2-mavzu:

To’g’ri chiziqning ortogonal proyeksiyalashdagi invariant xossalari. Xossalarning algoritmi. Kesmaning xaqiqiy uzunligini va proyeksiya tekisliklari bilan xosil qilgan og’ish burchaklarini aniqlash. To’g’ri burchak usuli. To’g’ri chiziq epyuri. Nuqtaning to’g’ri chiziqka tegishliligi. Kesmani berilgan nisbatta bo’lish. Fales teoremasi.
Xususiy vaziyatdagi to’g’ri chiziqlarning fazoviy chizmasi va epyuri. Ularning xossalari. To’g’ri chiziqning izlari. Ikki to’g’ri chiziqning o’zaro joylashuvi. O’zaro parallel, o’zaro kesishuvchi, bir-biri bilan uchrashmas (ayqash). Raqobat (konkurent) nuqtalar.

Dars rejasi:

1. To’g’ri chiziqlarni tasvirlash.

2. To’g’ri chaziqning proyeksiyalari.

3. To’g’ri chiziqning proyeksiya tekisliklariga nisbatan xususiy xollari

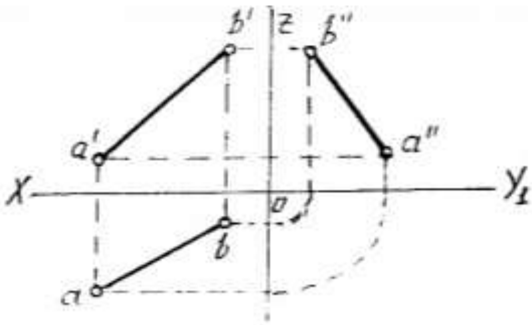
Proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan to’g’ri chiziqning fazodagi joylanishiga qarab, to’g’ri chiziqlar quyidagi ikki xil vaziyatda bo’lishi mumkin:

1. Agar berilgan to’g’ri chiziq proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan parallel yoki perpendikulyar bo’lmasa, bunday to’g’ri chiziqlarga umumiy vaziyatdagi to’g’ri chiziqlar deb ataladi;

2. Agar to’g’ri chiziq proyeksiyalar tekisliklarining birontasiga parallel yoki perpendikulyar bo’lsa, bunday to’g’ri chiziqlarga xususiy vaziyatdagi to’g’ri chiziqlar deb ataymiz. Xususiy xoldagi to’g’ri chiziqlar olti xil vaziyatda bo’lishi mumkin.

To’g’ri chiziqning proyeksiyalari

To’g’ri chiziq yoki to’g’ri chiziq kesmasi ikki nuqta bilan belgilanadi. Bu nuqta koordinatalari yoki proyeksiyalari bilan berilishi mumkin. Shunga ko’ra, epyurada to’g’ri chiziqning proyeksiyalarini yasash uchun nuqtalarning bir nomli proyeksiyalarini o’zaro tutashtirish kerak. Misol tariqasida, 2.1-rasmda *A* (*a*, *a*’, *a*’’), *B* (*b*, *b*’, *b*’’) nuqtalardan o’tgan to’g’ri chiziqning proyeksiyalari ko’rsatilgan. *A* va *B* nuqtalar proyeksiya tekisliklarining xar biridan xar xil oraliqda turibdi. Demak, bu *AB* to’g’ri chiziq proyeksiya tekisliklarining xar qaysisiga ham og’madir. Bunday to’g’ri chiziq umumiy vaziyatdagi to’g’ri chiziq deyiladi.



2.1-rasm

Umumiy vaziyatdagi kesmaning ortogonal proyeksiyalaridan har biri kesmaning o’zidan qisqadir (*AB*<*AB*, *a’b’*<*AB*, *a’’b’’*<*AB*).

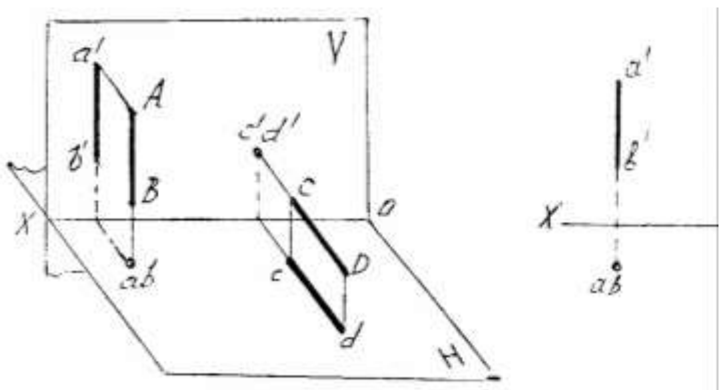
Og’ma kesmaning proyeksiyalari proyeksiya o’qlariga nisbatan og’ma bo’ladi.

Proyeksiya tekisliklaridan biriga perpendikulyar yoki parallel bo’lgan to’g’ri chiziq xususiy vaziyatdagi to’g’ri chiziq deyiladi. Proyeksiya tekisliklarida yotgan to’g’ri chiziqlar ham shu gruppaga kiradi.

To’g’ri chiziqning proyeksiya tekisliklariga nisbatan xususiy xollari

1. Agar to’g’ri chiziq proyeksiya tekisliklaridan biriga perpendikulyar bo’lsa, uning shu tekislikdagi proyeksiyasi nuqta bo’ladi, bu nuqta ikkita xarf bilan belgilanadi: boshqa tekisliklardagi proyeksiyalari tegishli proyeksiyalar o’qlariga perpendikulyar to’g’ri chiziqlar bo’ladi.

Misol tariqasida, 2.2-rasmda gorizontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo’lgan *AB* chiziqning va frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo’lgan *CD* chiziqning fazoviy tasviri va epyuri ko’rsatilgan.
AB va *CD* kesmalarning ularga parallel bo’lgan tekisliklardagi proyeksiyalari shu kesmalarga teng, ya’ni *AB*=*a’b’*; *CD*=*cd* bo’ladi.

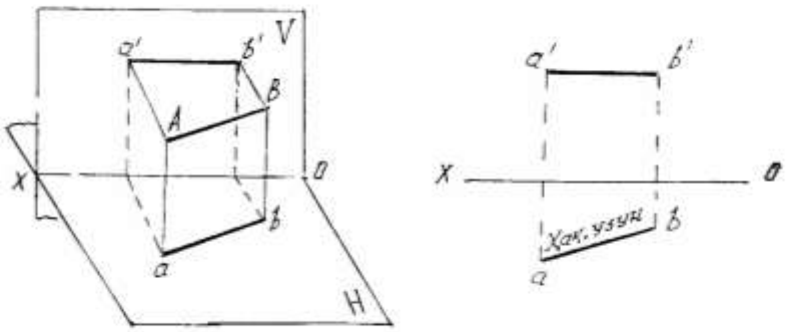


2.2-rasm

Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo’lgan to’g’ri chiziq proyeksiyalovchi to’g’ri chiziq deyiladi.

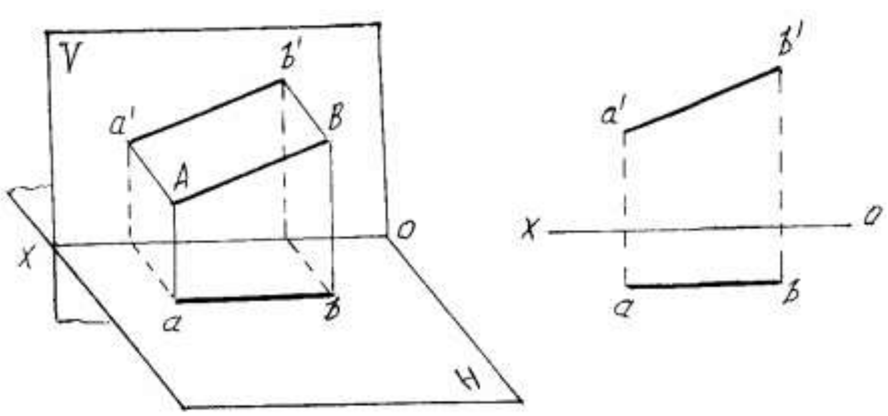
2. Agar to’g’ri chiziq kesmasi proyeksiya tekisliklaridan faqat bittasiga parallel bo’lsa, uning shu tekislikdagi proyeksiyasi o’ziga teng, boshqa proyeksiyalar esa tegishli proyeksiyalar o’qlariga parllel bo’ladi.

3. 2.3-rasmda *H* tekislikka parallel *AB* kesma tasvirlangan. Bu chiziqning barcha nuqtalari uchun applikata (*z*) o’zgarmasdir.



2.3-rasm

Kesmaning haqiqiy uzunligi gorizontal proyeksiyasiga teng (*AB*=*AB*) Kesmaning gorizontal proyeksiyasi bilan *OX* o’qi orasidagi burchak *AB* bilan *V* orasidagi burchakka teng. *H* tekislikka parallel chiziq gorizontal chiziq yoki, qisqacha, gorizontal deyiladi. 2.4-rasmda *V* tekislikka parallel kesma tasvirlangan. Bu chiziq uchun ordinata o’zgarmasdir. *AB*=*a*’*b*’; *AB*//*OX*. Kesmaning frontal proyeksiyasi bilan *OX* o’qi orasidagi burchak *AB* bilan *H* orasidagi burchakka teng. *V* tekislikka parallel chiziq frontal chiziq yoki, qisqacha frontal deyiladi. *W* tekislikka parallel chiziq profil chiziq deyiladi.



2.4-rasm

To‘g‘ri chiziqning izlari

To‘g‘ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishish nuqtalari **to‘g‘ri chiziqning izlari** deyiladi.

Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq hamma proyeksiyalar tekisliklarini kesib o‘tadi. Biror *a* to‘g‘ri chiziqning gorizontal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi uning *gorizontal izi*, frontal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi f*rontal izi* deyiladi. Shuningdek, to‘g‘ri chiziqning profil proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi uning *profil izi* deyiladi:

$$a \cap H = a_H,\ a \cap V = a_V \text{ va } a \cap W = a_W.$$

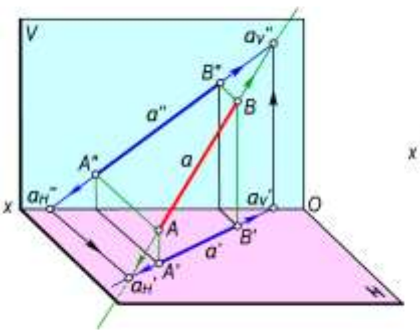
2.5,a-rasmda, *a* to‘g‘ri chiziq izlarini yasashning fazoviy modeli ko‘rsatilgan.

To‘g‘ri chiziqning gorizontal izini proyeksiyalarini chizmada aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlari bajariladi (2.5-rasm):

- To‘g‘ri chiziqni frontal a'' proyeksiyasining Ox o‘qi bilan kesishish nuqtasi $a''_H=a''\cap Ox$ topiladi;
- a''_H nuqtadan Ox o‘qiga perpendikulyar o‘tkaziladi;
- To‘g‘ri chiziqning gorizontal proyeksiyasi a' bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi to‘g‘ri chiziqning gorizontal izining gorizontal proyeksiyasi $a'_H \equiv a_H$ bo‘ladi.

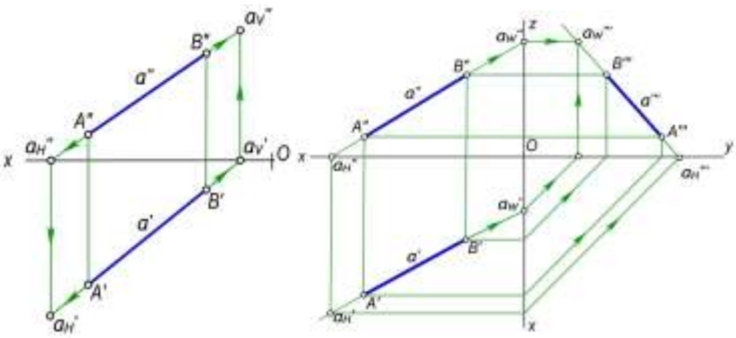
To‘g‘ri chiziq frontal izining proyeksiyalarini chizmada aniqlash uchun:

- To‘g‘ri chiziq gorizontal a' proyeksiyasining Ox o‘qi bilan kesishish nuqtasi $a'_V=a'\cap Ox$ topiladi;
- Bu nuqtadan Ox o‘qiga perpendikulyar o‘tkaziladi;
- To‘g‘ri chiziqning frontal proyeksiyasi a'' bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi uning frontal izining frontal proyeksiyasi $a_V'' \equiv a_V$ bo‘ladi 2.6-rasm.



a)

2.5-rasm



b)

2.6-rasm

To‘g‘ri chiziqning profil izini yasash uchun:

- Uning frontal proyeksiyasini Oz o‘qi bilan kesishguncha davom ettiriladi.
- Hosil bo‘lgan a_W''' nuqtadan Oz ga perpendikulyar chiqariladi.
- To‘g‘ri chiziqning profil proyeksiyasi bu perpendikulyar bilan kesishguncha davom ettiriladi va $a_W \equiv a_W'''$ aniqlanadi yoki to‘g‘ri chiziqning a' gorizontal proyeksiyasi Oy o‘qi bilan kesishguncha davom ettiriladi.
- Hosil bo‘lgan nuqtadan y o‘qiga perpendikulyar chiqariladi.
- Uni a_V'' dan Oz ga chiqarilgan perpendikulyar bilan kesishish nuqtasi a to‘g‘ri chiziqning profil izining profil proyeksiyasi bo‘ladi.

Rasmdagi $a'_W\ a''_W$ nuqtalar mazkur a to‘g‘ri chiziq profil izining gorizontal va frontal proyeksiyalari bo‘ladi. a'''_W nuqta a to‘g‘ri chiziq profil izining profil proyeksiyasidir.

Umumiy vaziyatdagi to’g’ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligini va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash

Umumiy vaziyatda joylashgan to‘g‘ri chiziq kesmasining proyeksiyalari orqali uning haqiqiy o‘lchamini aniqlash va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash masalasi amaliyotda ko‘p uchraydi.

AB to‘g‘ri chiziq kesmasi hamda uning H, V va W tekisliklardagi proyeksiyalari berilgan bo‘lsin (2.7-*a*,rasm). Kesmaning *A* nuqtasidan $AE \| A'B'$ to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi va to‘g‘ri burchakli $\triangle ABE$ ni hosil qilinadi. Bunda $BE=BB'-AA'$, bu yerda $AA'=EB'$ bo‘lgani uchun $BE=BB'-EB'=\Delta z$ bo‘ladi.

To‘g‘ri burchakli *ABE* uchburchakning *AB* gipotenuzasi *AE* katet bilan α burchak hosil qiladi. Bu burchak *AB* kesmaning *H* tekislik bilan hosil qilgan burchagi bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziq kesmasining V proyeksiyalar tekisligi bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun to‘g‘ri burchakli *ABF* uchburchakdan foydalanamiz. Bu uchburchakning *BF* kateti *AB* kesmasining frontal proyeksiyasi $A''B''$ ga, ikkinchi *AF* kateti uning *A* va B uchlarining V tekislikdan uzoqliklarining ayirmasiga teng bo‘ladi. Bunda $AF=AA''-BB''$, bo‘lib, $BB''=FA''$ bo‘lgani uchun $AF=AA''-FA''=\Delta y$ bo‘ladi.

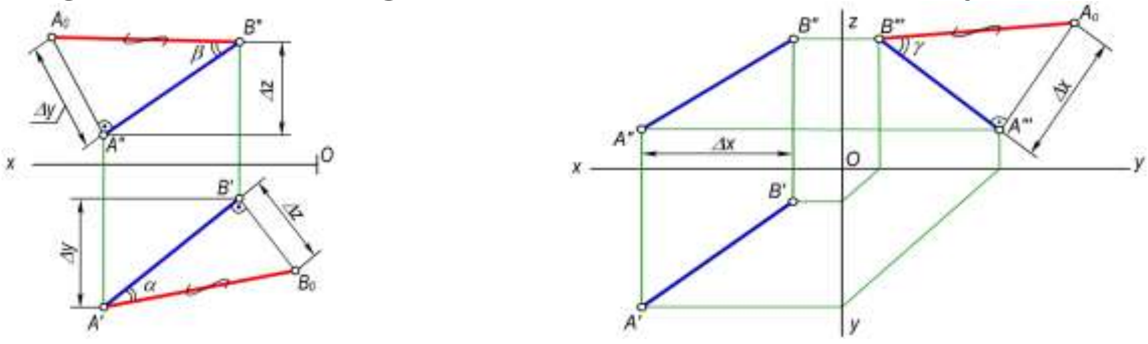
To‘g‘ri burchakli *ABF* ning *AB* gipotenuzasi *BF* katet bilan hosil qilgan β burchak *AB* kesmaning V tekislik hosil qilgan burchagi bo‘ladi.

2.7-*b*, rasmda *AB* kesmaning W tekislik bilan hosil qilgan γ burchagini aniqlash ko‘rsatilgan. Bu burchakni aniqlash uchun to‘g‘ri burchakli D*ABF* dan foydalanamiz. Bu uchburchakning bir kateti *AB* kesmasining profil $A'''B'''$ proyeksiyasiga, ikkinchi *A*D kateti *A* va *B* uchlarining W tekislikdan uzoqliklari ayirmasiga teng bo‘ladi. Bunda $AD=AA'''-BB'''$, bo‘lib, $BB'''=DA'''$ bo‘lgani uchun $AD=AA'''-DA'''=\Delta x$ bo‘ladi.

a) **b)**

2.7-rasm

Chizmada kesmaning berilgan proyeksiyalari orqali uning haqiqiy uzunligi va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash uchun yuqoridagi fazoviy model asosida to‘g‘ri burchakli uchburchaklar yasaladi. Shuning uchun bu usulni **to‘g‘ri burchakli uchburchak usuli** deb yuritiladi.



a)

b)

2.8-rasm

Masalan, AB kesmaning $A'B'$, $A''B''$ va $A'''B'''$ proyeksiyalarga asosan uning (2.8-a, rasm) haqiqiy o‘lchami va H bilan hosil qilgan α burchagini aniqlash uchun to‘g‘ri burchakli $A'B'B_0$ uchburchak yasaladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning gorizontal proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa kesmaning A va B uchlarining applikatalari ayirmasi Δz ga teng bo‘ladi. Bu uchburchakning $A'B_0$ gipotenuzasi AB kesmaning haqiqiy o‘lchami, $A'B_0=AB$ bo‘lib, AB^H=$\angle B'A'B_0=\alpha$ bo‘ladi.

Kesmaning V tekislik bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun to‘g‘ri burchakli $\triangle A''B''A_0$ ni yasaladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning frontal $A''B''$ proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa AB kesma uchlari ordinatalari ayirmasi Δy ga teng bo‘ladi. Hosil bo‘lgan $B''A_0=AB$ bo‘lib, AB^V=$\angle A''B''A_0=\beta$ bo‘ladi.

AB kesmaning W tekislik bilan hosil etgan burchagini aniqlash uchun esa to‘g‘ri burchakli $\triangle A'''B'''A_0$ ni yasaymiz (2.8,b-rasm). Bu uchburchakning bir kateti kesmaning profil $A'''B'''$ proyeksiyasi, ikkinchi kateti kesma uchlarning W tekislikdan uzoqliklarning absissalar ayirmasi Δx bo‘ladi. Hosil bo‘lgan $B'''A_0 = AB$ bo‘lib, AB^W=$\angle A'''B'''A_0 =\gamma$ teng bo‘ladi.

Ikki to’g’ri chiziqning o’zaro vaziyatlari

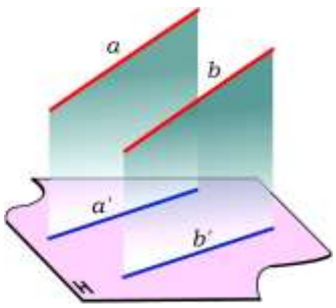
Ikki to‘g‘ri chiziq fazoda o‘zaro parallel, kesuvchi yoki ayqash vaziyatlarda bo‘lishi mumkin.

Agar ikki to’g’ri chiziqning kesishuv nuqtasi bo’lmasa (yoki umumiy xosmas nuqtaga ega bo’lsa), ularni **parallel to‘g‘ri chiziqlar** deyiladi.

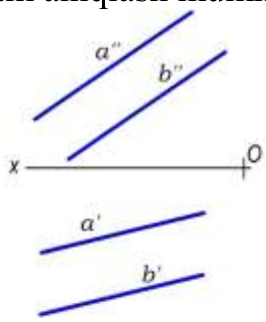
Parallel proyeksiyalarning xossasiga asosan parallel to‘g‘ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham o‘zaro parallel bo‘ladi (2.9,a,b-rasm), ya’ni $a \parallel b$ bo‘lsa, u holda $a' \parallel b'$, $a'' \parallel b''$, $a''' \parallel b'''$ bo‘ladi.

Fazodagi umumiy vaziyatda joylashgan parallel to‘g‘ri chiziqlarning ikkita bir nomli proyeksiyalari o‘zaro parallel bo‘lsa, ularning uchinchi proyeksiyalari ham o‘zaro parallel bo‘ladi.

Ammo to‘g‘ri chiziqlar biror proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lsa, u holda yuqorida keltirilgan shart bajarilmaydi. Masalan, W tekislikka parallel bo‘lgan profil to‘g‘ri chiziq kesmalarning bir nomli gorizontal va frontal proyeksiyalari (p_1 va p_2) ning o‘zaro parallel bo‘lishi yetarli bo‘lmaydi (2.10,a-rasm). Bunday hollarda to‘g‘ri chiziqlarning profil proyeksiyalarini yasash zarur. Bunda $p_1''' \parallel p_2'''$ bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘ladi. Agar $p_1''' \cap p_2'''$, bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqlar ayqash bo‘ladi. Shuningdek, bu to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro vaziyatini profil proyeksiyalaridan foydalanmasdan ham aniqlash mumkin.



a)

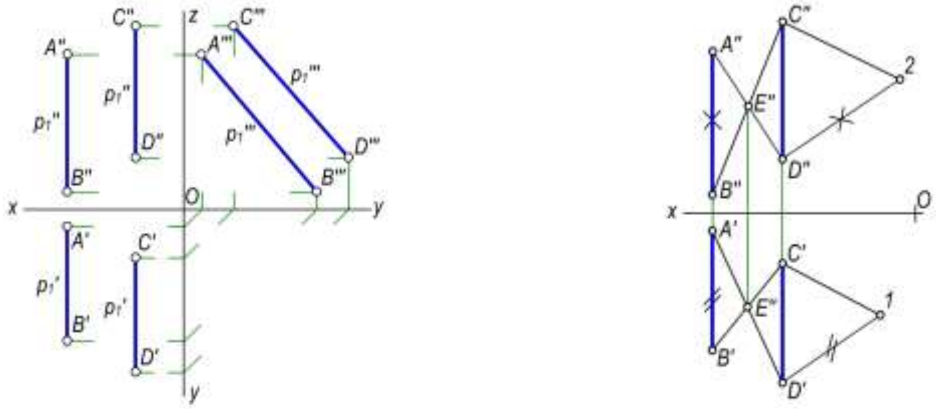


b)

2.9-rasm

Buning uchun:

- to‘g‘ri chiziq kesmalarining bir nomli proyeksiyalarining nisbatlari tengligini aniqlaymiz. Kesmaning biror, masalan, D′, D″ nuqtasidan ixtiyoriy (o‘tkir burchak ostida) parallel chiziqlar o‘tkazib, D′1=A′B′ va D″2=A″B″ kesmalarni qo‘yiladi (2.10-b,rasm). So‘ngra 1 va 2 nuqtalarni C′ va C″ bilan tutashtiramiz. Agar C′1‖C″2 bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘ladi. Aks holda bu to‘g‘ri chiziqlar ayqash to‘g‘ri chiziqlar ekanligini isbotlanadi;
- to‘g‘ri chiziq kesmalarining bir nomli nuqtalarini o‘zaro kesishadigan qilib to‘g‘ri chiziqlar bilan tutashtiramiz (2.10-b,rasm). Agar chiziqlarning kesishish nuqtasining E′ va E″ proyeksiyalari bir bog‘lovchi chiziqda bo‘lsa, u holda CD va AB to‘g‘ri chiziqlar bir tekislikka tegishli va o‘zaro parallel bo‘ladi.



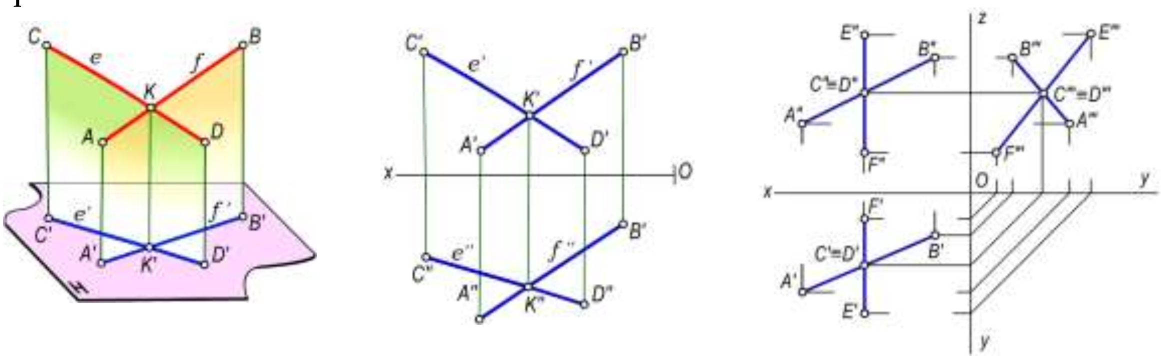
a) b)

2.10-rasm

Agar ikki to’g’ri chiziq fazoda umumiy bir (xos) nuqtaga ega bo’lsa, ularni **kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar** deyiladi.

Fazodagi to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasining proyeksiyasi shu to‘g‘ri chiziqlar proyeksiyalarining kesishish nuqtasida bo‘ladi (2.11-rasm). Kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham chizmada o‘zaro kesishadi va kesishish nuqta proyeksiyalari bir proyeksion bog‘lovchi chiziqda bo‘ladi.

Fazoda umumiy vaziyatda kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqlarning faqat ikkita bir nomli proyeksiyalarining kesishishi kifoya qiladi.



a) **b)** **v)**

2.11-rasm

Agar kesishuvchi chiziqlarning biri proyeksiyalar tekisligining birortasiga parallel bo‘lsa, u holda ularning ikkita bir nomli proyeksiyalarining o‘zaro kesishuvi yetarli bo‘lmaydi. Masalan, *AB* va *EF* to‘g‘ri chiziq kesmalarining biri *EF* kesma *W* tekislikka parallel joylashgan (2.11,v-rasm). Bu chiziqlarning o‘zaro vaziyatini ularning profil proyeksiyalarini yasash bilan aniqlash mumkin. Agar kesishish nuqtasining proyeksiyalari bir bog‘lovchi chiziqda joylashsa, bu to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro kesishadi, aks holda to‘g‘ri chiziqlar kesishmaydi.

Ikki to‘g‘ri chiziq o‘zaro parallel bo‘lmasa yoki kesishmasa ular **ayqash to‘g‘ri chiziqlar** deyiladi.

Ma’lumki, parallel va kesuvchi to‘g‘ri chiziqlar bitta tekislikka tegishli bo‘ladi. Uchrashmas to‘g‘ri chiziqlar esa bir tekislikda yotmaydi (2.12,a,b-rasm). Uchrashmas to‘g‘ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari chizmada o‘zaro kesishsa ham, ammo kesishish nuqtalari bir bog‘lovchi chiziqqa tegishli bo‘lmaydi.

Masalan, 2.12-rasmda AB(A′B′, A″B″) va EF(E′F′, E″F″) uchrashmas chiziqlar berilgan. Bu to‘g‘ri chiziqlar proyeksiyalarining 1′≡2′ va 3″≡4″ kesishish nuqtalari fazoda bu to‘g‘ri chiziqlarning har biriga tegishli ikki nuqtaning proyeksiyalari bo‘lmay, aksincha, 1∈EF, 2∈AB va 3∈EF, 4∈AB bo‘ladi.

a) 2.12-rasm b)

Mustaxkamlash uchun savollar

1. To’g’ri chiziq proyeksiya tekisliklariga nisbatan qanday vaziyatlarda bo’ladi?
2. Qanday vaziyatda to’g’ri chiziq haqiqiy kattalikda proyeksiyalanadi?
3. Umumiy vaziyatdagi to’g’ri chiziq nima?
4. Hususiy vaziyatdagi to’g’ri chiziq nima?
5. To‘g‘ri chiziqning izlari nima?
6. Qanday xususiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziqlarni bilasiz?
7. Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligi qanday yasaladi?
8. O‘zaro parallel to‘g‘ri chiziqlarning proyeksiyalari qanday bo‘ladi?