

7-mavzu:

To'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligi sharti. Ularning algoritmi. Masalalarni yechish algoritmi. Tekisliklarning o'zaro perpendikulyarligi

Tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqdan o'tuvchi barcha tekisliklar berilgan tekislikka **perpedikulyar** bo'ladi.

Bu ta'rifdan quyidagi xulosaga kelish mumkin, ya'ni tekislikka tegishli to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan har qanday tekislik mazkur tekislikning o'ziga ham perpendikulyar bo'ladi (7.1-rasm).

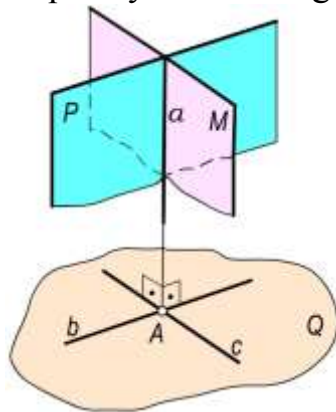
Demak, bir-biriga perpendikulyar bo'lgan tekisliklarni yasash ikki usul bilan bajarilishi mumkin:

- Tekislikka perpedikulyar to'g'ri chiziqdan tekislik o'tkazish
- Tekislikka tegishli to'g'ri chiziqqa perpedikulyar tekislik o'tkazish.

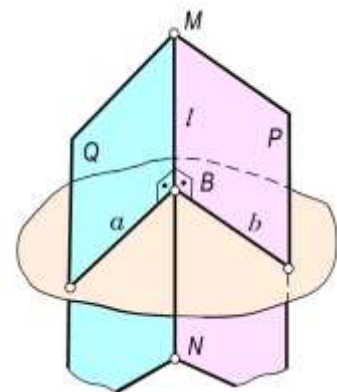
Agar biror tekislik ikki tekislikka umumiy bo'lgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, u holda bu **tekislik har ikkala tekisliklarga ham perpendikulyar** bo'ladi.

Ma'lumki, Q va P tekisliklarga umumiy bo'lgan to'g'ri chiziq ularning l kesishish chizig'i bo'ladi. Tekisliklarning l kesishish chizig'ida ixtiyoriy B nuqta tanlab olamiz (7.9-rasm). Bu nuqtadan l ga perpendikulyar qilib a va b chiziqlarni o'tkazamiz. Natijada $a \cap b$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlar T tekislikni hosil qiladi. Bu tekislik esa berilgan Q va P tekisliklarga perpendikulyar bo'ladi (7.2-rasm).

Demak, berilgan T tekislikka perpedikulyar bo'lgan l to'g'ri chiziqdan o'tuvchi har qanday tekislik unga perpendikulyar bo'ladi.



7.1-rasm



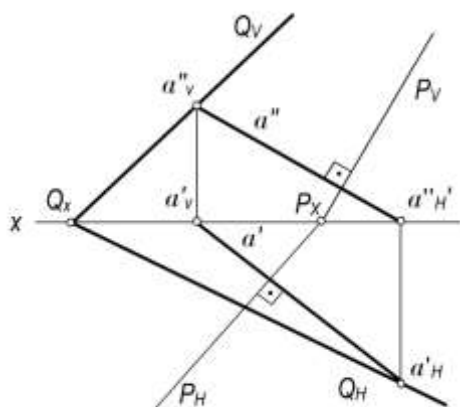
7.2-rasm

1-masala. $P(P_H, P_V)$ tekislikka perpendikulyar va Q_x dan o'tuvchi Q tekislik izlari bilan o'tkazilsin (7.3 -rasm).

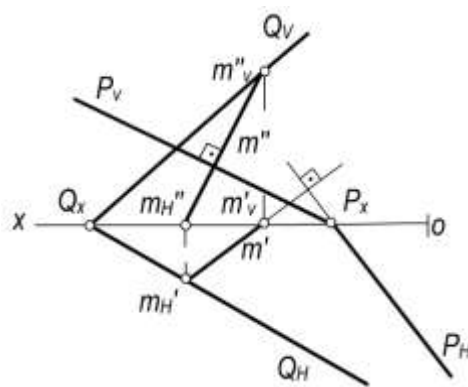
Echish.

- P tekislikka perpendikulyar bo'lgan ixtiyoriy a to'g'ri chiziq o'tkaziladi.
- Bu to'g'ri chiziqning a_H' , a_H'' va a_V' , a_V'' izlarining proyeksiyalarini yasaladi.
- Izlangan Q tekislikning gorizonttal Q_H izini $Q_H \supset a_H'$ va $Q_H \supset Q_x$ qilib o'tkaziladi, uning frontal Q_V izini $Q_V \supset a_V''$ va $Q_V \supset Q_x$ qilib o'tkaziladi.

Bu masalani quyidagicha yechish ham mumkin: Q tekislikka perpendikulyar va P_x dan o'tuvchi tekislikni o'tkazish uchun (7.4 -rasm) Q tekislikda ixtiyoriy $m \supset Q$ to'g'ri chiziq olamiz. P tekislikning izlarini P_x dan $P_H \perp m'$ va $P_V \perp m''$ qilib o'tkaziladi. Natijada, $P \perp Q$ bo'ladi.



7.3-rasm



7.4-rasm

2-masala. Kesishuvchi $a \cap b (a' \cap b', a'' \cap b'')$ chiziqlar bilan berilgan tekislikka $d (d', d'')$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi perpendikulyar tekislik o'tkazish talab qilinsin (7.5 -rasm).

Echish:

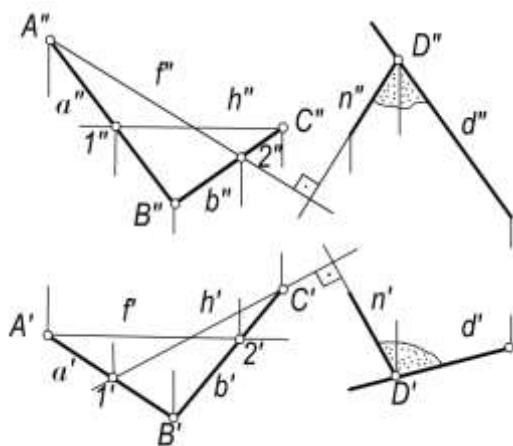
- berilgan tekislikning gorizontali va frontalining h', h'' va f', f'' chiziqlari o'tkaziladi;
- d to'g'ri chiziqning ixtiyoriy $D(D', D'')$ nuqtasidan $n(n', n'')$ to'g'ri chiziqning proyeksiyalarini $n' \perp h'$ va $n'' \perp f''$ qilib o'tkaziladi. Hosil bo'lgan $d' \cap n'$ va $d'' \cap n''$ kesishuvchi chiziqlar hosil qilgan tekislik berilgan tekislikka perpendikulyar tekislikning proyeksiyalari bo'ladi.

3-masala. $A(A', A'')$ nuqtadan $Q(Q_H, Q_V)$ va $P(P_H, P_V)$ tekisliklarga perpendikulyar bo'lgan $T(T_H, T_V)$ tekislik o'tkazish talab qilinsin (7.6 -rasm).

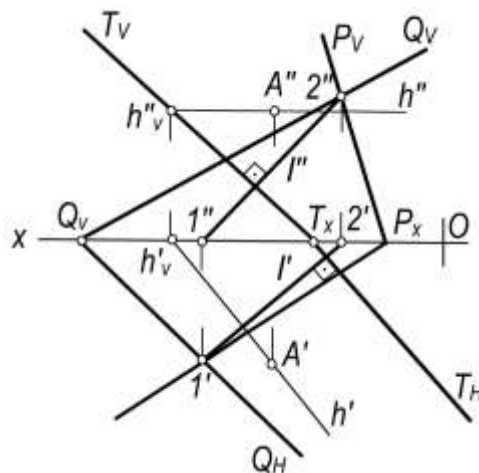
Yechish:

- Q va P tekisliklarning kesishish chizig'ining l', l'' proyeksiyalarni yasaladi;
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan izlangan tekislikning gorizontali (yoki frontali) ni tekisliklarning kesishish chizig'iga perpendikulyar qilib o'tkaziladi: $h' \perp l' \wedge h' \ni A'$ va $h'' \parallel Ox \wedge h'' \ni A''$ va uning izlarning h'_V, h''_V proyeksiyalarni yasaladi;
- izlangan tekislikning frontal izini $T_V \supset h''$, $T_V \perp l''$ $T_H \ni T_X$, $T_H \perp l'$ qilib o'tkaziladi.

Natijada, berilgan ikki tekislikka perpendikulyar bo'lgan uchinchi tekislik yasaladi: $T \perp Q$ va $T \perp P$.



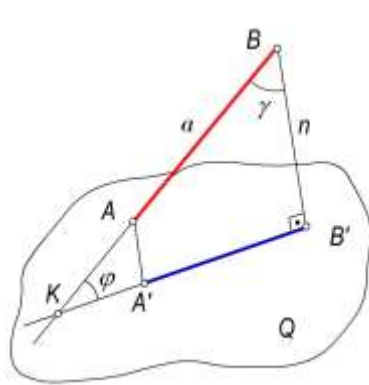
7.5-rasm



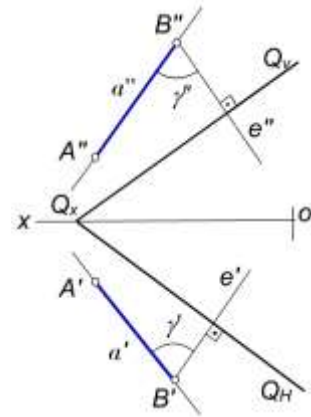
7.6-rasm

To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak aniqlash.

Ta'rif. To'g'ri chiziq bilan uning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi orasidagi burchak shu to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak deyiladi.



a)



b)

7.7-rasm

To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak 7.7,a-rasmida ko'rsatilgan. Bu fazoviy modeldan foydalanib quyidagi yasash algoritmlarini keltirish mumkin:

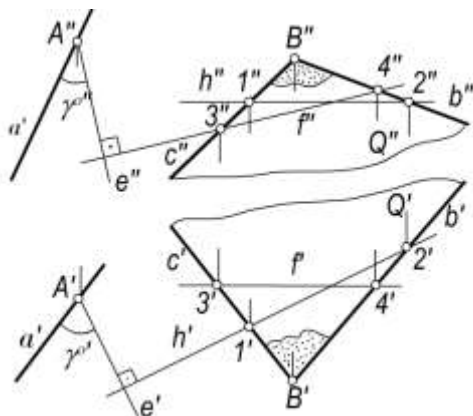
- Berilgan a to'g'ri chiziqni Q tekislik bilan kesishish nuqtasi aniqlanadi: $L = a \cap Q$.
- To'g'ri chiziqda ixtiyoriy B nuqta tanlab olinadi. Bu nuqtadan berilgan Q tekislikka n perpendikulyarni tushirib, uning Q tekislik bilan kesishuv nuqtasini aniqlanadi: $B' = n \cap Q$.
- So'ngra L va B nuqtalarni o'zaro tutashtirish natijasida hosil bo'lgan burchak a to'g'ri chiziq va Q tekislik orasidagi φ burchak bo'ladi.

Chizmada to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni aniqlash uchun yuqorida keltirilgan yasash algoritmlarni to'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarligi va kesishishi qoidalaridan foydalanib bajariladi. Bunda φ burchak a to'g'ri chiziqning ixtiyoriy B nuqtasidan Q tekislikka tushirilgan perpendikulyar orasidagi γ burchak orqali aniqlanadi (7.7.-a,b rasm). $\varphi^\circ + \gamma^\circ = 90^\circ$ bo'lgani uchun $\varphi^\circ = 90^\circ - \gamma^\circ$ bo'ladi.

Masala. $Q(b \cap c)$ tekislik va a to'g'ri chiziq orasidagi φ burchakni aniqlansin (7.8-rasm).

Yechish:

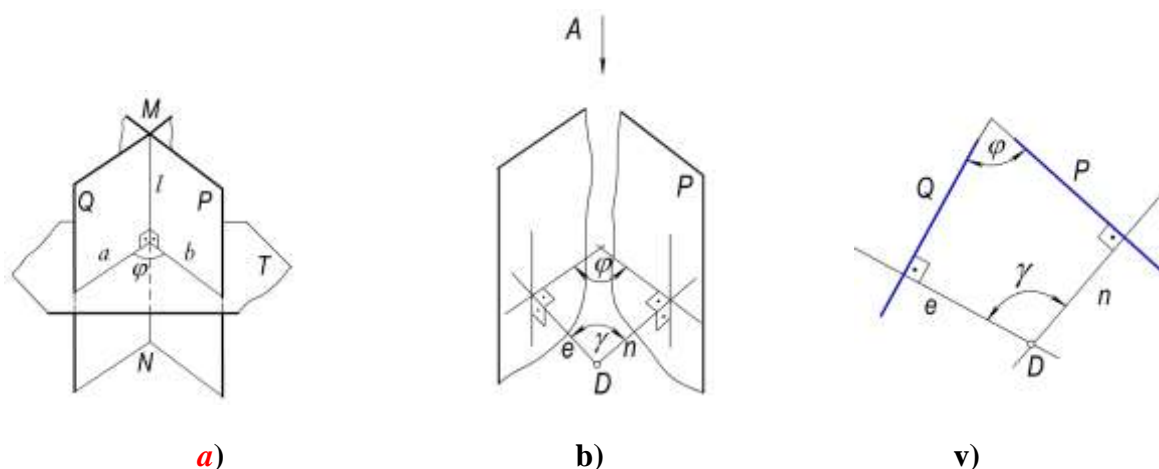
- tekislikning h (h' , h'') gorizontali va f (f' , f'') frontali o'tkaziladi;
- to'g'ri chiziqning ixtiyoriy $A(A'$, A'') nuqtasidan tekislikning gorizontali va frontaliga $e(e'$, e'') perpendikulyar o'tkaziladi. Bunda: $e' \perp A'$, $e'' \perp A''$ bo'ladi.
- a va e to'g'ri chiziqlar orasidagi $\gamma(\gamma'$, $\gamma'')$ burchak belgilanadi. Natijada, $\varphi^\circ = 90^\circ - \gamma^\circ$ aniqlanadi.



7.8-rasm

Ikki tekislik orasidagi burchak.

Ikki tekislik orasidagi burchak ularning kesishish chizig'iga perpendikulyar bo'lgan ikki to'g'ri chiziqlar orasidagi chiziqli burchak bilan o'lchanadi.



7.9-rasm

Bu chiziqli burchakni quyidagi yasash algoritmlari bilan aniqlanadi (7.9- a, rasm).

- P va Q tekisliklarning l kesishish chizig'ini yasaladi.
- Tekisliklarning l kesishish chizig'iga tegishli ixtiyoriy $A \in l$ nuqtadan perpendikulyar qilib T tekislik o'tkaziladi. Bu tekislik Q va P tekisliklarga ham perpendikulyar bo'ladi.
- T tekislikning Q va P tekisliklar bilan kesishish a va b chiziqlar yasaladi: $a = Q \cap T$ va $b = P \cap T$.
- Tekisliklarning kesishish chiziqlari orasidagi $a \wedge b = \varphi$ izlangan burchak bo'ladi.

P va Q ikki tekisliklar orasidagi burchakni quyidagicha ham aniqlash mumkin (7.9-b, rasm):

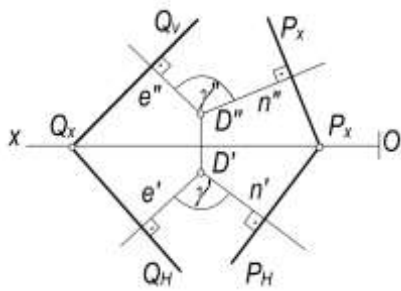
Fazoning ixtiyoriy D nuqtasidan berilgan Q va P tekisliklarga ye va n perpendikulyarlar tushirib, bu perpendikulyarlar orasidagi γ burchak orqali φ burchakning qiymati $\varphi = 180^\circ - \gamma$ formula orqali aniqlanadi.

1-masala. $Q(Q_H, Q_V)$ va $P(P_H, P_V)$ tekisliklar orasidagi burchakni aniqlansin (4.68-rasm).

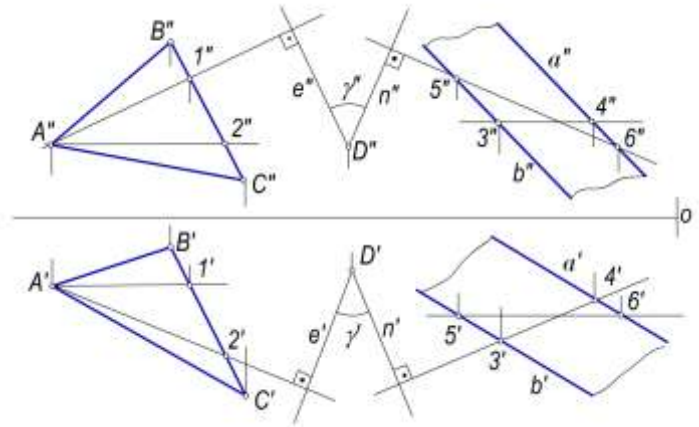
Yechish. Ixtiyoriy $D(D', D'')$ nuqtani tanlab olamiz (7.10-rasm) va uning D' , D'' proyeksiyalaridan ye va n perpendikulyarlarning proyeksiyalarini $e' \perp Q_H \wedge e'' \perp Q_V$ va $n' \perp P_H \wedge n'' \perp P_V$ qilib o'tkaziladi. Chizmada hosil bo'lgan γ burchakning γ' va γ'' proyeksiyalari orqali uning haqiqiy qiymatini aniqlab, φ burchakni $\varphi = 180^\circ - \gamma$ formula orqali topamiz.

2-masala. $\triangle ABC$ va $a \parallel b$ to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari bilan berilgan tekisliklar orasidagi burchakni aniqlansin.

Yechish. Ixtiyoriy $D(D', D'')$ nuqta tanlab olinadi (7.11-rasm). Uning D' va D'' proyeksiyalaridan tekisliklarning gorizontallari va frontallariga $ye' \perp h_1''$, $e'' \perp f_1''$ va $n' \perp h_2'$, $n'' \perp f_2''$ qilib perpendikulyarlar o'tkaziladi. Natijada, hosil bo'lgan $\gamma(\gamma', \gamma'')$ burchakning haqiqiy o'lchamini aniqlab, so'ngra $\varphi = 180^\circ - \gamma^\circ$ burchak aniqlanadi.



7.10-rasm



7.11-rasm

Nazorat savollari

1. Tekislik chizmada qanday berilishi mumkin?
2. Tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqning proyeksiyalari qanday vaziyatda bo'ladi?
3. Qanday tekisliklar o'zaro perpendikulyar deyiladi?