Matrizes

Informações numéricas organizadas na forma de tabelas com linhas e colunas são chamadas, em matemática, de *matrizes*. Diz-se que uma matriz $m \times n$ é uma tabela de $m.n$ números dispostos em *m* linhas (filas horizontais) e *n* colunas(filas verticais).

Exemplos:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ é uma matriz 2×3;

$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×2;

$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 7 & \frac{1}{4} & \sqrt{2} & 13 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3×4.

Representação de uma matriz

Consideramos uma matriz A do tipo $m \times n$. Um elemento qualquer dessa matriz será representado pelo símbolo a_{ij}, no qual o índice i refere-se a linha em que se encontra e o elemento e o índice j refere-se à coluna em que se encontra o elemento.

Representaremos também a matriz A por $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Note que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq i \leq n$.

Exemplos:

1) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{3\times 2}$

O elemento que está na linha 1, coluna 1, é a $a_{11} = 2$.

O elemento que está na linha 1, coluna 2, é a $a_{12} = 3$.

O elemento que está na linha 2, coluna 1, é a $a_{21} = 4$.

O elemento que está na linha 2, coluna 2, é a $a_{22} = -1$.

O elemento que está na linha 3, coluna 1, é a $a_{31} = 0$.

O elemento que está na linha 3, coluna 2, é a $a_{32} = -2$.

2) Escreva uma matriz $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, em que $a_{ij} = 2i + j$.
   Uma matriz do tipo 2×2 pode ser genericamente representada por $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Utilizando a lei de formação da matriz, temos:

   $$a_{11} = 2.1 + 1 = 3 \qquad a_{12} = 2.2 + 1 = 5$$
   $$a_{21} = 2.1 + 2 = 4 \qquad a_{22} = 2.2 + 2 = 6$$

   Logo $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Tipos de Matrizes

- *Matriz Linha*: é uma matriz formada por uma única linha
  Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ é uma matriz linha 1×3.
- *Matriz Coluna:* é uma matriz formada por uma única coluna.
  Exemplo: $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 3×1.
- *Matriz Nula*: é uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero.
  Exemplos: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula 2×3 e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula 2×2.
- *Matriz Quadrada:* é uma matriz que possui número de linhas igual ao número de colunas.
  Exemplos: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2. Dizemos que A é quadrada de ordem 2.
  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & \frac{1}{5} & 2 \\ -3 & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 3×3. Dizemos que B é quadrada de ordem 3.

Seja *A* uma matriz quadrada de ordem *n*.

1º) A diagonal principal é formada pelos elementos de A que possuem o índice da linha igual ao índice da coluna. Logo os elementos $a_{11},\ a_{22},\ a_{33}, \cdots, a_{nn}$ formam a diagonal principal de A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2º) A diagonal secundária é formada pelos elementos de A cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n+1$, onde n é a ordem da matriz. Logo os elementos $a_{31}, a_{22}\ e\ a_{31}$formam a diagonal secundária.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- *Matriz Transposta:* Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, a matriz transposta dela será representada por A^tde ordem $n \times m$. Significa que para transformarmos uma matriz em matriz transposta, basta trocar os elementos das linhas pelo das colunas e vice-versa.
  Exemplos:
  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ então $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

- *Matriz Identidade:* Uma matriz quadrada de ordem n (indicada por I_n) recebe o nome de matriz identidade quando os elementos de sua diagonal principal são todos iguais a 1, e os demais elementos são iguais a zero.
  Exemplos:
  $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 2
  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3.

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem *n*.

Igualdade de matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, dizemos que os elementos de mesmo índice são *correspondentes*. Assim:

- a_{11} e b_{11} são correspondentes;
- a_{12} e b_{12} são correspondentes;
  $\vdots \quad \vdots$
- a_{mn} e b_{mn} são correspondentes.

Duas matrizes de mesmo tipo $m \times n$ são iguais quando todos os seus elementos correspondentes são iguais.

Exemplos:

1) Determine a, b, c e d de modo que se tenha $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b+1 \\ c-2 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

   Observando os elementos correspondentes temos $\begin{cases} a = 2 \\ b+1 = 1 \Rightarrow b = 0 \\ c-2 = 6 \Rightarrow c = 8 \\ d = 3 \end{cases}$

2) Encontre *m* sabendo que $\begin{pmatrix} 1-m^2 & 1 \\ -2 & 1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} 1-m^2 = 0 \Rightarrow m = -1 \; ou \; m = 1 \\ 1-m = 0 \Rightarrow m = 1 \end{cases}$$

Como as duas equações precisam ser satisfeitas simultaneamente, segue que $m = 1$.

Operações com Matrizes

Adição de Matrizes: Dadas duas matrizes *A* e *B*, ambas de mesma ordem $m \times n$. Demonina-se matriz soma de *A* e *B* a matriz *C*, de mesma ordem $m \times n$, de modo que seus elementos sejam iguais à soma dos elementos correspondentes das matrizes *A* e *B*.

Ou seja, dadas $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ e $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, se $C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + c_{ij}$ para todo *i* e todo *j*.

Exemplos:

1) Dadas $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 8 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcule $C = A + B$.

2) Determine a matriz X de modo que $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Subtração de matrizes:

- <u>Matriz oposta:</u> Denomina-se matriz oposta de uma matriz *A* a matriz –*A* cujos elementos são simétricos dos elementos correspondentes de *A*. Dessa maneira temos que:
  - Se $A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, então $-A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
  - Se $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, então $-B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

- Subtração: Dadas duas matrizes A e B, ambas de mesma ordem $m \times n$, definimos a matriz diferença $A - B$ como a soma de A com a oposta de B, isto é

$$A - B = A + (-B)$$

Desse modo temos:

- $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Exemplos:

1) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, calcular a matriz X tal que

$$X - A + B = 0$$

2) Resolva a equação matricial $X - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Propriedades da Adição:

Sendo A, B e C matrizes de mesma ordem e O a matriz nula, valem as seguintes propriedades para a adição de matrizes.

I. Comutativa: $A + B = B + A$
II. Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
III. Oposto: $A + (-A) = O$
IV. Elemento Neutro: $A + O = A$

Multiplicação de um número real por uma matriz: Para multiplicar uma matriz A por um número real, basta multiplicar todos os seus elementos pelo número, e o resultado é uma matriz do mesmo tipo de A.

Exemplos:

1) Resolva a equação matricial $2X = A + B$ sabendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2) Sabendo-se que $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtenha as matrizes M e N, tais que

$$\begin{cases} 2M + N = A - B \\ M + 3N = 2A + B \end{cases}$$

Multiplicação de Matrizes: Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, chama-se produto de A por B, e se indica por $A.B$, a matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$, em que cada c_{ik} é a soma dos produtos da i-ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna de B, ou seja, $c_{ik} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + a_{i3}.b_{3k} + \cdots + a_{in}.b_{nk}$.

Exemplos:

1) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, determine, se existirem *A.B* e *B.A*.

2) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, determine, se existirem, *A.B* e *B.A*.

3) Sejam as matrizes $A = \left(a_{ji}\right)_{6\times 3}$, em que $a_{ij} = i + j$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{3\times 8}$, em que $b_{jk} = 2j - k$. Sendo $C = A.B = \left(c_{ij}\right)_{6\times 8}$, determine o elemento c_{35}.

4) Encontre a matriz X, em $A.X = B$, onde $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Propriedades da Multiplicação:

I. Associativa: $(A.B).C = A.(B.C)$
II. Distributiva à direita: $(A \pm B).C = A.C \pm B.C$
III. Distributiva à esquerda: $C.(A \pm B) = C.A \pm C.B$

<u>Observações:</u>

a) A multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, existem matrizes A e B tais que $A.B \neq B.A$.
b) Caso $A.B = B.A$, dizemos que as matrizes *comutam*.
c) Na multiplicação de matrizes não vale a lei do anulamento do produto, isto é, podemos ter $A.B = 0$, mesmo com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.
d) Não vale a lei do cancelamento, isto é, podemos ter $A.B = A.C$ mesmo com $A \neq 0$ e $B \neq C$.

Matriz Inversa: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A é dita inversível (ou invertível) se existir uma matriz B tal que $A.B = B.A = I_n$. Nesse caso B é dita *inversa* de A e indicada por A^{-1}.

Exemplos:

1) Verifique se $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

2) Encontre, se existir, a inversa da $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Observações:

a) Se existir a inversa, dizemos que a matriz A é *inversível* e, em caso contrário, *não inversível* ou *singular*.
b) Se a matriz quadrada é inversível, ela é única.