Radiciação em $\mathbb{C}$

Uma raiz enésima de um número complexo z, indicada por z_k, é um número complexo tal que $\boxed{{z_k}^n = z}$.
O número de raízes de z e o valor de cada raiz será determinado pela 2ª fórmula de Moivre. Seja o número complexo não nulo $z = \rho(\cos\theta + isen\theta)$. As suas raízes enésimas são dadas por:

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right]}$$

Onde, $n \geq 2$, $\sqrt[n]{\rho} \in \Re_+^*$; $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$

Um número complexo z, diferente de zero, possui n raízes distintas de mesmo módulo $\sqrt[n]{\rho}$ e argumentos principais em progressão aritmética, cujo primeiro termo é $\frac{\theta}{n}$ e a razão é $\frac{2\pi}{n}$.

Exemplos:
1) Calcule as raízes cúbicas de 8:
Como $z = 8 + 0i$, temos $a = 8$ e $b = 0$ passando z para a forma trigonométrica temos:

$$\rho = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8 \text{ e } \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{8}{8} = 1 \\ sen\theta = \frac{0}{8} = 0 \end{array} \Rightarrow \theta = 0° \text{ e com queremos a raiz cúbica } n = 3$$

Aplicando a 2ª fórmula de Moivre:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

$$z_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{0}{3} + k\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{0}{3} + k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_k = 2\left[\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

Como $n = 3$, obtemos as raízes fazendo o k variar de 0 a 2.

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 2(\cos 0 + isen0) = 2(1 + i\cdot 0) = 2$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 2\left[\cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(1\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3}\right)$$

$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\cdot 180}{3} = 120°$. O ângulo de 120° pertence ao 2° quadrante, logo

$$z_1 = 2(\cos 120° + isen120°) = 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = 2\left[\cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3}\right)$$

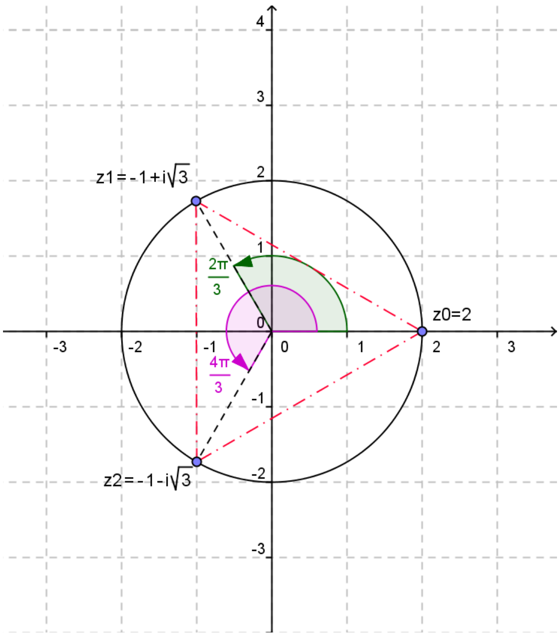
$\frac{4\pi}{3} = \frac{4\cdot 180}{3} = 240°$. O ângulo de 240° pertence ao 3° quadrante, logo

$$z_2 = 2(\cos 240° + isen240°) = 2\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Logo as raízes cúbicas de 8 são 2, $-1+i\sqrt{3}$ e $-1-i\sqrt{3}$.

Interpretação geométrica

Considerando a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{\rho}$ temos a seguinte representação no plano de Argand-Gauss para as raízes encontradas:



Observe que:

Os afixos de z_k, dividem a circunferência em três partes congruentes.

Os afixos de z_k são vértices de um triângulo equilátero inscrito na circunferência de centro na origem e raio 2.

2) Encontre as raízes quadradas de $z = 4 + 4\sqrt{3}i$

Temos $a = 4$ e $b = 4\sqrt{3}$ passando z para a forma trigonométrica temos:

$$\rho=\sqrt{(4)^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16+48}=\sqrt{64}=8 \text{ e } \quad \begin{matrix} \cos\theta=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2} \\ sen\,\theta=\dfrac{4\sqrt{3}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \Rightarrow \theta=60°=\frac{\pi}{3}rad \quad \text{e}$$

com queremos a raiz quadrada, $n=2$

Aplicando a 2ª fórmula de Moivre:

$$z_k=\sqrt[2]{8}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2}+k\cdot\frac{2\pi}{2}\right)+isen\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2}+k\cdot\frac{2\pi}{2}\right)\right]=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi\right)+isen\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi\right)\right]$$

$$z_k=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi\right)+isen\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi\right)\right]$$

Como $n=2$, obtemos as raízes fazendo o k variar de 0 a 1.

$$k=0\Rightarrow z_0=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+0\cdot\pi\right)+isen\left(\frac{\pi}{6}+0\cdot\pi\right)\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+isen\frac{\pi}{6}\right)$$

$\frac{\pi}{6}=30°$, logo

$$z_0=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{6}}{2}+i\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$$

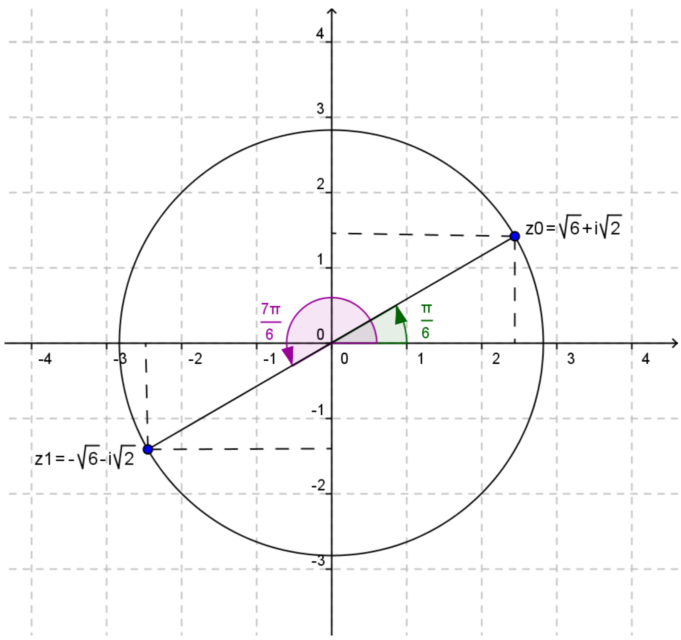
$$k=1\Rightarrow z_1=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+1\cdot\pi\right)+isen\left(\frac{\pi}{6}+1\cdot\pi\right)\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+isen\frac{7\pi}{6}\right)$$

$\frac{7\pi}{6}=210°$ que pertence ao 3° quadrante, logo

$$z_1=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\frac{2\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{6}-i\sqrt{2}$$

Interpretação geométrica

Considerando a circunferência de centro na origem e raio $2\sqrt{2}$, encontramos a seguinte representação:



Os afixos de z_k, dividem a circunferência em duas partes congruentes.

Os afixos de z_k são um diâmetro da circunferência de centro na origem e raio $2\sqrt{2}$.

Exercícios:

1) Calcule no campo dos complexos e faça a representação geométrica:
a) das raízes cúbicas de i.
b) das raízes quartas de 1.
c) das raízes sextas de -64.
d) das raízes cúbicas de -8i.

2) O número -3 é uma das raízes cúbicas do número complexo z. Quais são as outras raízes cúbicas de z?

3) Uma das raízes cúbicas de um número complexo z é $w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i sen\frac{\pi}{6}\right)$. Uma outra raiz cúbica do mesmo número complexo z é:

a) $w = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i sen\frac{5\pi}{6}\right)$

b) $w = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i sen\frac{\pi}{6}\right)$

c) $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{18} + i sen\frac{\pi}{18}\right)$

d) $w = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i sen\frac{5\pi}{6}\right)$

e) $w = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i sen\frac{2\pi}{3}\right)$

Respostas:

1)

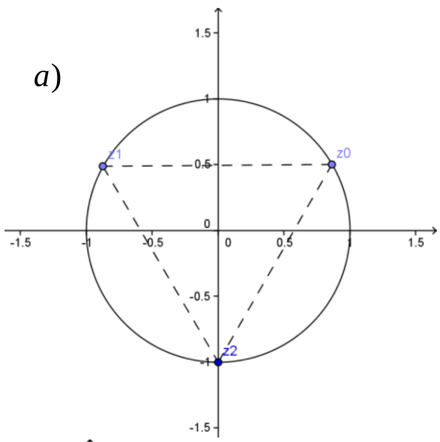
a) $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ e $-i$.

b) 1, i, -1 e $-i$.

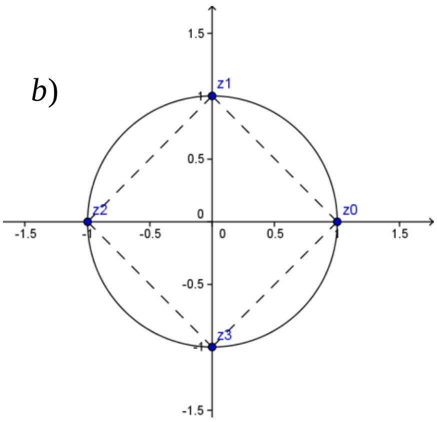
c) $\sqrt{3} + i$, $2i$, $-\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} - i$, $-2i$ e $\sqrt{3} - i$

d) $2i$, $-\sqrt{3} - i$ e $\sqrt{3} - i$

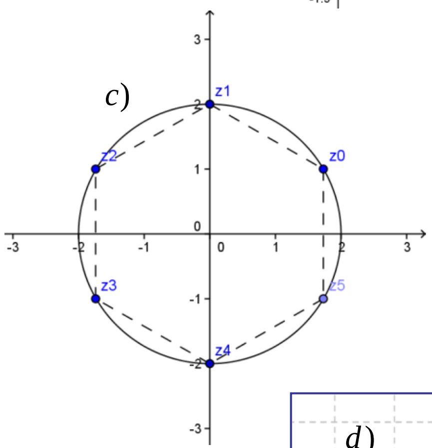
$a)$



$b)$



$c)$



2) $\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

3) a)

$d)$