Sistemas lineares

Equação linear: É toda a equação que pode ser escrita na forma geral $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$, onde $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ são as incógnitas, $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ são números reais chamados coeficientes das incógnitas e b é o termo independente.

Exemplos:

a) $2x_1 - x_2 + x_3 = 5$
b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$
c) $-x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \sqrt{3}\,x_3 = 0$
d) $2x + y - 3z = 0$

Observações:

- Quando o termo independente é nulo, dizemos que se trata de uma equação linear *homogênea*.
- Numa equação linear, os expoentes de todas as incógnitas são unitários.
- Uma equação linear não apresenta termo misto (aquele que contém o produto de duas ou mais incógnitas).

Solução de uma equação linear: Dizemos que a sequência ordenada de números reais $(\alpha_1,\ \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n\ )$ é a solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$ quando a expressão $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \cdots + a_n\alpha_n = b$ for verdadeira.

Exemplos:

a) Verifique se o par ordenado $(5,2)$ é solução da equação $2x - 3y = 4$.

b) Verifique se a tripla ordenada,$(2, 1, -3)$ é solução da equação $2x - y + z = 0$

Observação: Toda a equação homogênea $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \cdots + a_n\alpha_n = 0$, admite a sequência $(0,0,0, \cdots, 0)$ como solução, pois quaisquer que sejam os coeficientes $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$, tem-se $a_1 0 + a_2 0 + a_3 0 + \cdots + a_n 0 = 0$.

Sistemas de equações lineares: Um conjunto de *m* equações lineares nas variáveis $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ é dito sistema linear de *m* equações a *n* variáveis.

Exemplos:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ é um sistema linear com duas equações e duas variáveis

b) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -3x + 4y = 1 \end{cases}$ é um sistema linear com duas equações e três variáveis

Matrizes associadas a um sistema: Podemos associar a um sistema linear duas matrizes cujos elementos são os coeficientes das equações que formam o sistema.

Exemplos:

a) No sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = -2 \end{cases}$, temos que $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ é a *matriz incompleta* e $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ é a *matriz completa.*

b) As matrizes associadas ao sistema $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x \quad - z = 3 \\ \quad y + 3z = -1 \end{cases}$ são: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Representação matricial de um sistema: Podemos representar um sistema na forma matricial utilizando a definição de produto de matrizes e a sua matriz incompleta.

Exemplos:

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ pode ser escrito na forma matricial $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} 2x - y + z - w = 2 \\ x + y \quad + 3w = -1 \end{cases}$ pode ser representado pelo produto

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solução de um sistema: Dizemos que a sequência ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear de n variáveis quando é solução de cada uma das equações do sistema.

Exemplos:

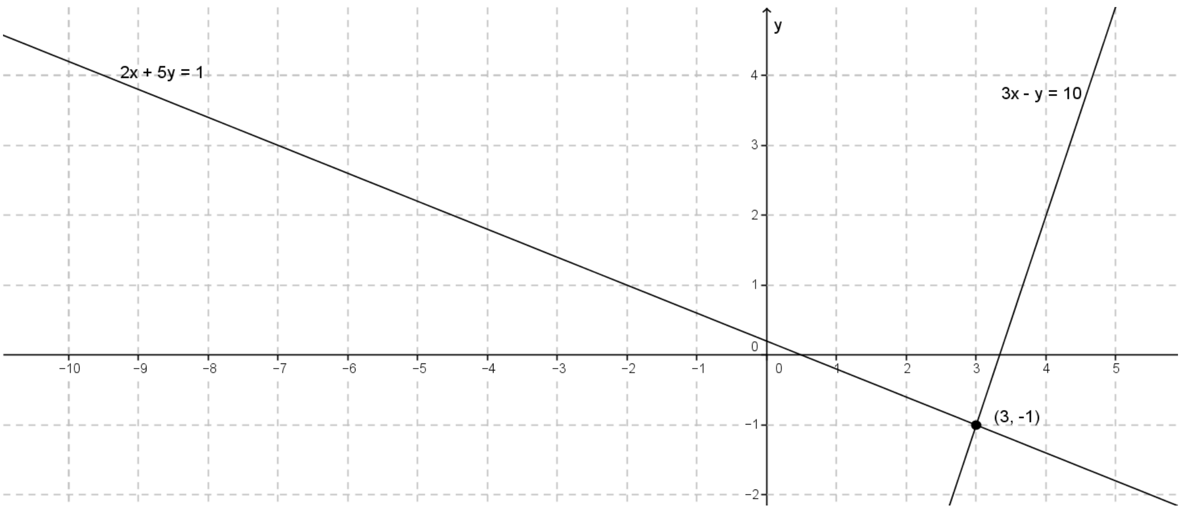
a) Verifique se $(2,1)$ é solução do sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

b) Verifique se o par ordenado $(2,3)$ é solução do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$

Classificação dos sistemas lineares:

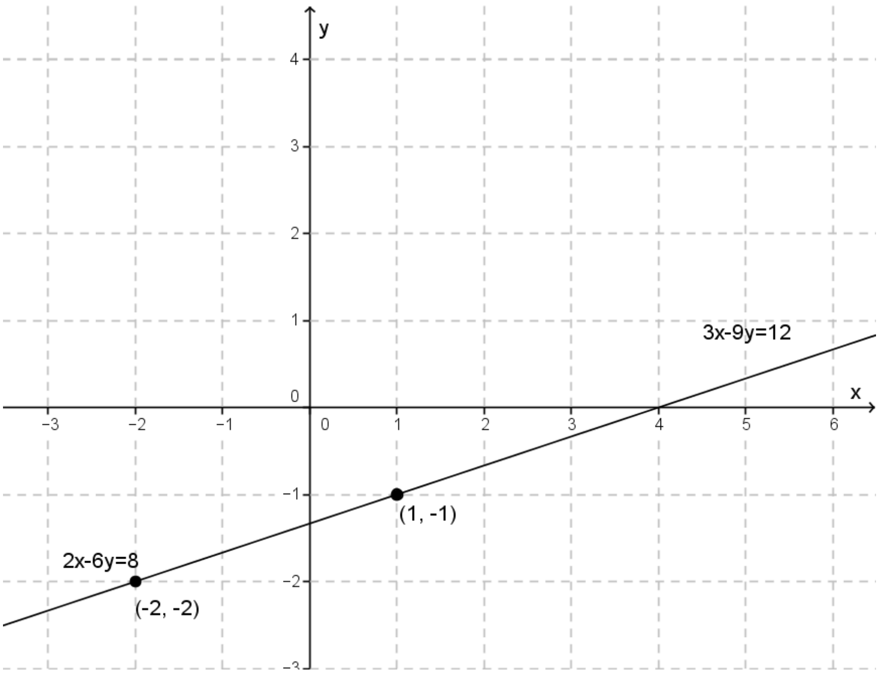
Sistema possível e determinado (SPD): Quando o sistema possui uma única solução.
$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$

Geometricamente: Cada uma das equações lineares podem ser reescritas como uma função afim, logo representam duas retas, que neste caso são concorrentes, determinando um único ponto em comum, uma única solução.



Sistema Possível e Indeterminado (SPI): Quando o sistema possui infinitas soluções.
$\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - 9y = 12 \end{cases}$

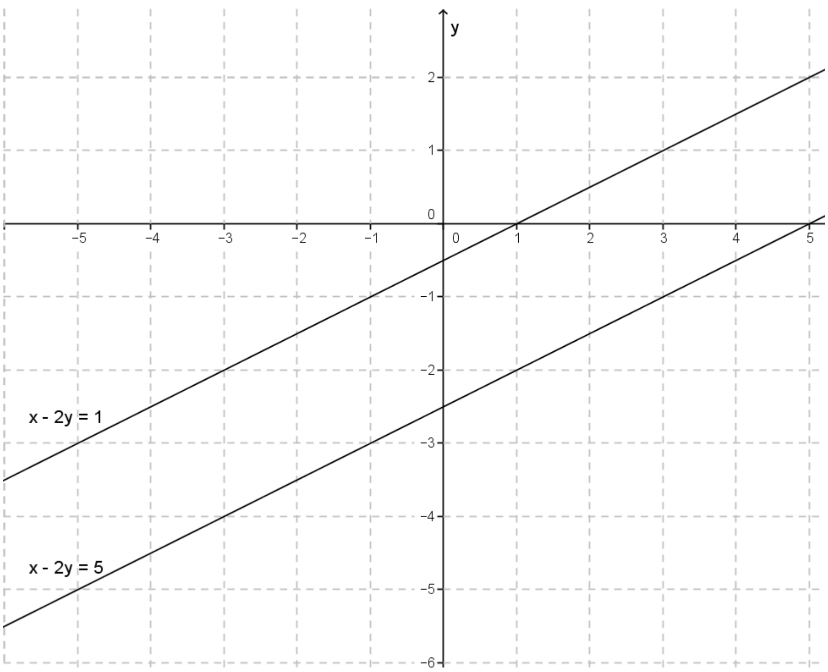
Geometricamente: Neste caso temos duas retas coincidentes, portanto temos infinitos pares ordenados que são as soluções do sistema.



Sistema Impossível (SI): Quando o sistema não apresenta nenhuma solução.

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$$

Geometricamente: Neste caso temos duas retas paralelas, onde não existe par ordenado que pertença as duas retas simultaneamente.



Sistemas escalonados: Considere um sistema linear no qual em cada equação existe pelo menos um coeficiente não nulo. Esse sistema está na forma escalonada (ou é escalonado) se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Exemplos:

a) $\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ \quad 2y - 3z = -1 \\ \qquad -z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y + 5z = 3 \\ \quad 3y - 2z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + y - z - t - w = 1 \\ \quad z + t + 2w = 0 \\ \qquad 2w = -3 \end{cases}$

Resolução de um sistema na forma escalonada:

1°) Número de equações igual ao número de variáveis

Dado o sistema escalonado $\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ \quad y + 2z = -3. \\ \qquad 3z = -6 \end{cases}$

Partindo da última equação, obtemos *z*. Substituindo esse valor na equação anterior, obtemos *y*. Por fim, substituindo *y* e *z* na primeira equação, obtemos *x*.

Este tipo de sistema apresenta sempre uma única solução, logo é um SPD.

2°) Número de equações menor que o número de variáveis

a) $\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ \quad y - z = 1 \end{cases}$

- Identificar a variável que não aparece no início de nenhuma das equações, chamada de variável livre.
- Transpor a variável livre para o 2° membro em cada equação.

- Atribuir um valor real para *z*, $(z = \alpha,\ com\ \alpha \in \mathbb{R})$,obtendo um sistema do 1° tipo.

Esse tipo de sistema apresenta sempre infinitas soluções, pois como $\alpha \in \mathbb{R}$, pode assumir infinitos valores diferentes, sento então um SPI.

b) $\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ \quad 2z - t = 0 \end{cases}$

Sistemas equivalentes e escalonamento: Dois sistemas lineares são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução.

Exemplo:

$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$ e $\begin{cases} x - y = 3 \\ 5x - y = 14 \end{cases}$ admitem como solução o par $\left(\frac{11}{4}, \frac{-1}{4}\right)$ como solução.

Processo para o escalonamento de um sistema linear: Quando o sistema linear não está escalonado, podemos obter um sistema equivalente a ele, que esteja escalonado, por meio de operações elementares baseadas nos seguintes teoremas:

Teorema 1: Quando multiplicamos por k, com $k \in \mathbb{R}^*$, os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S, obtemos um novo sistema S', equivalente a S.

Teorema 2: Quando substituímos uma equação de um sistema linear S pela soma, membro a membro, dela com outra, obtemos um novo sistema S', equivalente a S.

Roteiro para escalonamento de um sistema:

1° passo: Escolhemos para a primeira equação aquela em que o coeficiente da 1ª incógnita seja não nulo. Se for possível, fazemos essa escolha a fim de que esse coeficiente seja 1 ou -1, pois os cálculos ficam mais simples.

2° passo: Anulamos o coeficiente da 1ª incógnita das demais equações, usando os teoremas 1 e 2.

3° passo: Desprezamos a 1ª equação e aplicamos os dois primeiros passos com as equações restantes.

4° passo: Desprezamos a 1ª e a 2ª equações e aplicamos os dois primeiros passos nas equações restantes, até o sistema ficar escalonado.

Exemplos:

Escalone e resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ 2x + y + z = 6 \\ -2x - 2y + z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$

Observação: Quando, durante o escalonamento, encontramos duas equações com coeficientes ordenadamente iguais ou proporcionais, podemos retirar uma delas do sistema.

c) $\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -5x - 20y - 15z = 11 \\ 3x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$

Observação: Quando, durante o escalonamento, encontramos duas equações incompatíveis entre si ou uma sentença falsa, já podemos concluir que se trata de um sistema impossível.

Também aplicamos o escalonamento a sistemas cujo número de equações é diferente do número de incógnitas.

Exemplos:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 5 \\ 5x - 2y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 4x + 3y = -2 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x - y + 5z = 2 \end{cases}$

Sistemas Homogêneos: É aquele sistema onde todas as suas equações são do tipo homogênea. Todo o sistema homogêneo de *n* incógnitas admite $(0,0,0,\cdots,0)$ como solução. Essa solução é chamada de solução *nula*, *trivial* ou *imprópria*. Se o sistema possui só a solução nula, ele é possível e determinado. Havendo outras soluções ele é possível e indeterminado e essas soluções rebem o nome de soluções próprias ou não triviais.

Exemplos:

a) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \\ 3x + 6y - 4z = 0 \end{cases}$

Regra de Cramer: Um sistema linear $n \times n$, com matriz dos coeficientes A, é possível se e somente se $\det A \neq 0$ e terá uma solução única igual a $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. Onde $\alpha_i = \frac{D_i}{D}$, com $D = \det A$ e D_i é o determinante da matriz obtida de A trocando-se a coluna i pela coluna dos termos independentes do sistema.

Exemplos:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ -x - 2y - 3z = -3 \\ 4x - y - z = 4 \end{cases}$

Discussão de um sistema: Discutir um sistema linear em função de um ou mais parâmetros significa dizer para quais valores dos parâmetros temos SPD, SPI ou SI. Sendo D o determinante da matriz incompleta dos coeficientes de um sistema linear, temos:

$$D \neq 0 \quad \rightarrow SPD$$

$$D = 0 \quad \rightarrow SPI\ ou\ SI$$

Resultado válido para qualquer sistema linear de n equações e n incógnitas, com $n \geq 2$.

a) Discuta em função de *m*, o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$

b) Discuta em função de *m*, o sistema $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ mx + y + 5z = 9 \end{cases}$

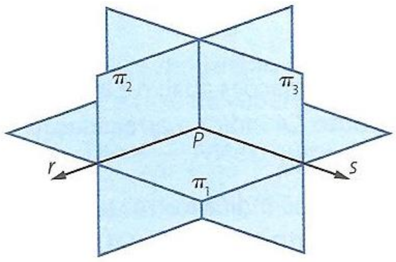
c) Discuta em função de a e b, o sistema $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 3x + 2y = b \end{cases}$.

d) Determine o valor de m em $\begin{cases} mx + y - 3z = 0 \\ my + 2z = 0 \\ -mx + z = 0 \end{cases}$, a fim de que o sistema admita soluções diferentes da trivial (ou tenha soluções próprias)

Interpretação geométrica de sistemas lineares 3X3.

Um sistema de três equações lineares com três incógnitas, representam três planos no espaço. Existem oito possibilidades Para as posições entre os planos no espaço, onde uma é possível e determinada, três possíveis e indeterminados e quatro impossíveis.

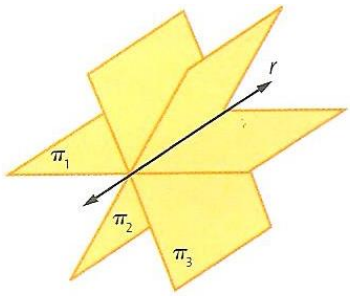
Sistema Possível e Determinado: os três planos têm um único ponto em comum.



$$r = \pi_1 \cap \pi_2$$
$$s = \pi_1 \cap \pi_3$$

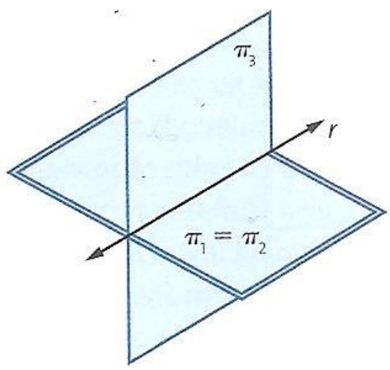
Sistema Possível e Indeterminado:

a) Os três planos são distintos e têm uma reta em comum.

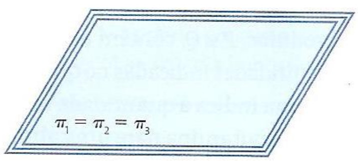


$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$$

b) Dois planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta.

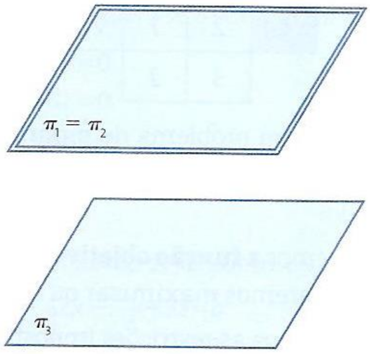


c) Os três planos coincidem.

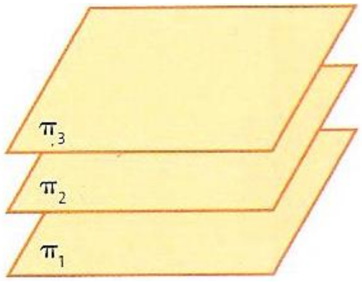


Sistema Impossível:

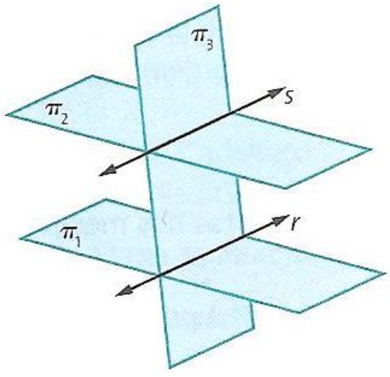
a) Dois planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles.



b) Os planos são paralelos dois a dois.



c) Dois planos são paralelos e o outro os intersecta segundo as retas paralelas *r* e *s*.



d) Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas paralelas umas às outras.