

Binômio de Newton

Coeficientes binomiais:

Definição: Dados dois números naturais n e p , com $n \geq p$, definimos o *coeficiente binomial n sobre p* , e indicamos por $\binom{n}{p}$, dado por $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, onde $\binom{n}{p} = C_{n,p}$.

Chamamos n de numerador e p de denominador de $\binom{n}{p}$.

Exemplos:

Calcule os coeficientes binomiais:

$$\text{a) } \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

$$\text{b) } \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10! \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Casos particulares:

$$\text{a) Quando } p = 0, \text{ temos } \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplos:

$$\binom{4}{0} = 1 \text{ e } \binom{20}{0} = 1$$

$$\text{b) Quando } p = 1, \text{ temos } \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1 \cdot (n-1)!} = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplos:

$$\binom{5}{1} = 5 \text{ e } \binom{9}{1} = 9$$

$$\text{c) Quando } n = p, \text{ temos } \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplos:

$$\binom{5}{5} = 1 \text{ e } \binom{14}{14} = 1$$

Usamos os coeficientes binomiais no estudo do desenvolvimento do binômio de Newton.

Binomiais Complementares:

Definição: Dois coeficientes binomiais de mesmo numerador são complementares quando a soma de seus denominadores é igual ao numerador, isto é:

$$\binom{n}{p} \text{ e } \binom{n}{q} \text{ são complementares se } p + q = n$$

Exemplos:

a) $\binom{8}{2}$ e $\binom{8}{6}$ b) $\binom{9}{5}$ e $\binom{9}{4}$ c) $\binom{11}{4}$ e $\binom{11}{7}$

Propriedade: Dois coeficientes binomiais complementares são iguais se:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Leftrightarrow \begin{cases} p = q \\ p + q = n \end{cases}$$

Sendo n, p e q números naturais tais que $n \geq p$ e $n \geq q$.

Exemplo:

Calcule x em $\binom{6}{x} = \binom{6}{2}$

Temos duas possibilidades $\begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x + 2 = 6 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$

Triângulo de Pascal

Os coeficientes binomiais podem ser dispostos em uma tabela chamada triângulo de Pascal ou Tartaglia. Nela coeficientes de um mesmo numerador agrupam-se em uma mesma linha e os de mesmo denominador agrupam-se em uma mesma coluna.

Linha 0	$\binom{0}{0}$						
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
Linha 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
Linha 5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
...	
Linha k	$\binom{k}{0}$	$\binom{k}{1}$	$\binom{k}{2}$	$\binom{k}{3}$	$\binom{k}{4}$	$\binom{k}{5}$... $\binom{k}{k}$

Calculando os valores dos coeficientes, obtém-se:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	

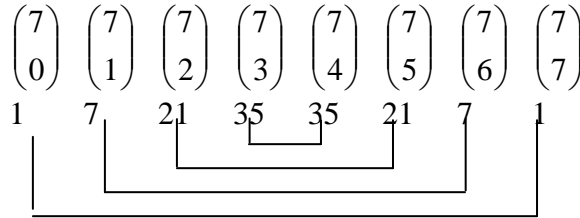
Propriedades:

1ª) Toda linha começa e termina por 1.

De fato: $\binom{k}{0} = 1, \binom{k}{k} = 1, \forall k \in \mathbb{N}$

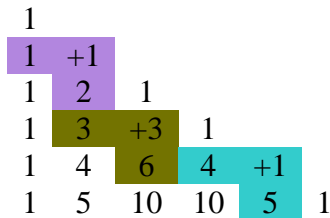
2ª) Em uma mesma linha coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais.

Exemplo:



Justificativa: Esses coeficientes binomiais são complementares.

3ª) A partir da linha 2, cada elemento x (com exceção do primeiro e do último) é igual a soma de dois elementos da linha anterior, a saber: o elemento imediatamente acima de x e o anterior dele.



Esta propriedade é conhecida como relação de Stifel e pode ser generalizada por:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}, \quad n \geq p$$

O 1º membro da igualdade representa um elemento genérico (linha n e coluna p) do triângulo; o segundo membro representa a soma de dois elementos da linha anterior (linha $n-1$), um da mesma coluna (p) e o outro da coluna anterior ($p-1$).

Exemplos:

1) Calcule o valor de $\binom{9}{7} + \binom{9}{8}$

Pela relação de Stifel $\binom{9}{7} + \binom{9}{8} = \binom{10}{8}$

$$E \binom{10}{8} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2 \cdot 1} = 45$$

2) Suponhamos que $\binom{n}{p} = x$ e $\binom{n+1}{p+1} = y$. Descubra o valor de $\binom{n}{p+1}$.

Pela relação de Stifel $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

$$x + \binom{n}{p+1} = y \Rightarrow \binom{n}{p+1} = y - x.$$

4ª) A soma dos elementos da linha de numerador k é igual a 2^k .

Linha 0	1								2^0
Linha 1	1	1							2^1
Linha 2	1	2	1						2^2
Linha 3	1	3	3	1					2^3
...	
Linha k	$\binom{k}{0}$	$\binom{k}{1}$	$\binom{k}{2}$	$\binom{k}{3}$	$\binom{k}{4}$	$\binom{k}{5}$...	$\binom{k}{k}$	2^k

Somatório:

È um símbolo indicado pela letra grega Σ (sigma), que representa a soma de certo número de parcelas com alguma característica comum.

Exemplos:

Calcule:

a) $\sum_{i=1}^5 i^2$ (lê-se: somatório de i^2 , para i variando de 1 até 5.).

$$\underbrace{1^2}_{i=1} + \underbrace{2^2}_{i=2} + \underbrace{3^2}_{i=3} + \underbrace{4^2}_{i=4} + \underbrace{5^2}_{i=5} = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

b) $\sum_{i=0}^3 \frac{1}{i+1}$

$$= \frac{1}{0+1} + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12+6+4+3}{12} = \frac{25}{12}$$

c) $\sum_{k=0}^2 \binom{5}{k}$

$$= \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 1 + 5 + 10 = 16$$