1 Pravděpodobnost

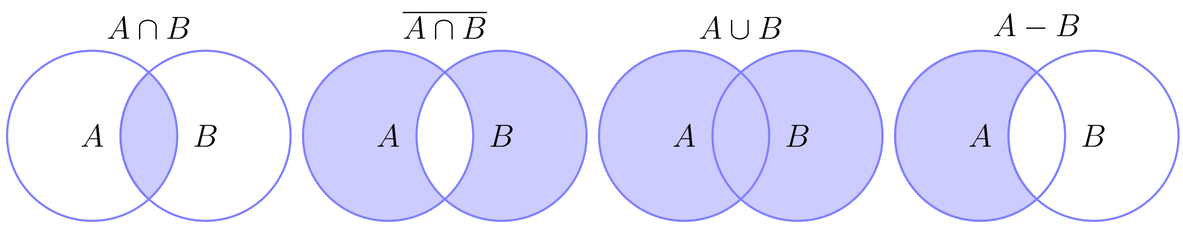
Teorie: Pravděpodobnostní prostor $\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}$

Náhodný pokus: je proces, jehož výsledek je při jinak stejných počátečních podmínkách nejistý.

Elementární jevy Ω: všechny možné výsledky náhodného pokusu (úplný systém disjuktních jevů).

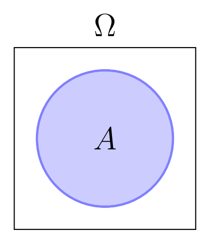
Náhodný jev $A \subset \Omega$: možné výsledky náhodného pokusu (je složen z elementárních jevů).
S jevy pracujeme jako s množinami:

$\bar{A}$ (nebo A^c nebo A')	doplněk jevu $\Omega - A$	neplatí jev A
$A \cap B$	průnik jevů	jev A a zároveň jev B
$A \cup B$	sjednocení jevů	jev A nebo B (nebo oba jevy)
$A \subset B$	jev A je podjevem jevu B	když A, pak vždy B
$A \cap B = \emptyset$	neslučitelné (disjunktní) jevy	
$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$	systém úplných jevů	všechny situace, které mohou nastat



Pravděpodobnost P je funkce, která jevům přiřazuje číslo od 0 do 1.

$P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0$	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	pravděpodobnost sjednocení
$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$	pravděpodobnost s doplňky



Klasická pravděpodobnost $P(A) = \dfrac{\text{počet příznivých výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}}$

počet permutací (uspořádání n-tic)	$n!$
počet variací (výběr uspořádaných k-tic z n-tice)	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$
počet kombinací (výběr neuspořádaných k-tic z n-tice)	$\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

s opakováním: permutace n^n, variace n^k, kombinace $\dbinom{n+k-1}{k}$

(1.1) Popište náhodné jevy, které vzniknou jako výsledek následujících náhodných pokusů

(a) hození mincí, hození kostkou;

(b) určení počtu nevyhovujících výrobků v sadě obsahující 10 výrobků;

(c) určení počtu studentů, kteří projdou za hodinu dveřmi;

(d) určení doby životnosti žárovky;

(e) určení výšky náhodně vybrané osoby.

(1.2) Jev A spočívá v tom, že náhodně vybrané přirozené číslo je dělitelné pěti a jev B v tom, že toto číslo má na posledním místě nulu. Určete, co znamenají jevy $A \cap B$; $A \cup B$; $\bar{A} \cap B$; $A \cup \bar{B}$; $\overline{A \cap \bar{B}}$. a zakreslete příslušné diagramy.

(1.3) Výrobek je v rámci výstupní kontroly podroben třem různým zkouškám. Jev A spočívá v tom, že výrobek obstojí při první zkoušce, jev B spočívá v tom, že výrobek obstojí při druhé zkoušce a jev C v tom, že výrobek obstojí při třetí zkoušce. Vyjádřete v množinové symbolice, že výrobek obstojí

(a) jen v první zkoušce;

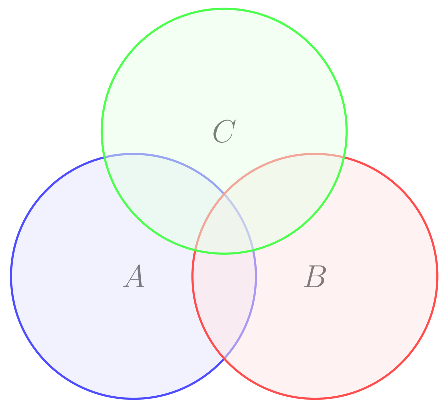
(b) v první a druhé zkoušce, ale neobstojí ve třetí zkoušce;

(c) ve všech třech zkouškách;

(d) alespoň v jedné zkoušce;

(e) alespoň ve dvou zkouškách;

(f) maximálně ve dvou zkouškách.



(1.4)

Hodíme dvěma kostkami.

(a) S jakou ppstí padne alespoň na jedné kostce sudé číslo ?

[3/4]

(b) S jakou ppstí padne na obou kostkách stejné číslo ?

[1/6]

(c) S jakou ppstí bude součet bodů nejvýše 10 ?

[11/12]

(d) S jakou ppstí bude absolutní hodnota rozdílu alespoň 3 ?

[1/3]

(1.5) V souboru je 10 výrobků, mezi nimi jsou 3 vadné, vybereme 5 výrobků. Určete ppst, že mezi vybranými

(a) nebude žádný vadný;

$$[\frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}}]$$

(b) bude právě jeden vadný;

$$[\frac{\binom{7}{4}\binom{3}{1}}{\binom{10}{5}}]$$

(c) budou nejvýše dva vadné.

$$[1 - \frac{\binom{7}{2}\binom{3}{3}}{\binom{10}{5}}]$$

(1.6*) V urně je 5 bílých koulí. Kolik musíme přidat černých koulí, aby ppst, že při náhodném vytažení dvou koulí (nevracíme) budou obě černé byla alespoň 50% ?

$$[\frac{\binom{x}{2}}{\binom{x+5}{2}} \geq 0.5;\ x = 13]$$

(1.7*) V souboru 20 výrobků jsou 3 vadné. Kontrolor musí prohlédnout postupně výrobky dokud nenajde všechny vadné. Prohlédnuté výrobky odkládá stranou.

(a) Jaká je ppst, že kontrolor nebude muset kontrolovat více než 17 výrobků ?

[Mezi 17 kontrolovanými musí být tři vadné: $\frac{\binom{17}{14}\binom{3}{3}}{\binom{20}{17}} = 59.65\%$]

(b) Jaká je ppst, že bude kontrolovat právě 17 výrobků ?

[Mezi 16 kontrolovanými musí být dva vadné a poslední vybraný je vadný]

$$[\ \frac{\binom{17}{14}\binom{3}{2}}{\binom{20}{16}} \cdot \frac{1}{4} = 10.53\%\ ]$$

(c) Jaký je nejpravděpodobnější počet výrobků, které bude muset kontrolor kontrolovat ?

[Obecná pravděpodobnost kontroly k výrobků je $p_k = \frac{\binom{17}{k-1-2}\binom{3}{2}}{\binom{20}{k-1}} \cdot \frac{1}{20-k+1}$]

[Maximální pravděpodobnost je pro $k = 20, p_k = 15\%$, průměrná je $\overline{k} = 15,75$]

(1.8) Společnost dodává výrobky, u kterých nebyla provedena kontrola jakosti, v balení po 10 kusech. Je známo, že pravděpodobnost vyrobení kvalitního výrobku je 95%. Určete pravděpodobnost, že v balení 10 kusů budou všechny výrobky bez vady.

$$[0.95^{10} = 0.5987\ ]$$

Společnost předpokládá, že každé balení, v němž je alespoň jeden výrobek vadný, bude reklamováno a zaručilo se, že při reklamaci vrátí peníze. Výrobní náklady na jedno celé balení jsou 200 Kč. Jakou cenu by měla společnost stanovit pro cenu jednoho balení, aby mohla očekávat zisk 20%.

$$[c \cdot 0.95^{10} + 0 \cdot (1 - 0.95^{10}) = 200 \cdot 1,2 \Rightarrow c = 400.85\ ]$$

(1.9*) (*paradox narozenin*) Nechť je v místnosti n lidí. Určete ppst., že alespoň dva z nich mají ve stejný den narozeniny.

$$[P_n = 1 - \frac{365 \cdot (365-1) \cdot (365-2) \cdot \dots \cdot (365-n+1)}{365^n}\ ]$$

(a) V místnosti je 30 lidí. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň dva mají narozeniny ve stejný den ?

[$P_{n=30} = 70.63\%$]

(b) Při jakém n je sázka na to, že v místnosti jsou alespoň dva lidé se stejným dnem narozenin, čestná, tzn. pravděpodobnost výhry je přibližně 0.5 ?

[Hledám n tak, aby $P_n \doteq 0.5 \Rightarrow n = 23$]

(c) Při jakém n je pravděpodobnost faktu, že dva lidé mají narozeniny ve stejný den, alespoň 0.99 ?

[Hledám n tak, aby $P_n > 0.99 \Rightarrow n = 57$]

(1.10) Ppst vyrobení vadného výrobku je $\pi = 0.01$.

(a) Určete pravděpodobnost, že při vyrobení 10 výrobků nebude ani jeden vadný.

[$P = 0.99^{10} = 0.9044$]

(b) Kolik je třeba vyrobit výrobků, aby pravděpodobnost vyrobení vadného byla alespoň 80%.

[Hledám n tak, aby $P = 1 - 0.99^n > 0.8 \Rightarrow n \doteq 161$]

(1.11) Kolika kostkami musíme současně hodit, aby ppst.,že padne alespoň jedna šestka byla větší než 0.8.

[Hledám n tak, aby $P = 1 - (5/6)^n > 0.8 \Rightarrow n \doteq 9.$]

Kolika kostkami musíme současně hodit, aby ppst.,že padne alespoň jedna šestka byla 1.

[Hledám n tak, aby $P = 1 - (5/6)^n = 1 \Rightarrow n \to \infty.$]