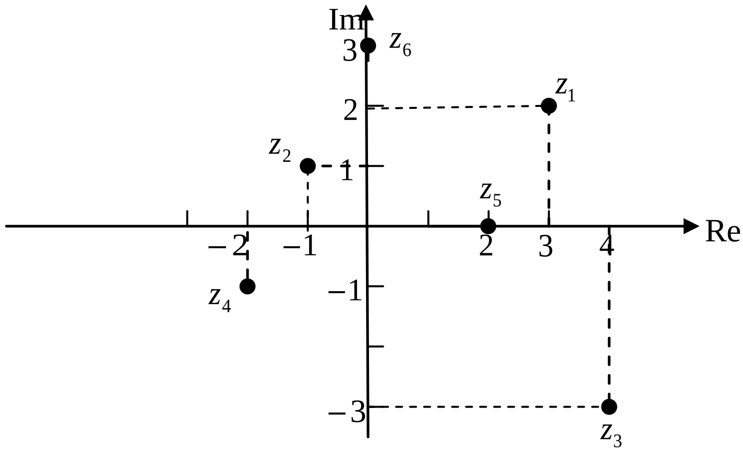
Plano de Argand-Gauss

Seja o número complexo $z = a + bi$. Representando-o no sistema de coordenadas cartesianas marcamos sobre o eixo Ox a parte real e sobre o eixo Oy a parte imaginária de *z*, obtendo o ponto P.

- O ponto P recebe o nome de *afixo* ou *imagem geométrica* de *z*.
- O plano cartesiano é chamado de plano complexo ou plano de Argand-Gauss.
- O eixo Ox, chamado eixo real, é indicado por Re; o eixo Oy, chamado eixo imaginário, é indicado por Im.

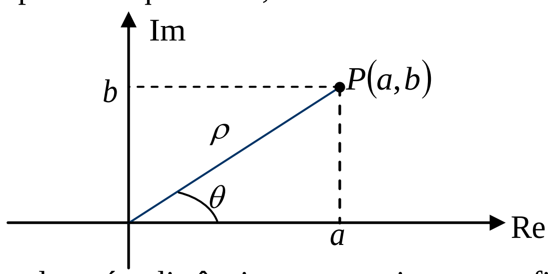
Exemplos:

Determine a imagem geométrica dos números complexos $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = 4 - 3i$, $z_4 = -2 - i$, $z_5 = 2$ e $z_6 = 3i$



Módulo

Seja $z = a + bi$ a forma algébrica de um número complexo cujo afixo é o ponto $P(a,b)$. Supondo que P pertença ao primeiro quadrante, temos:



Módulo de um número complexo é a distância entre a origem e o afixo de *z*. Indicamos o módulo de um número complexo por $|z|$ ou ρ (letra grega; lê-se: "rô"). Para calculamos o módulo usamos $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemplos:

Calcule o módulo dos números complexos:

a) $z_1 = 3 + 4i$

$$|z_1| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

b) $z_2 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$$|z_2| = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

c) $z_3 = -2 - i$

$$|z_3| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

d) $z_4 = -4$

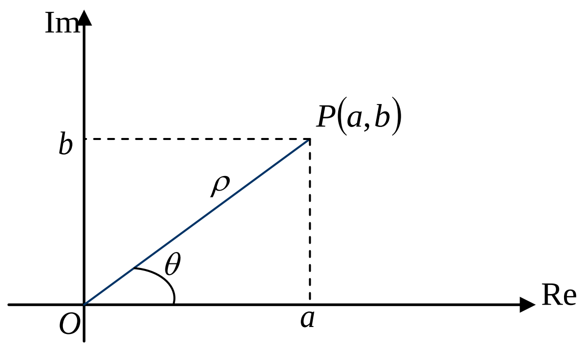
$$|z_4| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$$

e) $z_5 = -i$

$$|z_5| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Argumento

Argumento de um número complexo (chamado θ) é o ângulo formado pela semi-reta $\overrightarrow{OP}$ e pelo eixo real, medido a partir do eixo real em sentido anti-horário.



O argumento é tal que: $0 \le \theta < 2\pi$ e $\begin{cases} sen\theta = \dfrac{b}{\rho} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \end{cases}$

Exemplos:

1) Determine o argumento de $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Primeiro calculamos o módulo $\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

$\begin{cases} sen\theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ Da trigonometria segue que $\theta = \frac{\pi}{3}$ (ou 60°)

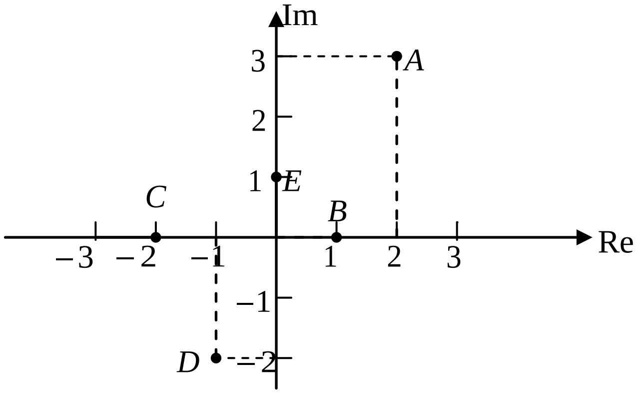
2) Qual é o argumento de $z = -1 + i$?

Temos $\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} sen\theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ (ou 135°).}$$

Exercícios:

1) Determine o número complexo correspondente a cada ponto assinalado:



2) Calcule o módulo dos seguintes números complexos:

a) $z = 4 - i$

b) $z = -5i$

c) $z = \sqrt{2} + i$

d) $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}i$

e) $z = 8$

f) $z = 0$

3) Ache o módulo dos números complexos:

a) $(3-i)(2+i)$

b) $\dfrac{1+4i}{i}$

c) $\dfrac{(4-3i)(12-5i)}{\sqrt{2}i}$

4) Estabeleça o módulo, o argumento e dê a representação gráfica dos seguintes números complexos:

a) $1 + \sqrt{3}i$

b) $-2 + 2\sqrt{3}i$

5) Sabendo que $\dfrac{z}{1+i} - \dfrac{z-1}{i} = 2i$, calcule o módulo de z:

6) Dados os complexos $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 6 - 8i$, resolva:

a) $|z_1 \cdot z_2|$

b) $|z_1 + z_2|$

c) $|z_1 - z_2|$

d) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$

e) $\left|\dfrac{2z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right|^2$

7) Obtenha o argumento dos complexos e faça a sua representação geométrica:

a) $z = 1 - i$

b) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

c) $z = 4i$

d) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

8) Determine o conjunto solução da equação $|z|^2 + z - z \cdot \bar{z} = 3 + 3i$.

9) Calcule o módulo do número complexo $z = i^5 + 3i^4 - 5i^3 + 6i^2 - 3i$.

10) Sabendo que z é um número complexo tal que $z \cdot \bar{z} = 24$, calcule o módulo de z.

11) Encontre o número complexo z, tal que $iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0$. Qual é o módulo e o argumento desse complexo?

12) Sabendo que os números complexos $z_1 = 2 - i$ e $z_2 = x + i$, x real e positivo, são tais que $|z_1 \cdot z_2|^2 = 10$, calcule *x*.

Respostas:

1) $A = 2 + 3i$
$B = 1$
$C = -2$
$D = -1 - 2i$
$E = i$

2) a) $\sqrt{17}$
b) 5
c) $\sqrt{3}$
d) $\frac{\sqrt{13}}{6}$
e) 8
f) 0

3) a) $5\sqrt{2}$
b) $\sqrt{17}$
c) $\frac{65\sqrt{2}}{2}$

4) a) $\rho = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$
b) $\rho = 4$ e $\theta = \frac{2\pi}{3}$

5) $3\sqrt{2}$

6) a) 50
b) $\sqrt{97}$
c) $3\sqrt{17}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{16}{17}$

7) a) $\theta = \frac{7\pi}{4}$
b) $\theta = \frac{\pi}{3}$
c) $\theta = \frac{\pi}{2}$
d) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

8) $S = \{3 + 3i\}$

9) $3\sqrt{2}$

10) $2\sqrt{6}$

11) $z = -1 - i$
$|z| = \sqrt{2}$
$\theta = \frac{5\pi}{4}$

12) $x = 1$