

Lista de Exercícios: Determinantes

2 Calcule o valor de $y = \begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$.

4 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\begin{vmatrix} x & 3 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} = 2$.

7 Qual o valor de cada um dos determinantes abaixo?

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & -1 & -a \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}$

8 Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \geq j \\ 2, & \text{se } 1 < j \end{cases}$, e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{se } i \geq j \\ 1, & \text{se } i < j \end{cases}$. Qual o valor de $\det A + \det B$?

9 Resolva, em \mathbb{R} , a desigualdade $\begin{vmatrix} 6 & 1 & -5 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$.

10 (U. F. Ouro Preto-MG) Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $C = (5 \ -1)$.

Pede-se:

a) Calcular $BC + 2A$ e CB .

b) Determinar λ de maneira que $\det(A - \lambda I) = 0$, em que I é a matriz identidade de ordem 2×2 .

(Unifor-CE) Para resolver as questões de números 13 e 14, considere a

matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$.

13 Determine k para o qual o determinante da matriz A é nulo.

14 Na matriz A , faça $k = 0$ e resolva a equação matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Dê o valor de $x - y - z$.

15 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\begin{vmatrix} x & 4 & -2 \\ x-1 & x & 1 \\ 1 & x+1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

18 (F. Porto-Alegrense-RS) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, na qual x, y, z e $t \in \mathbb{R}$. Se os números x, y, z e t , nessa ordem, constituem uma P.G. de razão $\frac{1}{2}$, qual é o valor do determinante dessa matriz?

- 19** (UF-PA) O determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & y & 0 \\ 1 & 2 & 2y \end{pmatrix}$ é igual a -2 . Se B e C são as matrizes obtidas, respectivamente, pela substituição em A do menor e do maior valor de y encontrados, calcule a matriz transposta do produto de B por C .

21 Calcule os seguintes determinantes:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \end{array}$$

22 Calcule os seguintes determinantes:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} 0 & 5 & -3 & 4 \\ 11 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & b \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} -x & y & 1 & 0 \\ -y & 0 & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & x & y \end{vmatrix} \end{array}$$

23 Resolva, em \mathbb{R} , a equação:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3.$$

24 Resolva, em \mathbb{R} , a equação:

$$\begin{vmatrix} 2^x & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -79.$$

25 Calcule:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

26 Sem desenvolver o determinante, calcule:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 11 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & -7 & 0 & 4 \\ 11 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 9 \end{vmatrix} \end{array}$$

27 Sabendo que $\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} = 4$, calcule, sem desenvolver o determinante:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{vmatrix} z & w \\ x & y \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} x & y \\ 5z & 5w \end{vmatrix} \\ \text{b)} \begin{vmatrix} 5x & 5y \\ z & w \end{vmatrix} & \text{d)} \begin{vmatrix} 5x & 5y \\ 5z & 5w \end{vmatrix} \end{array}$$

28 Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -10$, qual é o valor de:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} b & a & 4c \\ e & d & 4f \\ h & g & 4i \end{vmatrix} \end{array}$$

29 Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 e $\det A = 5$, qual é o valor de $\det (3A)$?

30 P é uma matriz quadrada de ordem 3, $\det P = 7$. Determine o valor de x , sabendo que $\det (2P) = 2x + 6$.

31 A é uma matriz quadrada de ordem 6 e $\det A = x$. Qual é o valor do determinante da matriz obtida a partir de A quando suas duas primeiras linhas são multiplicadas por 2, as duas linhas seguintes são multiplicadas por 3 e as duas últimas são divididas por 6?

32 Considere uma matriz quadrada A de ordem 4 e multiplique cada uma de suas colunas por m ($m > 0$), obtendo a matriz $m \cdot A$. Se $\det (mA) = 243$ e $\det A = 3$:

a) Encontre o valor de m .

b) Multiplicando as duas primeiras colunas de A por $2m$ e as duas últimas por $\frac{1}{m}$, qual é o valor do determinante da matriz assim construída?

33 Se $\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$, qual é o valor de:

a) $\begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2x & z \\ 2y & w \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$, quando $z = x$ e $y = w$?

34 Sem desenvolver os determinantes, calcule o valor de:

$$y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 14 & 18 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}$$

35 Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$, qual é o valor de $\begin{vmatrix} 6a & 6d & 6g \\ 6b & 6e & 6h \\ 6c & 6f & 6i \end{vmatrix}$?

36 Sabendo-se que A e B são matrizes quadradas de ordem 2, $\det A = 20$, $\det B^t = -5$, qual é o valor de $\det (A \cdot B)$?

37 Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 3, $\det A = 5$ e $\det B = 3$. Qual é o valor de:

a) $\det (A \cdot B)$ b) $\det (B^t \cdot A^t)$ c) $\det (2 \cdot A^t)$

39 Calcule, usando Chió:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

40 Calcule, usando Chió:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 11 \\ -6 & 3 & 9 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix} \end{array}$$

43 Resolva a equação $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x & x^2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 2$.

2 (UF-RN) Sendo $a = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$ e

$b = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$, o determinante da ma-

triz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$ b) 4 c) 1 d) $\frac{1}{2}$

3 (Unificado-RJ) O valor de

$\begin{vmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ é:

a) $4(\cos a + \sin a)$ d) 2
b) 4 e) 0
c) $2(\cos^2 a - \sin a)$

19 (Vunesp-SP) Considere as matrizes reais

$A = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 2 & y+z \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & z \\ y & -x \end{pmatrix}$.

Se $A = B^t$ (transposta de B), o determi-

nante da matriz $\begin{pmatrix} x & y & -1 \\ z & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ é igual a:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

21 (UE-PI) Se o determinante da matriz

$\begin{pmatrix} p & 2 & 2 \\ p & 4 & 4 \\ p & 4 & 1 \end{pmatrix}$ é igual a -18, então o deter-

minante da matriz $\begin{pmatrix} p & -1 & 2 \\ p & -2 & 4 \\ p & -2 & 1 \end{pmatrix}$ é igual a:

a) -9 b) -6 c) 3 d) 6 e) 9

Respostas

1 a) 3 c) 1 e) -7

b) $-\frac{1}{5}$ d) -10

2 -1

3 $S = \{-4\}$

4 $S = \{5, -1\}$

5 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{3}\right\}$

6 a) 105 b) 0

7 a) -1 b) $a - a^3$

8 -3

9 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

10 a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ e (7)
b) -1 ou 2

11 a) $S = \{1\}$ b) $S = \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

12 -76

13 $\frac{3}{2}$

14 zero

15 $S = \{2\}$

16 $x = 13$

17 -3 e 5

18 zero

19 $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ 8 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

20 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

21 a) -208 b) -3 c) 84

22 a) 0 b) $a^2 + b^2$ c) $-2x(1 + y^2)$

23 $S = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

24 $S = \{5\}$

25 -50

26 a) 0 b) 0

27 a) -4 b) 20 c) 20 d) 100

28 a) -60 b) 40

29 45

30 25

31 x

32 a) $m = 3$ b) 12

33 a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0

34 zero

35 -648

36 -100

37 a) 15 b) 15 c) 40

38 Lembre que o determinante da matriz identidade vale 1.

39 a) -18 b) -21 c) -55

40 a) 3 b) 460 c) -87

41 Demonstração.

42 $S = \{2, -6\}$

43 $S = \{2, -1\}$

2 c

3 d

19 b

21 e