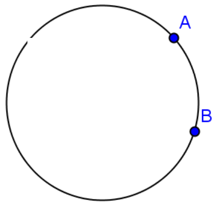
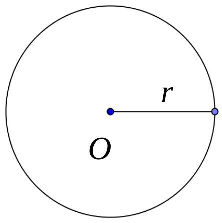
TRIGONOMETRIA

Arco de circunferência: É um segmento qualquer da circunferência, limitado por dois de seus pontos distintos.



Comprimento de circunferência: Dado por $C = 2\pi r$, onde r é o raio da circunferência e $\pi = 3{,}14$



Unidades de arcos:

<u>*1) Grau (°):*</u> Dividindo a circunferência em 360 partes iguais, obtemos um arco que corresponde a $\frac{1}{360}$ desta circunferência. A este arco unitário chamamos de grau, ou seja,

$$\boxed{1° = \frac{1}{360} \text{ da circunferência}}$$

Obs:

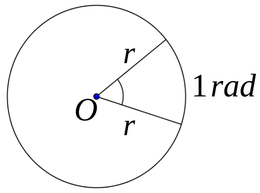
- 1 minuto $= \frac{1}{60}$ de 1 grau, isto é: $1' = \frac{1}{60}$ do grau.
- 1 segundo $= \frac{1}{60}$ de 1 minuto, isto é: $1'' = \frac{1}{60}$ do minuto.

Então $1° = 60'$ e $1' = 60''$

<u>*2) Radiano (rad):*</u> É definido como a medida do ângulo central determinado por um arco igual ao raio da circunferência que contém o arco.

Relação entre as unidades:

$$\boxed{360° \to 2\pi} \text{ ou } \boxed{180° \to \pi}$$



Exemplos:

a) Expressar 300° em radianos.

Regra de três:

$180°$ ___ πrad

$300°$ ___ x

$$x = \frac{300\pi}{180} = \frac{5\pi}{3} rad$$

b) Passar $\frac{\pi}{4} rad$ para graus.

$$\frac{\pi}{4} = \frac{180°}{4} = 45°$$

c) Expressar 22°30’ em radianos.

Passando 22°30’ para minutos:

$22° \cdot 60' + 30' = 1320' + 30' = 1350'$

Passando 180° para minutos:

$180° \cdot 60' = 10800'$

Regra de três:

$10800'$ ___ πrad

$1350'$ ___ x

$$x = \frac{1350'\pi}{10800} = \frac{\pi}{8} rad$$

Exercícios:

1) Expresse em radianos:

a) 60° $\quad R: \frac{\pi}{3} rad$

b) 210° $\quad R: \frac{7\pi}{6} rad$

c) 450° $\quad R: \frac{5\pi}{2} rad$

d) 150° $\quad R: \frac{5\pi}{6} rad$

e) 12° $\quad R: \frac{\pi}{15} rad$

f) 2° $\quad R: \frac{\pi}{90} rad$

g) 67°30’ $\quad R: \frac{3\pi}{8} rad$

h) 37°30’ $\quad R: \frac{5\pi}{24} rad$

2) Expresse em graus:

a) $\frac{5\pi}{4} rad$ R: 225°

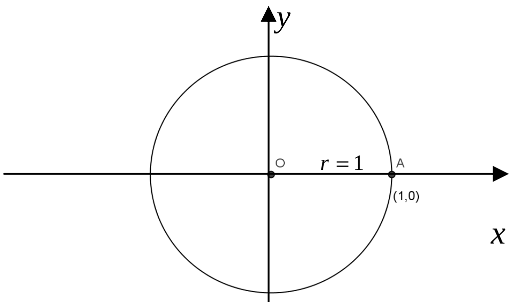
b) $2\pi rad$ R: 360°

c) $\frac{3\pi}{5} rad$ R: 108°

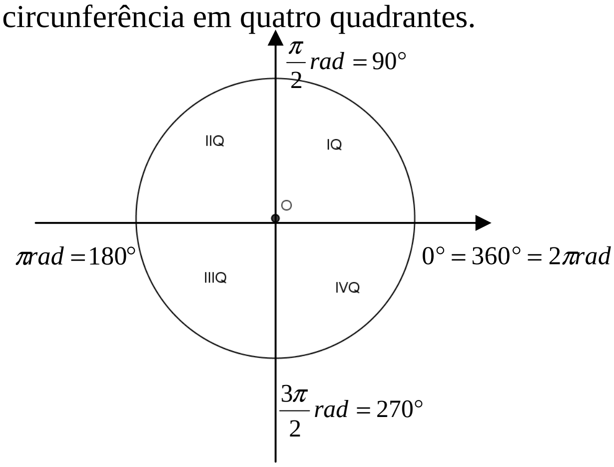
d) $\frac{2\pi}{3} rad$ R: 120°

Ciclo trigonométrico ou circunferência trigonométrica

A circunferência orientada de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas, de raio unitário $(r = 1)$ e cujo sentido positivo é o anti-horário, é denominado ciclo trigonométrico ou circunferência trigonométrica.



O ponto $A(1,0)$ é chamado origem dos arcos. As retas x e y dividem a circunferência em quatro quadrantes.



Arcos côngruos

Dois arcos são côngruos (ou congruentes) quando tem a mesma extremidade e se diferem apenas pelo número de voltas inteiras.

Se um arco mede x graus, a expressão dos arcos côngruos a ele é dada por:

$$\boxed{x + k \cdot 360°} \text{ onde } k \in Z$$

Exemplo:

$x = 60°$

$60° + 1 \cdot 360° = 420°$

$60° + 2.360° = 780°$, ou seja, 60°, 420°, 780°,..., são côngruos.

Primeira determinação positiva de um arco

Se um arco mede α graus, dizemos que um arco de β graus é a sua primeira determinação positiva, se $0 \le \beta \le 360°$ e côngruo a α.

Exemplos:

Dê a primeira determinação positiva dos arcos e a expressão geral dos arcos côngruos:

a) 1940°

$$\begin{array}{l|l} 1940 & \underline{360} \\ 140 & 5 voltas \end{array}$$

1ª det.positiva de 1940° é 140°

Expressão geral dos arcos côngruos a $1940° : 140° + k \cdot 360°$

b) $-2710°$

$$\begin{array}{l|l} -2710 & \underline{360} \\ -190 & 7 voltas \end{array}$$

$360 - 190 = 170$

1ª det.positiva de $-2710°$ é 170°

Expressão geral dos arcos côngruos a $-2710° : 170° + k \cdot 360°$

c) $\frac{15\pi}{4} rad$

Transformando em graus:

$$\frac{15 \cdot 180°}{4} = \frac{2700}{4} = 675°$$

$$\begin{array}{l|l} 675 & \underline{360} \\ 315 & 1 volta \end{array}$$

1ª det.positiva de $\frac{15\pi}{4} rad$ é 315°

Expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{15\pi}{4} rad : 315° + k \cdot 360°$

Exercícios:

1) Calcule a primeira determinação positiva dos arcos:

a) 1550° R:110°

b) 930° R:210°

c) $\frac{23\pi}{4} rad$ R:315°

d) $\frac{15\pi}{2} rad$ R:270°

e) $-2165°$ R: 355°

f) $-3190°$ R: 50°

g) $\frac{17\pi}{3} rad$ R: 300°

2) Verifique as são côngruos os seguintes pares de arcos:

a) 1490° e -1030° R:sim, 50° e 50°

b) $\frac{19\pi}{9} rad$ e $-\frac{27\pi}{9} rad$ R:não, 20° e 180°

c) $\frac{14\pi}{3} rad$ e $\frac{19\pi}{3} rad$ R:não, 120° e 60°

3) Determine os arcos positivos:

a) menores que 900° e côngruos a 2140°

R: 340° e 700°

b) menores que $4\pi rad$ e côngruos a $\frac{55\pi}{6} rad$ R: $\frac{7\pi}{6} rad$ e $\frac{19\pi}{6} rad$

4) Diga em qual quadrante está a extremidade de cada arco:

a) 1750° R: 4°Q

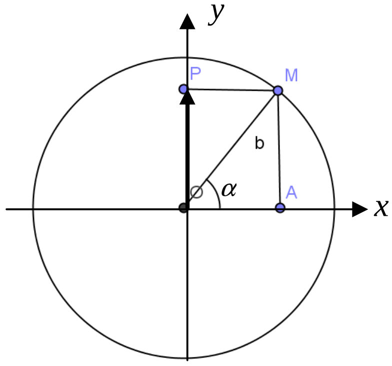
b) $\frac{19\pi}{3} rad$ R: 1°Q

c) $-3010°$ R:3°Q

<u>Funções circulares</u>

1. Função Seno

Dado um arco AM de medida x radianos, definimos como seno de x a ordenada do ponto M e representamos por $senx = \overline{OP}$.

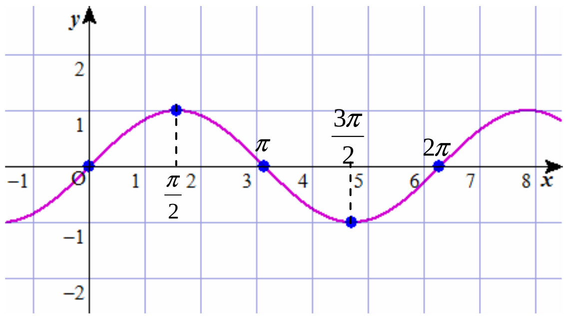


Definimos função seno como a função que associa a cada número real x, o número real $\overline{OP}$ e indicamos por $\boxed{f(x) = senx}$

Gráfico da função seno

Montamos a tabela:

x	senx
0°	0
90°	1
180°	0
270°	-1
360°	0



Observações:

- O gráfico da função seno é chamado de <u>*senóide*</u>.
- O gráfico continua a esquerda de zero e a direita de 2π.
- A função é positiva no 1° e 2° quadrantes e negativa para 3° e 4° quadrantes.
- O domínio da função seno é o conjunto dos números reais.
- A imagem da função seno é o intervalo $[-1,1]$, isto é $-1 \le senx \le 1$

Exemplos:

a) Calcule $sen450°$

$$\begin{array}{l|l} 450 & \underline{360} \\ 90 & 1volta \end{array} \qquad sen450° = sen90° = 1$$

b) Calcule $sen\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

$$\frac{19 \cdot 180°}{3} = 1140° \qquad \begin{array}{l|l} 1140 & \underline{360} \\ 60 & 3voltas \end{array}$$

$$sen\left(\frac{19\pi}{3}\right) = sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) Determine o valor de k, para que exista $senx = 2k - 5$.

$$-1 \le 2k - 5 \le 1$$

$-1 \le 2k - 5$	$2k - 5 \le 1$
$-2k \le -5 + 1$	$2k \le 1 + 5$
$-2k \le -4$	$2k \le 6$
$2k \ge 4$	$k \le 3$
$k \ge 2$	

$S = \{k \in \Re / 2 \le k \le 3\}$

Exercícios:
1) Determine o valor de:

a) $sen900°$ R:0
b) $sen1620°$ R:0
c) $sen(-2130°)$ R: $\frac{1}{2}$
d) $sen6\pi$ R:0
e) $sen11\pi$ R:0
f) $sen\frac{25\pi}{6}$ R: $\frac{1}{2}$

2) Determine os valores reais de m, para que existam as funções:

a) $senx = 7m - 20$ R: $\frac{19}{7} \le m \le 3$
b) $senx = 3m + 4$ $R: -\frac{5}{3} \le m \le -1$
c) $senx + 2m = 9$ $R: 4 \le m \le 5$
d) $senx = \frac{2m - 1}{3}$ $R: -1 \le k \le 2$

Período da Função Seno

Notamos que, a partir de 2π, a função seno se repete em seus valores, portanto dizemos que esta função é periódica.

$$p = 2\pi rad$$

Observações:
Considerando a função $f(x) = a \cdot sen(kx)$, definimos como período da função seno $p = \frac{2\pi}{k}$ (observe que k é o coeficiente de x)

Exemplos:
Qual o período das funções:

a) $y = 3senx$ $R: p = 2\pi rad$
b) $y = sen(4x)$ $R: p = \frac{\pi}{2} rad$
c) $y = 4sen\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ $R: p = 4\pi rad$

Exercícios:
Determine o período das funções:

a) $y = sen(8x)$ $R: \frac{\pi}{4} rad$
b) $y = sen(10x)$ $R: \frac{\pi}{5} rad$
c) $y = sen\left(\frac{x}{5}\right)$ $R: 10\pi rad$
d) $y = sen5\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$ $R: \frac{\pi}{10} rad$
e) $y = 1 + sen\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right)$ $R: \pi rad$

2.Função Cosseno

Dado um arco AM, de medida x radianos, definimos como cosseno de x a abscissa do ponto M e representamos:

$$\boxed{\cos x = \overline{OQ}}$$

Definimos função cosseno como a função que associa a cada número real x o número real $\overline{OQ}$.

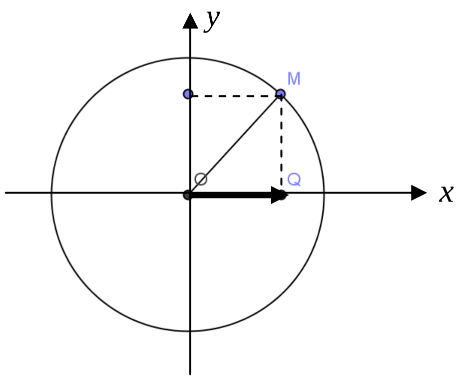
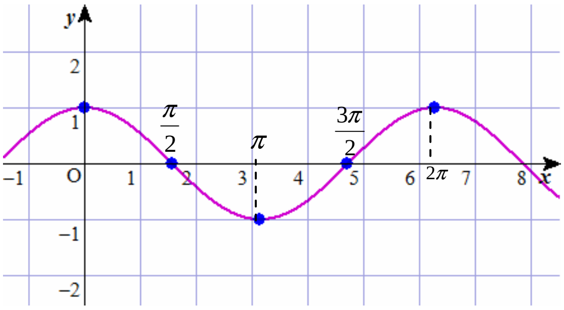


Gráfico da função Cosseno

Montamos a tabela:

x	cos x
0°	1
90°	0
180°	-1
270°	0
360°	1



Observações:

- O gráfico da função cosseno é chamado de *cossenóide.*
- O gráfico continua a esquerda de zero e a direita de 2π .
- A função é positiva no 1° e 4° quadrantes e negativa para 2° e 3° quadrantes.
- O domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais.
- A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1,1]$, isto é $-1 \le \cos x \le 1$

Exemplos:

1) Calcule $\cos 1830°$

$$\begin{array}{l|l} 1830 & \underline{360} \\ 30 & 5 voltas \end{array} \qquad \cos 1830° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) Determine k de modo que se tenha $\cos x = 3k + 4$

$$-1 \le 3k + 4 \le 1$$

$$\begin{array}{ll} -1 \le 3k + 4 & 3k + 4 \le 1 \\ -3k \le 5 & 3k \le 1 - 4 \\ 3k \ge 5 & k \le -1 \end{array}$$

$$k \ge -\frac{5}{3}$$

$$S = \left\{ k \in \Re / -\frac{5}{3} \le k \le -1 \right\}$$

Exercícios:

1) Determine o valor de:

a) $\cos 450°$ $R: 0$

b) $\cos(-900°)$ $R: -1$

c) $\cos 1620°$ $R: -1$

d) $\cos 6\pi$ $R: 1$

e) $\cos \frac{7\pi}{2}$ $R: 0$

f) $\cos \frac{25\pi}{6}$ $R: \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Determine m para que exista:

a) $\cos x = 1 - 6m$ $R: 0 \le m \le \frac{1}{3}$

b) $\cos x = 2m + 5$ $R: -3 \le m \le -2$

c) $\cos x + 2m = 5$ $R: 2 \le m \le 3$

d) $\cos x = \frac{4m+1}{2}$ $R: -\frac{3}{4} \le m \le \frac{1}{4}$

Período da função Cosseno

Considere a função $y = a \cdot \cos(kx)$, definimos como período da função cosseno

$$\boxed{p = \frac{2\pi}{k}}$$

Exemplo:

Determine o período da função $y = \cos\left(\frac{3x}{5}\right)$

$$p = \frac{2\pi}{3/5} = \frac{10\pi}{3}$$

Exercícios:

Determine o período de cada função:

a) $y = \cos(6x)$ $R: \frac{\pi}{3}$

b) $y = \cos\left(\frac{4x}{7}\right)$ $R: \frac{7\pi}{2}$

c) $y = 1 + \cos(3x)$ $R: \frac{2\pi}{3}$

d) $y = 5\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{7}\right)$ $R: 8\pi$

3. Função Tangente

Dado um arco AM, de medida x radianos, com $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, definimos como tangente de x a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$ e representamos por

$$\boxed{tg\ x = \overline{AT}}$$

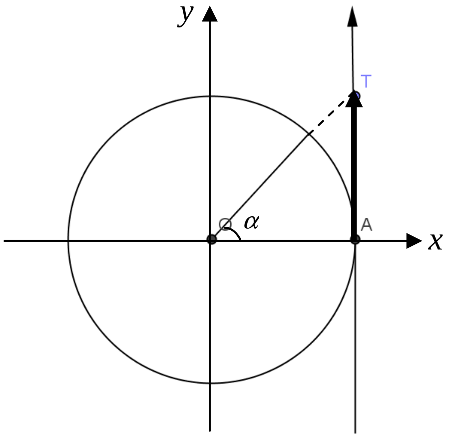
Observe também:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \frac{\overline{AT}}{senx} = \frac{1}{\cos x}$$

Então:

$\overline{AT} = \dfrac{senx}{\cos x}$, ou seja $tg\ x = \dfrac{senx}{\cos x}$

onde $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.



Exercício:
Determine o valor de:

a) $tg900°$ $R: 0$

b) $tg(-540°)$ $R: 0$

c) $tg1500°$ $R: \sqrt{3}$

d) $tg(11\pi)$ $R: 0$

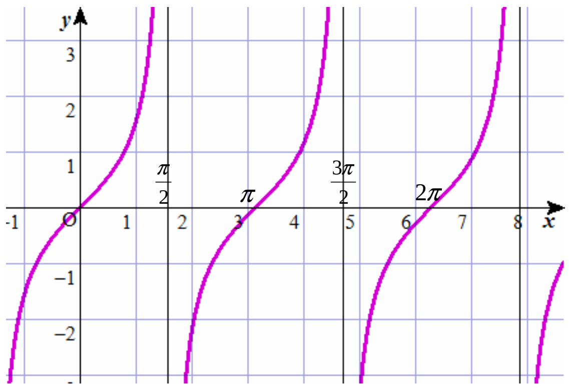
e) $tg(6\pi)$ $R: 0$

f) $tg\left(\dfrac{13\pi}{3}\right)$ $R: \sqrt{3}$

Gráfico da função Tangente

Montamos a tabela:

x	tgx
0°	0
90°	$\dfrac{1}{0} \Rightarrow \nexists$
180°	0
270°	$\nexists$
360°	0



Observações:

- O gráfico da função tangente é chamado de *tangentóide.*
- O gráfico continua a esquerda de zero e a direita de 2π.
- A função é positiva no 1° e 3° quadrantes e negativa para 2° e 4° quadrantes.
- O domínio da função tangente $\left\{x \in \Re / x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, com $k \in Z$.
- A imagem da função tangente é o conjunto dos números reais.

Período da função tangente

Observe que de π e π a função tangente repete seus valores, portanto $p = \pi$. Para a função $y = a \cdot tg(kx)$, o período $p = \dfrac{\pi}{k}$.

Exemplo:

Qual o período de $y = tg\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$?

$p = \dfrac{\pi}{2}$

Exercícios:

1) Determine o período das funções:

a) $y = tg\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ $R: \dfrac{\pi}{3}$

b) $y = tg\ 4x$ $R: \dfrac{\pi}{4}$

c) $y = tg\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ $R: \dfrac{\pi}{5}$

d) $y = tg\ \dfrac{x}{3}$ $R: 3\pi$

2) Determine os valores de:

a) $sen1260°$; $\cos1260°$ e $tg1260°$

$R: 0; -1 \text{ e } 0$

b) $sen\dfrac{17\pi}{4}$; $\cos\dfrac{17\pi}{4}$ e $tg\dfrac{17\pi}{4}$

$R: \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } 1$

c) $sen(-1380°)$; $\cos(-1380°)$ e $tg(-1380°)$

$R: \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2} \text{ e } \sqrt{3}$

3) Calcule o valor de:

$$\frac{\cos 8\pi - \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}}{(\cos\pi)\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)} \qquad R: \sqrt{2} - 3$$

4) Sendo $x = \frac{5\pi}{2}$, calcule:

$$\cos 2x + \cos\frac{x}{5} + \cos\frac{x}{15} \qquad R: \frac{\sqrt{3} - 2}{2}$$

5) Determine o valor de:

$$sen\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 2\pi$$

$R: \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$

6) Calcule A, sendo:

$A = sen\,3x + \cos 4x - tg\ 2x$,para $x = \frac{\pi}{2} rad$

$R: 0$

7) Determine o valor de

$$y = \cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right) - 3tg3\pi + sen\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$$

$R: -1$

Outras funções trigonométricas

4. Função Cotangente

Denomina-se função cotangente a função $f(x) = \frac{\cos x}{senx}$, definida para todo x real diferente de $k\pi$ com $k \in Z$. Representamos por:

$f(x) = \text{cotg}x = \frac{\cos x}{senx}$, com $x \neq k\pi$, $k \in Z$

5. Função Secante

Denomina-se função secante a função $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, definida para todo x real onde $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \in Z$. Representamos por:

$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

6. Função Cossecante

Denomina-se função cossecante a função $f(x) = \frac{1}{senx}$, definida para todo x real diferente de $k\pi$ com $k \in Z$. Representamos por:

$f(x) = \text{cossec}x = \frac{1}{senx}$, com $x \neq k\pi$, $k \in Z$

Exemplos:

Calcule cotg 30°, sec 30° e cosec 30°

$$\text{cotg}\,30° = \frac{\cos 30°}{sen30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cosec}\,30° = \frac{1}{sen30°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Exercícios:

1) Calcule o valor de cotg 45°, sec 45° e cosec 45° $\qquad R: 1; \sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

2) Determine o valor de cotg 990°, sec990° e cosec 990°. $\qquad R: 0, \nexists$ e -1

3) Se $x = 180°$, calcule o valor de

$$y = \frac{5\text{cosec}\frac{x}{2} - 2senx}{5sen\frac{5x}{2}} \qquad R: y = 1$$

4) Os quadrantes onde estão os ângulos α, β e γ, tais que $sen\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$; $tg\beta < 0$ e $\cos\beta < 0$; $sen\gamma < 0$ e $\cot g\gamma < 0$, são respectivamente:

a) 3°, 2° e 1°
b) 2°, 1° e 3°
c) 3°, 1° e 2°
d) 1°, 2° e 3°
e) 3°, 2° e 4° $\qquad$ R:e)

5) Se $\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi$, podemos afirmar que:

a) $\cos x > 0$ e $senx > 0$
b) $\cos x > 0$ e $senx < 0$
c) $\cos x < 0$ e $senx > 0$
d) $\cos x < 0$ e $senx < 0$
e) N.D.A. R: c)

6) O período da função $y = sen\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)$ é:

a) $p = \frac{\pi}{16}$
b) $p = \frac{\pi}{8}$
c) $p = \frac{\pi}{2}$
d) $p = \pi$
e) $p = 2\pi$ R: d)

7) O período da função $f(x) = \cos\frac{2x}{3}$ é:

a) $p = 6\pi$
b) $p = 4\pi$
c) $p = 3\pi$
d) $p = \frac{3\pi}{2}$
e) $p = 2\pi$ R: c)

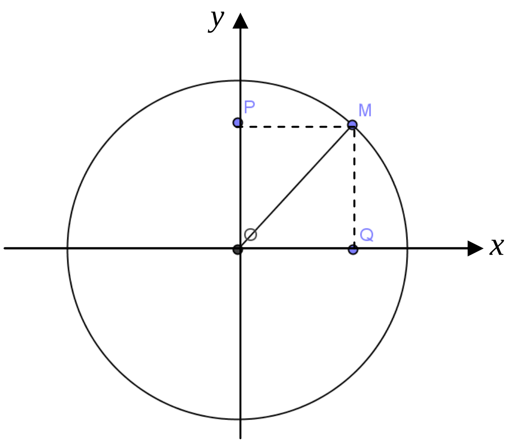
Relações Trigonométricas

Já sabemos que:

$tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$ $\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen} x}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\text{cosec } x = \frac{1}{senx}$

Relação trigonométrica fundamental:



$\overline{OM} = 1$; $\overline{OQ} = \cos x$ e $\overline{MQ} = \overline{OP} = senx$

No triângulo retângulo OQM, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(\overline{OM})^2 = (\overline{MQ})^2 + (\overline{OQ})^2$

$1^2 = (senx)^2 + (\cos x)^2$, logo

$$\boxed{sen^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Outras relações trigonométricas:

$$\boxed{\sec^2 x = 1 + tg^2 x}$$

$$\boxed{\cos ec^2 x = 1 + \cot g^2 x}$$

Exemplos:

1) Sendo $senx = \frac{3}{4}$, com $x \in 2°Q$, calcule as outras funções trigonométricas:

Como $sen^2 x + \cos^2 x = 1$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{16}$

$\cos^2 x = \frac{7}{16} \Rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{7}{16}}$

$\boxed{\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}}$(cos no 2° Q é negativo)

$tgx = \frac{senx}{\cos x} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

$\boxed{tgx = -\frac{3\sqrt{7}}{7}}$(tg no 2° Q é negativo)

$\cot gx = \frac{\cos x}{senx} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\boxed{\cot gx = -\frac{\sqrt{7}}{3}}$(cotg no 2° Q é negativo)

$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$

$\sec x = -\frac{4\sqrt{7}}{7}$ (sec no 2° Q é negativo)

$\cos ecx = \frac{1}{senx} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos ecx = \frac{4}{3}$

(cosec no 2°Q é positivo)

2) Para que valores de a temos, simultaneamente $senx = a+1$ e $\cos x = a$?

$sen^2 x + \cos^2 x = 1$

$(a+1)^2 + (a)^2 = 1$

$a^2 + 2a + 1 + a^2 = 1$

$2a^2 + 2a = 0$

$2a(a+1) = 0$

$a = 0$ ou $a = -1$

Exercícios:

1) Dado $\cos x = -\frac{1}{2}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule o valor de $sen\,\mathrm{x}$. $R: \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Dado $\cos x = -\frac{1}{5}$,com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule $sen\,\mathrm{x}$, $tg\,\mathrm{x}$ e $\cot g\,\mathrm{x}$.

$R: \frac{2\sqrt{6}}{5}, -2\sqrt{6}$ e $-\frac{\sqrt{6}}{12}$

3) Sendo $sen\,\mathrm{x} = \frac{1}{3}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine $\cot g\,\mathrm{x}$. $R: 2\sqrt{2}$

4) Se $\cot g\,\mathrm{x} = 1$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule $sen\,\mathrm{x}$ e $\cos ec\,\mathrm{x}$. $R: \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sqrt{2}$

5) Sendo $sen\,\mathrm{x} = \sqrt{a-2}$ e $\cos x = a-1$, determine *a*. $R: 2$

6) Quais os valores de a, para que se tenha, simultaneamente, $sen\,\mathrm{x} = a$ e $\cos x = a\sqrt{3}$. $R: a = \frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$

7) Sabendo que $\cos x = \frac{1}{2}$, calcule o valor de $y = \frac{\cot g\,\mathrm{x} - 1}{\cos ec\,\mathrm{x} - \sec x}$. $R: \frac{1}{2}$

8) Se $sen\,\mathrm{x} = \frac{1}{3}$, calcule o valor da expressão $y = \frac{\sec x - \cos x}{tgx + \cot gx}$. $R: \frac{1}{27}$

9) Sendo $sen\,x = \frac{1}{3}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule $y = \frac{(sen\,x)(\cos x) - tgx}{1 - \cos ecx}$. $R: \frac{\sqrt{2}}{72}$

10) Calcule o valor de $y = \frac{\sec^2 x - (\sec x)(\cos ecx)}{1 - \cot gx}$, dado $\cos x = \frac{1}{4}$. $R: 16$

Identidades Trigonométricas

Consideremos uma igualdade da forma $f(x) = g(x)$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções trigonométricas. Se essa igualdade é válida para qualquer valor real de x, para os quais os valores das funções existem, dizemos que $f(x) = g(x)$ é uma identidade trigonométrica.

Exemplos:

a) $\cos^2 x = 1 - sen^2 x$ é válido para qualquer *x* real.

b) $\cot g\,x = \frac{1}{tgx}$ é válido para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $\cos x \cdot \cos\sec x = \cot gx$

$\cos x \cdot \frac{1}{senx} = \cot gx$

$\frac{\cos x}{senx} = \cot gx$

$\cot gx = \cot gx$

d) Demonstre a identidade $tgx + \cot gx = tgx \cdot \cos ec^2 x$

$\frac{senx}{\cos x} + \frac{\cos x}{senx} = \frac{senx}{\cos x} \cdot \frac{1}{sen^2 x}$

$\frac{sen^2 x + \cos^2 x}{senx \cdot \cos x} = \frac{1}{senx \cdot \cos x}$

$$\frac{1}{senx\cdot\cos x}=\frac{1}{senx\cdot\cos x}\Rightarrow 1=1$$

e) $\sec x - tgx = \dfrac{1}{\sec x + tgx}$ multiplicando pelo conjugado, temos

$$\sec x - tgx = \frac{1}{\sec x + tgx}\cdot\frac{(\sec x - tgx)}{(\sec x - tgx)}$$

$$\sec x - tgx = \cdot\frac{\sec x - tgx}{(\sec x)^2-(tgx)^2}$$

$$\sec x - tgx = \cdot\frac{\sec x - tgx}{1}$$

$$\sec x - tgx = \cdot\sec x - tgx$$

Exercícios:

1) Demonstre as identidades:

a) $senx\cdot\cos ecx = 1$

b) $\cos x\cdot tgx = senx$

c) $tgx+\cot gx = tgx.\cos ec^2 x$

d) $(1+tg^2x)(1-sen^2x)=1$

e) $1+tg^2x = tg^2x\cdot\cos ec^2x$

f) $\dfrac{\cos x}{\sec x}+\dfrac{senx}{\cos ecx}=1$

g) $tg^2x+\cos^2 x=\sec^2 x - sen^2x$

h) $\cot g^2x+1=\cos ec^2x$

2) A expressão $\dfrac{senx}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{senx}$ é igual a:

a) $sen\,\mathrm{x}$ b) $\sec x$ c) $2sen\,\mathrm{x}$

d) $2\cos ecx$ e) $2\sec x$ $R:d)$

3) Para todo $x\in 1°Q$, a expressão $(\sec \mathrm{x} - tg\ \mathrm{x})(\sec x + tgx) - sen^2x$ é igual a:

a) $\cos^2 x$ b) $1+sen^2x$

c) $\cos x - senx$ d) $\sec x + \cos x$

e) N.D.A. $R:a)$

4) A expressão $\dfrac{\sec x - \cos x}{\cos ecx - senx}$ é equivalente a :

a) $\sec^3 x$ b) sen^2x

c) tg^3x d) $\dfrac{1}{tgx}$

e) $\dfrac{1}{1-tg^2x}$ $R:c)$

5) O valor de $y=\dfrac{2tgx}{1-tg^2x}$, quando $\cos x = -\dfrac{3}{7}$ e $tgx<0$, é:

a) $\dfrac{4\sqrt{10}}{31}$ b) $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$ c) $\dfrac{2\sqrt{10}}{15}$

d) $\dfrac{3\sqrt{10}}{7}$ e) $\dfrac{12\sqrt{10}}{31}$ $R:e)$

Operações com arcos

Sejam a e b dois arcos positivos, do 1° quadrante, cuja soma ainda pertence ao 1°quadrante, então:

$$sen(a+b)=\mathrm{sen}\ a\cdot\mathrm{cosb}+\mathrm{sen\ b}\cdot\mathrm{cos\ a}$$

$$sen(a-b)=\mathrm{sen}\ a\cdot\mathrm{cosb}-\mathrm{sen\ b}\cdot\mathrm{cos\ a}$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos\mathrm{b}-\mathrm{sen}\ a\cdot\mathrm{sen\ b}$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos\mathrm{b}+\mathrm{sen}\ a\cdot\mathrm{sen\ b}$$

$$tg(a+b)=\frac{tg\ a+tg\ b}{1-tg\ a\cdot tg\ b}$$

$$tg(a-b)=\frac{tg\ a-tg\ b}{1+tg\ a\cdot tg\ b}$$

$$sen\ 2a = 2sen\ a\cdot\cos a$$

$$\cos 2a=\cos^2 a - sen^2 a$$

$$tg\ 2a=\frac{2tg\ a}{1-tg^2a}$$

Exemplos:

1) Calcule $sen\,75°$

$sen\,75° = sen(45°+30°)=$

$= sen\,45°\cdot\cos 30° + \mathrm{sen}\ 30°\cdot\cos 45°$

$$sen\,75°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2) Calcule $\cos 15°$

$\cos 15° = \cos(45°-30°)$

$=\cos 45°\cos 30° + sen\ 45° sen 30°$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

3) Calcule $tg\,105°$

$$tg\,105° = tg\ (60°+45°)=\frac{tg\ 60°+tg\ 45°}{1-tg\ 60°\cdot tg\ 45°}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}.1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}$$

Exercícios:

1) Calcule:

a) $\cos 105°$ $\qquad R: \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

b) $tg\,15°$ $\qquad R: 2-\sqrt{3}$

c) $sen\dfrac{5\pi}{6}$ $\qquad R: \dfrac{1}{2}$

2) Usando as fórmulas da adição, mostre que:

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = sen\,x$

b) $sen\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

c) $sen(\pi + x) = -senx$

3) Sendo $tgA = 2$ e $tgB = 1$, ache $tg(A-B)$. $\qquad R: \dfrac{1}{3}$

4) Simplifique a expressão

$$Y = \frac{sen(\pi + x)\cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{\cos(5\pi + x)\cdot sen\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)} \qquad R: tg^2 x$$

5) Dado $tgx = \dfrac{1}{2}$, calcule $tg\,2x$ e $\cot g\,2x$.

$R: \dfrac{4}{3}$ e $\dfrac{3}{4}$

6) Calcule $sen\,2x$, se $sen\,x = \dfrac{3}{4}$ e $x \in 2°Q$. $\qquad R: -\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

7) Sabendo que $tg\,a = \dfrac{1}{4}$, calcule $tg\,2a$ e $\cot g\,2a$. $\qquad R: \dfrac{8}{15}$ e $\dfrac{15}{8}$