

## 8–Mavzu: Umumlashtirilgan pozision masalalar. Sirtlarning kesishish chizig‘i proyeksiyalarini chizish. Yordamchi kesuvchi tekisliklar usuli. Yordamchi kesuvchi sferalar usuli.

### Umumiy ma’lumotlar

Insoniyat o‘zining amaliy faoliyatida konus, silindr, shar, ko‘pyoqliklar yoki boshqa ko‘rinishdagi sirtlar va ularning o‘zaro kesishishidan turli xil ko‘rinishdagi arkalar, gumbazlar va muhandislik inshootlari qurilishida foydalanib kelgan.

Kesishuvchi sirtlar asosida o‘zaro kesishgan trubalar, keng oraliqli binolarning ustunsiz tomlari, neft va gaz saqlanadigan sisternalar, rezervuarlar, medisina asboblari, mashinasozlik detallari, qurilish inshootlari elementlari va hokazolar tayyorlanadi. Shu bois muhandislardan sirtlarning o‘zaro kesishish chiziqlarini aniq yasash va ularni sirt yoyilmasida aniq tasvirlay bilish bilimi talab qilinadi. Shu maqsadda ushbu bobda turlicha shakldagi sirtlarning o‘zaro kesishish chiziqlarini yasash usullari bayon qilinadi.

Kesishuvchi sirtlarning hosil bo‘lishiga qarab ularning kesishish chizig‘i quyidagi ko‘rinishlarda uchraydi:

Kesishuvchi sirtlar egri chiziqli yoki to‘g‘ri chiziqli sirtlar bo‘lsa, ularning kesishish chizig‘i umumiy holda fazoviy egri chiziq bo‘ladi.

Kesishuvchi sirtlarning biri egri chiziqli ikkinchisi ko‘pyoklik sirt bo‘lsa, u holda ularning kesishish chizig‘i tekis egri chiziqlar bo‘ladi.

Kesishuvchi sirtlarning ikkalasi ham ko‘pyoqlik sirt bo‘lsa, ularning kesishish chizig‘i fazoviy yoki tekis siniq chiziq bo‘ladi.

Kesishuvchi sirtlar analitik usulda o‘z tenglamalari bilan berilsa, ularni birga yechib, kesishish chiziqlarining tenglamasi hosil qilinadi.

Kesishish chizig‘ining tartibi umumiy holda kesishuvchi sirtlarning tartibiga qarab belgilanadi. Agar sirtlardan biri  $m$  tartibli, ikkinchisi  $n$  tartibli bo‘lsa, ularning kesishish chizig‘ining tartibi  $m \times n$  ga teng bo‘ladi, ya’ni  $\square_1^m \cap \square_2^n = a^{m \cdot n}$ .

Kesishuvchi sirtlarning ikkalasi ham 2-tartibli bo‘lsa, ular 4-tartibli egri chiziq bo‘yicha kesishadi, ya’ni  $\square_1^2 \cap \square_2^2 = a^4$ .

Kesishuvchi sirtlardan biri 2-tartibli va ikkinchisi ko‘pyoqli sirt bo‘lsa, ular 2-tartibli egri chiziqlar bo‘yicha kesishadilar, ya’ni  $\square_1^2 \cap \square_2^{q \cdot s} = ka^2$ . Bunda,  $k$  2-tartibli egri chiziqlarlar soni. Buni ko‘pyoqli sirtning yoqlari soni orqali aniqlanadi.

Sirtlar kesishish chizig‘ini yasashning umumiy algoritmi

Ikki sirtning kesishish chizig‘i, odatda kesishish chizig‘ining nuqtalarini ketma-ket yasash yo‘li bilan hosil qilinadi. Kesishish chizig‘ining nuqtalari ikkala sirtga ham taaluqli bo‘lib, yordamchi kesuvchi sirtlar yordamida yasaladi. Yordamchi kesuvchi sirtlar sifatida tekislik, sfera, konus va silindr sirtlarini olish mumkin. Yordamchi kesuvchi sirtlar shunday tanlanishi kerakki, u berilgan sirtlar bilan kesishganida kesimda chizilishi oddiy va qulay chiziqlar-to‘g‘ri chiziq yoki aylanalar hosil bo‘lsin.

Yordamchi kesuvchi sirtlar kitobning oldingi boblarida yordamchi kesuvchi tekislik ko‘rinishida ishlatilgan edi. Masalan, to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning kesishuv nuqtasini yasashda, tekisliklarning kesishish chizig‘ini yasashda, tekislik bilan sirtlarning kesishuvida, to‘g‘ri chiziq bilan sirtlarning kesishuvida yordamchi kesuvchi tekisliklar o‘tkazilgan edi.

Yordamchi kesuvchi sirtlar usulida yasash algoritmi quyidagicha bo‘ladi (9.1-rasm):

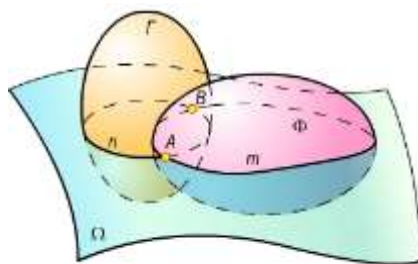
Berilgan ikki  $\square$  va  $\square$  sirtlar kesishish chizig‘ining xarakterli nuqtalari yasaladi. Bu nuqtalar o‘z navbatida yordamchi kesuvchi sirtlarni o‘tkazish chegarasini aniqlaydi.

Yordamchi kesuvchi  $\Omega$  sirt o‘tkaziladi. Bunda  $\square$  va  $\Omega$  sirtlar o‘zaro kesishib  $n$  ( $\square \cap \Omega = n$ ) chiziqni,  $\square$  sirt bilan  $\Omega$  sirt kesishib  $m$  ( $\square \cap \Omega = m$ ) chiziqni hosil qiladi.

$n$  va  $m$  chiziqlar kesishib ( $n \cap m = A, B, \dots$ )  $A, B, \dots$  nuqtalarni hosil qiladi.

Bu nuqtalar berilgan  $\square$  va  $\square$  sirtlar kesishish chizig‘ining nuqtalaridir. Bunday yasash algoritmi yetarli marta takrorlansa, kesishish chizig‘ini yasash uchun yetarli nuqtalari hosil

qilinadi. Bu nuqtalar ma'lum tartibda lekalo yordamida silliq tutashtirilsa, berilgan ikki sirtning kesishish chizig'i hosil bo'ladi.



9.1-rasm

Agar yordamchi kesuvchi sirt tekislik bo'lsa, xosmas o'qli tekisliklar dastasi hosil bo'ladi. Agar yordamchi kesuvchi sirt sferadan iborat bo'lsa, konsentrik yoki eksentrik sferalar oilasi hosil bo'ladi. Shunga ko'ra ikki kesishuvchi sirtning kesishish chiziqlarini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi, yordamchi kesuvchi konsentrik va eksentrik sferalar usullari hosil bo'ladi. Bu usullarning qo'llanilishi to'g'risida keyinchalik batafsil to'xtab o'tamiz.

Umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi

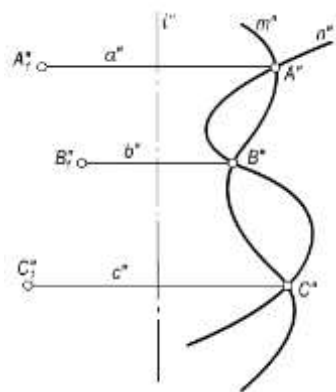
**Isboti.** Ikkita aylanish sirtning  $m(m'')$  va  $n(n'')$  meridianlari (yasovchilari) hamda ular uchun umumiy bo'lgan  $i(i'')$  o'q berilgan bo'lsin (9.2-rasm).  $m''$  va  $n''$  meridianlarning kesishish nuqtalarini  $A'', B'', C'', \dots$  harflar bilan belgilaymiz. Agar  $m$  va  $n$  egri chiziqlar  $i$  o'q atrofida aylantirilsa,  $\square$  va  $\square$  aylanish sirlari hosil bo'ladi (shaklda bu sirtlar tasvirlanmagan). Unda  $m''$  va  $n''$  egri chiziqlarning aylanishi natijasida ularga umumiy bo'lgan  $A'', B'', C'', \dots$  nuqtalar  $a'', b'', c'', \dots$  aylanalar chizadi. Bu aylanalar esa ikkala sirt uchun umumiydir. Demak,  $a'', b'', c'', \dots$  aylanalar umumiy o'qli  $\square$  va  $\square$  aylanish sirtlarining kesishish chiziqlari bo'ladi.

9.3-rasmدا umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanma ellipsoid va bir pallali giperboloidlarning kesishish chiziqlari  $a''$  va  $b''$  aylanalar frontal proyeksiyada ko'rsatilgan. 9.4 va 9.5-rasmlarda sferaning doiraviy silindr va doiraviy konus sirlari bilan kesishish chiziqlari tasvirlangan. Bu sirtlarning o'qlari proyeksiyalar tekisliklarining biriga perpendikulyar qilib olingan.

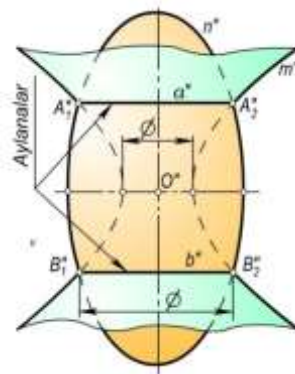
Yuqoridagi teoremdan quyidagi natijani chiqarish mumkin:

Natija: Markazi aylanish sirtining o'qida bo'lgan har qanday  $\square(\square'')$  sfera shu aylanish sirti bilan aylanalar bo'ylab kesishadi (9.6-rasm).

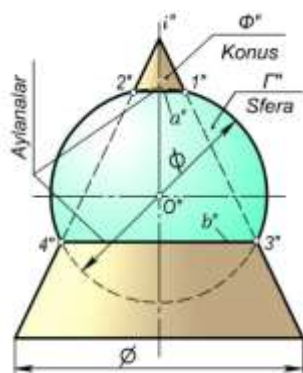
Hqiqatan,  $\square(\square'')$  aylanish sirti  $i(i'')$  o'qining ixtiyoriy  $O(O'')$  nuqtasini markaz qilib olib,  $\square''$  sfera chizilgan.  $\square$  va  $\square$  sirtlar  $a''$  va  $b''$  aylanalar bo'yicha kesishgan (tasvirlar faqat frontal proyeksiyada keltirilgan). Yuqorida keltirilgan xulosalar va misollar aylanish sirtlari kesishish chizig'ini yasashda qo'llaniladigan konsentrik va eksentrik sferalar usullarining asosi hisoblanadi.



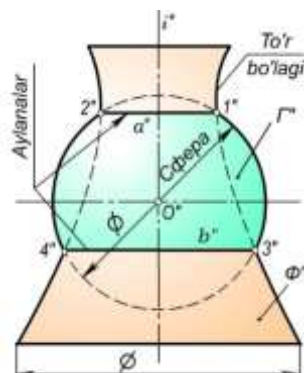
9.2-rasm



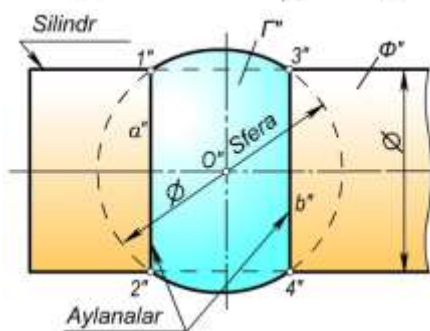
9.3-rasm



9.4-rasm



9.5-rasm.



9.6-rasm

O'qlari umumiy nuqtaga ega bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishuvi. Yordamchi sferalar usuli

Ma'lumki, markazi biror aylanish sirtining o'qida bo'lgan sfera bu sirtni chekli sondagi aylanalar bo'yicha kesadi. Bu aylanalar proyeksiyalar tekisliklarining biriga to'g'ri chiziq kesmasi shaklida, ikkinchisiga aylana yoki ellips ko'rinishida proyeksiyalanadi. Aylanish sirtlari bilan sferaning o'zaro kesishish chizig'i haqidagi bu muhim xulosa ikkita aylanish sirtining o'zaro kesishish chiziqlarini yasashga imkon beradi.

Yordamchi kesuvchi sferalar to'plami konsentrik yoki eksentrik ko'rinishlarda bo'ladi. Kesishuvchi sirtlarning xarakteriga qarab, yordamchi kesuvchi sferalarning biror usuli ishlatiladi.

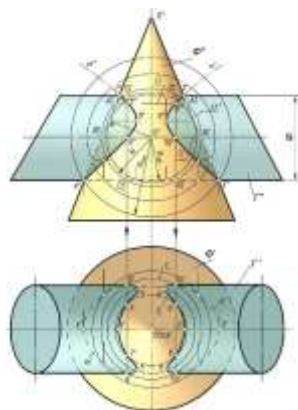
Konsentrik sferalar usuli. Ikki aylanish sirtining o'qlari umumiy nuqtaga ega bo'lsa, bu o'qlar bitta tekislikni tashkil qiladi. Bu tekislik har ikkala sirt uchun simmetriya tekisligi bo'ladi.

Yordamchi kesuvchi konsentrik sferalar usulini quyidagi shartlar qanoatlantirgan hollardagina qo'llash mumkin:

o'zaro kesishuvchi sirtlar aylanish sirtlari bo'lishi shart;

aylanish sirtlarining o'qlari o'zaro kesishgan bo'lishi kerak;

aylanish sirtlarining o'qlari (yoki simmetriya tekisligi) proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel bo'lishi yoki sirt o'qlarining biri proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel, ikkinchi o'q esa ikkinchi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lishi kerak.



9.7-rasm.

Yordamchi kesuvchi konsentrik sferalarning markazi sirtlarning o'qlari kesishgan nuqtasida bo'ladi. 9.7-rasmda o'qlari umumiy  $O(O', O'')$  nuqtada kesishuvchi va simmetriya tekisligi  $V$  ga parallel bo'lgan  $\square(\square', \square'')$  aylanma konus va  $\square(\square', \square'')$  silindr sirtlari berilgan. Bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasash uchun  $O''$  nuqtani markaz qilib,  $R$  radiusli  $\Omega(\Omega'')$  sfera chiziladi.  $\Omega$  sfera  $\square$  sirt bilan umumiy o'qqa ega bo'lgani uchun ular  $l_1(l_1', l_1'')$  va  $l_2(l_2', l_2'')$  aylanalar bo'yicha kesishadi. Shaklda bu aylanalarning  $V$  tekislikdagi proyeksiyalari  $A_1'' A_2''$  va  $B_1'' B_2''$  kesmalar tarzida tasvirlangan. Shuningdek, bu sfera  $\square$  sirt bilan umumiy o'qqa ega bo'lgani uchun  $C_1' C_2''$  va  $D_1'' D_2''$  kesmalar ko'rinishidagi aylanalar bo'yicha kesishadi. Bu aylanalarning o'zaro kesishish 7'', 8'', 9'' va 10'' nuqtalari har ikkala  $\square$  va  $\square$  sirtlar uchun umumiy bo'lgan nuqtalarning frontal proyeksiyalari bo'ladi. Xuddi shuningdek,  $O''$  nuqtani markaz qilib, konsentrik sferalar chiziladi, ular yordamida  $\square$  va  $\square$  sirtlar uchun umumiy bo'lgan nuqtalarini yasash mumkin. Bu nuqtalarning geometrik o'rni bo'lgan  $m''$  va  $n''$  egri chiziqlar  $\square$  va  $\square$  sirtlarning kesishish chiziq bo'ladi.  $\square$  va  $\square$  sirtlarning frontal ocherklarining 1'', 2'', 3'', 4'' kesishish nuqtalari bu sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalaridan hisoblanadi.  $O''$  nuqtadan eng uzoqda joylashgan 4'' xarakterli nuqtadan o'tuvchi sferaning radiusi  $R_{max}$  bo'ladi. Kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalaridan yana bir juftini  $\square$  va  $\square$  sirtlarining birortasiga  $R_{min}$  radiusli urinma sfera o'tkazish bilan aniqlanadi. Eng kichik sferaning  $R_{min}$  radiusi quyidagicha aniqlanadi (9.7-rasm):  $O''$  nuqtadan berilgan sirtlarning birini chekka yasovchisiga  $O''E''$  va  $O''F''$  perpendikulyarlar o'tkaziladi. Bunda  $O''E'' > O''F''$  bo'lsa  $R_{min} = O''E''$  bo'ladi. Agar  $O''E'' < O''F''$  bo'lsa,  $R_{min} = O''F''$  bo'ladi,  $O''E'' = O''F'' = R_{min}$  bo'lgan holda eng kichik sfera ikkala sirtga urinib, kesishish chizig'i ikkita tekis egri chiziqqa ajraladi. Shunday qilib, urinma sferani shunday o'tkazish kerakki, u sirtlarning biriga urinsin va ikkinchisini kesib o'tsin. 9.7-rasmda  $\square$  sirtga urinma bo'lgan  $R_{min}$  radiusli sfera o'tkazish bilan yasalgan egri chiziqning 5, 6 xarakterli nuqtalari aniqlangan. Bu nuqtalarda egrilik buriladi yoki yo'nalishini o'zgartiradi. Kesishish chizig'ining boshqa nuqtalari  $R_{max}$  va  $R_{min}$  radiusli sferalar orasida ixtiyoriy sferalar o'tkazish bilan aniqlanadi. Konus va silindrlarning o'zaro kesishish chizig'i  $m(m'')$  va  $n$  larga tegishli nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari konus o'qiga perpendikulyar bo'lgan parallel kesuvchi gorizontal tekisliklar orqali aniqlanadi. Shunday qilib, konsentrik sferalar usuli bilan ikki aylanish sirtining kesishish chiziqlarini yasash quyidagi sxema bo'yicha bajariladi:

ikkita aylanish sirti o'qlarining kesishish nuqtasi konsentrik sferalar markazi sifatida qabul qilinadi;

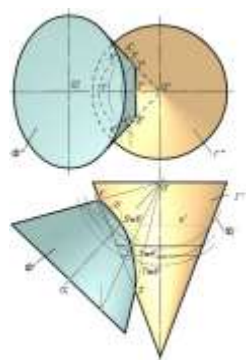
sirtlarning frontal (yoki gorizontal) ocherklarining kesishish nuqtalari xarakterli nuqtalar sifatida belgilanadi va  $R_{max}$  radiusli sfera aniqlanadi;

eng kichik  $R_{min}$  radiusli sfera chiziladi. Natijada yana bir juft xarakterli nuqtalar aniqlanadi;

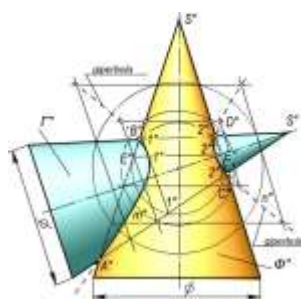
$R_{max}$  va  $R_{min}$  lar orasida sferalar o'tkazilib, oraliq nuqtalar topiladi.

9.8-rasmda o'qlar  $O(O', O'')$  nuqtada kesishuvchi va simmetriya tekisligi  $H$  proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan ikki doiraviy konusning kesishish chizig'i konsentrik sferalar usuli bilan yasalgan. Bunda avvalo kesishish chizig'ining xarakterli 1(1', 1'') va 2(2', 2'') nuqtalari aniqlanadi. So'ngra  $O'$  nuqtani markaz qilib olib, ikkala konusni kesadigan qilib  $\square_1'$  sfera o'tkaziladi.  $\square_1'$  sfera  $\square'$  konus bilan  $a'$  aylana bo'yicha,  $\square'$  konus bilan  $b'$  aylana bo'yicha kesishadi. Bu aylanalarning kesishish nuqtalari 5'=6' ikki konusning kesishish chizig'iga tegishli bo'ladi.  $a$  aylananing  $a''$  proyeksiyasi yasali, uning ustida 5'' va 6'' nuqtalar yasaladi. Kesishish chizig'ining qolgan nuqtalari ham yuqoridagidek yasaladi va ular o'zaro tutashtiriladi.

9.9-rasmda simmetriya tekisligi proyeksiyalar tekisligi  $V$  ga parallel bo'lgan ikki aylanma konusning kesishish chizig'i konsentrik sferalar usuli bilan frontal proyeksiyalar tekisligida tasvirlangan.



9.8-rasm



9.9-rasm