Příklady k 7. cvičení – LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

1. Mějme lineární zobrazení $L: \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ dané předpisem $L: L([a,b]^T) = [a-b, 3a+2b]^T$.

a) Určete, zda je zobrazení lineární.

b) Určete $\ker L$ – jádro zobrazení L, tj. bázi a dimenzi $\ker L$.

c) Určete $\operatorname{Im} L$ – obraz zobrazení L, tj. bázi a dimenzi $\operatorname{Im} L$.

d) Určete matici zobrazení A v bázi f_1, f_2 a v bázi g_1, g_2. $\quad f_1 = [1,2]^T \quad g_1 = [1,-1]^T$

Určete matici zobrazení B v bázi g_1, g_2 a v bázi f_1, f_2. $\quad f_2 = [2,5]^T \quad g_2 = [2,1]^T$

e) Určete matici přechodu T od báze $f_1 f_2$ k bázi g_1, g_2.

Určete matici přechodu H od báze g_1, g_2 k bázi f_1, f_2.

f) Najděte vzájemný vztah mezi maticemi A, B, T, H.

Příklad je na $\mathbb{R}_2$, kde je minimum výpočtů ale projdeme vše, co se lineárního zobrazení týká.

a) Musí platit 2 podmínky pro $\forall u, v \in \mathbb{R}_2$ a $\forall k \in \mathbb{R}$: I) $L(u+v) = L(u) + L(v)$; $u = [a,b]^T$

II) $L(k u) = k L(u)$ $\quad v = [c,d]^T$

$$\text{I)}\ L(u+v) = L(\overset{\text{nejprve sečteme}}{[a,b]^T + [c,d]^T}) = L(\overset{\text{pak zobrazíme}}{[\underbrace{a+c}_{\text{za } a}, \underbrace{b+d}_{b}]^T}) = \underset{\text{dosadíme do předpisu}}{[a+c-(b+d), \overset{\text{upravíme}}{3(a+c)+2(b+d)}]^T} =$$

$$= \overset{\text{rozdělíme na součet}}{[a-b+c-d, 3a+2b+3c+2d]^T} = [a-b, 3a+2b]^T \cancel{a+} + [c-d, 3c+2d]^T =$$

$$= L(u) + L(v) \checkmark \quad \text{1. podmínka platí}$$

$$\text{II)}\ L(k \cdot u) = L(\overset{\text{nejprve vynásobíme}}{k \cdot [a,b]^T}) = L(\overset{\text{pak zobrazíme}}{[\underbrace{ka}_{\text{za } a}, \underbrace{kb}_{\text{za } b}]^T}) = [ka - kb, 3ka + 2kb]^T = \overset{\text{vytkneme } k}{[k(a-b), k(3a+2b)]^T} = k[a-b, 3a+2b]^T =$$

$$= k L(u) \checkmark \quad \text{2. podmínka platí} \longrightarrow \text{zobrazení } L \text{ je lineární.}$$

b) $\ker L$ – vše, co se zobrazí na nulový prvek $\mathbb{R}_2$, tj. $[0,0]^T$.

– hledáme $\forall u = [a,b]^T$; $L(u) = [0,0]^T$, tedy $\quad L(u) = L([a,b]^T) = \underbrace{[a-b, 3a+2b]^T = [0,0]^T}$, porovnáme 2 vektory

$$\begin{aligned} a - b &= 0 \\ 3a + 2b &= 0 \end{aligned} \quad \to \text{tedy řešíme homogenní soustavu}$$

$$-3 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{aligned} a - b &= 0 \\ 5b &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow b = 0, a = 0$$

– soustava má jen triviální řešení, tedy

$\ker L = \{[0,0]^T\}$, nemá bázi a $\dim \ker L = 0$ → tedy pouze nulový prvek se zobrazí na nulový prvek

→ tedy zobrazení je prosté!

c) $\operatorname{Im} L$ – na co všechno se zobrazí vektory z $\mathbb{R}_2$

– zobrazíme nějakou bázi $\mathbb{R}_2$ a dostaneme generující množinu $\operatorname{Im} L$, vybereme bázi $\operatorname{Im} L$ a určíme dimenzi

– kanonická báze $e_1 = [1,0]^T \quad L(e_1) = L(\overset{\text{do předpisu } a=1, b=0}{[1,0]^T}) = [1-0, 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0]^T = [1,3]^T$ $\quad [1,3]^T$ není násobkem $[-1,2]^T$,

$e_2 = [0,1]^T \quad L(e_2) = L(\underset{\text{do předpisu } a=0, b=1}{[0,1]^T}) = [0-1, 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1]^T = [-1,2]^T$ → zřejmě lin. nezávislé LN

⇒ báze $\operatorname{Im} L$ je např. $[1,3]^T, [-1,2]^T$, $\dim \operatorname{Im} L = 2$

→ tedy $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}_2$ a zobrazení je na

⇒ L je izomorfizmus ⇒ zobrazení prosté a na

$\ker L = [0,0]^T$, $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}_2$.

d)

$A = [\widehat{L(f_1)} \,|\, \widehat{L(f_2)}]$ → hledáme souřadnice obrazů prvků 1. báze (f_1, f_2) v bázi druhé (g_1, g_2)

$L(f_1) = [1-2,\ 3\cdot 1 + 2\cdot 2]^T = [-1, 7]^T$

$L(f_2) = [2-3,\ 3\cdot 2 + 2\cdot 3]^T = [-1, 12]^T$

$k_1 g_1 + k_2 \cdot g_2 = L(f_1)$

$l_1 \cdot g_1 + l_2 g_2 = L(f_2)$

→ řešíme 2 soustavy lineárních rovnic, kde neznámé k_1, k_2 jsou souřadnice $L(f_1)$ a neznámé l_1, l_2 jsou souřadnice $L(f_2)$.

– vyřešíme najednou → matice soustavy je pořád stejná, převedeme na redukovaný stupňovitý tvar a vpravo dostaneme rovnou souřadnice $L(f_1), L(f_2)$ po sloupcích a tedy rovnou matici A.

$$\left[\begin{array}{cc|c:c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{11}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -\frac{25}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{11}{3} \end{array}\right] \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{25}{3} \\ 2 & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

$g_1 \quad g_2 \quad L(f_1) \quad L(f_2)$

$\Rightarrow \widehat{L(f_1)} = [k_1, k_2]^T = [-5, 2]^T \to -5 g_1 + 2 g_2 = -5 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} = L(f_1)$

$\widehat{L(f_2)} = [l_1, l_2]^T = [-\frac{25}{3}, \frac{11}{3}]^T \to -\frac{25}{3} g_1 + \frac{11}{3} g_2 = L(f_2)$

stejným způsobem získáme B → akorát obrátíme pořadí bází

$B = [\widehat{L(g_1)}, \widehat{L(g_2)}]$

$L(g_1) = [2, 1]^T$

$L(g_2) = [1, 8]^T$

$a_1 f_1 + a_2 f_2 = L(g_1)$

$b_1 f_1 + b_2 f_2 = L(g_2)$

$$\left[\begin{array}{cc|c:c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c:c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 13 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \end{array}\right] \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$f_1 \quad f_2 \quad L(g_1) \quad L(g_2)$

$\widehat{L(g_1)} = [a_1, a_2]^T = [-4, 3]^T$

$\widehat{L(g_2)} = [b_1, b_2]^T = [13, -6]^T$

e) $T = [\hat g_1 \,|\, \hat g_2]$ → matice přechodu je vlastně matice zobrazení v bázi g_1, g_2 a bázi f_1, f_2, zobrazení je navíc identické (definuje se obrácené pořadí bází)

→ výpočet stejný jako u bodu d) akorát odpadá díky identickému zobrazení hledání obrazů báze, pro kterou hledáme souřadnice

$\gamma_1 \cdot f_1 + \gamma_2 \cdot f_2 = g_1$

$\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 = g_2$

$$\left[\begin{array}{cc|c:c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow T = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$f_1 \quad f_2 \quad g_1 \quad g_2$

$\hat g_1 = [\gamma_1, \gamma_2]^T = [-5, 3]^T$

$-5 f_1 + 3 \cdot f_2 = -5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} g_1$

$\hat g_2 = [\delta_1, \delta_2]^T = [-4, 3]^T$

$H = [\hat f_1 \,|\, \hat f_2]$ → opět akorát prohodíme báze f_1, f_2 a g_1, g_2

$\mu_1 \cdot g_1 + \mu_2 \cdot g_2 = f_1$

$\lambda_1 \cdot g_1 + \lambda_2 \cdot g_2 = f_2$

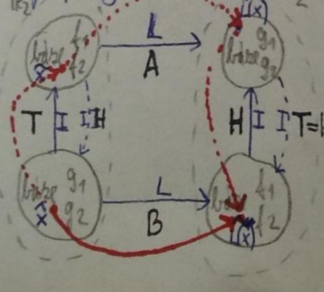
$$\left[\begin{array}{cc|c:c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right] \Rightarrow H = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \\ 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$g_1 \quad g_2 \quad f_1 \quad f_2$

$\hat f_1 = [\mu_1, \mu_2]^T = [-1, 1]^T$

$\hat f_2 = [\lambda_1, \lambda_2]^T = [-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}]^T$

f) ilustrujeme graficky



→ tedy $B = T \cdot A \cdot T = H^{-1} \cdot A \cdot T$

$$B = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -\frac{25}{3} \\ 2 & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 17 & \frac{81}{3} \\ -9 & -\frac{42}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

platí

Zkusme $T \cdot H$ a $H \cdot T$

$$\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \\ 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \\ 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

tedy H je inverzní k T a naopak

$H^{-1} = T$ a $T^{-1} = H$

→ u matice přechodu je zobrazení identitou

→ K čemu matice zobrazení a matice přechodu slouží:

– zvolme libovolný prvek $x = [3,5]^T$ najdeme jeho souřadnice $\tilde{x}$ v bázi f_1, f_2 a jeho souřadnice $\hat{x}$ v bázi g_1, g_2

$\tilde{x}$: $\alpha_1 \cdot f_1 + \alpha_2 \cdot f_2 = x$ $\quad \boxed{\tilde{x} = [1,1]^T} = [\alpha_1, \alpha_2]^T$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1$$

$f_1 \quad f_2 \quad x \qquad \tilde{x}$

$\hat{x}$: $\beta_1 \cdot g_1 + \beta_2 \cdot g_2 = x$ $\quad \boxed{\hat{x} = \left[-\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right]^T} = [\beta_1, \beta_2]^T$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right] \quad \beta_1 = -\frac{7}{3},\ \beta_2 = \frac{8}{3}$$

$g_1 \quad g_2 \quad x \qquad \hat{x}$

stejné

– $L(x) = [3-5, 3\cdot 3 + 2\cdot 5]^T = [-2, 19]^T$ → najdeme obraz x tj. $L(x)$ a opět jeho souřadnice $\widetilde{L(x)}$ v bázi f_1, f_2 a jeho souřadnice $\widehat{L(x)}$ v bázi g_1, g_2.

$\widetilde{L(x)} \to \alpha_1' \cdot f_1 + \alpha_2' \cdot f_2 = L(x)$ $\quad \boxed{\widetilde{L(x)} = [44, -23]^T} = [\alpha_1', \alpha_2']^T$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 19 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 23 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 44 \\ 0 & 1 & -23 \end{array}\right] \quad \alpha_1' = 44,\ \alpha_2' = -23$$

$L(x)$

$\widehat{L(x)} \to \beta_1' \cdot g_1 + \beta_2' \cdot g_2 = L(x)$ $\quad \boxed{\widehat{L(x)} = \left[-\frac{40}{3}, \frac{17}{3}\right]^T} = [\beta_1', \beta_2']^T$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 19 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{17}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{40}{3} \\ 0 & 1 & \frac{17}{3} \end{array}\right] \quad \beta_1' = -\frac{40}{3},\ \beta_2' = \frac{17}{3}$$

– podle obrázku ověříme, že platí:

$$\underline{\tilde{x} = T \cdot \hat{x}} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} /\!/ \quad \text{a zřejmě } \hat{x} = T^{-1} \cdot \tilde{x} = H \cdot \tilde{x} /\!/$$

$$\underline{\widehat{L(x)} = A \cdot \tilde{x}} = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{25}{3} \\ 2 & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 - \frac{25}{3} = -\frac{40}{3} \\ 2 + \frac{11}{3} = \frac{17}{3} \end{bmatrix} /\!/$$

$$\underline{\widehat{L(x)} = H \cdot \widetilde{L(x)}} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \\ 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 44 \\ -23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -44 + \frac{92}{3} = -\frac{40}{3} \\ 44 - \frac{115}{3} = \frac{17}{3} \end{bmatrix} \quad \text{a zřejmě } \widetilde{L(x)} = H^{-1} \cdot \widehat{L(x)} = T \cdot \widehat{L(x)}$$

$$\underline{\widetilde{L(x)} = B \cdot \hat{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{28}{3} + \frac{104}{3} = \frac{132}{3} = 44 \\ -7 - 16 = -23 \end{bmatrix} /\!/$$

matice B jsme vyjádřili

$$\text{a zřejmě } \underline{\widetilde{L(x)} = B \cdot \hat{x} = T \cdot A \cdot T \cdot \hat{x}} /\!/$$