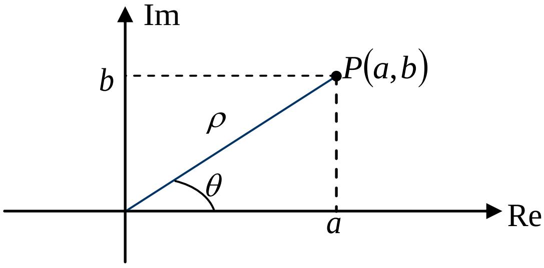
Forma Trigonométrica ou Polar

Considere o complexo $z = a + bi$, representado pelo ponto $P(a,b)$, indicado na figura.



Sabemos que $\begin{cases} sen\theta = \dfrac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho sen\theta \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho\cos\theta \end{cases}$

Substituindo na forma algébrica

$z = a + bi$

$z = \rho\cos\theta + \rho sen\theta \cdot i \Rightarrow \boxed{z = \rho(\cos\theta + isen\theta)}$

Essa expressão é denominada *forma trigonométrica* ou *polar* do complexo z.

Exemplos:

1) Escrever na forma trigonométrica:

a) $1 + i\sqrt{3}$

$$\rho = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \begin{cases} sen\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ (ou 60°)}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right)$$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\begin{cases} sen\theta = \dfrac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{1} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4} \text{ (ou 315°)}$$

$$z = 1\left(\cos\frac{7\pi}{4} + isen\frac{7\pi}{4}\right)$$

c) $z = i$

$$\rho = \sqrt{0+1} = 1 \begin{cases} sen\theta = \dfrac{1}{1} \\ \cos\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ (ou 90°)}$$

$$z = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)$$

d) $z = -5$

$$\rho = \sqrt{(-5)^2 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{cases} sen\theta = \dfrac{0}{5} = 0 \\ \cos\theta = \dfrac{-5}{5} = -1 \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi \text{ (ou 180°)}$$

$$z = 5(\cos\pi + isen\pi)$$

2) Obtenha a forma algébrica do número complexo $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + isen\frac{5\pi}{6}\right)$.

Substituimos os valores respectivos de seno e cosseno na forma trigonométrica.

$$\begin{cases} \cos\dfrac{5\pi}{6} = \cos 150 = -\cos 30 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ sen\dfrac{5\pi}{6} = sen150 = sen30 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow z = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{z = -\sqrt{3} + i}$$

3) Se a forma trigonométrica de z é $z = \cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3}$ a forma algébrica é igual a:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{4\pi}{3} = \cos 240° = -\cos 60° = \dfrac{-1}{2} \\ sen\dfrac{4\pi}{3} = sen240° = -sen60° = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Exercícios:

1) Passe para a forma trigonométrica os seguintes números complexos:

a) $z = -4\sqrt{3} - 4i$
b) $z = 8i$
c) $z = -7 - 7i$
d) $z = 1 - \sqrt{3}i$
e) $z = -5$

2) Coloque na forma algébrica os complexos:

a) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + isen\frac{5\pi}{3}\right)$
b) $2(\cos 315° + isen315°)$

c) $z = \cos\frac{5\pi}{3} + i sen\frac{5\pi}{3}$

3) Determine o número complexo $z = \frac{1+i^3}{1+i}$ na forma trigonométricas.

4) Dado o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$:
a) escreva na forma algébrica o complexo z^{-1}
b) escreva o complexo z na forma trigonométrica.

Respostas:

1) a) $z = 8\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i sen\frac{7\pi}{6}\right)$

b) $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i sen\frac{\pi}{2}\right)$

c) $z = 7\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i sen\frac{5\pi}{4}\right)$

d) $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i sen\frac{5\pi}{3}\right)$

e) $z = 5(\cos\pi + i sen\pi)$

2) a) $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$
b) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
c) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

3) $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i sen\frac{3\pi}{2}$

4) a) $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

b) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i sen\frac{\pi}{3}\right)$