Řešené příklady z lineární algebry - část 7

Lineární zobrazení

Příklad 7.1:
Zobrazení $\mathbf{L}\colon \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathbf{R}_{2,3}$ je zobrazení z prostoru $\mathcal{P}_3$ všech polynomů do stupně 3 (včetně nulového polynomu) do prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$ všech matic typu 2/3 :

$$\mathbf{L}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{bmatrix} a+2b, & -a+b+d, & 2a+7b+d \\ 0, & 3b+d, & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Ověřte, že zobrazení $\mathbf{L}$ je lineární zobrazení.

2. Určete jádro Ker$\mathbf{L}$ zobrazení $\mathbf{L}$, tj. nalezněte alespoň jednu bázi jádra Ker$\mathbf{L}$ a určete jeho dimenzi.

3. Určete obraz Im$\mathbf{L}$ zobrazení $\mathbf{L}$, tedy nalezněte alespoň jednu bázi Im$\mathbf{L}$ a stanovte dimenzi obrazu Im$\mathbf{L}$.

4. Určete matici $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ v kanonické bázi

$$p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1$$

prostoru $\mathcal{P}_3$ a v kanonické bázi

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$.

5. Pro polynom $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ nalezněte obraz $\mathbf{L}(p(x))$ a souřadnice $\widehat{p(x)}$ a $\widehat{\mathbf{L}(p)}$ vzhledem k příslušným kanonickým bázím p_1, p_2, p_3, p_4 prostoru $\mathcal{P}_3$ a $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$. Ověřte, že platí rovnost $\mathbf{M} \cdot \widehat{p(x)} = \widehat{\mathbf{L}(p)}$.

6. Určete matici $\widetilde{\mathbf{M}}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ vzhledem k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2, q_2(x) = x^2 + x + 1, q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

v prostoru $\mathcal{P}_3$ a k bázi

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$.

7. Pro polynom $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ známe obraz $\mathbf{L}(p(x))$ (viz výše). Nalezněte souřadnice $\widetilde{p(x)}$ a $\widetilde{\mathbf{L}(p)}$ vzhledem k bázím q_1, q_2, q_3, q_4 prostoru $\mathcal{P}_3$ a $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$.
   Ověřte, že platí rovnost $\widetilde{\mathbf{M}} \cdot \widetilde{p(x)} = \widetilde{\mathbf{L}(p)}$.

Řešení:

1. Zobrazení $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ lineárního prostoru $\mathcal{U}$ do lineárního prostoru $\mathcal{V}$ je lineárním zobrazením, pokud obrazem součtu dvou libovolných prvků $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ z prostoru $\mathcal{U}$ je součet obrazů $\mathbf{L}(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{L}(\mathbf{u}_2)$ těchto prvků a obrazem λ-násobku libovolného prvku $\mathbf{u}$ z prostoru $\mathcal{U}$ pro libovolný prvek λ z tělesa $\mathbf{R}$ reálných čísel je λ-násobek obrazu $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ tohoto prvku:

$$\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U} : \mathbf{L}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathbf{L}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{L}(\mathbf{u}_2)\,,$$

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \forall \lambda \in \mathbf{R} : \mathbf{L}(\lambda \cdot \mathbf{u}) = \lambda \cdot \mathbf{L}(\mathbf{u})\,.$$

Označme proto

$$p_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1, \quad p_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2$$

dva libovolné polynomy z prostoru $\mathcal{P}_3$ a určeme obraz jejich součtu:

$$\mathbf{L}((p_1 + p_2)(x)) = \mathbf{L}((a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x^2 + (c_1 + c_2)x + (d_1 + d_2)) =$$

$$= \left[\begin{matrix} (a_1 + a_2) + 2(b_1 + b_2), & -(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (d_1 + d_2), \\ 0, & 3(b_1 + b_2) + (d_1 + d_2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} 2(a_1 + a_2) + 7(b_1 + b_2) + (d_1 + d_2) \\ 0 \end{matrix} \right] =$$

$$= \left[\begin{matrix} a_1 + a_2 + 2b_1 + 2b_2, & -a_1 - a_2 + b_1 + b_2 + d_1 + d_2, \\ 0, & 3b_1 + 3b_2 + d_1 + d_2, \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} 2a_1 + 2a_2 + 7b_1 + 7b_2 + d_1 + d_2 \\ 0 \end{matrix} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + 2b_1, & -a_1 + b_1 + d_1, & 2a_1 + 7b_1 + d_1 \\ 0, & 3b_1 + d_1, & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} a_2 + 2b_2, & -a_2 + b_2 + d_2, & 2a_2 + 7b_2 + d_2 \\ 0, & 3b_2 + d_2, & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{L}(p_1(x)) + \mathbf{L}(p_2(x)).$$

Využili jsme pouze pravidla platná pro operace v lineárním prostoru, resp. pro počítání v tělese reálných čísel, a snadno jsme ukázali, že **obrazem součtu** libovolných dvou polynomů **je součet obrazů** těchto polynomů.

Dále uvažujme libovolný polynom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ z prostoru $\mathcal{P}_3$ a libovolné reálné číslo λ a určeme obraz λ -násobku tohoto polynomu:

$$\mathbf{L}((\lambda \cdot p)(x)) = \mathbf{L}(\lambda \cdot ax^3 + \lambda \cdot bx^2 + \lambda \cdot cx + \lambda \cdot d) =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda \cdot a + 2\lambda \cdot b, & -\lambda \cdot a + \lambda \cdot b + \lambda \cdot d, & 2\lambda \cdot a + 7\lambda \cdot b + \lambda \cdot d \\ 0, & 3\lambda \cdot b + \lambda \cdot d, & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \begin{bmatrix} a + 2b, & -a + b + d, & 2a + 7b + d \\ 0, & 3b + d, & 0 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \mathbf{L}(p(x)) .$$

Také nyní jsme snadno ukázali, že **obrazem násobku** polynomu **je násobek obrazu** polynomu pro libovolný polynom a libovolné číslo z tělesa reálných čísel.

Obě podmínky z definice lineárního zobrazení jsou splněny, zadané zobrazení $\mathbf{L}$ je tedy lineární.

2. Jádro lineárního zobrazení $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ tvoří ty prvky prostoru $\mathcal{U}$, kterým lineární zobrazení $\mathbf{L}$ jako obraz přiřadí nulový prvek prostoru $\mathcal{V}$:

$$\mathrm{Ker}\mathbf{L} = \{\, \mathbf{u} \in \mathcal{U} \,;\; \mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \,\} .$$

Protože se jedná o podprostor prostoru $\mathcal{U}$, k jeho určení stačí nalézt jednu bázi.

Pro konkrétní zadání tedy hledáme podprostor všech polynomů, jejichž obrazem je nulová matice $\mathbf{0}$ typu 2/3 neboli nulový prvek prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$:

$$\mathrm{Ker}\mathbf{L} = \{\, p(x) \in \mathcal{P}_3\,;\ \mathbf{L}(p(x)) = \mathbf{0}\,\}\ .$$

Ptáme se tedy, co musí platit pro polynom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, jehož obrazem je nulová matice:

$$\mathbf{L}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} a+2b, & -a+b+d, & 2a+7b+d \\ 0, & 3b+d, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aby se dvě matice rovnaly, musí se rovnat jejich prvky na odpovídajících si pozicích. To znamená, že musí být splněny rovnice následující soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & & & = & 0\,, \\ -a & + & b & + & d & = & 0\,, \\ 2a & + & 7b & + & d & = & 0\,, \\ & & 3b & + & d & = & 0\,. \end{array}$$

Potřebujeme vyřešit soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých a, b, c, d. Uvědomme si, že koeficient c je také jednou hledanou neznámou, třebaže se ve výše uvedených rovnicích nevyskytuje. Soustava bude mít zřejmě nekonečně mnoho řešení. K jejich určení použijeme Gaussovu eliminační metodu, pomocí elementárních řádkových úprav upravíme matici soustavy na stupňovitý tvar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matice řešené soustavy má hodnost 2, rozdíl mezi počtem neznámých a hodností matice soustavy $4 - 2 = 2$ dává informaci o dimenzi podprostoru všech řešení soustavy, a tím i o počtu neznámých, za které se při určování obecného řešení volí tzv. parametry řešení. Soustava má samozřejmě nekonečně mnoho řešeních, při hledání jen jediného z nich lze za tyto neznámé volit libovolné reálné číslo. Zřejmě kromě neznámé

- koeficientu c se může libovolně zvolit ještě jedna neznámá - koeficient, vyberme např. koeficient b. Potom musí být $a = -2b$ a $d = -3b$.

Jádro Ker$\mathbf{L}$ zobrazení $\mathbf{L}$ tak tvoří všechny polynomy tvaru

$p(x) = -2bx^3+bx^2+cx-3b = b\cdot(-2x^3+x^2-3)+c\cdot x = b\cdot r_1(x)+c\cdot r_2(x)\,,$

kde $r_1(x) = -2x^3 + x^2 - 3, r_2(x) = x$. Po jednoduché úpravě jsme dokázali libovolný polynom z jádra Ker$\mathbf{L}$ vyjádřit jako lineární kombinaci dvou polynomů $r_1(x)$ a $r_2(x)$, máme generátory jádra Ker$\mathbf{L}$. Polynomy $r_1(x)$, $r_2(x)$ jsou zřejmě lineárně nezávislé (jeden není násobkem druhého), je to tedy báze prostoru Ker$\mathbf{L}$.

Jednou možnou bází jádra Ker$\mathbf{L}$ tvoří polynomy $r_1(x) = -2x^3 + x^2 - 3$ a $r_2(x) = x$. Dimenze jádra zobrazení $\mathbf{L}$ je proto rovna dvěma:

$$\dim(\mathrm{Ker}\mathbf{L}) = 2\,.$$

3. Obraz Im$\mathbf{L}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}\colon\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$ tvoří všechny prvky prostoru $\mathcal{V}$, které jsou lineárním zobrazením $\mathbf{L}$ přiřazeny jako obraz nějakému prvku z prostoru $\mathcal{U}$:

$$\mathrm{Im}\mathbf{L} = \{\,\mathbf{v} \in \mathcal{V};\ \exists\mathbf{u} \in \mathcal{U} : \mathbf{v} = \mathbf{L}(\mathbf{u})\,\}.$$

Protože se i nyní jedná o podprostor prostoru $\mathcal{V}$, k jeho určení stačí nalézt alespoň jednu bázi.

Otázkou je, jak najít generátory podprostoru Im$\mathbf{L}$. Je-li v prostoru $\mathcal{U}$ zvolena libovolná báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, lze každý prvek $\mathbf{u}$ prostoru $\mathcal{U}$ vyjádřit jako lineární kombinaci bázových prvků:

$$\mathbf{u} = c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \ldots + c_n \cdot \mathbf{u}_n\,.$$

Potom díky linearitě zobrazení $\mathbf{L}$ je obraz $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ prvku $\mathbf{u}$ vyjádřen jako lineární kombinace obrazů prvků báze prostoru $\mathcal{U}$:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}(c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \ldots + c_n \cdot \mathbf{u}_n) =$$

$$= c_1 \cdot \mathbf{L}(\mathbf{u}_1) + c_2 \cdot \mathbf{L}(\mathbf{u}_2) + \ldots + c_n \cdot \mathbf{L}(\mathbf{u}_n)\,.$$

Obrazy bázových prvků $\mathbf{L}(\mathbf{u}_1), \mathbf{L}(\mathbf{u}_2), \ldots, \mathbf{L}(\mathbf{u}_n)$ báze prostoru $\mathcal{U}$ jsou proto hledanými generátory podprostoru Im$\mathbf{L}$. Protože obrazy $\mathbf{L}(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{L}(\mathbf{u}_2), \ldots, \mathbf{L}(\mathbf{u}_n)$ prvků báze nemusí být lineárně nezávislé, nelze hovořit přímo o bázi prostoru Im$\mathbf{L}$!

Určeme proto generátory Im$\mathbf{L}$ pro zobrazení $\mathbf{L}$ ze zadání příkladu. V prostoru polynomů $\mathcal{P}_3$ tvoří nejjednodušší bázi, tzv. kanonickou bázi, přímo jednotlivé mocninné funkce

$$p_1(x) = x^3,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = x,\ p_4(x) = 1\,.$$

Obrazy těchto polynomů generují podprostor Im$\mathbf{L}$ v prostotu $\mathbf{R}_{2,3}$:

$$\mathbf{L}(p_1(x)) = \mathbf{L}(x^3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1,$$

$$\mathbf{L}(p_2(x)) = \mathbf{L}(x^2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2,$$

$$\mathbf{L}(p_3(x)) = \mathbf{L}(c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{L}(p_4(x)) = \mathbf{L}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_3.$$

Tato skupina všech čtyř matic $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{A}_3$ je zcela jistě lineárně závislá, neboť se v ní vyskytuje nulová matice $\mathbf{0}$, což je nulový prvek prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$. Proto z dalších úvah nulovou matici $\mathbf{0}$ vynecháme a ptáme se, zda zbylé matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ jsou lineárně nezávislé. Položme proto lineární kombinaci těchto matic rovnu nulové matici a hledejme koeficienty, pro které je tato rovnost splněna:

$$c_1 \cdot \mathbf{A}_1 + c_2 \cdot \mathbf{A}_2 + c_3 \cdot \mathbf{A}_3 = \mathbf{0}$$

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 + 2c_2, & -c_1 + c_2 + c_3, & 2c_1 + 7c_2 + c_3 \\ 0, & 3c_2 + c_3, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rovnost matic vyžaduje, aby byly splněny rovnice následující homogenní soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcl} c_1 & + & 2c_2 & & & = & 0\,, \\ -c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 0\,, \\ 2c_1 & + & 7c_2 & + & c_3 & = & 0\,, \\ & & 3c_2 & + & c_3 & = & 0\,. \end{array}$$

Řešíme soustavu čtyř rovnic o třech neznámých. Použijeme Gaussovu eliminační metodu a pomocí elementárních řádkových úprav převedeme matici soustavy na stupňovitý tvar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hodnost matice soustavy je 2, je tedy menší než počet neznámých. Soustava má proto nekonečně mnoho řešeních. Zvolíme-li za neznámou c_2 libovolné reálné číslo, musí být $c_1 = -2 \cdot c_2, c_3 = -3 \cdot c_2$. Jedno konkrétní netriviální řešení dostaneme např. pro $c_2 = 1$, pak musí být $c_1 = -2$ a $c_3 = -3$. Známe tedy netriviální lineární kombinaci matic $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, která se rovná nulové matici:

$$-2 \cdot \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - 3 \cdot \mathbf{A}_3 = \mathbf{0}\,.$$

Matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ jsou lineárně závislé. Ze vztahu, který pro tyto matice platí, lze např. matici $\mathbf{A}_2$ vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících dvou matic:

$$\mathbf{A}_2 = 2 \cdot \mathbf{A}_1 + 3 \cdot \mathbf{A}_3\,.$$

Pokud vynecháme matici $\mathbf{A}_2$, je již lineární nezávislost zbylých dvou matic $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3$ zřejmá. Přitom se stále bude jednat o generující množinu obrazu Im$\mathbf{L}$. Máme tak dvojici lineárně nezávislých generátorů obrazu Im$\mathbf{L}$ zobrazení $\mathbf{L}$.

Matice

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tvoří jednu možnou bázi podprostoru Im$\mathbf{L}$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$. Báze se skládá ze dvou prvků, proto dimenze obrazu Im$\mathbf{L}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ je dvě:

$$\dim(\mathrm{Im}\mathbf{L}) = 2\,.$$

Poznámka:
Zatím jsme ukázali výpočet, který vůbec nevyužil faktu, že jsme již dříve určili jádro lineárního zobrazení Ker$\mathbf{L}$.
Víme totiž, že pro každé lineární zobrazení $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$ musí platit rovnost:

$$\dim(\mathrm{Ker}\mathbf{L}) + \dim(\mathrm{Im}\mathbf{L}) = \dim\mathcal{U}\,.$$

Pro zadané zobrazení $\mathbf{L}:\mathcal{P}_3\longrightarrow\mathbf{R}_{2,3}$ tedy musí být:

$$\dim(\mathrm{Ker}\mathbf{L}) + \dim(\mathrm{Im}\mathbf{L}) = \dim\mathcal{P}_3\,.$$

Po dosazení dimenze jádra a dimenze prostoru $\mathcal{P}_3$ má tato rovnost tvar

$$2 + \dim(\mathrm{Im}\mathbf{L}) = 4,$$

odkud rovnou dostaneme hledanou dimenzi obrazu Im$\mathbf{L}$:

$$\dim(\mathrm{Im}\mathbf{L}) = 2\,.$$

Tato informace by zjednodušila hledání báze obrazu Im$\mathbf{L}$ zobrazení $\mathbf{L}$. Ze skupiny generátorů by stačilo vybrat dvě lineárně nezávislé matice a nemuseli bychom zkoumat lineární nezávislost všech generátorů. Dříve uvedený výpočet je ale návodem, jak určit obraz Im$\mathbf{L}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ bez předchozí znalosti jádra Ker$\mathbf{L}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$, je tedy obecnější.

4. Matice $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ v zadaných bázích $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ prostoru $\mathcal{U}$ a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ prostoru $\mathcal{V}$ je matice, která vystihuje vztah mezi souřadnicovým vektorem $\hat{\mathbf{u}}$ libovolného prvku $\mathbf{u}\in\mathcal{U}$ a souřadnicovým vektorem $\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u})}$ jeho obrazu $\mathbf{L}(\mathbf{u})$:

$$\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u})} = \mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{u}}\,.$$

Hledáme-li matici $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ při daných bázích, nalezneme nejdříve obrazy $\mathbf{L}(\mathbf{u}_i)$ všech prvků báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ prostoru $\mathcal{U}$ a pak určíme souřadnicové vektory $\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_i)}$ těchto obrazů vzhledem k bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ prostoru $\mathcal{V}$. Tyto souřadnicové vektory $\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_i)}$ jsou sloupce hledané matice $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{M} = \left[\ \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_1)}\ |\ \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_2)}\ |\ \ldots\ |\ \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_n)}\ \right]\ .$$

Vraťme se k našemu konkrétnímu zadání. V prostoru $\mathcal{P}_3$ máme kanonickou bázi $p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1$. Obrazy těchto polynomů jsou matice:

$$\mathbf{L}(p_1(x)) = \mathbf{L}(x^3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}(p_2(x)) = \mathbf{L}(x^2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}(p_3(x)) = \mathbf{L}(c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{L}(p_4(x)) = \mathbf{L}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Protože i v prostoru matic $\mathbf{R}_{2,3}$ se uvažuje kanonická báze

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

lze snadno určit souřadnice obrazů $\mathbf{L}(p_i(x))$ vzhledem k této bázi. Pro obraz $\mathbf{L}(p_1(x))$ polynomu $p_1(x)$ platí

$$\mathbf{L}(p_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \mathbf{C}_1 + (-1) \cdot \mathbf{C}_2 + 2 \cdot \mathbf{C}_3 + 0 \cdot \mathbf{C}_4 + 0 \cdot \mathbf{C}_5 + 0 \cdot \mathbf{C}_6,$$

proto souřadnicový vektor je

$$\widehat{\mathbf{L}(p_1)} = [1, -1, 2, 0, 0, 0]^T,$$

a podobně

$$\widehat{\mathbf{L}(p_2)} = [2, 1, 7, 0, 3, 0]^T,$$
$$\widehat{\mathbf{L}(p_3)} = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T,$$
$$\widehat{\mathbf{L}(p_4)} = [0, 1, 1, 0, 1, 0]^T.$$

Tyto souřadnicové vektory jsou sloupce hledané matici $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \left[\ \widehat{\mathbf{L}(p_1)} \mid \widehat{\mathbf{L}(p_2)} \mid \widehat{\mathbf{L}(p_3)} \mid \widehat{\mathbf{L}(p_4)}\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matice $\mathbf{M}$ je maticí lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ v kanonické bázi

$$p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1$$

prostoru $\mathcal{P}_3$ a kanonické báze

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$.

5. Ověřme, že platí vztah

$$\mathbf{M} \cdot \widehat{p(x)} = \widehat{\mathbf{L}(p)}$$

pro polynom $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1$.

Souřadnicový vektor $\widehat{p(x)}$ vzhledem ke kanonické bázi $p_1(x) = x^3$, $p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1$ v prostoru $\mathcal{P}_3$ je

$$\widehat{p(x)} = [5, -4, 6, -1]^T\,,$$

protože polynom $p(x)$ snadno vyjádříme jako lineární kombinaci bázových prvků

$$p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1 = 5 \cdot p_1(x) + (-4) \cdot p_2(x) + 6 \cdot p_3(x) + (-1) \cdot p_4(x)$$

a koeficienty v této lineární kombinaci jsou právě hledané souřadnice polynomu $p(x)$.

Součin matice $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ a souřadnicového vektoru $\widehat{p(x)}$ je prvek z aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{R}_6$:

$$\mathbf{M} \cdot \widehat{p(x)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -10 \\ -19 \\ 0 \\ -13 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ze zadání lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ zjistíme, že obrazem $\mathbf{L}(p(x))$ polynomu $p(x)$ je matice

$$\mathbf{L}(p(x)) = \mathbf{L}(5x^3 - 4x^2 + 6x - 1) = \begin{bmatrix} -3 & -10 & -19 \\ 0 & -13 & 0 \end{bmatrix}.$$

V prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$ také uvažujeme kanonickou bázi tvořenou maticemi

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obraz $\mathbf{L}(p(x))$ polynomu $p(x)$ lze proto snadno vyjádřit jako lineární kombinaci prvků této báze:

$$\mathbf{L}(p(x)) = \begin{bmatrix} -3 & -10 & -19 \\ 0 & -13 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (-3) \cdot \mathbf{C}_1 + (-10) \cdot \mathbf{C}2 + (-19) \cdot \mathbf{C}_3 + 0 \cdot \mathbf{C}_4 + (-13) \cdot \mathbf{C}_5 + 0 \cdot \mathbf{C}_6 .$$

Souřadnicovým vektorem $\widehat{\mathbf{L}(p)}$ obrazu $\mathbf{L}(p(x))$ je vektor:

$$\widehat{\mathbf{L}(p)} = [-3, -10, -19, 0, -13, 0]^T .$$

Porovnáním s výsledkem součinu $\mathbf{M} \cdot \widehat{p(x)}$, který jsme určili již dříve, je vidět, že pro daný polynom $p(x)$ skutečně platí vztah

$$\mathbf{M} \cdot \widehat{p(x)} = \widehat{\mathbf{L}(p)} .$$

6. Dalším úkolem je určit matici $\widetilde{\mathbf{M}}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ vzhledem k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2,\ q_2(x) = x^2 + x + 1,\ q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

v prostoru $\mathcal{P}_3$ a k bázi

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$.

Postup je samozřejmě analogický jako v případě kanonických bází, pouze jsou složitější výpočty potřebných souřadnicových vektorů.
V prostoru $\mathcal{P}_3$ tvoří bázi polynomy $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$. Matice $\widetilde{\mathbf{M}}$, kterou chceme určit, bude mít za sloupce souřadnicové vektory $\widetilde{\mathbf{L}(q_i)}$ obrazů $\mathbf{L}(q_i(x))$ polynomů $q_i(x), i = 1, 2, 3, 4$, vzhledem k bázi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ prostoru matic $\mathbf{R}_{2,3}$:

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \left[\ \widetilde{\mathbf{L}(q_1)} \mid \widetilde{\mathbf{L}(q_2)} \mid \widetilde{\mathbf{L}(q_3)} \mid \widetilde{\mathbf{L}(q_4)}\ \right].$$

Vezměme první prvek $q_1(x) = x^3 - 3x^2$ z báze prostoru $\mathcal{P}_3$. Jeho obrazem v lineárním zobrazení $\mathbf{L}$ je matice

$$\mathbf{L}(q_1(x)) = \mathbf{L}(x^3 - 3x^2) = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -19 \\ 0 & -9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potřebujeme určit souřadnice této matice vzhledem k bázi
$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$, tj. potřebujeme najít koeficienty v lineární kombinaci bázových prvků $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$, která se rovná právě matici $\mathbf{L}(q_1(x))$:

$$c_1 \cdot \mathbf{B}_1 + c_2 \cdot \mathbf{B}_2 + c_3 \cdot \mathbf{B}_3 + c_4 \cdot \mathbf{B}_4 + c_5 \cdot \mathbf{B}_5 + c_6 \cdot \mathbf{B}_6 = \mathbf{L}(q_1(x))$$

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ c_4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + c_5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -19 \\ 0 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 - c_2 + c_3 + c_4, & -c_1 - c_3 + c_5 + c_6, & c_1 + c_5 \\ c_2 - c_4 + c_5 - c_6, & c_2 + c_3, & c_3 + c_4 - c_6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -4 & -19 \\ 0 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

Aby platila rovnost těchto matic, musí být splněny všechny rovnice následující nehomogenní soustavy lineárních algebraických rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} c_1 & - & c_2 & + & c_3 & + & c_4 & & & & & = & -5\,, \\ -c_1 & & & - & c_3 & & & + & c_5 & + & c_6 & = & -4\,, \\ c_1 & & & & & & & + & c_5 & & & = & -19\,, \\ & & c_2 & & & - & c_4 & + & c_5 & - & c_6 & = & 0\,, \\ & & c_2 & + & c_3 & & & & & & & = & -9\,, \\ & & & & c_3 & + & c_4 & & & - & c_6 & = & 0\,. \end{array}$$

K vyřešení soustavy využijeme jako obvykle Gaussovu eliminační metodu. Pomocí elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy na stupňovitý tvar.

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -18 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 27 \end{array}\right]$$

Z posledního řádku vidíme, že $c_6 = -\frac{27}{4}$, dosazováním do dalších rovnic postupně dostaneme $c_5 = -\frac{9}{2}$, $c_4 = -14$, $c_3 = \frac{29}{4}$, $c_2 = -\frac{65}{4}$, $c_1 = -\frac{29}{2}$.

Souřadnicový vektor $\widetilde{\mathbf{L}(q_1)}$ je proto uspořádaná šestice

$$\widetilde{\mathbf{L}(q_1)} = \left[-\frac{29}{2}, -\frac{65}{4}, \frac{29}{4}, -14, -\frac{9}{2}, -\frac{27}{4} \right]^T =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [-58, -65, 29, -56, -18, -27]^T .$$

Toto bude tedy první sloupec hledané matice $\widetilde{\mathbf{M}}$.

Pro další prvky uvažované báze v prostoru polynomů $\mathcal{P}_3$ postupujeme analogicky. Nejdříve nalezneme jejich obrazy v lineárním zobrazení $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L}(q_2(x)) = \mathbf{L}(x^2 + x + 1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}(q_3(x)) = \mathbf{L}(x^3 + 2x - 1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}(q_4(x)) = \mathbf{L}(x^3 + 2x^2 + x - 1) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 15 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nyní vypočítáme souřadnice obrazů $\mathbf{L}(q_i(x)), i = 2, 3, 4$, vzhledem k bázi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$, a to tak, že lineární kombinaci bázových prvků položíme rovnu obrazu $\mathbf{L}(q_i(x))$, a to pro $i = 2, 3, 4$:

$$c_1 \cdot \mathbf{B}_1 + c_2 \cdot \mathbf{B}_2 + c_3 \cdot \mathbf{B}_3 + c_4 \cdot \mathbf{B}_4 + c_5 \cdot \mathbf{B}_5 + c_6 \cdot \mathbf{B}_6 = \mathbf{L}(q_i(x)) ,$$

a určíme příslušné koeficienty, pro které tato rovnost platí. Levá strana v rovnostech pro jednotlivé obrazy se nemění, je stejná jako při určování souřadnic $\widetilde{\mathbf{L}(q_1)}$ obrazu $\mathbf{L}(q_1(x))$ prvního prvku báze. To znamená, že i soustavy, které potřebujeme postupně vyřešit, budou mít stejné levé strany v jednotlivých rovnicích. Zjednodušme proto náš zápis, a vyřešme současně tři soustavy, které se liší pouze v pravé straně. Rozšířená matice tak bude mít ne jeden, ale tři sloupce pravých stran. Vlastní výpočet přesně odpovídá počítání souřadnic pro $\mathbf{L}(q_1(x))$.

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r|r|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim$$

$$
\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r|r|r}
1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & -1 & 5 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 6 & 0 & 10 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \sim
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r|r|r}
1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -4 & 1 & -5 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 10 & -1 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -1 & 5 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & -2 & 10 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \sim
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r|r|r}
1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -4 & 1 & -5 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 10 & -1 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -1 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & -2 & 10
\end{array}\right] \sim
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r|r|r}
1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -4 & 1 & -5 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 10 & -1 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & -2 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -12 & 3 & -15
\end{array}\right]
$$

Z rozšířené matice soustav upravené elementárními řádkovými úpravami na stupňovitý tvar postupným dosazování vypočítáme pro jednotlivé pravé strany příslušné souřadnicové vektory:

$$\mathbf{L}\widetilde{(q_2)} = [6, 7, -3, 6, 2, 3]^T \ ,$$

$$\mathbf{L}\widetilde{(q_3)} = \left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right]^T = \frac{1}{4} \cdot [6, -1, -3, 0, -2, -3]^T \ ,$$

$$\mathbf{L}\widetilde{(q_4)} = \left[\frac{25}{2}, \frac{45}{4}, -\frac{25}{4}, 10, \frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right]^T = \frac{1}{4} \cdot [50, 45, -25, 40, 10, 15]^T \ .$$

Matice $\widetilde{\mathbf{M}}$ je po sloupcích složena právě ze souřadnicových vektorů

$\widetilde{\mathbf{L}(q_i)}$ obrazů prvků báze $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$:

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \left[\ \widetilde{\mathbf{L}(q_1)} \mid \widetilde{\mathbf{L}(q_2)} \mid \widetilde{\mathbf{L}(q_3)} \mid \widetilde{\mathbf{L}(q_4)}\ \right] = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -58 & 24 & 6 & 50 \\ -65 & 28 & -1 & 45 \\ 29 & -12 & -3 & -25 \\ -56 & 24 & 0 & 40 \\ -18 & 8 & -2 & 10 \\ -27 & 12 & -3 & 15 \end{bmatrix}.$$

7. Vraťme se ještě jednou k polynomu $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1$. Již dříve jsme spočítali matici - obraz polynomu $p(x)$:

$$\mathbf{L}(p(x)) = \mathbf{L}(5x^3 - 4x^2 + 6x - 1) = \begin{bmatrix} -3 & -10 & -19 \\ 0 & -13 & 0 \end{bmatrix}.$$

Souřadnice $\widetilde{p(x)}$ polynomu $p(x)$ vzhledem k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2,\ q_2(x) = x^2 + x + 1,\ q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$
$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

prostoru $\mathcal{P}_3$ určíme jako koeficienty v lineární kombinaci bázových prvků, která se rovná právě polynomu $p(x)$:

$$c_1 \cdot q_1(x) + c_2 \cdot q_2(x) + c_3 \cdot q_3(x) + c_4 \cdot q_4(x) = p(x)$$

$$c_1 \cdot (x^3 - 3x^2) + c_2 \cdot (x^2 + x + 1) + c_3 \cdot (x^3 + 2x - 1) + c_4 \cdot (x^3 + 2x^2 + x - 1) =$$
$$= 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1$$

$$(c_1 + c_3 + c_4)x^3 + (-3c_1 + c_2 + 2c_4)x^2 + (c_2 + 2c_3 + c_4)x + (c_2 - c_3 - c_4) =$$
$$= 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1$$

Hledané koeficienty nalezneme jako řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} c_1 & & & + & c_3 & + & c_4 & = & 5\,, \\ -3c_1 & + & c_2 & & & + & 2c_4 & = & -4\,, \\ & & c_2 & + & 2c_3 & + & c_4 & = & 6\,, \\ & & c_2 & - & c_3 & - & c_4 & = & -1\,, \end{array}$$

kterou jsme získali porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x. K řešení soustavy použijeme Gaussovu eliminační metodu, kdy rozšířenou matici soustavy upravíme pomocí řádkových elementárních úprav na stupňovitý tvar a zpětným dosazováním určíme hledané souřadnice.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

Řešením soustavy jsou koeficienty $c_4 = \frac{4}{5}$, $c_3 = \frac{9}{5}$, $c_2 = \frac{8}{5}$, $c_1 = \frac{12}{5}$. Proto souřadnicovým vektorem $\widetilde{p(x)}$ polynomu $p(x)$ vzhledem k bázi q_1, q_2, q_3, q_4 je uspořádaná čtveřice

$$\widetilde{p(x)} = \left[\frac{12}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, \frac{4}{5} \right]^T = \frac{1}{5} \cdot [12, 8, 9, 4]^T .$$

Součinem matice $\widetilde{\mathbf{M}}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ v bázi prostoru $\mathcal{P}_3$ tvořené polynomy $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ a v bázi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ v prostoru matic $\mathbf{R}_{2,3}$ a souřadnicového vektoru $\widetilde{p(x)}$ polynomu $p(x)$ vzhledem k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ dostaneme prvek

$$\widetilde{\mathbf{M}} \cdot \widetilde{p(x)} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -58 & 24 & 6 & 50 \\ -65 & 28 & -1 & 45 \\ 29 & -12 & -3 & -25 \\ -56 & 24 & 0 & 40 \\ -18 & 8 & -2 & 10 \\ -27 & 12 & -3 & 15 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -50 \\ -77 \\ 25 \\ -64 \\ -26 \\ -39 \end{bmatrix}$$

z prostoru $\mathbf{R}_6$. Nalezením souřadnicového vektoru $\widetilde{\mathbf{L}(p)}$ obrazu polynomu $p(x)$ vzhledem k bázi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$, $\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ ověříme, že se tyto vektory z prostoru $\mathbf{R}_6$ shodují, tj. že pro vybraný polynom $p(x)$ platí rovnost $\widetilde{\mathbf{M}} \cdot \widetilde{p(x)} = \widetilde{\mathbf{L}(p)}$.

Určíme tedy souřadnice $\widetilde{\mathbf{L}(p)}$ matice

$$\mathbf{L}(p(x)) = \begin{bmatrix} -3 & -10 & -19 \\ 0 & -13 & 0 \end{bmatrix}$$

vzhledem k bázi

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$.
Hledáme koeficienty v lineární kombinaci prvků $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ báze, která se rovná právě matici $\mathbf{L}(p(x))$:

$$c_1 \cdot \mathbf{B}_1 + c_2 \cdot \mathbf{B}_2 + c_3 \cdot \mathbf{B}_3 + c_4 \cdot \mathbf{B}_4 + c_5 \cdot \mathbf{B}_5 + c_6 \cdot \mathbf{B}_6 = \mathbf{L}(p(x))\,.$$

Lineární kombinace na levé straně této rovnosti je totožná s lineární kombinací, pomocí které jsme již výše počítali souřadnice obrazů polynomů báze q_1, q_2, q_3, q_4. Proto i další výpočet bude analogický.

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} +$$
$$+ c_4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + c_5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -3 & -10 & -19 \\ 0 & -13 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 - c_2 + c_3 + c_4, & -c_1 - c_3 + c_5 + c_6, & c_1 + c_5 \\ c_2 - c_4 + c_5 - c_6, & c_2 + c_3, & c_3 + c_4 - c_6 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -3 & -10 & -19 \\ 0 & -13 & 0 \end{bmatrix}$$

Rovnost matic bude platit, pokud budou splněny rovnice následující soustavy lineárních algebraických rovnic, získané porovnáním jednotlivých prvků na odpovídajících si pozicích:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
c_1 & - & c_2 & + & c_3 & + & c_4 & & & & & = & -3\,, \\
-c_1 & & & - & c_3 & & & + & c_5 & + & c_6 & = & -10\,, \\
c_1 & & & & & & & + & c_5 & & & = & -19\,, \\
 & & c_2 & & & - & c_4 & + & c_5 & - & c_6 & = & 0\,, \\
 & & c_2 & + & c_3 & & & & & & & = & -13\,, \\
 & & & & c_3 & + & c_4 & & & - & c_6 & = & 0\,.
\end{array}$$

Soustavu řešíme Gaussovou eliminační metodou, pomocí elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy na stupňovitý tvar.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -26 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -26 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 39 \end{array}\right]$$

Postupným dosazováním dostaneme jednotlivé souřadnice: $c_6 = -\frac{39}{4}$, $c_5 = -\frac{13}{2}$, $c_4 = -16$, $c_3 = \frac{25}{4}$, $c_2 = -\frac{77}{4}$, $c_1 = -\frac{25}{2}$. Souřadnicový vektor $\widetilde{\mathbf{L}(p)}$ je proto uspořádaná šestice

$$\widetilde{\mathbf{L}(p)} = \left[-\frac{25}{2}, -\frac{77}{4}, \frac{25}{4}, -16, -\frac{13}{2}, -\frac{39}{4}\right]^T =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [-50, -77, 25, -64, -26, -39]^T .$$

Porovnáním s výsledkem součinu $\widetilde{\mathbf{M}} \cdot \widetilde{p(x)}$ vidíme, že $\widetilde{\mathbf{M}} \cdot \widetilde{p(x)} = \widetilde{\mathbf{L}(p)}$.

Pro polynom $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ jsme ověřili platnost vztahu

$$\widetilde{\mathbf{M}} \cdot \widetilde{p(x)} = \widetilde{\mathbf{L}(p)} .$$

Matici lineárního zobrazení lze tedy využít při získávání souřadnic obrazu libovolného prvku, a poté i k získání samotného obrazu, neboť vlastně známe koeficienty v lineární kombinaci prvků příslušné báze, která se rovná tomuto obrazu.

Příklad 7.2:
Pro prostor $\mathcal{P}_3$ všech polynomů nejvýše stupně 3 (včetně nulového polynomu) řešte následující úlohy:

1. Určete matici $\mathbf{T}$ přechodu od kanonické báze

$$p_1(x) = x^3,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = x,\ p_4(x) = 1$$

   k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2,\ q_2(x) = x^2 + x + 1,\ q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

   v prostoru $\mathcal{P}_3$ všech polynomů do stupně 3 (včetně nulového polynomu).

2. Známe souřadnice $\widetilde{r(x)} = [3, 7, -2, -5]^T$ polynomu $r(x)$ vzhledem k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2,\ q_2(x) = x^2 + x + 1,\ q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

   v prostoru $\mathcal{P}_3$. Určete polynom $r(x)$ a souřadnicový vektor $\widehat{r(x)}$ polynomu $r(x)$ vzhledem ke kanonické bázi

$$p_1(x) = x^3,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = x,\ p_4(x) = 1$$

   prostoru $\mathcal{P}_3$.

3. Je dán souřadnicový vektor $\widehat{s(x)} = [2, -3, 1, 5]^T$ polynomu $s(x)$ vzhledem ke kanonické bázi

$$p_1(x) = x^3,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = x,\ p_4(x) = 1$$

   prostoru $\mathcal{P}_3$. Určeme polynom $s(x)$ a s využitím matice přechodu $\mathbf{T}$ nalezněme souřadnice $\widetilde{s(x)}$ polynomu $s(x)$ vzhledem k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2,\ q_2(x) = x^2 + x + 1,\ q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

   v prostoru $\mathcal{P}_3$.

Řešení:

1. Určujeme-li matici $\mathbf{T}$ jako matici přechodu od báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$, $p_4(x)$ k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ v prostoru $\mathcal{P}_3$, hledáme vlastně matici identického zobrazení z prostoru $\mathcal{P}_3$, kde uvažujeme bázi $q_1(x), q_2(x)$, $q_3(x)$, $q_4(x)$, do prostoru $\mathcal{P}_3$ s bází $p_1(x), p_2(x)$, $p_3(x)$, $p_4(x)$. Přitom identické zobrazení **id** z prostoru $\mathcal{U}$ na prostor $\mathcal{U}$ přiřadí libovolnému prvku $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ jako obraz opět tentýž prvek $\mathbf{id}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. V prostoru $\mathcal{P}_3$ proto pro prvky báze $q_1(x), q_2(x), q_3(x)$, $q_4(x)$ platí $\mathbf{id}(q_i(x)) = q_i(x), i = 1, 2, 3, 4$.

   Matice $\mathbf{T}$ bude mít proto jako sloupce souřadnicové vektory $\widehat{q_i(x)}$, kde $i = 1, 2, 3, 4$, prvků báze $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ uvažované vzhledem k bázi $p_1(x), p_2(x)$, $p_3(x), p_4(x)$ v prostoru $\mathcal{P}_3$:

$$\mathbf{T} = \left[\ \widehat{q_1(x)} \,|\, \widehat{q_2(x)} \,|\, \widehat{q_3(x)} \,|\, \widehat{q_4(x)}\ \right].$$

   Báze $p_1(x) = x^3$, $p_2(x) = x^2$, $p_3(x) = x$, $p_4(x) = 1$ uvažovaná v prostoru obrazů je kanonickou bází. Určení souřadnic polynomů $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$, $q_4(x)$ je proto jednoduché:
   protože $q_1(x) = x^3 - 3x^2 = 1 \cdot p_1(x) + (-3) \cdot p_2(x) + 0 \cdot p_3(x) + 0 \cdot p_4(x)$,
   je souřadnicový vektor $\widehat{q_1(x)} = [1, -3, 0, 0]^T$;
   a podobně $\widehat{q_2(x)} = [0, 1, 1, 1]^T$, protože
   $q_2(x) = x^2 + x + 1 = 0 \cdot p_1(x) + 1 \cdot p_2(x) + 1 \cdot p_3(x) + 1 \cdot p_4(x)$;
   $\widehat{q_3(x)} = [1, 0, 2, -1]^T$, protože
   $q_3(x) = x^3 + 2x - 1 = 1 \cdot p_1(x) + 0 \cdot p_2(x) + 2 \cdot p_3(x) + (-1) \cdot p_4(x)$;
   $\widehat{q_4(x)} = [1, 2, 1, -1]^T$, protože
   $q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1 = 1 \cdot p_1(x) + 2 \cdot p_2(x) + 1 \cdot p_3(x) + (-1) \cdot p_4(x)$.

   Matice přechodu od báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ k bázi $q_1(x), q_2(x)$, $q_3(x)$, $q_4(x)$ v prostoru $\mathcal{P}_3$ je proto čtvercová matice

$$\mathbf{T} = \left[\ \widehat{q_1(x)} \,|\, \widehat{q_2(x)} \,|\, \widehat{q_3(x)} \,|\, \widehat{q_4(x)}\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Pro matici $\mathbf{T}$, matici přechodu od báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ v prostoru $\mathcal{P}_3$, přitom musí platit vztah

$$\mathbf{T} \cdot \widetilde{r(x)} = \widehat{r(x)},$$

kde $\widehat{r(x)}$ značí souřadnicový vektor libovolného polynomu $r(x)$ z prostoru $\mathcal{P}_3$ vzhledem k bázi $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ a $\widetilde{r(x)}$ značí souřadnicový vektor téhož polynomu $r(x)$ vzhledem k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x)$, $q_4(x)$. Tento vztah plyne z toho, co bylo řečeno již výše, pro libovolné lineární zobrazení totiž platí, že
"matice zobrazení . souřadnice vzoru = souřadnice obrazu"
(samozřejmě předpokládáme, že vše je uvažováno vzhledem k pevně zvoleným bázím na prostoru vzorů i na prostoru obrazů).
Matice přechodu je maticí identického zobrazení, proto vzor i obraz je tentýž prvek v prostoru $\mathcal{P}_3$, liší se pouze souřadnicové vektory uvažované vzhledem k různým bázím prostoru, tedy vektory z $\mathbf{R}_4$.

2. Známe-li souřadnicový vektor $\widetilde{r(x)} = [3, 7, -2, -5]^T$ polynomu $r(x)$ vzhledem k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2,\ q_2(x) = x^2 + x + 1,\ q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1,$$

samotný polynom $r(x)$ dostaneme snadno tak, že jednotlivé souřadnice dosadíme jako koeficienty do lineární kombinace bázových prvků $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$, tedy

$$r(x) = 3 \cdot q_1(x) + 7 \cdot q_2(x) - 2 \cdot q_3(x) - 5 \cdot q_4(x) =$$

$$= 3 \cdot (x^3 - 3x^2) + 7 \cdot (x^2 + x + 1) - 2 \cdot (x^3 + 2x - 1) - 5 \cdot (x^3 + 2x^2 + x - 1) =$$

$$= -4x^3 - 12x^2 - 2x + 14\,.$$

Souřadnicový vektor $\widehat{r(x)}$ polynomu $r(x)$ vzhledem ke kanonické bázi

$$p_1(x) = x^3,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = x,\ p_4(x) = 1$$

pak už snadno určíme přímo z vyjádření polynomu $r(x)$. Protože

$$r(x) = -4x^3 - 12x^2 - 2x + 14 =$$

$$= (-4) \cdot p_1(x) + (-12) \cdot p_2(x) + (-2) \cdot p_3(x) + 14 \cdot p_4(x)\,,$$

je hledaný souřadnicový vektor

$$\widehat{r(x)} = [-4, -12, -2, 14]^T\,.$$

Druhou možností je napřed určit souřadnicový vektor $\widehat{r(x)}$ vzhledem ke kanonické bázi $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)$ a pak jej využít k určení samotného polynomu $r(x)$. K nalezení souřadnicového vektoru $\widehat{r(x)}$ se využije vztah

$$\mathbf{T} \cdot \widetilde{r(x)} = \widehat{r(x)}\,,$$

kde $\mathbf{T}$ je matice přechodu od báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ k bázi $q_1(x)$, $q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ v prostoru $\mathcal{P}_3$. Vynásobíme-li

$$\mathbf{T} \cdot \widetilde{r(x)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -12 \\ -2 \\ 14 \end{bmatrix},$$

dostaneme přímo souřadnicový vektor $\widehat{r(x)} = [-4, -12, -2, 14]^T$ polynomu $r(x)$ vzhledem ke kanonické bázi $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$.

Známe-li souřadnicový vektor vzhledem ke kanonické bázi prostoru, je určení samotného prvku již velmi jednoduché, stačí jen jednotlivé souřadnice použít jako koeficienty v lineární kombinaci prvků kanonické báze:

$$r(x) = (-4) \cdot p_1(x) + (-12) \cdot p_2(x) + (-2) \cdot p_3(x) + 14 \cdot p_4(x) =$$

$$= -4x^3 - 12x^2 - 2x + 14\,.$$

3. Pro polynom $s(x)$ známe souřadnicový vektor $\widehat{s(x)} = [2, -3, 1, 5]^T$ vzhledem ke kanonické bázi

$$p_1(x) = x^3,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = x,\ p_4(x) = 1\,.$$

Díky tomu, že báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ je kanonická, polynom $s(x)$ je lineární kombinací bázových prvků s koeficienty ze souřadnicového vektoru:

$$s(x) = 2 \cdot p_1(x) + (-3) \cdot p_2(x) + 1 \cdot p_3(x) + 5 \cdot p_4(x) =$$

$$= 2x^3 - 3x^2 + x + 5\,.$$

Souřadnicový vektor $\widetilde{s(x)}$ polynomu $s(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 5$ vzhledem k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2,\ q_2(x) = x^2 + x + 1,\ q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$
$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

bychom mohli samozřejmě počítat jako koeficienty z té lineární kombinace bázových prvků $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$, která se rovná polynomu $s(x)$. Obdobné výpočty jsme již prováděli výše.

Proto se nyní podíváme na druhou možnost, při které využijeme matici přechodu $\mathbf{T}$ od báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ k bázi $q_1(x), q_2(x)$, $q_3(x)$, $q_4(x)$. Pro matici $\mathbf{T}$ a souřadnicové vektory $\widehat{s(x)}$ polynomu $s(x)$ vzhledem ke kanonické bázi $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ a $\widetilde{s(x)}$ polynomu $s(x)$ vzhledem k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ platí vztah:

$$\mathbf{T} \cdot \widetilde{s(x)} = \widehat{s(x)}\,.$$

Přenásobíme-li tuto rovnost maticí $\mathbf{T}^{-1}$ inverzní k matici $\mathbf{T}$ zleva, dostaneme

$$\widetilde{s(x)} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \widehat{s(x)}\,,$$

což je právě návod, jak určit souřadnicový vektor $\widetilde{s(x)}$.

Protože matice $\mathbf{T}$ je řádu čtvrtého, k určení její inverzní matice využijeme Gauss-Jordanovu eliminační metodu. Pomocí řádkových elementárních úprav převedeme rozšířenou matici $[\mathbf{T}|\mathbf{I}]$ tak, aby z původní matice $\mathbf{T}$ vznikla jednotková matice.

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -9 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{array}\right]$$

Z původně jednotkové matice jsme tímto výpočtem získali matici $\mathbf{T}^{-1}$ inverzní k matici $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ -6 & -2 & 6 & -4 \\ 9 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Souřadnicový vektor $\widetilde{s(x)}$ polynomu $s(x)$ vzhledem k bázi $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$, $q_4(x)$ dostaneme jako součin matice $\mathbf{T}^{-1}$ a souřadnicového vektoru $\widehat{s(x)} = [2, -3, 1, 5]^T$:

$$\widetilde{s(x)} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \widehat{s(x)} =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ -6 & -2 & 6 & -4 \\ 9 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ -20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poznámka:
Matici $\mathbf{T}^{-1}$ jsme vypočítali jako inverzní matici k matici $\mathbf{T}$ přechodu od báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$. Je to matice přechodu od báze $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ k bázi $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ v prostoru polynomů $\mathcal{P}_3$.

Příklad 7.3:
Využijte některé výsledky z předcházejících příkladů a vyřešte následující úlohy:

1. Určete matici $\mathbf{H}$ přechodu od kanonické báze

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   k bázi

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$ všech matic typu $2/3$.

2. Určete matici přechodu $\mathbf{H}^{-1}$ od báze $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ k bázi $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$.

3. Využijte matici $\mathbf{M}$ zobrazení $\mathbf{L}$ z příkladu 7.1 v kanonických bázích $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ prostoru $\mathcal{P}_3$ a $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$ a matici $\mathbf{T}$ přechodu od kanonické báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ v prostoru $\mathcal{P}_3$ z příkladu 7.2 a vypočtěte součin matic $\mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}$.

Řešení:

1. Hledáme-li matici přechodu od kanonické báze $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ k bázi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$, hledáme vlastně matici identického zobrazení z prostoru matic $\mathbf{R}_{2,3}$ s bází $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ do téhož prostoru matic $\mathbf{R}_{2,3}$, ale nyní jej uvažujeme s kanonickou bází $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$. Proto matice $\mathbf{H}$ bude mít za sloupce souřadnicové vektory $\widehat{\mathbf{B}_i}, i = 1, 2, \ldots, 6$, prvků báze $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ vzhledem k bázi $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$. Tyto souřadnice určíme snadno, neboť báze $\mathbf{C}_i, i = 1, 2, \ldots, 6$, je kanonická. Vyjádření matic $\mathbf{B}_i, i = 1, 2, \ldots, 6$, jako lineární kombinace matic kanonické báze je tedy triviální. Protože

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \mathbf{C}_1 + (-1) \cdot \mathbf{C}_2 + 1 \cdot \mathbf{C}_3 + 0 \cdot \mathbf{C}_4 + 0 \cdot \mathbf{C}_5 + 0 \cdot \mathbf{C}_6,$$

je $\widehat{\mathbf{B}_1} = [1,-1,1,0,0,0]^T$ hledaný souřadnicový vektor první matice z báze $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$.
Podobně $\widehat{\mathbf{B}_2} = [-1,0,0,1,1,0]^T$, protože

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (-1)\cdot\mathbf{C}_1 + 0\cdot\mathbf{C}_2 + 0\cdot\mathbf{C}_3 + 1\cdot\mathbf{C}_4 + 1\cdot\mathbf{C}_5 + 0\cdot\mathbf{C}_6\,;$$

$\widehat{\mathbf{B}_3} = [1,-1,0,0,1,1]^T$, protože

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1\cdot\mathbf{C}_1 + (-1)\cdot\mathbf{C}_2 + 0\cdot\mathbf{C}_3 + 0\cdot\mathbf{C}_4 + 1\cdot\mathbf{C}_5 + 1\cdot\mathbf{C}_6\,;$$

$\widehat{\mathbf{B}_4} = [1,0,0,-1,0,1]^T$, protože

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\cdot\mathbf{C}_1 + 0\cdot\mathbf{C}_2 + 0\cdot\mathbf{C}_3 + (-1)\cdot\mathbf{C}_4 + 0\cdot\mathbf{C}_5 + 1\cdot\mathbf{C}_6\,;$$

$\widehat{\mathbf{B}_5} = [0,1,1,1,0,0]^T$, protože

$$\mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\cdot\mathbf{C}_1 + 1\cdot\mathbf{C}_2 + 1\cdot\mathbf{C}_3 + 1\cdot\mathbf{C}_4 + 0\cdot\mathbf{C}_5 + 0\cdot\mathbf{C}_6\,;$$

$\widehat{\mathbf{B}_6} = [0,1,0,-1,0,-1]^T$, protože

$$\mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 0\cdot\mathbf{C}_1 + 1\cdot\mathbf{C}_2 + 0\cdot\mathbf{C}_3 + (-1)\cdot\mathbf{C}_4 +$$

$$+0\cdot\mathbf{C}_5 + (-1)\cdot\mathbf{C}_6\,.$$

Matice přechodu od báze $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ k bázi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$, $\mathbf{B}_4$, $\mathbf{B}_5$, $\mathbf{B}_6$ v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$ je čtvercová matice řádu šest, složená po sloupcích z výše určených souřadnicových vektorů:

$$\mathbf{H} = \left[\,\widehat{\mathbf{B}_1}\,|\,\widehat{\mathbf{B}_2}\,|\,\widehat{\mathbf{B}_3}\,|\,\widehat{\mathbf{B}_4}\,|\,\widehat{\mathbf{B}_5}\,|\,\widehat{\mathbf{B}_6}\,\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Máme-li pro prostor matic $\mathbf{R}_{2,3}$ určit matici přechodu $\mathbf{H}^{-1}$ od báze $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ k bázi $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$, mohli bychom postupovat analogicky k výpočtu výše. Uvědomme si ale, že při tomto přístupu bychom museli určit souřadnicové vektory všech matic $\mathbf{C}_i, i = 1, 2, \ldots, 6$, vzhledem k bázi, která není kanonická, tj. tento výpočet by byl pracnější než u matice $\mathbf{H}$.

   Využijme proto faktu, že již známe matici přechodu od báze $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ k bázi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ - matici $\mathbf{H}$. Matice přechodu od báze $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ k bázi $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ bude inverzní maticí k matici $\mathbf{H}$. Její výpočet provedeme pomocí Gaussovy eliminační metody, kdy rozšířenou matici $[\,\mathbf{H}\,|\,\mathbf{I}\,]$ převedeme pomocí řádkových elementárních úprav na matici $[\,\mathbf{I}\,|\,\mathbf{H}^{-1}\,]$, kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice řádu 6. Z původně jednotkové matice $\mathbf{I}$ takto získáme matici inverzní k matici $\mathbf{H}$.

$$[\,\mathbf{H}\,|\,\mathbf{I}\,] = \left[\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & -1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Právě jsme vypočítali inverzní matici $\mathbf{H}^{-1}$ k matici $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & -4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

je to hledaná matice přechodu od báze $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ k bázi $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$.

3. Posledním úkolem je vynásobit matice $\mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}$, kde matice $\mathbf{M}$ je matice lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ z příkladu 7.1 v kanonické bázi

$$p_1(x) = x^3,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = x,\ p_4(x) = 1$$

prostoru $\mathcal{P}_3$ a kanonické báze

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$;
matice $\mathbf{H}^{-1}$ je matice přechodu od báze

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

k bázi

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

v prostoru matic $\mathbf{R}_{2,3}$;
matice $\mathbf{T}$ je matice přechodu od kanonické báze

$$p_1(x) = x^3,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = x,\ p_4(x) = 1$$

k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2,\ q_2(x) = x^2 + x + 1,\ q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

v prostoru polynomů $\mathcal{P}_3$.
Všechny tyto matice jsme již určili výše. Stačí proto spočítat pouze jejich součin.

$$\mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & -4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 22 & 0 & 2 \\ 4 & 23 & 0 & 5 \\ -4 & -11 & 0 & -1 \\ 4 & 20 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -58 & 24 & 6 & 50 \\ -65 & 28 & -1 & 45 \\ 29 & -12 & -3 & -25 \\ -56 & 24 & 0 & 40 \\ -18 & 8 & -2 & 10 \\ -27 & 12 & -3 & 15 \end{bmatrix}$$

Porovnáním s výsledky z příkladu 7.1 vidíme, že součin $\mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}$ se rovná matici $\widetilde{\mathbf{M}}$ z výše řešeného příkladu 7.1, matice $\widetilde{\mathbf{M}}$ je maticí lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ vzhledem k bázím

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2,\ q_2(x) = x^2 + x + 1,\ q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

v prostoru $\mathcal{P}_3$ a

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$. Toto zjištění, že

$$\mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T} = \widetilde{\mathbf{M}}$$

přesně odpovídá faktu, že na lineární zobrazení zobrazení $\mathbf{L}$ z prostoru $\mathcal{P}_3$ s bází $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ do prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$ s bází $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ se můžeme dívat také jako na složené zobrazení z následujících tří lineárních zobrazeních:

- identické zobrazení prostoru $\mathcal{P}_3$ s bází $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ na prostor $\mathcal{P}_3$ s bází $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$; toto zobrazení můžeme vyjádřit pomocí matice $\mathbf{T}$, matice přechodu od kanonické báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ v prostoru polynomů $\mathcal{P}_3$;
- lineární zobrazení $\mathbf{L}$ v kanonických bázích $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ prostoru $\mathcal{P}_3$ a $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$, které je reprezentováno v příslušných bázích maticí $\mathbf{M}$;
- identické zobrazení prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$ s bází $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ na prostor $\mathbf{R}_{2,3}$ s bází $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$; toto zobrazení lze vyjádřit pomocí matice $\mathbf{H}^{-1}$ od báze $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ k bázi $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$.

Matice složeného zobrazení se získá jako součin matic jednotlivých skládaných zobrazení, pouze musíme matice násobit **v opačném pořadí**, tj. první matice je maticí posledního skládaného zobrazení. Tomu přesně odpovídá i naše pozorování:

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}\,.$$