

# Kratko poročilo – projektna naloga

Skupina 18: Število podpoti pri grafih z danim ciklomatskim številom

## Uvod

V projektu obravnavamo povezane grafe  $G = (V, E)$ , za katere je definirano ciklomatsko število

$$\mu(G) = |E| - |V| + 1.$$

To število pove, koliko neodvisnih ciklov vsebuje graf oziroma koliko povezav bi morali odstraniti, da bi dobili gozd (acikličen graf).

**CILJ NALOGE:** raziskati, kako se obnaša število podpoti in geodetskih podpoti grafa, torej število vseh enostavnih poti (vključno s potmi dolžine 0), pri grafih z danim ciklomatičnim številom. Zanima nas, kateri grafi imajo za dano število vozlišč  $|V| = n$  in dano ciklomatsko število  $\mu = k$  najmanjše oziroma največje število poti.

## Teoretično ozadje

**Definicija 1** (Podpot). Naj bo  $G = (V, E)$  povezan graf in  $P = v_1 v_2 \dots v_k$  pot v grafu  $G$ . Podpot grafa  $G$  je vsaka zaporedna podzaporede oglišč te poti, torej vsaka pot oblike

$$v_i v_{i+1} \dots v_j, \quad \text{kjer } 1 \leq i < j \leq k.$$

Subpath number  $p_n(G)$  štejemo kot skupno število vseh enostavnih poti v grafu, pri čemer se šteje tudi vsako vozlišče kot pot dolžine 0.

**Definicija 2** (Geodetska pot in geodetska podpot). Naj bo  $G$  povezan graf. Geodetska pot (angl. *geodesic path*) med vozliščema  $u$  in  $v$  je pot z najmanjšim možnim številom povezav med  $u$  in  $v$ , torej najkrajša pot med njima. Geodetska podpot pa je vsaka podpot geodetske poti.

**Kaktusni graf** je graf, v katerem se poljubna dva cikla stikata v največ enim vozlišču. To pomeni, da se cikli lahko dotikajo, vendar se ne prekrivajo.

**Graf PTC(n,k)** (angl. *Pseudo Triangle Chain*), slovensko psevdotrikotna veriga, je poseben primer kaktusnega grafa, v katerem so vsi cikli trikotniki, povezani v verigo, in dosega največje možno število podpoti med vsemi takšnimi grafi. Zato se v projektu pogosto uporabi kot osnovni primer (tj. zgornja meja) za primerjavo z drugimi grafi, ki imajo enako ciklomatično število  $\mu(G)$ .

Graf  $PTC(n, k)$  ima naslednje lastnosti:

- je kaktusni graf z  $n$  vozlišči in  $k$  cikli;

- vsak notranji cikel je trikotnik (ima 3 vozlišča);
- cikli so med seboj povezani v verigo (en za drugim);
- prvi in zadnji cikel se lahko rahlo razlikujeta po velikosti (imata lahko 4 vozlišča namesto 3);
- vsi cikli se stikajo v natanko enem vozlišču, zato graf tvori verižasto strukturo.

**Izrek** (Knor, 2025) Graf  $PTC(n, k)$  edinstveno maksimira število podpoti med vsemi kaktusnimi grafi z  $n$  vozlišči in  $k \geq 2$  cikli.

Ta izrek lahko torej uporabimo kot "izhodišče", kaseneje pa bomo gledali ne samo kaktusne ampak tudi splošnejše grafe.

**Iz literature (Knor, 2025):** za kaktusne grafe veljajo naslednji ekstremni primeri

- maksimalni  $p_n(G)$  doseže t.i. *pseudo triangle chain*, kjer so vsi notranji cikli trikotniki, oba končna pa se razlikujeta največ za eno vozlišče;
- minimalni  $p_n(G)$  doseže graf, kjer so vsi cikli *end-trikotniki*, torej vsak trikotnik deli največ eno skupno vozlišče z ostalim grafom.

## Plan dela

Projektno naloge bova ločila na dva dela.

**1. Analiza za majhne grafe.** V okolju SageMath bomo s pomočjo funkcije `gen` generirali vse povezane grafe z števili vozlišč  $n \leq 8$  in za vsak graf izračunali:  $|V|$ ,  $|E|$ ,  $\mu(G)$  in  $p_n(G)$ . Pri majhnih grafih bomo število poti izračunali z iskanjem vseh enostavnih poti (DFS) med pari vozlišč. Ker SageMath ne vsebuje vgrajene funkcije za štetje vseh enostavnih poti, smo uporabili rekurzivni pristop. Funkcija `all_simple_paths(G, start, end)` poišče vse poti med vozliščema `start` in `end`, tako da postopno obiskuje sosednja vozlišča, pri čemer se izogiba že obiskanih točk. Za vsak par vozlišč  $(u, v)$  se nato prešteje število poti in sešteje. Na podlagi rezultatov bomo določili grafe, ki imajo minimalni in maksimalni  $p_n(G)$  pri enakem  $\mu(G)$  ter preverili, ali so ti grafi kaktusnega tipa.

**2. Eksperimentiranje za večje grafe.** Za  $|v| > 8$  bomo uporabili naključne povezane grafe, ustvarjene z metodo `graphs.RandomGNP(n, p)`, pri čemer bomo vzdrževali število povezav  $|E| = n - 1 + k$ . Za iskanje ekstremnih grafov bomo uporabili *metaheuristične algoritme*, kot sta *simulirano ohlajanje* ali *genetski algoritem*, ki bosta postopno spremnjala strukturo grafa in iskala konfiguracijo z večjim ali manjšim  $p_n(G)$ . Pri tem bomo analizirali, ali optimizacija privede do struktur, podobnih znanim ekstremnim kaktusom (verige trikotnikov) ali do popolnoma novih topologij.

## Pričakovani rezultati in hipoteze

Verjamemo, da bo  $p_n(G)$  najmanjši pri drevesih in večji pri grafih z večim ciklomatskim številom. Na podlagi dane literature, pričakujemo, da bo minimalni  $p_n(G)$  pri zaporedno vezanih ciklih v kaktusnem grafu (*Pseudo Triangle Chain*) in maksimalen v primeru, ko bodo vsi cikli imeli isto skupno vozlišče. Pri večjih grafih pričakujemo, da bodo pojavljeni lokalni ekstremi, kjer več prekrivajočih se ciklov povzroči le majhno povečanje števila poti zaradi redundancy.

## Zaključek

Projekt bo združil teoretično analizo in eksperimentalne rezultate ter preveril, ali so ekstremini kaktusni grafi resnično ekstremini tudi v širšem razredu grafov z enakim ciklomatskim številom. Poseben poudarek bo na primerjavi med različnimi strukturami grafov in vplivu dodajanja povezav na število poti. Na ta način bomo poskusili prispevati k razumevanju vedenja inverzov grafa glede na topološko kompleksnost, merjeno s ciklomatskim številom.