Análise Combinatória

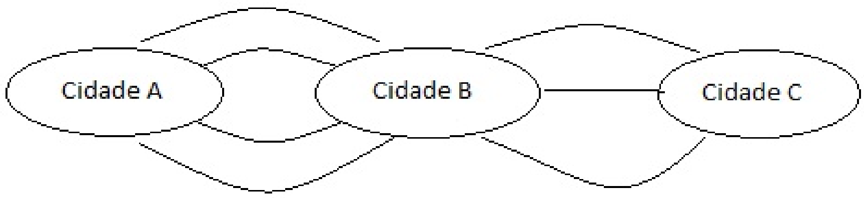
Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Suponhamos que uma ação seja constituída de duas etapas sucessivas. A primeira etapa pode ser realizada de n maneiras distintas. Para cada uma dessas possibilidades, a segunda etapa pode ser realizada de m maneiras distintas. Então, o número de possibilidades de se efetuar a ação completa é dado por $n \cdot m$.

Esse princípio pode ser generalizado para ações constituídas de mais de duas etapas sucessivas.

Exemplos:

1) Há quatro estradas ligando as cidades A e B, e três estradas ligando as cidades B e C. De quantas maneiras distintas pode-se ir de A a C, passando por B?



Logo pelo PFC, o resultado procurado é $4 \cdot 3 = 12$.
Encontramos 12 caminhos diferentes.

2) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números de três algarismos diferentes podemos formar?

$$\underline{\quad}_{6} \quad \underline{\quad}_{5} \quad \underline{\quad}_{4} \qquad 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

São 120 números de três algarismos distintos.

3) Uma prova consta de 10 questões do tipo V ou F. De quantas maneiras distintas ela pode ser resolvida?

$$\underline{\quad}_{2} \quad \underline{\quad}_{2} \quad \underline{\quad}_{2} \quad \underline{\quad}_{2} \quad \underline{\quad}_{2} \quad \underline{\quad}_{2} \quad \underline{\quad}_{2} \quad \underline{\quad}_{2} \quad \underline{\quad}_{2} \quad \underline{\quad}_{2}$$

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{10 \text{ vezes}} = 2^{10} = 1024$ possibilidades

4) Quantos números de três algarismos podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

$$\overset{\text{Exclui zero}}{\underline{\qquad}_{7}} \quad \underline{\qquad}_{8} \quad \underline{\qquad}_{8}$$

Logo pelo PFC, o total de números é $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$.

5) Quantos números ímpares de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

Começamos analisando o problema pelo algarismo das unidades, depois passamos para as centenas e depois para as dezenas.

Exclui zero e o algarismo escolhido para unidade	Exclui os algarismos da centena e da unidade	Algarismos 1, 3, 5 ou 7
6	6	4

Assim temos $6 \cdot 6 \cdot 4 = 144$ números

Fatorial de um número natural

Dado um número natural *n*, definimos o *fatorial de **n*** (indicado por ***n!***) através das relações:

I.) $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, para $n \geq 2$.

II.) Se $n = 1$, então $1! = 1$.

III.) Se $n = 0$, então $0! = 1$.

Note que em I), o fatorial de *n* representa o produto dos *n* primeiros naturais positivos escritos desde *n* até 1.

Exemplos:

1) Efetue:

a) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

2) Simplifique:

a) $\frac{8!}{5!}$

Desenvolvendo o fatorial do maior natural, “chegamos” ao fatorial do menor natural.

Assim, $\frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

b) $\frac{7!\,4!}{8!\,3!} = \frac{\cancel{7!}\,4 \cdot \cancel{3!}}{8 \cdot \cancel{7!}\,\cancel{3!}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{8! + 7!}{6!} = \frac{8!}{6!} + \frac{7!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} + \frac{7.6!}{6!} = 8.7 + 7 = 56 + 7 = 63$

d) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = (n+1).n = n^2 + n$

e) $\frac{n! - (n+1)!}{n!} = \frac{n!}{n!} - \frac{(n+1)!}{n!} = 1 - \frac{(n+1).n!}{n!} = 1 - (n+1) = 1 - n - 1 = -n$

3) Resolva as equações:

a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 6$

$\frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = 6 \Rightarrow (n+1) \cdot n = 6 \Rightarrow n^2 + n = 6 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0$

Resolvendo essa equação do 2° grau, encontramos $n = 2$ e $n = -3$. Apenas $n = 2$ garante a existência dos fatoriais, logo $S = \{2\}$.

b) $(n-4)! = 120 \Rightarrow (n-4)! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow (n-4)! = 5! \Rightarrow n - 4 = 5 \Rightarrow n = 9$

$S = \{9\}$

Exercícios:

1) Uma companhia de móveis tem dez desenhos para mesas e quatro desenhos para cadeiras. Quantos pares de mesas e cadeira pode a companhia formar? $R: 40$

2) Um ginásio possui 5 portas. De quantas maneiras diferentes podemos entrar nele e sair dele sem usar a mesma porta? $R: 20$

3) Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne, 5 variedades de bebidas e 3 sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne, uma bebida e uma sobremesa. De quantas maneiras diferentes a pessoa poderá fazer o seu pedido? $R: 120$

4) Quatro times de futebol disputam um torneio. Quantas são as possibilidades de classificação para os três primeiros lugares? $R: 24$

5) Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados usando-se os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5? $R: 60$

6) Calcule:

a) $\dfrac{4!-2!-0!}{1!}$ R: 21

b) $\dfrac{12!}{9!}$ R: 1320

c) $\dfrac{105!}{104!}$ R: 105

d) $\dfrac{100!+101!}{99!}$ R: 10200

7) Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ R: n

b) $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$ R: n^3+3n^2+2n

c) $\dfrac{(n+1)!+n!}{n!}$ R: $n+2$

8) Calcule $m \in N$, de modo que $\dfrac{m!+(m-1)!}{(m+1)!-m!}=\dfrac{5}{16}$. $R: \{4\}$