# Kratko poročilo – projektna naloga

*Skupina 18: Število podpoti pri grafih z danim ciklomatskim številom*

## Uvod

V projektu obravnavamo *povezane* grafe $G = (V, E)$, za katere je definirano *ciklomatsko število*

$$\mu(G) = |E| - |V| + 1.$$

To število pove, koliko neodvisnih ciklov vsebuje graf oziroma koliko povezav bi morali odstraniti, da bi dobili gozd (acikličen graf).

**CILJ NALOGE**: raziskati, kako se obnaša *število podpoti in geodetskih podpoti grafa*, torej število vseh enostavnih poti (vključno s potmi dolžine 0), pri grafih z danim ciklomatičnim številom. Zanima nas, kateri grafi imajo za dano število vozlišč $|V| = n$ in dano ciklomatsko število $\mu = k$ najmanjše oziroma največje število poti.

## Teoretično ozadje

**Definicija 1** (Podpot)**.** Naj bo $G = (V, E)$ povezan graf in $P = v_1 v_2 \ldots v_k$ pot v grafu $G$. *Podpot* grafa $G$ je vsaka zaporedna podzaporedje oglišč te poti, torej vsaka pot oblike

$$v_i v_{i+1} \ldots v_j, \quad \text{kjer } 1 \leq i < j \leq k.$$

Subpath number $p_n(G)$ štejemo kot skupno število vseh enostavnih poti v grafu, pri čemer se šteje tudi vsako vozlišče kot pot dolžine 0.

**Definicija 2** (Geodetsko število)**.** Naj bo $G = (V, E)$ povezan graf. *Geodetsko število podpoti* grafa $G$, označeno z $gp_n(G)$, definiramo kot skupno število vseh geodetskih enostavnih poti v grafu. Za vsaka dva vozlišča $u, v \in V(G)$ označimo z $d(u, v)$ razdaljo med njima, z $\sigma^*(u, v)$ pa število vseh enostavnih $u$–$v$ poti dolžine $d(u, v)$. Tedaj je

$$gp_n(G) = \sum_{u,v \in V(G)} \sigma^*(u, v).$$

Vračunane so tudi poti dolžine 0, torej $u = v$. Geodetsko število podpoti tako meri, koliko najkrajših enostavnih poti vsebuje graf.

**Kaktusni graf** je graf, v katerem se poljubna dva cikla stikata v največ enem vozlišču. To pomeni, da se cikli lahko dotikajo, vendar se ne prekrivajo.

**Graf PTC(n,k)** (angl. *Pseudo Triangle Chain*), slovensko psevdotrikotna veriga, je poseben primer kaktusnega grafa, v katerem so vsi cikli trikotniki, povezani v verigo, in dosega največje možno število podpoti med vsemi takšnimi grafi. Zato se v projektu pogosto uporabi kot osnovni primer (tj. zgornja meja) za primerjavo z drugimi grafi, ki imajo enako ciklomatično število $\mu(G)$.

Graf $PTC(n, k)$ ima naslednje lastnosti:

- je kaktusni graf z $n$ vozlišči in $k$ cikli;
- vsak notranji cikel je trikotnik (ima 3 vozlišča);
- cikli so med seboj povezani v verigo (en za drugim);
- prvi in zadnji cikel se lahko rahlo razlikujeta po velikosti (imata lahko 4 vozlišča namesto 3);
- vsi cikli se stikajo v natanko enem vozlišču, zato graf tvori verižasto strukturo.

**Izrek** (Knor, 2025) Graf $PTC(n, k)$ enolično maksimizira število podpoti med vsemi kaktusnimi grafi z $n$ vozlišči in $k \geq 2$ cikli.

**Iz literature (Knor, 2025):** za kaktusne grafe veljajo naslednji ekstremni primeri

- maksimalni $p_n(G)$ doseže t.i. *pseudo triangle chain*, kjer so vsi notranji cikli trikotniki, oba končna pa se razlikujeta največ za eno vozlišče;
- minimalni $p_n(G)$ doseže graf, kjer so vsi cikli *end-trikotniki*, torej vsak trikotnik deli največ eno skupno vozlišče z ostalim grafom.

# Plan dela

Projektno nalogo bova ločila na dva dela.
**1. Analiza za majhne grafe.** V okolju SageMath bomo s pomočjo funkcije *geng* generirali vse povezane grafe z števili vozlišč $n \leq 8$ in za vsak graf izračunali: $|V|, |E|, \mu(G)$ in $p_n(G)$, $gp_n(G)$. Pri majhnih grafih bomo $p_n(G)$ izračunali z iskanjem vseh enostavnih poti med pari vozlišč. Ker SageMath ne vsebuje vgrajene funkcije za štetje vseh enostavnih poti, smo uporabili rekurzivni pristop. Funkcija `all_simple_paths(G, start, end)` poišče vse poti med vozliščema `start` in `end`, tako da postopno obiskuje sosednja vozlišča, pri čemer se izogiba že obiskanih točk. Za vsak par vozlišč $(u, v)$ se nato prešteje število poti in sešteje. Na podlagi rezultatov bomo določili grafe, ki imajo minimalni in maksimalni $p_n(G)$ pri enakem $\mu(G)$ ter preverili, ali so ti grafi kaktusnega tipa.

**2. Analiza za večje grafe.** Za grafe z več kot osmimi vozlišči bomo uporabili metodo simuliranega ohlajanja, saj popolna generacija vseh neizomorfnih grafov pri tej velikosti postane računsko neizvedljiva. Za dani vrednosti $n$ in $\mu(G) = k$ bomo najprej ustvarili povezani graf z $n$ vozlišči in točno $m = n-1+k$ povezavami, za katerega si mislimo da je podoben optimalnemu. Ta graf bo začetno stanje algoritma. V vsakem koraku bomo izvedli majhno lokalno spremembo grafa (t.i. *edge swap*), pri kateri odstranimo en obstoječi rob in ga nadomestimo z novim, tako da ohranimo število povezav in s tem tudi ciklomatsko število. Novo stanje sprejmemo vedno, kadar se vrednost $p_n(G)$ izboljša. Če se vrednost poslabša, takšno stanje sprejmemo le z verjetnostjo $e^{(\Delta/T)}$, kjer je $\Delta$ razlika med novim in trenutnim stanjem, $T$ pa trenutna temperatura. Pri višjih temperaturah algoritem pogosteje sprejema slabše korake, kar mu omogoča izogibanje lokalnim optimumom.

Ko temperaturo postopoma znižujemo po pravilu $T_{k+1} = \alpha T_k$, postane algoritem vedno bolj "konservativen"in sprejema skoraj izključno korake, ki izboljšajo rezultat. Po koncu iteracij kot končno rešitev vzamemo tisti graf, ki je med izvajanjem dosegel največjo (oziroma najmanjšo) vrednost $p_n(G)$, ter ga primerjamo z znanimi ekstremnimi kaktusnimi grafi za iste vrednosti $n$ in $\mu(G)$.

## Pričakovani rezultati in hipoteze

Pričakujemo, da bo vrednost $p_n(G)$ najnižja pri drevesih in bo naraščala z večanjem ciklomatskega števila $\mu(G)$, saj dodatni cikli omogočajo več različnih enostavnih poti med pari vozlišč. Na podlagi znane literature o kaktusnih grafih domnevamo, da bo minimalni $p_n(G)$ dosežen pri zaporedno povezanih ciklih, kjer so cikli razporejeni v verigo in tako le lokalno povečujejo število poti. Največji $p_n(G)$ pa pričakujemo pri strukturi, kjer imajo vsi cikli skupno vozlišče (*star cactus*), saj takšna razporeditev ustvarja veliko število alternativnih poti prek centralnega vozlišča.

Pri večjih grafih, kjer popolnega pregleda ni mogoče izvesti, pričakujemo pojav lokalnih ekstremov, zlasti v primerih, ko se cikli prekrivajo ali medsebojno vplivajo na način, ki ne povečuje večjega števila novih enostavnih poti. Takšne strukture lahko povzročijo le majhno rast $p_n(G)$ kljub večjemu številu povezav, kar želimo podrobno analizirati s pomočjo simuliranega ohlajanja.