Probabilidades em espaços amostrais equiprováveis

Considere um espaço amostral Ω, formado por k pontos amostrais, $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$. Associa-se a cada um desses pontos amostrais um número real $p(a_i)$ ou p_i, chamado probabilidade do evento a_i, tal que:

I) $0 \leq p_i \leq 1$

II) $\sum_{i=1}^{k} p_1 = 1$, isto é, $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_k = 1$

Espaços amostrais equiprováveis: São aqueles cujos pontos amostrais têm a mesma probabilidade de ocorrer.

Probabilidade de ocorrência de cada um dos pontos amostrais:

$p = \frac{1}{k}$ onde k é o número de pontos amostrais.

Encontramos esse valor através da condição II) $\underbrace{p + p + p + ... + p}_{k \text{ vezes}} = 1 \Rightarrow k.p = 1$

$\Rightarrow p = \frac{1}{k}$

Exemplo: Lançamento de um dado. A probabilidade de ocorrência da cada face é $\frac{1}{6}$.

Probabilidade de um evento: É dada pela razão entre o número de casos favoráveis (n° de casos que interessam) e o número de casos possíveis (n° total de casos).

$$\boxed{p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{n° \text{ de casos favoráveis}}{\text{n° de casos possíveis}}}$$

Exemplos:

1) Uma urna contém 15 bolas numeradas de 1 a 15. Uma bola é extraída ao acaso da urna. Qual a probabilidade de ser sorteada uma bola com número maior ou igual a 11?

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$ e $n(\Omega) = 15$

$E = \{11,12,13,14,15\}$ e $n(E) = 5$

$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0,333... \cong 33,3\%$

2) Um dado é lançado e observa-se o número da face voltada para cima. Qual a probabilidade desse número ser:

a) menor que 3.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $n(\Omega) = 6$

$E = \{1,2\}$ e $n(E) = 2$

$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

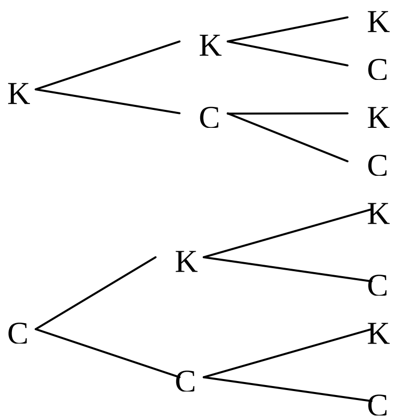
b) maior ou igual a 3.

$E^c = \{3,4,5,6\}$ e $n(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$p(E^c) = \frac{n(E^c)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Note que: $p(E) + p(E^c) = 1$

3) Uma moeda é lançada três vezes, sucessivamente. Qual é probabilidade de observarmos:
a) exatamente uma cara?
b) no máximo duas caras?
Diagrama de árvore:



$\Omega = \{(K,K,K),(K,K,C),(K,C,K),(K,C,C),(C,K,K),(C,K,C),(C,C,K),(C,C,C)\}$
$n(\Omega) = 8$
a) $E = \{(K,C,C),(C,K,C),(C,C,K)\}$ e $n(E) = 3$

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

b) $E = \{(K,K,C),(K,C,K),(K,C,C),(C,K,K),(C,K,C),(C,C,K),(C,C,C)\}$ e $n(E) = 7$

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{7}{8} = 0{,}875 = 87{,}5\%$$

Obs: Muitas vezes fica trabalhoso descrever todos os pontos amostrais. Para determinar $n(\Omega)$ e $n(E)$, sem que apresentemos Ω e E usaremos as técnicas utilizadas em análise combinatória.

4) Uma classe tem 20 rapazes e 25 moças. Deseja-se formar, por meio de sorteio, uma comissão de cinco alunos para representar a classe. Qual a probabilidade de essa comissão vir a ser formada exclusivamente por rapazes?

$n(\Omega) = C_{45,5} = \frac{45!}{5!40!} = 1221759$ (todas as comissões possíveis)

$n(E) = C_{20,5} = \frac{20!}{5!15!} = 15504$ (comissões formadas somente por rapazes)

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{15504}{1221759} \cong 0{,}0126 \cong 1{,}26\%$$

5) Escolhe-se, ao acaso, um dos anagramas da palavra XADREZ. Qual a probabilidade de a “palavra” escolhida começar por XA?

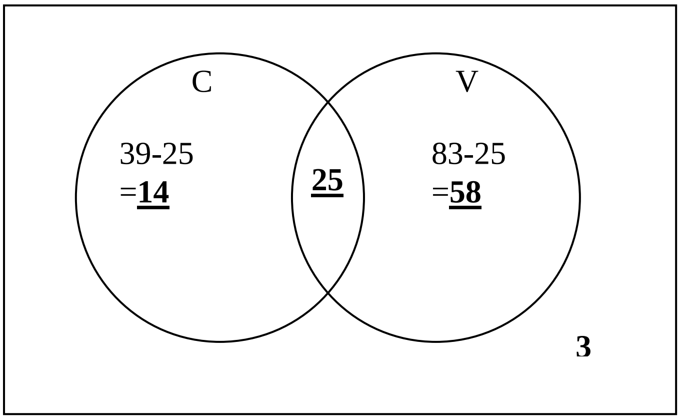
$n(\Omega) = P_6 = 6! = 720$
$n(E) = \text{XA\_\,\_\,\_\,\_} = P_4 = 4! = 24$

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30} = 0{,}03333... \cong 3{,}33\%$$

6) Numa comunidade residem 100 pessoas. Uma pesquisa sobre hábitos alimentares dessa comunidade revelou que:

- 25 pessoas consomem carnes e verduras
- 83 pessoas consomem verduras
- 39 pessoas consomem carnes

Uma pessoa da comunidade é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de ela:
a) consumir exclusivamente carnes?
b) ter o hábito alimentar de não comer carne nem verdura?



14+25+58=97 e $n(\Omega) = 100$

a) $n(E) = 14$, $p(E) = \frac{14}{100} = 0{,}14 = 14\%$

b) $n(E) = 3$, $p(E) = \frac{3}{100} = 0{,}03 = 3\%$

7) Uma moeda é viciada de tal modo que com ela, obter cara(K) é três vezes mais provável que obter coroa(C). Qual é a probabilidade de se conseguir cara em um único lançamento dessa moeda?

Nesse experimento o espaço amostral não é equiprovável, pois $p(K) \neq p(C)$. *Mas pela teoria das probabilidades* $p(K) + p(C) = 1$ *e por hipótese* $p(K) = 3 \cdot p(C)$*,logo:*

$$p(K) + p(C) = 1$$
$$3 \cdot p(C) + p(C) = 1$$
$$4 \cdot p(C) = 1$$
$$p(C) = \frac{1}{4} \Rightarrow p(K) = \frac{3}{4}$$