Operações na Forma Trigonométrica

Multiplicação

Sejam dois números complexos $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + isen\theta_2)$, calculamos seu produto fazendo:

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + isen(\theta_1+\theta_2)]$$

Exemplos:

1) Calcular z_1z_2, sabendo que $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)$ e $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right)$.

Sabe-se que $\rho_1\rho_2 = 2\cdot 3 = 6$ e $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + 2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Portanto: $z_1z_2 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + isen\frac{5\pi}{6}\right)$

2) Calcular z_1z_2, sabendo que $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right)$ e $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6}\right)$.

Sabe-se que $\rho_1\rho_2 = 2\cdot 3 = 6$ e $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi + \pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

Portanto: $z_1z_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)$

Divisão

Sejam dois números complexos $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + isen\theta_2)$, calculamos seu quociente fazendo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + isen(\theta_1-\theta_2)]$$

Exemplos:

1) Sabendo que $z_1 = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + isen\frac{\pi}{5}\right)$, calcule $\frac{z_1}{z_2}$.

$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{6}{2} = 3$ e $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{5} = \frac{5\pi - 4\pi}{20} = \frac{\pi}{20}$

Portanto: $\frac{z_1}{z_2} = 3\left(\cos\frac{\pi}{20} + isen\frac{\pi}{20}\right)$

2) Dado que $z_1 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2}\right)$ e $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6}\right)$, encontre $\frac{z_1}{z_2}$.

$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{8}{2} = 4$ e $\theta_1 - \theta_2 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi - \pi}{6} = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$

Portanto: $\frac{z_1}{z_2} = 3\left(\cos\frac{\pi}{20} + isen\frac{\pi}{20}\right)$

Potenciação

Dados um número complexo $z=\rho(\cos\theta+isen\theta)$ e um número natural não nulo *n*, calculamos z^n, através de:

$$z^n=\rho^n(\cos n\theta+isen\,n\theta)$$

Essa expressão é chamada de fórmula de Moivre.

Exemplos:

1) Dado $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, calcule z^8.

Primeiro passamos para a forma trigonométrica:

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1 \qquad \begin{cases} sen\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta=\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3} \text{ (ou } 60°\text{)}$$

$$z=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+isen\frac{\pi}{3}\right)$$

Usando a fórmula de Moivre

$$z^8=1^8\left(\cos 8\cdot\frac{\pi}{3}+isen\,8\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{8\pi}{3}+isen\frac{8\pi}{3}$$

$\frac{8\pi}{3}=\frac{8\cdot 180}{3}=480$ A primeira determinação positiva é 120°

Passando para a forma algébrica,

Logo $z^8=\cos 120°+isen120°=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z^8=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) Qual é o valor de $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{14}$?

Primeiro passamos para a forma trigonométrica:

$$\rho=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=2 \qquad \begin{cases} sen\theta=\dfrac{1}{2} \\ \cos\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta=150° \text{ (ou } \frac{5\pi}{6}\text{)}$$

$$z=2(\cos 150°+isen150°)$$

Usando a fórmula de Moivre

$$z^{14}=2^{14}(\cos 14\cdot 150°+isen14\cdot 150°)=2^{14}(\cos 2100°+isen2100°)$$

$\frac{2100}{360}=5$ voltas e 300°

Passando para a forma algébrica,

Logo $z^{14}=2^{14}(\cos 300°+isen300°)=2^{14}\left[\frac{1}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]=2^{13}\left(1-i\sqrt{3}\right)$

$z^{14} = 2^{13}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$

Exercícios:

1) Sendo $z_1 = 5(\cos\pi + isen\pi)$ e $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right)$, resolva $z_1 z_2$.

2) Dados $z_1 = 4(\cos\pi + isen\pi)$ e $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)$, obtenha $z_1 z_2$.

3) Sabendo que os complexos $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)$ e $z_3 = \cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}$, efetue:

a) $\dfrac{z_1 z_2}{z_3}$

b) $\dfrac{z_2 z_3}{z_1}$

4) Calcule $(1+i)^8$.

5) Determine, na forma algébrica, as potências:

a) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^5$

b) $\left(\sqrt{3} - i\right)^{10}$

6) Obtenha o módulo do número complexo $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^4$.

7) Seja z um número complexo. Se $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^6$, calcule a parte real e a parte imaginária de z.

Respostas:

1) $15\left(\cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3}\right)$

2) $12\left(\cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2}\right)$

3) a) $8\left(\cos\frac{5\pi}{12} + isen\frac{5\pi}{12}\right)$

b) $2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + isen\frac{7\pi}{12}\right)$

4) 16

5) a) $16 - 16\sqrt{3}i$

b) $512 + 512\sqrt{3}i$

6) 16

7) -1 e 0