Preguntas V1

Jose Alejandro Montana Cortes

May 2020

1 Productos de dos estados

Para empezar recordamos primero que un estado fermiónico para la cadena XY tiene una representación en las rotaciones $R \in SO(2N)$, esto es,

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{A_{ij}[\gamma_i, \gamma_j]/4i} = e^{(O\omega O^T)_{ij}[\gamma_i, \gamma_j]/4i} \tag{1}$$

Adicional a esto sabemos que

$$e^{\omega[\gamma,\gamma]/4i} \sim e^{\sum_i \omega_i \sigma_i^z/2}, \tag{2}$$

Lo cual nos permite escribir una expresión para ρ como función de ω y con la función de partición Z explicita

$$\rho(\omega) = \frac{e^{\omega\Sigma/2}}{\prod_i (e^{\omega_i/2} + e^{-\omega_i/2})} = \frac{1}{2^N} \frac{e^{\omega\Sigma/2}}{\prod_i \cosh\left(\frac{\omega_i}{2}\right)} \tag{3}$$

entonces tenemos que el producto de estados $\rho(\omega_1)\rho(\omega_2)$ como

$$\rho(\omega_1)\rho(\omega_2) = \frac{Z_{12}}{Z_1 Z_2} \rho(\omega_{12}), \tag{4}$$

Donde Z_{12} se calcula facilmente como

$$Z_{12} = 2^N \prod_i \cosh\left(\frac{\omega_{1i}}{2} + \frac{\omega_{2i}}{2}\right) \tag{5}$$

y entonces tenemos que al usar la formula del ángulo doble del coseno hiperbólico,

$$\frac{Z_{12}}{Z_1 Z_2} = \frac{1}{2^N} \prod_i (1 + \tanh(\omega_{1i}/2)\tanh(\omega_{2i}/2)) \tag{6}$$

si recordamos la relación entre los valores propios del Hamiltoniano y la matriz fermionica de covarianzas, tenemos que

$$\Gamma_i = \tanh\left(\frac{\omega_i}{2}\right), \tag{7}$$

lo cual nos dice que la ecuación (6) puede ser escrita en terminos de los valores propios de la matriz fermionica de covarianzas.

$$\frac{Z_{12}}{Z_1 Z_2} = \frac{1}{2^N} \prod_i \left(1 + \Gamma_{1i}\Gamma_{2i}\right), \tag{8}$$

Y además que la matriz de covarianza para el producto puede ser escrita como

$$\Gamma_{12} = \tanh\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = \frac{\tanh\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}{1 + \tanh\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\tanh\left(\frac{\omega_2}{2}\right)} \tag{9}$$

con lo cual se tiene entonces que

$$\Gamma_{12} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{1 + \Gamma_1 \Gamma_2} \tag{10}$$

Ahora mostramos que también es posible escribir la parte de $\rho(\omega_{12})$ en términos de un logaritmo de los valores propios de las matrices fermionicas de covarianzas. Primero recordamos que los valores propios de la matriz de covarianzas tiene una relación con el numero de excitación n de la forma $\Gamma = 1/2 - n$, utilizando n como el valor promedio de ocupación fermionico. Con esto tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= 1/2 - n \\ 1/2 - \Gamma_{12} &= \frac{1}{e^{\beta\omega_{12}} + 1} \\ \beta\omega_{12} &= \ln\left(\frac{1-n}{n}\right) \\ \omega_{12} &= \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1/2 - \Gamma_{12}}{1/2 - \Gamma_{12}}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

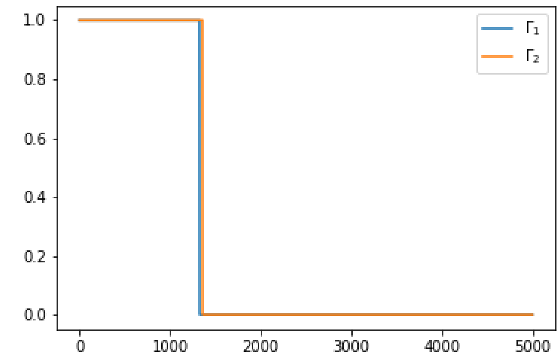
con Γ_{12} dado por la ecuacion (10). De esta forma, podemos obtener a $\rho(\omega_{12})$ se puede estudiar mirando la parte de la matriz

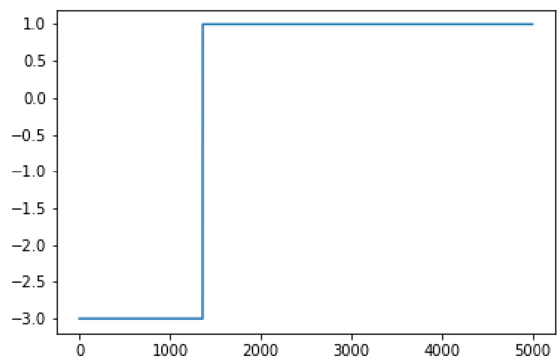
$$O \left[\begin{array}{c|c} 0 & \omega_{12} \\ \hline \omega_{12} & 0 \end{array}\right] O^T, \tag{12}$$

entonces tomar el limite cuanto $beta \to \infty$ coincide con hacer estudio sobre los valores propios de las matrices de covarianza para el estado base, es decir, trabajar con la parte Circulante.

2 Preguntas

- Quería primero que revisara esto que escribí arriba para ver si quizás haya algo que no tenga sentido para usted y que sea necesario corregir.
- Dentro de la parte numerica he tenido unas dudas, pues como hablo acá, la idea es trabajar con las matrices de covarianzas y con las O, no obstante,





quisiera saber como obtener estas O, lo que pasa es que si dentro del código genero un estado coherente con cierta temperatura y luego hallo la descomposición de valores singulares con lo cual obtengo que los valores singulares de cada matriz son (acá uso tamaño 5001) Según lo que nosotros estamos diciendo, las matrices de rotacion O deberían ser iguales para ambas, por que acá si cambian?, Debo entonces encontrar O como la transformada de Fourier que está en el Paper de Latorre.

- Esta pregunta me surgió, por que al hacer la transformación que menciono anteriormente, al graficar sólo la parte del argumento del logaritmo, se obtiene algo así Entonces si bien tenemos de forma inmediata unos valores que serán complejos (los que dan -3) al aplicar el logaritmo y otros que nos darán 0. Es decir tenemos de nuevo una especie de des balance y no estoy seguro del por que esto puede estar pasando.

- Por mi parte pensé que quizás podría hallar estas matrices al tomar la matriz de covarianzas para el caso del estado base (Hacer todas las excita-

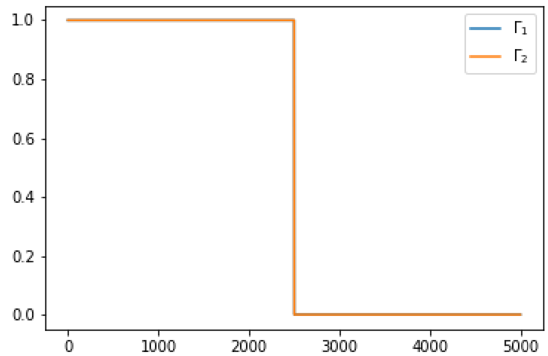


Figure 1: Gráfica de los valores singulares para cada matriz en el caso del estado base

ciones iguales a $-1/2$), lo que esperaba es que al hacer la descomposición por valores singulares, los valores singulares fueran todos iguales e igual a $1/2$. Sin embargo cuando hago esto, el resultado del programa es Es decir que para este caso si se tiene una misma cantidad de valores singulares que son del signo contrario.

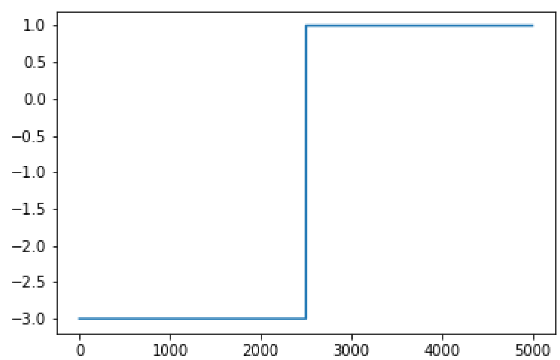


Figure 2: Gráfica del argumento del logaritmo