

Lista de Exercícios: Progressões Geométricas

- 77** Das seqüências abaixo, assinale aquelas que representam progressões geométricas:

a) $(4, 12, 36, 108, \dots)$

d) $(3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}, 12, \dots)$

b) $(-2, 8, -32, 128, \dots)$

e) $(1, -1, 1, -1, 1, \dots)$

c) $(3, 9, 15, 21, \dots)$

f) $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots)$

- 78** Calcule a razão de cada uma das seguintes progressões geométricas:

a) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{32}, \dots\right)$

b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{12}, \frac{1}{48}, \frac{-1}{192}, \dots\right)$

c) $(3^{20}, 3^{22}, 3^{24}, \dots)$

- 79** Calcule a razão de cada uma das seguintes progressões geométricas:

a) $(\sqrt{2} - 1, 1, \sqrt{2} + 1, 3 + 2\sqrt{2}, \dots)$

b) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{6}, 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}, \dots)$

- 80** Qual é o 5º termo da P.G. $\left(\frac{2}{9}, \frac{4}{3}, 8, \dots\right)$?

- 81** Qual é o 10º termo da P.G. $(20, 10, 5, \dots)$?

- 82** O 4º termo de uma P.G. é $\frac{1}{250}$ e o 1º termo é igual a 4. Qual é a razão dessa P.G.?

- 83** Qual é a razão de uma P.G. em que o 1º termo é igual a $50\sqrt{2}$ e o 6º termo é 400?

- 84** Numa P.G., o 2º termo é igual a -6 e o 5º termo é igual a 48. Qual é o seu 1º termo?

- 85** Numa pequena cidade, um boato é espalhado da seguinte maneira: no 1º dia, 5 pessoas ficam sabendo; no 2º, 15; no 3º, 45; e assim por diante. Quantas pessoas ficam sabendo do boato no 10º dia?

- 86** Num cassino, são disputadas dez rodadas em uma noite. Na 1ª rodada, o valor do prêmio é R\$ 2 000,00. Caso os valores dos prêmios aumentem segundo uma P.G., qual será o valor do prêmio na última rodada, se na 5ª rodada ele for de R\$ 10 125,00?

- 87** Calcule a razão de uma P.G. cujo 2º termo é igual a 12 e a soma do 1º com o 3º é -51.

- 88** Num programa de condicionamento físico, um atleta nada sempre o dobro da distância completada no dia anterior. Se no 1º dia ele nadou 25 m, quanto nadará no 6º dia?



Rogério Reis/Puls

- 89** (UF-PA) Um motorista aciona os freios de um automóvel. Após a freada, o veículo percorre 27 metros no primeiro segundo e, durante alguns segundos, percorre, em cada segundo, $\frac{1}{3}$ da distância que percorreu no segundo anterior. Ache a distância total a ser percorrida no tempo de 4 segundos após a freada.

- 90** Numa P.G. oscilante, a soma do 2º com o 5º termo é -210 , e a soma do 4º com o 7º termo é -840 . Qual é o 1º termo dessa P.G.?

- 91** Numa P.G., a diferença entre o 3º e o 1º termo é $\frac{99}{40}$, e a diferença entre o 4º e o 2º termo é $\frac{99}{4}$. Qual é a razão dessa P.G.? Determine a seqüência.

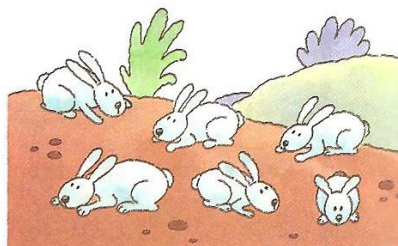
- 92** Numa P.G. oscilante, a soma do 2º com o 4º termo é -51 , e o 6º termo é 16 vezes o 4º. Qual é o 1º termo dessa P.G.?

- 93** Dada a P.G. $(2^x, 2^{2x}, 2^{3x}, \dots)$, determine o valor de x de modo que seu décimo termo seja $\frac{1}{128}$.

- 94** Quantos termos tem a P.G. $(2, 6, 18, \dots, 4374)$?

- 95** Quantos termos tem a P.G. $\left(3\sqrt{2}, 3, \dots, \frac{3\sqrt{2}}{16}\right)$?

- 96** Numa reserva animal, a população de coelhos é de 295 245. Uma infecção alastra-se rapidamente na reserva de modo que, no 1º dia, há 5 vítimas; no 2º, 10 *novas* vítimas; no 3º, 30 *novas* vítimas. Determine em quantos dias a população de coelhos será dizimada, sabendo que a seqüência do número “acumulado” de vítimas obedece a uma P.G. (Dado: $3^{10} = 59\,049$.)



- 97** Interpole oito meios geométricos entre 2 000 e $\frac{125}{32}$.

- 98** Interpole cinco meios geométricos entre $\sqrt{3}$ e $8\sqrt{3}$.

- 99** Interpolando quatro meios geométricos entre $-\frac{2}{9}$ e x , obtém-se uma P.G. de razão -3 . Determine:

a) o valor de x ; b) o 4º termo da P.G.

- 100** Interpolando cinco meios geométricos entre $\frac{2}{625}$ e 50, determine o 5º termo da P.G. obtida.

- 101** Escreva três números em P.G. cujo produto seja 27 e a soma dos dois últimos termos seja 15.
- 102** Escreva cinco números em P.G. tais que o produto seja 1024 e a soma dos quadrados dos dois primeiros termos seja igual a 5.
- 103** Os números que expressam as medidas do lado, da diagonal e da área de um quadrado estão, nessa ordem, em P.G. de razão $\sqrt{2}$. Qual é a medida do lado do quadrado?
- 104** Os números que expressam o raio de uma circunferência, seu perímetro e a área do círculo correspondente estão, nessa ordem, em P.G. Qual é a área do círculo?
- 106** Determine x de modo que a seqüência $(x - 3, x + 1, 6x + 1)$ seja uma P.G.
- 107** Determine x de modo que a seqüência $(3^{x+1}, 3^{4-x}, 3^{3x+1})$ seja uma P.G.
- 108** Determine x de modo que a seqüência $(2, \log_3 x, 8)$ seja uma P.G.
- 112** A seqüência $(x, 3, 7)$ é uma P.A. e a seqüência $(x - 1, 6, y)$ é uma P.G. Quais são os valores de x e y ?
- 114** Sendo $(40, x, y, 5, \dots)$ uma progressão geométrica de razão q e $\left(q, 8 - a, \frac{7}{2}\right)$ uma progressão aritmética, determine:
a) o valor de a ;
b) o 10º termo da P.A.
- 116** (UF-MG) Os números reais 3, a e b são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão aritmética cuja razão é positiva. Por sua vez, os números reais a , b e 8 são, também nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica.
Determine a e b .
- 117** (UF-SC) Se a , b , c são termos consecutivos de uma P.A. de razão 5 e $(a + 2)$, b , $(c - 1)$ são termos consecutivos de uma P.G., então determine a soma dos elementos da P.G.
- 120** Calcule a soma dos sete primeiros termos da P.G. $(4, -12, 36, \dots)$.
- 121** Calcule a soma dos oito primeiros termos da P.G. $(320, 160, 80, \dots)$.
- 122** Numa P.G. de termos positivos, o 1º termo é igual a 5 e o 7º é 320. Calcule a soma dos dez primeiros termos dessa P.G.
- 123** Numa P.G., o 2º termo é igual a $\frac{1}{100}$ e o 5º é igual a 10. Calcule a soma:
a) de seus quatro primeiros termos; b) de seus seis primeiros termos.
- 124** Calcule a soma dos dez primeiros termos da P.G. (m, m^2, m^3, \dots) :
a) para $m = 1$; b) para $m = 4$.
- 125** Quantos termos da P.G. $(2, -6, 18, -54, \dots)$ devemos considerar a fim de que a soma resulte 9 842?

- 126** Um indivíduo contraiu uma dívida e precisou pagá-la em oito prestações assim determinadas:
 1ª: R\$ 60,00; 2ª: R\$ 90,00; 3ª: R\$ 135,00; e assim por diante. Qual o valor total da dívida?

- 127** Num apiário há seis viveiros. O número de abelhas em cada viveiro está indicado na tabela abaixo:

	Machos	Fêmeas
1º viveiro	3	2
2º viveiro	6	6
3º viveiro	12	18
⋮	⋮	⋮

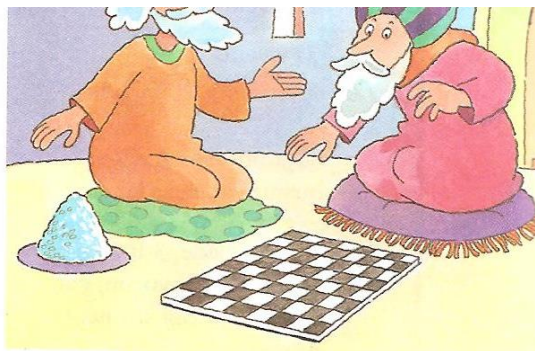


Supondo-se que os valores variem segundo progressões geométricas, quantas abelhas há, ao todo, no apiário?

- 128** Numa cidade, 3 100 jovens alistaram-se para o serviço militar. A junta militar da cidade convocou, para exame médico, 3 jovens no 1º dia, 6 no 2º, 12 no 3º, e assim por diante. Quantos jovens ainda devem ser convocados para o exame após o 10º dia de convocações?
- 129** Uma exposição de arte deseja arrecadar fundos para uma creche. O número de pessoas que visitam a exposição varia de acordo com uma P.G. de razão 2. No 1º dia, 2 pessoas visitaram a exposição. Se de cada pessoa é cobrado um ingresso de R\$ 3,00, qual é o número mínimo de dias que a exposição deve permanecer aberta a fim de que o total arrecadado atinja o valor de R\$ 6 138,00?
- 130** (UFF-RJ) Determine a soma dos 100 primeiros termos da progressão geométrica (a_1, a_2, a_3, \dots) , sabendo que $\log_{10} a_n = n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 131** (U. F. Ouro Preto-MG) A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é dada por $S_n = 3^n - 1$, sendo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Pede-se:
- Encontre o primeiro e o segundo termos da P.G.
 - Obtenha a razão da P.G.
 - Expresse o termo geral a_n da P.G.
 - Utilize a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.G. para verificar que, de fato, $S_n = 3^n - 1$.
- 132** (UnB-DF) Conta uma lenda que o rei de certo país ficou tão impressionado ao conhecer o jogo de xadrez que quis recompensar seu inventor, dando-lhe qualquer coisa que ele pedisse. O inventor, então, disse ao rei: "Dê-me simplesmente 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos pela segunda casa, 4 grãos pela terceira, 8 grãos pela quarta e assim sucessivamente, até a 64ª casa do tabuleiro". O rei considerou o pedido bastante simples e ordenou que fosse cumprido. Supondo que um grão de trigo tem massa igual a 0,05 g e que a produção mundial de trigo em 1997 foi de 560 milhões de toneladas, julgue se os itens abaixo são verdadeiros ou falsos:
- O número de grãos de trigo devido ao inventor apenas pela 11ª casa do tabuleiro é menor que 1 000.



- b) Até a 30ª casa, seriam devidas ao inventor mais de 50 toneladas de grãos.
- c) A quantidade de trigo devida apenas pela 31ª casa corresponde à quantidade recebida até a 30ª casa acrescida de um grão.
- d) Seriam necessárias mais de 1 000 vezes a produção mundial de trigo de 1997 para recompensar o inventor.



133 Calcule $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$.

134 Qual é o valor de $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \dots$?

135 Qual é o valor da soma dos infinitos termos da P.G.

$$\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, -\frac{1}{20}, \dots \right)?$$

136 Qual é o valor de

$$S = \left(1 - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1000}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10000}\right) + \dots?$$

137 Qual é o valor de $S = 2 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{2} - \frac{1}{27} + \frac{1}{4} - \frac{1}{81} + \dots$?

138 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4} + \dots = 1$.

139 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots = 3$.

140 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[9]{x} \cdot \sqrt[27]{x} \cdot \dots = 9$.

(Sugestão: lembre-se de que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.)

141 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \dots = 16$.

142 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + \dots = 4$.

143 Considere a série geométrica $S = (2x+3) + (2x+3)^2 + (2x+3)^3 + \dots$

a) Para que valores de x a série é convergente?

b) Determine x para que $S = -\frac{3}{8}$.

144 Determine a fração geratriz de cada uma das seguintes dízimas periódicas:

a) 0,888...

b) 1,666...

145 Determine a fração geratriz de cada uma das seguintes dízimas periódicas:

a) 0,323232...

b) 5,676767...

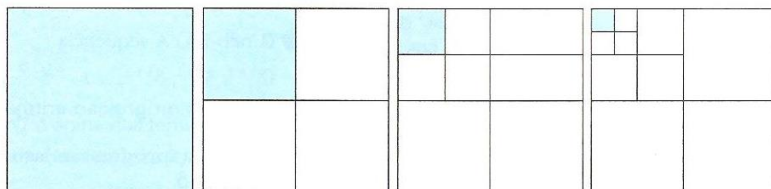
146 Seja um triângulo equilátero de lado 12 cm. Unindo-se os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se outro triângulo equilátero. Unindo os pontos médios desse último triângulo, construímos outro triângulo, e assim indefinidamente.

a) Qual é a soma dos perímetros de todos os triângulos assim construídos?

b) Qual é a soma das áreas de todos os triângulos assim construídos?

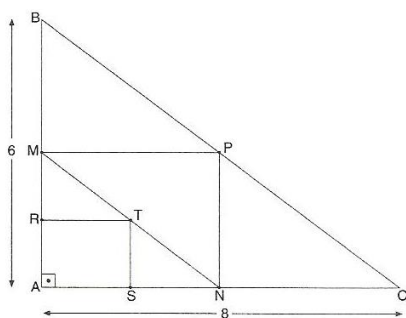
147 (Fuvest-SP) Dado um quadrado Q_1 cujo lado tem comprimento $\ell = 1$, considere a sequência infinita de quadrados $\{Q_1, Q_2, Q_3, \dots\}$ em que cada quadrado é obtido unindo-se os pontos médios dos lados do quadrado anterior. Qual é a soma das áreas de todos os quadrados da sequência?

148 (U. F. Pelotas-RS) O lado de um quadrado mede ℓ unidades de comprimento. Unindo-se os pontos médios dos lados opostos, obtêm-se quatro novos quadrados. Se procedermos assim sucessivamente, obteremos novos quadrados cada vez menores, conforme a figura abaixo, que mostra parte de uma sequência infinita.



- a) Determine a soma dos perímetros de todos os quadrados dessa sequência infinita.
b) Calcule a soma das medidas das diagonais desses infinitos quadrados.

149



Seja ABC o triângulo retângulo da figura. Por M e N , pontos médios de \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente, construímos o retângulo $AMPN$. Unindo M e N , construímos o triângulo retângulo AMN ; por R e S , pontos médios de \overline{AM} e \overline{AN} , respectivamente, construímos o retângulo $ARTS$ e assim indefinidamente.

Determine a diferença entre a soma das áreas de todos os triângulos assim construídos e a soma das áreas de todos os retângulos assim construídos.

Respostas:

77 a, b, d, e

78 a) $q = \frac{3}{4}$ c) $q = 3^2$

b) $q = -\frac{1}{4}$

79 a) $\sqrt{2} + 1$ b) $\sqrt{3}$

80 288

81 $\frac{5}{128}$

82 $q = 0,1$

83 $q = \sqrt{2}$

84 3

85 98 415

86 R\$ 76 886,71

87 $q = -\frac{1}{4}$ ou $q = -4$

88 800 metros

89 40 metros

90 -15

91 $q = 10; \left(\frac{1}{40}, \frac{1}{4}, \frac{5}{2}, \dots\right)$

92 $\frac{3}{4}$

93 $x = -\frac{7}{10}$

94 8

95 9

96 11 dias

97 $\left(2000, 1000, 500, 250, 125, \frac{125}{2}, \frac{125}{4}, \frac{125}{8}, \frac{125}{16}, \frac{125}{32}\right)$

98 $\left(\sqrt{3}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, 4\sqrt{3}, 4\sqrt{6}, 8\sqrt{3}\right)$ ou $\left(\sqrt{3}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{6}, 4\sqrt{3}, -4\sqrt{6}, 8\sqrt{3}\right)$

99 a) 54

b) 6

100 2

101 $\left(\frac{3}{4}, 3, 12\right)$

102 $(1, 2, 4, 8, 16)$ ou $(-1, -2, -4, -8, -16)$

103 2

104 $16\pi^3$

105 $4\sqrt{2}$

106 $-\frac{1}{5}$ ou 4

107 $x = 1$

108 $x = \frac{1}{81}$ ou $x = 81$

112 $x = -1$ e $y = -18$

113 $x = 4$ e $y = 5$

114 a) $a = 6$ b) 14

115 Resposta pessoal.

116 $a = \frac{9}{2}$ e $b = 6$

117 37

118 Resposta pessoal.

119 $\frac{2}{3}$

120 2 188

121 $\frac{1275}{2}$

122 5 115

123 a) 1,111

b) 111,111

124 a) 10

b) $\frac{4^{11} - 4}{3}$

125 9

126 R\$ 2 956,00, aproximadamente

127 917

128 31

129 10

130 $\frac{10^{100} - 1}{9}$

131 a) $a_1 = 2$ e $a_2 = 6$

b) $q = 3$

c) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

- 132** a) F, pois é 1 024
 b) V, aproximadamente 53,7 toneladas
 c) V, pois $S_{30} = 2^{30} - 1$ e $a_{31} = 2^{30}$
 d) V, pois, para recompensar o inventor, seriam necessárias $9,2 \cdot 10^{11}$ toneladas.

133 $\frac{10}{9}$

134 $2\sqrt{2}$

135 $\frac{4}{15}$

136 $\frac{17}{9}$

137 $\frac{7}{2}$

138 $-1 + \sqrt{3}$

139 $-\frac{1}{4}$

140 81

141 3

142 100

143 a) $-2 < x < -1$ b) $-\frac{9}{5}$

144 a) $\frac{8}{9}$

b) $\frac{5}{3}$

145 a) $\frac{32}{99}$

b) $\frac{562}{99}$

146 a) 72 cm

b) $48\sqrt{3}$ cm²

147 2

148 a) 8ℓ

b) $2\ell\sqrt{2}$

149 16