Teorema Binomial:

Denomina-se binômio de Newton todo o binômio da forma $(a+b)^n$ com $n \in N$. Desenvolvendo para alguns valores de *n* encontramos:

$n=0, \Rightarrow (a+b)^0 = 1$

$n=1, \Rightarrow (a+b)^1 = 1.a + 1.b$

$n=2, \Rightarrow (a+b)^2 = 1.a^2 + 2.a.b + 1.b^2$

$n=3, \Rightarrow (a+b)^3 = 1.a^3 + 3.a^2.b + 3a.b^2 + 1.b^3$

$n=3, \Rightarrow (a+b)^4 = 1.a^4 + 4.a^3.b + 6a^2.b^2 + 4a.b^3 + 1.b^4$

Observe que:

* Os coeficientes dos termos do desenvolvimento formam o triângulo de Pascal.
* Os expoentes de *a* decrescem de *n* até 0, enquanto que os de *b* crescem de 0 a *n*.

Escrevendo o binômio $(a+b)^n$, utilizando os coeficientes binomiais:

$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + ... + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$, onde $a,b \in R$ e $n \in R$.

Utilizando o símbolo de somatório:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Em qualquer termo do binômio a soma dos expoentes de *a* e *b* é sempre *n*.

Exemplos:

1) Desenvolva utilizando o binômio de Newton:

a) $(3x+2)^4 = \binom{4}{0}(3x)^4 2^0 + \binom{4}{1}(3x)^3 2^1 + \binom{4}{2}(3x)^2 2^2 + \binom{4}{3}(3x)^1 2^3 + \binom{4}{4}(3x)^0 2^4$

$= 1.81x^4.1 + 4.27x^3 2 + 6.9x^2 4 + 4.3x.8 + 1.1.16$

$= 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$

b) $(a-2)^4 = \binom{4}{0} a^4 (-2)^0 + \binom{4}{1} a^3 (-2)^1 + \binom{4}{2} a^2 (-2)^2 + \binom{4}{3} a^1 (-2)^3 + \binom{4}{4} a^0 (-2)^4$

$= 1.a^4 + 4a^3(-2) + 6a^2.4 + 4a^1(-8) + 1.16$

$= a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a^1 + 16$

2) Calcule os somatórios:

a) $\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} 2^{5-i} 3^i$

Desenvolvendo o somatório temos:

$\binom{5}{0} 2^5 3^0 \binom{5}{1} 2^4 3^1 + \binom{5}{2} 2^3 3^2 + \binom{5}{3} 2^2 3^3 + \binom{5}{4} 2^1 3^4 + \binom{5}{5} 2^0 3^5 = (2+3)^5 = 5^5 = 3125$

b) $\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} 2^i$

Desenvolvendo o somatório temos:

$$\binom{5}{0}2^0\binom{5}{1}2^1+\binom{5}{2}2^2+\binom{5}{3}2^3+\binom{5}{4}2^4+\binom{5}{5}2^5$$

Para representar um binômio de Newton podemos utilizar as potências de 1.

$$\binom{5}{0}(1)^5 2^0\binom{5}{1}(1)^4 2^1+\binom{5}{2}(1)^3 2^2+\binom{5}{3}(1)^2 2^3+\binom{5}{4}(1)^1 2^4+\binom{5}{5}(1)^0 2^5=(1+2)^5=(3)^5=243$$

Termo Geral do Binômio:

Muitas vezes estamos interessados em conhecer apenas um termo específico do desenvolvimento de $(a+b)^n$ sem precisar escrever todos os seus termos. Podemos expressar um termo qualquer do binômio pela fórmula:

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Onde $k+1$ é a posição do termo, $k\in N$ e varia de 0 a *n*. E *n* o expoente do binômio.
Exemplo:

1) Encontre os coeficientes de x^{10} e de x^{11}, no desenvolvimento de $\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^7$.

Como $a=x^2$, $b=\frac{1}{2}$ e $n=7$, temos:

$$T_{k+1}=\binom{7}{k}\left(x^2\right)^{7-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\binom{7}{k}(x)^{14-2k}\frac{1}{2^k}$$

Para determinar o coeficiente de x^{10}:

$$14-2k=10\Rightarrow 2k=14-10\Rightarrow k=\frac{4}{2}\Rightarrow k=2$$

$$T_{2+1}=\binom{7}{2}(x)^{14-2(2)}\frac{1}{2^2}=\frac{21.x^{10}}{4}\Rightarrow T_3=\frac{21}{4}x^{10}$$

$$\boxed{\binom{7}{2}=C_{7,2}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{7.6}{2}=21}$$

Logo o coeficiente é $\frac{21}{4}$

Para determinar o coeficiente de x^{11}:

$14-2k=11\Rightarrow 2k=14-11\Rightarrow k=\frac{3}{2}$ não satisfaz.

Logo não há termo em x^{11} no desenvolvimento.

2) Encontrar o 7° termo no desenvolvimento de $\left(x^3-2y\right)^{10}$.

Como $a=x^3$, $b=-2y$, $n=0$, temos:

$$k+1=7\Rightarrow k=6$$

$$T_7=\binom{10}{6}\left(x^3\right)^4(-2y)^6=210.x^{12}.64y^6=13440x^{12}y^6$$

$$\boxed{\binom{10}{6}=C_{10,6}=\frac{10!}{6!4!}=\frac{10.9.8.7}{4.3.2}=210}$$

3) Verificar se há termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^9$:

Como $a=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, $b=-\frac{1}{x}$ e $n=9$.

$$T_{k+1}=\binom{9}{k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{9-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k=\binom{9}{k}x^{\frac{9-k}{2}}\frac{(-1)^k}{x^k}=\binom{9}{k}x^{\frac{9-k}{2}}.x^{-k}(-1)^k=$$

$$=\binom{9}{k}x^{\frac{9-3k}{2}}(-1)^k.$$

Termo onde x^0, $\frac{9-3k}{2}=0\Rightarrow 3k=9\Rightarrow k=3$

$$T_{3+1}=\binom{9}{3}x^{\frac{9-3(3)}{2}}(-1)^3=84.x^0.(-1)=-84$$

$$\boxed{\binom{9}{3}=C_{9,3}=\frac{9!}{3!6!}=\frac{9.8.7}{3.2}=84}$$