賽局介紹

Speaker 李昕威
2023/07/28

大綱

- 前言
- 取石頭問題
- Nim 遊戲
- 棋盤遊戲
- SG 定理

遊戲

- 兩位玩家、輪流行動
- 資訊公開透明
- 無隨機因素
- 遊戲必定會結束

取石頭問題

- 桌上有 8 個石頭。
- 有兩位玩家輪流行動，每回合能做的操作是拿走 1 ~ 3 顆石頭。
- 無法行動者判敗。
- 請問先手是否有必勝策略？

打表

石頭數量			2	3	4	5	6	7	8
先手勝敗	*Lose*	*Win*	*Win*	*Win*	*Lose*	*Win*	*Win*	*Win*	*Lose*
布林值	0	1	1	1	0	1	1	1	0

動態規劃

- 令 $f(i) \coloneqq$ (一開始有 i 個石頭，先手的勝敗)

- $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(i) = NAND_{\max(0,i-3) \le j \le i-1} f(j) \end{cases}$

- 不會平手。

遊戲狀態

- 多數賽局可以通過對每個遊戲狀態的勝敗進行 DP 來解決。
- $\begin{cases} f(End) \\ f(State) = NAND_{State \to State'}(f(State')) \end{cases}$

取石頭問題

- 桌上有 k 個石頭。
- 有兩位玩家輪流行動，每回合能做的操作是拿走 $1 \sim t$ 顆石頭。
- 無法行動者判敗。
- 請問先手是否有必勝策略？
- $k, t \leq 10^5$

必勝策略

- 賽局問題中的必勝策略通常會牽扯到「不動量」。
- 不動量成立的狀態，一次操作後，不動量一定不成立。
- 不動量不成立的狀態，一定存在某個操作，使不動量再度成立。

不變量

- 玩家的終極目標是將石頭取完。
- 相當於維持住石頭的數量是 $t+1$ 的倍數。

必勝策略

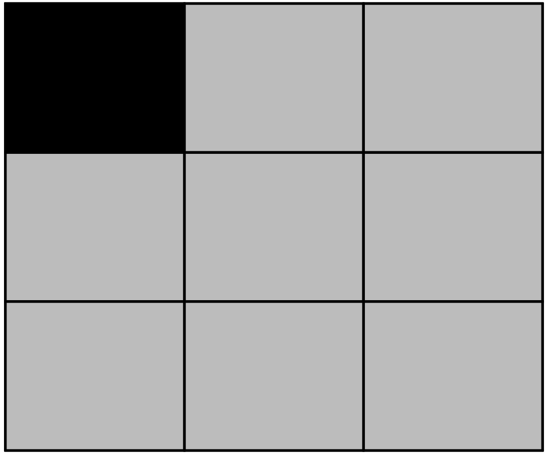
- 若是 k 是 $(t+1)$ 的倍數，則先手必敗 (後手必勝) 。
- 反之，先手必勝 (後手必敗) 。

取石頭問題

- 桌上有 k 個石頭。
- 有兩位玩家輪流行動，每回合能做的操作是拿走 $1 \sim t$ 顆石頭。
- 無法行動者判勝。
- 請問誰有必勝策略？

毒巧克力問題

- 有個 $N \times N$ 的巧克力，最左上角那格有毒。
- 兩位玩家輪流行動，每次選定非空的一格，並將其右下角的部分吃掉。
- 請問哪位玩家會吃到毒？



XOR 運算

- 互斥，相同得 0、相異得 1。

- $10 \oplus 5 = 15$
- $13 \oplus 9 = 4$
- $12 \oplus 7 = 11$
- $10 \oplus 18 \oplus 17 = 9$

Nim 遊戲

- 有 n 堆石頭，第 i 堆有 a_i 個。
- 兩位玩家輪流行動，每次可以選一堆，取走任意正整數個石頭。
- 無法行動者判敗。
- 請問誰有必勝策略？

特例

- 有兩堆石頭。
- $a_1 = a_2$，後手必勝。
- $a_1 \neq a_2$，先手必勝。

Nim 遊戲

- 若 $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$，則後手必勝。
- 否則先手必勝。

Nim 遊戲

- 令 $b = a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n$。
- 若 $b = 0$，那麼在一次操作之後，b 一定會變成非零。

Nim 遊戲

- 僅需證明若 $b \neq 0$，
- 一定可以在一步之內，將其調整回 0。
- Ex:
- $a = \{26, 2, 17\} = \{11010_2,\ 00010_2,\ 10001_2\}$
- $b = 9 = 01001_2$

Nim 遊戲

- 令 b 的二進位制中的最高位為 h。
- 選擇一個 a_i 滿足 a_i 的二進位制的第 h 位也是 1。
- $a = \{26, 2, 17\} = \{11010_2,\ 00010_2,\ 10001_2\}$
- $b = 9 = 01001_2$
- $i = 1$

Nim 遊戲

- 將第 i 堆石頭取到剩下 $a_i \oplus b$ 顆，也就是取走 $a_i - a_i \oplus b$ 顆石頭。

- b 會變成 $b' = a_1 \oplus \cdots \oplus (a_i \oplus b) \oplus \cdots a_n = b \oplus b = 0$。

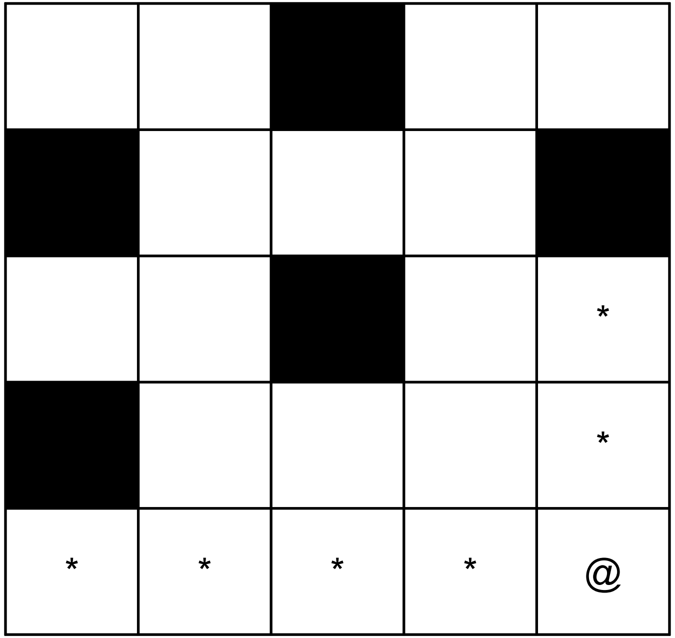
- $a_i = 11010_2$
- $b = 01001_2$
- $a_i \oplus b = 10011_2$

棋盤遊戲

- 給定一個 $N \times M$ 的棋盤，其中有些障礙物。
- 有一個棋子放在某一格上。
- 能做的操作是將棋子向上或向左移動任意格（不能經過障礙物）。
- 兩位玩家輪流行動，無法移動者判敗。
- 請問誰有必勝策略？

棋盤遊戲

- @ 代表棋子位置。
- * 代表能移動到的位置。



棋盤遊戲

- 棋子在棋盤上的每一格都是一個狀態。
- 使用 DP 求解。

0	1		0	1
	0	1	1	
0	1		1	0
	1	0	1	1
0	1	1	1	1

mex

- $mex(S) \equiv$ 最小且沒有出現在 S 內的非負整數。
- Ex：
- $mex(0,1,3,5) = 2$
- $mex(1,2,3,4) = 0$
- $mex(0,1,2,3) = 4$

$Grundy\ value$

- 把 DP 中的 $NAND$ 換成 mex。
- $\begin{cases} G(END) = 0 \\ G(State) = mex_{State \to State'}\left(G(State')\right) \end{cases}$

棋盤遊戲

- 棋子在棋盤上的每一格都構成一個狀態。
- 計算每個狀態的 *Grundy value*。

0	1		0	1
	0	1	2	
0	2		1	0
	3	0	4	1
0	4	1	3	2

Sprague–Grundy 定理

- $Grundy\ number\ =\ 0$ 則必敗。
- 反之必勝。

「很多棋盤」遊戲

- 給定很多個 $N_i \times M_i$ 的棋盤，其中有些障礙物。
- 每個棋盤都上都有一個棋子放在某格上。
- 能做的操作是選一個棋子向上或向左移動任意格（不能經過障礙物）。
- 兩位玩家輪流行動，無法移動者判敗。
- 請問誰有必勝策略？

「很多棋盤」遊戲

- 解答：
- 對每個棋盤計算各自棋子位置的 $Grundy\ value$，設其為 G_i。
- 若 $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n = 0$，則後手必勝。
- 否則先手必勝。

Grundy’s Game

- 一開始有 i 堆石頭，第 i 堆有 a_i 個石頭。
- 玩家輪流行動。
- 每次可以選擇一堆石頭，將其分為大小相異的兩堆。
- 無法行動者判敗，請問誰有必勝策略？