根號算法

Speaker 李昕威

2024/05/13

大綱

- 序列分塊
- 詢問分塊
- 分段討論
- 莫隊算法

單點修改、區間和

題目

給定一個長度為 n 的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$。支援 q 次以下兩種操作：

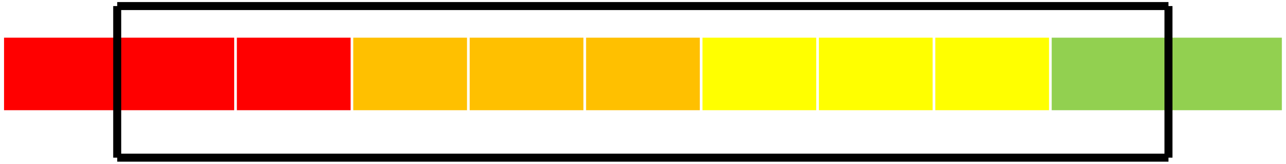
1. 給定 i, x，將 a_i 加上 x。
2. 給定 L, R，查詢 $\sum_{i=L}^{R} a_i$ 的值。

數字範圍

- $1 \leq n, q \leq 10^5$
- $1 \leq a_i, x \leq 10^9$

想法 1

- 每 k 個數字分成一塊，並對每塊維護其區間和。
  區間查詢時，完整包含的塊就直接回傳其總和，
  對於未完整包含的，則暴力掃過一遍。



想法 1 – 時間複雜度

- 單點修改： $O(1)$。

  區間查詢：$O\left(k+\frac{n}{k}\right)$。

  k 取 $\sqrt{n}$，總時間複雜度：$O(n+q\sqrt{n})$。

想法 2

- 每 k 個數字分成一塊，並對每塊維護其前綴和。

單點修改：$O(k)$。

區間查詢：$O\left(\frac{n}{k}\right)$。

k 取 $\sqrt{n}$，總時間複雜度：$O(n+q\sqrt{n})$。

傳送門

題目

有 n 個傳送門，分別在座標 $1 \sim n$ 上。

若座標 i 有顆球，則其會被傳送到 $i + a_i$，並重複直到最標超過 n。請支援 q 筆操作：

1. 修改 a_i
2. 在 x 放下一顆球，輸出被傳送的次數與最終停留的位置。

數字範圍

- $1 \le n, q \le 10^5$
- $1 \le a_i \le n$

想法

- 將座標每 k 個切成一塊。

對於每塊內的位置 x，維護從其出發，直到離開這塊，所需的次數和最終位置。

修改 a_i 的話就重建其所在的那塊。$O(k)$

對於詢問，則不斷沿著每塊往下傳送。$O\left(\frac{n}{k}\right)$。

總時間複雜度 $O\left(n+q\left(k+\frac{n}{k}\right)\right)$。

提問

線段樹可以做嗎？

區間修改、區間和

- **題目**

給定一個長度為 n 的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$。支援 q 次以下兩種操作：

1. 給定 L, R, x，將 $a[L \sim R]$ 加上 x。
2. 給定 L, R，查詢 $\sum_{i=L}^{R} a_i$ 的值。

數字範圍

- $1 \leq n, q \leq 10^5$
- $1 \leq a_i, x \leq 10^9$

區間修改、區間求數量

- **題目**

給定一個長度為 n 的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$。支援 q 次以下兩種操作：

1. 給定 L, R, x，將 $a[L \sim R]$ 加上 x。
2. 給定 L, R, z，查詢 $a[L \sim R]$ 中大於等於 z 的數字有幾個。

數字範圍

- $1 \leq n, q \leq 10^5$
- $1 \leq a_i, x \leq 10^9$

Sum of Product

- **題目**

給定一個長度為 n 的序列 $a_1, a_2, \dots, a_n$。支援 q 次以下兩種操作：

1. 給定 L, R, x，將 $a[L \sim R]$ 加上 x。
2. 給定 L, R，查詢 $\sum_{L \le i < j \le R} a_i \times a_j$。

數字範圍

- $1 \le n, q \le 10^5$
- $1 \le a_i, x \le 10^9$

大綱

- 序列分塊
- 詢問分塊
- 分段討論
- 莫隊算法

單點修改、區間和

- **題目**

給定一個長度為 n 的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$。支援 q 次以下兩種操作：

1. 給定 i, x，將 a_i 加上 x。
2. 給定 L, R，查詢 $\sum_{i=L}^{R} a_i$ 的值。

數字範圍

- $1 \le n, q \le 10^5$
- $1 \le a_i, x \le 10^9$

想法

- 維護當前序列的前綴和。

每 k 筆修改就重建一次序列的前綴和。

Example

$a = \{0, 0, 0, 0\}$

$a_1 + 3$

$query(1,3)$

$a_3 + 1$

$a_2 + 7$

$a_2 + 2$

$query(2,3)$

Prefix Sum

詢問分塊

- 每 k 筆詢問就重建一次前綴和：$O\left(\frac{q}{k}(k+n)\right)$。

  每筆詢問都得往前查 $O(k)$ 個的影響：$O\big(q(k+1)\big)$。

  時間複雜度：$O\left(q\left(\frac{n}{k}+k\right)\right)$。

大綱

- 序列分塊
- 詢問分塊
- 分段討論
- 莫隊算法

跳著加值

題目

給定 n 個數字 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，支援 q 筆以下兩種操作：

1. 給定 x, y, z，對所有滿足 $i \equiv x \pmod{y}$，將 a_i 加上 z。
2. 給定 j，詢問 a_j 的值。

數字範圍

- $1 \leq n, q \leq 10^5$
- $1 \leq a_i \leq 10^9$
- $1 \leq x, y, z \leq n$

想法

- 對於 $y \leq \sqrt{n}$，y 只有 $\sqrt{n}$ 種，而對應的 x 也只有 $\sqrt{n}$ 種。
  開個 $n \times \sqrt{n}$ 的二維陣列 add，遇到一筆 x、y、z 的修改操作，
  就將 $add[x][y]$ 加上 z，代表模 z 為 x 那些位置要加上 z。

  最後在詢問 a_j 的值時，枚舉 $k = 1 \sim \sqrt{n}$，將 $add[j \bmod k][k]$ 的值加總即可。

想法

- $y > \sqrt{n}$，要修改的元素至多只有 $\frac{n}{y}$ 個，也就是最多只有 $\sqrt{n}$ 個。

  因此可以直接暴力加值。

  總時間複雜度 $O(n\sqrt{n})$。

三角形數量

- **題目**

給定一張 n 個點 m 條邊的圖。請問圖中有幾個三角形？

數字範圍

- $1 \leq n \leq 10^5$
- $1 \leq m \leq \min\left(2 \times 10^5, \frac{n(n-1)}{2}\right)$

想法一

- 暴力枚舉任三點，檢查是否兩兩間有邊。

  時間複雜度 $O(n^3 \log n) \Rightarrow$ TLE。

想法二

- 枚舉每條邊，再計算兩端點的共同鄰居有幾個。

時間複雜度：$O(n\log n + nm) \Rightarrow$ TLE。

對於邊 (a, b)，計算共同鄰居數量，太慢的原因是 a 和 b 的 degree 同時太大。

想法三

- 若一個點 degree 小於等於 $\sqrt{n}$，則稱為「輕點」；大於則稱為「重點」。

  對於一個三角形：
  - 包含至少一個輕點
    - 輕輕輕
    - 輕輕重
    - 輕重重
  - 三個點都是重點

想法三

- 至少一個點是輕點

枚舉每條邊，若其中一個端點是輕點，則使用想法二。

時間複雜度：$O(n\log n + m\sqrt{n}\log n)$。

三個點都是重點

由於重點的數量少於 $\sqrt{n}$ 個，因此暴力枚舉。

時間複雜度：$O(n\sqrt{n})$。

如何快速判斷重點間是否互為鄰居？

想法三

- 總複雜度：$O(n \log n + m\sqrt{n} \log n + n\sqrt{n})$。

能更好嗎？

大綱

- 序列分塊
- 詢問分塊
- 分段討論
- 莫隊算法

區間相異數

題目

給定 n 個數字 $a_1, a_2, \dots, a_n$。

有 q 筆詢問：給定 L, R，請問 $a[L \sim R]$ 中相異的數有幾個？

數字範圍

- $1 \le n, q \le 10^5$
- $1 \le a_i \le 10^9$

想法一

- 每筆詢問能夠 $O(n)$ 計算。

  總時間複雜度：$O(qn) \Rightarrow$ TLE。

想法二

- 以 cnt 陣列記錄每個數字出現的次數。

  若已知 $[L, R]$ 的答案，是否能快速得到以下的答案？
  - $[L-1, R]$
  - $[L, R-1]$
  - $[L+1, R]$
  - $[L, R+1]$

莫隊

- 將詢問按照 $\left(\frac{L}{\sqrt{n}}, R\right)$ 由字典序小到大排序。

按照順序處理每筆詢問，

從 $[L_i, R_i]$ 到 $[L_{i+1}, R_{i+1}]$ 時就以想法二的方法進行更新。

時間複雜度：$O\left(\sum_{i=1}^{q} |L_{i+1} - L_i| + |R_{i+1} - R_i|\right)$。

莫隊 – 左界的移動距離

- 左界是按照 $\frac{L}{k}$ 排序的。將 $\frac{L}{k}$ 相同的位置稱為一塊。

  若 L_i、L_{i+1} 在同塊，則 $|L_{i+1} - L_i| \le k$。

  若 L_i、L_{i+1} 不同塊，這個情況至多發生 $O\left(\frac{n}{k}\right)$ 次，每次至多移動 $O(2k)$ 的距離。

  因此 $\sum_{i=1}^{q} |L_{i+1} - L_i| = O\left(qk + 2k \times \frac{n}{k}\right) = O(qk + n)$。

莫隊 – 右界的移動距離

- 對於左界的塊相同的那些詢問，其右界會遞增，因此移動距離至多為 n。

共有 $O\left(\frac{n}{k}\right)$ 個塊，因此總移動為 $O\left(\frac{n^2}{k}\right)$。

Example

$[1,2]$、$[2,5]$、$[1,6]$、$[3,9]$、$[1,11]$

$[5,7]$、$[4,10]$

$[7,8]$、$[8,10]$、$[7,110]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

莫隊 – 右界的移動距離

- 若 L_i、L_{i+1} 不同塊，則 $|R_{i+1} - R_i| \leq n$。這個情況至多發生 $O\left(\frac{n}{k}\right)$ 次。

  因此 $\sum_{i=1}^{q} |R_{i+1} - R_i| = O\left(\frac{n}{k} \times n + \frac{n}{k} \times n\right) = O\left(\frac{n^2}{k}\right)$。

莫隊 – 時間複雜度

- 總時間複雜度：$O\left(qk + n + \frac{n^2}{k}\right) = O(n\sqrt{m})$。

區間眾數

- **題目**

給定 n 個數字 $a_1, a_2, \dots, a_n$。

有 q 筆詢問：給定 L, R，請問 $a[L \sim R]$ 的眾數在 $[L \sim R]$ 內出現了幾次？

數字範圍

- $1 \leq n, q \leq 10^5$
- $1 \leq a_i \leq 10^9$