Swing Option

3. คำจำกัดความของ Swing Option (Swing Option Definition)

3.1 คำนิยาม (Definition)

Swing Option คือ สัญญาประเภทหนึ่งที่เป็นที่นิยมในตลาดพลังงาน โดย Swing Option จะถูกใช้ร่วมกับ Commodity Swap Contract โดยสัญญานี้จะช่วยเพิ่มความยืดหยุ่นในการกำหนดปริมาณที่อยากซื้อสินทรัพย์อ้างอิงในแต่ละงวดให้กับนักลงทุน

นอกจากนี้ Swing Option ก็มีได้หลากหลายประเภท ขึ้นอยู่กับความสามารถและข้อจำกัดของ Swing Option โดยข้อจำกัดพื้นฐานของ Swing Option มีดังนี้

1. จำนวนสิทธิ์ที่สามารถ exercise ได้ (n_right)

สมมติให้จำนวนสิทธิ์ที่สามารถ exercise ได้ คือ 5 ครั้งโดยจำนวนงวดที่ตกลงกันไว้ใน Commodity Swap คือ 10 งวด ดังนั้นผู้ถือจะสามารถใช้สิทธิ์ได้ทั้งหมด 5 ครั้ง จากทั้งหมด 10 งวด แต่ในงวดเดียวกันจะสามารถ exercise ได้ครั้งเดียว

2. ปริมาณสินทรัพย์อ้างอิงที่สามารถซื้อเพิ่มหรือลดได้ในแต่ละงวด (local constraint)

สมมติให้ ปริมาณที่ตกลงกันไว้ใน Commodity Swap คือ 100 หน่วย และปริมาณที่สามารถซื้อเพิ่มได้ คือ 10 หน่วย และปริมาณที่สามารถลดได้ คือ 5 หน่วย ดังนั้นเมื่อผู้ถือ exercise ก็จะได้รับสิทธิ์ในการซื้อสินทรัพย์อ้างอิงในปริมาณตั้งแต่ 95 หน่วย ถึง 110 หน่วย

3. ปริมาณสินทรัพย์อ้างอิงรวมที่สามารถซื้อเพิ่มหรือลดได้ตลอดทั้งสัญญา (global constraint)

สมมติให้ ปริมาณสินทรัพย์อ้างอิงรวมที่สามารถซื้อเพิ่มได้ คือ 10 หน่วย และ ปริมาณสินทรัพย์อ้างอิงรวมที่สามารถลดได้ คือ 5 หน่วย ดังนั้นปริมาณทั้งหมดของสินทรัพย์อ้างอิงที่ซื้อเพิ่มต้องห้ามเกิน 10 หน่วย และปริมาณทั้งหมดของสินทรัพย์อ้างอิงที่ถูกลดไปต้องห้ามเกิน 5 หน่วย

ในส่วนของข้อจำกัดของ Swing Option ในแต่ละประเภทก็จะมีข้อจำกัดที่แตกต่างกันออกไปได้ เช่น บาง Swing Option ไม่สามารถ exercise ได้ติดต่อกันทุกงวดโดยจะมีข้อจำกัดว่า เมื่อ exercise ไปแล้วจะต้องรอเป็นระยะเวลาหนึ่งก่อนที่จะสามารถ exercise ได้ หรือบาง Swing Option สามารถละเมิดข้อจำกัดบางข้อได้ แต่ก็จะมีค่าปรับเมื่อละเมิด

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่า Swing Option นั้นมีความหลากหลายมาก ซึ่งทำให้เราเกิดความสนใจใน Swing Option และอยากศึกษาเพิ่มเติม

3.2 Payoff Equation

ในรายงานนี้จะพิจารณาการใช้ Swing Option ในสินค้าโภคภัณฑ์ที่เกี่ยวกับพลังงาน ผู้ที่ซื้อ Option จะต้องเป็นคนถือ โดยจะสามารถหา Payoff ของ Option นี้ได้ตามสมการด้านล่าง

$$payoff = \max(0,\ n(S_T - K))$$

โดยที่ n คือ จำนวนหน่วยของสินทรัพย์อ้างอิงที่สามารถซื้อเพิ่ม ($n>0$) หรือลด ($n<0$) ได้จากการใช้สิทธิ์

S_T คือ ราคาของสินทรัพย์อ้างอิง ณ ที่เวลา T

K คือ ราคาใช้สิทธิ์

จากสมการข้างต้น สามารถแยกการคำนวน payoff ออกได้เป็น 4 กรณี

<u>กรณีที่ 1</u> $n \geq 0, \quad S_T - K \geq 0$

ในกรณีนี้ราคาของสินทรัพย์อ้างอิงมากกว่าราคาใช้สิทธิ์ และต้องการที่จะซื้อเพิ่ม n หน่วย และใช้สิทธิ์ Swing Option 1 สิทธิ์ สมมติให้ $n,\ S_T,\ K$ เป็น $2, 120, 100$ ตามลำดับ

จากสูตร $payoff = \max(0,\ n(S_T - K))$

จะได้ $payoff = \max(0,\ 2(120 - 100)) = 40$

ผลลัพธ์ที่ได้จะได้ว่า Payoff ที่มาจาการใช้สิทธิ์เป็นจำนวนจริงบวก

<u>กรณีที่ 2</u> $n \geq 0, \quad S_T - K \leq 0$

ในกรณีนี้ราคาของสินทรัพย์อ้างอิงน้อยกว่าราคาใช้สิทธิ์ และต้องการที่จะซื้อเพิ่ม n หน่วย และใช้สิทธิ์ Swing Option 1 สิทธิ์ สมมติให้ $n,\ S_T,\ K$ เป็น $2, 100, 120$ ตามลำดับ

จากสูตร $payoff = \max(0,\ n(S_T - K))$

จะได้ $payoff = \max(0,\ 2(100 - 120)) = 0$

ผลลัพธ์ที่ได้จะได้ว่า Payoff ที่มาจาการใช้สิทธิ์เป็นศูนย์

<u>กรณีที่ 3</u> $n \leq 0, \quad S_T - K \geq 0$

ในกรณีที่ราคาของสินทรัพย์อ้างอิงมากกว่าราคาใช้สิทธิ์ และต้องการที่จะซื้อน้อยลง n หน่วย และใช้สิทธิ์ Swing Option 1 สิทธิ์ สมมติให้ $n,\ S_T,\ K$ เป็น $-2, 120, 100$ ตามลำดับ

จากสูตร $payoff = \max(0,\ n(S_T - K))$

จะได้ $payoff = \max(0,\ -2(120 - 100)) = 0$

ผลลัพธ์ที่ได้จะได้ว่า Payoff ที่มาจาการใช้สิทธิ์เป็นศูนย์

<u>กรณีที่ 4</u> $n \leq 0, \quad S_T - K \leq 0$

ในกรณีที่ราคาของสินทรัพย์อ้างอิงน้อยกว่าราคาใช้สิทธิ์ และต้องการที่จะซื้อน้อยลง n หน่วย และใช้สิทธิ์ Swing Option 1 สิทธิ์ สมมติให้ $n,\ S_T,\ K$ เป็น $-2, 100, 120$ ตามลำดับ

จากสูตร $payoff = \max(0,\ n(S_T - K))$

จะได้ $payoff = \max(0,\ -2(100 - 120)) = 40$

ผลลัพธ์ที่ได้จะได้ว่า Payoff ที่มาจาการใช้สิทธิ์เป็นศูนย์

จากกรณีทั้ง 4 กรณีด้านบน พบว่าในการที่จะทำให้ Payoff เป็นจำนวนจริงบวกได้นั้น จะต้องเพิ่มการซื้อหน่วยของสินทรัพย์อ้างอิงนั้นให้มากขึ้น เมื่อราคาของสินทรัพย์อ้างอิงนั้นมีราคามากกว่าราคาใช้สิทธิ์ และจะต้องลดการซื้อหน่วยของสินทรัพย์อ้างอิงนั้นให้น้อยลง เมื่อราคาของสินทรัพย์อ้างอิงนั้นมีราคาน้อยกว่าราคาใช้สิทธิ์

3.3 Real-World Applications

Gas Storage

ในตลาดซื้อขายแก๊สธรรมชาติ ผู้บริโภคมักต้องการบริหารความเสี่ยง เนื่องจากความต้องการซื้อปริมาณแก๊สธรรมชาตินั้นมักไม่คงที่ ซึ่งจะขึ้นกับปัจจัยเหล่านี้ได้แก่ ความต้องการใช้แก๊สธรรมชาติของผู้ซื้อ การบริหารจัดการทรัพยากรภายในบริษัท และความสามารถในการผลิตของผู้ผลิตแก๊สธรรมชาติ ซึ่งปัจจัยเหล่านี้ส่งผลให้อุปสงค์ของของแก๊สธรรมชาติไม่คงที่ ดังนั้นเมื่อผู้บริโภคต้องการจำนวนแก๊สธรรมชาติที่มากขึ้น ผู้บริโภคสามารถใช้สิทธิ์ของ Swing Option ในการซื้อแก๊สธรรมชาติในจำนวนที่เพิ่มขึ้นได้ ซึ่งจะทำให้ผู้บริโภคมีความเสี่ยงลดลง

Oil Pipeline

สำหรับธุรกิจท่อส่งผ่านน้ำมัน มักนิยมใช้ Swing Option ในการบริหารความเสี่ยง เนื่องจากโดยปกติแล้วธุรกิจท่อส่งผ่านน้ำมันมักทำสัญญาซื้อขายล่วงหน้ากับลูกค้า โดยบริษัทจะต้องมีการส่งมอบน้ำมันตามที่กำหนดไว้ในสัญญาซื้อขายล่วงหน้า อย่างไรก็ตาม ในการส่งน้ำมันไปให้ลูกค้าผ่านท่อส่งน้ำมัน อาจเกิดปัญหาที่ท่อส่งน้ำมัน ทำให้ทางบริษัทไม่สามารถส่งมอบน้ำมันให้กับลูกค้าตามที่กำหนดไว้ได้ ดังนั้นถ้าบริษัทมี Swing Option จะทำให้บริษัทสามารถใช้สิทธิ์ที่จะส่งมอบน้ำมันในจำนวนที่น้อยลง ซึ่งจะเห็นได้ว่า Swing Option สามารถช่วยลดความเสี่ยงในเรื่องของท่อส่งน้ำมันได้

4. การคำนวณราคาของ Swing Option (Pricing Swing Option)

ในการคำนวณราคาของ Swing Option เนื่องจาก payoff ที่เกิดขึ้นนั้นขึ้นอยู่กับราคาของสินทรัพย์อ้างอิง (underlying asset) ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องทำการสร้างโมเดลของราคาสินทรัพย์อ้างอิงเพื่อใช้ในการคำนวณราคาของ Option ดังกล่าว และเนื่องจาก Swing Option มักถูกนิยมใช้ควบคู่ไปกับการทำ Swap Contract หรือ Future Contract ในการค้าขายสินค้าโภคภัณฑ์ที่เกี่ยวข้องกับพลังงาน (energy commodities) เช่น น้ำมันดิบ แก๊สธรรมชาติ ไฟฟ้า เป็นต้น ซึ่งสินค้าเหล่านี้มักมีลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาที่ในระยะยาวมักจะลู่เข้าสู่ค่ากลาง (mean-reversion) ทั้งนี้เป็นผลมาจากความต้องการในการบริโภคสินค้าดังกล่าวมักจะมีค่าเพิ่มขึ้น หากราคามีการปรับตัวลง และในทางกลับกันความต้องการก็มักจะลดลง หากราคามีการปรับตัวเพิ่มขึ้น

ดังนั้นในการคำนวณราคาของ Swing Option ในส่วนแรกจะนำเสนอ Mean-reverting Ornstein-Uhlenbeck Process ซึ่งเป็นกระบวนการสุ่มที่มีคุณสมบัติในการลู่เข้าสู่ค่ากลาง (mean-reversion) โดยได้นำกระบวนการดังกล่าวมาใช้ในการโมเดลราคาของสินค้าโภคภัณฑ์ที่เกี่ยวข้องกับพลังงาน ในส่วนที่สองจะนำเสนอการประมาณกระบวนการดังกล่าวในรูปแบบของต้นไม้ทวิภาค (Binomial Tree Model) นำเสนอโดย Nelson และ Ramaswamy (1990) ในส่วนที่สามนำเสนอถึงอัลกอริทึมในการคำนวณราคาของ Swing Option ในโลกที่เป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk-neutral world) โดยอ้างอิงจากมูลค่าในปัจจุบันของ payoff รวมที่ดีที่สุดที่ได้จากการใช้สิทธิ์ผ่านการคำนวณแบบกำหนดการเชิงพลวัต (dynamic programming) และในส่วนสุดท้ายจะอภิปรายถึงข้อดีและข้อเสียจากการใช้โมเดลและอัลกอริทึมดังกล่าวในการคำนวณราคา

4.1 Mean-reverting Ornstein-Uhlenbeck Process

กระบวนการ Ornstein-Uhlenbeck เป็นกระบวนการสุ่มอย่างหนึ่งที่มีคุณสมบัติในการลู่เข้าสู่ค่ากลางค่าหนึ่งในระยะยาว จึงมักถูกนิยมนำมาใช้ในการโมเดลอัตราดอกเบี้ย อัตราการเลิกเปลี่ยนเงินตราระหว่างประเทศ และราคาของสินค้าโภคภัณฑ์ ซึ่งถูกนิยามในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก (stochastic differential equation: SDE) ดังนี้

$$dx_t \; = \; \kappa(\bar{x} - x_t) \; + \; \sigma dW_t \tag{1}$$

โดย κ คือ อัตราเร็วในการลู่กลับเข้าสู่ค่ากลาง (mean reversion speed) โดย $\kappa > 0$

$\bar{x}$ คือ ค่าเฉลี่ยระยะยาวที่ซึ่ง x_t ลู่เข้าหา (long-run average of x_t)

σ คือ ความผันผวนของกระบวนการ (volatility of the process)

W_t คือ กระบวนการเคลื่อนที่แบบบราวน์มาตรฐานที่เวลา t (Standard Brownian Motion Process at time t)

และ x_t คือ ค่าลอการิทึมธรรมชาติของราคาสินทรัพย์ที่เวลา t (natural log of the asset price at time t)

โดยหากกำหนดให้ S_t คือ ราคาของสินทรัพย์ที่เวลา t (asset price at time t) จะได้

$$x_t \; = \; \ln(S_t) \tag{2.1}$$

กำหนดให้ $\bar{S}$ คือ ค่าเฉลี่ยในระยะยาวของราคาสินทรัพย์ จากการใช้ Ito’s Lemma ใน (1) ให้ผลลัพธ์

$$\bar{x} \; = \; \ln(\bar{S}) - \frac{\sigma^2}{2\kappa} \tag{2.2}$$

สังเกตเทอม $\kappa(\bar{x} - x_t)$ ในสมการที่ (1) ในกรณีที่ $\bar{x} > x_t$ ทำให้แนวโน้มของ dx_t (การเปลี่ยนแปลงของค่า x) มีแนวโน้มเป็นบวก จึงทำให้ x มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น ในขณะที่หาก $\bar{x} < x_t$ ทำให้แนวโน้มของ dx_t มีค่าเป็นลบ จึงทำให้ x มีแนวโน้มลดลง ด้วยลักษณะเช่นนี้จึงทำให้ $x \rightarrow \bar{x}$ ในที่สุด โดยอัตราเร็วในการลู่เข้านั้นถูกควบคุมโดย κ และจากสมการ (2.1) นั้นทำให้รับประกันได้ว่าราคาสินทรัพย์ $S_t > 0$ เสมอ

โดยอาศัยความรู้จาก Ito’s Stochastic Calculus ทำการแก้สมการ SDE (1) ทำให้ได้ค่าคาดหวัง (expected value) และค่าความแปรปรวน (variance) ของ x_t ได้ดังนี้

$$E\left[x_t\right] = \bar{x} + \left(x_0 - \bar{x}\right)e^{-\kappa t} \tag{3.1}$$

$$Var(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa t}\right) \tag{3.2}$$

จากสมการ (3.2) สังเกตว่าในกรณีที่ $t \rightarrow \infty$ นั้นทำให้ได้ว่า $Var(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}$ ซึ่งต่างจากค่าความแปรปรวนในกรณีที่มาจาก Geometric Brownian Motion (GBM) ซึ่งจะมีค่าลู่เข้าหาอนันต์ แสดงให้เห็นว่ากระบวนการ Ornstein-Uhlenbeck มีคุณสมบัติของ Mean-reversion

4.2 Censured Mean Reversion Binomial Model (Nelson and Ramaswamy, 1990)

การใช้ Binomial Tree ในการคำนวณราคาของ Option นั้นค่อนข้างเป็นที่นิยม เนื่องจากสามารถทำได้ง่าย และแม่นยำในกรณีที่ timestep มีค่าน้อย ($\Delta t \to 0$) ดังนั้น Nelson และ Ramaswamy จึงได้นำเสนอวิธีในการประมาณกระบวนการ Ornstein-Uhlenbeck ในสมการที่ (1) ให้อยู่ในรูปของ binomial tree ดังนี้

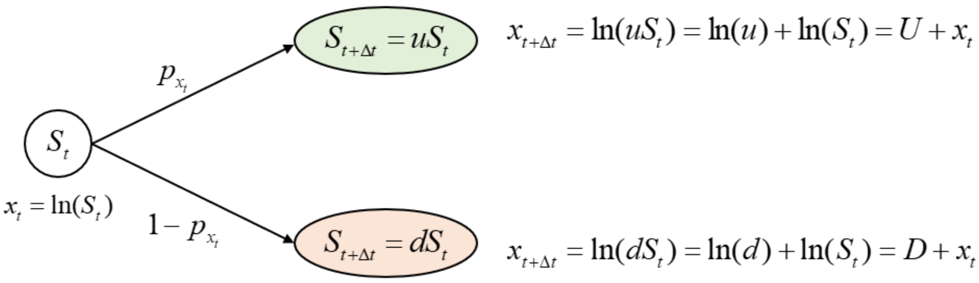

Figure 1 แสดง Binomial Tree สำหรับกระบวนการ Ornstein-Uhlenbeck

อาศัยการทำ moment matching ค่าคาดหวังของ $x_{t+\Delta t}$ ($E\left[x_{t+\Delta t}\right]$) และค่าความแปรปรวนของ $x_{t+\Delta t}$ ($Var(x_{t+\Delta t})$) ที่ได้จาก binomial tree และจากสมการ discrete-time ของกระบวนการ Ornstein-Uhlenbeck โดยจากสมการ (3.1) และ (3.2) เมื่อทำให้โมเดลอยู่ในรูปของ discrete-time จะได้

$$E\left[x_{t+\Delta t}\right] = \bar{x} + (x_t - \bar{x})e^{-\kappa\Delta t} \tag{4.1}$$

$$Var(x_{t+\Delta t}) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t}) \tag{4.2}$$

สำหรับเมื่อ $x \to 0$ อาศัยความรู้จากอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) สามารถประมาณ

$$e^x \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \;\approx\; 1 + x \tag{5}$$

เนื่องจากพิจารณาให้ $\Delta t \to 0$ สามารถใช้สมการ (5) ในการประมาณเทอม $e^{-\kappa\Delta t}$ ในสมการ (4.1) และเทอม $e^{-2\kappa\Delta t}$ ในสมการ (4.2) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E\left[x_{t+\Delta t}\right] &\approx \bar{x} + (x_t - \bar{x})(1 - \kappa\Delta t) \\ &= x_t + (\bar{x} - x_t)\kappa\Delta t \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} Var(x_{t+\Delta t}) &\approx \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - (1 - 2\kappa\Delta t)) \\ &= \sigma^2\Delta t \end{aligned} \tag{6.2}$$

กำหนดให้ $U = \ln(u)$ และ $D = \ln(d)$ ตามลำดับ พิจารณาหาค่า $E\left[x_{t+\Delta t}\right]$ และ $Var(x_{t+\Delta t})$ จาก Binomial Tree จาก Figure 1 จะได้ว่า

$$E\left[x_{t+\Delta t}\right] \;=\; p_{x_t}(U + x_t) + (1 - p_{x_t})(D + x_t) \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} Var(x_{t+\Delta t}) &= E\left[x_{t+\Delta t}^2\right] - (E\left[x_{t+\Delta t}\right])^2 \\ &= p_{x_t}(1-p_{x_t})(U-D)^2 \end{aligned} \tag{7.2}$$

การทำ moment matching ของค่า $E\left[x_{t+\Delta t}\right]$ และ $Var(x_{t+\Delta t})$ โดยการนำคู่สมการ (6.1) กับ (7.1) และ (6.2) กับ (7.2) มาเท่ากัน รวมถึงใช้เงื่อนไข $U = -D$ เมื่อ $\Delta t \to 0$ จะให้ผลลัพธ์ดังนี้

$$U = \sigma\sqrt{\Delta t}, \quad D = -\sigma\sqrt{\Delta t}, \quad p_{x_t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\kappa(\bar{x} - x_t)\sqrt{\Delta t}}{\sigma} \tag{8}$$

จากค่า p_{x_t} ในสมการ (8) จะเห็นได้ว่าค่า p_{x_t} สามารถมีค่าเกิน 1 หรือต่ำกว่า 0 ได้ในกรณีที่

$$\begin{cases} \kappa(\bar{x} - x_t)\sqrt{\Delta t} > \sigma & \to\ p_{x_t} > 1 \\ \kappa(\bar{x} - x_t)\sqrt{\Delta t} < -\sigma & \to\ p_{x_t} < 0 \end{cases}$$

ดังนั้นจึงต้องมีการใส่เงื่อนไขเพิ่มเติม เพื่อเป็นการรับประกันว่า $0 \le p_{x_t} \le 1$ ดังนี้

$$p_{x_t} = \max\left(0,\ \min\left(1,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\kappa(\bar{x} - x_t)\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right)\right) \tag{9}$$

นำค่า p_{x_t} จากสมการที่ (9) มาเปลี่ยนแปลงเพื่อให้ได้ค่า p_{x_t} ซึ่งเป็นค่า risk-neutral probability สำหรับใช้ในการคำนวณราคาของ Option ต่อไป โดยการเปลี่ยน $\bar{x}$ เป็น $\bar{x} - \lambda_x/\kappa$ เมื่อ λ_x คือ risk-premium ของ process จะได้

$$p_{x_t} = \max\left(0,\ \min\left(1,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\kappa((\bar{x} - \frac{\lambda_x}{\kappa}) - x_t)\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right)\right) \tag{10}$$

โดย risk premium (λ_x) สามารถประมาณได้จาก risk-premium = return – risk free rate โดยสังเกตค่า p_{x_t} ในสมการที่ (10) จะมีค่ามากในกรณีที่ $\bar{x} > x_t$ และจะมีค่าน้อยเมื่อ $\bar{x} < x_t$ แสดงถึงให้เห็นถึงกระบวนการ Mean-Reversion ของโมเดล

4.3 อัลกอริทึมในการคำนวณราคาของ Swing Option

ในการคำนวณราคาของ Swing Option นั้นจำเป็นที่จะต้องมีการพิจารณาถึงการใช้สิทธิ์ที่มีให้เกิดผลตอบแทนสูงสุดเท่าที่เป็นไปได้ จากนั้นทำการพิจารณา payoff ที่เกิดขึ้นจากการใช้สิทธิ์เหล่านั้น แล้วทำการคำนวณมูลค่ารวม ณ เวลาปัจจุบันของ payoff เหล่านั้น เพื่อนำมาใช้เป็นราคาของ Swing Option

ดังนั้นการพิจารณาหาการใช้สิทธิ์เพื่อให้เกิดผลตอบแทนสูงสุดจึงทำการคำนวณโดยใช้วิธีแบบกำหนดการเชิงพลวัต (dynamic programming) โดยหากที่ถึงเวลา t ใด ๆ ที่ผู้ซื้อ option สามารถมีโอกาสที่จะใช้สิทธิ์ได้ จำเป็นจะต้องมีการเปรียบเทียบระหว่างมูลค่าในปัจจุบันของ option หากผู้ซื้อเลือกที่จะไม่ใช้สิทธิ์ ณ เวลาดังกล่าว เทียบกับมูลค่าในปัจจุบันของ option หากผู้ซื้อเลือกที่จะใช้สิทธิ์ (จำนวนสิทธิ์ที่เหลือจะลดลง 1) รวมกับ payoff ที่จะได้ในเวลานั้น ๆ หากมูลค่าของการใช้สิทธิ์ รวมกับผลตอบแทนที่ได้รับจากการใช้สิทธิ์นั้นมากกว่าการไม่ใช้สิทธิ์ก็จะเลือกใช้สิทธิ์ในครั้งนั้นไป ส่วนในทางกลับกันหากมูลค่าของการไม่ใช้สิทธิ์นั้นมีค่ามากกว่าก็จะเลือกที่จะยังไม่ใช้สิทธิ์ไปก่อนในครั้งนั้น

ในรายงานฉบับนี้ ผู้จัดทำได้ทำการพิจารณา Swing Option ใน 2 กรณีดังนี้

1) กรณีที่มีข้อจำกัดเฉพาะปริมาณในการสวิงในแต่ละครั้งที่ใช้สิทธิ์ แต่ไม่ได้มีการจำกัดปริมาณรวมทั้งหมดที่สวิงตลอดการใช้สิทธิ์ (Swing Option with only Local Constraints)

2) กรณีที่มีการจำกัดทั้งปริมาณในการสวิงในแต่ละครั้งที่ใช้สิทธิ์ รวมถึงจำกัดปริมาณรวมทั้งหมดที่สวิงตลอดการใช้สิทธิ์ (Swing Option with both Local and Global constraints)

Parameters

- dt = ช่วงเวลาในแต่ละ timestep (ปี)
- S_t = ราคาของสินค้าโภคภัณฑ์ที่เวลา t
- K = ราคาใช้สิทธิ์
- n_time = จำนวนงวดทั้งหมดที่สามารถให้ใช้สิทธิ์ได้
- n_right = จำนวนสิทธิ์ทั้งหมดที่มี
- $l\_\max$ = ปริมาณหน่วยของสินค้าสูงสุดที่สามารถใช้สิทธิ์สวิงเพื่อเพิ่มปริมาณจากเดิมในแต่ละครั้งการใช้สิทธิ์ ($l\_\max \geq 0$)
- $l\_\min$ = ปริมาณหน่วยของสินค้าสูงสุดที่สามารถใช้สิทธิ์สวิงเพื่อลดปริมาณจากเดิมในแต่ละครั้งการใช้สิทธิ์ ($l\_\min \leq 0$)
- r = annualized continuously compounded interest rate
- p = risk-neutral up probability

4.3.1 Swing Option with only Local Constraints

สำหรับ Swing Option ในกรณีนี้เนื่องจากไม่ได้มีการกำหนดเงื่อนไขของปริมาณรวมทั้งหมดที่สวิงตลอดอายุของสัญญา ดังนั้นที่เวลา t ใด ๆ หากมีการตัดสินใจที่จะใช้สิทธิ์ในครั้งนั้นแล้ว การใช้สิทธิ์จะเป็นไปในลักษณะที่ใช้สิทธิ์สวิงขึ้นหรือลงได้มากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ (bang-bang consumption) ซึ่งจะมี payoff เป็นไปตามสมการ

$$payoff_1(t) = \max\begin{cases} l\_\max * (S_t - K) \\ l\_\min * (S_t - K) \\ 0 \end{cases}$$

พิจารณาปัจจัยที่ส่งผลต่อมูลค่าของ Swing Option มีด้วยกัน 2 ตัวแปร ได้แก่ t (เวลานับจากเริ่มต้น) และ n (จำนวนสิทธิ์ที่เหลือในการสวิงได้) ดังนั้นกำหนดให้ $V(t,n)$ คือ มูลค่าของ Swing Option ที่เวลา t โดยที่มีสิทธิ์เหลือให้ใช้อีก n สิทธิ์ ขั้นตอนในการคำนวณ $V(t,n)$ มีดังนี้

1. คำนวณ $V(t,n)$ ที่ $t = T$ (expiry date)

$$V(T,n) = \begin{cases} payoff_1(T) & if\ n \geq 1 \\ 0 & if\ n = 0 \end{cases}$$

ในกรณีที่ถึงเวลาสุดท้ายซึ่งเป็นโอกาสสุดท้ายที่ผู้ซื้อ option จะใช้สิทธิ์ได้ หากจำนวนสิทธิ์ที่เหลือให้ใช้ $n \geq 1$ สิทธิ์ก็ย่อมสมเหตุสมผลที่จะต้องใช้สิทธิ์ในครั้งสุดท้ายในกรณีที่ให้ผลตอบแทนที่เป็นบวก ในขณะที่หาก $n = 0$ หมายถึงได้ใช้สิทธิ์ไปก่อนหน้านี้จนหมดแล้ว ดังนั้นมูลค่า ณ เวลาดังกล่าวของ option จึงมีค่าเป็นศูนย์

2. คำนวณที่ $V(t, n)$ ที่ $t = 0, 1, 2, ..., T-1$ (Backward Calculation)

สำหรับที่เวลา t ใด ๆ นั้นจะต้องพิจารณาก่อนว่าที่เวลาดังกล่าวสามารถใช้สิทธิ์ในการสวิงได้หรือไม่

2.1 กรณี $t \neq t_1, t_2, ..., t_{n\_time}$

หากที่เวลาดังกล่าวไม่อนุญาตให้มีการใช้สิทธิ์ $t \neq t_1, t_2, ..., t_{n\_time}$ จะสามารถคำนวณมูลค่าของ option ได้มาจากการทำ backward calculation จาก $V(t+1, n)$ โดยตรง ซึ่งสังเกตว่าจำนวนสิทธิ์ n นั้นเหลือเท่าเดิม

$$V(t, n) = \begin{cases} e^{-r*dt}\left(p * V^u(t+1,\ n) + (1-p) * V^d(t+1,\ n)\right) & if\ n \geq 1 \\ 0 & if\ \ n = 0 \end{cases}$$

เมื่อ V^u คือ มูลค่าของ option หากราคาของสินค้าโภคภัณฑ์เพิ่มขึ้น

V^d คือ มูลค่าของ option หากราคาของสินค้าโภคภัณฑ์ลดลง

2.2 กรณี $t = t_1, t_2, ..., t_{n\_time}$

หากที่เวลาดังกล่าวอนุญาตให้มีการใช้สิทธิ์ได้ จะต้องมีการเปรียบเทียบมูลค่าในปัจจุบันของ option ถ้าหากเลือกที่จะไม่ใช้ใช้สิทธิ์ (จำนวนสิทธิ์ที่เหลือ n คงเดิม) กับมูลค่าในปัจจุบันของ option หากเลือกที่จะใช้สิทธิ์ (จำนวนสิทธิ์ลดลงไป 1) รวมกับ payoff ที่ได้ ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$value\_not\_exercise = e^{-r*dt}\left(p * V^u(t+1,\ n) + (1-p) * V^d(t+1,\ n)\right) \ : \ n \geq 1$$

$$value\_exercise = \begin{cases} e^{-r*dt}\left(p * V^u(t+1,\ n-1) + (1-p) * V^d(t+1,\ n-1)\right) & if\ \ n > 1 \\ 0 & if\ \ n = 1 \end{cases}$$

เมื่อ $value\_not\_exercise$ = มูลค่า ณ เวลาปัจจุบันที่เหลือของ option ถ้าหากตัดสินใจไม่ใช้สิทธิ์

$value\_exercise$ = มูลค่า ณ เวลาปัจจุบันที่เหลือของ option ถ้าหากตัดสินใจใช้สิทธิ์

$$V(t, n) = \begin{cases} \max(value\_not\_exercise,\ value\_exercise + payoff_1(t)) & if\ n \geq 1 \\ 0 & if\ \ n = 0 \end{cases}$$

ทำการคำนวณ $V(t, n)$ ย้อนกลับมาตั้งแต่ $t = T-1, T-2, ..., 0$ โดยสุดท้ายได้ว่าราคาของ Swing Option 3.1) เท่ากับ $V(0, n\_right)$

4.3.2 Swing Option with both Local and Global constraints

สำหรับ Swing Option ในกรณีนี้มีเงื่อนไขเพิ่มเติมคือการกำหนดปริมาณรวมทั้งหมดที่สวิงไปในการใช้สิทธิ์ว่าจะต้องมีค่าไม่เกินค่าที่กำหนดไว้ ดังนั้นเพิ่มเติมจาก 3.1 ในการพิจารณามูลค่าของ option นอกเหนือจาก t และ n แล้วจะต้องพิจารณาด้วยว่าขณะที่เวลานั้นมีปริมาณการสวิงรวมเท่าใด

กำหนดให้ปริมาณที่สวิงแต่ละครั้งเท่ากับ l_{t_i} สำหรับ $i \in \{1, 2, ..., n\_time\}$ (ถ้าหากครั้งใดไม่ใช้สิทธิ์จะถือว่า $l_{t_i} = 0$) ถ้าให้ $l\_cumu(t)$ คือปริมาณที่สวิงรวมตั้งแต่เริ่มต้นจนถึงเวลา $t \in [t_j, t_{j+1})$ จะได้ว่า

$$l\_cumu(t) = \sum_{i=1}^{j} l_{t_i}; \quad t \in [t_j, t_{j+1})$$

ถ้ากำหนดให้ $g\_\max$ คือ ปริมาณหน่วยของสินค้ารวมสูงสุดที่สามารถใช้สิทธิ์สวิงเพื่อเพิ่มปริมาณจากเดิมตลอดสัญญา ($g\_\max \ge l\_\max \ge 0$) และ $g\_\min$ คือ ปริมาณหน่วยของสินค้ารวมสูงสุดที่สามารถใช้สิทธิ์สวิงเพื่อลดปริมาณจากเดิมตลอดสัญญา ($g\_\min \le l\_\min \le 0$) ดังนั้นจะได้เงื่อนไขว่าปริมาณที่สวิงรวมเมื่อถึงวัน expiry date $l\_cumu(T)$ จะต้องมีค่าอยู่ในระหว่างช่วง $g\_\min$ และ $g\_\max$ ดังอสมการ

$$g\_\min \le l\_cumu(T) \le g\_\max$$

<u>หมายเหตุ</u> ไม่อนุญาตให้ค่า $l\_cumu(t)$ มีค่านอกเหนือไปจากช่วง $[g\_\min, g\_\max]$ ได้สำหรับ swing option ในข้อ 3.2) นี้ และด้วยข้อจำกัดทางการเขียนโปรแกรมแบบ dynamic programming จำเป็นที่จะต้องมีเงื่อนไขเพิ่มเติมดังนี้

$$\begin{cases} g\_\min = k_1 m, \ \ l\_\min = k_2 m & : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \ \ and \ \ k_1 \le k_2 \le 0 \\ g\_\max = k_3 m, \ \ l\_\max = k_4 m & : k_3, k_4 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \ \ and \ \ k_3 \ge k_4 \ge 0 \end{cases} \quad \text{เมื่อ } m \in \mathbb{R}^+$$

ทั้งนี้ข้อจำกัดดังกล่าวมีเพื่อจำกัดให้จำนวน space ในการเก็บค่ามูลค่าของ swing option ระหว่างการคำนวณนั้นมีค่าจำกัด

สำหรับการคำนวณ payoff จะแตกต่างกันไปจากในข้อ 3.1 เนื่องจากผู้ซื้อ option อาจไม่สามารถใช้สิทธิ์สวิงขึ้นลงได้เต็มที่เท่ากับ $l\_\min$ และ $l\_\max$ ตามลำดับ เนื่องจากมีข้อจำกัดเกี่ยวกับ $g\_\min$ และ $g\_\max$ ด้วย ดังนั้นในการคำนวณจึงมีการนิยามเซต $l\_d(t_i)$ และ $l\_u(t_i)$ ซึ่งเป็นเซตของค่าที่สามารถใช้สิทธิ์สวิงลง และขึ้นได้ที่เวลา t_i ตามลำดับ ซึ่งค่าของการสวิงจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่ได้กล่าวไปในข้างต้น ดังนี้

$$l\_u(t_i) = \{l \mid l\_cumu(t_i) + l \le g\_\max, \ l_{\max} \ge l \ge 0, \ and \ \ l = k_+ m \ \ when \ \ k_+ \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$$
$$l\_d(t_i) = \{l \mid l\_cumu(t_i) + l \ge g\_\min, \ l_{\min} \le l \le 0, \ and \ \ l = k_- m \ \ when \ \ k_- \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}\}$$

ซึ่ง payoff ของ swing option ในข้อ 3.2) สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$payoff_2(t, \ l) = \max \begin{cases} l * (S_t - K) \\ 0 \end{cases} \quad : l \in l\_u(t) \cup l\_d(t)$$

มูลค่าของ Swing Option ในข้อ 3.2 นี้ สามารถเขียนแทนด้วย $V(t, n, l\_cumu)$ ซึ่งหมายถึงมูลค่าของ Swing Option ที่เวลา t โดยที่มีสิทธิ์เหลือให้ใช้อีก n สิทธิ์ และที่เวลาดังกล่าวได้ทำการใช้สิทธิ์ซึ่งมีปริมาณสวิงรวมเท่ากับ l_cumu ขั้นตอนในการคำนวณ $V(t, n, l\_cumu)$ มีดังนี้

1. คำนวณ $V(t, n, l\_cumu)$ ที่ $t = T$ (expiry date)

$$V(T, n, l\_cumu) = \begin{cases} \max\begin{cases} payoff_2(T, \max(l\_u(T))) \\ payoff_2(T, \min(l\_d(T))) \end{cases} & if\ n \geq 1 \\ 0 & if\ \ n = 0 \end{cases}$$

เนื่องจากในกรณีที่ถึงเวลาสุดท้ายซึ่งเป็นโอกาสสุดท้ายที่ผู้ซื้อ option จะใช้สิทธิ์ได้ หากจำนวนสิทธิ์ที่เหลือให้ใช้ $n \geq 1$ สิทธิ์ ก็ย่อมสมเหตุสมผลที่จะต้องใช้สิทธิ์ในครั้งสุดท้ายให้เต็มที่ที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ในกรณีที่ให้ผลตอบแทนเป็นบวก ซึ่งในเมื่อเป็นการใช้สิทธิ์อย่างเต็มที่ ในการสวิงขึ้นก็จะสวิงด้วยปริมาณสูงสุดเท่าที่จะสวิงขึ้นได้ซึ่งมีค่าเท่ากับ max(l_u(T)) หรือถ้าหากใช้สิทธิ์สวิงลงก็จะสวิงด้วยปริมาณสูงสุดเท่าที่จะสวิงลงได้ซึ่งมีค่าเท่ากับ min(l_d(T))

ส่วนในขณะที่หาก $n = 0$ หมายถึงได้ใช้สิทธิ์ไปก่อนหน้านี้จนหมดแล้ว ดังนั้นมูลค่า ณ เวลาดังกล่าวของ option จึงมีค่าเป็นศูนย์เช่นเดิมเหมือนในกรณีก่อนหน้า

2. คำนวณที่ $V(t, n, l\_cumu)$ ที่ ที่ $t = 0, 1, 2, \ldots, T-1$ (Backward Calculation)

สำหรับที่เวลา t ใด ๆ นั้นจะต้องพิจารณาก่อนว่าที่เวลาดังกล่าวสามารถใช้สิทธิ์ในการสวิงได้หรือไม่

2.1 กรณี $t \neq t_1, t_2, \ldots, t_{n\_time}$

หากที่เวลาดังกล่าวไม่อนุญาตให้มีการใช้สิทธิ์ $t \neq t_1, t_2, \ldots, t_{n\_time}$ จะสามารถคำนวณมูลค่าของ option ได้มาจากการทำ backward calculation จาก $V(t+1, n, l\_cumu)$ โดยตรง ซึ่งสังเกตว่าจำนวนสิทธิ์ n นั้นเหลือเท่าเดิม และปริมาณที่สวิงรวม l_cumu ก็จะมีค่าเท่าเดิมเนื่องจากไม่ได้มีการใช้สิทธิ์

$$V(t, n, l\_cumu) = \begin{cases} e^{-r*dt}\begin{pmatrix} p*V^u(t+1, n, l\_cumu) \\ +(1-p)*V^d(t+1, n, l\_cumu) \end{pmatrix} & if\ n \geq 1 \\ 0 & if\ \ n = 0 \end{cases}$$

2.2 กรณี $t = t_1, t_2, \ldots, t_{n\_time}$

หากที่เวลาดังกล่าวอนุญาตให้มีการใช้สิทธิ์ได้ เช่นเดิมกับในกรณี 3.1 จะต้องมีการเปรียบเทียบมูลค่าในปัจจุบันของ option ถ้าหากเลือกที่จะไม่ใช้ใช้สิทธิ์ กับมูลค่าในปัจจุบันของ option หากเลือกที่จะใช้สิทธิ์ (จำนวนสิทธิ์ลดลงไป 1) รวมกับ payoff ที่ได้ เพียงแต่ในการใช้สิทธิ์จะต้องพิจารณา payoff ที่ได้จากทุกค่าสวิง l ที่เป็นไปได้ โดย $l \in l\_u(t) \cup l\_d(t)$ และเมื่อตัดสินใจใช้สิทธิ์ด้วยปริมาณในการสวิงเท่ากับ l แล้ว ค่า l_cumu ก็จะเปลี่ยนเป็น $l\_cumu + l$ ตามลำดับ ซึ่งแสดงได้ดังสมการด้านล่าง

$$value\_not\_exercise = e^{-r*dt}\begin{pmatrix} p*V^u(t+1, n, l\_cumu) \\ +(1-p)*V^d(t+1, n, l\_cumu) \end{pmatrix} \quad : n \geq 1$$

$$value\_exercise(l) = \begin{cases} e^{-r*dt}\begin{pmatrix} p*V^u(t+1, n-1, l\_cumu + l) \\ +(1-p)*V^d(t+1, n, l\_cumu + l) \end{pmatrix} & if\ \ n > 1 \\ 0 & if\ \ n = 1 \end{cases}$$

$$V(t, n, l\_cumu) = \begin{cases} \max\begin{cases} value\_not\_exercise \\ \max\limits_{l_t \in l\_u(t) \cup l\_d(t)} (value\_exercise(l_t) + payoff_2(t,\ l_t)) \end{cases} & if\ n \geq 1 \\ 0 & if\ \ n = 0 \end{cases}$$

ทำการคำนวณ $V(t, n, l\_cumu)$ ย้อนกลับมาตั้งแต่ $t = T-1, T-2, ..., 0$ โดยสุดท้ายได้ว่าราคาของ Swing Option 3.2) เท่ากับ $V(0, n\_right,\ 0)$ เนื่องจากที่เวลาเริ่มต้นยังไม่ได้มีการใช้สิทธิ์ ทำให้ปริมาณหน่วยของสินค้าที่ใช้สิทธิ์สวงรวมมีค่าเป็นศูนย์

4.4 ข้อดีและข้อเสียของอัลกอริทึมที่นำเสนอ

ในการใช้วิธีการเขียนโปรแกรมแบบกำหนดการเชิงพลวัต (dynamic programming: DP) ในการคำนวณราคาของ Swing Option นั้นมีข้อเสียที่เห็นได้ชัดคือสำหรับ Swing Option ในข้อ 3.2) จำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขของปริมาณที่ใช้ในการสวิง เพื่อให้สามารถเขียนโปรแกรมเพื่อเก็บมูลค่าของ Swing Option สำหรับ state ต่าง ๆ ได้ เพราะหากปริมาณในการสวิงแต่ละครั้งนั้นไม่มีข้อจำกัด เช่น การสวิงด้วยค่าจำนวนจริงใด ๆ หากเป็นเช่นนี้จะไม่สามารถเขียนโปรแกรมเพื่อจัดสรรทรัพยากรหน่วยความจำได้ เนื่องจากค่าจำนวนจริงนั้นมีได้ไม่จำกัด อีกข้อเสียหนึ่งคือการใช้วิธี DP นั้นเหมาะสำหรับ Swing Option ที่มีข้อจำกัดไม่มากเท่านั้น ในชีวิตจริงยังมี variation ของ Swing Option อีกมากมายที่มีข้อจำกัดเพิ่มขึ้นมากกว่า Swing Option ที่ได้นำเสนอไปใน 3.1) และ 3.2) ในกรณีดังกล่าวการใช้วิธี DP จะใช้ทรัพยากรของหน่วยความจำและเวลาในการประมวลผลมหาศาล

ส่วนข้อดีของอัลกอริทึมดังกล่าวนั้นคือในกรณีที่ข้อจำกัดของ Swing Option มีไม่มากอย่างเช่นใน 3.1) การใช้วิธี DP นั้นง่ายต่อการทำความเข้าใจ และเป็นจุดเริ่มต้นที่ดีในการศึกษาแนวคิดสำหรับการคำนวณราคาของ Swing Option ด้วยวิธีอื่น ๆ ต่อไปในอนาคต

5. Sensitivity Analysis

ราคาของ Swing Option นั้นขึ้นอยู่กับหลายปัจจัยมาก ซึ่งเป็นส่วนที่น่าสนใจในการวิเคราะห์ถึงความสัมพันธ์ของปัจจัยเหล่านี้กับราคาของ Swing Option โดยในส่วนนี้จะมีการวิเคราะห์ Swing Option แบบ Local Constraint และ Global Constraint ซึ่งจะเน้นไปในส่วนของ Swing Option แบบ Local Constraint โดยค่าเริ่มต้นของตัวแปรต่าง ๆ จะมีดังนี้

Parameter	Value
n_right	2
n_time	5
m	1
l_min	-1
l_max	1
g_min	-3
g_max	3
S0	100
K	100
mu	100
sigma	0.7
kappa	1
risk_premium	0.1
r	0.1
T	1
N	1,000

Timesteps

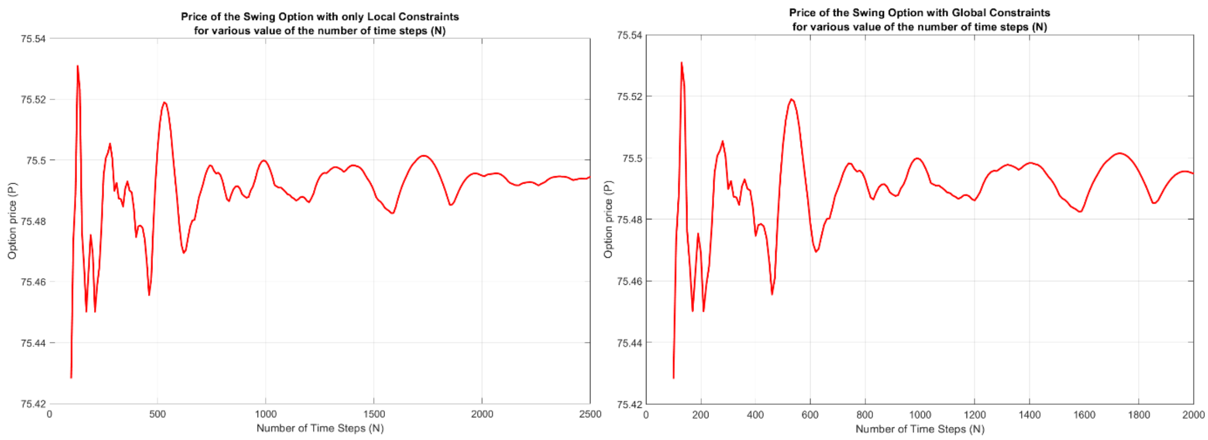

Figure 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน Timestep ที่ใช้ในการคำนวณกับราคาของ Swing Option

จากใน Figure 2 จะเห็นได้ว่าเมื่อค่า Timestep เพิ่มขึ้นราคาของ Swing Option จะลู่เข้าหาค่าค่าหนึ่ง ทั้งแบบ Local Constraint และแบบ Global Constraint โดยในช่วงที่ค่า Timestep น้อยค่าของ Swing Option จะมีค่าที่แกว่งไปแกว่งมา ซึ่งก็จะบ่งบอกว่าค่าของ Timestep น้อยไปซึ่งอาจส่งผลให้ค่าของ Swing Option ที่ออกมาไม่มีความแม่นยำ โดยค่าของ Swing Option จะเริ่มลู่เข้าเมื่อ Timestep เรามีค่าสูงเกินกว่า 1000 ซึ่งสามารถสรุปได้ว่าเราควรกำหนดให้ค่า Timestep มีค่าสูงกว่า 1000 เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่แม่นยำ

Number of Exercise Rights

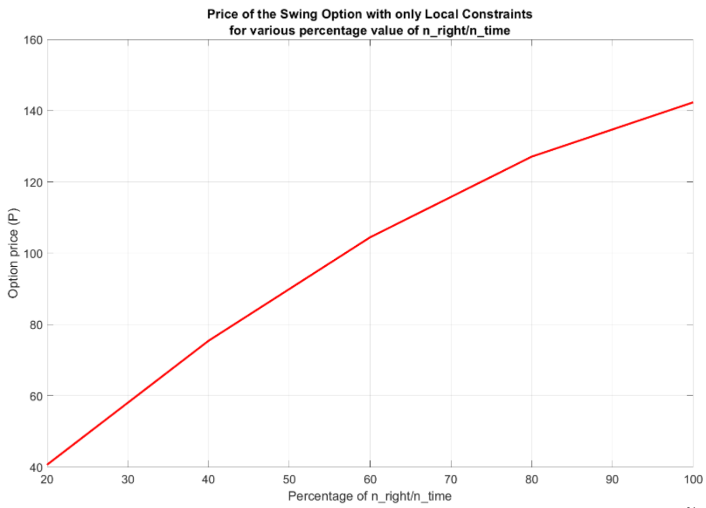

Figure 3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างร้อยละของจำนวนสิทธิ์ต่อจำนวนงวดทั้งหมด
กับราคาของ Swing Option (Local Constraints)

จากใน Figure 3 จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ราคาของ Swing Option แบบ Local Constraint กับ จำนวนสิทธิ์ที่สามารถ Swing ได้ต่อจำนวนงวดทั้งหมด โดยกราฟนี้ได้มีการบ่งบอกว่าทั้งสองตัวแปรมีความสัมพันธ์กันแบบแปรผัน

ตรง เนื่องจากผู้ถือ Swing Option ที่มีจำนวนสิทธิ์ในการ Swing ได้เยอะ จะสามารถใช้ Swing Option ได้หลายครั้ง ซึ่งเป็นการเปิดโอกาสให้ผู้ถือได้เลือกได้หลายครั้งว่าต้องการ Swing ที่งวดไหนบ้าง ด้วยเหตุนี้จึงทำให้ราคาของ Swing Option จะมีค่าสูงขึ้นเรื่อย ๆ ตามจำนวนสิทธิ์ที่สามารถ Swing ได้

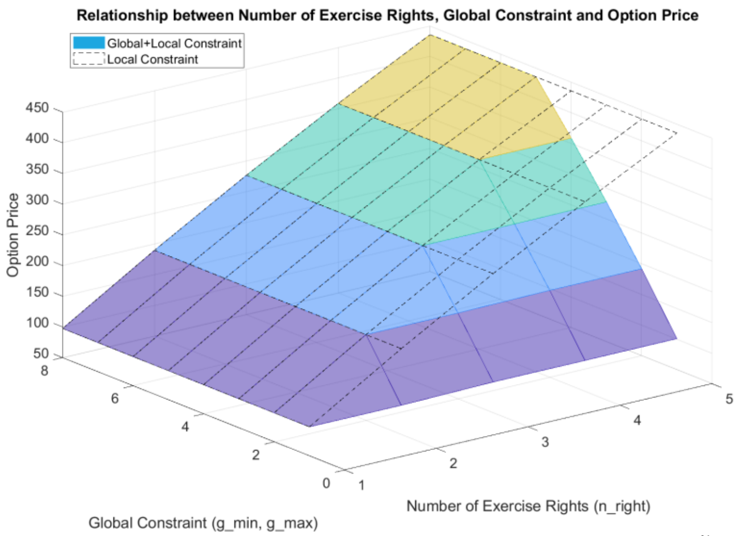

Figure 4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างร้อยละของจำนวนสิทธิ์ต่อจำนวนงวดทั้งหมด

กับราคาของ Swing Option (Global Constraints)

ในส่วนนี้จะเป็นการแสดงให้เห็นว่า Swing Option แบบ Global Constraint จะเทียบเท่ากับ Swing Option แบบ Local Constraint เมื่อค่าของ Global Constraint มีค่าเท่ากับหรือมากกว่าค่าของจำนวนสิทธิ์ที่สามารถ Swing ได้คูณกับ Local Constraint เนื่องจากผู้ถือจะสามารถ Swing ขึ้นหรือลงติดต่อกันทุกงวดยังไงก็จะไม่เกิน Global Constraint อยู่ดี ซึ่งทำให้การมี Global Constraint ก็เหมือนไม่มีโดยใน Figure 4 จะเป็นการแสดงให้เห็นว่าราคาของ Swing Option แบบ Local Constraint กับ Global Constraint จะมีค่าเท่ากันเมื่อเป็นไปตามเงื่อนไขที่ได้กล่าวไป และถ้าเมื่อไหร่ Global Constraint มีค่าน้อยกว่าค่าของจำนวนสิทธิ์ที่สามารถ Swing ได้คูณกับ Local Constraint ก็จะทำให้ราคาของ Swing Option แบบ Global Constraint ตกลง เนื่องจากไม่สามารถ Swing ได้อยากอิสระเพราะมี Global Constraint อยู่

Strike Price

Figure 5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Strike Price กับราคาของ Swing Option

สำหรับค่า l_min และ l_max ที่แตกต่างกัน

ราคาของ Swing Option แบบ Local Constraint จะมีค่าต่ำสุดเมื่อค่าของ Strike Price มีค่าใกล้เคียงกับ 100 ตามในรูป Figure 5 เนื่องจากว่า Long-run Mean และราคาเริ่มต้นของสินทรัพย์อ้างอิงมีค่าเท่ากับ 100 ซึ่งจะทำให้เรารู้ว่าราคาสินทรัพย์อ้างอิงจะมีค่าใกล้ 100 โดยเมื่อนำไปเทียบกับสูตร Payoff จะทำให้รู้ว่าถ้าราคาสินทรัพย์อ้างอิงมีค่าใกล้กับ Strike Price จะทำให้ Payoff มีค่าน้อย

นอกจากนี้เมื่อค่า Strike Price ห่างจากราคาสินทรัพย์อ้างอิงมากเท่าไหร่ ราคาของ Swing Option ก็จะมีค่ามากขึ้นตามเส้นสีเหลืองใน Figure 5 เนื่องจากผู้ถือสามารถ Swing ขึ้นหรือลงก็ได้ ในทางกลับกันถ้า Swing Option นั้นสามารถ Swing ขึ้นได้อย่างเดียว ราคาของ Swing Option ก็จะมีค่าลดลงเมื่อค่าของ Strike Price มีค่าสูงขึ้น เนื่องจากเมื่อราคาสินทรัพย์ต่ำกว่าค่า Strike Price ก็จะไม่สามารถ Swing ลงเพื่อให้ Payoff เป็นบวกได้ ซึ่งก็จะแสดงให้เห็นจากเส้นสีส้มใน Figure 5 และในทางกลับกันเมื่อ Swing ลงได้อย่างเดียว ราคาของ Swing Option ก็จะมีค่าสูงขึ้นเมื่อ Strike Price สูงขึ้นตามเส้นสีน้ำเงิน

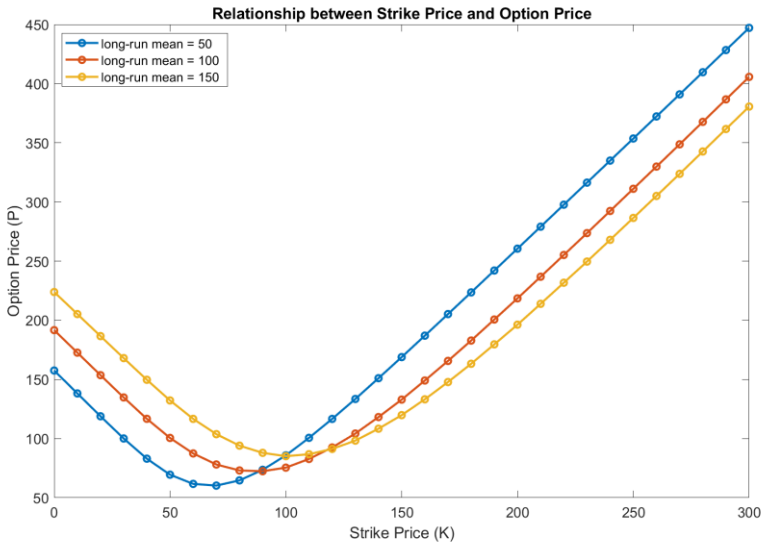

Figure 6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Strike Price กับราคาของ Swing Option สำหรับค่า long-run mean ที่แตกต่างกัน

จาก Mean Reverting Model ทำให้รู้ว่าราคาสินทรัพย์อ้างอิงจะลู่เข้าหาค่าของ Long-run mean ซึ่งทำให้รู้ได้ว่าราคาต่ำสุดของ Swing Option จะอยู่ในบริเวณที่ค่า Strike Price มีค่าใกล้กับ Long-run mean เนื่องจากผลต่างของราคาสินทรัพย์อ้างอิงกับ Strike Price จะน้อยและทำให้ราคาน้อย ซึ่งได้แสดงอยู่ใน Figure 6

Speed of mean reversion and Long-run mean

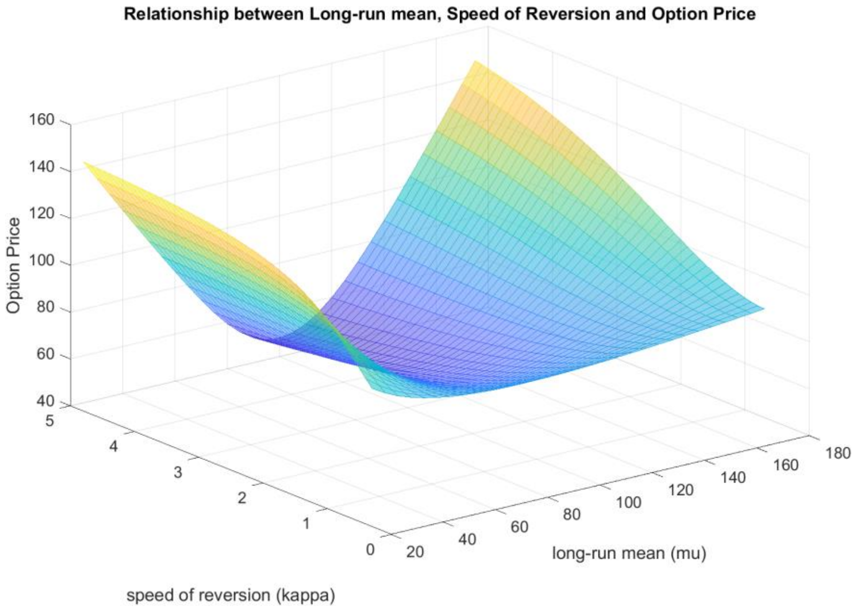

Figure 7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Speed of mean reversion, long-run mean กับราคาของ Swing Option

จาก Figure 7 จะแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างราคา Swing Option, Speed of mean reversion และ Long-run mean โดยจะเห็นได้ว่าเมื่อค่า Speed of mean reversion มีค่าสูงค่าของ Long-run mean จะส่งผลต่อราคาของ Swing Option มากกว่าเมื่อ Speed of mean reversion มีค่าน้อย โดยจะเห็นได้ว่าเมื่อ Speed of mean reversion มีค่าเท่ากับ 5 ราคาของ Swing option จะมีค่ามากเมื่อ Long-run mean มีค่าต่างจากค่า Strike Price มาก เป็นเหตุมาจากราคาสินทรัพย์อ้างอิงจะลู่เข้าหาค่า Long-run mean ไวมาก ในทางกลับกันเมื่อค่าของ Speed of mean reversion มีค่าน้อยราคาของ Swing Option จะมีค่าสูงขึ้นช้ากว่าเมื่อเทียบกับตอนที่ Speed of mean reversion มีค่าสูง เนื่องจากราคาสินทรัพย์อ้างอิงจะลู่เข้าหาค่า Long-run mean ช้ามาก

Price of the underlying asset at the beginning

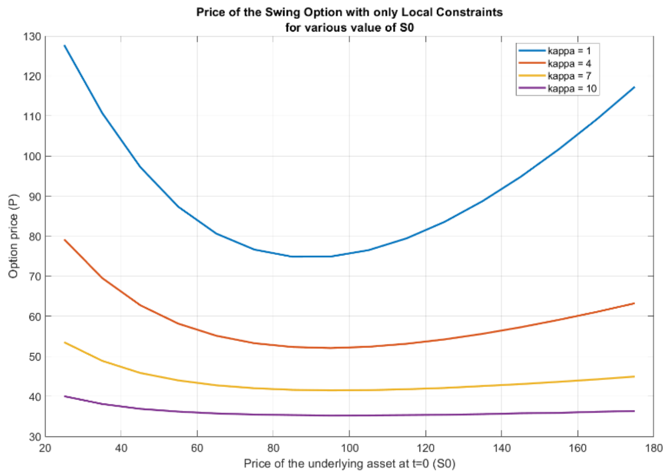

Figure 8 แสดงความสัมพันธ์ของราคาเริ่มต้นของสินทรัพย์อ้างอิง กับราคาของ Swing Option สำหรับค่า Speed of mean reversion ที่แตกต่างกัน

ราคา Swing Option จะมีความสัมพันธ์กับราคาเริ่มต้นของสินทรัพย์อ้างอิงมาก เมื่อค่าของ Speed of mean reversion มีค่าน้อย เนื่องจากราคาเริ่มต้นของสินทรัพย์อ้างอิงจะลู่เข้าหา Long-run mean ช้า โดยจะเห็นได้จาก Figure 8 เมื่อ Speed of mean reversion มีค่าเท่ากับ 10 ราคาของ Swing Option แทบไม่ต่างกันเลย ถึงแม้ว่าราคาเริ่มต้นของสินทรัพย์อ้างอิงจะต่างกัน

Volatility

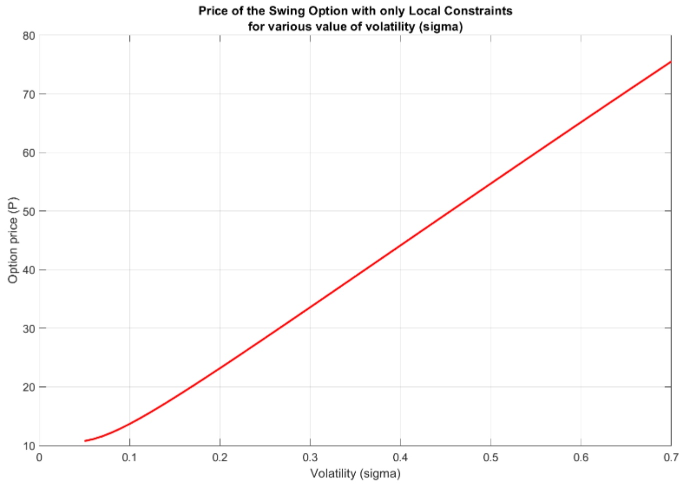

Figure 9 แสดงความสัมพันธ์ของ Volatility กับราคาของ Swing Option

ราคาของ Swing Option จะมีค่าสูงขึ้นตาม Volatility ตามรูป Figure 9 เนื่องจากเมื่อ Volatility มีค่าสูงราคาสินทรัพย์อ้างอิงจะมีโอกาสที่มีค่าต่างจากค่า Long-run mean ค่อนข้างสูง ซึ่งในกรณีนี้เราได้มีการกำหนดให้ Long-run mean กับค่า Strike Price มีค่าเท่ากัน ทำให้เมื่อ Volatility สูงราคาก็จะสูงตาม เนื่องจากราคาสินทรัพย์อ้างอิงจะมีค่าห่างจากค่า Strike Price มาก

อีกหนึ่งมุมมองที่สามารถอธิบายได้ คือ เมื่อ Volatility สูง การลงทุนในสินทรัพย์นี้ก็จะมีความเสี่ยงสูงด้วยเช่นกัน เนื่องจากราคาจะมีความผันผวนสูง ซึ่งการซื้อ Option มาจัดการความเสี่ยงก็จะมีประโยชน์เป็นอย่างมาก ซึ่งก็จะส่งผลให้ราคาของ Option สูงตาม Volatility

Risk-free Rate

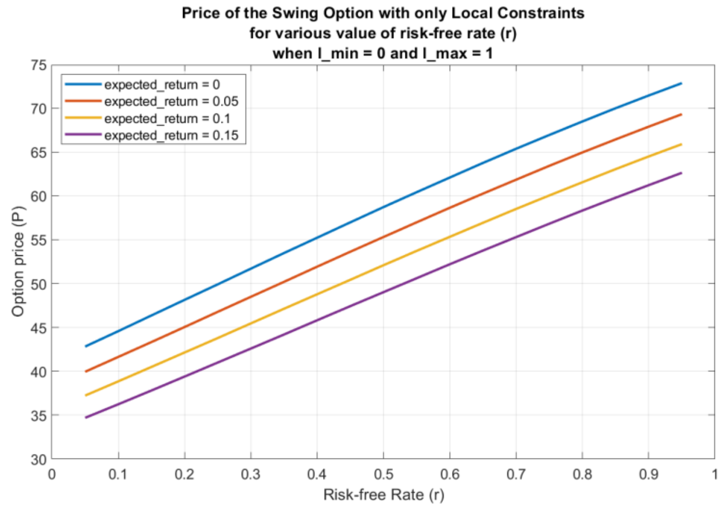

Figure 10 แสดงความสัมพันธ์ของ Risk-free Rate กับราคาของ Swing Option

เมื่อ l_min = 0 และ l_max = 1

จาก Figure 10 จะแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่าง Swing Option ที่มี Local Constraint ที่บังคับให้ Swing ขึ้นได้อย่างเดียว กับ Risk-free Rate ซึ่งเมื่อ Swing Option สามารถ Swing ขึ้นได้อย่างเดียวจะทำให้ Swing Option เปรียบเสมือนกับ Call Option ซึ่ง Call Option คือการซื้อสิทธิ์การซื้อในอนาคตที่ราคา Strike Price โดยเมื่อ Risk-free Rate มีค่าสูงมูลค่าของราคา Strike Price ในอนาคตก็จะสูงขึ้นตาม Risk-free Rate จึงเป็นเหตุให้ราคา Call Option ในตอนที่ Risk-free Rate สูงมีค่าที่สูงตาม เพราะผลต่างของมูลค่า Strike Price ณ ปัจจุบันและอนาคตมีค่ามาก

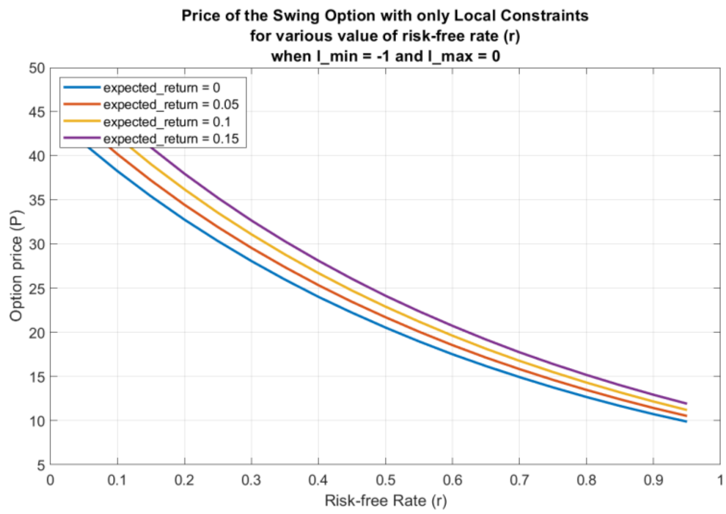

Figure 11 แสดงความสัมพันธ์ของ Risk-free Rate กับราคาของ Swing Option

เมื่อ l_min = -1 และ l_max = 0

ในทางกลับกันเมื่อ Swing Option สามารถ Swing ลงได้อย่างเดียว Swing Option นี้ก็จะเปรียบได้กับ Put Option ซึ่ง Put Option คือการซื้อสิทธิ์การขายในอนาคตที่ราคา Strike Price โดยราคาของ Put Option ก็สามารถหาได้จากการเอาผลประโยชน์ที่ได้จากการขายในราคา Strike Price ในอนาคตเมื่อเทียบกันราคาสินทรัพย์ในอนาคต ซึ่งก็ต้องนำมา

Discount กลับไปเป็นมูลค่าจริงที่เวลาปัจจุบันหรือตอนที่ซื้อ Put Option โดยถ้า Risk-free Rate สูงก็จะทำให้เมื่อ Discount กลับมาที่เวลาปัจจุบัน มูลค่าของเงินก็จะลดลงไปเยอะเมื่อเทียบกันตอนที่ Risk-free Rate น้อย นี้จึงเป็นเหตุให้ราคาของ Put Option มีราคาลดลงเมื่อ Risk-free Rate สูงขึ้น

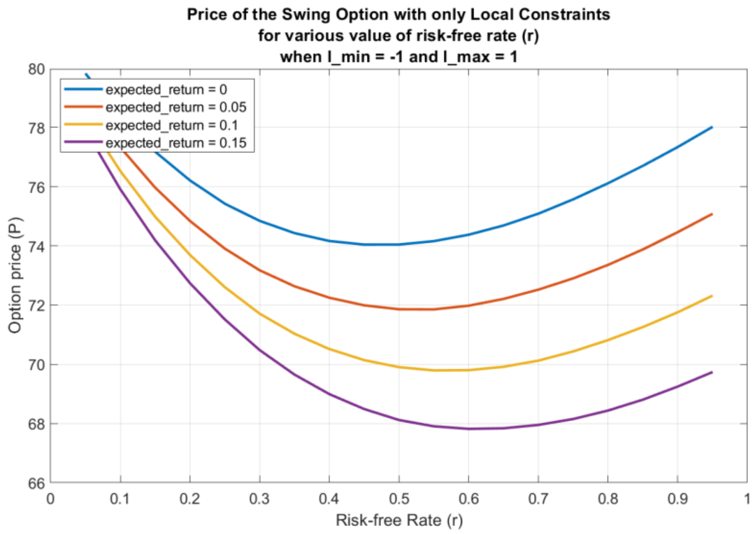

Figure 12 แสดงความสัมพันธ์ของ Risk-free Rate กับราคาของ Swing Option
เมื่อ l_min = -1 และ l_max = 1

เมื่อ Swing Option สามารถ Swing ได้ทั้งขึ้นและลง ความสัมพันธ์ระหว่าง Risk-free Rate และราคา Swing Option ก็จะเป็นแบบกราฟพาราโบรา เนื่องจาก Swing Option ก็สามารถเป็นได้ทั้ง Put Option และ Call Option

เอกสารอ้างอิง (References)

Jaillet, Patrick & Ronn, Ehud & Tompaidis, Stathis. (2004). Valuation of Commodity-Based Swing Options. Management Science.

Carmona, Rene & Ludkovski, Michael. (2010). Swing Options.

Bastian-Pinto, Carlos & Brandão, Luiz & Hahn, Warren. (2010). A Non-Censored Binomial Model for Mean Reverting Stochastic Processes. Proceedings 14. Annual international conference on real options.

Bastian-Pinto, Carlos. (2015). Modeling Generic Mean Reversion Processes with a Symmetrical Binomial Lattice - Applications to Real Options. Procedia Computer Science.