D 206

Die Wärmepumpe

Sonia Chander
sonia.chander@tu-dortmund.de

Jana Schlücking
jana.schluecking@tu-dortmund.de

Durchführung: 28.10.2020 Abgabe: 03.11.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wollen wir die Funktionsweise einer Wärmepumpe, die Wärme von einem kälteren in ein wärmeres Reservoir transportiert, genauer betrachten. Anschließend bestimmen wir die Güteziffer, den Massendurchsatz und die mechanische Kompressorleistung der Wärmepumpe, um diese qualitativ beurteilen zu können.

2 Theorie

In diesem Versuch betrachten wir den Wärmetransport von einem kälteren in ein wärmeres Reservoir mithilfe einer Wärmepumpe. Dafür benötigt man zusätzliche mechanische Arbeit.

2.1 Arbeitsweise einer Wärmepumpe

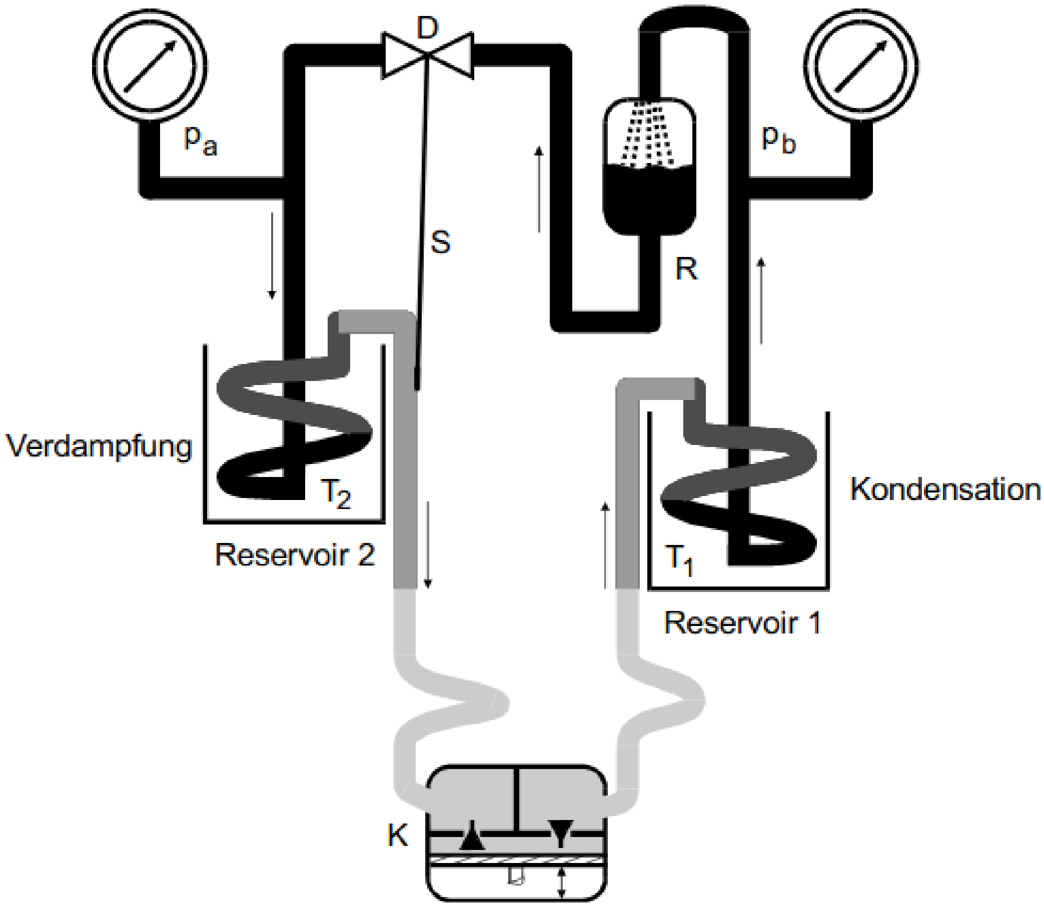

Abbildung 1: Prinzipielle Aufbau einer Wärmepumpe.[1]

Die Hauptbauteile einer Wärmepumpe sind ein Kompressor, zwei Reservoire mit Wasser und einem Drosselventil. Das Transportmedium der Wärmepumpe sollte ein reales Gas mit hoher Kondensationswärme sein, da die Wärmeaufnahme durch Verdampfen und die Wärmeabgabe beim Verflüssigen erfolgt.

Durch den Kompressor wird das Transportmedium durch das Reservoir 1, das Drosselventil D und das Reservoir 2 geführt. Außerdem komprimiert er nahezu adiabatisch, also wird der Zustand des Mediums ohne großen Temperaturaustausch mit der Umgebung geändert. In der Temperatur T_2 und dem Druck p_a soll das Transportmedium verdampfen und dabei die Verdampfungswärme L aufnehmen, bei der Temperatur T_1 und Druck p_b kondensiert das Transportmedium und gibt L ab. Das Drosselventil D lässt druckreguliert das Transportmedium durch, es befindet sich dort aufgrund des hohen Stromwiderstandes ein großer Druckunterschied.

Weitere Bauteile, wie der Reiniger R oder die Steuervorrichtung S, sorgen für einen störungsfreien Ablauf, sind aber für den eigentlichen Vorgang der Wärmeübertragung nicht notwendig. Durch den Reiniger R werden Gasreste aus der Flüssigkeit entfernt, bevor diese durch das Drosselventil strömt. Die Steuervorrichtung S reguliert das Drosselventil, sodass nur Gas in den Kompressor gelangt.

2.2 Die Güteziffer

Die Güteziffer beschreibt das Verhältnis zwischen der übertragenen Wärme Q_1 und der dafür aufgebrachten Arbeit A. Die übertragene Wärmemenge Q_1 setzt dich folgendermaßen aus A und der dem kälteren Reservoir entnommene Wärmemenge Q_2 zusammen.

$$Q_1 = Q_2 + A \tag{1}$$

Mit der Grundannahme, dass es keine Temperaturänderung der Reservoire gibt, folgt aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik im irreversiblen (realistischen) Fall:

$$\frac{Q_1}{T_1 - \frac{Q_2}{T_2}} > 0 \tag{2}$$

, wobei T_1 und T_2 die Wassertemperaturen der Reservoire bezeichnet. Daraus folgt für die Güteziffer in idealen Bedingungen:

$$\nu_\mathrm{id} = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \tag{3}$$

Dementsprechent ist der Arbeitsaufwand für die Pumpe geringer, je kleiner die Temperaturdifferenz $\varDelta T = |T_1 - T_2|$ ist.

Da in der Auswertung die Temperaturkurven mit Funktionen angenähert werden, benutzen wir statt der Differenzenquotienten im folgenden Differentialquotienten.

Zur Berechnung der realen Güteziffer betrachtet man den gemessenen Temperaturunterschied von T_1 in bestimmten Zeitintervallen. Mit der Wärmekapazität des Wassers aus Reservoir 1 $m_1 c_w$ und der Wärmekapazität der Kupferschlange und der Eimer $m_k c_k$ gilt der Zusammenhang

$$\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}t} = (m_1 c_w + m_k c_k)\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

Für die Güteziffer ergibt sich dann

$$\nu = \frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}t \cdot N} = (m_1 c_w + m_k c_k)\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{N}, \tag{5}$$

wobei N für die gemittelte Leistungsaufnahme des Kompressors steht.

2.3 Der Massendurchsatz

Ist die Verdampfungswärme pro Maase- und Zeiteinheit L bekannt, lässt dich der Massendurchsatz über diese Formel berechnen:

$$\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t} = L \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

Die pro Zeiteinheit aus dem Reservoir 2 entnommene Wärmemenge errechnet sich dabei aus der Temperaturänderung von T_2 .$m_2 c_w$ entspricht der Wärmekapazität des Wassers in Reservoir 2.

$$\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t} = (m_2 c_w + m_k c_k)\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

Somit ergibt sich für den Massendurchsatz $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = (m_2 c_w + m_k c_k)\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{L} \tag{8}$$

2.4 Die mechanische Kompressorleistung

Im allgemeinen gilt für die Arbeit A_m, die es braucht um das Gasvolumen V_a auf das Gasvolumen V_b zu verringern:

$$A_m = -\int_{V_\mathrm{b}}^{V_\mathrm{b}} p\,\mathrm{d}V$$

Mit der Annahme, dass die Kompression adiabatisch abläuft, und der Poissonschen Gleichung, folgt für die Arbeit A_m und somit auch für die mechanische Kompressionsleistung $N_\mathrm{mech} = \frac{\mathrm{d}A_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}$:

$$N_\mathrm{mech} = \frac{\mathrm{d}A_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\kappa - 1}\left(p_\mathrm{b}\sqrt[\kappa]{\frac{p_\mathrm{a}}{p_\mathrm{b}}} - p_\mathrm{a}\right)\frac{\mathrm{d}V_\mathrm{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\kappa - 1}\left(p_\mathrm{b}\sqrt[\kappa]{\frac{p_\mathrm{a}}{p_\mathrm{b}}} - p_\mathrm{a}\right)\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

In der Formel steht ρ für die Dichte des Transportmediums im gasförmigen Zustand und κ für das Verhältnis der Molwärmen (aus der Poissonschen Gleichung). Man kann ρ näherungsweise aus der idealen Gasgleichung errechnen.

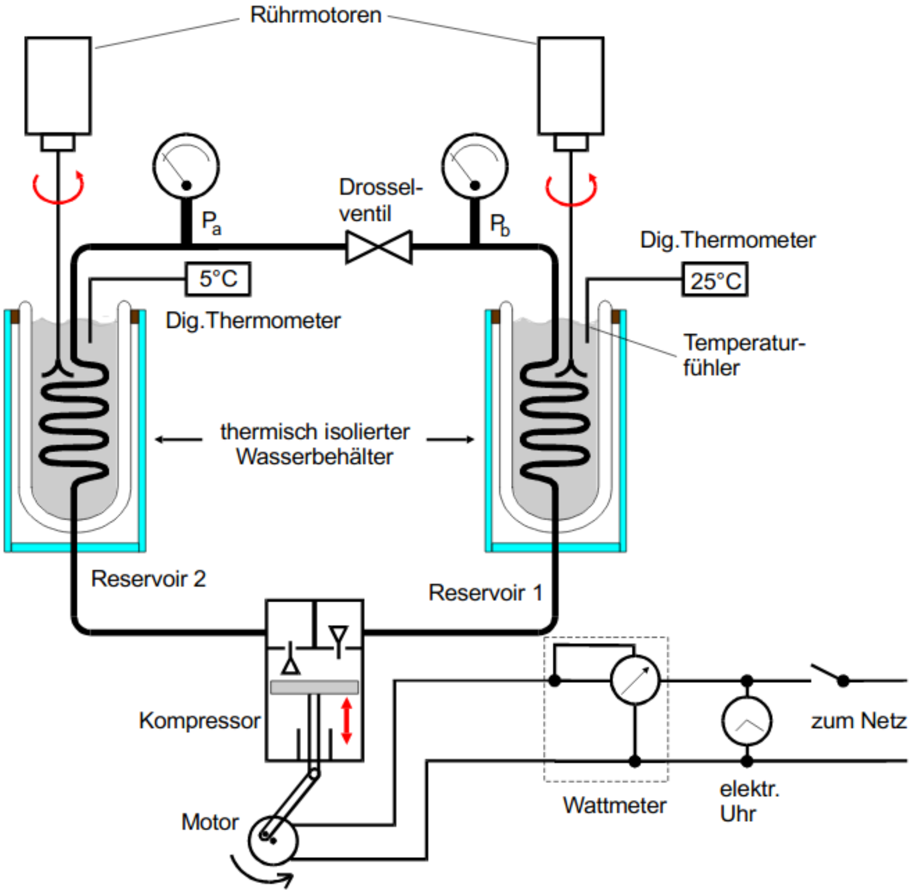

Abbildung 2: Schematische Darstellung der Messapparatur [1]

3 Durchführung

Die komplette Messapparatur ist so aufgebaut: Die Reservoire bestehen aus thermisch isolierten Eimern, sodass die Wassertemperatur nicht von der Umgebungstemperatur beeinflusst wird.

Zu Beginn des Experimentes werden in beide Eimer 4 l kaltes Wasser gefüllt. Mit Rührmotoren wird das Wasser in den Eimern gerührt, damit dessen Temperatur einheitlich ist. Nachdem die Anfangswerte notiert wurden und der Netzschalter des Kompressors umgelegt, wird im Minutentakt die Temperatur des Reservoirs 1 T_1, die Drücke p_b und p_a, die Temperatur des Reservoirs 2 T_2 und die Leistungsaufnahme des Kompressors N. Die Messung wird abgebrochen, sobald T_1 den Wert von 50 °C erreicht hat.

4 Auswertung

4.1 Messdaten und Diagramm

Die Messwerte sind in einer Tabelle aufgetragen. Dabei sind die Temperaturen einmal in °C und einmal in K angegeben, den Drücken ist nach Anleitung [1] ein bar dazuaddiert worden.

Dann haben wir die Temperaturen in K gegen die Zeit in einem Diagramm aufgetragen. Die Verläufe haben wir mit einem Polynom 2. Grades ($T(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$)angenähert. Für die Ausgleichsrechnung ergeben sich für die Konstanten a, b und c:

Für

$$T_1(t) = T(t):$$

Für

$$T_2(t) = T(t):$$

$$a = -0{,}0116\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}^2} \qquad a = 0{,}0034\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}^2}$$

$$b = 1{,}2168\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}} \qquad b = -0{,}6725\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$

$$c = 294{,}9701\,\mathrm{K} \qquad c = 295{,}8702\,\mathrm{K}$$

$$\implies T_1(t) = -0.0116t^2 + 1.2168t + 294.9701 \qquad \implies T_2(t) = 0.0034t^2 - 0.6725t + 295.8702$$

4.2 Bestimmung der Güteziffer

Zur Bestimmung der Güteziffer errechnen wir die Differantialquotienten $\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}$ und $\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t}$ für vier verschiedene Zeitpunkte: Die Ableitung ist aus der Ausgleichsrechnung einfach bestimmt.

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 2at + b \tag{10}$$

Tabelle 1: Messwerte

t / min	T_1 / °C	T_2 / K	p_1 / bar	T_2 / °C	T_2 / K	p_2 / bar	N_{mech} / W
0,0	21,7	294,85	5,0	21,7	294,85	5,1	120,0
1,0	23,0	296,15	6,0	21,7	296,15	4,2	120,0
2,0	24,3	297,45	6,5	21,6	297,45	4,4	120,0
3,0	25,3	298,45	7,0	21,5	298,45	4,5	120,0
4,0	26,4	299,55	7,0	20,8	299,55	4,5	120,0
5,0	27,5	300,65	7,0	20,1	300,65	4,4	120,0
6,0	28,8	301,95	7,5	19,2	301,95	4,3	120,0
7,0	29,7	302,85	7,5	18,5	302,85	4,2	120,0
8,0	30,9	304,05	8,0	17,7	304,05	4,2	120,0
9,0	31,9	305,05	8,0	16,9	305,05	4,0	120,0
10,0	32,9	306,05	8,0	16,2	306,05	4,0	120,0
11,0	33,9	307,05	8,5	15,5	307,05	3,9	120,0
12,0	34,8	307,95	8,5	14,9	307,95	3,8	120,0
13,0	35,7	308,85	9,0	14,2	308,85	3,8	120,0
14,0	36,7	309,85	9,0	13,6	309,85	3,7	120,0
15,0	37,6	310,75	9,0	13,0	310,75	3,6	120,0
16,0	38,4	311,55	9,5	12,4	311,55	3,6	120,0
17,0	39,2	312,35	9,5	11,7	312,35	3,6	120,0
18,0	40,0	313,15	10,0	11,3	313,15	3,5	120,0
19,0	40,7	313,85	10,0	10,9	313,85	3,5	120,0
20,0	41,4	314,55	10,0	10,4	314,55	3,4	120,0
21,0	42,2	315,35	10,0	9,9	315,35	3,4	120,0
22,0	42,9	316,05	10,5	9,5	316,05	3,4	120,0
23,0	43,6	316,75	10,5	9,1	316,75	3,4	120,0
24,0	44,3	317,45	11,0	8,7	317,45	3,4	120,0
25,0	44,9	318,05	11,0	8,3	318,05	3,4	120,0
26,0	45,5	318,65	11,0	8,0	318,65	3,3	120,0
27,0	46,1	319,25	11,0	7,7	319,25	3,2	122,0
28,0	46,7	319,85	11,5	7,4	319,85	3,2	122,0
29,0	47,3	320,45	11,5	7,1	320,45	3,2	122,0
30,0	47,8	320,95	11,75	6,8	320,95	3,2	122,0
31,0	48,4	321,55	12,0	5,6	321,55	3,2	122,0
32,0	48,9	322,05	12,0	4,3	322,05	3,2	122,0
33,0	49,4	322,55	12,0	3,4	322,55	3,2	122,0
34,0	49,9	323,05	12,0	3,0	323,05	3,2	122,0
35,0	50,3	323,45	12,0	2,9	323,45	3,2	122,0

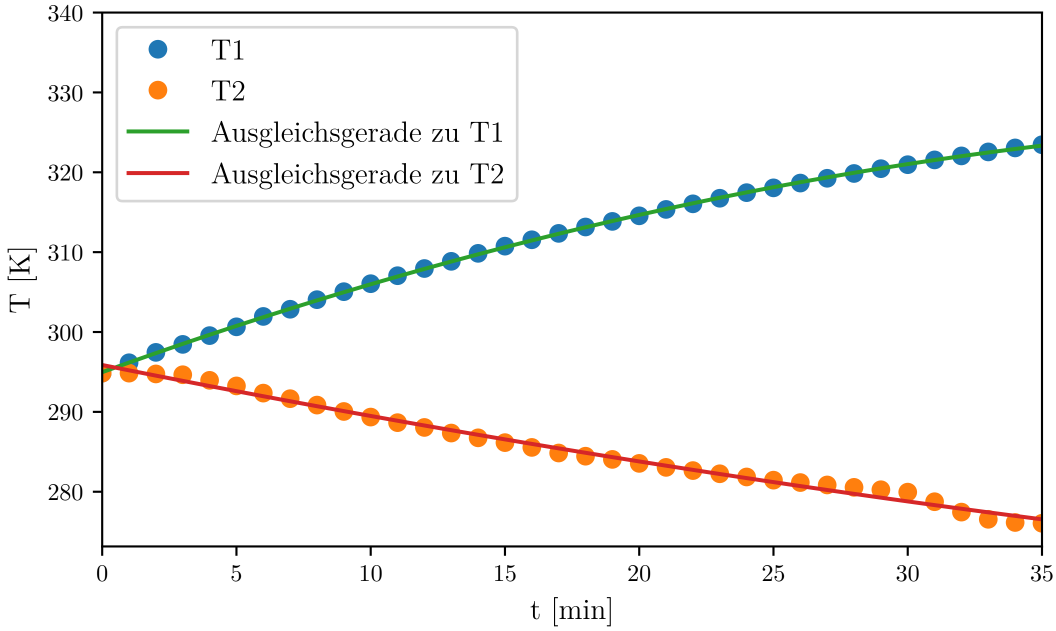

Abbildung 3: Die gemessenen Temperaturen in Zeitverlauf mit den angenäherten Funktionen.

Für T_1 ergeben sich die Ableitungen zu:

$$\text{bei}\, t = 1.0: \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = 1{,}1936\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$
$$\text{bei}\, t = 2.0: \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = 1{,}1704\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$
$$\text{bei}\, t = 3.0: \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = 1{,}1471\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$
$$\text{bei}\, t = 4.0: \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = 1{,}1239\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$

Für T_2 ergeben sich die Ableitungen zu:

$$\text{bei}\, t = 1.0: \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = -0{,}6656\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$
$$\text{bei}\, t = 2.0: \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = -0{,}6588\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$
$$\text{bei}\, t = 3.0: \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = -0{,}6519\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$
$$\text{bei}\, t = 4.0: \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = -0{,}6450\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$

Mit den Formel 5 und 3 lassen sich nun die Güteziffer und die ideale Güteziffer berechnen. Die Wärmekapazität der Kupferschlangen und des Wasser ergeben sich zu:

$$m_k c_k = 750\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$
$$mc_w = 4 \cdot 4184\,\frac{\mathrm{J\,kg}}{\mathrm{K}} = 16\,736\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

Tabelle 2: Bestimmung der Güteziffer aus der Messreihe T_1

t / s	ν	ν_{id}	Abweichung / %
60	173,9232 ± 95,7291	227,8077	23,65
120	170,5397 ± 96,1649	110,1667	54,80
180	167,1562 ± 96,8867	78,5395	112,83
240	163,7728 ± 97,8885	53,4911	206,17

Der Fehler $\Delta\nu$ wurde mit der Fehlerfortpflanzung von Gauss berechnet. Man erkennt eine große Abweichung der errechneten Werte für die Güteziffer und den dazu passenden Werten der idealen Güteziffer ν_{id}. Dies folgt einerseits aus den Annahmen, es handle sich um einen reversiblen Prozess und der Kompressor arbeite adiabatisch, welche nicht der Realität entsprechen. Zusätzlich haben wir Energieverluste aus Reibung nicht beachtet. In der Diskussion gehen wir nochmal weiter auf mögliche Fehlerquellen ein.

4.3 Bestimmung des Massendurchsatzes

Zur Berechnung des Massendurchsatzes benötigen wir die Verdampfungswärme L. Diese kann wie folgt aus den gemessenen Werte errechnet werden. Zuerst erstellt man ein (p, T) Diagramm, wobei die Temperatur als $\frac{1}{T}$ und der Druck als $\log(\frac{p}{p_0})$ mit Umgebungsdruck p_0 aufgetragen werden. Mithilfe einer Ausgleichgerade bestimmt man die Steigung m und kann dann durch $L = -m \cdot R$ die Verdampfungswärme L errechnen. R entspricht der allgemeinen Gaskonstante. Für die Ausgleichsgeraden für $\log(\frac{p}{p_0}) = m \cdot \frac{1}{T} + b$ ergeben sich:

$$\text{für}\, T_1 \,\text{und}\, p_{\mathrm{a}} : m = (-2462{,}4863 \pm 70{,}5436)\,\mathrm{K} \qquad b = 8{,}5260 \pm 0{,}2268$$
$$\text{für}\, T_2 \,\text{und}\, p_{\mathrm{b}} : m = (-1719{,}8296 \pm 88{,}3692)\,\mathrm{K} \qquad b = 5{,}6974 \pm 0{,}3097$$

Da wir den Massendurchsatz aus den Messwerten bezüglich Reservoir 2 berechnen, werden wir zur Berechnung von L auch die Steigung bezüglich Reservoir 2 benutzen. Mit Fehlerrechnung nach [2] erhalten wir für L :

$$L = (14\,298{,}6636 \pm 734{,}6999)\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}}$$

Mit der bekannten Verdampfungswärme L lässt sich der Massendurchsatz zu unseren Differentialquotienten nach (8) berechnen. Für ein leichteres Weiterrechnen haben wir den Massendurchsatz zusätzlich noch in SI-Einheiten aufgeschrieben. Dafür multipliziert man den Massendurchsatz mit der molaren Masse, die sich zu $M = 120{,}9\,\mathrm{g/mol}$ ergibt.

Abbildung 4: (p, T) Diagramm mit den Ausgleichsgeraden

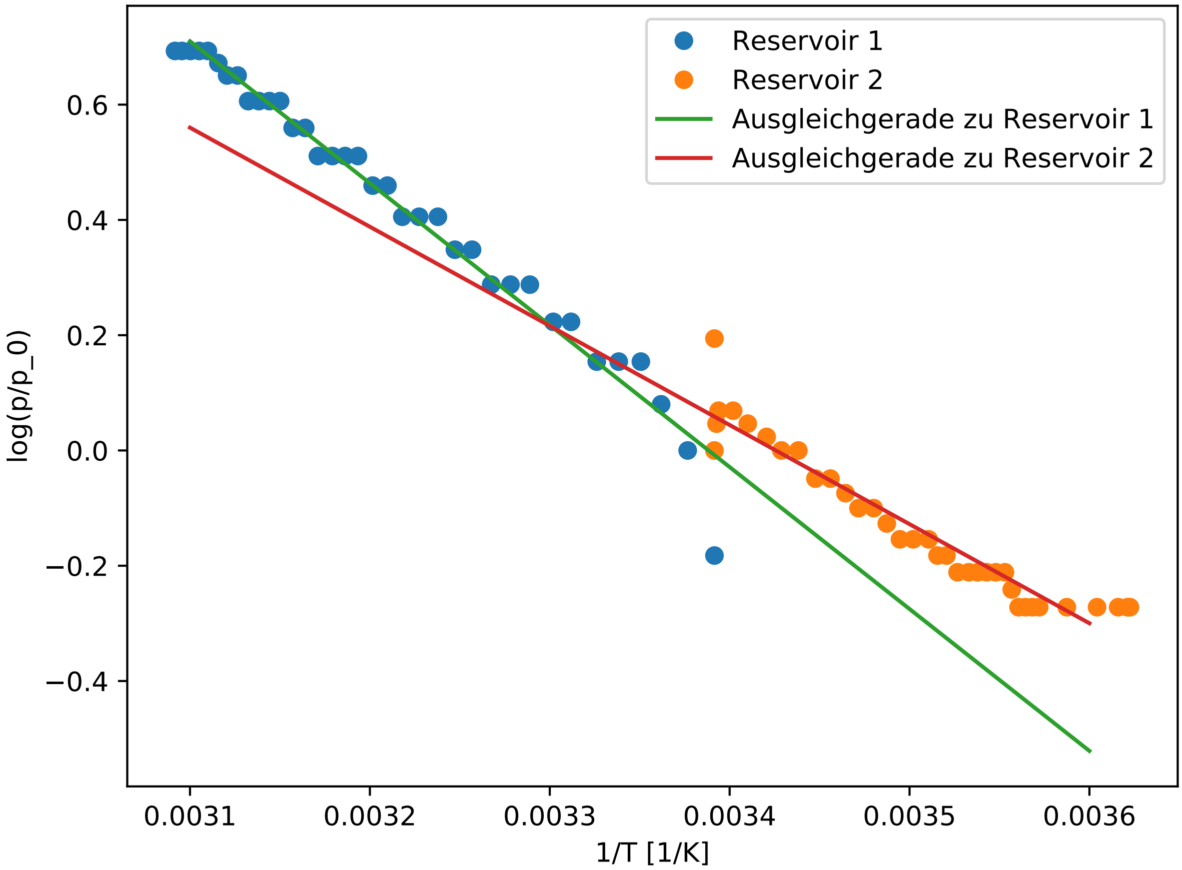

Tabelle 3: Massendurchsatz zu verschiedenen Zeitpunkten

t / s	$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ / mol/s	$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ / g/s
60	−0,006 78	−0,8136
120	−0,006 71	−0,8052
180	−0,006 64	−0,7968
240	−0,006 57	−0,7884

4.4 Bestimmung der mechanischen Kompressionsleistung N_{mech}

Um die Formel (9) zur Berechung der mechanischen Kompressorleistung zu benutzen, müssen wir ρ aus der idealen Gasgleichung mithilfe der angegebenen Werte errechnen. Aus der Anleitung[1] entnehmen wir $\rho_0 = 5{,}51\,\mathrm{g/l}$ bei $T = 0\,°\mathrm{C} = 273{,}25\,\mathrm{K}$ und $\kappa = 1{,}14$, außerdem wissen wir $R = 8{,}314\,\mathrm{J\,K/mol}$.

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \implies nR = \frac{pV}{T}$$

Da die Stoffmenge über die Zeit konstant bleibt, folgt nR =const., außerdem ist $\rho \cdot V = m$.

$$\begin{aligned} \frac{p_0 V_0}{T_0} &= \frac{p_\mathrm{a} V_2}{T_2} \\ \implies \frac{p_0 m}{\rho_0 T_0} &= \frac{p_\mathrm{a} m}{\rho T_2} \\ \implies \rho &= \frac{\rho_0 T_0 \cdot p_\mathrm{a}}{p_0 \cdot T_2} \end{aligned}$$

Tabelle 4: Mechanische Kompressorleistung zu verschiedenen Zeitpunkten.

t / s	N_mech / W
60	152,08
120	163,83
180	182,19
240	179,84

5 Diskussion

Bei der Berechnung der Güteziffer fiel bereits auf, der reale Wert stark von der idealen Güteziffer abweicht. Dies beruht wie oben genannt auf den Annahmen, die zur Formel der idealen Güteziffer führten. Der Kompressor kann nicht adiabatisch arbeiten und auch die Reversiblität des Vorganges ist realitätsfern. Zudem haben wir noch die Einflüsse der Umgebung außer Acht gelassen. Die Beschränkung auf vier Stellen, an denen wir z.B. die Ableitung der Temperatur bestimmt haben, lässt die Möglichkeit offen, dass lokale Unregelmäßigkeiten die Messergebnisse beeinflussen.

Weitere mögliche Fehlerquellen wie schlecht abzulesende Anzeigen können wir nicht in unsere Diskussion einfließen lassen, da wir den Versuch nur anhand der Daten ausgewertet haben und ihn nicht durchführen konnten.

Literatur

[1] TU Dortmund Fakultät Physik. *Versuchsanleitung zum Experiment V206 - Die Wärmepumpe*. 2020.

[2] Fakultät Physik. *Formelsammlung zur Berechnung von Messunsicherheiten*. TU Dortmund. 2020.