Binômio de Newton

Coeficientes binomiais:

Definição: Dados dois números naturais *n* e *p*, com $n \geq p$, definimos o *coeficiente binomial n sobre p*, e indicamos por $\binom{n}{p}$, dado por $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, onde $\binom{n}{p} = C_{n,p}$.

Chamamos *n* de numerador e *p* de denominador de $\binom{n}{p}$.

Exemplos:
Calcule os coeficientes binomiais:

a) $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{5.4.3!}{3!2.1} = 10$

b) $\binom{10}{7} = \dfrac{10!}{7!3!} = \dfrac{10!.9.8.7!}{7!.3.2.1} = 120$

Casos particulares:

a) Quando $p = 0$, temos $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!n!} = 1$, $\forall n \in N$.

Exemplos:
$\binom{4}{0} = 1$ e $\binom{20}{0} = 1$

b) Quando $p = 1$, temos $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n(n-1)!}{1.(n-1)!} = n$, $\forall n \in N$.

Exemplos:
$\binom{5}{1} = 5$ e $\binom{9}{1} = 9$

c) Quando $n = p$, temos $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!0!} = 1$, $\forall n \in N$.

Exemplos:
$\binom{5}{5} = 1$ e $\binom{14}{14} = 1$

Usamos os coeficientes binomiais no estudo do desenvolvimento do binômio de Newton.

Binomiais Complementares:

Definição: Dois coeficientes binomiais de mesmo numerador são complementares quando a soma de seus denominadores é igual ao numerador, isto é:

$\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são complementares se $p + q = n$

Exemplos:

a) $\binom{8}{2}$ e $\binom{8}{6}$ b) $\binom{9}{5}$ e $\binom{9}{4}$ c) $\binom{11}{4}$ e $\binom{11}{7}$

Propriedade: Dois coeficientes binomiais complementares são iguais se:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Leftrightarrow \begin{cases} p = q \\ p + q = n \end{cases}$$

Sendo *n*, *p* e *q* números naturais tais que $n \geq p$ e $n \geq q$.

Exemplo:

Calcule *x* em $\binom{6}{x} = \binom{6}{2}$

Temos duas possibilidades $\begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x + 2 = 6 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$

Triângulo de Pascal

Os coeficientes binomiais podem ser dispostos em uma tabela chamada triângulo de Pascal ou Tartaglia. Nela coeficientes de um mesmo numerador agrupam-se em uma mesma linha e os de mesmo denominador agrupam-se em uma mesma coluna.

Linha 0	$\binom{0}{0}$							
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
Linha 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
Linha 5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
...	...	...	...	...	...	...		
Linha k	$\binom{k}{0}$	$\binom{k}{1}$	$\binom{k}{2}$	$\binom{k}{3}$	$\binom{k}{4}$	$\binom{k}{5}$	...	$\binom{k}{k}$

Calculando os valores dos coeficientes, obtém-se:

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Propriedades:

1ª) Toda linha começa e termina por 1.

De fato: $\binom{k}{0}=1$, $\binom{k}{k}=1$, $\forall k \in N$

2ª) Em uma mesma linha coeficientes binomiais eqüidistantes dos extremos são iguais.

Exemplo:

$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$

1 7 21 35 35 21 7 1

Justificativa: Esses coeficientes binomiais são complementares.

3ª) A partir da linha 2, cada elemento *x* (com exceção do primeiro e do último) é igual a soma de dois elementos da liinha anterior, a saber: o elemento imediatamente acima de *x* e o anterior dele.

1					
1	+1				
1	2	1			
1	3	+3	1		
1	4	6	4	+1	
1	5	10	10	5	1

Esta propriedade é conhecida como relação de Stifel e pode ser generalizada por:

$$\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}, \; n \ge p$$

O 1° membro da igualdade representa um elemento genérico (linha n e coluna p) do triângulo; o segundo membro representa a soma de dois elementos da linha anterior (linha n-1), um da mesma coluna (p) e o outro da coluna anterior (p-1).

Exemplos:

1) Calcule o valor de $\binom{9}{7}+\binom{9}{8}$

Pela relação de Stifel $\binom{9}{7}+\binom{9}{8}=\binom{10}{8}$

E $\binom{10}{8}=\frac{10!}{8!2!}=\frac{10.9.8!}{8!.2.1}=45$

2) Suponhamos que $\binom{n}{p}=x$ e $\binom{n+1}{p+1}=y$. Descubra o valor de $\binom{n}{p+1}$.

Pela relação de Stifel $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$

$$x+\binom{n}{p+1}=y \Rightarrow \binom{n}{p+1}=y-x.$$

4ª) A soma dos elementos da linha de numerador k é igual a 2^k .

Linha 0	1								2^0
Linha 1	1	1							2^1
Linha 2	1	2	1						2^2
Linha 3	1	3	3	1					2^3
...	...	...	...	...	...	...			
Linha k	$\binom{k}{0}$	$\binom{k}{1}$	$\binom{k}{2}$	$\binom{k}{3}$	$\binom{k}{4}$	$\binom{k}{5}$	...	$\binom{k}{k}$	2^k

Somatório:

È um símbolo indicado pela letra grega Σ (sigma), que representa a soma de certo número de parcelas com alguma característica comum.

Exemplos:

Calcule:

a) $\sum_{i=1}^{5} i^2$ (lê-se: somatório de i^2 , para *i* variando de 1 até 5.).

$$\underbrace{1^2}_{i=1}+\underbrace{2^2}_{i=2}+\underbrace{3^2}_{i=3}+\underbrace{4^2}_{i=4}+\underbrace{5^2}_{i=5}=1+4+9+16+25=55$$

b) $\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i+1}$

$$=\frac{1}{0+1}+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2+1}+\frac{1}{3+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{12+6+4+3}{12}=\frac{25}{12}$$

c) $\sum_{k=0}^{2} \binom{5}{k}$

$$=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}=1+5+10=16$$