Lineární algebra – 3. cvičení

1. Pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

vypočtěte $A + B$, $A \cdot B$, $B \cdot A$ a $A^\top$.

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 5 & 9 & 7 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Matice řádu $m \times n$ tvoří vektor. prostor

značím $\mathbb{M}_{m,n}$

$$-2 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 0 & -4 & -12 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 5 - 1\cdot 0 & \overbrace{1\cdot 0 + 3\cdot 7 - 2}^{19} & \overbrace{-1\cdot 3 + 3\cdot 1 + 4}^{4} \\ 10 & 26 & -22 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Potom

"$k \times l$" · "$m \times n$" Potom ① lze násobit $\Leftrightarrow$ $l = m$

② výsledek je typu "$k \times n$"

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -5 \\ 3 & 10 & 38 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A} \,!!$$

2. Pokud existují, najděte $A \cdot B$ a $B \cdot A$ pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

A je typu "2×4"

B je typu "3×2"

$A \cdot B$: "2×4" $\cdot$ "3×2" — $4 \neq 3$ — Nelze násobit

$B \cdot A$: "3×2" $\cdot$ "2×4" $\rightarrow$ "3×4" — $2 = 2$

$B \cdot A$ DÚ

3. Označme $\mathcal{M}_{m,n}$ vektorový prostor matic řádu $m \times n$ nad $\mathbb{R}$. Ukažte, že pro libovolné $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ množina

$$\mathcal{U} = \mathcal{K}_A := \{B \in \mathcal{M}_{n,n} \mid \; A \cdot B = B \cdot A\}$$

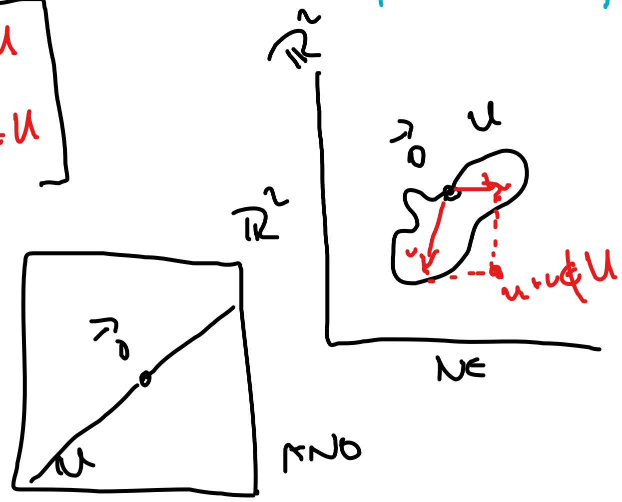
tvoří vektorový prostor.

Buď A matice $A \in M_{n,n}$. Uhodneme nějaké $B \in M_{n,n}$

$\boxed{A \cdot B = B \cdot A ?}$ $\quad B = I;\ O;\ A^{-1};\ A;\ A^2;\ \ldots$

Tvrzení: Buď $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor & $U \subset V$ jeho podmnožina. Potom $(U, +, \cdot)$ je vektorový prostor $\iff$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall u, v \in U: \ u + v \in U \\ \forall u \in U;\ \forall \alpha \in \mathbb{R}: \ \alpha u \in U \end{array}}$$



① $B, C \in K_A$ tj. $B \cdot A = A B$ & $C \cdot A = A \cdot C$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A = A \cdot B + A C = A \cdot (B + C) \checkmark$$

② $B \in K_A$ $\alpha \in \mathbb{R}$. $\quad (\alpha B) \cdot A = \alpha (B \cdot A) = \alpha A \cdot B = A \cdot (\alpha B) \checkmark$

4. Najděte bázi prostoru $\mathcal{K}_A$ pro $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad : \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 3\gamma & 2\beta + 3\delta \\ -\alpha + 2\gamma & -\beta + 2\delta \end{pmatrix}$$

$$\shortparallel$$

$$BA = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta & 3\alpha + 2\beta \\ 2\gamma - \delta & 3\gamma + 2\delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \cancel{2\alpha} + 3\gamma &= \cancel{2\alpha} - \beta \\ \cancel{2\beta} + 3\delta &= 3\alpha + \cancel{2\beta} \\ -\alpha + \cancel{2\gamma} &= \cancel{2\gamma} - \delta \\ -\beta + \cancel{2\delta} &= 3\gamma + \cancel{2\delta} \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} \beta &= -3\gamma \\ 3\delta &= 3\alpha \\ \cancel{-\alpha} &\cancel{= -\delta} \\ \cancel{-\beta} &\cancel{= 3\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \alpha &= u \\ \gamma &= v \\ \beta &= -3v \\ \delta &= u \end{aligned}$$

$$B \in \mathcal{K}_A \Rightarrow B = \begin{pmatrix} u & -3v \\ v & u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Báze } \mathcal{K}_A \text{ je } \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= B_1} ; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= B_2} \right\}$$

Tj každou matici $\in \mathcal{K}_A$ lze zapsat jednoznačně jako kombinaci B_1 & B_2.

$$I \in \mathcal{K}_A \qquad I = 1 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2$$

$$A \in \mathcal{K}_A \qquad A = 2 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2$$

5. Ukažte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

je *nilpotentní*, tj existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že A^n je rovno nulové matici.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & A & A & \\ & \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix} & \dots \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 6 & -18 & -9 \\ 6 & -18 & -9 \\ -8 & 24 & 12 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \\ A & A^2 & A^3 & \end{array}$$

$A^3 = 0$ tj

matice A je nilpotentní ✓

$\operatorname{tr} A = 3 + 3 - 5 = 1 \neq 0$

6. ⋆ Ukažte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A$ není nilpotentní

není nilpotentní, tj. $A^2, A^3, A^4, \dots$ $A^{1003572}, A^{10036573}, \dots \neq 0$.

• Wiki: NILPOTENT MATRIX

Je-li: $A \in M_{3,3}$ nilpotentní $\Rightarrow A^3 = 0$

$A^3 \neq 0 \Rightarrow A \in M_{3,3}$ není nilpotentní

$A^3 = ?$

7. Tvoří nilpotentní matice vektorový prostor?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ale

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad ?$$

Známý vzorec

$$(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2 = 0 + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + 0 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

PROČ?

8. Buď $\mathcal{P}$ množina všech nekonečných posloupností, tj. funkcí $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ověřte, že $\mathcal{P}$ je vektorovým prostorem. Jaká je jeho dimenze?

ANO $\mathcal{P}$ je v.p. & $\boxed{\dim \mathcal{P} = +\infty}$

9. Vyřešte maticovou rovnici $A \cdot X = I$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Jak říkáme matici X? inverzní matice $\quad X = A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}-2x_{21}-x_{31} & x_{12}-2x_{22}-x_{32} & x_{13}-2x_{23}-x_{33} \\ x_{11}+3x_{21}+2x_{31} & x_{12}+3x_{22}+2x_{32} & x_{13}+3x_{23}+2x_{33} \\ x_{11}-2x_{21} & x_{12}-2x_{22} & x_{13}-2x_{23} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \quad A \qquad\qquad I \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} II-I \\ \sim \\ III-I \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} I+III \\ II-3III \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$5I+2II \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} I/5 \\ II/5 \\ \sim \end{array} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/5 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ I \end{array} \quad X = A^{-1}$$

$x_{11} = 4/5 \qquad x_{12} = 2/5 \qquad x_{13} = -\frac{1}{5}$

$x_{21} = 2/5 \qquad x_{22} = 1/5 \qquad x_{23} = -3/5$

$x_{31} = -1 \qquad x_{32} = 0 \qquad x_{33} = 1$

$$X = \begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 & -1/5 \\ 2/5 & 1/5 & -3/5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$