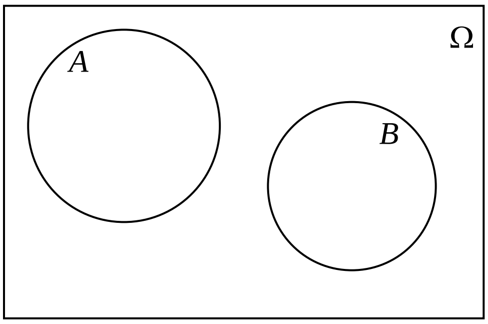
## Probabilidade da união de dois eventos

Sejam A e B eventos do esmo espaço amostral $\Omega$. A probabilidade de ocorres o evento A ou o evento B, ou seja, a probabilidade da ocorrência do evento $A \cup B$, é dada seguindo as considerações:

1ª) $A \cap B = \phi$, neste caso A e B são chamados de eventos mutuamente exclusivos.



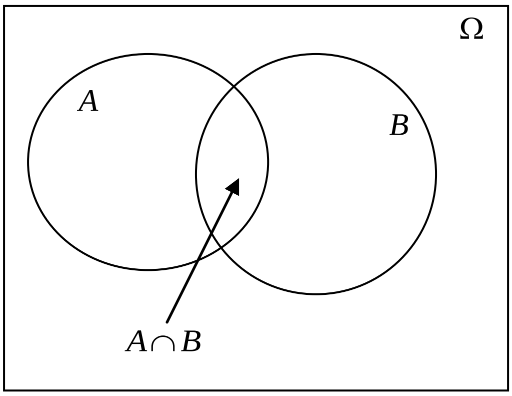

Temos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Como $n(\Omega) \neq 0$, podemos escrever:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)}$$

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$$

2ª) $A \cap B \neq \phi$. O evento $A \cap B$ representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.




Da teoria de conjuntos sabe-se:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Logo

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

Exemplos:

1) Uma urna contém 25 bolas numeradas de 1 a 25. Uma bola é extraída ao acaso dessa urna.

a) Qual é a probabilidade de o número da bola sorteada ser múltiplo de 2 ou de 3?

$n(\Omega) = 25$

*Considere os eventos A e B:*

*A: o número é múltiplo de 2* $\Rightarrow A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24\} \Rightarrow n(A) = 12$

*Logo* $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{12}{25}$

*B: o número é múltiplo de 3* $\Rightarrow B = \{3,6,9,1215,18,21,24\} \Rightarrow n(B) = 8$

*Logo* $p(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{8}{25}$

*O conjunto* $A \cap B = \{6,12,18,24\} \Rightarrow n(A \cap B) = 4$

*Logo* $p(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{25}$

*Portanto* $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$p(A \cup B) = \frac{12}{25} + \frac{8}{25} - \frac{4}{25} = \frac{16}{25} = 0{,}64 = 64\%$$

b) Qual a probabilidade de a bola sorteada ser múltiplo de 5 ou 7?
*Considere os eventos:*
*A: o número é múltiplo de 5* $\Rightarrow A = \{5,10,15,20,25\} \Rightarrow n(A) = 5$
*Logo* $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{25}$
*B: o número é múltiplo de 7* $\Rightarrow B = \{7,14,21\} \Rightarrow n(B) = 3$
*Logo* $p(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{25}$
*Neste caso os eventos são mutuamente exclusivos, pois .*
*Portanto* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

$$p(A \cup B) = \frac{5}{25} + \frac{3}{25} = \frac{8}{25} = 0{,}32 = 32\%$$

2) A probabilidade de um guarda rodoviário aplicar quatro ou mais multas em um dia é de 63%; a probabilidade de ele aplicar quatro ou menos multas em um dia é de 56%. Qual é a probabilidade de o guarda aplicar exatamente quatro multas em um dia?
*Sejam os eventos:*
*A: o guarda aplica quatro ou mais multas* $\Rightarrow p(A) = 0{,}63$
*B: o guarda aplica quatro ou menos multas* $\Rightarrow p(B) = 0{,}56$
*Obs.:*
*1) Aplicar exatamente quatro multas* $\Rightarrow A \cap B$
*2)* $A \cup B = \Omega$, *pois o guarda aplica menos de quatro multas, quatro multas ou mais de quatro multas, logo* $p(A \cup B) = p(\Omega) = 1$ *(evento certo).*
*Portanto* $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
$1 = 0{,}63 + 0{,}56 - p(A \cap B)$
$p(A \cap B) = 1{,}19 - 1 = 0{,}19 = 19\%$

## Probabilidade condicional

A probabilidade de ocorrer um evento A sabendo que já ocorreu o evento B é dada por

$$\boxed{p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$$

Lê-se: probabilidade de A dado que B acontece.

Exemplos:
1) Na saída de um gre-nal foram ouvidos para fins de pesquisa 80 torcedores assim distribuídos:

| | Homens | Mulheres | Total |
|---|---|---|---|
| Grêmio | 27 | 14 | 41 |
| Inter | 23 | 16 | 39 |
| Total | 50 | 30 | 80 |

Escolhemos uma pessoa ao acaso. Sabendo que essa pessoa é homem, qual a probabilidade de que ela seja torcedora do Grêmio?

*Dados os eventos A: Grêmio e B: homem*

*Queremos calcular* $p(Grêmio/\text{hom}em) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

$p(A \cap B) = \dfrac{27}{80}$ $\qquad\qquad$ $p(B) = \dfrac{50}{80}$

$$p(Grêmio/\text{hom}em) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{27}{80}}{\frac{50}{80}} = \frac{27}{50}$$

2) Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Escolhe-se uma delas ao acaso e vê-se que o número marcado nela é maior que 8. Qual é a probabilidade de ele ser múltiplo de 5?

*Queremos encontrar* $p(\text{mult}.5/\text{maior q}.8) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

*Considere os eventos: A: multiplo de 5 e B: maior que 8*

$A = \{5{,}10{,}15{,}20\}$ $\qquad$ $B = \{9{,}10{,}11{,}12{,}13{,}14{,}15{,}16{,}17{,}18{,}19{,}20\}$ $\qquad$ $n(B) = 12$ $\qquad$ $p(B) = \dfrac{12}{20}$

$A \cap B = \{10{,}15{,}20\}$ $\qquad$ $n(A \cap B) = 3$ $\qquad$ $p(A \cap B) = \dfrac{3}{20}$

$$p(\text{mult}.5/\text{maior q}.8) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{12}{20}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

## Probabilidade de dois eventos simultâneos ou sucessivos

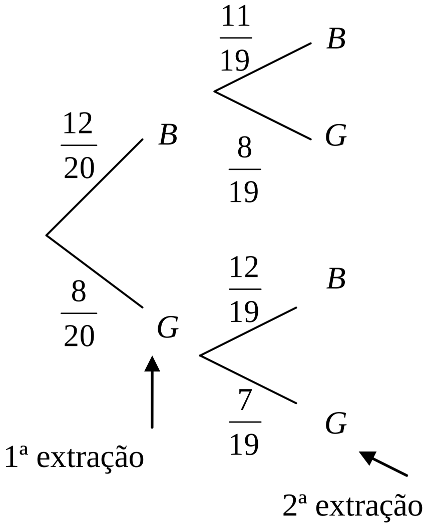
Para se avaliar a probabilidade ocorrerem 2 eventos simultâneos( ou sucessivos), que é $p(A \cap B)$, basta multiplicar a probabilidade de ocorrer o outro, sabendo que o primeiro já ocorreu $p(A/B)$

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B)}$$

Exemplos:

1) Numa caixa estão guardados 20 livros, sendo 12 de biologia e 8 de geografia. Dois deles são retirados sucessivamente e sem reposição.

a) Qual é a probabilidade de terem sido escolhidos 2 livros de biologia?



$$p(B \cap B) = p(B).p(B/B)$$

Prob.de o 1° livro ser de biologia

Prob de o 2° livro ser de biologia, dado que o 1° também é.

$$p(B \cap B) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = \frac{33}{95}$$

b) Qual será a probabilidade de escolhermos livros de assuntos diferentes?
*Há dois casos que interessam:* $p(B \cap G)$ *e* $p(G \cap B)$

- $p(B \cap G) = p(B).p(G/B) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} = \frac{96}{380}$
- $p(G \cap B) = p(G) \cdot p(B/G) = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{96}{380}$

$$p = p(B \cap G) + p(G \cap B) = \frac{96}{380} + \frac{96}{380} = \frac{192}{380} = \frac{96}{190} = \frac{48}{95}$$

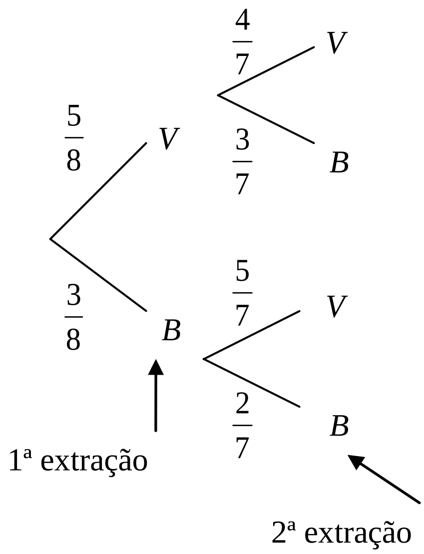
2) Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 brancas, Duas delas são retiradas sucessivamente sem reposição.

a) Qual a probabilidade de terem saído duas bolas brancas?

$n(\Omega) = 8$

*Queremos duas bolas brancas, logo*

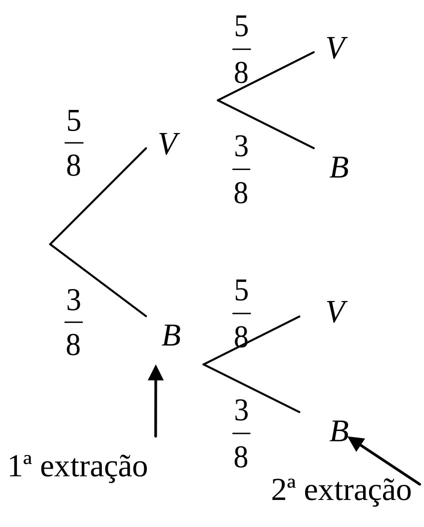
$$p(B \cap B) = p(B).p(B/B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$




b) Qual é a probabilidade de terem saído duas bolas brancas com reposição?

*Neste caso, o fato de sair branca na 1ª extração não muda a probabilidade de sair branca na 2ª extração(pois há reposição). Neste caso há independência de eventos logo* $p(B/B) = p(B)$.

$$p = p(B \cap B) = p(B) \cdot p(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$



*Observação:*
Quando $p(A/B) = p(A)$(isto é, o fato de ter ocorrido o evento B não altera a probabilidade de ocorrer o evento A), dizemos que A e B são eventos independentes e o teorema da multiplicação se reduz a $\boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)}$

3) A probabilidade de que uma pessoa X resolva um exercício é de 40% e a probabilidade de que uma pessoa Y resolva o mesmo exercício é de 25%. Qual é a probabilidade de que ambas resolvam o exercício?

$$p(X) = 40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

$$p(Y) = 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$p(X \cap Y) = p(X).p(Y)$, pois os eventos são independentes.

$$p(X \cap Y) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$$