

Taller 3

Jorge Alberto Caraveo Balderas

Manuela Jaramillo López

Julián Andrés Mira Gómez

Catalina Otálvaro Ramírez

Manuela Valencia Morales

Nelfy Gertrudis Gónzales Álvarez

Docente

Diseño de Experimentos

Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín

2017

Solución del taller

4. Una empresa contable, previamente a la introducción en la firma de un entrenamiento generalizado en muestreo estadístico para auditoria, probó tres métodos de entrenamiento: (1) Estudio en casa con material de entrenamiento programado, (2) sesiones de entrenamiento en oficinas locales conducidos por la administración local, y (3) Sesión de entrenamiento en Chicago conducido por la administración nacional. Los 30 auditores a entrenar fueron agrupados en 10 bloques cada uno de tres auditores, de acuerdo al tiempo transcurrido desde el grado universitario (el bloque 1 consiste de auditores graduados más recientemente, y el bloque 10 consiste de aquellos auditores graduados más distantemente). Al final del entrenamiento, cada auditor fue evaluado en el análisis de un caso complejo que involucraba aplicaciones estadísticas; una medida del nivel de competencia basada en este análisis fue obtenida por cada auditor. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

bloque	Método		
	1	2	3
1	73	81	92
2	76	78	89
3	75	76	87
4	74	77	90
5	76	71	88
6	73	75	86
7	68	72	88
8	64	74	82
9	65	73	81
10	62	69	78

Figura 1: Muestra de observaciones de cada bloque de auditores con cada método.

Proceso que se estudia

Se estudia un proceso de entrenamiento generalizado en muestreo estadístico para auditoria, donde se buscan analizar el efecto de tres diferentes métodos de entrenamiento sobre los auditores, los cuales resolvieron un caso complejo para así conocer su nivel de competencia contra cada método aplicado.

Variable respuesta estudiada y unidad de medida

La variable respuesta es el nivel de competencia obtenido al final del entrenamiento, es decir, la calificación obtenida por los auditores en cada método. La unidad de medida es la calificación por método, aunque no especifica los rangos de este, por los tipos de datos se puede asumir que el rango de calificación es de 0-100.

Estructura de tratamientos(factores de diseño controlables, tipos de efectos y niveles)

La estructura de tratamientos del problema es un modelo de un solo factor fijo (Método de entrenamiento), donde no se asume relacion con otros tratamientos. Los niveles son $a=3$.

Estructura de diseño

El diseño planteado pertenece a un DBCA ya que se considera que los auditores dependiendo del tiempo en el que se han graduado pueden afectar significativamente su nivel de competencia durante el entrenamiento, por lo tanto se consideran heterogéneos y se debe formar $b=10$ bloques con respecto a ellos para así controlar en el experimento a los auditores que realizaran el entrenamiento.

El factor de tratamiento y el factor de bloqueo no interactúan entre sí.

Preguntas de la investigacion que se pretendieron resolver

A lo que se pretende llegar con el análisis, es conocer si existen diferencias entre los tres métodos de entrenamiento aplicados sobre los auditores, cómo se diferencian y, por último, se desea saber cuál es el mejor método de entrenamiento que maximice el nivel de competencia de los auditores. Además se desea conocer si el tiempo de graduación de los auditores afecta significativamente su nivel de competencia.

a. ¿Por qué piensa que el factor de bloque “tiempo transcurrido desde el grado universitario” fue empleado?

Por que los conocimientos de una persona recién graduada suelen estar mas “frescos” que el de una persona graduada con mayor tiempo. Por lo tanto, esto puede afectar a la hora de obtener y analizar los resultados del experimento empleado; también, otro aspecto el cual puede influir en los auditores es la experiencia con la cuentan del tiempo siendo auditores.

b. Escriba el modelo apropiado, explique sus términos y supuestos

Modelo estandar de un DBCA:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, 3. j = 1, \dots, 10.$$

$$\text{Con } \varepsilon_{ij} \sim^{iid} N(0, \sigma^2) \text{ y } \sum_{i=1}^3 \alpha_i = \sum_{j=1}^{10} \beta_j = 0.$$

Y_{ij} = Variable dependiente que responde a la respuesta del nivel de competencia de los auditores debido al método de entrenamiento i de los auditores provenientes del bloque j , la calificación es medida en la escala de 0-100.

μ = Nivel de competencia medio global en la escala 0-100.

α_i = Efecto fijo del metodo de entrenamiento i que produce sobre el promedio global del nivel de competencia.

β_j = Efecto fijo del bloque de auditores j sobre el promedio global del nivel de competencia.

ε_{ij} = Error aleatorio en el i -ésimo método y el j -ésimo bloque.

El factor de tratamiento y el factor de bloqueo no interactúan entre sí.

c. Analice los gráficos sobre los boxplots según método y según bloques de auditores. Establezca conclusiones preliminares respecto a los métodos de entrenamiento y los auditores.

En los primeros boxplots de la Figura 2, los métodos de entrenamiento uno y tres se puede observar que la distribución de datos no es simétrica, las medianas de estos datos indican que están sesgados en lo negativo en ambos casos, mientras que en el método dos la mediana es simétrica y tiende a ser normal. Aunque el método tres tiene la media más alta, el método uno parece ser el peor, además las medias de todos los métodos poseen diferente nivel y varían entonces preliminarmente podría decirse que el método de entrenamiento afecta el nivel de competencia obtenida por algún auditor, además se puede afirmar que con el tercer método de entrenamiento el resultado del nivel de competencia en promedio es mucho mejor.

En los boxplots del bloque se logra observar que la media varía según tiempo de graduación de los auditores, por lo que podemos asumir preliminarmente a base de estos datos que el bloqueo en los auditores es efectivo para reducir el error experimental.

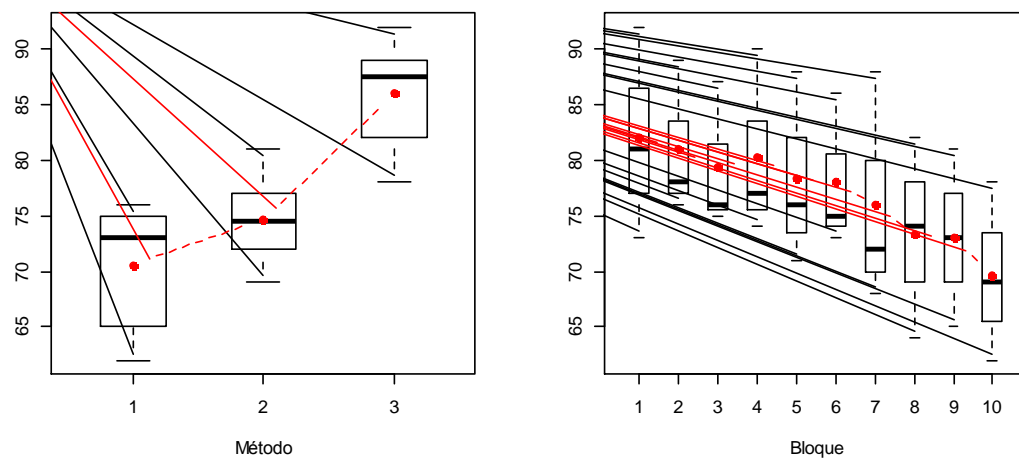


Figura 2: Boxplots según el método de entrenamiento y bloques de auditores.

En la figura 3, se observa la comparación de los métodos vs los bloques, donde se fortalece el análisis anterior. Se observa la diferencia notable entre métodos estudiados donde el método tres ($\bar{Y}_{3.}$) aumenta el nivel de competencia de los

auditores. En los bloques se puede observar que sus niveles están muy agrupados, por lo que se podría inferir que realmente se necesita un numero mucho menor de números de bloques.

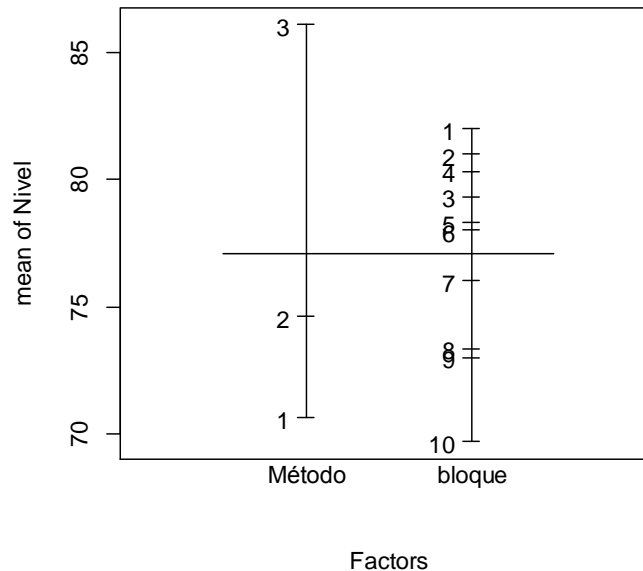


Figura 3: Comparación de medias según el método y numero de bloques con la media global.

- d. **Construya la tabla ANOVA para este experimento. Pruebe la significancia de los efectos de los métodos de entrenamiento indicando claramente la hipótesis nula y alternativa, el estadístico de prueba y el criterio de rechazo.**

Para la construcción de la tabla ANOVA, se usó la función `aov()` en R 3.4.1, los resultados se muestran a continuación:

```
> anova(diseño)
Analysis of Variance Table

Response: Nivel
      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
Método  2 1295.00   647.50 103.7537 1.315e-10 ***
bloque  9  433.37    48.15   7.7157 0.0001316 ***
Residuals 18  112.33     6.24
---
```

Figura 4: Resultado del ANOVA para el modelo de un factor de efectos fijos y diseño DBCA.

Se plantea pues una prueba de hipótesis para el modelo descrito anteriormente, esta se hace para conocer si los efectos del factor método de entrenamiento difieren entre sí.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3. \text{ O } H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

vs

$$H_1: \text{Al menos un par } \mu_i \neq \mu_l \text{ con } i \neq l, \text{ para } i, l = 1, 2, 3.$$

$$H_1: \text{Algún } \alpha_i \neq 0 \text{ con } i = 1, 2, 3.$$

Estadístico de prueba

$$F_0 = \frac{MSA}{MSE} \sim^{H_0} f_{a-1, (a-1)(b-1)} = f_{2,18}$$

$$F_0 = 103.75$$

Criterio de Rechazo

$$\text{Valor } P = P(f_{2,18} > 103.75) = 1.31 * 10^{-10}$$

Se concluye que con una significancia de 5%, se encuentra evidencia para rechazar la hipótesis nula, y el nivel de competencia medio obtenido por los auditores difiere en al menos dos de los tres metodos de entrenamiento μ_i , lo cual afirma el análisis gráfico hecho anteriormente.

e. Evalúe la eficiencia del bloqueo aplicado usando la pseudo prueba F (prueba de que existen efectos de bloque) y calculando la eficiencia relativa del diseño (fórmula de la EER). Concluya.

Para probar si el bloqueo del nivel de competencia ha sido efectivo, se realiza una prueba con un estadístico F* con el factor bloque como sigue:

Prueba de hipótesis

$$H_0: \beta_1 = \dots = \beta_{10} = 0$$

vs

$$H_1: \text{Algún } \beta_j \neq 0 \text{ con } j = 1, 2, 3, \dots, 10.$$

Estadístico de prueba

$$F_0^* = \frac{MSB}{MSE} \sim^{H_0} f_{b-1, (a-1)(b-1)} = f_{9,18}$$

$$F_0^* = 7.7157$$

Criterio de Rechazo

$$\text{Valor } P = P(f_{9,18} > 7.7157) = 0.0001316$$

Se concluye que con una significancia de 5%, que hay evidencia para rechazar la hipótesis nula, y los niveles de competencia medio de los auditores son diferentes en cada bloque de auditores j , lo cual indica que el bloqueo por auditores dependiendo de su tiempo de graduación es útil o eficiente para reducir el error experimental y por tanto, un ahorro en cuanto al número de réplicas necesarias para detección de diferencias entre los métodos de entrenamiento.

Fórmula de EER: Eficiencia relativa del diseño es:

$$ER = \frac{(b-1)MSB + b(a-1)s_1^2}{(ab-1)s_1^2} = \frac{(433.35) + 124.8}{(180.96)} = 3.084$$

$$EER = \frac{(f_1+1)(f_2+3)}{(f_2+1)(f_1+3)} * ER * 100\% = \frac{(19)(30)}{(28)(21)} * (308,4) = 299\%$$

Lo cual indica que, 299 réplicas de un DCA (308 usando solo la ER) serán necesarias para obtener tanta información como 100 bloques de un DBCA. Por tanto, fue altamente eficiente el diseño de bloqueo aplicado.

- f. Escriba la expresión general para el cálculo de las respuestas predicha y de los residuales. Realice análisis gráfico de residuales estandarizados y establezca si los supuestos del modelo sobre los errores se cumplen.**

La fórmula de los residuales es:

$$\hat{Y}_{ij} = \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..} \text{ luego,}$$

$$\hat{\epsilon}_{ij} = Y_{ij} - \hat{Y}_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..}$$

A continuación, se muestran los gráficos de los residuales estandarizados versus los valores ajustados del factor de tratamiento, el factor de bloqueo y todo el modelo para la validación de los supuestos de varianza constante debida al error y normalidad de los datos.

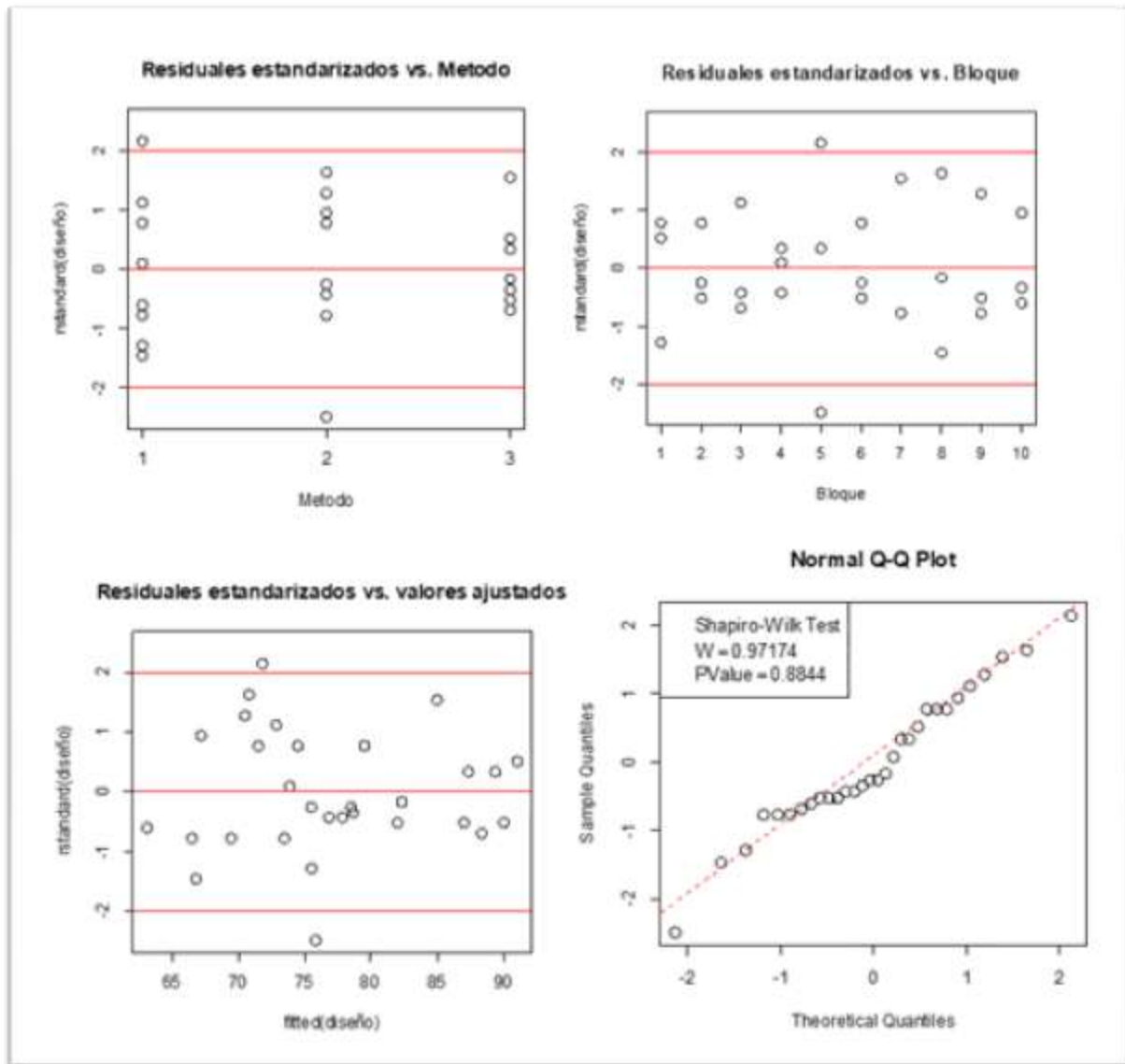


Figura 5:Residuales estandarizados vs Valores ajustados y Normalidad del modelo.

Varianza constante, prueba de hipótesis

$$H_0: E(\varepsilon_{ij}) = 0 \quad \forall i, H_1: E(\varepsilon_{ij}) \neq 0 \text{ para algún } i$$

$$H_0: E(\varepsilon_{ij}) = 0 \quad \forall j, H_1: E(\varepsilon_{ij}) \neq 0 \text{ para algún } j$$

$$H_0: \text{var}(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2 \quad \forall ij, H_1: \text{var}(\varepsilon_{ij}) \neq \sigma^2 \text{ para algún } i, j$$

Del análisis gráfico de la *figura 5a*, los residuales estandarizados vs método, se pueden observar dos datos atípicos, pero se puede percibir que en método uno tiene una dispersión mucho más grande con respecto a los otros dos métodos, de esto se

puede concluir que el supuesto de varianza es preocupante para el error experimental debida al método. Ahora, el análisis gráfico de la *figura 5b*, los residuales estandarizados vs bloque, se pueden observar dos datos atípicos en el bloque cinco y a excepción de esto, la varianza es desigual alrededor de los bloques, por lo que se concluye que hay problemas de varianza constante además se observa un patrón típico de carencia de ajuste. Por último, del análisis gráfico de la *figura 5c*, los residuales estandarizados vs valores ajustados, se pueden observar así mismo dos datos atípicos, además se observan graves problemas con la varianza constante,.

Normalidad, prueba de hipótesis

$$H_0: \varepsilon_{ij} \sim \text{Normales}, \quad H_0: \varepsilon_{ij} \text{ no se distribuyen Normales}$$

Estadísticamente, el test ShapiroWilk con estadístico de prueba de $W=0,97174$ y con criterio de rechazo de $VP= 0,8844$ grande entonces se aceptaría H_0 e indica que los datos se distribuyen normal. Gráficamente, en la *figura 5d* se pueden observar desviaciones en el centro, por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula, concluyendo que las muestras no distribuyen normales.

- g. Haga todas las comparaciones de pares de medias de los métodos de entrenamiento usando la prueba de Tukey. Establezca los grupos de medias y recomiende con base en estos resultados el método de entrenamiento más apropiado.**

Pruebas de hipótesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2. \text{ vs } H_0: \mu_1 \neq \mu_2.$$

$$H_0: \mu_1 = \mu_3. \text{ vs } H_0: \mu_1 \neq \mu_3.$$

$$H_0: \mu_3 = \mu_2. \text{ vs } H_0: \mu_3 \neq \mu_2.$$

Estadístico de prueba: $D = |\bar{Y}_i - \bar{Y}_j| > T_\gamma$

Criterio de rechazo: $P(T_\gamma > D)$ sea pequeño

Antes de analizar los resultados hay que tener en cuenta los problemas con la varianza y la normalidad ya que estos resultados podrían no ser correctos, por lo tanto hay que tener mucho cuidado con el análisis de estos. Al comparar las medias de los tratamientos y con base a la *figura 6 y 7* se observa que tres medias son diferentes estadísticamente, debido a que ningún intervalo de confianza contiene el cero. Los grupos de medias quedarían definidos así:

$$\text{Grupo 1: } \mu_1. \text{ Grupo 2: } \mu_2. \text{ Grupo 3: } \mu_3.$$

En base al test de Tukey con una confianza del 95%, los grupos de medias de tratamientos en cada método de entrenamiento es diferente, el método de

entrenamiento que se recomienda es el tres, ya que de la diferencia entre medias, la tres es mayor comparado a las demás, en la *figura 6* se aprecia que al comparar la media dos con la uno, la diferencia es pequeña, pero al comparar la medias tres con la dos y tres con la uno, la diferencia de medias es grande en ambos casos, lo cual refleja el análisis gráfico hecho en el punto c, por tanto, el método tres aumenta el nivel de competencia de los auditores.

```
> TukeyHSD(diseño, "Método", conf.level=0.95)
Tukey multiple comparisons of means
95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = Nivel ~ Método + bloque)

$`Método`
      diff      lwr      upr      p adj
2-1   4.0  1.148709  6.851291 0.0057634
3-1  15.5 12.648709 18.351291 0.0000000
3-2  11.5  8.648709 14.351291 0.0000000
```

Figura 6: Resultados del test Tukey, comparación por pares del factor método.

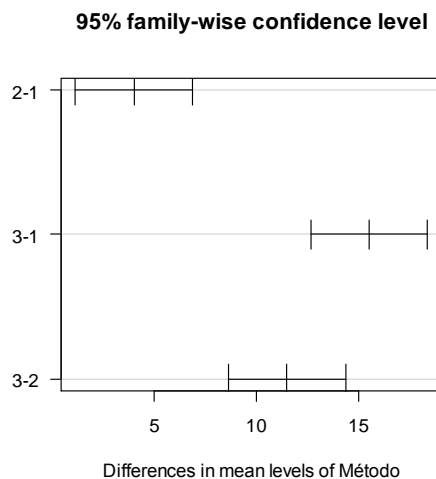


Figura 7: Intervalos de confianza del 95% de Tukey para las medias de los tratamientos.

- h. Estime los efectos del factor de tratamientos mediante contrastes de medias, construya los intervalos de confianza del 95% para cada uno, y con base en estos pruebe la significancia de cada efecto. De conclusiones y recomendaciones de acuerdo al objetivo de este estudio.

```

> lsmeans(diseño,"Método")
Método lsmean      SE df lower.CL upper.CL
1      70.6 0.7899836 18 68.94031 72.25969
2      74.6 0.7899836 18 72.94031 76.25969
3      86.1 0.7899836 18 84.44031 87.75969

Results are averaged over the levels of: bloque
Confidence level used: 0.95
> rbind(efecto.metodo1,efecto.metodo2,efecto.metodo3)
              Estimate Std. Error   t value    Pr(>|t|)  lower CI
Método:efecto metodo 1    -6.5   0.6450189 -10.077224 7.932789e-09 -7.855134
Método:efecto metodo 2    -2.5   0.6450189  -3.875855 1.107428e-03 -3.855134
Método:efecto metodo 3     9.0   0.6450189  13.953079 4.297811e-11  7.644866
              upper CI
Método:efecto metodo 1 -5.144866
Método:efecto metodo 2 -1.144866
Método:efecto metodo 3 10.355134

```

Figura 8: Estimación de medias y efectos de tratamientos.

De la figura anterior se tienen los siguientes resultados:

$$\hat{\mu}_1 = 70.6, \quad \hat{\mu}_2 = 74.6, \quad \hat{\mu}_3 = 86.1$$

Se puede observar que el nivel de competencia medio de los auditores con el método de entrenamiento 3 es mayor con respecto a los demás. Ahora los efectos son:

$$\hat{\alpha}_i = \hat{\mu}_i - \bar{\mu}$$

$$\hat{\alpha}_1 = -6.5, \quad \hat{\alpha}_2 = -2.5, \quad \hat{\alpha}_3 = 9$$

Se puede observar que el efecto fijo del método de entrenamiento uno y dos disminuyen el promedio global del nivel de competencia, en cambio el metodo tres aumenta el promedio global del nivel de competencia, ademas se observa que su intervalo de confianza es positivo en sus dos extremos, por lo tanto esto refleja y confirma los análisis previos hechos en los anteriores puntos.

Se concluye que, el método de la sesión de entrenamiento en Chicago conducido por la administración nacionales el mejor método de entrenamiento para aumentar el nivel de competencia de los auditores observados, por otra parte, el bloqueo sobre el tiempo de graduación de los auditores resulto significativamente eficiente para reducir el error experimental, Esto hablando estadísticamente, como recomendación, hay que tomar en cuenta el costo que genere cada método de entrenamiento, porque, aunque el tercer método sea el mejor, no quiere decir que sea el más óptimo para la empresa económicamente. Y por ultimo se concluye que estos datos presentan problemas de carencia de ajuste, poseen varianza no contante y no se distribuyen normal, así que se debe ver con mucha precaucion las conclusiones presentadas aquí.

8. Se efectúa un experimento para determinar si A: la posición de la caldera (A1 o A2) y B: la temperatura de encendido (la cual sólo puede graduarse en 800, 825 y 850 °C) tienen efecto sobre Y: la densidad de un ánodo de carbón. Los datos son los siguientes.

A: Posición	B: Temperatura (°C)		
	800	825	850
A1	570	1063	565
	565	1080	510
	583	1043	590
A2	528	988	526
	547	1026	538
	521	1004	532

Tabla1. Descripción de los datos.

Especificaciones:

- Se estudia un proceso de producción en el que se busca analizar el efecto que tiene la variación de la temperatura y de la posición de una caldera sobre la densidad de un ánodo de carbón. Este estudio se realizó teniendo en cuenta tres temperaturas las cuales eran las únicas posibles de graduar, y las únicas dos posiciones de la caldera; para lo cual se midió la densidad de un ánodo de carbón. Los datos se presentaron en la *tabla1*.
- La variable de respuesta estudiada en el proceso ya descrito es la densidad de un ánodo de carbón, la unidad de medición es $\frac{masa}{Volumen}$.
- El modelo estadístico planteado para este problema es un modelo factorial de dos factores con efectos fijos con interacción. Los niveles para cada factor son: Temperatura a=3, posición b=2.
- El modelo planteado obedece a un DCA, ya que se consideran que cada unidad de experimental es homogénea con respecto a las demás, así que no se consideran factores de ruido o de bloqueo. Así, cada unidad de experimental es asignada aleatoriamente a cada tratamiento.
- El estudio tiene como finalidad conocer como es o que tanto influyen la temperatura y la posición en el proceso a la densidad del ánodo de carbón.
- Planeación del trabajo experimental aplicado: Un fabricante está teniendo problemas con sus niveles obtenidos de densidad en un ánodo de carbón o simplemente desea controlar esta parte del proceso. Desea encontrar si en su proceso productivo son influyentes los cambios de temperatura y de posición, en el nivel de productividad que obtiene. Esto es importante debido a que en caso de que alguna de las dos variables influya, o que ambas variables influyan, el fabricante deberá tomar medidas al respecto para mejorar, o por lo menos mantener estables sus niveles productivos. El estudio se definió con las temperaturas que eran posible de graduar y aparentemente con las únicas dos posiciones posibles para la caldera. De manera que se midieron todas las combinaciones posibles entre los factores.

a) Escriba el modelo ANOVA correspondiente a este experimento, explique claramente cada término, diga los supuestos y restricciones ¿Puede considerarse el término de interacción en este problema? Argumente.

El modelo estadístico para un DCA de efectos fijos que interactúan está representado de la siguiente forma:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$j = 1, 2$$

$$k = 1, 2, 3$$

$$a = 3, b = 2, n = 3$$

Supuestos : $\varepsilon_{ijk} \sim iid N(0, \sigma^2)$ para todo i, j, k .

Restricciones del modelo $\sum_{i=1}^a \alpha_i = \sum_{j=1}^b \beta_j = \sum_{i=1}^a (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^b (\alpha\beta)_{ij} = 0$

Y_{ijk} Variable dependiente que representa la respuesta de la densidad promedio de un ánodo de carbón bajo la influencia de la temperatura en el i -ésimo nivel y de la posición en el j -ésimo nivel, en la k -ésima replica.

- μ Es el promedio global de la densidad.
- α_i Representa el efecto fijo que en promedio tiene la temperatura en el nivel i sobre $E(Y)$.
- β_j Representa el efecto fijo que en promedio tiene la posición en el nivel j sobre $E(Y)$.
- $(\alpha\beta)_{ij}$ Representa el efecto de interacción de la temperatura en el i -ésimo nivel de temperatura con el j -ésimo nivel de la posición.
- ε_{ijk} Es el error aleatorio.

Se plantea un modelo con interacciones ya que se considera cada nivel i para la temperatura en cada nivel j de la posición; otra forma de verlo es que se mide cada temperatura aplicada para ambas posiciones.

b) Realice el gráfico de perfiles de medias de tratamientos. En cada caso determine si se evidencia interacción entre los factores y explique cómo opera dicha interacción en términos del problema. También establezca cuál es el efecto de cada factor sobre la densidad de los ánodos de carbón cuando se varían sus niveles.

i) En eje X niveles de posición de la caldera.

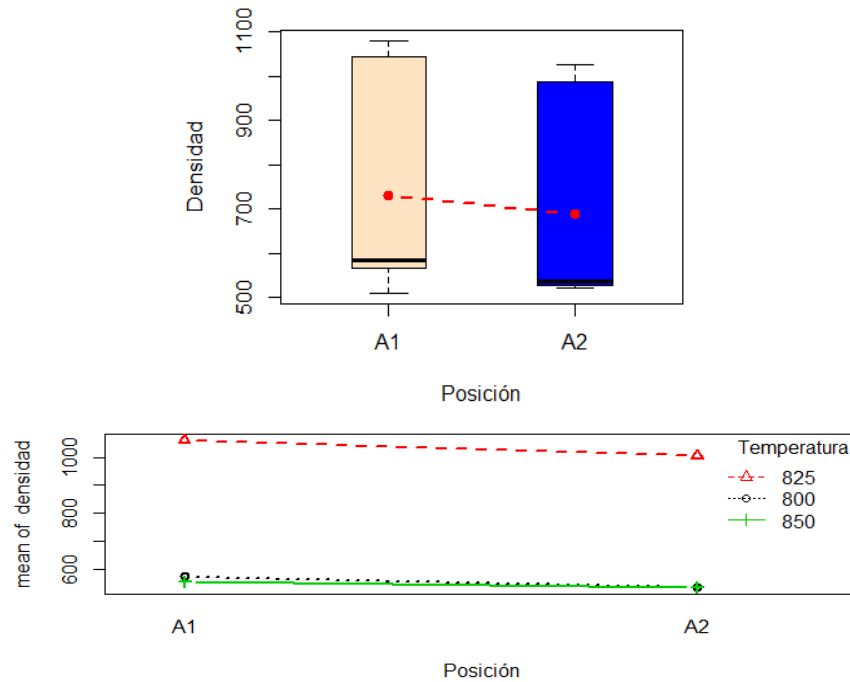
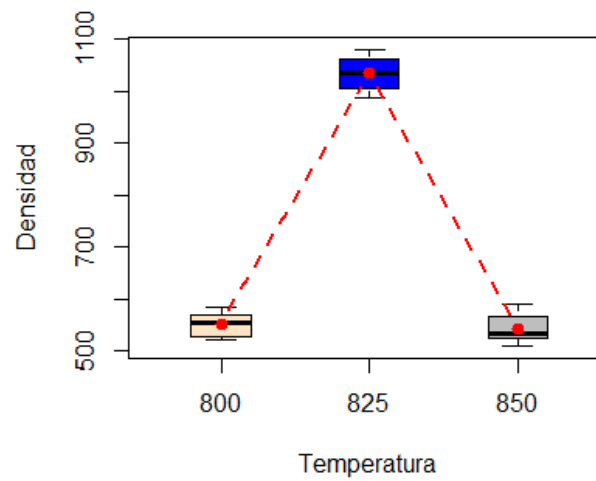


Gráfico1. Perfiles de medias y boxplot para posición de la caldera.

En este gráfico parece haber una leve interacción, ya que la diferencia entre las respuestas medias para los niveles del factor A (temperatura) no es la misma para todos los niveles de B (posición).

i) Eneje X niveles de temperatura de encendido



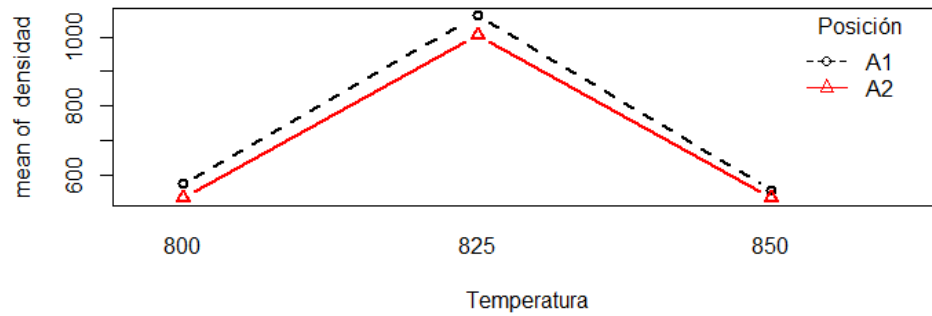


Gráfico2. Perfiles de medias y boxplot para temperatura.

Según los perfiles de medias parece haber una interacción muy leve entre la temperatura y la posición de la caldera; ya que los gráficos en cada caso mantienen una distancia muy similar a través del cambio de valores. Como es tan mínima la diferencia se puede pensar que no hay efectos significativos debido a la interacción de los dos factores. Luego entonces, las observaciones de densidad varían tanto con el cambio de posición como con la temperatura, pero independientemente una de la otra.

c) Calcule la ANOVA y realice los siguientes test:

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	Valor estadístico F	Valor-p
Temperatura	2	945342	472671	1056.117	3.25×10^{-14}
Posición	1	7160	7160	15.998	0.00176
Temp*Posic	2	818	409	0.914	0.42711
Residuales	12	5371	448		

Tabla2. ANOVA para el modelo con interacción.

i) Significancia de la interacción

Juego de hipótesis para probar significancia de la interacción:

$$H_0: (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = \dots = (\alpha\beta)_{23} = 0 \text{ vs } H_1: \text{Algún } (\alpha\beta)_{ij} \neq 0, \text{ con } i \neq j$$

$$\text{Estadístico de prueba: } F_3 = \frac{MS(AB)}{MSE} \stackrel{H_0}{\sim} f_{(a-1)(b-1), ab(n-1)} = f_{2,12}$$

$$\text{Región de rechazo, con un nivel de significancia } \gamma: F_3 > f_{\gamma, (a-1)(b-1), ab(n-1)} = f_{\gamma, 2, 12}$$

$$\text{Expresión para el valor } - p: P(f_{2,12} > F_3)$$

El *valor - p* para esta prueba arrojado por la *tabla2* anteriormente presentada es 0.42711, según esto no se debe rechazar la hipótesis nula por ser este valor mucho mayor al valor de significancia $\gamma = 0.05$, entonces se concluye que la interacción no aporta significativamente a la variabilidad total de la densidad. Luego, los efectos de la temperatura sobre la respuesta media no dependen de la posición de la caldera.

ii) Significancia de la posición de la caldera

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \text{Vs} \quad H_1: \text{Al menos un } \alpha_i \neq 0$$

Estadístico de prueba: $F_1 = \frac{MSA}{MSE} \stackrel{H_0}{\sim} f_{a-1, ab(n-1)} = f_{1,12}$

Región de rechazo, con un nivel de significancia γ : $F_1 > f_{\gamma, 1, 12}$

Expresión para el *valor - p*: $P(f_{1,12} > F_1)$

En vista de que se concluyó que no hay interacción, no tiene sentido hacer pruebas de significancia para los efectos principales bajo un modelo que se planteó teniendo en cuenta la interacción.

iii) Significancia de la temperatura de encendido

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \beta_i \neq 0$$

Estadístico de prueba: $F_2 = \frac{MSB}{MSE} \stackrel{H_0}{\sim} f_{b-1, ab(n-1)} = f_{2,12}$

Región de rechazo, con un nivel de significancia: $F_2 > f_{\gamma, 2, 12} = f_{\gamma, 2, 12}$

Expresión para el *valor - p*: $P(f_{2,12} > F_2)$

De nuevo, en este caso no tiene sentido hacer pruebas de significancia para los efectos principales bajo un modelo que se planteó teniendo en cuenta la interacción. Para realizar estas pruebas se debe replantear el modelo, sin tener en cuenta la interacción.

d) Si la interacción no es significativa, replantee el modelo ahora sin interacción y recalcule el ANOVA. Además, realice las comparaciones de Tukey para las medias de cada factor y con estos resultados más el análisis de los gráficos de perfiles de medias establezca el mejor tratamiento combinación de posición y temperatura) que produzca la densidad promedio más alta.

Modelo factorial de dos factores de efectos fijos sin interacción en un DCA.

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, 2, 3 \quad ; \quad j = 1, 2 \quad ; \quad k = 1, 2, 3$$

$$a = 3, b = 2, n = 3$$

Supuestos $\varepsilon_{ijk} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

Restricciones $\sum_{i=1}^a \alpha_i = \sum_{j=1}^b \beta_j = 0$

- Y_{ijk} Variable aleatoria que representa la respuesta de la densidad promedio de un ánodo de carbón bajo la influencia de la temperatura en el i -ésimo nivel y de la posición en el j -ésimo nivel, en la k -ésima replica.

- μ Es la respuesta promedio global del modelo.
- α_i Representa el efecto que en promedio tiene la posición de la caldera en el nivel i sobre $E(Y)$.
- β_j Representa el efecto que en promedio tiene la temperatura en el nivel j sobre $E(Y)$.
- ε_{ijk} Es el error aleatorio.

A continuación, se presenta la tabla ANOVA:

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	Valor estadístico F	Valor-p
Temperatura	2	945342	472671	1069.3	4.92×10^{-16}
Posición	1	7160	7160	16.2	0.00152
Error	14	6189	442		

Tabla3. ANOVA para el modelo sin interacción.

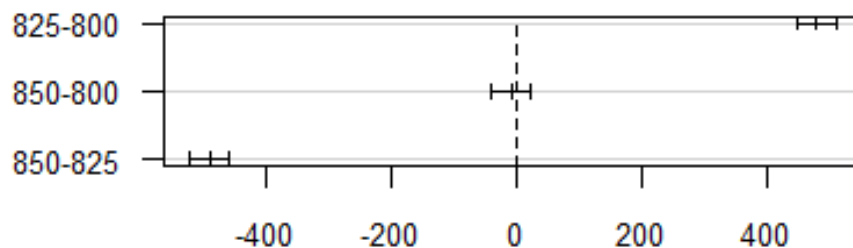
Se realizarán las comparaciones de Tukey para las medias de cada factor. Comparaciones para el factor temperatura, interesa probar la siguiente prueba de hipótesis:

$$H_0: \mu_i = \mu_j \text{ Vs } H_0: \mu_i \neq \mu_j \text{ Donde } i \neq j$$

	Diferencia	Límite inferior	Límite superior
$\mu_{2.} - \mu_{1.} = 825 - 800$	481.6666	449.8958	513.4374
$\mu_{3.} - \mu_{1.} = 850 - 800$	-8.8333	-40.6041	22.9374
$\mu_{3.} - \mu_{2.} = 850 - 825$	-490.5	-522.2707	-458.7292

Tabla4. Diferencias de medias para el factor temperatura.

95% family-wise confidence level



Differences in mean levels of Temperatura

Gráfico3. Intervalos de confianza para diferencias de medias de temperatura.

A partir de los intervalos de confianza al $(1 - \alpha)100\%$ obtenidos de los resultados de R 3.4.1(vertabla4-Gráfico3) a un nivel de $\alpha = 0.05$ para cada diferencia, determinamos si las medias son estadísticamente diferentes. Si los intervalos contienen al cero como valor posible para la diferencia concluimos que las medias no son diferentes. Luego, las medias $\mu_2 - \mu_1$ y $\mu_3 - \mu_2$ son diferentes entre sí.

Grupo 1 : μ_1 , μ_3 .

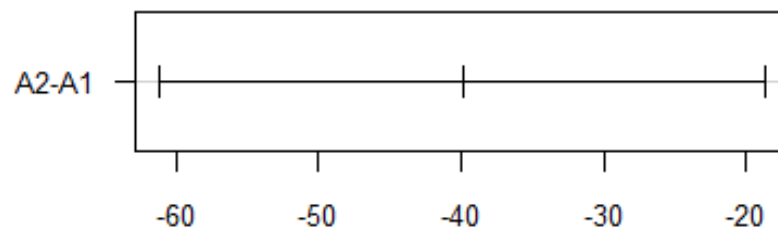
Grupo 2 : μ_2 .

Comparaciones para el factor posición, interesa probar la siguiente prueba de hipótesis: $H_0: \mu_i = \mu_j$ vs $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ Donde $i \neq j$

	Diferencia	Límite inferior	Límite superior
$\mu_2 - \mu_1 = A2 - A1$	-39.8888	-61.1465	-18.6311

Tabla5. Diferencias de medias para el factor posición.

95% family-wise confidence level



Differences in mean levels of Posición

Gráfico4. Intervalos de confianza para diferencias de medias de temperatura.

En vista de que el intervalo de confianza obtenido al 95% (vertabla5-Gráfico4) no contiene al cero como valor posible para la diferencia entonces se concluye que las medias $\mu_2 - \mu_1$ son estadísticamente diferentes.

Analizando los resultados de comparación de medias (tabla4-tabla5) en conjunto con las gráficas de perfiles de medias (Gráfico1-Gráfico2) se puede concluir que claramente la temperatura en el nivel $i = 2$, es decir, con una temperatura de 825°C, produce una mayor densidad promedio de un ánodo de carbón especialmente para la posición $j = 1$ de la caldera.

e) Realice la comparación de los tratamientos Temperatura 800- Posición A2 y Temperatura 850- Posición A1, y defina cuál condición de producción origina un incremento en la densidad del ánodo de carbón.

$$H_0: \mu_{12} = \mu_{31} \\ \text{vs}$$

$$H_0: \mu_{12} \neq \mu_{31}$$

Estadístico de prueba:

$$T_0 = \frac{\widehat{W}}{\sqrt{\widehat{var}(\widehat{W})}} \sim t_{abn-a-b+1} = t_{14}$$

Región de rechazo: si $|T_0| > t_{0.025,14}$ A un nivel de significancia de $\gamma = 0.05$

Donde $\widehat{W} = \hat{y}_{12.} - \hat{y}_{31.}$

$\widehat{var}(\widehat{W}) = var(\hat{y}_{12.}) + var(\hat{y}_{31.})$ Ya que tanto observaciones como medias por tratamiento son independientes.

Para realizar este análisis se puede recurrir a la siguiente información:

μ_{ij}	Estimación	Límite inferior	Límite superior
μ_{12}	532.3889	511.1312	553.6466
μ_{31}	563.4444	542.1867	584.7021

Tabla6. Estimación medias de interés.

Luego, reemplazando valores tenemos que: $\widehat{W} = 532.3889 - 563.4444 = -31.0555$

$$\widehat{var}(\widehat{W}) = var(\hat{y}_{12.}) + var(\hat{y}_{31.}) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} = \frac{2 * \sigma^2}{3} = \frac{2}{3} MSE$$

De la *tabla3* reemplazamos el valor del *MSE*, de donde $\widehat{var}(\widehat{W}) = \frac{2}{3}(442) = 294.6666$

$$\text{Entonces, } T_0 = \frac{-31.0555}{294.6666} = -0.1053$$

Bajo una $t_{0.025,14} = 1.7613$, el valor del estadístico no está por dentro de la región de rechazo ya que $|-0.1053| < 1.7613$. Luego, concluyo que las las medias μ_{12} y μ_{31} son estadísticamente iguales, con un nivel de significancia de $\gamma = 0.05$, en términos del problema genera a misma densidad tener una temperatura de 850°C en la posición A1 y tener una temperatura de 800°C en la posición A2.

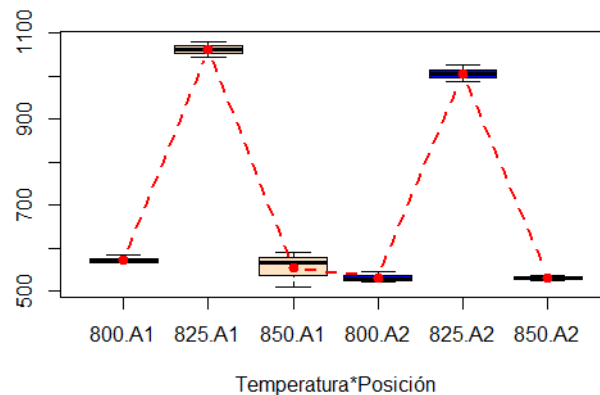


Grafico5. Boxplot de todos los tratamientos.

La decisión se puede soportar con el *Grafico5* ya que a simple vista se ve que las dos medias para los tratamientos son muy similares.

f) Dé una expresión general para el cálculo de los residuales del modelo que resulte mejor para este experimento (con o sin interacción), y con su forma estandarizada valide:

Los residuales están dados por la siguiente expresión $\hat{\varepsilon}_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{Y}_{i..} - \hat{Y}_{.j.} + \hat{Y}_{...}$

i) Normalidad

$$H_0: \varepsilon_{ijk} \sim \text{Normal}$$

$$H_0: \varepsilon_{ijk} \not\sim \text{Normal}$$

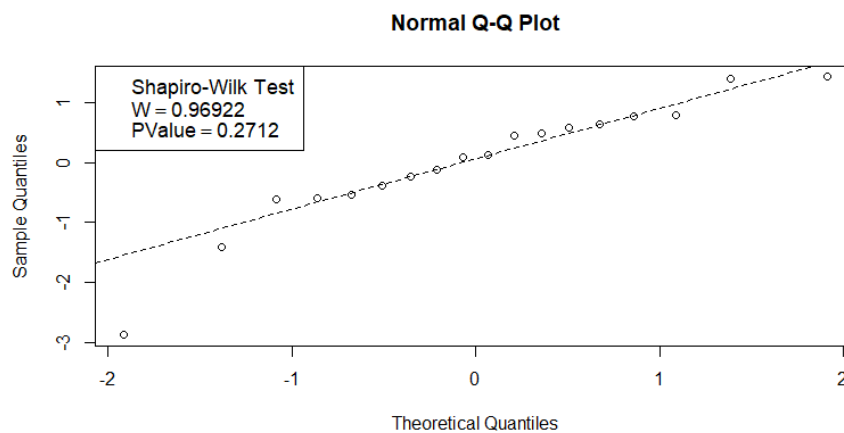


Grafico6. Cuantiles muestrales contra teóricos de los residuales.

A excepción de un dato inicial que está muy alejado de la línea ajustada, se puede ver que el resto de las observaciones se explican muy bien por una línea recta. Por lo cual, no se rechaza la hipótesis nula, decisión soportada por el *valor* – $p = 0.2712$ de la prueba analítica de Shapiro-Wilk, el cual es muy grande. Por lo que se concluye que los residuales si distribuyen normal.

ii) Varianza constante

$$H_0: \varepsilon_{ijk} \text{ tienen varianza constante}$$

$$H_0: \varepsilon_{ijk} \text{ no tienen varianza constante}$$

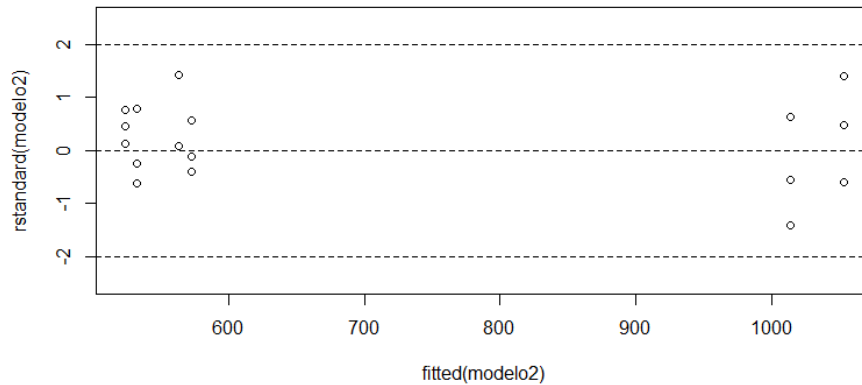


Grafico7. Residuales estandarizados.

Parecen haber problemas con el supuesto de varianza constante de los residuales, ya que no se percibe una distribución uniforme alrededor de cero para cada grupo de observaciones en la gráfica.

12.En un proceso productivo se está estudiando el efecto de la variación de las máquinas y de los cambios de condiciones de operación de día a día sobre la cantidad de producción obtenida. Se seleccionan aleatoriamente cuatro máquinas y cuatro días dentro del periodo de mayor producción en el año y se registra la productividad como respuesta para dos corridas diarias con cada máquina seleccionada. Los datos correspondientes aparecen a continuación:

Máquina	Día							
	D1		D2		D3		D4	
M1	142.3	144.0	134.9	146.3	148.6	156.5	152.0	151.4
M2	148.6	146.9	145.2	146.3	148.6	153.1	149.7	152.0
M3	142.9	147.4	125.9	127.6	135.5	138.9	142.9	142.3
M4	133.8	133.2	108.9	107.5	132.1	149.7	141.7	141.2

Tabla 1: Muestra de observaciones del proceso seleccionado aleatoriamente.

Especificaciones

1. Proceso que se estudia

Se estudia un proceso de producción en el que se busca analizar el efecto que tiene la variación tanto de la máquina que realiza el proceso de fabricación como de los cambios de condiciones de operación de cada día sobre la cantidad de producción obtenida. El estudio se realizó seleccionando aleatoriamente cuatro máquinas y cuatro días dentro del período de mayor producción del año, y se registró la productividad de cada máquina seleccionada como respuesta para dos corridas diarias. Los datos se presentan en la tabla 1:

2. Característica o variable de respuesta estudiada y unidad de medida

La variable de respuesta estudiada en el proceso descrito anteriormente es el nivel de productividad que tiene cada máquina en los días establecidos y en cada corrida, es decir, la cantidad de producción obtenida con una máquina y en un día específicos. La unidad de medida son las unidades producidas en un día laboral.

3. Estructura de tratamientos (factores de diseño controlables, tipos de efectos y niveles)

El modelo del problema es un modelo factorial de dos factores (máquina seleccionada y día) con efectos aleatorios con interacción. Los niveles son $a=4$ para la máquina y $b=4$ para el día en que se hizo la prueba.

4. Estructura de diseño

El modelo planteado obedece a un DCA, ya que se consideran que cada unidad de producción es homogénea con respecto a las demás, además se supone que las máquinas son las mismas (homogéneas), del mismo modelo y elaboran la misma actividad operativa, así que no se consideran factores de ruido o de bloqueo. Así, cada unidad de producción es asignada aleatoriamente a cada tratamiento.

5. Preguntas de la investigación que se pretendieron resolver

A lo que se pretende llegar con el análisis es conocer cuál es la influencia que tiene el cambio de las condiciones de operación del día en que se realizó el experimento y de la máquina como tal en el nivel de productividad de la compañía, y si dicha influencia se da con o sin interacción de los factores.

6. Planeación del trabajo experimental aplicado

Un fabricante está teniendo problemas con sus niveles de productividad, y desea encontrar si en su proceso productivo son influyentes el cambio de máquina y las condiciones de operación del día, en el nivel de productividad que obtiene. Esto es importante debido a que en caso de que alguna de las dos variables influya, o que ambas variables influyan, el fabricante deberá tomar medidas al respecto para mejorar, o por lo menos mantener estables sus niveles productivos.

Para el caso en el que los niveles de productividad varían, se sabe que no sólo pueden intervenir los dos factores antes mencionados (día y máquina), sino que pueden existir otros factores como el personal que opera la máquina, entre otros. Sin embargo, en estudios anteriores se determinó que el estudio se centraría en la máquina seleccionada y las condiciones de operación de cada día, con trabajadores con desempeño similar u homogéneo y que están capacitados.

El estudio se realizó seleccionando aleatoriamente cuatro máquinas y cuatro días dentro del período de mayor producción del año, y se registró la productividad de cada máquina seleccionada como respuesta para dos corridas diarias. En total fueron dos experimentos por máquina cada día, es decir, que se tienen 32 datos (8 por máquina).

Para la selección aleatoria de las máquinas y días se hizo un *Muestreo aleatorio simple*.

En este experimento no se consideran factores de ruido o de bloqueo. Además, se propone un Diseño Completamente Aleatorizado de dos factores de efectos aleatorios.

a. Análisis descriptivo

Para un adecuado análisis descriptivo y una conclusión preliminar acerca de la variabilidad en la productividad debida a la variación simultánea de máquinas y días se genera el Boxplots y gráficos de interacción respectivamente.

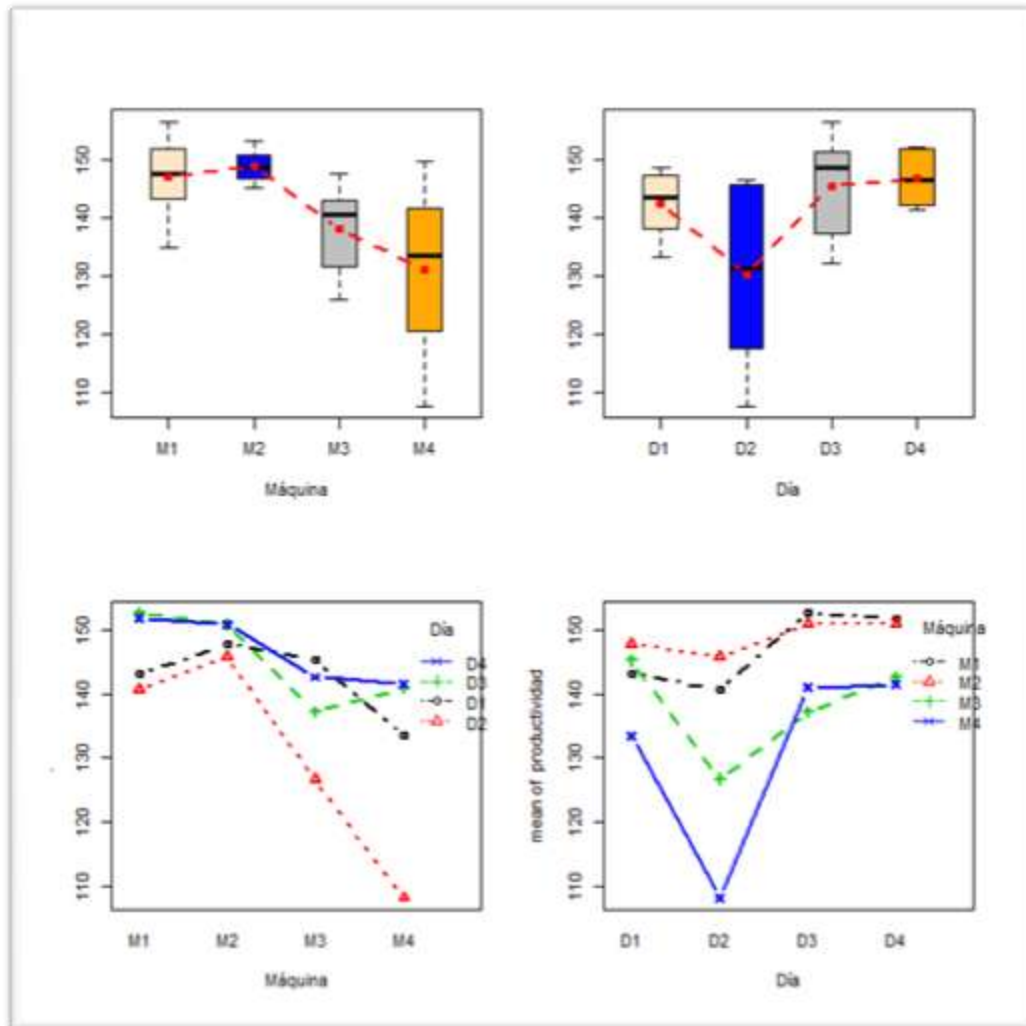


Figura 9:Boxplot según la máquina y el día y gráficos de interacción.

En la figura 1, en los boxplots para los tipos de máquinas, la variación en la cantidad promedio de producción obtenida es evidente cuando se cambia de máquina, por ejemplo, la producción promedio es muy similar en las máquinas uno y dos y la producción media de la máquina tres ligeramente mayor con respecto a la máquina cuatro, siendo estas estas dos últimas menores que las dos primeras, lo que da indicios de una varianza del factor máquina no constante y da indicios de un $\sigma_a^2 > 0$; además también se observan cambios en la dispersión en cada tipo de máquina, se resalta por ejemplo que la dispersión de la máquina cuatro es mucho mayor que la dispersión de los resultados en las otras tres máquinas. Ahora, respecto a los boxplots para los resultados en los diferentes días, la dispersión varía en cada nivel del factor, siendo mayor la dispersión del día dos; por otro lado, la diferencia del promedio de la producción no parece ser muy significativa según cambian los días, además de dar indicios de que la varianza del factor no sea constante lo que nos hace

suponer un $\sigma_{\beta}^2 > 0$, aunque puede estar enmascarado, por lo que esto se comprobará con un análisis de varianza.

En las gráficas de interacción, para los dos factores, los perfiles de medias no son paralelos, es decir, la diferencia de medias de un factor depende del nivel en que este fijado el otro factor; lo anterior pueden ser evidencia de la significancia de la varianza debida a la interacción de dos factores, lo cual implica que los resultados relativos a varios tipos de máquinas en relación a cambios en el día no varían de forma congruente con dichos cambios y viceversa.

b. Modelo ANOVA

El modelo de análisis de varianza que se propone es el modelo factorial de dos factores aleatorios (A= Máquina y a= 4, B= Día y b= 4) que interactúan entre sí en un DCA:

$$Y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, i = 1, 2, 3, 4., j = 1, 2, 3, 4., k = 1, 2.$$

Con $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$ e iid, para todo i, j, k , $A_i \sim N(0, \sigma_{\alpha}^2)$ e iid, $B_j \sim N(0, \sigma_{\beta}^2)$ e iid y

$(AB)_{ij} \sim N(0, \sigma_{\alpha\beta}^2)$ e iid. Además ε_{ijk} , A_i , B_j y $(AB)_{ij}$ son mutuamente independientes.

Donde,

Y_{ijk} = Variable aleatoria normal que corresponde a la respuesta de la k-ésima cantidad de producción obtenida en la i-ésima máquina y en el j-ésimo día laboral.

μ = Cantidad media de producción obtenida en toda la empresa.

A_i = Efecto aleatorio de la i-ésima máquina.

B_j = Efecto aleatorio del j-ésimo día.

$(AB)_{ij}$ = Efecto aleatorio de la interacción de la i-ésima máquina y el i-ésimo día.

ε_{ijk} = Error experimental en la k-ésima cantidad de producción obtenida en la i-ésima máquina y el j-ésimo día.

c. ANOVA

Lo que interesa a este modelo es determinar si la varianza del efecto aleatorio máquina y día son significativos sobre la producción obtenida, por lo tanto, los parámetros de interés son las componentes de varianza de todo el modelo:

$$Var(Y_{ijk}) = \sigma_{\alpha}^2 + \sigma_{\beta}^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2$$

Ahora, para la construcción de la tabla ANOVA se usó la función 'Anovafactorialaleatoriosconinteraccion()' en R 3.4.1, la cual se muestra a continuación:

```
> Anovafactorialaleatoriosconinteraccion(modelo=modelo)
Tests of Hypotheses for Random Model Analysis of Variance
Dependent Variable: productividad
```

	Source	DF	Sum.Sq	Mean.Sq	F.Value	P.value
1	Máquina	3	1647.2784	549.09281	6.29	0.01371
2	Día	3	1334.4634	444.82115	5.09	0.02484
3	Máquina:Día	9	786.0353	87.33726		

	Source	DF	Sum.Sq	Mean.Sq	F.Value	P.value
1	Máquina:Día	9	786.0353	87.33726	4.88	0.00294
2	Error	16	286.3250	17.89531		

Figura 10: Resultados para el modelo factorial de dos factores aleatorios.

Entonces, se plantean cuatro pruebas de hipótesis y sus respectivos resultados:

1. Prueba de hipótesis para la variación entre las muestras de la interacción del efecto aleatorio día con el efecto aleatorio máquina:

$$H_0: \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0, \quad H_1: \sigma_{\alpha\beta}^2 > 0$$

Donde el estadístico se construye con el error cuadrático medio a causa de la interacción de los factores A y B como numerador y evaluando bajo H_0 (Si H_0 es cierta) el valor esperado para esta misma interacción como denominador, que da como resultado el error cuadrático medio del error; el estadístico sigue una distribución F con los respectivos grados de libertad:

$$F_0 = \frac{MS(AB)}{MSE} \sim f_{(a-1)(b-1), ab(n-1)} F_0 = \frac{87.33726}{17.89531} = 4.88 \sim f_{9,16}$$

Con

$$Valor P = P(f_{9,16} > 4.88) = 0.00294$$

Con un valor P pequeño, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la variación debida a la interacción de los factores máquina y día sí aportan significativamente a la varianza de la cantidad de producción obtenida. Se realizan las pruebas de hipótesis individuales para los factores en orden de ver si aportan estas variaciones aportan significativamente a la varianza de la interacción; en tal caso, mediante conclusiones y recomendaciones críticas mirar cuál de los factores se pueden controlar desde la dirección de la empresa.

2. Prueba de hipótesis para la variación entre las muestras del efecto aleatorio máquina:

$$H_0: \sigma_{\alpha}^2 = 0, \quad H_1: \sigma_{\alpha}^2 > 0$$

el error Donde el estadístico se construye con cuadrático medio a causa del factor A como numerador y evaluando bajo H_o (Si H_o es cierta) el valor esperado para este mismo factor como denominador, que da como resultado el error cuadrático medio a causa de la interacción de los factores A y B; el estadístico sigue una distribución F con los respectivos grados de libertad:

$$F_0 = \frac{MSA}{MS(AB)} \sim f_{(a-1),(a-1)(b-1)} F_0 = \frac{549.09281}{87.33726} = 6.29 \sim f_{3,9}$$

Con

$$Valor P = P(f_{3,9} > 6.29) = 0.01371$$

Con un valor P pequeño, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la variación debida a las máquinas sí aporta significativamente a la varianza de la producción obtenida.

3. Prueba de hipótesis para la variación entre las muestras del efecto aleatorio día:

$$H_o: \sigma_\beta^2 = 0, \quad H_1: \sigma_\beta^2 > 0$$

Donde el estadístico se construye con el error cuadrático medio a causa del factor B como numerador y evaluando bajo H_o (Si H_o es cierta) el valor esperado para este mismo factor como denominador, que da como resultado el error cuadrático medio a causa de la interacción de los factores A y B; el estadístico sigue una distribución F con los respectivos grados de libertad:

$$F_0 = \frac{MSB}{MS(AB)} \sim f_{(b-1),(a-1)(b-1)} F_0 = \frac{444.82115}{87.33726} = 5.09 \sim f_{3,9}$$

Con

$$Valor P = P(f_{3,9} > 5.09) = 0.02484$$

Con un valor P pequeño, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la variación debida a los días sí aporta significativamente a la varianza de la producción obtenida.

Finalmente se tiene que, dado que todas las pruebas de hipótesis concluyeron que los factores tienen influencia tanto individualmente como debida a su interacción, es necesario realizar otro tipo de pruebas. Sin embargo, de entrada, se puede decir que el fabricante necesita hacer cambios o comenzar a controlar los factores estudiados, sabiendo que se tiene un problema mayor debido a que haya interacción, pues idealmente en un proceso se requiere que independientemente del día en que se opere, las máquinas no deberían variar su rendimiento.

d. Varianza total, sus componentes y proporciones

Las componentes de la varianza vienen definidas así:

$$Var(Y_{ijk}) = \sigma_{\alpha}^2 + \sigma_{\beta}^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2$$

Sus estimaciones fueron calculadas en R 3.4.1 usando la función lmer() de la librería lme4. En la *figura 3* se muestran los resultados:

```
> summary(modelob)
Linear mixed model fit by REML ['lmerMod']
Formula: productividad ~ 1 + (1 | Máquina) + (1 | Día) + (1 | Máquina:Día)

REML criterion at convergence: 215

Scaled residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.84282 -0.35581  0.03484  0.20699  2.31766

Random effects:
Groups      Name      Variance Std.Dev.
Máquina:Día (Intercept) 34.72    5.892
Día         (Intercept) 44.69    6.685
Máquina     (Intercept) 57.72    7.597
Residual                    17.90    4.230
Number of obs: 32, groups: Máquina:Día, 16; Día, 4; Máquina, 4

Fixed effects:
              Estimate Std. Error t value
(Intercept)   141.184      5.323   26.52
```

Figura 11: Resultados de las componentes de la varianza para el modelo factorial de dos factores aleatorios.

Entonces, se plantean las fórmulas de las componentes de las varianzas y sus proporciones y se muestran en las *tablas 2 y 3*:

Estimación de la varianza debida al factor máquina	$\widehat{\sigma}_{\alpha}^2 = \frac{MSA - MS(AB)}{nb} = \frac{549.09281 - 87.33726}{2 * 4} = 57.72$
Estimación de la varianza debida al factor día	$\widehat{\sigma}_{\beta}^2 = \frac{MSB - MS(AB)}{na} = \frac{444.82115 - 87.33726}{2 * 4} = 44.69$
Estimación debida a la interacción de los factores máquina y día	$\widehat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 = \frac{MS(AB) - MSE}{n} = \frac{87.33726 - 17.89531}{2} = 34.72$
Estimación de la varianza del error	$\widehat{\sigma}^2 = MSE = 17.89531$
Estimación de la varianza total	$\widehat{\sigma}_{\alpha}^2 + \widehat{\sigma}_{\beta}^2 + \widehat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 + \widehat{\sigma}^2 = 155.02531$

Tabla 2: Estimaciones de las componentes de la varianza del modelo factorial de dos factores.

Porcentaje de la varianza debida al factor máquina	$\frac{\widehat{\sigma}_a^2}{Var\ total} * 100 = \frac{57.72}{155.02531} * 100 = 37.23\%$
Porcentaje de la varianza debida al factor día	$\frac{\widehat{\sigma}_\beta^2}{Var\ total} * 100 = \frac{44.69}{155.02531} * 100 = 28.83\%$
Porcentaje de la varianza debida a la interacción de los factores máquina y día	$\frac{\widehat{\sigma}_{\alpha\beta}^2}{Var\ total} * 100 = \frac{34.72}{155.02531} * 100 = 22.40\%$
Porcentaje de la varianza del error	$\frac{\widehat{\sigma}^2}{Var\ total} * 100 = \frac{17.89531}{155.02531} * 100 = 11.54\%$
Porcentaje total	$37.23 + 28.83 + 22.4 + 11.54 = 100\%$

Tabla 3: Proporciones de las componentes de la varianza del modelo factorial de dos factores.

De la varianza total del modelo, el 37.23% de la variabilidad total es aportada por el factor máquina, un 28.83% es aportada por el factor día y un 22.40% debido a la interacción de los dos factores anteriores. Si la compañía quiere que la variabilidad en la producción obtenida sea reducida, debe reducir el porcentaje de variabilidad debida a la interacción y, para esto, la variación debida al factor máquina debe ser reducido, pues es el factor que más aporta a la variabilidad de la interacción. Por otra parte, el 88.46% de la varianza se debe a efectos de los factores, dejándole al error experimental un 11.54% de la variabilidad total del modelo.

Por lo tanto, se recomienda que el fabricante busque, como primera medida, realizar un mantenimiento exhaustivo de sus máquinas para dejarlas en las condiciones más óptimas y similares entre ellas, o reemplazarlas por máquinas nuevas que estén en iguales condiciones iguales, pues estas representan la mayor varianza en el problema; esta última recomendación debe hacerse en caso de que los recursos lo permitan. Por otra parte, una manera de controlar el factor día, puede ser manteniendo unas condiciones ambientales en el sitio de trabajo, de manera que, por ejemplo, las condiciones climáticas no afecten en el rendimiento de las máquinas, y por ende en su productividad.

e. Validación de supuestos

Se validan los supuestos de normalidad y varianza constante definidos en el modelo factorial. Estos se hacen sobre el modelo factorial de dos efectos fijos para obtener los residuales estandarizados. Se plantean dos pruebas de hipótesis con sus respectivos estadísticos:

$\hat{\varepsilon}_{ijk} = Y_{ij} - \hat{Y}_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{ij}$. se reemplaza temporalmente efectos aleatorios por fijos.

1. Prueba de varianza constante

$$H_0: E(\varepsilon_{ijk}) = 0 \forall i, H_1: E(\varepsilon_{ijk}) \neq 0 \text{ para algún } i$$

$$H_0: E(\varepsilon_{ijk}) = 0 \forall_j, H_1: E(\varepsilon_{ijk}) \neq 0 \text{ para algún } j$$

$$H_0: \text{var}(\varepsilon_{ijk}) = \sigma^2 \forall_{i,j} \quad \text{vs} \quad \text{var}(\varepsilon_{ijk}) \neq \sigma^2 \text{ para algún } i \text{ o } j$$

2. Prueba de normalidad

$$H_0: \varepsilon_{ijk} \sim \text{Normales}, \quad H_0: \varepsilon_{ijk} \text{ no se distribuyen Normales}$$

A continuación, se muestran los gráficos en la *figura 4*:

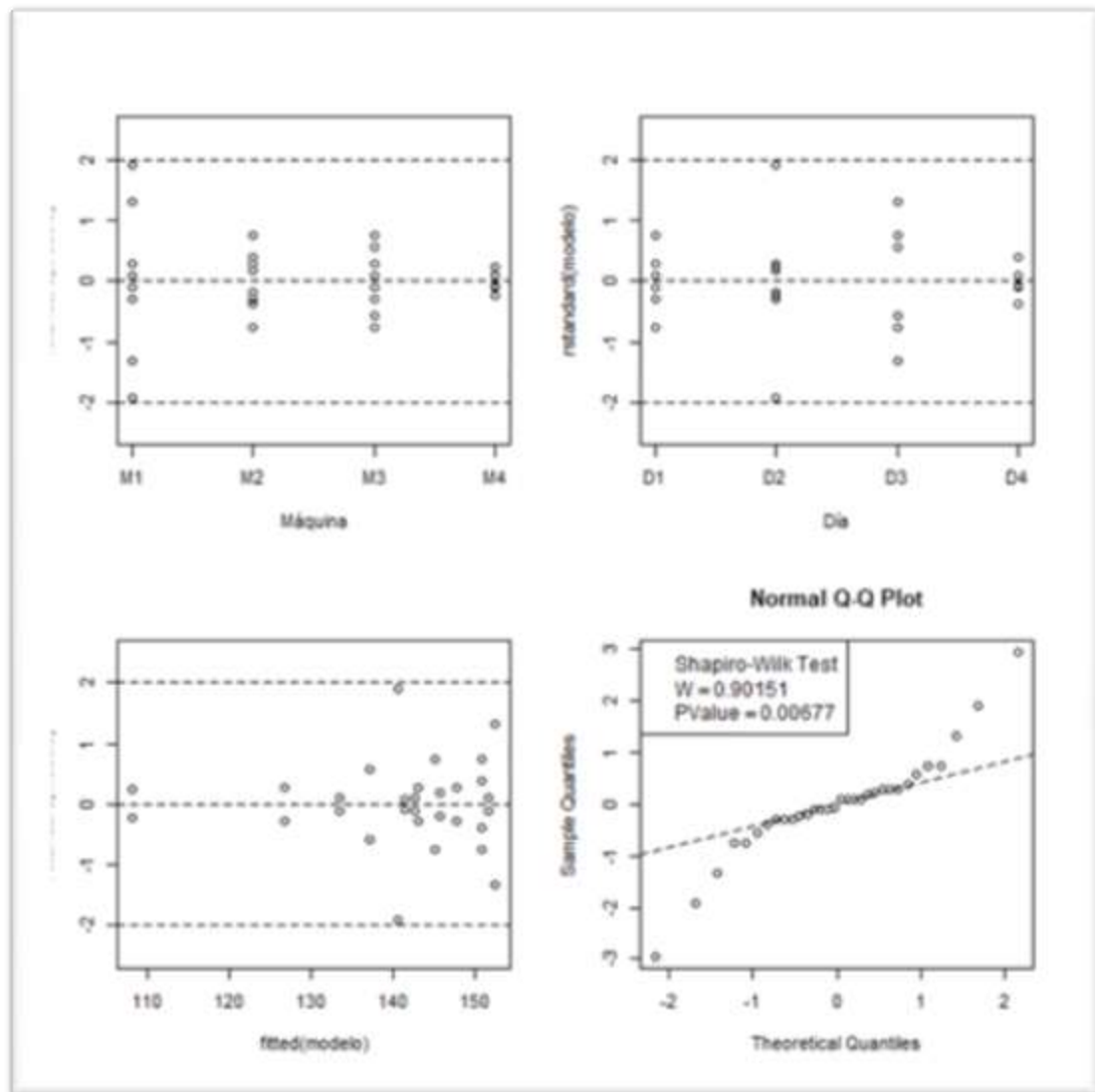


Figura 12: Residuales estandarizados vs Valores ajustados y Normalidad del modelo factorial.

Tal y como se observó en la *figura 1* de los boxplots, las varianzas individuales debidas a los factores máquina y día no son constantes, incluso si no se consideraran los valores extremos de la máquina uno y el día dos, las dispersiones difieren mucho entre sí en ambas varianzas; por ejemplo, se observa una mayor dispersión en la máquina uno con respecto de las demás, mientras que la dispersión es la misma en las máquinas dos y tres y, la menor dispersión pertenece a la máquina cuatro. Por el lado de la varianza debida al factor día, se presenta una mayor dispersión en los días dos y tres con respecto de los otros dos niveles del factor. Ahora, la gráfica de residuales estandarizados vs valores ajustados del modelo presenta también los problemas de las otras dos gráficas, aunque en menor gravedad. Respecto a la normalidad de los errores del modelo, la prueba de Shapiro-Wilk con un valor P de 0.00677 rechaza el supuesto de normalidad y, por otro lado, en la gráfica se puede observar como un gran número de observaciones se ajustan, pero las colas son muy dispersas además de haber valores extremos. Con base en el anterior análisis los supuestos de varianza constante y normalidad no son válidos para el modelo.

f. Recomendaciones para el mejoramiento de la productividad

- Como ya se ha observado anteriormente, debido a los test estadísticos realizados (ANOVA), se puede decir que los factores “máquina seleccionada” y “condiciones de operación de cada día” están influyendo significativamente en el nivel de productividad que tiene la empresa, de manera independiente y con interacción de los factores. Además, se observa que el factor correspondiente a la máquina es el que mayor influencia tiene en la variación de la productividad, por lo que se hacen las siguientes recomendaciones:
- Uno de los aspectos que no se consideró en el experimento y que, probablemente pueda influir de manera significativa en la variación de los resultados debida al factor máquina, son los empleados. Se supuso que el experimento se llevó a cabo con operarios con desempeño similar u homogéneo; pero al ver los resultados, puede que su desempeño no sea lo suficientemente igual. Se recomienda pues, hacer un experimento previo que permita seleccionar los operarios que van a ser parte del experimento o, en caso de que el tiempo de una unidad de producción no sea muy largo, hacer el experimento con un solo empleado; como última alternativa, considerar mediante un estudio el hecho de que, los operadores de la máquina sean un factor de bloqueo.
- Realizar un mantenimiento y ajuste detallado de las máquinas que tiene la empresa para dejarlas en condiciones óptimas y lo más parecidas posible, después de implementar esta acción correctiva, el análisis de varianza se puede llevar a cabo por segunda vez para determinar si la variación en la producción obtenida disminuyó y como la variabilidad debida al factor máquina, afecta la variabilidad debida a la interacción de ambos factores.
- En caso de que no se logre el objetivo con la recomendación anterior, puede optarse por cambiar las máquinas o las piezas de ellas que estén más deterioradas. Hay que tener en cuenta que esto implicaría unos gastos muy elevados para la empresa, por lo

que sería adecuado realizar un análisis financiero y ver si es más económico acarrear el gasto de la variabilidad de la productividad o el del cambio de maquinaria.

- Controlar las variables climáticas, como temperatura y humedad, del sitio de trabajo, pues esto tiene que ver con las condiciones de operación correspondientes a cada día. Esto puede influir en el rendimiento de las máquinas. En caso de que las condiciones climáticas no se puedan controlar de una manera fácil y eficiente, poner todos los esfuerzos en la disminución de la variabilidad debida al factor máquina.

15. Un fabricante de pintura de látex para casas (marca A) desea mostrar que su pintura es más robusta para el material que se pinta que sus dos competidores más cercanos. La variable respuesta es el tiempo en años, hasta que se pica. *El estudio incluye tres marcas de pinturas (la del fabricante y las de sus dos competidores más cercanos) y tres materiales que se eligen al azar. Se utilizan dos piezas de material por cada combinación pintura*material (es decir, dos réplicas en cada tratamiento). Los datos se dan a continuación:*

Marca pintura	Material		
	1	2	3
A	5.50	5.60	5.40
	5.15	5.55	5.48
B	4.75	5.50	5.05
	4.60	5.60	4.95
C	5.10	5.40	4.50
	5.20	5.50	4.55

Figura 13: Datos de la duración promedio de la pintura en sus diferentes tratamientos usados.

En concreto, se estudia el proceso de duración o de deterioro de una superficie pintada antes de picarse, donde se prueban 3 marcas de pintura en 18 diferentes superficies que están hechas de 3 diferentes materiales que han sido seleccionados de una población indeterminada de materiales. El propósito de este proceso es determinar cuál de las 3 marcas de pintura es más resistente en el tiempo frente al picado o desprendimiento de pintura, este defecto natural de la pintura puede ser causado por la presencia de cuerpos o líquidos extraños (aceites, grasa, silicona) en la superficie donde se pinta o después del pintado, la inadecuada preparación de la superficie, la temperatura, el desgaste por contacto o la duración en la resistencia y calidad de una determinada pintura.

El investigador para poder determinar que pintura es la más robusta frente al picado en cualquier tipo de superficie, uso como su variable respuesta la duración que en promedio se demora en años la pintura en presentar desprendimientos, a su vez el asumió que la duración de dicha pintura está siendo afectada significativamente por la marca de pintura que se está usando, y el material en el que está hecha la superficie donde se aplicaron las capas de pintura, y además se debe tener en cuenta la

variabilidad inherente de este proceso como son los factores climáticos, o las causas que se expusieron anteriormente.

Para poder obtener información relevante y fidedigna para así ampliar el conocimiento frente a este fenómeno y así obtener un punto de vista objetivo frente a los datos presentados en la *figura 13*, el investigador procedió a definir 3 marcas fijas de pintura , y los materiales usados fueron elegidos aleatoriamente dentro de una población indeterminada de materiales , de lo cual se obtuvieron 9 tratamientos donde se decidió replicarlos 2 veces, obteniendo así una estructura de tratamientos de arreglos factoriales de efectos mixtos.

Para la estructura de diseño el investigador procedió a asignar a cada tratamiento 2 unidades experimentales (superficies a pintar) de forma completamente aleatorizada y así obteniéndose 18 observaciones de la variable respuesta y el orden de las 18 corridas experimentales se elaboraron de forma completamente aleatorizada obteniéndose así un DCA.

a. Análisis descriptivo

Para poder evaluar los cambios en el tiempo hasta que la pintura se pica que fueron asociados por la marca de pintura y la variación del material usado como superficie, se elaboraron diagramas de cajas y gráficos de perfiles de medias que se pueden observar a continuación.

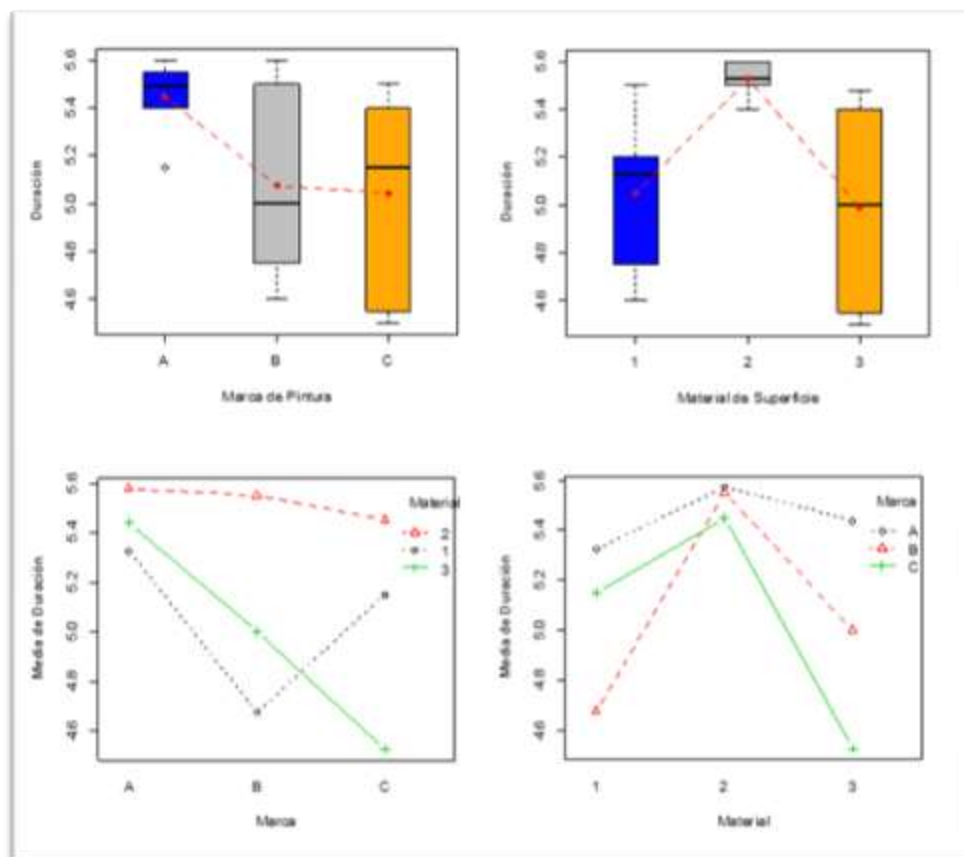


Figura 14:Boxplots según factores y gráficos de interacción.

Se puede observar al analizar los gráficos de interacción presentados en la figura 14c y d, que los perfiles de medias de las marcas y de los materiales, respectivamente, no son paralelos y se cruzan, lo cual implica que posiblemente la interacción entre materiales y marcas es significativa y por tanto hay una posibilidad de una componente de varianza significativa debida a la interacción ($\sigma_{\alpha\beta}^2 > 0$). A nivel de la marca A ($\bar{Y}_{1..}$) se observa que la duración promedio en todos los materiales es la más alta que las de los otras 2 marcas, también se observa que $\bar{Y}_{2.}$ con las marcas A, B y C es aproximadamente el mismo. A nivel del material 1 y 3 ($\bar{Y}_{1.}$ y $\bar{Y}_{3.}$) los tiempos promedios de duración son distintos para todas las marcas, y el mayor tiempo promedio de duración lo alcanzan con la marca A.

En los diagramas de cajas se percibe que la marca A ($\bar{Y}_{1..}$) es diferente a las otras dos marcas y además es la que se percibe que tiene una duración promedio de la pintura más alta, además en el diagrama de cajas debido al material, se percibe que $\bar{Y}_{2.}$ es diferente a los otros dos materiales y además posee la duración promedio más alta en la pintura antes de que se pique, lo que podría indicar que $\sigma_{\beta}^2 > 0$.

En conclusión, puede que los efectos debido a las marcas afectan significativamente a la media global, además la variación debido a los materiales puede estar contribuyendo en la varianza total de la duración de la pintura, pero estos factores pueden llegar a ser enmascarados debido a la existencia de una interacción significativa.

b. Modelo ANOVA

La marca de pintura es un factor de efectos fijos por tanto se tomará como el factor A con $a=3$ niveles y el material de la superficie donde se aplicaron las capas de pintura es un factor de efectos aleatorios por tanto se tomará como el factor B con $b=3$ niveles y cada uno de los tratamientos fueron replicados $n=2$ veces.

Caso mixto no restringido

El modelo correspondiente a este caso es:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + B_j + (\alpha B)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \text{Sujeto a } \sum_i^a \alpha_i = 0.$$

$$B_j \sim^{iid} N(0, \sigma_\beta^2), \quad (\alpha B)_{ij} \sim^{iid} N(0, \sigma_{\alpha\beta}^2) \quad \text{y} \quad \varepsilon_{ijk} \sim^{iid} N(0, \sigma^2) \text{ para todo } i, j, k,$$

Además, se supone que B_j , $(\alpha B)_{ij}$ y ε_{ijk} son mutuamente independientes.

Donde:

Y_{ijk} es el tiempo de duración de la pintura hasta que se pica en la k -ésima unidad experimental asignada a la marca de pintura i y material j , medida en años.

μ es el promedio global del tiempo de duración de la pintura.

α_i es el efecto fijo de la marca i ($1=A, 2=B, 3=C$) de pintura que produce sobre el promedio global del tiempo de duración de la pintura.

B_j es el efecto aleatorio del tipo de material j usado sobre el promedio global del tiempo de duración de la pintura.

$(\alpha B)_{ij}$ es el efecto aleatorio de la interacción de la marca de pintura i con el tipo de material j sobre el promedio global del tiempo de duración de la pintura.

ε_{ijk} es el error aleatorio en la k -ésima replica del tratamiento $A_i B_j$.

$$V(Y_{ijk}) = \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2$$

Caso mixto restringido

La diferencia con respecto al modelo mixto sin restricción es que se incluye la siguiente restricción:

$$\sum_i^a (\alpha B)_{ij} = 0$$

Por lo tanto:

$$(\alpha B)_{ij} \sim \text{NOiid} N(0, \frac{a-1}{a} \sigma_{\alpha\beta}^2) \text{ , con } \text{COV}((\alpha B)_{ij}, (\alpha B)_{i'lj}) = -\frac{1}{a} \sigma_{\alpha\beta}^2 \text{ para } i \neq i' \text{ y } \\ \text{COV}((\alpha B)_{ij}, (\alpha B)_{i'lj'}) = 0 \text{ para } j \neq j'$$

$$V(Y_{ijk}) = \sigma_{\beta}^2 + (\frac{a-1}{a}) \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2$$

c. Pruebas de hipótesis

Los resultados de los estadísticos de prueba y los valores p para el modelo no restringido se pueden observar en la *figura 20*:

1. Prueba de hipótesis debida a la interacción de los dos factores

$$H_0: \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma_{\alpha\beta}^2 > 0$$

Estadístico de prueba

$$F_3 = \frac{MS(AB)}{MSE} \sim^{H_0} f_{(a-1)(b-1), ab(n-1)} = f_{4,9}.$$

$$F_3 = 16,094$$

Criterio de rechazo

$$\text{Valor p} = P(f_{(a-1)(b-1), ab(n-1)} > F_3) = P(f_{4,9} > 16,094) = 0,0004$$

Se concluye con una significancia de 5% que si hay componente de varianza significativa aportada por la interacción entre los factores marca de pintura y el tipo de material usado en la superficie que se pintó, por lo tanto, la diferencia entre las medias del factor marca de pintura variaran con las variaciones del factor material. Como consecuencia de esto es necesario interpretar con precaución los resultados de los tests sobre la significancia de los efectos principales del factor marca de pintura y sobre la significancia de la componente de varianza debida a la variación del material de la superficie debido a que pueden estar enmascarados.

```

> Diseño=aov(duración~Marca*Material)
> Anovafactorialmixtoconinteraccion(modelo=Diseño) #ANOVA mixto no restringido
The Unrestricted Mixed Model Analysis of Variance
Dependent Variable: duración

```

	Source	DF	Sum.Sq	Mean.Sq	F.Value	P.value
1	Marca	2	0.6065444	0.3032722	1.73	0.2875
2	Material	2	1.0348778	0.5174389	2.95	0.16325
3	Marca:Material	4	0.7010889	0.1752722		

	Source	DF	Sum.Sq	Mean.Sq	F.Value	P.value
1	Marca:Material	4	0.7010889	0.17527222	16.06	4e-04
2	Error	9	0.0982000	0.01091111		

Figura 15: ANOVA en un DCA balanceado, con dos factores de efectos mixtos con interacción, modelo no restringido.

2. Prueba debido a la marca de pintura

Prueba de hipótesis

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \text{al menos un } \alpha_i \neq 0 ; i=1,2,3$$

Estadístico de prueba

$$F_1 = \frac{MSA}{MS(AB)} \sim^{H_0} f_{a-1, (a-1)(b-1)} = f_{2,4}$$

$$F_1 = 1,7289 .$$

Criterio de rechazo

$$\text{Valor p} = P(f_{a-1, (a-1)(b-1)} > F_1) = P(f_{2,4} > 1,7289) = 0,2875$$

Se concluye que con una significancia de 5%, ante interacción significativa, los efectos del factor marca de pintura son enmascarados por la interacción y por lo tanto no pueden ser medidos sus efectos principales. Esto quiere decir que no tiene sentido estimar ni efectos, ni medias para los niveles de este factor y tampoco tiene sentido construir I.C, o hacer comparaciones de Tukey o contrastes de sus medias. Como los niveles estudiados del factor material de la superficie son una muestra aleatoria, tampoco tiene sentido comparar en cada uno de los tres materiales seleccionados, las medias del factor marca de pintura, aunque teóricamente se puedan deducir los estadísticos para tales tipos de pruebas, las conclusiones a las cuales se pudiesen llegar con estas solo son aplicables a los materiales de las superficies estudiadas y no a toda la población de materiales de superficies para pintar disponibles en el mercado.

3. Prueba debida al material

Prueba de hipótesis

$$H_0: \sigma_{\beta}^2 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma_{\beta}^2 > 0$$

Estadístico de prueba

$$F_2 = \frac{MSB}{MS(AB)} \sim^{H_0} f_{b-1, (a-1)(b-1)} = f_{2,4}$$

$$F_2 = 2,9529.$$

Región de rechazo

$$\text{Valor } p = P(f_{b-1, (a-1)(b-1)} > F_2) = P(f_{2,4} > 2,9529) = 0,1632$$

Se concluye que con una significancia de 5%, ante interacción significativa, los efectos del factor del material de la superficie son enmascarados por la interacción y por lo tanto no pueden ser medida su componente de varianza! Esto quiere decir que no tiene sentido estimar la componente de varianza.

Finalmente se tiene que, dado que las pruebas de hipótesis de la significancia de los parámetros principales de los factores de estudio fueron enmascarados debido a la influencia de su interacción, se puede decir que el fabricante necesita hacer una investigación mas exhaustiva sobre las propiedades de su marca de pintura con respecto al material sobre el que se aplica, pues idealmente en este proceso se requiere que independientemente de la marca de la pintura, el material de la superficie no debería variar su rendimiento.

Caso mixto restringido

Los resultados de los estadísticos de prueba y los valores p para el modelo restringido se pueden observar en la *figura 16*:

1. Prueba debida a la interacción de los factores

Prueba de hipótesis

$$H_0: \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma_{\alpha\beta}^2 > 0$$

Estadístico de prueba

$$F_3 = \frac{MS(AB)}{MSE} \sim^{H_0} f_{(a-1)(b-1), ab(n-1)}.$$

$$F_3 = 16,06 \sim^{H_0} f_{4,9}.$$

Criterio de rechazo

$$\text{Valor } p = P(f_{(a-1)(b-1), ab(n-1)} > F_3) = P(f_{4,9} > 16,064) = 0,0004$$

Se concluye con una significancia de 5% que si hay componente de varianza significativa aportada por la interacción entre los factores marca de pintura y el tipo de material usado en la superficie que se pintó, por lo tanto, la diferencia entre las medias del factor marca de pintura variarían con las variaciones del factor material.

```
> Anovafactorialmixtoconinteraccion(modelo=Diseño,norestringido="FALSE") #ANOVA mixto restringido
The Restricted Mixed Model Analysis of Variance
Dependent Variable: duración
Source DF Sum.Sq Mean.Sq F.Value P.value
1 Marca 2 0.6065444 0.3032722 1.73 0.2875
2 Marca:Material 4 0.7010889 0.1752722

Source DF Sum.Sq Mean.Sq F.Value P.value
1 Material 2 1.0348778 0.51743889 47.42 2e-05
2 Marca:Material 4 0.7010889 0.1752722 16.06 4e-04
3 Error 9 0.0982000 0.01091111
```

Figura 16: Resultados para modelo factorial de dos factores de efectos mixtos, modelo restringido.

$H_0: \alpha_1 = \dots = \alpha_a = 0$ vs $H_1: \text{al menos un } \alpha_i \neq 0 ; i=1\dots a$

$$F_1 = \frac{MSA}{MS(AB)} \sim^{H_0} f_{a-1, (a-1)(b-1)}.$$

$$F_1 = 1,73 \sim^{H_0} f_{2,4}.$$

$$\text{Valor } p = P(f_{a-1, (a-1)(b-1)} > F_1) = P(f_{2,4} > 1,73) = 0,2875$$

Se concluye que con una significancia de 5%, ante interacción significativa, los efectos del factor marca de pintura son enmascarados por la interacción y por lo tanto no pueden ser medidos sus efectos principales. Esto quiere decir que no tiene sentido estimar ni efectos, ni medias para los niveles de este factor y tampoco tiene sentido construir I.C, o hacer comparaciones de Tukey o contrastes de sus medias. Como los niveles estudiados del factor material de la superficie son una muestra aleatoria, tampoco tiene sentido comparar en cada uno de los tres materiales seleccionados, las medias del factor marca de pintura, aunque teóricamente se puedan deducir los estadísticos para tales tipos de pruebas, las conclusiones a las cuales se pudiesen llegar con estas solo son aplicables a los materiales de las superficies estudiadas y no a toda la población de materiales de superficies para pintar disponibles en el mercado.

$H_0: \sigma_\beta^2 = 0$ vs $H_1: \sigma_\beta^2 > 0$

$$F_2 = \frac{MSB}{MSE} \sim^{H_0} f_{b-1, ab(n-1)}.$$

$$F_2 = 47,42 \sim^{H_0} f_{2,9}.$$

$$\text{Valor } p = P(f_{b-1, (a-1)(n-1)} > F_2) = P(f_{2,9} > 47,42) = 0,00002$$

Se concluye que con una significancia de 5%, los resultados corroboran una componente de varianza altamente significativa aportada por la variación de los tipos de material empleados en el experimento, además posee la mayor suma de cuadrados y de cuadrados medios indicando la alta significancia de este parámetro.

```
> Diseñob=lmer(duración~1+Marca+(1|Material)+(1|Marca:Material))
> summary(Diseñob) #tomar solo lo referente a Random effects:
Linear mixed model fit by REML t-tests use Satterthwaite approximations to
degrees of freedom [lmerMod]
Formula: duración ~ 1 + Marca + (1 | Material) + (1 | Marca:Material)
```

Figura 17: Estimación de las componentes de varianza con función lmer().

```
Random effects:
Groups          Name          Variance Std.Dev.
Marca:Material (Intercept) 0.08218  0.2867
Material       (Intercept) 0.05703  0.2388
Residual                               0.01091  0.1045
Number of obs: 18, groups: Marca:Material, 9; Material, 3
```

Figura 18: Estimaciones de las componentes y proporciones de varianza en modelo factorial, dos factores de efectos mixtos con interacción.

Fuente	Parametro	varianza estimada	Proporcion respecto a la varianza total
B	σ_B^2	0,0570	0,3800
AB	$\sigma_{\alpha\beta}^2$	0,08218	0,5475
Error	σ^2	0,0109	0,0725

Figura 19: tabla resumen de las estimaciones de las componentes de varianza y sus proporciones.

Como puede observarse, la componente de varianza que más pesa en este problema, es la debida a la variación de la interacción con el 54,75 % de la varianza total, el 38% es explicada por el material usado y el 7,25% la aporta el error experimental.

Si bien en este problema no resulto posible medir los efectos de las marcas de pintura sobre el promedio de la duración de la pintura antes de picarse, es claro que el fabricante debe reducir el porcentaje de variabilidad debida a la interacción y, para esto, debe reducir el porcentaje de variación debido al material, pues el 92,75% de la variabilidad se deben a los efectos que tienen en si la interacción y el factor B.

Se recomienda al fabricante que fije el factor material con una selección más exhaustiva de estos para poder reducir lo más que se pueda la variabilidad debida a la interacción con el factor marca, y si es posible, bloquear este factor ya que en este experimento no hay unidades experimentales homogéneas.

- d. No es pertinente porque como se vio en el punto c, los efectos del factor marca de pintura fueron enmascarados debido a la interacción de los dos factores y esta interacción le resta grados de libertad al error lo que traer en si una gran pérdida de potencia, lo que se traduce en la comparación Tukey que este no podrá identificar diferencias significativas en las medias debido a la poca potencia que se tiene.

e.

- f. A continuación, se presentan los gráficos de los análisis residuales:

$$\hat{\epsilon}_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij}.$$

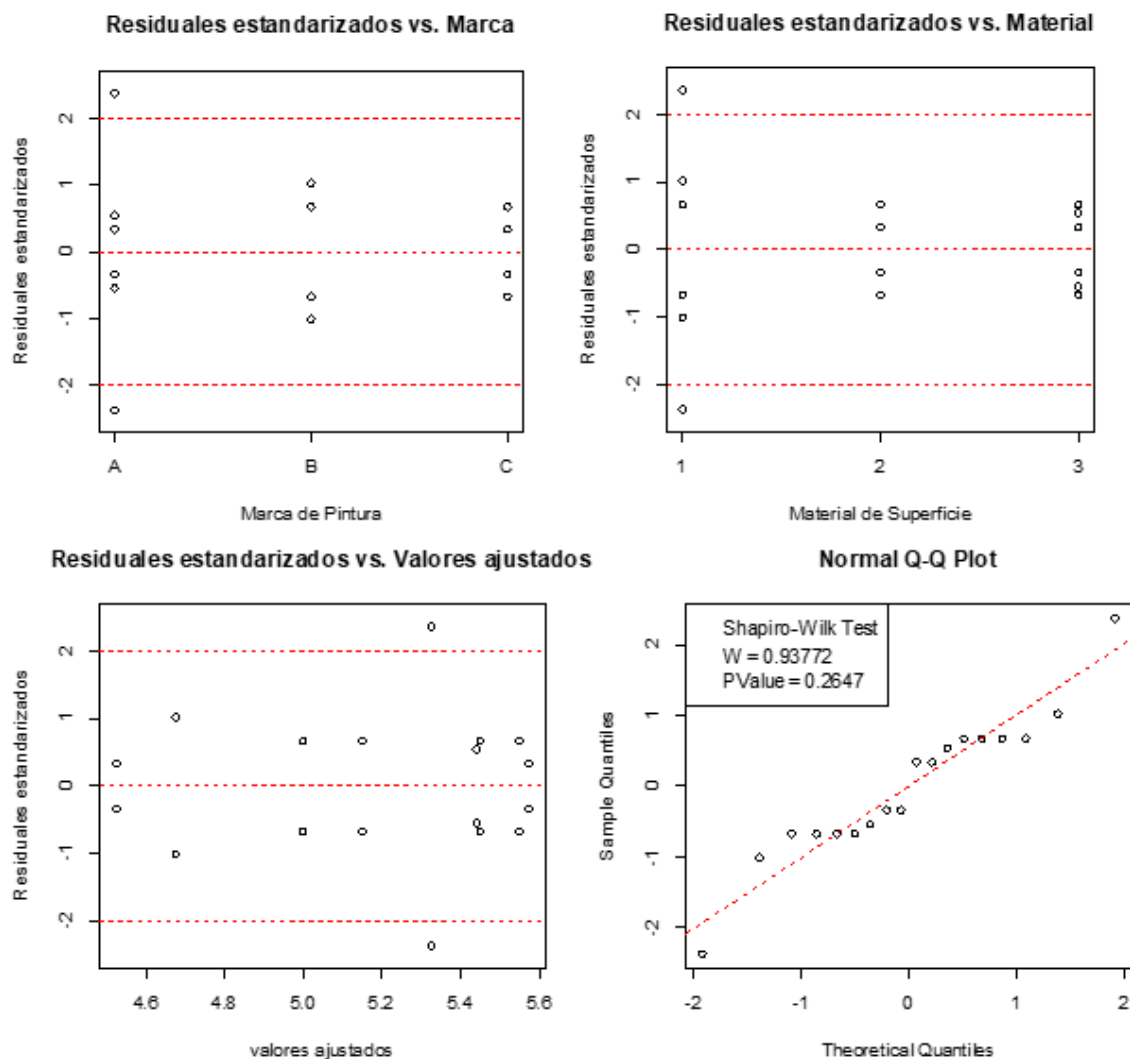


Figura 20: Gráficos de residuales estandarizados para validar supuestos en modelo factorial mixto.

Varianza constante

$$H_0: E(\varepsilon_{ijk})=0 \quad \forall_i \quad \text{vs} \quad H_1: E(\varepsilon_{ijk}) \neq 0 \text{ para algún } i$$

Del análisis grafico de la figura 8.10 a residuales estandarizados vs marca, se pueden observar 2 datos atípicos en la marca A, y a excepción de esto se puede concluir que se acepta la hipótesis nula y se posee una varianza contante en todas las marcas.

$$H_0: E(\varepsilon_{ijk})=0 \quad \forall_j \quad \text{vs} \quad H_1: E(\varepsilon_{ijk}) \neq 0 \text{ para algún } j$$

Del análisis grafico de la figura 8.10 b residuales estandarizados vs material, se pueden observar 2 datos atípicos en material 1, y a excepción de esto se puede concluir que se acepta la hipótesis nula y se posee una varianza contante alrededor de todos los materiales.

$$H_0: \sigma^2_{ij} = \text{var}(\varepsilon_{ijk}) = \sigma^2 \quad \forall_{ij} \quad \text{vs} \quad \sigma^2_{ij} \neq \sigma^2 \text{ para algún } i \text{ o } j$$

Del análisis grafico de la figura 8.10 c residuales estandarizados vs valores ajustados, se pueden observar 2 datos atípicos en el gráfico, y a excepción de esto se puede concluir que se acepta la hipótesis nula y se posee una varianza contante en todos los datos.

$$H_0: \varepsilon_{ijk} \sim \text{Normales} \quad \text{vs} \quad H_1: \varepsilon_{ijk} \text{ no se distribuyen Normales}$$

Analíticamente el test Shapiro con estadístico $W=0,93772$ y con criterio de rechazo de $vp= 0,2647$ grande entonces se acepta H_0 y nos indica que nuestros datos se distribuyen normal. Gráficamente, el grafico de la figura 8.10 d se puede observar una distribución simétrica alrededor de cero, aunque con 2 posibles observaciones atípicas se concluye que nuestros datos presentan una distribución normal.

Conclusiones

- Se concluye que el diseño elegido no fue el correcto, porque las unidades experimentales varían entre sí, lo que tradujo en si una interacción altamente significativa que enmascaro los parámetros más importantes del modelo, por lo tanto, para este experimento se recomienda fijar al factor material y bloquearlo, para poder tener bloques homogéneos y así tener un DBCA que sería un diseño ideal para este experimento.
- Se encontró una interacción altamente significativa entre los factores marca de pintura y el material usado para probar la pintura, lo cual resulto en un enmascaramiento de los parámetros importantes de estudio de cada factor y esto no nos permite hacer comparaciones entre tratamientos.
- Al postular un modelo restringido la componente de la varianza debido al material resulto significativa pero la proporción de varianza debida a la interacción resulto ser

la más grande lo cual no nos permite obtener tratamiento ideal a proponer debido a la alta significancia de la interacción a pesar de que los datos poseen una varianza constante y se distribuían normal.