Poročilo – projektna naloga

Skupina 18: Subpath number pri grafih z danim ciklomatskim številom

Uvod

V projektu obravnavamo povezane grafe $G = (V, E)$, za katere je definirano *ciklomatsko število*

$$\mu(G) = |E| - |V| + 1.$$

To število pove, koliko neodvisnih ciklov vsebuje graf oziroma koliko povezav bi morali odstraniti, da bi dobili gozd (acikličen graf). Grafi z določenim $\mu(G) = k$ predstavljajo naravno posplošitev dreves ($\mu = 0$) in unocikličnih grafov ($\mu = 1$). Ti grafi se pojavljajo v številnih strukturnih in kombinatornih problemih, npr. pri načrtovanju omrežij, električnih vezjih in analizi programske kode.

Cilj naloge je raziskati, kako se obnaša *subpath number* grafa, torej število vseh enostavnih poti (vključno s potmi dolžine 0), pri grafih z danim $\mu(G) = k$. Zanima nas, kateri grafi imajo za dano število vozlišč n in dano ciklomatsko število k najmanjše oziroma največje število poti.

Teoretično ozadje

Za vsak povezan graf velja $\mu(G) = |E| - |V| + 1$. Pri drevesih je $\mu(G) = 0$, pri dodajanju ene dodatne povezave dobimo unociklični graf ($\mu = 1$), vsaka nova neodvisna povezava pa poveča $\mu(G)$ za 1. Subpath number $p_n(G)$ štejemo kot skupno število vseh enostavnih poti v grafu, pri čemer se šteje tudi vsako vozlišče kot pot dolžine 0.

Iz literature (Knor et al., 2025) so znani ekstremni primeri za *kaktus grafe*, kjer se poljubna dva cikla stikata največ v enem vozlišču. Za te grafe velja:

- maksimalni $p_n(G)$ doseže t.i. *pseudo triangle chain*, kjer so vsi notranji cikli trikotniki, oba končna pa se razlikujeta največ za eno vozlišče;
- minimalni $p_n(G)$ doseže graf, kjer so vsi cikli *end-trikotniki*, torej vsak trikotnik deli največ eno skupno vozlišče z ostalim grafom.

Namen projekta je preveriti, ali te lastnosti veljajo tudi pri splošnih grafih z enakim $\mu(G)$ in kako se subpath number spreminja pri različnih strukturah.

Načrt raziskave

Analiza za majhne grafe. V okolju SageMath bomo generirali vse povezane grafe do velikosti $n \leq 8$ in za vsak graf izračunali:

$$|V|, \quad |E|, \quad \mu(G), \quad \text{in približen } p_n(G).$$

Pri majhnih grafih bomo število poti izračunali z iskanjem vseh enostavnih poti (DFS) med pari vozlišč. Na podlagi rezultatov bomo določili grafe, ki imajo minimalni in maksimalni $p_n(G)$ pri enakem $\mu(G)$ ter preverili, ali so ti grafi kaktusnega tipa.

Eksperimentiranje za večje grafe. Za $n > 8$ bomo uporabili naključne povezane grafe, ustvarjene z metodo `graphs.RandomGNP(n,p)`, pri čemer bomo vzdrževali število povezav $|E| = n - 1 + k$. Za iskanje ekstremnih grafov bomo uporabili *metahevristične algoritme*, kot sta *simulirano ohlajanje* ali *genetski algoritem*, ki bosta postopno spreminjala strukturo grafa in iskala konfiguracijo z večjim ali manjšim $p_n(G)$. Pri tem bomo analizirali, ali optimizacija privede do struktur, podobnih znanim ekstremnim kaktusom (verige trikotnikov) ali do popolnoma novih topologij.

Pričakovani rezultati in hipoteze

Pričakujemo, da bo minimalni graf pri danem $\mu(G) = k$ imel vse cikle skoncentrirane v enem vozlišču (analogno *pseudo friendship graphu*), medtem ko bodo grafi z največjim $p_n(G)$ imeli cikle razporejene v verigo, podobno *pseudo triangle chainu*. Pri večjih grafih pričakujemo, da bodo pojavljeni lokalni ekstremi, kjer več prekrivajočih se ciklov povzroči le majhno povečanje števila poti zaradi redundance.

Plan dela

Dan	**Naloga**
1–2	Pregled teoretičnih osnov in članka »The subpath number of cactus graphs«.
3–4	Implementacija kode za generiranje vseh povezanih grafov z $n \leq 6$ in izračun $\mu(G)$.
5–6	Izračun subpath numberja za majhne grafe in analiza ekstremov.
7–8	Eksperimenti na večjih grafih z naključnim generiranjem in metahevristiko (simulirano ohlajanje).
9	Povzetek rezultatov in primerjava s teoretičnimi pričakovanji.
10	Priprava končnega poročila in priprava na zagovor.

Zaključek

Projekt bo združil teoretično analizo in eksperimentalne rezultate ter preveril, ali so ekstremni kaktusni grafi resnično ekstremni tudi v širšem razredu grafov z enakim ciklomatskim številom. Poseben poudarek bo na primerjavi med različnimi strukturami grafov in vplivu dodajanja povezav na število poti. Na ta način bomo poskusili prispevati k razumevanju vedenja inverzov grafa glede na topološko kompleksnost, merjeno s ciklomatskim številom.