

**V302**

# **Brückenschaltungen**

Sonia Chander  
sonia.chander@tu-dortmund.de

Jana Schlücking  
jana.schluecking@tu-dortmund.de

Durchführung: 03.11.2020                  Abgabe: DATUM

TU Dortmund – Fakultät Physik

# **Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Allgemeiner Aufbau einer Brückenschaltung . . . . .	3
2.2 Wheatstonesche Brücke . . . . .	5
2.3 Kapazitätsmessbrücke . . . . .	6
2.4 Induktivitätsmessbrücke . . . . .	6
2.5 Maxwell-Brücke . . . . .	6
2.6 Wien-Robinson-Brücke . . . . .	10
<b>3 Durchführung</b>	<b>11</b>
3.1 Wheatstonesche Brücke . . . . .	11
3.2 Kapazitätsmessbrücke . . . . .	11
3.3 Induktivitätsmessbrücke . . . . .	11
3.4 Wien-Robinson-Brücke . . . . .	12
<b>4 Auswertung</b>	<b>12</b>
4.1 Wheatstonesche Brücke . . . . .	12
4.2 Kapazitätsmessbrücke . . . . .	12
4.3 Induktivitätsmessbrücke . . . . .	13
4.4 Wien-Robinson-Brücke . . . . .	13
<b>5 Diskussion</b>	<b>16</b>
<b>6 Anhang</b>	<b>16</b>
<b>Literatur</b>	<b>19</b>

# 1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen unbekannte Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten durch Brückenschaltungen ermittelt werden. Darauf hinaus soll die Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung einer Wien-Robinson-Brücke gemessen werden und eine Klirrfaktormessung durchgeführt werden.

# 2 Theorie

Mithilfe von Brückenschaltungen können physikalische Größen, die durch ohmsche, aber auch komplexe Widerstände darstellbar sind, gut gemessen werden. Da die Genauigkeit der Messungen mit einer Nullmethode erhöht wird, werden diese mit abgeglichenen Brücken durchgeführt.

## 2.1 Allgemeiner Aufbau einer Brückenschaltung

Allgemein sieht eine Brückenschaltung aus wie in Abbildung 1. Es wird eine Speisespannung angelegt, der Strom teilt sich dann auf zwei getrennten Leitern auf. In diesem Fall sind an jedem Leiter zwei ohmsche Widerstände angebracht. An den Punkten A und B wird die sogenannte Brückenspannung abgegriffen.

Mithilfe der Kirchhoffschen Regeln kann die Brückenspannung  $U_{AB}$  berechnen.

### 1. Die Knotenregel

Die Summe aller eintretenden Ströme ( $I > 0$ ) ist gleich der Summe aller austretenden Ströme ( $I < 0$ ) an einem Knoten.

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0 \quad (1)$$

### 2. Die Maschenregel

Die Summe aller Spannungen in einem geschlossenen Stromkreis ist gleich Null.

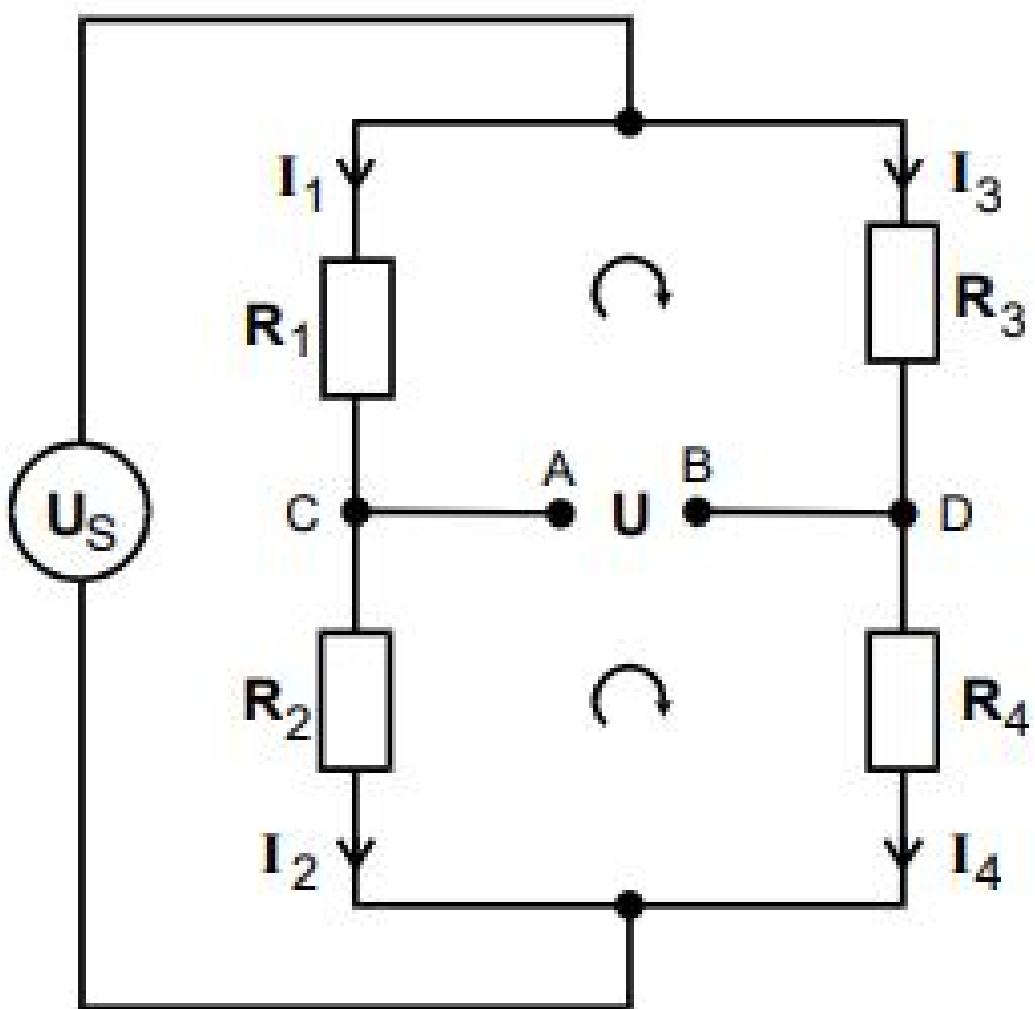
$$\sum_{i=1}^N U_i = 0 \quad (2)$$

Daraus folgt:

$$U = \frac{R_2 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_4}{(R_3 + R_4) \cdot (R_1 + R_2)} \cdot U_S. \quad (3)$$

Dabei ist  $U_S$  die Speisespannung. Wenn auf beiden Leitern das gleiche Widerstandsverhältnis besteht, verschwindet die Brückenspannung. Also wenn die folgende Abgleichbedingung gilt:

$$R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3. \quad (4)$$



**Abbildung 1:** Allgemeiner Aufbau einer Brückenschaltung.[1]

So eine Brücke wird abgeglichen genannt. Dies ermöglicht Widerstandsmessungen, bei denen ein Widerstand unbekannt ist. Durch Variation der bekannten Widerstände bis die Brückenspannung gleich Null ist, kann der unbekannte Widerstand ermittelt werden.

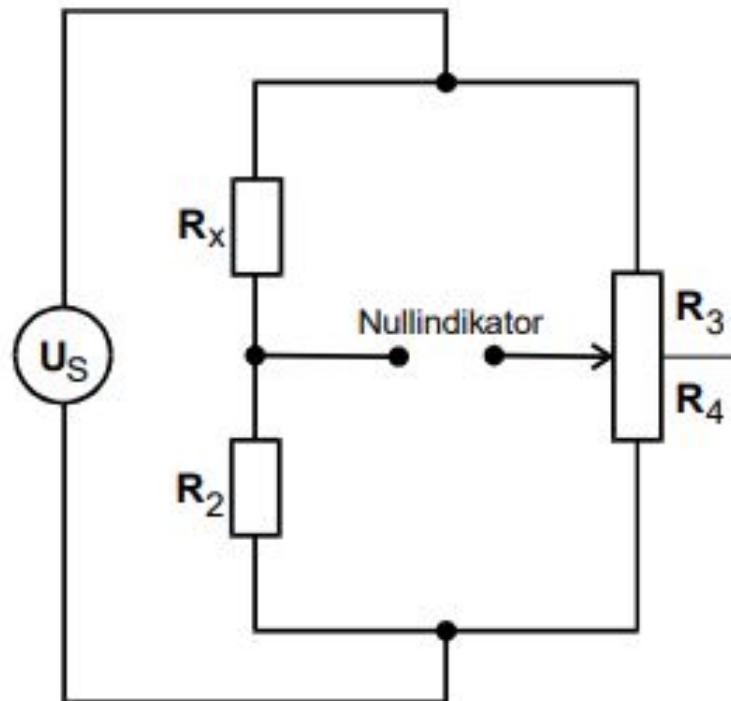
Bei Brückenschaltungen können auch komplexe Widerstände eingebaut werden. Bei den Formeln muss dann nur noch beachtet werden, dass sich der Widerstand in Blind- und Wirkwiderstand aufteilen lässt.

## 2.2 Wheatstonesche Brücke

Die Wheatstonesche Brücke kann mit Gleich- oder Wechselstrom betrieben werden, da sie nur ohmsche Widerstände enthält. Drei davon sind bekannt. Der unbekannte Widerstand  $R_x$  kann durch (4) ermittelt werden, indem die Formel nach  $R_x$  umgestellt wird.  $R_1$  wird in diesem Fall durch  $R_x$  ersetzt.

$$R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4} \quad (5)$$

Da  $R_x$  vom Verhältnis  $R_3$  und  $R_4$  abhängt, wird ein Potentiometer verwendet.



**Abbildung 2:** Aufbau einer Wheatstonesche Brücke.[1]

## 2.3 Kapazitätsmessbrücke

Diese Schaltung wird mit Wechselstrom betrieben, da hier komplexe Widerstände eingebaut werden. Da ein realer Kondensator einen Teil der elektrischen Energie in Wärme umwandelt, wird dies mit einem Ersatzschaltbild realisiert, indem ein ohmscher Widerstand und eine Kapazität in Reihe geschalten werden. Um die von  $R_x$  verursachte Phasenverschiebung zu kompensieren, wird der ohmsche Widerstand  $R_2$  vom zweiten realen Kondensator veränderlich sein.

Es folgt:

$$R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4} \quad (6)$$

und

$$C_x = C_2 \cdot \frac{R_4}{R_3}. \quad (7)$$

## 2.4 Induktivitätsmessbrücke

Der Aufbau einer Induktivitätsmessbrücke ist ähnlich wie bei 2.3. Da reale Induktivitäten einen Teil der magnetischen Feldenergie in Wärme umwandeln, ist auch das Ersatzschaltbild analog zu einem realen Kondensator aufgebaut. Anstelle eines Kondensators wird eine Induktivität mit einem ohmschen Widerstand in Reihe geschaltet.

Es gilt:

$$R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4} \quad (8)$$

und

$$L_x = L_2 \cdot \frac{R_3}{R_4}. \quad (9)$$

Der Wirkanteil der Induktivität  $L_2$  soll allein durch  $R_2$  verwirklicht werden. Bei niedrigen Frequenzen ist das schwer umsetzbar. Eine Induktivitätsmessung mithilfe der Maxwell-Brücke ist eine gute Alternative.

## 2.5 Maxwell-Brücke

Mithilfe der Maxwell-Brücke können auch Induktivitäten ausgemessen werden. Dabei soll anstelle der Induktivität  $L_2$  aus 2.4 eine Kapazität verwendet werden. Diese Kapazität  $C_4$  hat einen kleineren Wirkwiderstand und möglichst wenig Verluste.

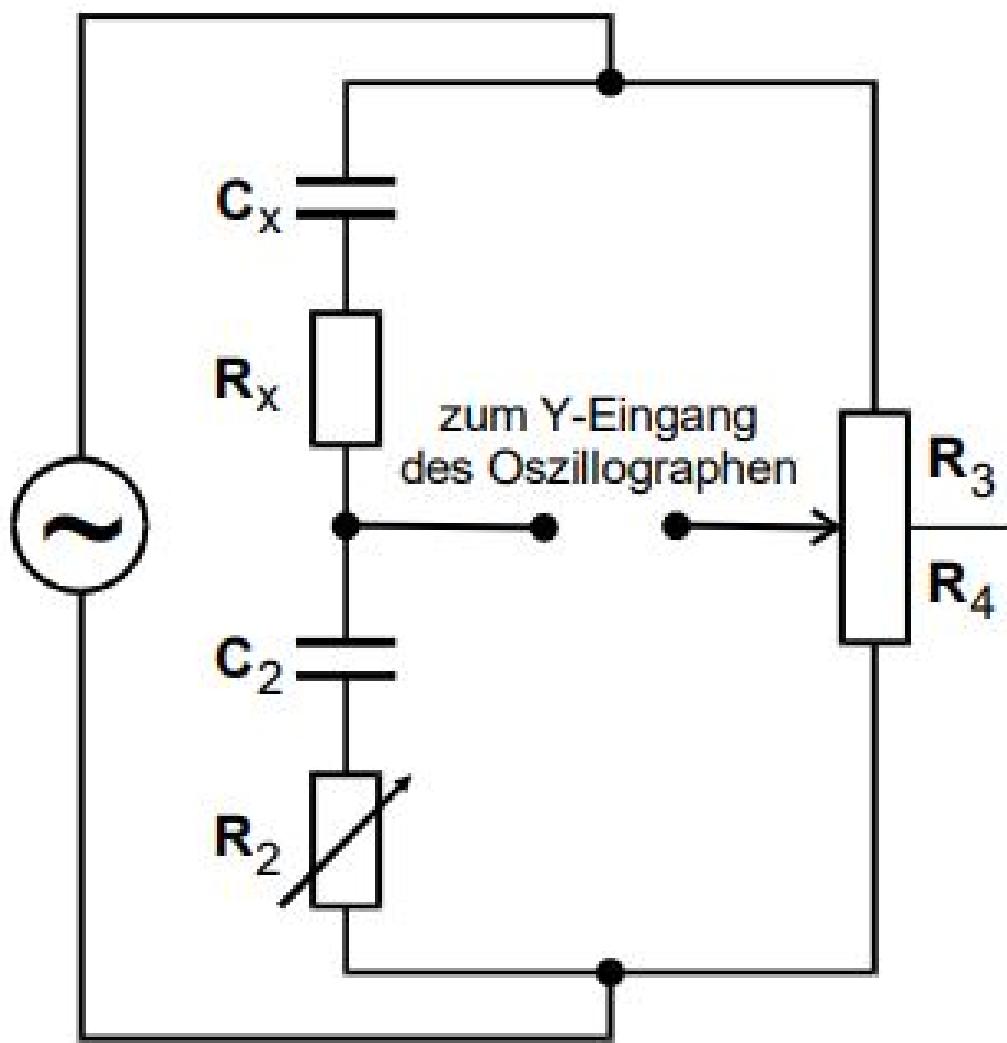
Der Aufbau dieser Schaltung ist in 5 abgebildet.

Es gelten folgende Abgleichbedingungen:

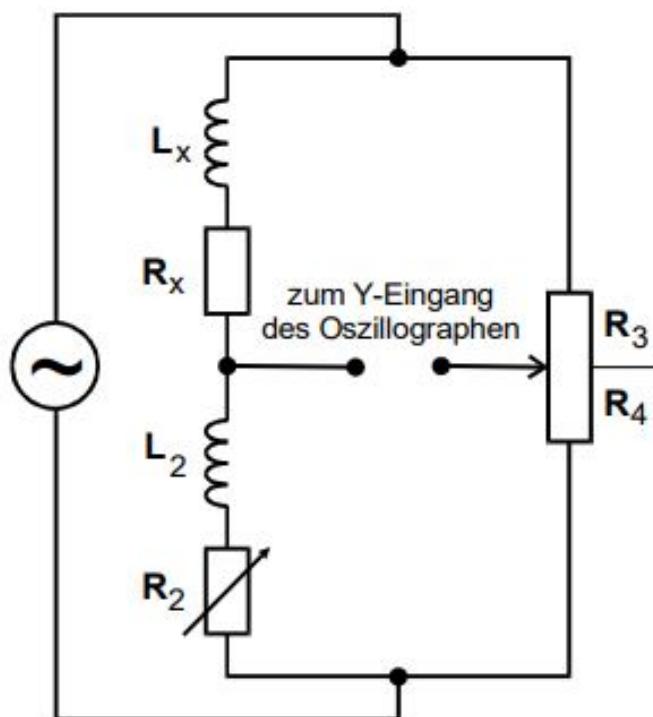
$$R_x = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_4} \quad (10)$$

und

$$L_x = R_2 \cdot R_3 \cdot C_4. \quad (11)$$



**Abbildung 3:** Aufbau einer Kapazitätsmessbrücke mit Ersatzschaltbild realer Kondensatoren.[1]



**Abbildung 4:** Aufbau einer Induktivitätsmessbrücke mit Ersatzschaltbild realer Induktivitäten. [1]

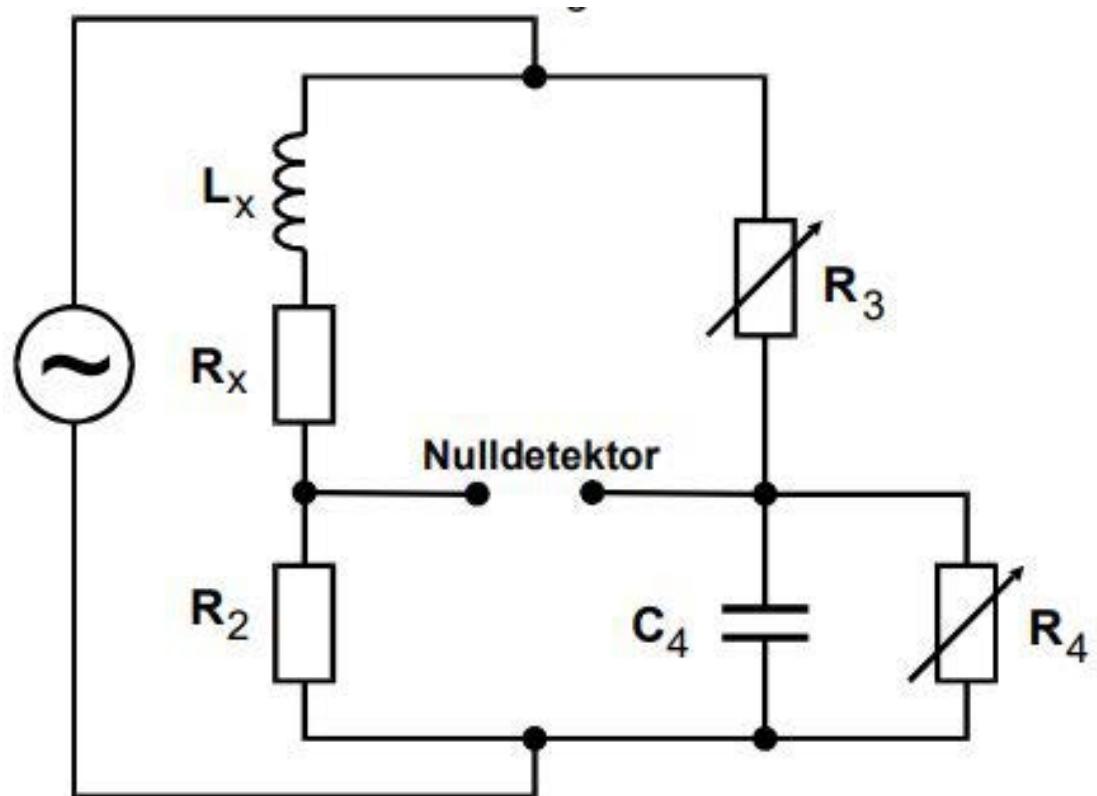


Abbildung 5: Aufbau einer Maxwell-Brücke. [1]

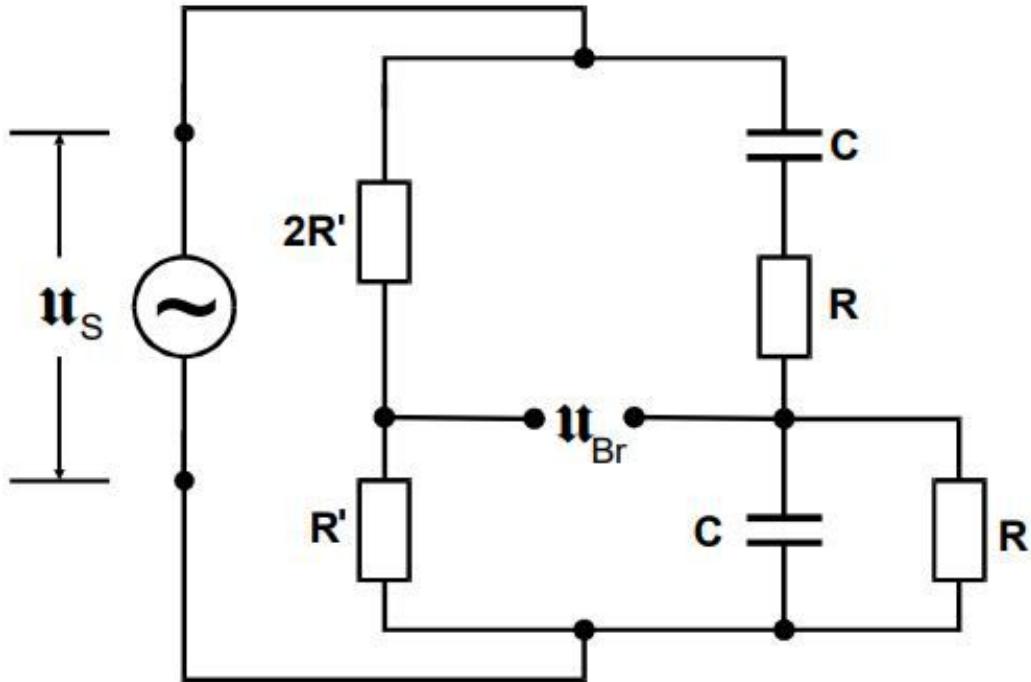


Abbildung 6: Aufbau einer Wien-Robinson-Brücke. [1]

## 2.6 Wien-Robinson-Brücke

Die Wien-Robinson-Brücke fungiert als ein elektronischer Filter. Der Abgleich ist hier nur bei einer bestimmten Frequenz  $\omega_0$  möglich, umliegende Frequenzen werden abgeschwächt. Sonstige Abgleichelemente wie bei den vorherigen Brücken sind nicht enthalten. Die Brückenspannung  $U_{Br}$  soll in Abhängigkeit von der Frequenz ermittelt werden.

Für den Betrag des Verhältnisses zwischen Brücken-  $U_{Br}$  und Speisespannung  $U_S$  gilt:

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 = \frac{(\omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2 - 1)^2}{9 \cdot \{(1 - \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2)^2 + 9 \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2\}}. \quad (12)$$

Bei

$$\omega_0 = \frac{1}{R \cdot C} \quad (13)$$

verschwindet die Brückenspannung. Wird nun

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (14)$$

in (12) eingeführt, folgt für das Verhältnis der Spannungen:

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9 \cdot \Omega^2}. \quad (15)$$

An (15) sieht man deutlich, dass Frequenzen in der Nähe von  $\omega_0$  auch stark abgeschwächt werden.

Mithilfe der Wien-Robinson-Brücke kann die Qualität eines Sinusgenerators gemessen werden. Bei der Frequenz  $\omega_0$  kommt es zu keiner Brückenspannung. Dennoch wird etwas gemessen, verantwortlich dafür sind Oberwellen. Diese sind bei einem realen Sinusgenerator nicht auszuschließen. Der Klirrfaktor beschreibt das Verhältnis dieser Oberwelle zur Grundwelle einer Sinusschwingung des Generators und damit die Qualität des Generators.

### 3 Durchführung

Alle im folgenden beschriebenen Schaltungen werden mit einer Sinus-Spannung der Frequenz 1000 Hz gespeist. Zum Ablesen der Brückenspannung ist ein Oszilloskop angebracht.

#### 3.1 Wheatstonesche Brücke

Aus den uns vorliegenden Bauteilen wird die Wheatstonesche Brücke aufgebaut. Da uns nur der Quotient  $\frac{R_3}{R_4}$  interessiert werden die Widerstände als Potentiometer mit einem Gesamtwiderstand von  $1\text{k}\Omega$ . Ein unbekannter Widerstand wird in die Schaltung in der Position von  $R_x$  eingebaut. Nun wird das Potentiometer so eingestellt, dass die Brückenspannung minimal wird, die Werte werden notiert. Zur möglichst genauen Bestimmung wechseln wir den Widerstand  $R_2$  2 mal aus und wiederholen den Vorgang. Nach dem gleichen Prinzip wird noch ein anderer Widerstand ausgemessen.

#### 3.2 Kapazitätsmessbrücke

Es wird eine Kapazitätsmessbrücke aufgebaut. Ein Potentiometer wird für die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  eingebaut, der  $R_2$  wird durch einen verstellbaren Widerstand realisiert. Das Referenzbauteil ist in diesem Fall der Kondensator  $C_2$ .

Zu Bestimmen ist eine Kapazität  $C_x$  mit dem Innenwiderstand  $R_x$ . Zu Beginn sollten die verstellbaren Widerstände auf null stehen, dann erhöht man die Widerstände langsam abwechselnd, bis die Brückenspannung minimal ist. Die Werte werden notiert und für eine andere Kapazität  $C_2$  wird der Messvorgang wiederholt.

#### 3.3 Induktivitätsmessbrücke

Die Induktivitätsmessbrücke wird nach ... aufgebaut. Das Potentiometer und der verstellbare Widerstand  $R_2$  bleiben, das Referenzbauteil wird eine Induktivität  $L_2$ . Mit dieser Brücke wollen wir eine Induktivität  $L_x$  mit dem Innenwiderstand  $R_x$  ausmessen. Dafür werden wieder die verstellbaren Widerstände abwechselnd erhöht, bis die Brückenspannung minimal wird. Da wir keine andere Induktivität haben, können wir  $L_2$  nicht austauschen und somit die unbekannte Induktivität nur durch eine Messung bestimmen. Anschließend wird der Messvorgang für eine weitere Induktivität wiederholt.

### 3.4 Wien-Robinson-Brücke

Es wird die Schaltung aufgebaut. Die Frequenz wird nun im Bereich von 20-30 000 Hz variiert. Es werden die Speisespannung  $U_S$  und die Brückenspannung  $U_{Br}$  bei verschiedenen Frequenzen gemessen und notiert.

## 4 Auswertung

Die genutzten Bauteile haben jeweils eine gewisse Toleranz aus denen sich auch ein Fehler berechnen lässt. Dieser Fehler ist im folgenden durch diese Formel entstanden:

$$F = x \cdot y$$

$$\frac{\Delta F}{F} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

Die einzelnen Bauteile haben eine Toleranz von 0,2 %. Die Toleranz des Potentiometers liegt bei 0,5 % , die der verstellbaren Widerstände bei 3 %.

### 4.1 Wheatstonesche Brücke

**Tabelle 1:** Die Messungen zur Bestimmung von unbekannten Widerständen.

Wert 11			Wert 12		
$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$
332	594	406	332	539	461
664	422	578	664	368	632
1000	327	673	1000	279	721

Es ergeben sich für die unbekannten Widerstände nach (5):

$$\text{für Wert 11: } R_x = (485,47 \pm 0,28) \Omega$$

$$\text{für Wert 12: } R_x = (387,26 \pm 0,38) \Omega$$

Die Fehler aus den Toleranzen errechnet sich zu:

$$\text{Wert 11: } \Delta R_x = 2,614 \Omega$$

$$\text{Wert 12: } \Delta R_x = 2,085 \Omega$$

### 4.2 Kapazitätsmessbrücke

Aus den zwei verschiedenen Messungen berechnen sich mit den Gleichungen (6) und (7) die Unbekannten zu:

$$R_x = (565,10 \pm 0,48) \Omega$$

$$C_x = (295,04 \pm 1,01) \text{nF}$$

**Tabelle 2:** Die Messwerte für Wert 8

$C_2 / \text{nF}$	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$
597	278	670	330
994	169	770	230

Die Fehler, die auf den Toleranzen der Bauteilen beruhen, ergeben sich zu:

$$\Delta R_x = 17,187 \Omega$$

$$\Delta C_x = 1,591 \text{nF}$$

### 4.3 Induktivitätsmessbrücke

Mit dieser Brücke haben wir die Bauteile Wert 16 und Wert 19 gemessen. Da nur eine Induktivität vorhanden war, konnten wir nur eine Messung pro Wert durchführen. Dabei

**Tabelle 3:** Die Messwerte aus der Induktivitätsmessbrücke

	$L_2 / \text{mH}$	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$
Wert 16	20,1	64	874	126
Wert 19	20,1	78	570	430

errechnet sich dann aus (8) und (9):

bei Wert 16 :

$$R_x = 443,94 \Omega$$

$$L_x = 139,42 \text{ mH}$$

bei Wert 19 :

$$R_x = 103,40 \Omega$$

$$L_x = 26,64 \text{ mH}$$

Das Potentiometer und der verstellbare Widerstand haben die gleiche Toleranz wie oben, 0,5 % und 3 %. Die Induktivität  $L_2$  hat eine Toleranz von 0,2 %. Damit ergibt sich :

bei Wert 16 :

$$\Delta R_x = 13,502 \Omega$$

$$\Delta L_x = 0,751 \text{ mH}$$

bei Wert 19 :

$$\Delta R_x = 3,144 \Omega$$

$$\Delta L_x = 0,143 \text{ mH}$$

### 4.4 Wien-Robinson-Brücke

Da wir keine zwei gleichgroßen Kapazitäten zur Verfügung hatten, haben wir zwei ähnliche genommen. Die Bauteile haben folgende Größen:

$$2R' = 664 \Omega$$

$$C_1 = 399 \text{nF}$$

$$R' = 332 \Omega$$

$$C_2 = 419,85 \text{nF}$$

$$R = 1 \text{k}\Omega$$

$$\Rightarrow C = 409,425 \text{nF}$$

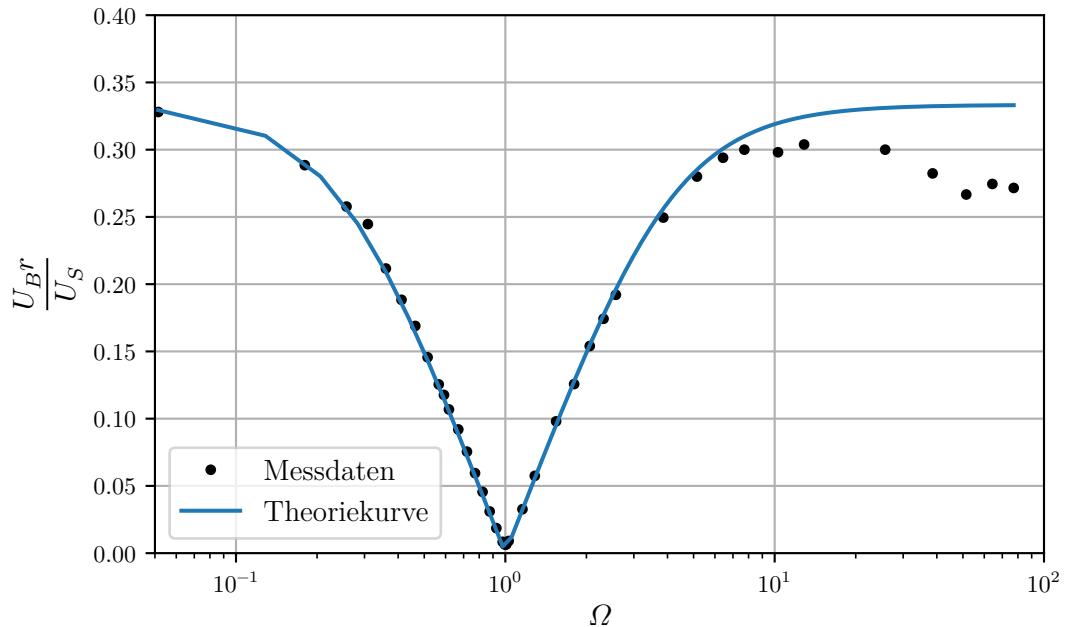
Die Brückenspannung  $U_{Br}$  sollte nach der Theorie für  $\nu_0$  sein Minimum erreichen. Diese Frequenz berechnet sich bei unserer Schaltung zu:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{R \cdot C} = \frac{1}{1 \cdot 10^3 \Omega \cdot 409,425 \cdot 10^{-9} F} \\ &= 2442,45 \text{ Hz} \\ \nu_0 &= \frac{\omega_0}{2\pi} = 388,73 \text{ Hz}\end{aligned}$$

Zum Vergleich mit der Theoriekurve, die sich aus (12) ergibt, wird der Quotient aus  $\frac{U_S}{U_{Br}}$  gebildet und gegen das Verhältnis  $\Omega = \frac{\nu}{\nu_0}$  aufgetragen.

Die Kurven in der Abbildung zeigen gerade um den Bereich der Frequenz  $\nu_0$  große Ähn-

**Abbildung 7:** Das Vergleich der Messdaten mit der Theoriekurve



lichkeit auf. Für höhere Frequenzen ab ca liegen die Messdaten unterhalb der Theoriekurve.

Zur Beurteilung des Generator wollen wir noch den Klirrfaktor bestimmen. Mit der Annahme, dass die Summe der Oberwellen nur aus der zweiten Oberwelle besteht, ergibt sich der Klirrfaktor zum Quotienten aus  $U_1$  und  $U_2$ . Es ist zu berücksichtigen, dass die Spannung der zweiten Oberwelle durch die Brückenschaltung geteilt wird.  $U_1$  ist in

**Tabelle 4:** Die Werte der frequenzabhängigen Messung der Wien-Robinson-Brücke

$\nu / \text{Hz}$	$U_S / \text{V}$	$U_{\text{Br}} / \text{V}$
20	10,0	3,28
70	10,4	3,00
100	10,4	2,68
120	10,3	2,52
140	10,3	2,18
160	10,3	1,94
180	10,3	1,74
200	10,3	1,50
220	10,2	1,28
230	10,2	1,20
240	10,2	1,09
260	10,0	0,92
280	10,2	0,77
300	10,0	0,595
320	10,1	0,46
340	10,0	0,31
360	10,1	0,188
380	10,1	0,085
387	10,0	0,0645
390	10,0	0,0645
392	10,0	0,0655
400	9,8	0,089
450	10,1	0,33
500	10,0	0,575
600	10,0	0,98
700	10,1	1,27
800	10,0	1,54
900	10,1	1,76
1000	10,1	1,94
1500	10,1	2,52
2000	10,0	2,8
2500	10,0	2,94
3000	10,2	3,06
4000	10,4	3,10
5000	10,4	3,16
10 000	10,4	3,12
15 000	10,2	2,88
20 000	9,3	2,48
25 000	7,65	2,1
30 000	6,15	1,67

diesem Fall die Speisespannung  $U_S$  bei  $\nu_0$ .

$$U_1 = 20,0 \text{ V}$$

$$U_2 = \frac{U_{\text{Br}}}{\sqrt{\frac{(2^2-1)^2}{9 \cdot ((1-2^2)^2 + 9 \cdot 2^2)}}}$$

$$= \frac{0,129 \text{ V}}{0,1491} = 0,8654 \text{ V}$$

Für den Klirrfaktor folgt somit:

$$\Rightarrow k = \frac{U_2}{U_1} = 4,3268 \cdot 10^{-2}$$

## 5 Diskussion

Die Fehler der Messwerte sind größtenteils nur aus den Toleranzen der Bauteile errechnet und liegen dort im angemessenen Bereich. Eine Verbesserung ist nur über neue Bauteile mit geringeren Toleranzen möglich. Da wir nicht so viele Referenzbauteile mit bekanntem Wert zur Verfügung hatten, konnten wir nur wenige Messungen derselben zu bestimmenden Größe machen, teilweise sogar nur eine. Daher sind die Fehler der Mittelwerte teilweise recht groß, wie bei der Kapazität in 4.2.

Die Induktivitäten sollten eigentlich mit der Induktivitätsbrücke und der Maxwellbrücke ausgewertet werden. Jedoch hat die Maxwellbrücke auch nach wiederholtem Aufbau nicht funktioniert. Somit haben wir nur eine Messung zur Bestimmung durchführen können.

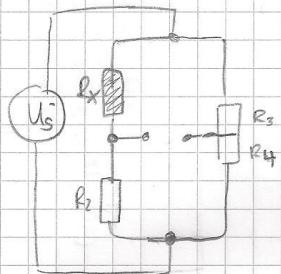
Die Wien-Robinson-Brücke konnten wir nur mit zwei ähnlichen Kondensatoren aufbauen, da wir nur diese zur Verfügung hatten. Die entnommenen Messdaten liegen doch sehr gut auf der Theoriekurve, doch für hohe Frequenzen weichen die Messdaten ab. Der Klirrfaktor liegt auch in einem sehr guten Bereich, was sich auch schon anhand des Diagramms 7 vermuten lies.

## 6 Anhang

Bei der Wien-Robinson-Brücke wurde die doppelte Amplitude der Spannung gemessen und notiert.

Abbildung 8: Kopie der Originalmessdaten

a) Wheatstonesche Brückenschaltung



Wert 12  $f = 1 \text{ kHz}$

$R_2$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$	$R_x / \Omega$
1 k $\Omega$	279	721	386,96
664 $\Omega$	368	632	386,6329
332 $\Omega$	539	461	388,1735

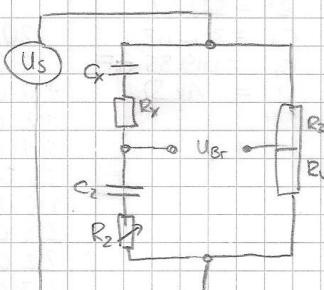
Wert 11

$R_2$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$	$R_x / \Omega$
332 $\Omega$	594	406 <del>82</del>	485,73
664 $\Omega$	422	578	484,79
1 k $\Omega$	327	673	485,88

b) Kapazitätsmessbrücke

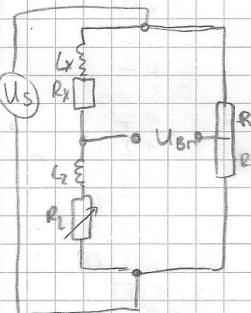
Wert 8  $f = 1 \text{ kHz}$

$C_2 / \text{nF}$	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$
994,1	169	770	230
597	278	670	330



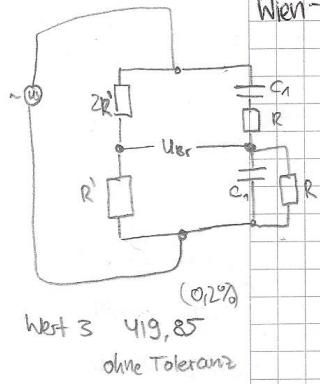
$R_x / \Omega$	$C_x / \text{nF}$
565,78	296,91
564,42	294,04

c) Induktivitätsmessbrücke



Wert 16

$L_2 / \text{mH}$	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$	$R_x / \Omega$	$L_x / \text{mH}$
20,1	64	874	126	443,94	139,42
20,1	78	570	430	103,90	26,64



Wien-Robinson-Brücke:  $20 \leq V \leq 30.000 \text{ Hz}$

$V/\text{Hz}$	$U_s$	$U_{B_r}^{(2A)}$
20	20,0	6,56
70	20,8	6,0
100	20,8	5,36
120	20,6	5,04
140	20,6	4,36
160	20,6	3,88
180	20,6	3,48
200	20,6	3,00
220	20,4	2,56
230	20,4	2,40
240	20,4	2,18
260	20,0	1,84
280	20,4	1,54
300	20,0	1,19
320	20,2	0,92
340	20,0	0,62
360	20,2	0,376
380	20,2	0,17
387	20,0	0,129
390	20,0	0,129
392	20,0	0,131
400	19,6	0,178
450	20,2	0,660
500	20,0	1,15
600	20,0	1,96
700	20,2	2,54
800	20,0	3,08
900	20,2	3,52
1000	20,2	3,88
1500	20,2	5,04
2000	20,0	5,60
2500	20,0	5,88
3000	20,4	6,12

$V/\text{Hz}$	$U_s$	$U_{B_r}^{(2A)}$
4000	20,8	6,20
5000	20,8	6,32
10 000	20,8	6,24
15 000	20,4	5,76
20 000	18,6	4,96
25 000	15,3	4,20
30 000	12,3	3,34

## Literatur

- [1] TU Dortmund Fakultät Physik. *Versuchsanleitung zum Experiment V302 - Brückenschaltungen*. 2020.