Lineární algebra – 3. cvičení

1. Pro matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$
vypočtěte $A + B$, $A \cdot B$, $B \cdot A$ a $A^\top$.

2. Pokud existují, najděte $A \cdot B$ a $B \cdot A$ pro
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Označme $\mathcal{M}_{m,n}$ vektorový prostor matic řádu $m \times n$ nad $\mathbb{R}$. Ukažte, že pro libovolné $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ množina
$$\mathcal{K}_A := \{B \in \mathcal{M}_{n,n} \mid \ A \cdot B = b \cdot A\}$$
tvoří vektorový prostor.

4. Najděte bázi prostoru $\mathcal{K}_A$ pro $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Ukažte, že matice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$
je *nilpotentní*, tj existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že A^n je rovno nulové matici.

6. $\star$ Ukažte, že matice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$
není nilpotentní.

7. Tvoří nilpotentní matice vektorový prostor?

8. Buď $\mathcal{P}$ množina všech nekonečných posloupností, tj. funkcí $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ověřte, že $\mathcal{P}$ je vektorovým prostorem. Jaká je jeho dimenze?

9. Vyřešte maticovou rovnici $A \cdot X = I$, kde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix}.$$
Jak říkáme matici X?