Determinantes

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Chama-se determinante da matriz A, e se indica por $\det A$, o número obtido através de operações entre os elementos de A.

a) *Determinante de uma matriz de 1ª ordem:* O $\det A$ é o único elemento de A.
Exemplos:
1) $A = (3) \Rightarrow detA = |A| = 3$ 2) $B = (-8) \Rightarrow detB = |B| = -8$

b) *Determinante de uma matriz de 2ª ordem:* O $\det A$ é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal de A e o produto dos elementos da suas diagonal secundária.
Exemplos:
1) Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ então $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - 1.3 = 10 - 3 = 7$
2) Se $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ então $\det B = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 4.(-3) - (-1).1 = -12 + 1 = -11$
3) Resolva a equação $\begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ x-1 & 5 \end{vmatrix} = 0$

c) *Determinante de uma matriz de 3ª ordem*: Utilizamos o seguinte procedimento chamado *Regra de Sarrus*.
- Copiamos ao lado da matriz A as suas duas primeiras colunas;
- Multiplicamos os elementos da diagonal principal de A. Segundo a direção da diagonal principal, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas ‘diagonais’;
- Multiplicamos os elementos da diagonal secundária, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas diagonais também, trocando o sinal dos produtos.
- Somamos todos os produtos obtidos nos dois itens anteriores.

Exemplos:

1) Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

2) Calcule o valor do determinante $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Cofator: Seja A uma matriz de ordem $n \geq 3$. Chama-se cofator de a_{ij}, representado por A_{ij}, o número real que se obtém multiplicando-se $(-1)^{i+j}$ por D_{ij}, em que D_{ij} é o determinante da matriz que se obtém de A, eliminando sua *i-ésima* linha e *j-ésima* coluna.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$$

Exemplos:

1) Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ encontre o cofator do elemento a_{13}.

2) Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 11 & -9 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -5 & 3 \\ 8 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Encontre B_{32}.

Teorema de Laplace: O determinante de uma matriz quadrada de ordem *n*, é igual a soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna qualquer pelos seus respectivos cofatores.

Exemplos:

1) Calcule $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 11 & 2 \end{vmatrix}$

2) Encontre o valor de $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 & -2 \\ -9 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

Propriedades dos determinantes:

1) *Fila nula:* Se A possui uma fila na qual todos os elementos são iguais a zero, então $\det A = 0$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & 0 & i \\ j & k & 0 & j \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = 0.M_{13} + 0.M_{23} + 0.M_{33} + 0.M_{43} = 0$

2) *Troca de filas paralelas:* Trocando a posição de duas filas paralelas de A, obtém-se uma outra matriz *A'*, onde $detA' = -\det A$.

Exemplo: $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2.4 - 3.(-1) = 11$ e $A' = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1).3 - 2.4 = -11$

3) *Multiplicação de uma fila por um número real*: Multiplicando os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz A por um número real k, com $k \neq 0$, obtém-se uma matriz A', onde $\det A' = k.\det A$.

Exemplos: a) Seja $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$,$\det M = 10$. Multiplicando a segunda coluna de M por 4, obtém-se $M' = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ encontra-se $\det M' = 40$, isto é, $\det M' = 4.\det M$

b) Se R é uma matriz quadrada de ordem 3 e $\det R = x$, quanto vale $\det(4R)$?

4) *Filas paralelas iguais ou proporcionais:* Quando A possui filas paralelas iguais(ou proporcionais), então $\det A = 0$

Exemplos: a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 18 & -6 & 12 \end{vmatrix}$

5) *Matriz Transposta:* Se A^t é a matriz transposta da matriz A, então $\det A^t = \det A$

Exemplo: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

6) *Matriz Triangular:* O determinante de uma matriz triangular é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplos: a) $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -12 & 10 & 3 \end{vmatrix}$

7) *Produto de duas matrizes*: Dadas duas matrizes quadradas A e B de ordem n $\det(A.B) = \det A. \det B$. (Teorema de Binet)

Exemplo: Dadas $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ encontre $\det(A.B)$

Teorema de Jacobi: Dada uma matriz A de ordem n, se adicionarmos uma fila de A a uma fila paralela, previamente multiplicada por uma constante qualquer (diferente de zero), obtermos uma matriz B tal que $\det B = \det A$.

Exemplos:

1) Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, tem-se $\det M = 28$. a) Some à 1ª coluna de M o triplo da 3ª coluna de M e obtenha a matriz N. Calcule o $\det N$. b) Some à 3ª coluna de M o oposto do dobro da 1ª coluna de M e obtenha a Matriz P. Calcule $\det P$.

2) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \\ -4 & -7 & 8 \end{pmatrix}$, onde $\det A = -5$. a) Encontre a matriz B sabendo que a 2ª linha de B é a soma da 2ª linha de A com o dobro da 1ª linha de A. Calcule det B. b) Encontre a matriz C sabendo que a 3ª linha de C é a soma da 3ª linha de A com o quádruplo da 1ª linha de A. Calcule det C.

Regra de Chió: É um artifício utilizado para reduzir a ordem de uma matriz, sem alterar o valor de um determinante. É necessário que a matriz tenha pelo menos um de seus elementos igual a 1, ao qual chamamos de pivô.

Exemplos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Consideramos como pivô o elemento $a_{11} = 1$.

1°) Eliminamos a linha e a coluna a que pertence o pivô (neste caso 1ªlinha e 1ªcoluna)

2°) Subtraímos de cada elemento restante o produto dos dois elementos eliminados, que pertenciam a sua linha e à sua coluna.

3°) Multiplicamos o determinante obtido por $(-1)^{i+j}$, em que *i* e *j* representam a linha e a coluna retiradas. Neste caso $i = 1$ e $j = 1$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 4 & -2 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 8 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$