Operações com números complexos

Adição e Subtração

Somamos ou subtraímos números complexos, somando ou subtraindo, respectivamente, suas partes reais e imaginárias, separadamente.
Isto é:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a-bi)-(c-di)=(a-c)+(b-d)i$$

Exemplos:
1) Efetue as operações:
a) $(1+3i)+(-2+4i)=(1-2)+(3+4)i=-1+7i$
b) $(4+5i)-(3+2i)=(4-3)+(5-2)i=1+3i$
Ou podemos eliminar os parênteses e reduzir os termos semelhantes:
c) $(-3-2i)-(-5+3i)+2i=-3-2i+5-3i+2i=2-3i$
2) Sendo $z_1=1+(x-3)i$ e $z_2=2y-i$, determine x e y de modo que $z_1+z_2=3-5i$.
Primeiro calculamos o valor de z_1+z_2:

$$z_1+z_2=1+(x-3)i+2y-i=(1+2y)+(x-3-1)i=(1+2y)+(x-4)i$$

Como precisamos que $z_1+z_2=3-5i$ igualamos os resultados:

$$(1+2y)+(x-4)i=3-5i$$

Então,

$$\begin{cases}1+2y=3\\ x-4=-5\end{cases}\Rightarrow x=-1 \text{ e } y=1$$

Multiplicação

Multiplicamos dois números complexos aplicando a propriedade distributiva, lembrando que $i^2=-1$ e depois reduzindo os termos semelhantes.
Exemplos:
Efetue as multiplicações:
a) $(3+4i)(1-2i)=3-6i+4i-8i^2$
b) $(-2+5i)(-1+i)=2-2i-5i+5i^2=2-2i-5i-5=-3-7i$
c) $\left(\frac{1}{2}+3i\right)(4-i)=2-\frac{1}{2}i+12i-3i^2=2-\frac{1}{2}i+12i+3=5+\frac{23}{2}i$

Conjugado

O conjugado de um número complexo $z=a+bi$ é dado pela seguinte forma $\bar{z}=a-bi$.
Exemplos:
a) $z=1+2i\Rightarrow\bar{z}=1-2i$
b) $z=-3-i\Rightarrow\bar{z}=-3+i$
c) $z=-3i\Rightarrow\bar{z}=3i$
d) $z=5\Rightarrow\bar{z}=5$
e) Vamos determinar os números complexos que verificam a igualdade $2\cdot z+\bar{z}=\overline{-3-4i}$.
Como $z=a+bi$, temos:
$2(a+bi)+(a-bi)=-3+4i$

$$2a + 2bi + a - bi = -3 + 4i$$
$$3a + bi = -3 + 4i$$

Usando a igualdade temos $\begin{cases} 3a = -3 \Rightarrow a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$

Assim, $z = -1 + 4i$.

Divisão

Para efetuar a divisão entre dois números complexos, multiplicamos numerador e denominador pelo conjugado do denominador. Isto é $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$.

Exemplos:

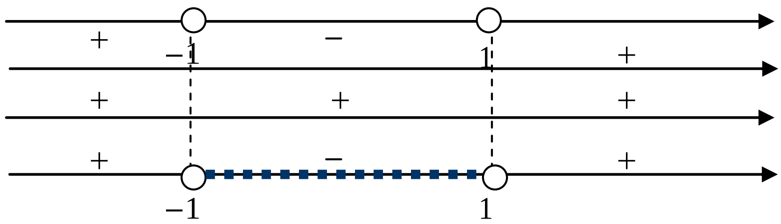
1) Sendo $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 1 + i$, obter $\dfrac{z_1}{z_2}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{1+i} = \frac{3+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{3 - 3i + 2i - 2i^2}{1 - i^2} = \frac{3 - 3i + 2i + 2}{1+1} = \frac{5-i}{2} = \frac{5}{2} - \frac{i}{2}$$

2) Achar todos os valores reais de *x*, de modo que a parte real do número complexo $z = \dfrac{x-i}{x+i}$ seja negativa.

$$z = \frac{(x-i)(x-i)}{(x+i)(x-i)} = \frac{x^2 - 2xi - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \frac{2xi}{x^2 + 1}$$

Parte real negativa $\Rightarrow \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < 0$, inequação quociente.



$$S = \{x \in \Re / -1 < x < 1\}$$

3) Obtenha o valor real de *x* de modo que $z = \dfrac{1+2i}{1-xi}$ seja imaginário puro.

$$z = \frac{(1+2i)}{(1-xi)} \cdot \frac{(1+xi)}{(1+xi)} = \frac{1 + xi + 2i + 2xi^2}{1^2 - x^2 i^2} = \frac{(1-2x) + (x+2)i}{1+x^2} = \left(\frac{1-2x}{1+x^2}\right) + \left(\frac{x+2}{1+x^2}\right)i$$

Para que z seja imaginário puro, devemos ter $\operatorname{Re}(z) = 0$ e $\operatorname{Im}(z) \neq 0$. Da primeira condição tem-se

$\dfrac{1-2x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ e o valor encontrado $x = \dfrac{1}{2}$ satisfaz a 2ª condição.

Potências de i

Calculando-se as potências de expoentes naturais de i, observa-se que os resultados se repetem em um período de quatro, isto é:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^{2+1} = i^2 \cdot i^1 = (-1)i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$

$i^5 = i^4 . i = (1)\cdot i = i$

$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$

$i^7 = i^6 \cdot i = (-1)\cdot i = -i$

Portanto, para calcular o resultado de uma potência inteira de i, divide-se o expoente por 4 e toma-se o resto da divisão como novo expoente de i.

Exemplos:

Calcule:

a) i^{78}

Dividindo 78 por 4, encontramos quociente igual a 19 e resto igual a 2, logo:

$i^{78} = i^2 = -1$

b) i^{129}

Dividindo 129 por 4 encontramos quociente igual a 32 e resto igual a 1, logo:

$i^{129} = i^1 = i$

c) $(-2i)^8 = [(-2)\cdot i]^8 = (-2)^8 \cdot i^8 = 256 \cdot i^8$

Dividindo 8 por 4 encontramos quociente igual a 2 e resto igual a 0, logo:

$256 \cdot i^8 = 256 \cdot i^0 = 256 \cdot 1 = 256$

Exercícios:

1) Calcule:

a) $(6+5i)+(2-i)$

b) $(6-i)+(4+2i)-(5-3i)$

c) $\left(\frac{2}{3}+i\right)-\left(\frac{1}{2}-i\right)+(4-2i)$

2) Ache a e b, para que $(4+5i)-(-1+3i) = a+bi$.

3) Obtenha o número complexo z tal que $2z + 3\bar{z} = 4 - i$.

4) Dados $z_1 = 4+i$, $z_2 = -1+2i$ e $z_3 = 5-3i$, calcule:

a) $z_1 + z_2 - z_3$

b) $2z_1 - 4z_2 + \frac{1}{2}z_3$

5) Encontre a e b pertencentes ao conjunto dos números reais de modo que $(a+8ai)+(-4+bi)$ seja um número imaginário puro.

6) Determine o número complexo z que satisfaz a igualdade $\frac{z}{2} - \frac{\bar{z}}{4} = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}i$.

7) Efetue:

a) $\left(\frac{1}{2}+i\right)\left(\frac{1}{2}-i\right)$

b) $(-3i+4)(-2+5i)$

c) $(1+i)(2-i)(3+2i)$

d) $\left(\frac{1}{2}+i\right)\left(\frac{1}{4}-i\right)\left(1-\frac{1}{2}i\right)$

8) Desenvolva:

a) $(3+4i)^2$

b) $(2+i)^3$

c) $(1-i)^4$

d) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{2}i}{2}\right)^3$

9) Determine x e y de modo que $(4+i)(x-2i)=y+\frac{1}{2}i$.

10) Considere os complexos $a=2+i$, $b=i-3$, $c=1+i$ e $d=-3-2i$. Calcule:

a) $(a+b)(c+d)$ b) $(a-b)(c-d)$ c) $ab-cd$

11) Obtenha o número complexo z de tal modo que $z(2-i)-4+5i=6-2i$.

12) Determine o número complexo z tal que $z^2=21+20i$

13) Calcule os números complexos z_1 e z_2 para que se tenha $\begin{cases} z_1+z_2=3 \\ 2z_1-z_2=3i \end{cases}$.

14) Calcule:

a) $\dfrac{2+i}{5-3i}$ b) $\dfrac{5+i}{i}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

15) Coloque na forma $a+bi$ a expressão $\dfrac{1-i}{1+i}+\dfrac{i}{i-2}$.

16) Determine o conjugado do número complexo $z=\dfrac{2+i}{i}$.

17) Dadas as funções $f(x)=x^2-2x+1$ e $g(x)=x^2+x$, calcule $\dfrac{f(2+i)}{g(1-i)}$.

18) Dados $z_1=1-i$, $z_2=2+4i$ e $z_3=2+i$, calcule o valor da expressão $(z_1^2-z_2)\left(\dfrac{z_2+z_3}{z_1}\right)$.

19) Obtenha o número complexo z, tal que $\dfrac{z}{1-i}+\dfrac{z+2}{1+i}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}i$.

20) Calcule:

a) i^{92} c) i^{310} e) $i^{123}+i^{180}$

b) i^{45} d) i^{1081}

21) Coloque na forma algébrica o número complexo $\dfrac{i^4-2i^2+i^6-3i^9}{i^{16}-i^{20}+i^{35}}$.

22) Resolva:

a) i^{4n} b) i^{4n+1} c) i^{4n+2} d) i^{4n+3}

Respostas:

1) a) $8+4i$
b) $5+4i$
c) $\frac{25}{6}$

2) $a=5$ e $b=2$

3) $\frac{4}{5}+i$

4) a) $-2+6i$
b) $\frac{29}{2}-\frac{15}{2}i$

5) $a=4$ e $b\neq -32$

6) $-\frac{2}{3}+\frac{8}{9}i$

7) a) $\frac{5}{4}$
b) $7+26i$
c) $7+9i$
d) $1-\frac{13}{16}i$

8) a) $-7+24i$
b) $2+11i$
c) -4
d) $\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{2}}{8}i$

9) $x=\frac{17}{2}$ e $y=36$

10) a) $4-3i$
b) $20+15i$
c) $-6+4i$

11) $z=\frac{27}{5}-\frac{4}{5}i$

12) $5+2i$ e $-5-2i$

13) $z_1=1+i$; $z_2=2-i$

14) a) $\frac{7}{34}+\frac{11}{34}i$
b) $1-5i$
c) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

15) $\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$

16) $1+2i$

17) $-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$

18) $28-6i$

19) $z=\frac{1}{2}+\frac{9}{2}i$

20) a) 1
b) i
c) -1
d) i
e) $1-i$

21) $3+2i$

22) a) 1
b) i
c) -1
d) $-i$