Si el estado puro lo rotulamos con una secuencia $\vec{n} = n_1 \dots n_N$ de números de ocupación, $\vec{n} \in \{0,1\}^N$,

entonces su matriz de covarianza será:

con $\mathbb{O}_1 = \left(\begin{array}{c|c} O_1 & 0 \\ \hline 0 & O_2 \end{array} \right)$

$$M_{\mu\nu} \equiv \langle \vec{n} | \frac{[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2i} | \hat{n} \rangle$$

$$= \left(\mathbb{O} \left[\begin{array}{c|c} & D(\vec{n}) \\ \hline D(\vec{n}) & \end{array} \right] \mathbb{B}^T \right)_{\mu\nu}$$

donde $D(\vec{n}) = \mathrm{diag}(2n_1 - 1, 2n_2 - 1, \dots 2n_N - 1)$ (= a los valores propios de los σ_z correspondientes).

Entonces para "gaussianizar el estado", tomememos $S_i = 2n_i - 1$, y reemplazamos $D(\vec{n})$ por

$$D_\beta(\vec{n}) = \mathrm{diag}(\tanh(\beta S_1), \tanh(\beta S_2) \dots)$$

y tenemos $|\vec{n}\rangle\langle\vec{n}| = \lim_{\beta \to \infty} \rho_\beta(\vec{n})$

donde $\rho_\beta(\vec{S}_1) = \lim_{\beta \to \infty} e^{-\beta \vec{\sigma} \cdot \vec{S}} / Z_{\beta_1}(\vec{S})$

y $Z_{\beta_1}(\vec{S}) = 2^N \prod_{i=1}^{N} \cosh(\beta S_i) = 2^N (\cosh(\beta))^N$

Lo que queremos es para dos estados excitados:

$|\vec{n}_1\rangle$ y $|\vec{n}_2\rangle$, calcular:

$$\chi_{12} = \mathrm{tr}_{N\setminus L}\left(|\vec{n}_1\rangle\langle\vec{n}_2| \right)$$

$$= \lim_{\beta\to\infty} \frac{\mathrm{tr}_{N\setminus L}\left(\rho_\beta(\vec{S}_1)\rho_\beta(\vec{S}_2) \right)}{\sqrt{\mathrm{tr}_N\left(\rho_\beta(\vec{S}_1)\rho_\beta(\vec{S}_2) \right)}}$$

$$\chi_{12} = \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{Z_\beta(\vec{S}_1)}\frac{1}{Z_\beta(\vec{S}_2)} \frac{\mathrm{tr}_{N\setminus L}\left(e^{\beta\vec{\sigma}_1\cdot(\vec{S}_1+\vec{S}_2)} \right)}{\sqrt{\dfrac{Z_\beta(\vec{S}_1+\vec{S}_2)}{Z_\beta(\vec{S}_1)\,Z_\beta(\vec{S}_2)}}}$$

$$\chi_{12} = \lim_{\beta\to\infty} \sqrt{\frac{Z_\beta(\vec{S}_1+\vec{S}_2)}{Z_\beta(\vec{S}_1)\,Z_\beta(\vec{S}_2)}} \left[\mathrm{tr}_{N\setminus L}\, \rho_\beta(\vec{S}_1+\vec{S}_2) \right]$$

Defina $\rho_\beta^{(L)}(\vec{S}_1+\vec{S}_2) := \mathrm{tr}_{N\setminus L}\, \rho_\beta(\vec{S}_1+\vec{S}_2)$

entonces $\rho_\beta^{(L)}(\vec{s}_1+\vec{s}_2)$ tiene como matriz de covarianza $(2L\times 2L)$

$$M = \left[\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline -A^T & 0 \end{array}\right]$$

donde A es el primer bloque diagonal $L\times L$ de:

$$O_1 \begin{bmatrix} \tanh(\beta(S_1^1+S_1^2)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tanh(\beta(S_N^1+S_N^2)) \end{bmatrix} O_2^T$$

Escribamos la SVD de A como:

$$A = O_1^A \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_L \end{pmatrix} (O_2^A)^T$$

$\Rightarrow$ y definimos $\nu_i = \operatorname{arctanh}(a_i)$

$$\Rightarrow \rho_\beta^{(L)} = \frac{e^{\vec{\sigma}\cdot\vec{\nu}}}{2^L \prod_{i=1}^{L} \cosh(\nu_i)}$$

donde $\vec{\sigma}$ son los que corresponden a la SVD de A

Para cuantificar que tan grande es X_{12} podemos tomar

$$\| X_{12} \|_2 = \sqrt{tr_L (X_{12} X_{12}^{\dagger})}$$

$$= \lim_{\beta \to \infty} \sqrt{\frac{Z_\beta(\vec{s}_1 + \vec{s}_2)}{Z_\beta(\vec{s}_1) Z_\beta(\vec{s}_2)}} \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^{L} \cosh(\nu_i + \nu_i^*)}}{2^{L/2} \prod_{i=1}^{L} |\cosh(\nu_i)|}$$

$$= \lim_{\beta \to \infty} \left[\frac{2^{N/2} (\cosh 2\beta)}{(\cosh \beta)^N} \right]^{C(\vec{s}_1, \vec{s}_2)} \left(\frac{1}{2^{L/2}} \right) \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^{L} \cosh(\nu_i + \nu_i^*)}}{\prod_{i=1}^{L} |\cosh(\nu_i)|}$$

donde $C(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \#$ de coincidencias entre $\vec{s}_1$ y $\vec{s}_2$

lo más razonable es que $\| X_{12} \|_2$ escale exponencialmente, por lo que deberíamos esperar que

$$\| X_{12} \|_2 = 2^{-Nf}$$

$$\Rightarrow f = \lim_{\beta \to \infty} f_\beta \; ; \; f_\beta = -\frac{1}{N} \log_2$$

$$f_\beta = \log_2 \cosh\beta - \frac{C(\vec{s}_1,\vec{s}_2)}{N} \log_2 \cosh 2\beta - \left(\frac{1-\ell}{2}\right)$$

$$+ \ \ell\left(\overline{|\log_2 \cosh \nu|} - \frac{1}{2}\, \overline{\log_2 \cosh\left(2\,\mathrm{Re}(\nu)\right)} \right)$$

donde $\ell = L/N$ y

$$\overline{\log \cosh \nu} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} \log_2 |\cosh \nu_i| \quad , \text{ etc} \ldots$$