Řešené příklady z lineární algebry - část 2

Řešení soustav lineárních algebraických rovnic převedením rozšířené matice soustavy na redukovaný stupňovitý tvar

Příklad 2.1: Určete všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 1\,, \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 1\,, \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5\,, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & -4\,. \end{array}$$

Řešení:
Soustavu lineárních algebraických rovnic budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Rozšířenou matici soustavy upravíme pomocí řádkových elementárních úprav na redukovaný stupňovitý tvar s pivotními prvky 1.

Matice soustavy v redukovaném stupňovitém tvaru s pivotními prvky 1 je taková matice, kdy žádné dva řádky nemohou začínat prvním nenulovým prvkem (tzv. pivotním prvkem) od stejného sloupce, samotné pivotní prvky jsou 1 a navíc ve sloupcích, kde jsou pivotní prvky, jsou všechny ostatní prvky nulové. Využíváme přitom **řádkové elementární úpravy**, kam patří:

- vzájemná výměna dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovým číslem,
- přičtení násobku jednoho řádku (tzv. pivotního řádku) k jinému řádku.

Koeficienty zadané soustavy zapíšeme do rozšířené matice soustavy a tu pak začneme upravovat.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -4 & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -5 & 3 & 11 \\ 0 & -2 & 7 & 16 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

První fázi úprav jsme začali výběrem vhodného pivotního prvku v prvním sloupci matice, je to číslo -1 ve třetím řádku, proto nejprve vyměníme první a třetí řádek matice. Čtvrtý řádek současně vynásobíme číslem $1/2$. Dále budeme přičítáním vhodných násobků pivotního prvního řádku eliminovat první neznámou ze zbylých řádků, tj. k druhému řádku přičteme 2-násobek, ke třetímu řádku 3-násobek a ke čtvrtému řádku 1-násobek pivotního prvního řádku. Pokud nyní ještě vynásobíme první řádek číslem -1, zajistíme, aby pivotním prvkem v prvním řádku byla jednička. První řádek tak splnil svoji roli pivotního řádku v první fázi úprav, při dalších úpravách rozšířené matice soustavy na stupňovitý tvar jej nebudeme potřebovat (jeho případné užití by "pokazilo"získaný tvar prvního sloupce).
V další fázi úprav se zaměříme na druhý sloupec, pivotní prvek vybíráme z čísel $-5, -2, -1$, vhodným pivotním prvkem může být číslo -1. Vyměníme proto druhý a čtvrtý řádek. Druhý řádek po této úpravě využijeme jako pivotní a ke třetímu řádku přičteme jeho (-2)-násobek a ke čtvrtému řádku jeho (-5)-násobek. Takto získáme další stupeň v požadovaném tvaru matice, k vylepšení pivotního prvku na číslo 1 ještě vynásobíme druhý řádek číslem -1:

$$\dots \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 16 \\ 0 & -5 & 3 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

K získání stupňovitého tvaru matice už stačí pouze třetí řádek vynásobit číslem $1/5$, resp. čtvrtý řádek číslem $-1/2$. Oba takto upravené řádky jsou shodné, proto přičtením (-1) -násobku třetího řádku ke čtvrtému získáme řádek ze samých nul.

$$\dots \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Matice soustavy mé stupňovitý tvar a všechny pivotní prvky jsou jedničky. Redukovaný stupňovitý tvar potřebuje ještě nuly nad pivotními prvky. Začneme třetím sloupcem, k prvnímu řádku přičteme 3-násobek a k druhému řádku 1-násobek pivotního třetího řádku. Poslední chybějící nulu ve druhém sloupci získáme, když k prvnímu řádku přičteme (-2)-násobek pivotního druhého řádku.

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rozšířenou matici zadané soustavy jsme převedli pomocí řádkových elementárních úprav na redukovaný stupňovitý tvar s pivotními prvky 1, tomuto tvaru odpovídá soustava

$$\begin{array}{ccccl} x_1 & & & = & 3\,, \\ & x_2 & & = & -1\,, \\ & & x_3 & = & 2\,. \end{array}$$

Zadaná soustava má tedy právě jedno řešení, je jím přímo trojice

$$\mathbf{x} = [3, -1, 2]^T.$$

Příklad 2.2: Určete všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 4\,, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & + & 23x_5 & = & -13\,, \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & - & 11x_5 & = & 5\,, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 22x_5 & = & -7\,. \end{array}$$

Řešení:
Soustavu lineárních algebraických rovnic budeme opět řešit Gaussovou eliminační metodou. Rozšířenou matici soustavy upravíme pomocí řádkových elementárních úprav na redukovaný stupňovitý tvar s pivotními prvky 1.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 4 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -3 & 23 & -13 \\ 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 22 & -7 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & -3 & 23 & -13 \\ 2 & -1 & 4 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 22 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 0 & 8 & -16 & -12 & 56 & -28 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & 18 & -6 \\ 0 & 7 & -14 & -8 & 44 & -17 \end{array}\right]$$

První fázi úprav jsme začali výběrem vhodného pivotního prvku v prvním sloupci matice, je to číslo 1 ve třetím řádku, proto nejprve vyměníme první

a třetí řádek matice. Dále budeme přičítáním vhodných násobků pivotního prvního řádku eliminovat první neznámou ze zbylých řádků, tj. k druhému řádku přičteme (-3)-násobek, ke třetímu řádku (-2)-násobek a ke čtvrtému řádku též (-2)-násobek pivotního prvního řádku. První řádek tak splnil svoji roli pivotního řádku v první fázi úprav, při dalších úpravách rozšířené matice soustavy na stupňovitý tvar jej budeme zatím pouze opisovat.
V další fázi úprav se zaměříme na druhý sloupec, žádné z čísel $8, 3, 7$ ale není vhodným pivotním prvkem. Pivotní prvek -1 dostaneme např. tak, že ke čtvrtému řádku přičteme (-1) -násobek druhého řádku. Dále vyměníme druhý a čtvrtý řádek matice a zároveň nový čtvrtý řádek vynásobíme číslem $1/4$. Po této úpravě využijeme druhý řádek jako pivotní a ke třetímu řádku přičteme jeho 3-násobek a ke čtvrtému řádku jeho 2-násobek. Takto získáme další stupeň v požadovaném tvaru matice:

$$\ldots \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 0 & 8 & -16 & -12 & 56 & -28 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & 18 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -12 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -12 & 11 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & 18 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & -3 & 14 & -7 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -12 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -18 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & 15 \end{array}\right]$$

Nyní můžeme třetí řádek vynásobit číslem $1/9$ a čtvrtý řádek číslem $1/5$, oba řádky pak budou stejné. Stupňovitý tvar matice získáme tak, že ke čtvrtému řádku přičteme (-1) -násobek třetího řádku. Pokud navíc druhý řádek vynásobíme číslem -1, budou již všechny pivotní prvky rovny 1.

$$\ldots \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -12 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 12 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Aby matice byla v redukovaném stupňovitém tvaru, potřebujeme ještě získat nuly nad pivotními prvky ve druhém a čtvrtém sloupci. Začneme čtvrtým sloupcem, k prvnímu řádku přičteme (-3)-násobek a k druhému řádku 4-násobek pivotního třetího řádku. Poslední chybějící nulu ve druhém sloupci dostaneme tak, že k prvnímu řádku přičteme 2-násobek pivotního druhého řádku.

$$\ldots \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Poslední matice je v požadovaném redukovaném stupňovitém tvaru s pivotními prvky 1, odpovídá jí soustava lineárních algebraických rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & + & x_3 & & + & 3x_5 & = & -2\,, \\ & x_2 & - & 2x_3 & & + & 4x_5 & = & 1\,, \\ & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & 3\,. \end{array}$$

Počet rovnic poslední soustavy je menší než počet neznámých, znamená to, že soustava bude mít nekonečně mnoho řešení. Všechna řešení soustavy získáme následujícím způsobem.

Z jednotlivých rovnic vyjádříme první neznámé, neboť tyto neznáme odpovídají pivotním prvkům 1. Zbylé dvě neznámé mohou být libovolné, např. $x_3 = t$ a $x_5 = s$, kde $t, s \in \mathbf{R}$ jsou tzv. parametry řešení. Potom
$x_1 = -2 - x_3 - 3x_5 = -2 - t - 3s$,
$x_2 = 1 + 2x_3 - 4x_5 = 1 + 2t - 4s$,
$x_4 = 3 + 2x_5 = 3 + 2s$.

Všechna řešení zadané soustavy pak zapíšeme jako uspořádanou pětici $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = [-2 - t - 3s, 1 + 2t - 4s, t, 3 + 2s, s]^T\,,$$

resp.

$$\mathbf{x} = [-2, 1, 0, 3, 0]^T + t.\,[-1, 2, 1, 0, 0]^T + s.\,[-3, -4, 0, 2, 1]^T\,,$$

kde t, s jsou libovolná reálná čísla.

Poznámka:
Později se naučíme určovat řešení soustav ještě jiným způsobem, k tomu jsou ale zapotřebí hlubší znalosti o lineárních prostorech a lineárních zobrazeních.