

3-mavzu: To'g'ri chiziqning izlari. To'g'ri chiziqdagi nuqta. To'g'ri burchakni proyeksiyalash haqida teorema. Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro xolatlari. To'g'ri chiziqqa oid kompleks masalalarni yechish.

To'g'ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishish nuqtalari **to'g'ri chiziqning izlari** deyiladi.

Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq hamma proyeksiyalar tekisliklarini kesib o'tadi. Biror a to'g'ri chiziqning gorizontaal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi uning *gorizontaal izi*, frontal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi *frontal izi* deyiladi. Shuningdek, to'g'ri chiziqning profil proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi uning *profil izi* deyiladi:

$$a \cap H = a_H, a \cap V = a_V \text{ va } a \cap W = a_W.$$

3.1,a-rasmda, a to'g'ri chiziq izlarini yasashning fazoviy modeli ko'rsatilgan.

To'g'ri chiziqning gorizontaal izini proyeksiyalarini chizmada aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlari bajariladi (3.1-rasm):

- To'g'ri chiziqni frontal a'' proyeksiyasining Ox o'qi bilan kesishish nuqtasi $a''_H = a'' \cap Ox$ topiladi;

- a''_H nuqtadan Ox o'qiga perpendikulyar o'tkaziladi;

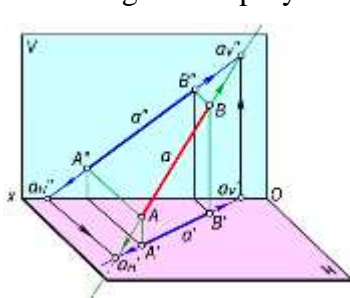
- To'g'ri chiziqning gorizontaal proyeksiyasi a' bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi to'g'ri chiziqning gorizontaal izining gorizontaal proyeksiyasi $a'_H \equiv a_H$ bo'ladi.

To'g'ri chiziq frontal izining proyeksiyalarini chizmada aniqlash uchun:

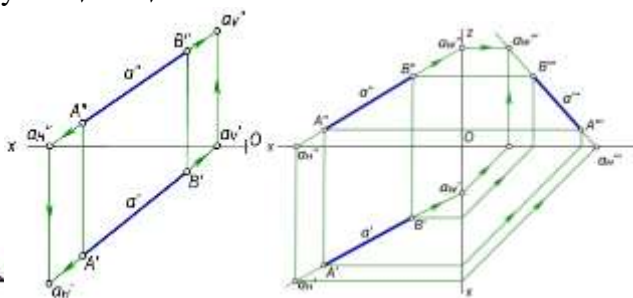
- To'g'ri chiziq gorizontaal a' proyeksiyasining Ox o'qi bilan kesishish nuqtasi $a'_V = a' \cap Ox$ topiladi;

- Bu nuqtadan Ox o'qiga perpendikulyar o'tkaziladi;

- To'g'ri chiziqning frontal proyeksiyasi a'' bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi uning frontal izining frontal proyeksiyasi $a_V'' \equiv a_V$ bo'ladi 3.2-rasm.



a)
3.1-rasm



3.2-rasm

To'g'ri chiziqning profil izini yasash uchun:

- Uning frontal proyeksiyasini Oz o'qi bilan kesishguncha davom ettiriladi.
- Hosil bo'lgan a_W''' nuqtadan Oz ga perpendikulyar chiqariladi.
- To'g'ri chiziqning profil proyeksiyasi bu perpendikulyar bilan kesishguncha davom ettiriladi va $a_W \equiv a_W'''$ aniqlanadi yoki to'g'ri chiziqning a' gorizontaal proyeksiyasi Oy o'qi bilan kesishguncha davom ettiriladi.

- Hosil bo'lgan nuqtadan y o'qiga perpendikulyar chiqariladi.

- Uni a_V'' dan Oz ga chiqarilgan perpendikulyar bilan kesishish nuqtasi a to'g'ri chiziqning profil izining profil proyeksiyasi bo'ladi.

Rasmdagi $a'_W a''_W$ nuqtalar mazkur a to'g'ri chiziq profil izining gorizontaal va frontal proyeksiyalari bo'ladi. a'''_W nuqta a to'g'ri chiziq profil izining profil proyeksiyasidir.

Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligini va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash

Umumiy vaziyatda joylashgan to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyalari orqali uning haqiqiy o'lchamini aniqlash va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash masalasi amaliyotda ko'p uchraydi.

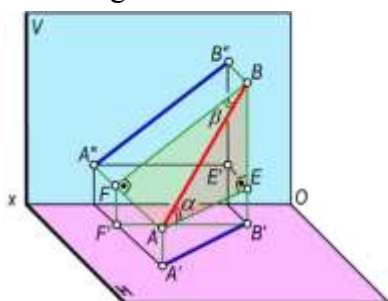
AB to'g'ri chiziq kesmasi hamda uning H , V va W tekisliklardagi proyeksiyalari berilgan bo'lsin (3.3-a, rasm). Kesmaning A nuqtasidan $AE \parallel A'B'$ to'g'ri chiziq o'tkaziladi va to'g'ri burchakli $\triangle ABE$ ni hosil qilinadi. Bunda $BE = BB' - AA'$, bu yerda $AA' = EB' \square \square$ bo'lgani uchun $BE = BB' - EB' = \Delta z$ bo'ladi.

To'g'ri burchakli ABE uchburchakning AB gipotenuzasi AE katet bilan α burchak hosil qiladi. Bu burchak AB kesmaning H tekislik bilan hosil qilgan burchagi bo'ladi.

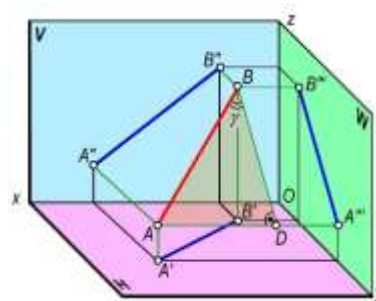
To'g'ri chiziq kesmasining V proyeksiyalar tekisligi bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli ABF uchburchakdan foydalanamiz. Bu uchburchakning BF kateti AB kesmasining frontal proyeksiyasi $A''B''$ ga, ikkinchi AF kateti uning A va B uchlarning V tekislikdan uzoqliklarining ayirmasiga teng bo'ladi. Bunda $AF = AA'' - BB''$, bo'lib, $BB'' = FA''$ bo'lgani uchun $AF = AA'' - FA'' = \Delta y$ bo'ladi.

To'g'ri burchakli ABF ning AB gipotenuzasi BF katet bilan hosil qilgan β burchak AB kesmaning V tekislik bilan hosil qilgan burchagi bo'ladi.

3.3-b, rasmda AB kesmaning W tekislik bilan hosil qilgan γ burchagini aniqlash ko'rsatilgan. Bu burchakni aniqlash uchun to'g'ri burchakli $DABF$ dan foydalanamiz. Bu uchburchakning bir kateti AB kesmasining profil $A'''B'''$ proyeksiyasiga, ikkinchi AD kateti A va B uchlarning W tekislikdan uzoqliklari ayirmasiga teng bo'ladi. Bunda $AD = AA''' - BB'''$, bo'lib, $BB''' = DA'''$ bo'lgani uchun $AD = AA''' - DA''' = \Delta x$ bo'ladi.



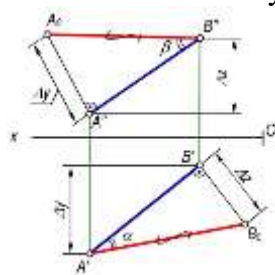
a)



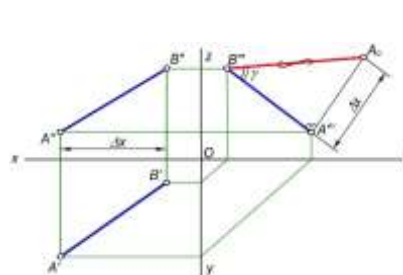
b)

3.3-rasm

Chizmada kesmaning berilgan proyeksiyalari orqali uning haqiqiy uzunligi va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash uchun yuqoridagi fazoviy model asosida to'g'ri burchakli uchburchaklar yasaladi. Shuning uchun bu usulni **to'g'ri burchakli uchburchak usuli** deb yuritiladi.



a)



b)

3.4-rasm

Masalan, AB kesmaning $A'B' \square A''B''$ va $A'''B'''$ proyeksiyalarga asosan uning (3.4-a, rasm) haqiqiy o'lchami va H bilan hosil qilgan α burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli $A'B'B_0$ uchburchak yasaladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning gorizontaal proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa kesmaning A va B uchlarining applikatalari ayirmasi Δz ga teng bo'ladi. Bu uchburchakning $A'B_0$ gipotenuzasi AB kesmaning haqiqiy o'lchami, $A'B_0=AB$ bo'lib, $AB^H=\angle B'A'B_0=\alpha$ bo'ladi.

Kesmaning V tekislik bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli $\Delta A''B''A_0$ ni yasaladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning frontal $A''B''$ proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa AB kesma uchlarining ordinatalari ayirmasi Δy ga teng bo'ladi. Hosil bo'lgan $B''A_0=AB$ bo'lib, $AB^V=\angle A''B''A_0=\beta$ bo'ladi.

AB kesmaning W tekislik bilan hosil etgan burchagini aniqlash uchun esa to'g'ri burchakli $\Delta A'''B'''A_0$ ni yasaymiz (3.4,b-rasm). Bu uchburchakning bir kateti kesmaning profil $A'''B'''$ proyeksiyasi, ikkinchi kateti kesma uchlarining W tekislikdan uzoqliklarning absissalar ayirmasi Δx bo'ladi. Hosil bo'lgan $B'''A_0=AB$ bo'lib, $AB^W=\angle A'''B'''A_0=\gamma$ teng bo'ladi.

Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatlari

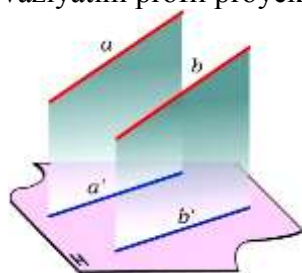
Ikki to'g'ri chiziq fazoda o'zaro parallel, kesuvchi yoki ayqash vaziyatlarda bo'lishi mumkin.

Agar ikki to'g'ri chiziqning kesishuv nuqtasi bo'lmasa (yoki umumiy xosmas nuqtaga ega bo'lsa), ularni **parallel to'g'ri chiziqlar** deyiladi.

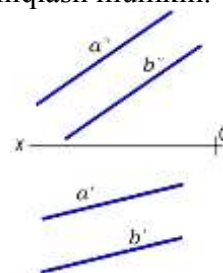
Parallel proyeksiyalarning xossasiga asosan parallel to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi (3.5,a,b-rasm), ya'ni $a \parallel b$ bo'lsa, u holda $a' \parallel b'$, $a'' \parallel b''$, $a''' \parallel b'''$ bo'ladi.

Fazodagi umumiy vaziyatda joylashgan parallel to'g'ri chiziqlarning ikkita bir nomli proyeksiyalari o'zaro parallel bo'lsa, ularning uchinchi proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi.

Ammo to'g'ri chiziqlar biror proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, u holda yuqorida keltirilgan shart bajarilmaydi. Masalan, W tekislikka parallel bo'lgan profil to'g'ri chiziq kesmalarining bir nomli gorizontaal va frontal proyeksiyalari (p_1 va p_2) ning o'zaro parallel bo'lishi yetarli bo'lmaydi (3.6,a-rasm). Bunday hollarda to'g'ri chiziqlarning profil proyeksiyalarini yasash zarur. Bunda $p_1''' \parallel p_2'''$ bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi. Agar $p_1''' \cap p_2'''$, bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar ayqash bo'ladi. Shuningdek, bu to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyatini profil proyeksiyalaridan foydalanmasdan ham aniqlash mumkin.



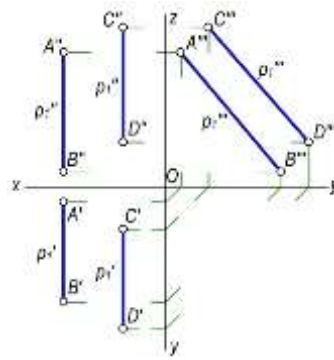
a) 3.5-rasm b)



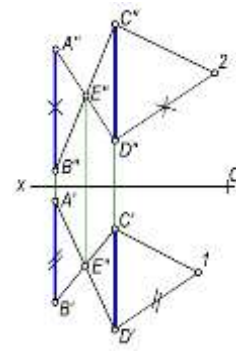
Buning uchun:

- to'g'ri chiziq kesmalarining bir nomli proyeksiyalarining nisbatlari tengligini aniqlaymiz. Kesmaning biror, masalan, D' , D'' nuqtasidan ixtiyoriy (o'tkir burchak ostida) parallel chiziqlar o'tkazib, $D'1=A'B'$ va $D'2=A''B''$ kesmalarni qo'yiladi (3.6-b,rasm). So'ngra 1 va 2 nuqtalarni C' va C'' bilan tutashtiramiz. Agar $C'1 \parallel C''2$ bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi. Aks holda bu to'g'ri chiziqlar ayqash to'g'ri chiziqlar ekanligini isbotlanadi;

- to'g'ri chiziq kesmalarining bir nomli nuqtalarini o'zaro kesishadigan qilib to'g'ri chiziqlar bilan tutashtiramiz (3.6-b,rasm). Agar chiziqlarning kesishish nuqtasining E' va E'' proyeksiyalari bir bog'lovchi chiziqda bo'lsa, u holda CD va AB to'g'ri chiziqlar bir tekislikka tegishli va o'zaro parallel bo'ladi.



a)



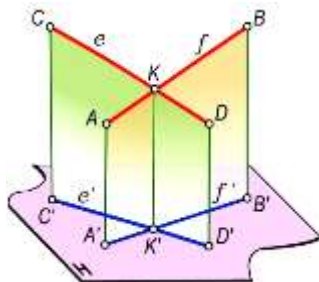
b)

3.6-rasm

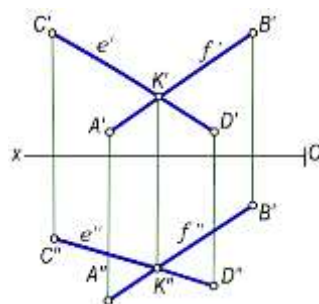
Agar ikki to'g'ri chiziq fazoda umumiy bir (xos) nuqtaga ega bo'lsa, ularni **kesishuvchi to'g'ri chiziqlar** deyiladi.

Fazodagi to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasining proyeksiyasi shu to'g'ri chiziqlar proyeksiyalarining kesishish nuqtasida bo'ladi (3.7-rasm). Kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham chizmada o'zaro kesishadi va kesishish nuqta proyeksiyalari bir proyeksion bog'lovchi chiziqda bo'ladi.

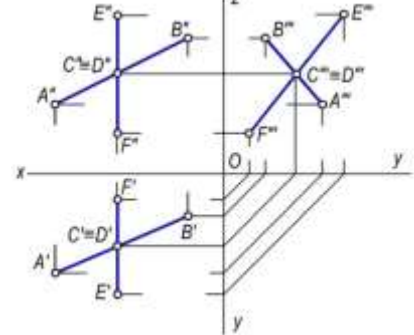
Fazoda umumiy vaziyatda kesishuvchi to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlarning faqat ikkita bir nomli proyeksiyalarining kesishishi kifoya qiladi.



a)



b)



v)

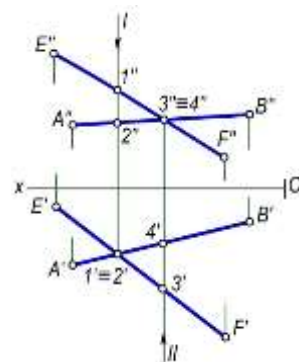
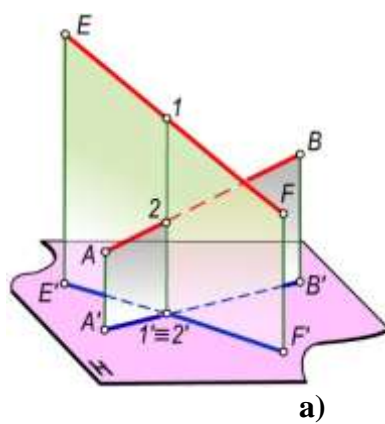
3.7-rasm

Agar kesishuvchi chiziqlarning biri proyeksiyalar tekisligining birortasiga parallel bo'lsa, u holda ularning ikkita bir nomli proyeksiyalarining o'zaro kesishuvi yetarli bo'lmaydi. Masalan, AB va EF to'g'ri chiziq kesmalarining biri EF kesma W tekislikka parallel joylashgan (3.7,v-rasm). Bu chiziqlarning o'zaro vaziyatini ularning profil proyeksiyalarini yasash bilan aniqlash mumkin. Agar kesishish nuqtasining proyeksiyalari bir bog'lovchi chiziqda joylashsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro kesishadi, aks holda to'g'ri chiziqlar kesishmaydi.

Ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'lmasa yoki kesishmasa ular **ayqash to'g'ri chiziqlar** deyiladi.

Ma'lumki, parallel va kesuvchi to'g'ri chiziqlar bitta tekislikka tegishli bo'ladi. Uchrashmas to'g'ri chiziqlar esa bir tekislikda yotmaydi (3.8,a,b-rasm). Uchrashmas to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari chizmada o'zaro kesishsa ham, ammo kesishish nuqtalari bir bog'lovchi chiziqqa tegishli bo'lmaydi.

Masalan, 3.8-rasmda $AB(A'B', A''B'')$ va $EF(E'F', E''F'')$ uchrashmas chiziqlar berilgan. Bu to'g'ri chiziqlar proyeksiyalarining $1' \equiv 2'$ va $3'' \equiv 4''$ kesishish nuqtalari fazoda bu to'g'ri chiziqlarning har biriga tegishli ikki nuqtaning proyeksiyalari bo'lmay, aksincha, $1 \in EF$, $2 \in AB$ va $3 \in EF$, $4 \in AB$ bo'ladi.



3.8-rasm Nazorat savollari

1. To'g'ri chiziqning izlari nima?
2. Qanday xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqlarni bilasiz?
3. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligi qanday yasaladi?
4. O'zaro parallel to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari qanday bo'ladi?