Números Complexos

Unidade imaginária

Como sabemos, no campo dos números reais, não existem as raízes negativas de índice par. Para que fosse possível realizar tais operações, houve a necessidade de ampliar o universo dos números, criou-se então um número cujo quadrado é igual a -1. Este número, representado pela letra i, denominado *unidade imaginária*, é definido por:

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

A partir dessa definição, surge um novo conjunto de números, denominado conjunto dos números complexos, indicado por $\mathbb{C}$.

Exemplos:

Resolva as equações no campo dos complexos:

a) $x^2 + 4 = 0$

$$x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{4\cdot(-1)} \Rightarrow x = \pm\sqrt{4}i \Rightarrow \begin{cases} x = 2i \\ x = -2i \end{cases}$$

$S = \{2i, -2i\}$

b) $x^2 - 6x + 13 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 1\cdot 13}}{2} \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm 4i}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{2} + \frac{4i}{2} \\ x = \frac{6}{2} - \frac{4}{2}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2i \\ x = 3 - 2i \end{cases}$$

$S = \{3 + 2i,\ 3 - 2i\}$

Forma algébrica do número complexo

A forma $z = a + bi$ é chamada de forma algébrica do número complexo, onde $a \in \Re$ e $b \in \Re$. O número real a é denominado parte real de z e o número real b é denominado parte imaginária de z. Indica-se por:

$$a = \mathrm{Re}(z) \text{ e } b = \mathrm{Im}(z)$$

Exemplos:

a) $z = 2 + 3i$; $\mathrm{Re}(z) = 2$ e $\mathrm{Im}(z) = 3$

b) $z = -5 + i$; $\mathrm{Re}(z) = -5$ e $\mathrm{Im}(z) = 1$

c) $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$; $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$ e $\mathrm{Im}(z) = -\frac{3}{4}$

d) $z = 2$; $\mathrm{Re}(z) = 2$ e $\mathrm{Im}(z) = 0$

e) $z = -3i$; $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) = -3$

Observações:

1°) Quando $\mathrm{Im}(z) = 0$, z é um número real.

2°) Quando $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, z é um número imaginário puro.

Exemplos:

a) Determine *k* para que o número complexo $z = 2 + (k-3)i$ seja um número real.

Para que um número seja real é necessário que $\mathrm{Im}(z) = 0$, logo:

$k-3=0 \Rightarrow k=3$

b) Determine m para que o número complexo $z=\left(-m^2+4\right)+3i$ seja imaginário puro.

Para que um número seja imaginário puro é necessário que $\mathrm{Re}(z)=0$ e $\mathrm{Im}(z)\neq 0$, como $\mathrm{Im}(z)=3$, temos que $\mathrm{Im}(z)\neq 0$. Basta agora impor que $\mathrm{Re}(z)=0$:

$-m^2+4=0 \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=2$ ou $m=-2$

Igualdade entre números complexos

Dois números complexos são iguais quando suas partes reais e imaginárias forem simultaneamente iguais, ou seja, se

$$z_1=a+bi \text{ e } z_2=c+di,\ z_1=z_2 \Leftrightarrow a=c \text{ e } b=d.$$

Exemplos:

a) Determine x e y na igualdade $(x-1)+i=3+(2y-3)i$.

Usando a definição temos:

$$\begin{cases} x-1=3 \quad \Rightarrow x=4 \\ 1=2y-3 \Rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

b) Sabendo que a igualdade entre os números complexos $(2x+y)+6i=5+(x+4y)i$ é verdadeira, encontre o valor de $x+y^2$.

Da definição de igualdade temos:

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+4y=6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pelo método da adição ou pelo método da substituição encontramos $x=2$ e $y=1$

Calculando $x+y^2=2+(1)^2=3$

c) Encontre x e y, de modo que $(-4+x)+(2x-3y)i=0$

Podemos escrever o número real zero como $0+0i$

Então

$$\begin{cases} -4+x=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases} \text{ e a solução é } x=4 \text{ e } y=\frac{8}{3}$$

Exercícios:

1) Resolva no campo dos complexos, as equações:

a) $x^2+121=0$

b) $x^2-6x+13=0$

c) $x^2+2x+2=0$

d) $x^2-2x+4=0$

2) Quais os valores complexos de x que tornam verdadeira a igualdade $4x^2-4x+5=0$?

3) Sabendo que as expressões x^2-x e $x-5$ são iguais, determine os valores de x, no universo dos números complexos.

4) Se você dividir o número 4 em duas parcelas, o produto dessas parcelas é 29. Calcule essas duas partes.
5) Determine k de modo que o número complexo $z=(k+5)-4i$ seja imaginário puro.

6) Ache m para que o número complexo $z=1+(m^2-81)i$ seja um número real.

7) Obtenha x e y para que o número complexo $z=(x+6)-(y^2-16)i$ seja:
a) um número real
b) um número imaginário puro.

8) Sendo $z=(x-1)+(2x-3)i$, calcule os números reais x, tais que:
a) a parte real de z seja positiva
b) a parte imaginária de z seja negativa

9) Sabendo que $z=(4m-5)+(n-1)i$, ache os números reais m e n de modo que $z=0$.

10) Determine a e b de modo que $a-bi=5+2i$

11) Dados $z_1=x-6+(2-y)i$ e $z_2=4+3i$, obtenha x e y para que $z_1=z_2$.

12) Se $z_1=(x+y)+10i$ e $z_2=16+(x-y)i$, obtenha x e y para que $z_1=z_2$.

13) Ache a e b de modo que $2a-b+(3a+2b)i=-8+9i$.

14) Sabendo que $z_1=z_2$, calcule x e y, dados $z_1=x^2+9i$ e $z_2=4+y^2i$.

15) Sendo $z_1=x^2-1+(4-y)i$ e $z_2=3-10i$, determine x e y, para que z_1 seja igual a z_2.

Respostas:
1)
a) $S=\{11i,-11i\}$
b) $S=\{3+2i,3-2i\}$
c) $S=\{-1-i,-1+i\}$
d) $S=\{1+i\sqrt{3},1-i\sqrt{3}\}$
2) $\frac{1}{2}+i$ e $\frac{1}{2}-i$
3) $1+2i$ e $1-2i$

4) $S=\{(2+5i,2-5i);(2-5i,2+5i)\}$

5) $k=-5$

6) $m=9$ e $m=-9$

7) a) $y=4$ e $y=-4$
b) $x=-6$, $y\neq 4$ e $y\neq -4$.

8) a) $x>1$
b) $x<\frac{3}{2}$

9) $m=\frac{5}{4}$ e $n=1$

10) $a=5$ e $b=-2$

11) $x=10$ e $y=-1$
12) $x=13$ e $y=3$
13) $a=-1$ e $b=6$
14) $x=\pm 2$ e $y=\pm 3$
15) $x=\pm 2$ e $y=14$