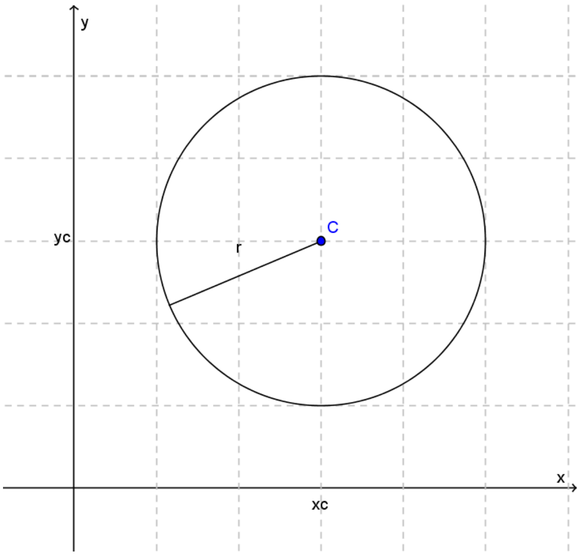
Circunferência

Equação reduzida da circunferência

Uma circunferência com centro $C(x_c,\ y_c)$ e raio r é o conjunto de todos os pontos $P(x,y)$ do plano que distam r de C. $d_{PC=}\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2}=r$, Elevando cada membro ao quadrado temos

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2$$

chamada equação reduzida da circunferência, em que:



- x_c e y_c são as coordenadas do centro C da circunferências.
- r é o raio da circunferência.
- x e y são as coordenadas do ponto genérico P pertencente à circunferência.

Exemplos:

1) Escreva a equação reduzida da circunferência de centro $C(1,-4)$ e raio 3. Verifique se os pontos $(4,-4)$ e $(0,-1)$ pertencem à circunferência.

2) Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos $A(-3,0)$, $B(2,5)$ e $D(1,6)$.

Equação geral da circunferência

Desenvolvendo os quadrados de uma circunferência na forma reduzida $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2$, temos $x^2-2xx_c+x_c^2+y^2-2yy_c+y_c^2=r^2$ e agrupando convenientemente temos $x^2+y^2-2xx_c-2yy_c+(x_c^2+y_c^2-r^2)=0$.

Essa expressão é conhecida como forma geral da equação da circunferência, ou equação geral da circunferência com centro (x_c,y_c) e raio r.

Para identificar o centro e o raio de uma circunferência escrita na sua forma geral utiliza-se um processo prático que consiste em completar quadrados.

Exemplos:

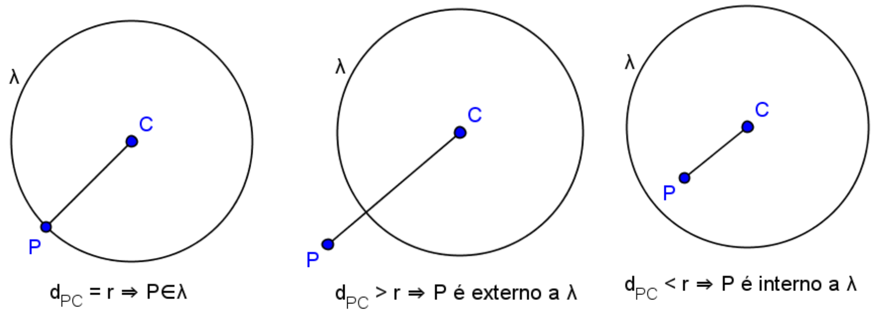
1) Determine o centro e o raio da circunferência de equação $x^2+y^2-6x-4y-23=0$.

2) Verifique se a equação $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$ representa uma circunferência.

Posições relativas entre ponto e circunferência

Para uma circunferência de centro $C(x_c, y_c)$ e raio r e um ponto P qualquer, compararemos d_{PC} com r. Há três casos:

a) Se $d_{PC} = r$, então P pertence à circunferência.
b) Se $d_{PC} > r$, então P é externo à circunferência.
c) Se $d_{PC} < r$, então P é interno à circunferência.



Exemplos:

1) Dada a equação reduzida da circunferência $(x-3)^2+(y-4)^2=25$. Verifique a posição relativa entre essa circunferência e os pontos $P(8,4)$, $Q(-2,0)$ e $R(2,1)$.

2) Determine a posição relativa entre a circunferência $x^2+y^2-6x-2y+6=0$ e os pontos $P(2,1)$, $Q(5,1)$ e $R(6,2)$.

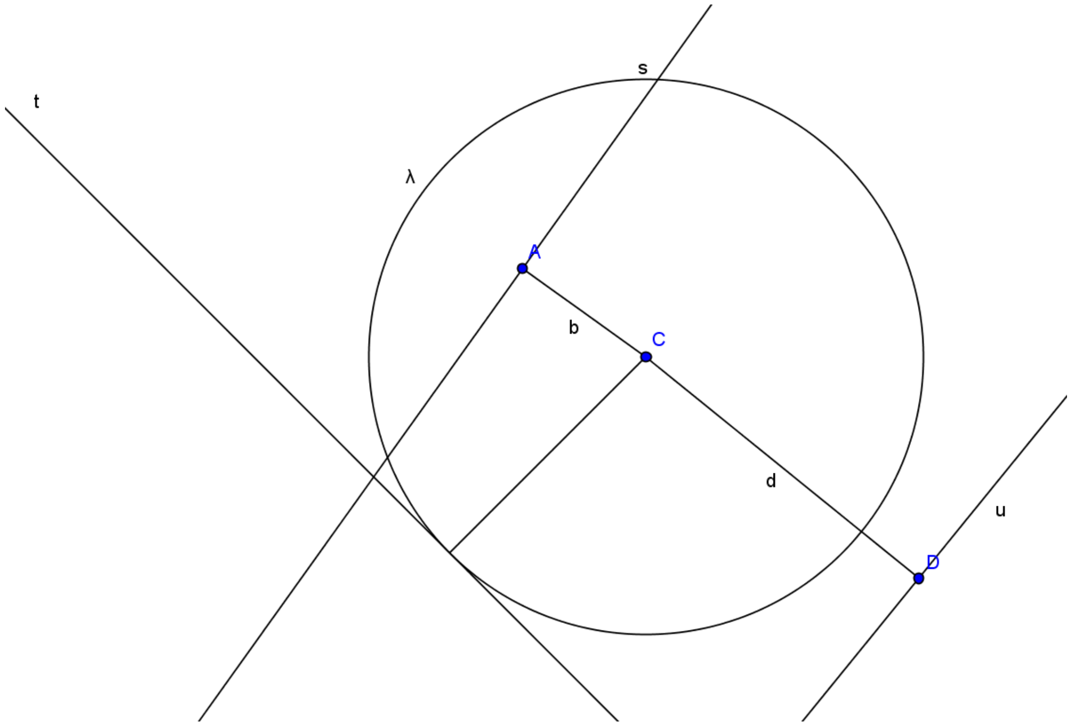
Posições relativas entre reta e circunferência

Conhecidos o centro e o raio da circunferência, bem como a equação da reta, calculamos a distância entre o centro da circunferência e a reta, comparando-a com a medida do raio. Desse modo se:

$d_{C,s} < r \Leftrightarrow s$ é secante a λ

$d_{C,t} = r \Leftrightarrow s$ é tangente a λ

$d_{C,u} > r \Leftrightarrow s$ é externa a λ



Ou se substituirmos o valor de uma das variáveis (isolada na equação da reta) na equação da circunferência, obteremos com certeza uma equação de 2° grau (na outra variável). Calculando o discriminante da equação obtida, poderemos ter:

1° caso: $\Delta > 0 \;\Rightarrow$ a reta e a circunferência são secantes (há dois pontos de intersecção).

2° caso: $\Delta = 0 \;\Rightarrow$ a reta e a circunferência são tangentes (há um único ponto de intersecção)

3° caso: $\Delta < 0 \;\Rightarrow$ a reta e a circunferência são exteriores (não há ponto de intersecção)

Exemplos:

1) Determine a posição relativa entre a reta $r: 2x + y - 2 = 0$ e a circunferência $\lambda: (x-1)^2 + (y-5)^2 = 5$.

2) Determine a posição relativa entre a reta $3x - y = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

3) Dada a equação da reta $y = \sqrt{3}\,x + n$ que é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$, determine os valores de n.

Problemas de tangência

Exemplos:

1) Obtenha as equações das tangentes à circunferência $\lambda: x^2 + y^2 = 9$ que sejam paralelas à reta $s: 2x + y - 1 = 0$

2) Determine as equações das tangentes à circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$ que sejam perpendiculares à reta $s: 3x + y + 1 = 0$.

3) Estabelecer as equações das retas tangentes à circunferência $\lambda: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$ traçadas pelo ponto $P\ (4,0)$.

4) Obtenha as equações das tangentes à circunferência do exemplo anterior, traçadas pelo ponto $T\left(2, \sqrt{3}-3\right)$.

5) Encontre as equações das tangentes à mesma circunferência λ, desta vez traçadas pelo ponto $Q\ (1, -4)$.