Kratko poročilo – projektna naloga

Skupina 18: Število podpoti pri grafih z danim ciklomatskim številom

Uvod

V projektu obravnavamo *povezane* grafe $G = (V, E)$, za katere je definirano *ciklomatsko število*

$$\mu(G) = |E| - |V| + 1.$$

To število pove, koliko neodvisnih ciklov vsebuje graf oziroma koliko povezav bi morali odstraniti, da bi dobili gozd (acikličen graf).

CILJ NALOGE: raziskati, kako se obnaša *število podpoti in geodetskih podpoti grafa*, torej število vseh enostavnih poti (vključno s potmi dolžine 0), pri grafih z danim ciklomatičnim številom. Zanima nas, kateri grafi imajo za dano število vozlišč $|V| = n$ in dano ciklomatsko število $\mu = k$ najmanjše oziroma največje število poti.

Teoretično ozadje

Definicija 1 (Podpot)**.** Naj bo $G = (V, E)$ povezan graf in $P = v_1 v_2 \dots v_k$ pot v grafu G. *Podpot* grafa G je vsaka zaporedna podzaporedje oglišč te poti, torej vsaka pot oblike

$$v_i v_{i+1} \dots v_j, \quad \text{kjer } 1 \leq i < j \leq k.$$

Subpath number $p_n(G)$ štejemo kot skupno število vseh enostavnih poti v grafu, pri čemer se šteje tudi vsako vozlišče kot pot dolžine 0.

Definicija 2 (Geodetska pot in geodetska podpot)**.** Naj bo G povezan graf. Geodetska pot (angl. *geodesic path*) med vozliščema u in v je pot z najmanjšim možnim številom povezav med u in v, torej najkrajša pot med njima. Geodetska podpot pa je vsaka podpot geodetske poti.

Kaktusni graf je graf, v katerem se poljubna dva cikla stikata v največ enem vozlišču. To pomeni, da se cikli lahko dotikajo, vendar se ne prekrivajo.

Graf PTC(n,k) (angl. *Pseudo Triangle Chain*), slovensko psevdotrikotna veriga, je poseben primer kaktusnega grafa, v katerem so vsi cikli trikotniki, povezani v verigo, in dosega največje možno število podpoti med vsemi takšnimi grafi. Zato se v projektu pogosto uporabi kot osnovni primer (tj. zgornja meja) za primerjavo z drugimi grafi, ki imajo enako ciklomatično število $\mu(G)$.

Graf $PTC(n, k)$ ima naslednje lastnosti:

- je kaktusni graf z n vozlišči in k cikli;

- vsak notranji cikel je trikotnik (ima 3 vozlišča);
- cikli so med seboj povezani v verigo (en za drugim);
- prvi in zadnji cikel se lahko rahlo razlikujeta po velikosti (imata lahko 4 vozlišča namesto 3);
- vsi cikli se stikajo v natanko enem vozlišču, zato graf tvori verižasto strukturo.

Izrek (Knor, 2025) Graf $PTC(n, k)$ edinstveno maksimira število podpoti med vsemi kaktusnimi grafi z n vozlišči in $k \geq 2$ cikli.

Ta izrek lahko torej uporabimo kot "izhodišče", kaseneje pa bomo gledali ne samo kaktusne ampak tudi splošnejše grafe.

Iz literature (Knor, 2025): za kaktusne grafe veljajo naslednji ekstremni primeri

- maksimalni $p_n(G)$ doseže t.i. *pseudo triangle chain*, kjer so vsi notranji cikli trikotniki, oba končna pa se razlikujeta največ za eno vozlišče;
- minimalni $p_n(G)$ doseže graf, kjer so vsi cikli *end-trikotniki*, torej vsak trikotnik deli največ eno skupno vozlišče z ostalim grafom.

Plan dela

Projektno nalogo bova ločila na dva dela. **1. Analiza za majhne grafe.** V okolju SageMath bomo generirali vse povezane grafe z števili vozlišč $n \leq 8$ in za vsak graf izračunali: $|V|, |E|, \mu(G)$ in $p_n(G)$. Pri majhnih grafih bomo število poti izračunali z iskanjem vseh enostavnih poti (DFS) med pari vozlišč. Na podlagi rezultatov bomo določili grafe, ki imajo minimalni in maksimalni $p_n(G)$ pri enakem $\mu(G)$ ter preverili, ali so ti grafi kaktusnega tipa.

2. Eksperimentiranje za večje grafe. Za $|v| > 8$ bomo uporabili naključne povezane grafe, ustvarjene z metodo `graphs.RandomGNP(n,p)`, pri čemer bomo vzdrževali število povezav $|E| = n - 1 + k$. Za iskanje ekstremnih grafov bomo uporabili *metahevristične algoritme*, kot sta *simulirano ohlajanje* ali *genetski algoritem*, ki bosta postopno spreminjala strukturo grafa in iskala konfiguracijo z večjim ali manjšim $p_n(G)$. Pri tem bomo analizirali, ali optimizacija privede do struktur, podobnih znanim ekstremnim kaktusom (verige trikotnikov) ali do popolnoma novih topologij.

Pričakovani rezultati in hipoteze

Pričakujemo, da bo minimalni graf pri danem $\mu(G) = k$ imel vse cikle skoncentrirane v enem vozlišču (analogno *pseudo friendship graphu*), medtem ko bodo grafi z največjim $p_n(G)$ imeli cikle razporejene v verigo, podobno *pseudo triangle chainu.* Pri večjih grafih pričakujemo, da bodo pojavljeni lokalni ekstremi, kjer več prekrivajočih se ciklov povzroči le majhno povečanje števila poti zaradi redundance.

Plan dela

Dan	**Naloga**
1–2	Pregled teoretičnih osnov in članka »The subpath number of cactus graphs«.
3–4	Implementacija kode za generiranje vseh povezanih grafov z $n \leq 6$ in izračun $\mu(G)$.
5–6	Izračun subpath numberja za majhne grafe in analiza ekstremov.
7–8	Eksperimenti na večjih grafih z naključnim generiranjem in metahevristiko (simulirano ohlajanje).
9	Povzetek rezultatov in primerjava s teoretičnimi pričakovanji.
10	Priprava končnega poročila in priprava na zagovor.

Zaključek

Projekt bo združil teoretično analizo in eksperimentalne rezultate ter preveril, ali so ekstremni kaktusni grafi resnično ekstremni tudi v širšem razredu grafov z enakim ciklomatskim številom. Poseben poudarek bo na primerjavi med različnimi strukturami grafov in vplivu dodajanja povezav na število poti. Na ta način bomo poskusili prispevati k razumevanju vedenja inverzov grafa glede na topološko kompleksnost, merjeno s ciklomatskim številom.