

Progressões Geométricas (P.G.)

Progressão Geométrica (P.G.) é uma sequência de números reais não nulos em que cada termo posterior, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo chamado razão da progressão. Essa razão é indicada por q .

Exemplos:

- 1) $(2, 6, 18, 54, \dots)$ é uma P.G. de razão $q = 3$.
- 2) $(-5, 15, -45, 135, \dots)$ é uma P.G. de razão $q = -3$.
- 3) $(20, 10, 5, \frac{5}{2}, \dots)$ é uma P.G. de razão $q = \frac{1}{2}$.
- 4) $(4, -4, 4, -4, 4, \dots)$ é uma P.G. de razão $q = -1$.

Considerando três termos consecutivos de uma P.G., o quadrado do termo central é igual ao produto dos outros dois. Dizemos que o termo central é a média geométrica dos extremos.

Classificação de uma P.G.

- a) Quando $q < 0$, dizemos que a P.G. é *alternada* ou *oscilante*.
- b) Quando $(a_1 > 0 \text{ e } q > 1)$ ou $(a_1 < 0 \text{ e } 0 < q < 1)$, a P.G. é *crescente*.
- c) Quando $(a_1 > 0 \text{ e } 0 < q < 1)$ ou $(a_1 < 0 \text{ e } q > 1)$, a P.G. é *decrescente*.

Termo Geral da P.G.

Termo geral é a expressão que nos permite obter um termo qualquer da P.G. conhecendo apenas o primeiro termo e a razão.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Exemplos:

- 1) Determine o 10º termo da P.G. $(\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \dots)$.
- 2) Numa P.G., o quarto termo é igual a 32 e o primeiro termo é igual a $\frac{1}{2}$. Determine a razão da P.G. e, em seguida, obtenha o seu oitavo termo.

- 3) Construa uma P.G. em que a soma do terceiro com o quinto termo é $\frac{5}{4}$ e a soma do sétimo com o nono termo é 20.

- 4) Determine x a fim de que a sequência $\left(\frac{9x+5}{2}, x+1, x-2\right)$ seja uma P.G.

Notações especiais

- a) Para três termos em P.G. podemos escrever $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$
b) Para cinco termos em P.G. podemos escrever $\left(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2\right)$
c) Para quatro termos em P.G. podemos escrever $\left(\frac{x}{y^3}, \frac{x}{y}, xy, xy^3\right)$

Exemplos

- 5) Determine três números em P.G. cujo produto seja 1000 e a soma do 1º com o 3º termo seja igual a 52.

- 6) Interpole cinco meios geométricos entre $\frac{2}{3}$ e 486.

Também existem problemas que envolvem P.A. e P.G., simultaneamente.

- 7) Encontre x e y de modo que a sequência $(15, y, x)$ seja uma P.A. de termos positivos e a sequência $(x - 2, 12, 5y - 2)$ seja uma P.G.

Soma dos n primeiros termos de uma P.G.

Para o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma P.G. precisamos conhecer o primeiro termo e a sua razão. Temos dois casos a considerar:

1º caso: $q = 1$

Temos uma P.G. constante logo $S_n = n \cdot a_1$

2º caso: $q \neq 1$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Exemplos:

- 1) Calcule o valor da soma dos dez primeiros termos da P.G. $(80, 40, 20, \dots)$.

- 2) Quantos termos da P.G. (2,6,18, ...) devem ser considerados a fim de que a soma resulte 19682?

Série Geométrica Convergente

Séries geométricas convergentes são aquelas cuja razão q é tal que $0 < |q| < 1$. Assim q^n é um número cada vez mais próximo de zero à medida que n aumenta.

Então, quando calculamos S_n para n suficientemente grande.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Logo

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exemplos:

- 1) Calcule o valor de $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

- 2) Resolva a equação $x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{64} + \dots = \frac{4}{3}$

3) Obtenha a fração geratriz da dízima $0,22222\dots$

4) Ache a fração geratriz da dízima $0,5212121\dots$