

5–Mavzu: To‘g‘ri chiziqlarning tekislikka va tekisliklarning o‘zaro perpendikulyarligi

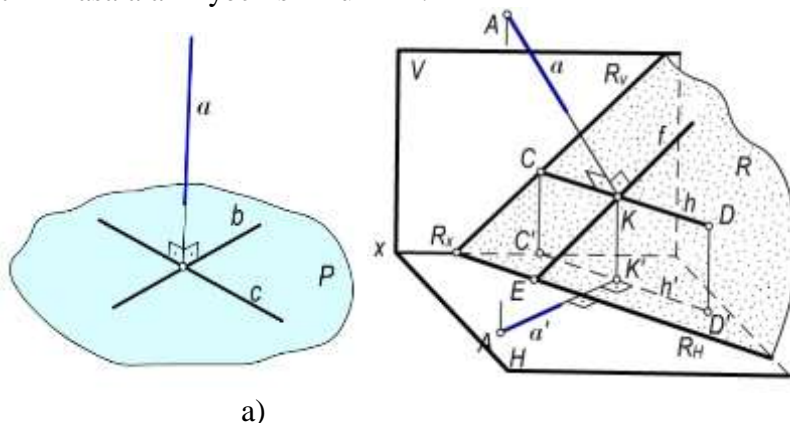
To‘g‘ri chiziqlarning tekislikka perpendikulyarligi

Bunda $b \subset P$ va $c \subset P$, $b \cap c$ hamda $a \perp b$ va $a \perp c$ bo‘lsa, $a \perp P$ bo‘ladi (5.1-rasm). Demak, tekislikka perpendikulyar bulgan to‘g‘ri chiziqlar tekislikning asosiy chiziqlariga ham perpendikulyar bo‘ladi. Faraz qilaylik, a to‘g‘ri chiziqlar tekislikning h gorizontali va f frontaliga perpendikulyar bo‘lsin (5.2-a, rasm).

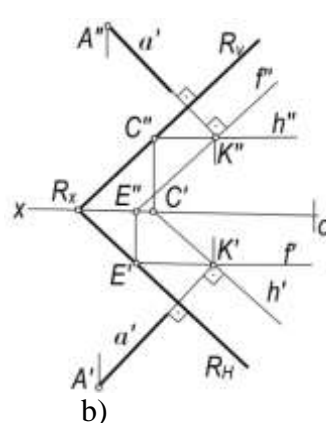
To‘g‘ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatiga muvofiq $\angle AKD = 90^\circ$ bo‘lib, $KD \parallel H$ bo‘lgani uchun bu to‘g‘ri burchakning gorizantal proyeksiyasi $\angle A'K'D' = 90^\circ$ bo‘ladi. Demak, $A'K' \perp C'D'$ yoki $a' \perp h'$ bo‘ladi.

Fazoda to‘g‘ri chiziqlar tekislikka perpendikulyar bo‘lishi uchun, uning gorizantal proyeksiyasi tekislik gorizantalining gorizantal proyeksiyasiga, frontal proyeksiyasi esa tekislik frontalining frontal proyeksiyasiga va profil proyeksiyasi tekislik profilining profil proyeksiyasiga perpendikulyar bo‘lishi kerak.

To‘g‘ri chiziqlar va tekislikning o‘zaro perpendikulyarlik shartidan foydalanib ko‘pgina metrik masalalarni yechish mumkin.



5.1-rasm



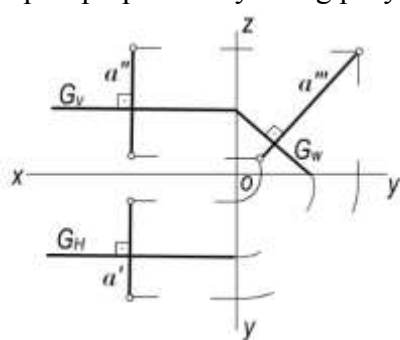
5.2-rasm

1-masala. $\triangle ABC$ bilan berilgan tekislikning A uchidan unga perpendikulyar o‘tkazilsin (5.4-rasm).

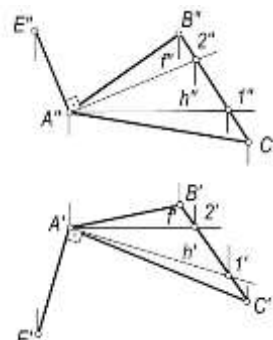
Echish. Masalani quyidagi algoritm bo‘yicha yechamiz.

$\triangle ABC$ ($\triangle A'B'C'$, $\triangle A''B''C''$) tekislikning $h(h', h'')$ gorizontali va $f(f', f'')$ frontali o‘tkaziladi.

Tekislikning A nuqtasining A' va A'' proyeksiyalaridan ixtiyoriy uzunlikda $A'E' \perp h'$ va $A''E'' \perp f''$ qilib perpendikulyarning proyeksiyalarini yasaladi.



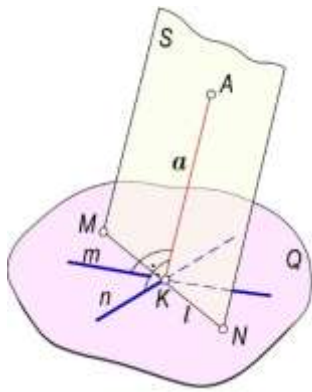
5.3-rasm



5.4-rasm

2-masala. $A(A', A'')$ nuqta orqali $l(l', l'')$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar tekislik o‘tkazilsin (5.5-rasm).

Echish. Buning uchun:



A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $h' \perp l'$ va $h'' \parallel Ox$ qilib izlangan tekislik gorizontalinig proyeksiyalarini o'tkaziladi;

A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $f' \parallel Ox$ va $f'' \perp l''$ qilib tekislik frontalining proyeksiyalarini o'tkaziladi;

hosil bo'lgan $h' \cap (h' \cap f' \cap h'' \cap f'')$ kesishuvchi chiziqlar izlangan tekislikni ifoda qiladi.

Tekislikning gorizontali $h \perp l$ va frontali $f \perp l$ bo'lgani uchun bu tekislik l to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi.

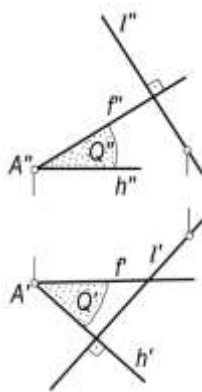
3-masala. $A(A', A'')$ nuqta orqali o'tuvchi va $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan tekislikning izlari qurilsin (5.6-rasm).

Echish.

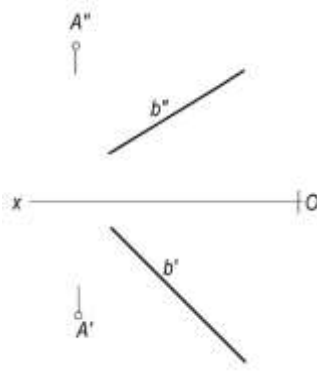
A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $h' \ni A'$ va $h' \perp b'$ va $h'' \ni A''$ va $h'' \parallel Ox$ qilib tekislikning gorizontali o'tkaziladi (5.7-rasm).

gorizontalinig frontal B izining B' va B'' proyeksiyalarini yasaladi.

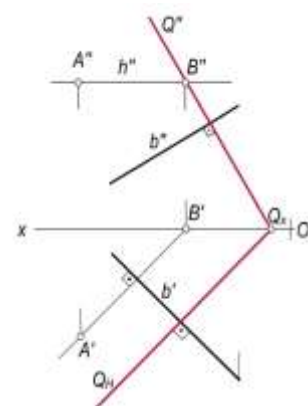
Q tekislikning Q_v frontal izini $Q_v \ni B''$ va $Q_v \perp b''$ qilib o'tkaziladi. Tekislikning Q_H gorizont izini esa Q_x dan $Q_H \ni Q_x$ va $Q_H \perp b'$ (yoki $Q_H \parallel h'$) qilib o'tkaziladi.



5.5-rasm



5.6-rasm



5.7-rasm

Natijada, $Q_H \perp b'$ va $Q_v \perp b''$ bo'lgani uchun $Q \perp b$ bo'ladi. Bu misolni tekislikning frontal chizig'ini o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.

Nuqta va tekislik orasidagi masofani aniqlash. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligi bilan aniqlanadi. Bu perpendikulyarning uzunligini aniqlash uchun uning tekislikdagi asosini yasash zarur.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani qo'yidagi yasash algoritmi bo'yicha aniqlanadi (5.8-rasm).

A nuqtadan Q tekislikka a perpendikulyar o'tkaziladi: $a \ni A$ va $a \perp Q$.

Bu perpendikulyarning Q tekislik bilan kesishgan K nuqtasi (asosi) aniqlanadi: $K = a \cap Q$.

Buning uchun:

a perpendikulyardan o'tuvchi yordamchi $S \supset a$ tekislik o'tkaziladi;

Q va S tekisliklarning l kesishish chizig'i yasaladi;

a perpendikulyarning tekisliklarning kesishish chizig'i l bilan kesishgan K nuqtasi topiladi: $K = a \cap l$. Chizmadagi AK kesma A nuqtadan Q tekislikkacha bo'lgan izlangan masofa bo'ladi.

1-masala. Berilgan $A(A', A'')$ nuqtadan $Q(Q_H, Q_v)$ tekislikkacha bo'lgan masofani aniqlansin (5.9-rasm).

Yechish. Yuqorida keltirilgan yasash algoritmiga asosan:

5.8-rasm.

A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan Q tekislikning Q_H va Q_v izlariga mos ravishda perpendikulyarning a' va a'' proyeksiyalari o'tkaziladi: $a' \ni A'$, $a' \perp Q_H$ va $a'' \ni A''$, $a'' \perp Q_v$.

Bu perpendikulyarning Q tekislik bilan kesishish nuqtasining proyeksiyalarini aniqlash uchun:

a perpendikulyardan yordamchi gorizontaal proyeksiyalovchi $S(S_H, S_V)$ tekislik o'tkaziladi; Q va S tekisliklarning kesishish chizig'i $MN(M'N', M''N'')$ bilan $a(a', a'')$ perpendikulyarning kesishish nuqtasi K ning K' va K'' proyeksiyalarini aniqlanadi.

Chizmada hosil bo'lgan $A'K'$ va $A''K''$ izlangan masofaning proyeksiyalari bo'ladi. Bu masofaning haqiqiy o'lchami to'g'ri burchakli $\Delta A_0A''K''$ ning A_0K'' gipotenuzasi bo'ladi.

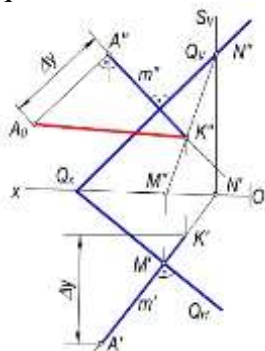
2-masala. $D(D', D'')$ nuqtadan $\Delta ABC(\Delta A'B'C', \Delta A''B''C'')$ tekislikkacha bo'lgan masofa aniqlansin (5.10-rasm).

Yechish. Masalani quyidagi yasash algoritmi asosida yechiladi.

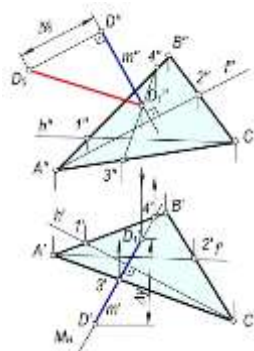
ΔABC tekislikning gorizontaal va frontal chiziqlarining proyeksiyalari o'tkaziladi.

D nuqtaning D' va D'' proyeksiyalaridan perpendikulyarning m' va m'' proyeksiyalari $m' \perp D'$, $m' \perp h'$ va $m'' \perp D''$, $m'' \perp f''$ qilib o'tkaziladi.

Perpendikulyarning ΔABC tekislik bilan kesishgan nuqtasi D_1 ning D_1' va D_1'' proyeksiyalarini aniqlanadi.



5.9-rasm

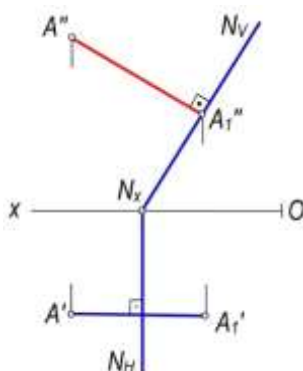


5.10-rasm

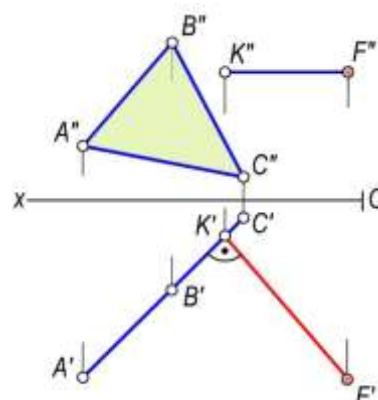
m perpendikulyardan yordamchi gorizontaal proyeksiyalovchi $M(M_H, M_V)$ tekislik o'tkaziladi;

ΔABC va M tekisliklarning kesishish chizig'ining $3'4'$ va $3''4''$ proyeksiyalarini yasaladi; tekisliklarning kesishish chizig'i proyeksiyalari $3'4'$ va $3''4''$ bilan m' , m'' perpendikulyarning kesishish D_1 nuqtasining D_1' va D_1'' proyeksiyalarini aniqlanadi: $D_1'' = m'' \cap 3''4''$ va $D_1' \in m'$

Chizmada hosil bo'lgan $D'D_1'$ va $D''D_1''$ proyeksiyalar izlangan DD_1 masofaning proyeksiyalari bo'ladi. Uning haqiqiy o'lchami to'g'ri burchakli $\Delta D_0D''D_1''$ ning D_0D_1'' gipotenuzasidan iborat bo'ladi.



5.11-rasm



5.12-rasm

Agar tekislik xususiy vaziyatda berilsa, u holda berilgan nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani aniqlash uchun qo'shimcha yasashlar talab qilinmaydi. Masalan, $A(A', A'')$ nuqtadan $N(N_H, N_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislikkacha bo'lgan masofaning haqiqiy o'lchami (5.11-rasm) nuqtaning frontal A'' proyeksiyasidan tekislikning N_V frontal iziga tushirilgan perpendikulyarning $A''K''$ frontal proyeksiyasiga teng bo'ladi.

5.12-rasmda $F(F', F'')$ nuqtadan gorizontal proyeksiyalovchi $\Delta ABC(\Delta A'B'C', \Delta A''B''C'')$ tekislikkacha bo'lgan masofani aniqlash tasvirlangan.

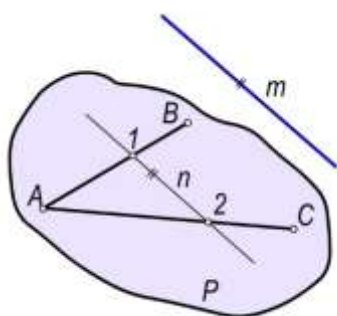
Nuqta va to'g'ri chiziq orasidagi masofani aniqlash. To'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta orasidagi masofa shu nuqtadan mazkur to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi bilan o'lchanadi.

To'g'ri chiziqni tekislikka va tekisliklarning o'zaro parallelligi

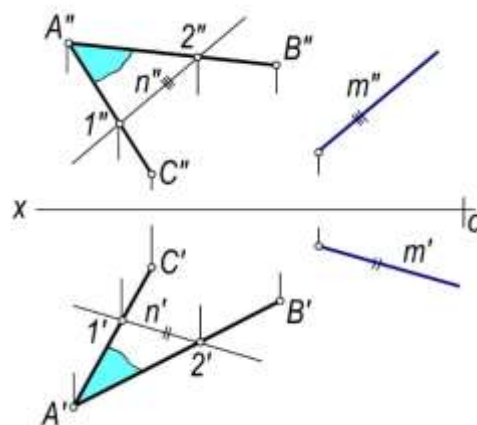
To'g'ri chiziq va tekisliklarning o'zaro parallelligi

Agar fazodagi m to'g'ri chiziq P tekislikka tegishli biror n to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, u holda bu to'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'ladi.

Bunda $n \subset P$ bo'lib, $m \parallel n$ bo'lsa, $m \parallel P$ bo'ladi (5.13,a,b-rasm).



a)



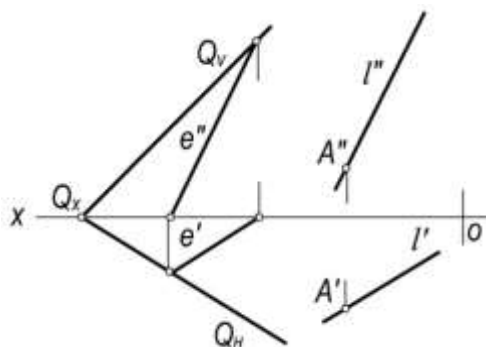
b)

5.13-rasm

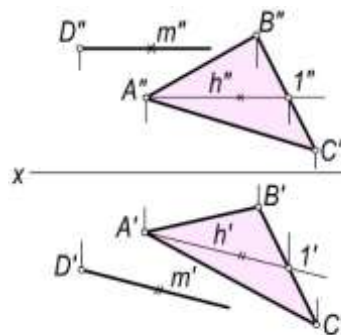
1-masala. $A(A', A'')$ nuqtadan $Q(Q_H, Q_V)$ tekislikka parallel to'g'ri chiziq o'tkazish talab qilinsin (5.14-rasm).

Echish. A nuqtadan Q tekislikka parallel qilib cheksiz ko'p to'g'ri chiziqlar o'tkazish mumkin. Shunday to'g'ri chiziqlarning ixtiyoriy bittasini o'tkaziladi.

Buning uchun Q tekislikka tegishli ixtiyoriy ye (e', e'') to'g'ri chiziq tanlanadi. Bu to'g'ri chiziqning bir nomli proyeksiyalariga parallel qilib A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan izlangan to'g'ri chiziqning l' va l'' proyeksiyalarini o'tkaziladi, ya'ni ye (e', e'') $\subset Q(Q', Q'')$ bo'lib, $l' \in A', l'' \in A''$ bo'lganda $l \parallel Q$ bo'ladi.



5.14-rasm



5.15-rasm

2-masala. D (D' , D'') nuqtadan ABC ($A'B'C'$, $A''B''C''$) tekisligi va gorizontali H ga parallel m to'g'ri chiziq o'tkazilsin (5.15-rasm).

Echish. $\triangle ABC$ tekisligida H ga parallel, qilib uning gorizontali h (h' , h'') to'g'ri chiziq o'tkaziladi. So'ngra D nuqtaning D' va D'' proyeksiyalaridan $m' \parallel h'$ va $m'' \parallel h''$ qilib izlangan to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari o'tkaziladi.

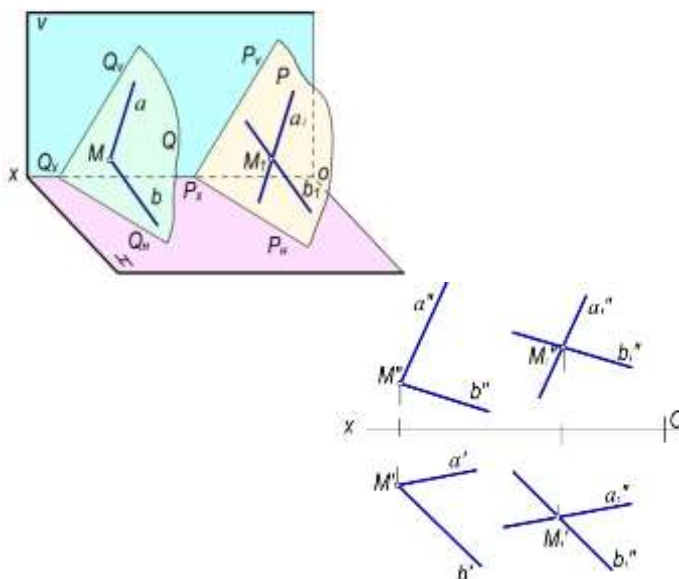
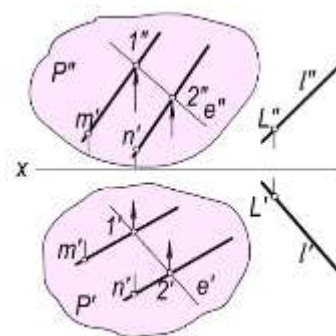
3-masala. P ($m \parallel n$) tekislik va l (l' , l'') to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyati aniqlansin (5.16-rasm).

5.16-rasm

Echish. To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro vaziyatini aniqlash uchun P tekislikda $ye' \parallel l'$ qilib to'g'ri chiziqlarning gorizontali proyeksiyasini o'tkaziladi va uning frontal ye'' proyeksiyasini yasaydi. Chizmada e'' to'g'ri chiziq l'' ga parallell bo'lmagani uchun l to'g'ri chiziq tekislikka parallell bo'lmaydi. l va P larni o'zaro parallellligini $l'' \parallel e''$ qilib o'tkazish bilan ham bajarish mumkin.

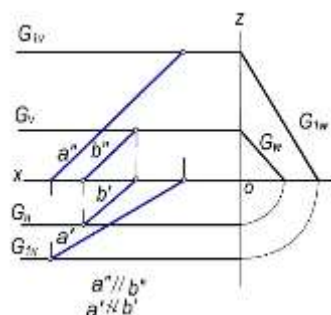
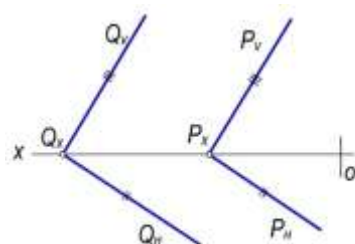
Tekisliklarning o'zaro parallelligi

Agar Q tekislikka tegishli $a \cap b$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlar ikkinchi P tekislikka tegishli $a_1 \cap b_1$ kesishuvchi to'g'ri chiziq'larga mos ravishda o'zaro parallell bo'lsa, bu tekisliklar ham o'zaro parallell bo'ladi. Ya'ni $a \subset Q$, $b \subset Q$ bo'lib, $a \cap b$ bo'lsa va $a_1 \subset P$ va $b_1 \subset P$ bo'lib $a_1 \cap b_1$ bo'lsa hamda $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ bo'lganda $Q \parallel P$ bo'ladi (5.17-rasm).



5.17-rasm

Agar fazodagi ikki tekislik bir-biriga parallell bo'lsa, chizmada bu tekisliklarning bir nomli izlari ham o'zaro parallell bo'ladi, ya'ni: $Q \parallel P$ bo'lsa $Q_H \parallel P_H$, $Q_V \parallel P_V$ va $Q_W \parallel P_W$ bo'ladi (5.18-rasm).



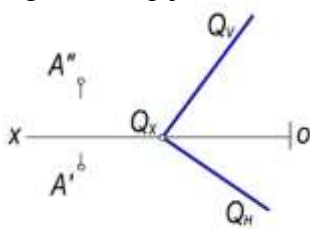
5.18-rasm

Chizmada profil proyeksiyalovchi tekisliklar uchun ularning gorizont va frontal izlari parallel bo'lishi yetarli bo'lmaydi. Masalan, 5.19-rasmda berilgan G va G_1 tekisliklarda $G_H \parallel G_{1H}$ va $G_V \parallel G_{1V}$ bo'lib, $G_W \nparallel G_{1W}$ bo'lgani uchun $G \nparallel G_1$ bo'ladi. Bu tekisliklarning o'zaro vaziyatini tekisliklarga tegishli a va b to'g'ri chiziqlar yordami bilan ham aniqlash mumkin, bunda $a \subset G_1$ va $b \subset G$ bo'lgan holda $a'' \parallel b''$ bo'lsa, $a' \nparallel b'$ bo'lgani uchun $a \nparallel b$ va $G \nparallel G_1$ bo'ladi.

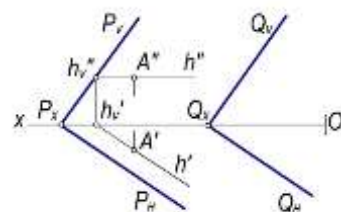
Fazodagi ixtiyoriy nuqta orqali berilgan tekislikka faqat bitta parallel tekislik o'tkazish mumkin.

1-masala. $A (A', A'')$ nuqtadan $Q (Q_H, Q_V)$ tekislikka parallel $P (P_H, P_V)$ tekislik o'tkazish talab qilinsin (5.20-a, rasm).

Echish. Tekisliklarning parallellik xususiyatlariga ko'ra P tekislikning izlari $P_H \parallel Q_H$ va $P_V \parallel Q_V$ $P_W \parallel Q_W$ bo'lishi shart. Misolni yechish uchun to'g'ri chiziq va tekislikning parallellik shartlaridan foydalanib, A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan Q tekislikka parallel qilib ixtiyoriy to'g'ri chiziq, jumladan $h (h', h'')$ gorizontali o'tkaziladi (5.20-b, rasm).



a)



b)

5.20-rasm