

V353

Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Sonia Chander

sonia.chander@tu-dortmund.de

Jana Schlücking

jana.schluecking@tu-dortmund.de

Durchführung: 11.05.2021

Abgabe: 18.05.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Allgemeine Relaxationsgleichung	3
2.2	Entlade- und Aufladevorgang eines RC-Kreises	3
2.3	Relaxation bei periodischer Auslenkung aus Gleichgewichtslage	4
2.4	RC-Kreis als Integrator	6
3	Durchführung	6
3.1	Bestimmung der Zeitkonstante durch einen Ent- oder Aufladevorgang . .	6
3.2	Bestimmung der Zeitkonstante durch die Amplitude	7
3.3	Bestimmung der Zeitkonstante durch die Phasenverschiebung	8
4	Auswertung	8
4.1	Bestimmung der Zeitkonstante durch den Entladevorgang	8
4.2	Bestimmung der Zeitkonstante durch die Amplitude	9
4.3	Bestimmung der Zeitkonstante durch die Phasenverschiebung	9
4.4	RC-Kreis als Integrator	12
5	Diskussion	14
6	Anhang	14
	Literatur	16

1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden Relaxationsphänomene am Beispiel eines RC -Kreises näher betrachtet. Hierbei wird die Relaxationszeitkonstante des RC -Kreises einmal über die Betrachtung eines Ent- oder Aufladevorgangs eines Kondensators über einen Widerstand, einmal durch die Veränderung der Amplitude bei hohen Frequenzen und einmal durch die auftretende Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Speisespannung bei hohen Frequenzen ermittelt.

2 Theorie

2.1 Allgemeine Relaxationsgleichung

Relaxationsphänomene treten auf, wenn ein System aus seinem Ausgangszustand herausgenommen wird und sich diesem nicht-oszillatorisch wieder annähert. Wird die physikalische Größe A betrachtet, gilt:

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)] \quad (1)$$

Daraus folgt

$$\int_{A(0)}^{A(t)} \frac{dA'}{A' - A(\infty)} = \int_0^t c dt' \Rightarrow \ln \frac{A(t) - A(\infty)}{A(0) - A(\infty)} = ct,$$

sodass sich als Funktion schließlich

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)]e^{ct}$$

ergibt. Hier muss $c < 0$ gelten, da A sonst nicht beschränkt sein würde. Die Relaxationszeitkonstante ist durch den Ausdruck $1/c$ gegeben.

2.2 Entlade- und Aufladevorgang eines RC -Kreises

Ein RC -Kreis ist ein Schaltkreis bestehend aus einem Widerstand R und einem Kondensator mit der Kapazität C . Sein Auf- und Entladevorgang ist ein gutes Beispiel für auftretende Relaxationsvorgänge. In der Abbildung 1 ist ein Schaltkreis zu sehen, welcher zum Auf- und Entladen eines Kondensators über einen Widerstand geeignet ist.

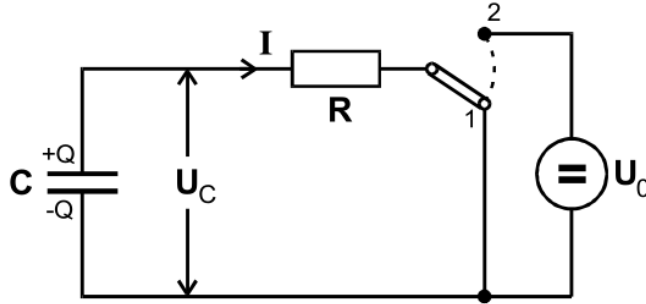


Abbildung 1: Der Schaltkreis zum Aufladen (2) und Entladen (1) eines Kondensators über einen Widerstand.[1]

Unter der Annahme, dass sich auf den Platten des Kondensators der Kapazität C die Ladung Q befindet, lässt sich eine Spannung

$$U_C = \frac{Q}{C}$$

messen. Für diese gilt nach dem Ohm'schen Gesetz $I = \frac{U_C}{R}$ und der Relation $\frac{dQ}{dt} = -I$:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q(t)$$

Diese Gleichung zeigt große Ähnlichkeit zu der allgemeinen Relaxationsgleichung (1) auf. Es gilt $Q(\infty) = 0$, da der Kondensator nach unendlicher Zeit vollständig entladen ist. Somit kann für den Entladevorgang direkt gefolgert werden:

$$Q(t) = Q(0)\exp(-t/RC) \quad (2)$$

Analog kann für den Aufladevorgang die Gleichung

$$Q(t) = CU_0(1 - \exp(-t/RC))$$

hergeleitet werden, wobei die Speisespannung mit U_0 bezeichnet wird und für die Ladung $Q(0) = 0$ und $Q(\infty) = CU_0$ gilt. Die Zeitkonstante des Relaxationsvorganges ist in diesem Fall gegeben durch RC . Sie gibt den Zeitraum an, in dem sich hier die Ladung auf dem Kondensator um den Faktor $1/e$ verändert.

2.3 Relaxation bei periodischer Auslenkung aus Gleichgewichtslage

Auch im weiteren wird der RC-Kreis betrachtet, wobei in dem Schaltkreis in Abbildung 2 das Vorgehen klarer hervorgeht. Es ist zu erwarten, dass es bei einer Speisespannung der Form $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ mit steigender Frequenz zu einer Amplitudenabnahme und Phasenverschiebung der Kondensatorspannung kommt.

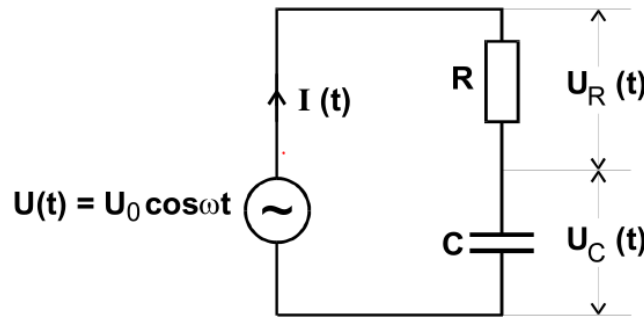


Abbildung 2: Ein Schaltkreis mit einer Reihenschaltung eines Kondensator und eines Widerstandes gespeist von einer sinus-förmigen Spannung. [1]

Für die Kondensatorspannung U_C wird folgender Ansatz gemacht:

$$U_C = A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

Werden die Reaktionen $U_R = I \cdot R$ (Ohm'sches Gesetz) und $I = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dU_C}{dt}$ in das zweite Kirchhof'sche Gesetz (Maschenregel)

$$U(t) = U_R + U_C$$

eingesetzt, so folgt die Gleichung:

$$U_0 \cos(\omega t) = -A\omega RC \sin(\omega t + \varphi) + A(\omega) \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

Da diese Gleichung für alle t gelten muss, wird $\omega t = \frac{\pi}{2}$ gesetzt. Nun werden $\sin(\frac{\pi}{2} + \varphi) = \cos(\varphi)$ und $\cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) = -\sin(\varphi)$ genutzt. Somit ergibt sich für die Gleichung (3):

$$0 = -\omega RC \cos(\varphi) - \sin(\varphi)$$

Für die Phasenverschiebung lässt sich nun die Abhängigkeit

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (4)$$

herleiten. Anhand der Gleichung (4) ist zu erkennen, dass für eine kleine Frequenz f , welche im Zusammenhang $\omega = 2\pi f$ mit der Kreisfrequenz ω steht, die Phasenverschiebung φ sehr gering ist und für sehr hohe Frequenzen die Grenzphasenverschiebung von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ angenähert wird. Trifft die Kreisfrequenz genau $\omega = \frac{1}{RC}$, so ergibt sich eine Phasenverschiebung von $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Um einen Ausdruck für die Veränderung der Amplitude zu bekommen, wird der Ausdruck $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2}$ gesetzt und in die Gleichung (3) eingesetzt. Dies ist möglich, da die Gleichung (3) für alle Werte von t gelten muss. Es ergibt sich:

$$U_0 \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = -A\omega RC \iff A(\omega) = -\frac{\sin(\varphi)}{\omega RC} U_0 \quad (5)$$

Mithilfe des trigonometrischen Pythagoras lässt sich aus der Formel (4)

$$\sin(\varphi) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

herleiten. Somit lautet der Ausdruck zur Veränderung der Amplitude:

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (6)$$

Es ist auffällig, dass kleine Frequenzen die Amplitude recht klein und unverändert lassen, während für sehr hohe Frequenzen die Amplitude gegen Null geht. Daher werden solche RC -Kreise als Tiefpässe eingesetzt, wobei hier kritisiert wird, dass die Amplitude nur mit $\frac{1}{\omega}$ gegen Null geht.

2.4 RC-Kreis als Integrator

Es ist möglich, dass eine zeitlich veränderliche angelegte Spannung in einem RC -Kreis integriert wird. Mithilfe des Kirchhoff'schen Gesetz, dem Ohm'schen Gesetz und der Relation $\frac{dQ}{dt} = I$, kann folgende Formel aufgestellt werden:

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) = I(t)R + U_C(t) = RC \cdot \frac{dU_C}{dt} + U_C$$

Mit den Ahnnahmen, dass $\omega \gg \frac{1}{RC}$, $|U_C| \ll |U_R|$ und $|U_C| \ll |U|$ gilt:

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt}$$

Somit ist das Integral

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^{t'} U(t') dt'$$

berechenbar.

3 Durchführung

Der Versuchsaufbau vor Ort ist in der Abbildung 3 zu sehen. Dort befindet sich der Zweistrahloszillograph oberhalb des Generators. Der RC -Kreis ist in dem Generator integriert.

3.1 Bestimmung der Zeitkonstante durch einen Ent- oder Aufladevorgang

Zuerst wird eine Schaltung gemäß der Abbildung 4 aufgebaut. Es handelt sich dabei um einen RC -Kreis, also eine Reihenschaltung eines Widerstandes und eines Kondensators. Der Kreis wird mit einer rechteckförmigen Spannung gespeist, und die Kondensatorspannung wird abgegriffen und auf einem Oszillograph sichtbar gemacht.

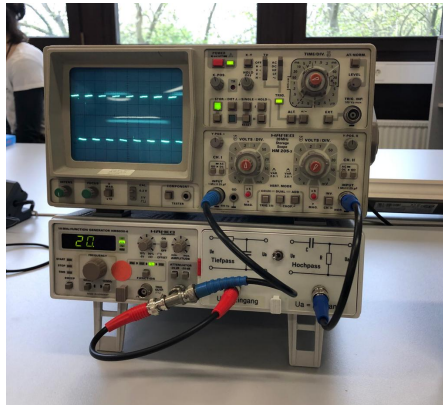


Abbildung 3: Der Versuchsaufbau vor Ort.

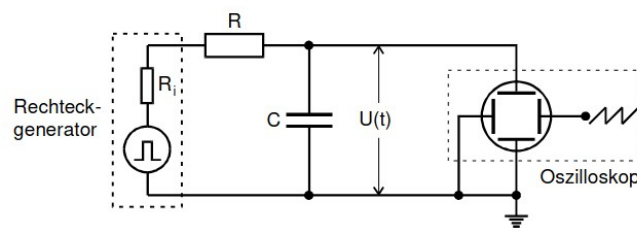


Abbildung 4: Die Schaltung zur Messung eines Ent- oder Aufladevorgangs. [1]

Das Oszilloskop ist so einzustellen, dass sich ein einzelner Ent- oder Aufladevorgang gut ablesen lässt, wie es in der Abbildung 5 zu sehen ist. Von einer solchen Kurve werden mehrere Punkte von dem Oszillographenschirm abgelesen und notiert.

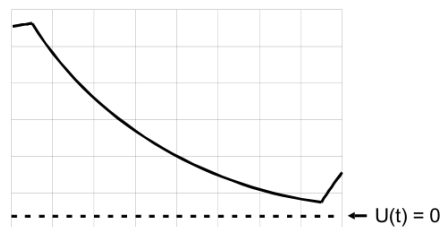


Abbildung 5: Das Beispiel eines auf einem Oszilloskop sichtbar gemachtem Entladevorgang eines Kondensators über einen Widerstand. [1]

3.2 Bestimmung der Zeitkonstante durch die Amplitude

Für diese Messung wird auch der Schaltkreis gemäß Abbildung 4 genutzt, jedoch wird nun mit einer Sinusspannung gespeist. Nun wird die Kondensatorspannung wieder auf dem Schirm des Oszillograph angezeigt und ihre Amplitude abgelesen. Die Frequenz der Sinusspannung wird von 10 Hz bis 10 kHz variiert.

3.3 Bestimmung der Zeitkonstante durch die Phasenverschiebung

Zur Messung der Zeitkonstante durch die Phasenverschiebung zwischen Speise- und Kondensatorspannung, wird ein Schaltkreis nach der Abbildung 6 aufgebaut.

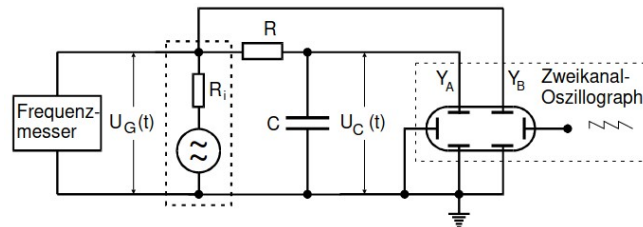


Abbildung 6: Ein Schaltkreis zur Ermittlung der Phasendifferenz zwischen Kondensator- und Speisespannung mit Hilfe eines Zweikanal-Oszilloskop. [1]

Es handelt sich hierbei wiederum um einen RC -Kreis, welche mit einer Sinusspannung gespeist wird. Nun werden jedoch die Kondensator- und die Speisespannung auf dem Oszillographenschirm angezeigt. Es sollte sich ein ähnliches Bild zu Abbildung 7 ergeben; die Werte für a und b werden notiert, wobei b der Schwingungsdauer entspricht. Die Phasenverschiebung ist gegeben durch:

$$\varphi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \quad (7)$$

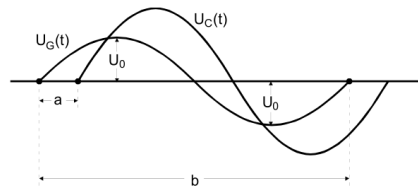


Abbildung 7: Messung der Phasenverschiebung zwischen zwei Spannungen mit dem Zweistrahloszillographen.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Zeitkonstante durch den Entladevorgang

Die Entladungskurve wurde betrachtet. Die aufgenommenen Messwerte sind in Tabelle 1 zu finden. Diese werden in ein halblogarithmisches Diagramm dargestellt, siehe Abbildung 8. Dabei werden die letzten beiden Wertepaare aus Tabelle 1 nicht mitaufgezeichnet, da der Logarithmus für 0 nicht definiert ist. Mithilfe von python wird eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt. Über die Steigung wird die Zeitkonstante RC ermittelt. Dafür wurde die Gleichung (2) betrachtet. Die Ausgleichsgerade hat somit die Form:

$$\ln U_C = RC \cdot t + b$$

Aus der Ausgleichsrechnung folgt:

$$RC = (1.05 \pm 0.04) \cdot 10^{-3}\text{s},$$

$$b = (6.24 \pm 0.14) \cdot 10^{-3}\text{s}.$$

Tabelle 1: Aufgenommene Messwerte: Die Kondensatorspannung U_C in Abhängigkeit von der Zeit. Die letzten beiden Wertepaare wurden nicht in das halblogarithmische Diagramm aufgenommen.

$t[\text{ms}]$	$U_C[\text{V}]$
0	6.2
0.2	5.4
0.4	4.0
0.6	3.6
0.8	3.0
1.0	2.0
1.2	2.2
1.6	1.5
1.8	1.0
2.0	0.9
2.4	0.7
2.8	0.5
3.2	0.4
4.0	0.1

4.2 Bestimmung der Zeitkonstante durch die Amplitude

Nach dem Anlegen einer Sinusspannung, wird die Amplitude U_A in Abhängigkeit von der Frequenz f aufgenommen. Die Messpaare sind in Tabelle 2 zu finden. Die Werte werden in ein halblogarithmisches Diagramm eingetragen, siehe Abbildung 9 und eine nicht-lineare Ausgleichsrechnung wird nach Gleichung (6) durchgeführt. Durch eine einmalige Messung ist $U_0 = 6,2\text{ V}$.

Aus dieser Rechnung ergibt sich für

$$RC = (-5.92 \pm 1.35) \cdot 10^{-3}\text{s}.$$

4.3 Bestimmung der Zeitkonstante durch die Phasenverschiebung

Die nach Unterabschnitt 3.3 aufgenommenen Messwerte sind in Tabelle 3 zu finden. Mithilfe der Gleichung (7) wird die Phasenverschiebung φ ermittelt, welche auch in Tabelle 3 zu sehen ist. Es folgt eine Aufnahme der Phasenverschiebung in Abhängigkeit

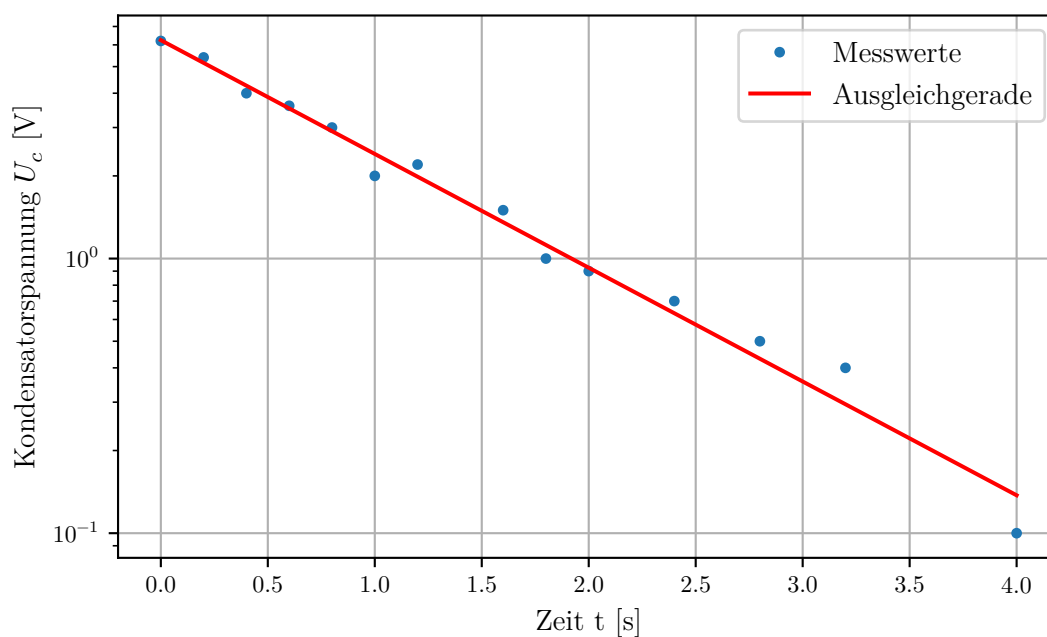


Abbildung 8: Die Kondensatorsspannung U_C in Abhängigkeit zur Zeit t und die dazugehörige Ausgleichsgerade.

Tabelle 2: Aufgenommene Messwerte: Die Kondensatorsspannungsamplitude U_A in Abhängigkeit der Frequenz f .

f [Hz]	U_A [V]
10.41	3.20
30.07	3.10
50.00	3.00
100.00	2.55
150.00	2.15
200.10	1.80
300.00	1.40
500.00	0.90
750.00	0.65
1000.00	0.50
1500.00	0.34
2001.00	0.26
3005.00	0.17
5003.00	0.105
7500.00	0.072
10000.00	0.054

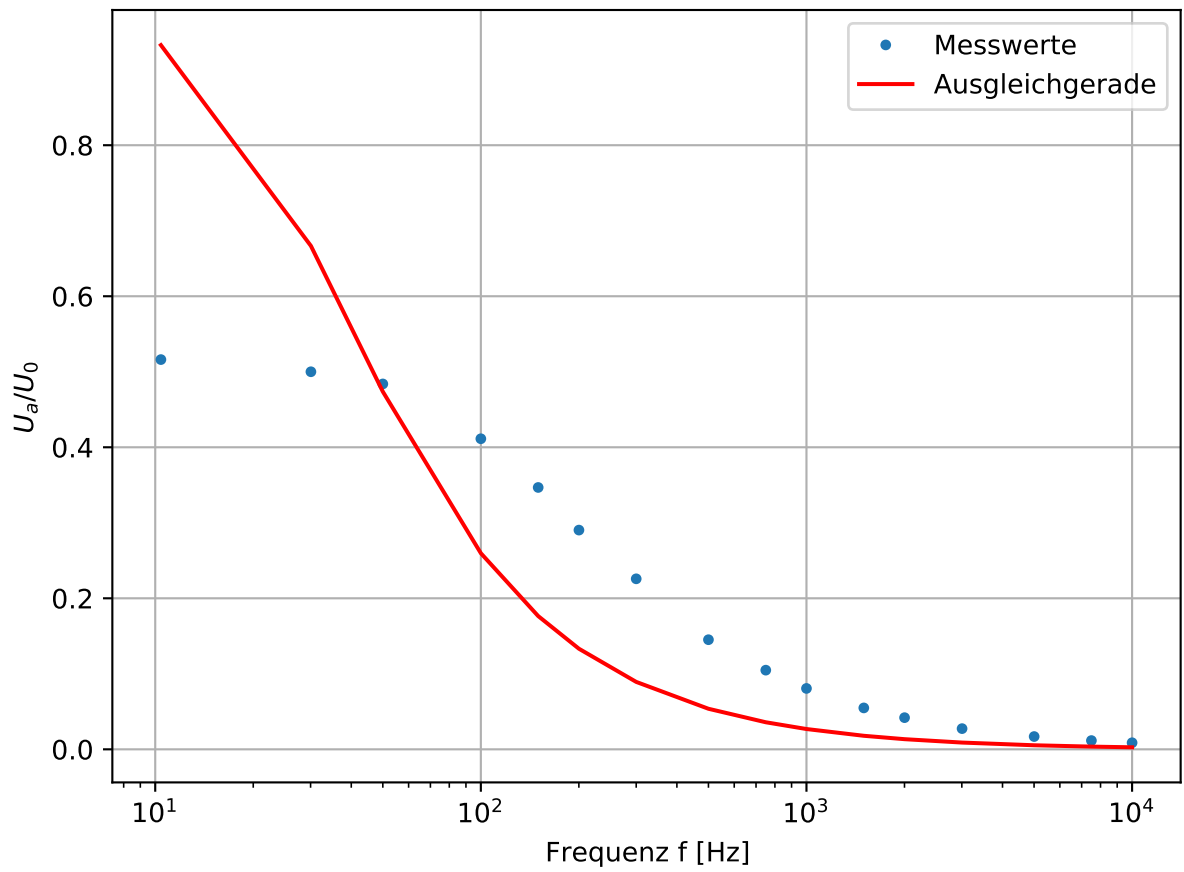


Abbildung 9: Die Kondensatorsspannungsamplitude U_A in Abhängigkeit der Frequenz f und die dazugehörige Ausgleichskurve.

von der Frequenz f in einem halblogarithmischen Diagramm, siehe Abbildung 10. Durch eine Ausgleichsrechnung nach Gleichung (4) folgt für die Zeitkonstante

$$RC = (-0.92 \pm 0.14) \cdot 10^{-3} \text{s}.$$

Tabelle 3: Aufgenommene Messwerte: Der zeitliche Abstand a und die Wellenlänge b in Abhängigkeit der Frequenz f , sowie die daraus resultierende Phasenverschiebung φ .

$f[\text{Hz}]$	$a[\text{ms}]$	$b[\text{ms}]$	φ
10.41	1.000	98.00	0.06
30.07	1.000	33.00	0.19
50.00	1.000	19.50	0.32
100.00	0.800	10.00	0.50
150.00	0.800	6.80	0.74
200.10	0.700	5.00	0.88
300.00	0.500	3.30	0.95
500.00	0.400	2.00	1.26
750.00	0.280	1.30	1.35
1000.00	0.200	1.00	1.26
1500.00	0.160	0.66	1.52
2001.00	0.110	0.49	1.41
3005.00	0.100	0.32	1.96
5003.00	0.045	0.20	1.41
7500.00	0.030	0.13	1.45
10000.00	0.030	0.10	1.88

4.4 RC-Kreis als Integrator

Mithilfe der Gleichung (5) soll die Relativamplitude $A(\omega)/U_0$ der Phase φ in ein Polarkoordinatensystem eingetragen werden. Dafür wird die Zeitkonstante RC aus Unterabschnitt 4.3 verwendet. In der Abbildung 11 werden zusätzlich einige Messwerte eingetragen.

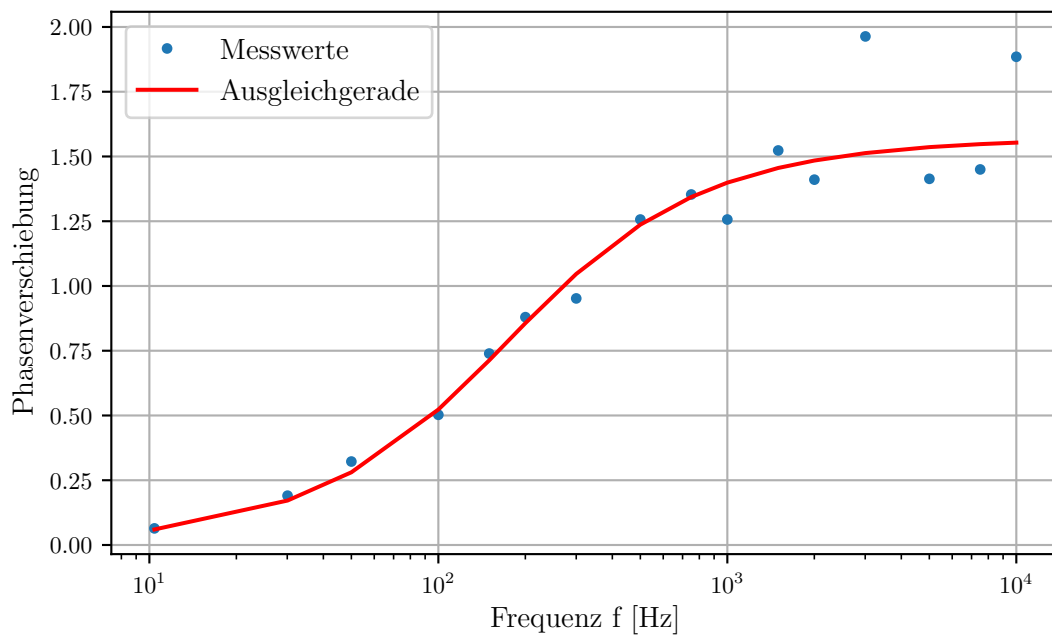


Abbildung 10: Die Phasenverschiebung φ in Abhängigkeit von der Frequenz f und die dazugehörige Ausgleichskurve.

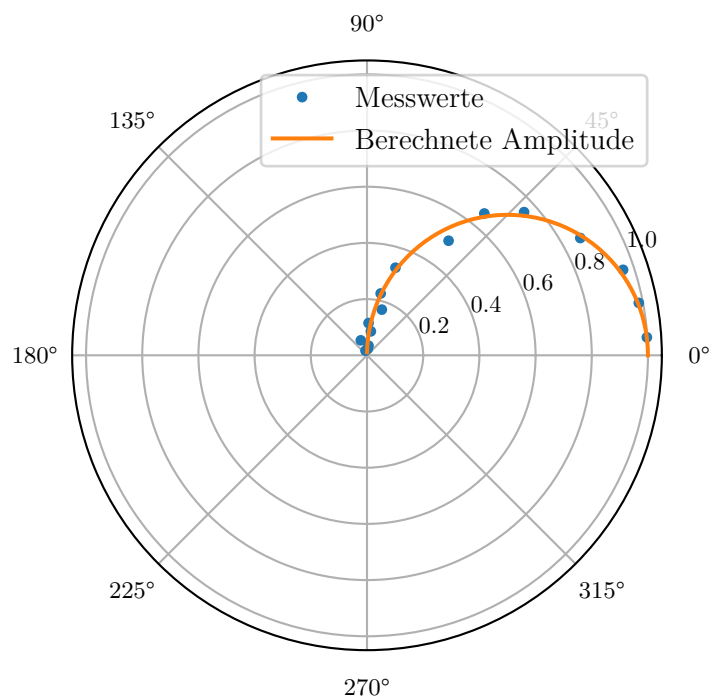


Abbildung 11: Die Relativamplitude, sowie einige Messwerte.

5 Diskussion

Die Versuchsdurchführung verlief ohne größere Probleme. Das Oszilloskop zeigte bei sehr kleinen Frequenzen kein festes Bild. Das Ablesen der Amplitude und der Abstände wurde dadurch erschwert, was die Ergebnisse für die Zeitkonstante RC in den entsprechenden Methoden beeinflussen kann.

Die bestimmten Zeitkonstanten sind hier noch einmal aufgestellt:

Methode Entladevorgang:	$RC = (1.05 \pm 0.04) \cdot 10^{-3}\text{s},$
Methode Amplitude:	$RC = (-5.92 \pm 1.35) \cdot 10^{-3}\text{s},$
Methode Phasenverschiebung:	$RC = (-0.92 \pm 0.14) \cdot 10^{-3}\text{s}.$

Auffällig ist das Ergebnis aus der Amplitudenmethode. Während die Ergebnisse aus der ersten und dritten Methode eine Abweichung von 12% haben, ist der ermittelte RC Wert deutlich größer. Auch die Ausgleichsrechnung zu den Messwerten der Amplitudenmethode, verläuft sehr ungenau. Bei kleinen Frequenzen sind die aufgenommenen Messwerte weit unter der Ausgleichskurve, was auf Fehler beim Ablesen der Werte deutet. Wie bereits genannt, stellten die kleinen Frequenzen im Zehnerbereich größere Probleme für die Anzeige des Oszilloskops dar.

Die Werte aus der ersten und dritten Methode sind zufriedenstellend, sie weisen keine größeren Abweichungen voneinander auf. Auch die Ausgleichsrechnung liegt sehr genau an den Messwerten. Beide Methoden erweisen sich somit als gute und auch relativ fehlerresistente Vorgänge zur Bestimmung der Zeitkonstante.

Auch der RC -Kreis als Integrator zeigt gute Ergebnisse. Die aufgenommenen Messwerte liegen sehr nah an der Theoriekurve, die mit der Zeitkonstante aus der dritten Methode bestimmt wurde. Das deutet zusätzlich daraufhin, dass dieser ermittelte RC -Wert und somit der aus der ersten Methode brauchbare Ergebnisse sind.

6 Anhang

Relaxation des RC-Kreises

Frequenz: 68,3 Hz

Einstellungen: Time/Div = 2ms
Volts/Div = 1V

a)			b)		c)	
t	$U[V]$	$f[Hz]$	$U_a[V]$	$a[ms]$	$b[ms]$	
0	6,2	10,41	3,20	1	898	
0,4	3	30,04	3,10	1	33	
0,5	2	50,00	3,00	1	19,5	
0,9	1	100,00	2,55	0,8	10	
2	0,1	150,00	2,15	0,8	6,8	
3	0	200,1	1,80	0,7	5	
3,6	0	300,0	1,40	0,5	3,3	
1	0,9	500,0	0,90	0,40	2	
0,2	4	750,0	0,65	0,28	1,3	
0,6	2,2	1000,0	0,50	0,20	1	
1,2	0,7	1500	0,34	0,16	0,66	
1,4	0,5	2001	0,26	0,11	0,49	
1,6	0,4	3005	0,17	0,1	0,32	
0,1	5,4	5003	0,105	0,045	0,2	
0,3	3,6	7500	0,072	0,03	0,13	
0,8	1,5	10000	0,054	0,03	0,10	

Abbildung 12: Die Originaldaten von der Versuchsdurchführung.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *V353 Relaxationsverhalten eines RC-Kreise*. 2021.