

Distribuição normal

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Em probabilidade e estatística, a **distribuição normal** é uma das distribuições de probabilidade mais utilizadas para modelar fenômenos naturais. Isso se deve ao fato de que um grande número de fenômenos naturais apresenta sua distribuição de probabilidade tão proximamente normal, que a ela pode ser com sucesso referida, e, portanto, com adequado acerto por ela representada como se normal fosse^[1]. A distribuição normal é ligada a vários conceitos matemáticos como movimento browniano,^[2] ruído branco,^[3] entre outros. A distribuição normal também é chamada distribuição gaussiana, distribuição de Gauss ou distribuição de Laplace–Gauss, em referência aos matemáticos, físicos e astrônomos francês Pierre–Simon Laplace (1749 – 1827) e alemão Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855).^[4]

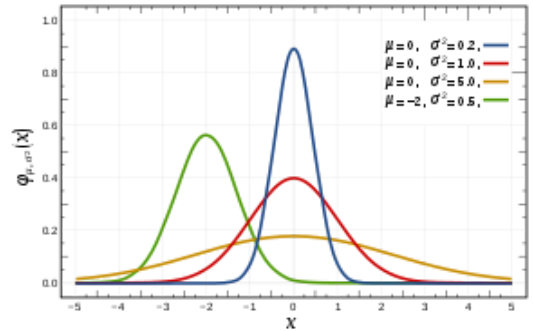
Em termos mais formais, a distribuição normal é uma distribuição de probabilidade absolutamente contínua parametrizada pela sua esperança matemática (número real μ) e desvio padrão (número real positivo σ). A densidade de probabilidade da distribuição normal é denotada como

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

A distribuição normal com média nula e desvio padrão unitário é chamada de distribuição normal centrada e reduzida ou de distribuição normal padrão. Quando uma variável aleatória X segue uma distribuição normal, ela é chamada de gaussiana ou de normal. Comumente é usada a notação com a variância σ^2 quando $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. A curva de densidade é chamada de curva de Gauss ou de curva em forma de sino.^[5]

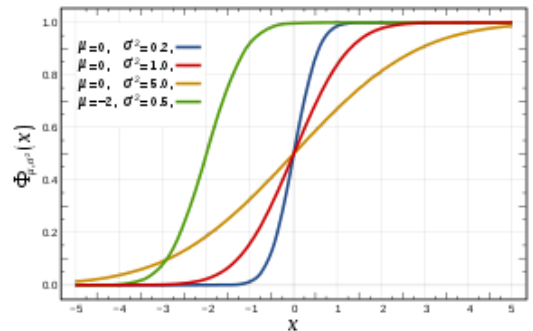
O papel central da distribuição normal decorre do fato de ser o limite de um grande número de distribuições de probabilidade como mostra o teorema central do limite, o qual permite estudar probabilisticamente a média das variáveis independentes de uma amostra aleatória simples de tamanho grande n .^[6] A distribuição normal corresponde ao comportamento do efeito agregado de experiências aleatórias independentes e semelhantes em certas circunstâncias quando o número de experiências é muito alto.^[7] Com esta propriedade, a distribuição normal pode aproximar-se da distribuição de efeito agregado de outras distribuições e modelar vários estudos científicos como erros de medição ou testes estatísticos com as tabelas de distribuição normal.^[8]

Distribuição Normal



Densidade de probabilidade

A cor vermelha representa a função φ de densidade de probabilidade da distribuição normal padrão $\sim N(0,1)$



Função de distribuição acumulada

A cor vermelha representa a função Φ de distribuição acumulada da distribuição normal padrão $\sim N(0,1)$

Parâmetros	μ , média; $\sigma^2 > 0$, variância
Suporte	\mathbb{R}
f.d.p.	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
f.d.a.	$\frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)$
Média	μ
Mediana	μ
Moda	μ
Variância	σ^2
Obliquidade	0
Curtose	0
Entropia	$\ln(\sigma\sqrt{2\pi}e)$

Índice

Histórico

Distribuição normal padrão

- Propriedades da distribuição normal padrão
- Definição pela função densidade
- Definição pela função distribuição
- Definição pela função característica
- Definição pela função geradora de momentos

Distribuição normal geral

- Definição
- Observações

Propriedades

- Outras caracterizações
- Momentos
 - Cálculo
 - Função geradora de momentos
 - Assimetria e curtose
- Teoremas da convergência
- Estabilidade e família normal
 - Família normal
 - Estabilidade por linearidade
 - Estabilidade pela média
 - Convexidade
- Entropia e quantidade de informação
 - Entropia de Shannon
 - Quantidade de informação de Fisher
 - Distancia entre distribuições
- Aproximação da função de distribuição
- Tabelas numéricas e cálculos
 - Intervalos normais e intervalos de confiança

Ligações com outras distribuições

- Distribuições usuais
 - Distribuições unidimensionais
 - Distribuições multidimensionais
- Distribuições normais generalizadas
- Construções a partir da distribuição normal
 - Misturando as distribuições
 - Generalidades

Utilizações

- Balística
- Quociente de inteligência
- Anatomia humana
- Sinais e medições físicas
- Economia
- Matemática

Testes e estimativas

- Critérios de normalidade
- Testes de normalidade

Função

Geradora de

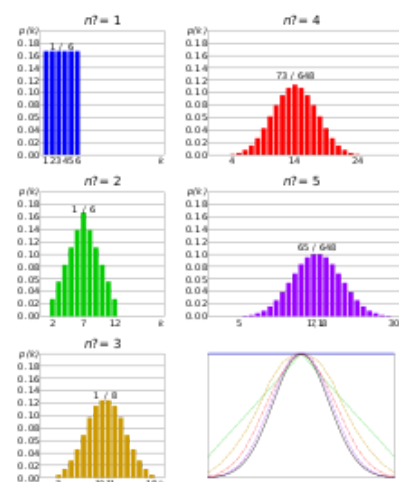
Momentos

$$\exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Função

Característica

$$\exp\left(\mu i t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$



Os diagramas em barras representam as distribuições discretas da soma de 1, 2, 3, 4 ou 5 dados. A curva preta representa a densidade da distribuição normal como o limite dos gráficos de barras.

Estimativa dos parâmetros

Estimativa da média μ quando o desvio padrão é conhecido

Estimativa da média μ quando o desvio padrão não é conhecido

Estimativa do desvio padrão σ quando a média μ é desconhecida

Simulação

Abordagens para evitar

Abordagens eficientes

Implementação em software de computação

Planilhas

Linguagem de programação estatística S

Matlab / Octave

Scilab

Homenagem

Referências

Histórico

Uma das primeiras aparições da distribuição normal ocorreu em 1733 com Abraham de Moivre com o aprofundamento do estudo de fatorial $n!$ quando considerado um jogo de cara ou coroa.^[9] Em 1756, ele publicou *A Doutrina das Chances*, em que a distribuição normal aparece como o limite de uma distribuição binomial, o que originaria o teorema central do limite.^[10]

Em 1777, Pierre-Simon Laplace retomou o trabalho e obteve uma boa aproximação do erro entre a distribuição normal e a distribuição binomial em razão da função gama de Euler.^[9] Em seu livro publicado em 1781, Laplace publica uma primeira tabela da distribuição normal. Em 1809, Carl Friedrich Gauss assimila os erros da observação na astronomia à curva, erros da densidade da distribuição normal.^[10]

A distribuição normal é totalmente definida quando o primeiro teorema central do limite (chamado então teorema de Laplace) é elaborado por Laplace em 1821.^[10] O nome normal é dado por Henri Poincaré no fim do século XIX.^[11] A distribuição normal também pode ser chamada de distribuição de Gauss ou distribuição de Laplace–Gauss,^[12] de acordo com sua autoria. A denominação segunda distribuição de Laplace também é usada ocasionalmente.^{[13][14]}

A distribuição normal é estudada frequentemente. Por exemplo, novas tabelas digitais foram publicadas por Egon Sharpe Pearson em 1948, pelo *National Bureau of Standards* em 1952 e por Greenwood e Hartley em 1958.^{[15][16]}

Distribuição normal padrão

Existe uma infinidade de distribuições normais, cada uma com sua própria média e desvio padrão. A distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1 é chamada de **distribuição normal padrão**.^[17] Ela é uma distribuição de probabilidade (uma medida N , de massa total unitária) unidimensional (com suporte real \mathbf{R}).^[18] É uma distribuição absolutamente contínua (a medida é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue).



Obra sobre o teorema central do limite publicada em 1840.

Em outras palavras, existe uma densidade de probabilidade muitas vezes denotada como φ para a distribuição normal padrão tal que: $N(dx) = \varphi(x)dx$. É generalizada para a distribuição normal multivariada. A distribuição normal padrão também pode ser chamada de distribuição normal centrada e reduzida.^[19] A escala horizontal do gráfico da distribuição normal padrão corresponde ao escore-z que é uma medida de posição que indica o número de desvios padrão em que um valor se encontra a partir da média. Podemos transformar um valor x em escore-z usando a fórmula:

[20]

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \text{ Arredondar para o centésimo mais próximo}$$

Quando um valor de uma variável aleatória x distribuída normalmente é transformado em um escore-z, a distribuição de z será uma distribuição normal padrão. Após essa transformação, a área que recai no intervalo $(x_1; x_2)$ sob a curva normal padrão é a mesma que aquela sob a curva normal padrão no correspondente intervalo $(z_1; z_2)$.^[21]

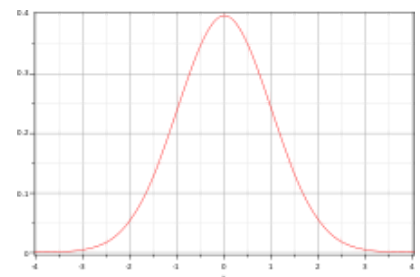
Propriedades da distribuição normal padrão

1. A área acumulada é próxima de 0 para escores-z próximos a $z=-3,49$.
2. A área acumulada aumenta conforme os escores-z aumentam.
3. A área acumulada para $z=0$ é 0,5000.
4. A área acumulada é próxima a 1 para escores-z próximos a $z=3,49$.

Definição pela função densidade

A densidade da distribuição normal padrão é dada pela função $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.^[22] Esta distribuição é

chamada centrada porque o valor do seu momento de ordem 1 (esperança) é 0 e reduzida porque o valor do seu momento de ordem 2 (variância) é 1, assim como o seu desvio padrão. O gráfico da densidade φ é chamado função gaussiana, curva de Gauss ou curva em forma de



Função densidade da distribuição normal padrão (curva de Gauss ou curva em forma de sino).

sino. A distribuição normal é denotada pela letra N . Uma variável aleatória X que segue uma distribuição normal padrão é denotada como $X \sim N(0, 1)$.^[23]

Seguem algumas propriedades sobre a função densidade:

- O cálculo da integral de Gauss permite demonstrar que a função φ é uma densidade de probabilidade pela fórmula $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}t^2)dt = \sqrt{2\pi}$.
- É contínua, uniformemente limitada e par.^[24]
- O máximo da função φ é atingido na média 0 e de valor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.^[24]
- Verifica $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$.^[25]
- A densidade φ é infinitamente derivável. Uma indução matemática permite obter a fórmula para a n -ésima derivada de φ : $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\varphi(x)$, em que H_n é o n -ésimo polinômio de Hermite.^[26]
- A densidade possui dois pontos de inflexão, em 1 e em -1. Estes são os pontos em que a segunda derivada φ'' se anula e muda de sinal. Os dois pontos são aproximadamente três quintos da altura total.^[18]

Definição pela função distribuição

Historicamente a distribuição normal aparece como a distribuição limite no teorema central do limite, usando a função de distribuição cumulativa. A distribuição normal é a distribuição de probabilidade, em que a função de distribuição é dada por $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, definida por

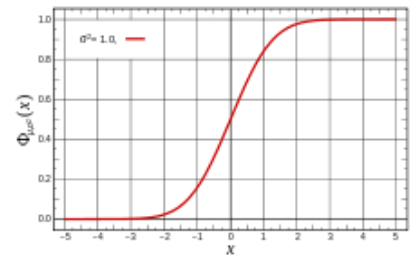
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \text{ Ela fornece a probabilidade}$$

de uma variável aleatória de distribuição normal pertencer a

um intervalo fechado $[a, b]$, $\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \Phi(b) - \Phi(a)$.^[27]

Seguem algumas propriedades sobre a função de distribuição:

- Não existe uma expressão analítica para a função de distribuição Φ . Isto é, não é expressa a partir de funções usuais, mas torna-se uma função usual. Para obter os valores de probabilidade $\Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ é preciso aproximar esta função de outras funções usuais gerando a tabela de valores.^[28]
- Pode ser expressa em função da função erro por meio das seguintes fórmulas equivalentes
$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \operatorname{erf}(x) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1.$$
^[29]
- É infinitamente derivável e verifica $\Phi'(x) = \varphi(x)$. A fórmula equivalente $d\Phi(x) = \varphi(x)dx$ permite definir a integral de Lebesgue–Stieltjes com relação à distribuição normal.^[30]
- É absolutamente contínua e estritamente crescente, sendo uma bijeção de \mathbb{R} no intervalo aberto $]0, 1[$.^[31] O recíproco Φ^{-1} é chamado de função inversa da função distribuição acumulada da distribuição normal. Por exemplo, esta função é utilizada pelo modelo probit.^[32]
- Pela paridade da distribuição, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Portanto, $\Phi(0) = \frac{1}{2}$. Isso mostra que a mediana da distribuição normal padrão é 0.^[31]



Função distribuição da distribuição normal padrão.

Definição pela função característica

A caracterização da distribuição normal pela função característica tem o objetivo de demonstrar certas propriedades como a estabilidade da soma e o teorema central do limite. A função característica de distribuição normal padrão é dada por

$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ e definida por $\phi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.^{[33][34]} Em grego existem duas variações para a letra phi minúscula. O ϕ utilizado agora é diferente do φ utilizado no início do texto. Isto é, são duas notações diferentes para phi minúsculo.

Esta função característica é proporcional à densidade da distribuição padrão.

Ela permite demonstrar certas propriedades como a estabilidade por adição e o teorema central do limite.^[35]

Seguem algumas propriedades sobre a função de distribuição:

- A função característica da distribuição normal pode ser obtida a partir da função densidade pelas igualdades
$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$
^[27]
- Se uma variável aleatória X segue uma distribuição normal padrão da função característica ϕ definida acima, então a transformação linear $Y = aX + b$ admite a função característica $\phi_Y(t) = e^{ibt} \phi(at)$. É



Função característica e função geradora de momentos da distribuição normal padrão.

uma variável aleatória com distribuição normal de média b e variância a^2 .^[36]

Definição pela função geradora de momentos

Uma outra maneira de definir a distribuição normal padrão é pela utilização da função geradora de momentos. É a distribuição de probabilidade, em que a função geradora de momentos é dada por $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ e definida por^[37]

$M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. O objetivo é calcular os momentos da distribuição normal.^[38]

Seguem algumas propriedades sobre a função geradora de momentos:

- A função geradora de momentos da distribuição normal pode ser obtida a partir da função densidade. Seja X , que segue uma distribuição normal padrão, então

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-t}{2}\right)} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}}$$

.^[37]

- Se uma variável aleatória X segue uma distribuição normal padrão da função geradora de momentos M , então a transformação linear $Y = aX + b$ admite a função geradora de momentos

$M_Y(t) = e^{bt} M(at)$. Assim, Y é uma variável aleatória com distribuição normal de média b e variância a^2 .^[38]

Distribuição normal geral

Definição

Mais usualmente que a distribuição normal padrão, a distribuição normal não centrada e não reduzida é a distribuição de probabilidade absolutamente contínua, na qual um dos quatros pontos seguintes podem ser verificados.

- A densidade de probabilidade é dada pela função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, definida por $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.^[22]

- A função de distribuição (cumulativa) é dada pela função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, definida por

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}} dt, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \text{[39]}$$

- A função característica é dada por $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $\phi(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.^[34]

- A função geradora de momentos é dada por $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, definida por $M(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$, para todo $t \in \mathbb{R}$ ou $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}$.^[40]

Para $\sigma = 0$, as funções de densidade e de distribuição não são definidas. Este caso corresponde a um comportamento degenerado da distribuição normal, às vezes chamada de distribuição normal imprópria. Isto é a medida de Dirac no ponto μ . O valor μ é a média da distribuição, σ é o desvio padrão e σ^2 é a variância. Esta distribuição é denotada por N , uma variável aleatória X que segue a distribuição normal com a média μ e variância σ^2 é denotada por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.^[34]

Observações

- Se a variável aleatória X segue uma distribuição normal padrão $N(0, 1)$, então a variável aleatória $\sigma X + \mu$ segue uma distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$ de média μ e de variância σ^2 . Reciprocamente, se Y segue uma distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$, então $\frac{Y - \mu}{\sigma}$ segue uma distribuição normal

padrão.^[41] Em outras palavras, toda distribuição normal pode ser obtida pela translação e pela dilatação de uma distribuição normal padrão. Esta primeira propriedade permite obter a fórmula $\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$.^[42] Então, é possível deduzir as propriedades da distribuição normal a partir da distribuição normal centrada reduzida e vice-versa. A variável $\frac{Y - \mu}{\sigma}$ às vezes é chamada de padronização de Y ou de variável padrão Y .^[43]

- A densidade f é simétrica em relação a μ .^[24]
- O máximo da função f é atingido em μ , com valor $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.^[24]
- Desde que a distribuição normal seja uma distribuição de probabilidade absolutamente contínua, o evento $[X = x]$ é insignificante. Isto é, quase certamente uma variável aleatória com distribuição normal X nunca é igual a um valor fixo x . Isto é expresso matematicamente por $\mathbb{P}(X = x) = 0$.^[44]
- A largura à meia altura (largura da curva à metade da altura total) fornece um valor da amplitude da distribuição. Esta largura à meia altura da distribuição normal é proporcional ao desvio padrão $H = 2\sqrt{2\ln(2)}\sigma \approx 2,3548\sigma$. O fator 2 vem da propriedade de simetria da distribuição normal.^[45]
- A densidade tem dois pontos de inflexão, em $\mu + \sigma$ e em $\mu - \sigma$. Eles são os pontos, nos quais a segunda derivada f'' anula-se e muda de sinal. Os dois pontos situam-se aproximadamente três quintos da altura total.^[18]
- A distribuição normal é uma distribuição da família exponencial. Isto é, a sua densidade é escrita como $f(x) = a(\theta)b(x)e^{-c(\theta)d(x)}$ ou como $f(x) = \exp\left(\frac{x\theta_1 - \beta(\theta_1)}{\alpha(\theta_2)}\right)$, com $\theta_1 = \mu$, $\theta_2 = \sigma$,
 $\beta(\mu) = \frac{\mu^2}{2}$ e $\alpha(\sigma) = \sigma^2$.^[46]

Propriedades

Outras caracterizações

Em adição à densidade de probabilidade, à função de distribuição, à função característica e à função geradora de momentos, existem outras caracterizações da distribuição normal.

- Caracterização segundo Georges Darmon e Sergei Bernstein – se duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 são independentes e igualmente distribuídas e se duas variáveis aleatórias $X_1 + X_2$ e $X_1 - X_2$ também são independentes, então a distribuição comum X_1 e X_2 é a distribuição normal.^[10]
- Caracterização segundo Charles Stein – a distribuição normal é a única distribuição de probabilidade (medida de probabilidade) \mathbb{P} tal qual, para qualquer função g de classe C^1 (derivável ou derivada contínua), $\int_{\mathbb{R}} g'(x)d\mathbb{P}(x) = \int_{\mathbb{R}} xg(x)d\mathbb{P}(x)$.^[18]

Momentos

O momento de ordem 1 é chamado média (μ) e é dado como parâmetro da distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$. O segundo parâmetro é o desvio padrão (σ). Isto é, a raiz quadrada da variância σ^2 , que é, por definição, a média dos quadrados dos desvios da média, ou segundo momento central. Os momentos centrais da distribuição normal são dados por

$$\begin{cases} \mu_{2k} = \mathbb{E}[(X - \mu)^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k}, \\ \mu_{2k+1} = \mathbb{E}[(X - \mu)^{2k+1}] = 0 \end{cases},$$

para $k \geq 0$ e X uma variável aleatória com distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$.^[38]

O momento central de ordem n pode ser obtido a partir de uma função de momentos de ordem inferior à n e o momento de ordem n pode ser obtido a partir de momentos de ordem inferior à $n - 1$ e do momento central de ordem n . Então, os primeiros momentos da distribuição normal são:

$$\begin{cases} m_1 = \mathbb{E}[X] = \mu \\ m_2 = \mathbb{E}[X^2] = \sigma^2 + \mu^2 \\ m_3 = \mathbb{E}[X^3] = 3\mu\sigma^2 + \mu^3 \end{cases} \quad [47]$$

Cálculo

Com a simetria em torno de μ da função densidade da distribuição normal, os momentos centrais de ordem ímpar são todos zero.^[48] Os momentos de ordem par da distribuição normal padrão $N(0, 1)$ pode ser obtido pela relação de recorrência $m_{2k} = (2k - 1)m_{2k-2}$, que vem da integração por partes seguinte, para $k \geq 1$,

$$m_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k-1} t \varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k-1} \varphi'(t) dt = (2k - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k-2} \varphi(t) dt. \quad [49]$$

É deduzida a fórmula dos momentos centrais reduzidos $m_{2k} = (2k - 1) \cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2k)!}{2^k k!}$, assim a fórmula dos

$$\text{momentos centrais } \mu_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k}. \quad [27]$$

Função geradora de momentos

Os momentos centrais ($\mu_n, n \geq 0$) de uma distribuição podem ser obtidos a partir da função geradora de momentos centrados. Para a distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, a mudança da variável $y = x - \mu$ permite obter as fórmulas

$$M_c(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} \right)^k \text{ de uma parte e } M_c(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mu_n t^n \text{ de outra parte.} \quad [38]$$

Para a identificação dos coeficientes das duas séries, isto implica que os momentos de ordem ímpar são zero

$$\mu_{2k+1} = 0 \text{ e fornece uma fórmula para os momentos de ordem par } \mu_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k}. \quad [27]$$

Assimetria e curtose

A assimetria γ_1 , a curtose β_2 e a curtose normalizada γ_2 são obtidas a partir das fórmulas dos momentos

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0 \\ \beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3 \\ \gamma_2 = \beta_2 - 3 = 0 \end{cases} \quad [50]$$

A distribuição normal é um ponto de referência para comparação das espessuras de caudas longas. Se uma distribuição possui uma curtose normalizada $\gamma_2 > 0$, então a distribuição possui uma cauda longa mais grossa que a distribuição normal e é chamada leptocúrtica. Se $\gamma_2 < 0$, a distribuição possui uma cauda longa mais fina que a distribuição normal e é chamada platicúrtica. Se a distribuição possui uma curtose normalizada nula, então a distribuição possui uma cauda longa comparável à distribuição normal e é chamada mesocúrtica.^{[51][52]}

Cumulantes

A função característica permite obter a função geradora de cumulantes pela fórmula $\ln(\phi(t)) = \sum_{n=1}^{+\infty} K_n \frac{(it)^n}{n!}$ e

permite obter os cumulantes $K_1 = \mu$, $K_2 = \sigma^2$ e $K_n = 0$, para $n \geq 3$.^[53]

Teoremas da convergência

A primeira versão do teorema central do limite (teorema de Moivre–Laplace) foi estabelecido para as variáveis aleatórias da distribuição de Bernoulli. De maneira mais geral, se X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas com variância finita e se a soma é denotada como $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(a \leq \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \leq b \right) = \int_a^b \varphi(x) dx,$$
 para todo $a < b$, em que φ é a densidade de probabilidade da distribuição normal padrão.^[28]

Este teorema significa que tudo que pode ser considerado a soma de um grande número de pequenos valores aleatórios independentes aproxima-se de uma distribuição normal.^[54] Isto mostra a característica central da distribuição normal, em teoria da probabilidade. Um enunciado do teorema pode ser formulado como: se uma grandeza física submetida à influência de um número importante de fatores independentes e se a influência de cada fator separadamente é pequena, então a distribuição desta grandeza é uma distribuição gaussiana.^[55]

O teorema central do limite é válido para toda distribuição de probabilidade com variáveis independentes e identicamente distribuídas ($X_i; i = 1, 2, \dots, n$) que, com desvio padrão finito, permite obter uma boa aproximação da soma S_n . Por exemplo,

- se as variáveis X_i seguem a distribuição de Bernoulli $B(p)$, então S_n segue aproximadamente uma distribuição normal $N(np, np(1-p))$. Esta aproximação é satisfatória quando $np(1-p) > 10$;^[56]
- se as variáveis X_i seguem a distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade $\chi^2(1)$, então S_n segue aproximadamente uma distribuição normal $N(n, 2n)$;^[57]
- se as variáveis X_i seguem a distribuição exponencial $E(\lambda)$, então S_n segue aproximadamente uma distribuição normal $N\left(\frac{n}{\lambda}, \frac{n}{\lambda^2}\right)$.^[58]

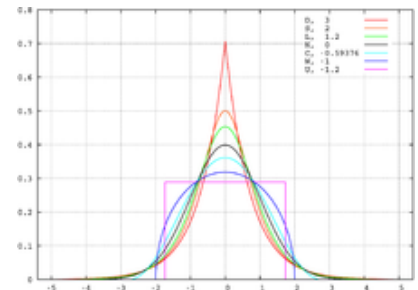
Existem versões mais gerais deste teorema. Por exemplo, variáveis aleatórias independentes não são da mesma distribuição, mas com pequenas variâncias em relação às suas médias.^[59] Um teorema de Gnedenko e Kolmogorov (1954) estipula que uma variável aleatória normal é a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes pequenas, sendo que nenhuma delas é predominante.^[60]

Teorema – Seja uma série de variáveis aleatórias $(X_n, n \geq 1)$, sendo que cada uma é a soma de um número finito de variáveis aleatórias $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ com $k_n \rightarrow +\infty$. Para todo $\varepsilon > 0$, introduz-se a variável aleatória truncada

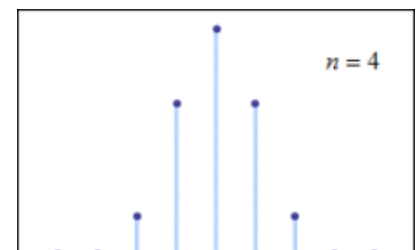
$$X^\varepsilon = \begin{cases} X & \text{se } |X| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases} \text{ e supõe-se}$$

1. $\sum_{1 \leq k \leq n} |X_{nk}| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ (em probabilidade).^[61]
2. Para todo $\varepsilon > 0$, $\sum_{1 \leq k \leq n} \mathbb{E}[X_{nk}^\varepsilon] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$ e $\sum_{1 \leq k \leq n} \text{Var}[X_{nk}^\varepsilon] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sigma^2$.^[62]

Então, a distribuição de X_n converge para a distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$.^[63]



Densidades de probabilidade de distribuições com curtoses diferentes. Em vermelho, a distribuição de Laplace. Em laranja, a distribuição secante hiperbólica. Em verde, a distribuição logística. Em preto, a distribuição normal. Em cinza, a loi du cosinus surélévé. Em azul, a loi du demi-cercle. Em violeta, a distribuição uniforme.



Quando o número n de variáveis aumenta, a densidade de probabilidade da variável S_n (centrada reduzida) aproxima-se da curva em forma de sino da distribuição normal.

Estabilidade e família normal

Estabilidade pela adição (propriedade de conservação)

A distribuição normal é estável pela adição. Isto é, a soma de duas variáveis aleatórias independentes com distribuição normal é em si uma variável aleatória com distribuição normal. Mais explicitamente, se $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ e X_1 e X_2 são independentes, então a variável aleatória $X_1 + X_2$ segue a distribuição normal $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.^[10]

Esta propriedade é generalizada por n variáveis, isto é, se para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ as variáveis aleatórias X_i seguem a distribuição normal $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ e são independentes, então a soma $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ segue a distribuição normal $N(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)$.^[64]

Esta propriedade é demonstrada diretamente por meio de funções características. A densidade de probabilidade da soma de duas variáveis aleatórias independentes da distribuição normal é dada pela convolução de duas densidades.

Isto é traduzido pelas fórmulas de convolução de funções: $\varphi\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right) * \varphi\left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right) = \varphi\left(\frac{x - (\mu_1 + \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)$ ^[65]

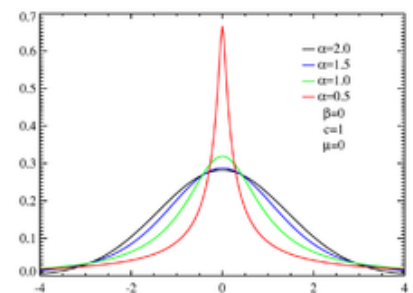
ou de convolução de medidas normais denotadas como $N_{\mu, \sigma^2}: N_{\mu_1, \sigma_1^2} * N_{\mu_2, \sigma_2^2} = N_{\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Não deve ser confundida com a distribuição, cuja densidade é a soma das densidades da distribuição normal.

Família normal

O conjunto de funções $\{\varphi(\frac{x - \mu}{\sigma}); \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$ forma a chamada "família normal", que por sua vez também é o nome do conjunto de distribuições normais $\{N_{\mu, \sigma^2}; \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$.^[66] A família de funções está fechada para convolução no sentido que a função φ gera a família. Toda densidade que convolui um número suficientemente grande de vezes e adequadamente renormalizada está próxima de uma função de uma família normal.^[65]

Os seguintes teoremas dão mais detalhes matemáticos:

- Se para uma função de densidade f de média 0 e desvio padrão 1, e quaisquer $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ e $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_+^*$ existe $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, satisfazendo $f\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right) * f\left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right) = f\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$, então $f \equiv \varphi$ é a densidade da distribuição normal padrão.^[67]
- De acordo com o teorema de Lévy–Cramér (1936), conjecturado por Paul Lévy, em 1935, se duas funções de densidade f_1 e f_2 verificam $f_1(x) * f_2(x) = \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$, então $f_1(x) = \varphi\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)$ e $f_2(x) = \varphi\left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right)$ com $\mu_1 + \mu_2 = \mu$ e $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sigma$. Em outras palavras, se a soma de duas variáveis aleatórias independentes é normal, então as duas variáveis aleatórias seguem a distribuição normal.^{[10][68]}
- Se f é a densidade comum de n variáveis aleatórias independentes de média 0 e desvio padrão 1, então a convolução n vezes de f converge uniformemente em x : $(f(x/\sqrt{n}))^{*n} \rightarrow \varphi(x)$ (este teorema é equivalente ao teorema central do limite). Esta família normal não deve ser confundida com a família normal de funções holomorfas.^[65]



Diferentes densidades de probabilidade de distribuições estáveis, em que a distribuição normal é um caso particular – a curva preta é a curva em forma de sino.

Estabilidade por linearidade

A distribuição normal é estável por linearidade. Se $\alpha \geq 0$ e β são reais e $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então a variável aleatória $\alpha X + \beta$ segue a distribuição normal $N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$.^[69] Com a estabilidade por adição e por linearidade, a distribuição normal é um caso particular de distribuição estável com parâmetro de estabilidade $\alpha = 2$.^[70] Entre as distribuições estáveis, a distribuição normal, a distribuição de Lévy ($\alpha = \frac{1}{2}$) e a distribuição de Cauchy ($\alpha = 1$) são as únicas com expressão analítica para a função densidade.^[71]

Estabilidade pela média

A distribuição normal é estável pela média. Se X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis aleatórias independentes seguindo as distribuições normais $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2), \dots, N(\mu_n, \sigma_n^2)$, então a média $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ segue a distribuição $N\left(\frac{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n}{n}, \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}{n^2}\right)$.^[72]

Convexidade

A distribuição normal não é convexa.^[73] Isto é, a desigualdade $\lambda\mathbb{P}(A) + (1 - \lambda)\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(\lambda A + (1 - \lambda)B)$, para todo A e B borelianos, não é satisfeita quando a medida \mathbb{P} é normal. Entretanto, quando a desigualdade é normalizada com o inverso da função de distribuição da distribuição normal padrão, obtém-se o teorema (desigualdade de Ehrhard) $\lambda\Phi^{-1}(N_{0,1}(A)) + (1 - \lambda)\Phi^{-1}(N_{0,1}(B)) \leq \Phi^{-1}(N_{0,1}(\lambda A + (1 - \lambda)B))$, para a medida padrão normal $N_{0,1}$, todos os intervalos A e B e todo $\lambda \in]0, 1[$.^[74]

Entropia e quantidade de informação

Entropia de Shannon

A entropia de Shannon de uma distribuição de probabilidade absolutamente contínua de densidade dada por f para medir a quantidade de informação é definida por $H = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x) dx$. No conjunto das distribuições absolutamente contínuas de variância σ^2 fixa, as distribuições normais $N(\cdot, \sigma^2)$ fornece entropia máxima.^[75] A entropia para uma distribuição normal é dada por $H = \ln(\sigma\sqrt{2\pi e})$. Há também uma ligação entre a convergência de sequências de distribuições de probabilidade com distribuição normal e o aumento da entropia, tornando-se uma ferramenta importante na teoria da informação.^[10]

Quantidade de informação de Fisher

A informação de Fisher de uma densidade de probabilidade é outro conceito de quantidade de informação. Para uma densidade f , a informação de Fisher é dada por $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 f(x) dx$. Para toda densidade suficientemente regular de uma distribuição normal padrão, a informação satisfaz a seguinte desigualdade: $I \geq 1$. A distribuição normal distingue-se de outras densidades desde que a desigualdade anterior seja uma igualdade e se e somente se a densidade for uma distribuição normal padrão.^[10]

Distancia entre distribuições

A divergência de Kullback–Leibler permite medir a distância entre duas distribuições ou a perda de informação entre as duas distribuições. A divergência de Kullback–Leibler entre as duas distribuições normais $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e

$$N(\mu_2, \sigma_2^2) \text{ é } D_{KL}(N_{\mu_1, \sigma_1^2} \| N_{\mu_2, \sigma_2^2}) = \log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} + \frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{\sigma_2^2} - 1 \right).$$

Esta divergência é nula para $\mu_1 = \mu_2$ e $\sigma_1 = \sigma_2$, mas aumenta quando $|\mu_1 - \mu_2|$ também aumenta.^[76]

Aproximação da função de distribuição

Não existe expressão analítica para a função de distribuição Φ da distribuição normal padrão. Isto é, não existe uma fórmula simples entre a função de distribuição e as funções convencionais como as funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, entre outras. Entretanto, a função de distribuição é aplicada a vários resultados e é importante compreendê-la melhor. Diferentes notações como séries ou frações contínuas generalizadas são possíveis.^[77]

Para $0 < x \ll 1$, a função de distribuição da distribuição normal padrão é escrita na forma

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n(2n+1)} x^{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + \dots \right) \quad \text{ou na forma}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \varphi(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} x^{2n+1} = \frac{1}{2} + \varphi(x) \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \dots \right).^{[45]}$$

Para $1 \ll x$, a função de distribuição da distribuição normal padrão é escrita na forma

$$\Phi(x) = 1 - \frac{\varphi(x)}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1 \cdot 3}{x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{x^6} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{x^{2n}} \right) + R_n, \quad \text{com}$$

$$R_n = (-1)^{n+1} 1 \cdot 3 \dots (2n+1) \int_x^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y^{2n+2}} dy.^{[45][77]}$$

De maneira mais numérica e facilmente calculável, as aproximações seguintes fornecem valores da função de distribuição Φ da distribuição normal padrão com:

- Erro da ordem de 10^{-5} : para $x > 0$,

$$\Phi(x) = 1 - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{0,4361836}{1 + 0,33267x} + \frac{-0,1201676}{(1 + 0,33267x)^2} + \frac{0,9772980}{(1 + 0,33267x)^3} \right) + \epsilon(x) \text{ ou } |\epsilon(x)| < 10^{-5}.^{[78]}$$

- Erro de ordem de $2,5 \cdot 10^{-4}$: para $x > 0$,

$$\Phi(x) \approx 1 - \frac{1}{2(1 + 0,196854x + 0,115194x^2 + 0,000344x^3 + 0,019527x^4)^4}.^{[78]}$$

- Erro da ordem de 10^{-2} : $\Phi(x) = \begin{cases} 0,1x(4,4-x) & \text{para } 0 \leq x \leq 2,2 \\ 0,49 & \text{para } 2,2 \leq x \leq 2,6 \\ 0,5 & \text{para } x \geq 2,6 \end{cases}.^{[45]}$

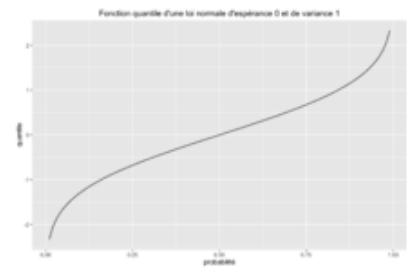
Em um exemplo de algoritmo para a linguagem C, uma outra notação da função de distribuição da distribuição

normal padrão utiliza uma fração contínua generalizada: $\Phi(x\sqrt{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\frac{1}{2}e^{-x^2}}{x + \frac{1}{2x + \frac{2}{x + \frac{3}{2x + \frac{4}{x + \dots}}}}}$

^[29]

Tabelas numéricas e cálculos

De acordo com a seção anterior, é útil saber a função de distribuição Φ para aplicações numéricas. Então, tabelas de valores foram calculadas para a função de distribuição e também para o inverso da função de distribuição, que permitem obter os quantis e os intervalos de confiança para um limiar de tolerância fixo.^[79]



Função quantil de uma distribuição normal padrão.

Tabela de valores da função de distribuição

A tabela seguinte fornece os valores da função de distribuição $\Phi(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$, quando X segue a distribuição normal padrão.

Os valores da primeira linha fornecem a primeira parte da variável. Os valores da primeira coluna fornecem a segunda parte da variável. Então, a célula na segunda linha e na terceira coluna fornece $\Phi(0,12) = 0,54776$.



A curva em sino é a função densidade. A linha vertical é o valor x . A superfície da parte colorida sob a curva é o valor $\mathbb{P}[X \leq x] = \Phi(x)$.



A curva em sino é a função densidade. As linhas verticais são os valores x_1 e x_2 . A superfície da parte colorida sob a curva é o valor $\mathbb{P}[x_1 \leq X \leq x_2] = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$.



A curva em sino é a função densidade. A linha vertical é o valor x . A superfície da parte colorida sob a curva é o valor $\mathbb{P}[X \geq x] = 1 - \Phi(x)$.

$\Phi(x)$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997

Tabela de valores dos quantis

As duas tabelas seguintes fornecem os valores dos quantis q_p da distribuição normal padrão $N(0, 1)$, definida por $q_p = \Phi^{-1}(p)$.^[80]

Os valores da primeira linha fornecem a primeira parte da variável. Os valores da primeira coluna fornecem a segunda parte da variável. Então, a célula na segunda linha e na terceira coluna fornece $q_{0,62} = \Phi^{-1}(0,62) = 0,3055$.

q_p	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,50	0,0000	0,0251	0,0502	0,0753	0,1004	0,1257	0,1510	0,1764	0,2019	0,2275
0,60	0,2533	0,2793	0,3055	0,3319	0,3585	0,3853	0,4125	0,4399	0,4677	0,4959
0,70	0,5244	0,5534	0,5828	0,6128	0,6433	0,6745	0,7063	0,7388	0,7722	0,8064
0,80	0,8416	0,8779	0,9154	0,9542	0,9945	1,036	1,080	1,126	1,175	1,227
0,90	1,282	1,341	1,405	1,476	1,555	1,645	1,751	1,881	2,054	2,326

Esta tabela fornece os valores dos quantis para os valores maiores de p .

p	0,975	0,995	0,999	0,9995	0,9999	0,99995	0,99999	0,999995
q_p	1,9600	2,5758	3,0902	3,2905	3,7190	3,8906	4,2649	4,4172

As tabelas são dadas pelos valores positivos da distribuição normal padrão. Com a formulação da função de distribuição, é possível obter outros valores. Os valores negativos da função de distribuição são dados pela fórmula $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Por exemplo, $\Phi(-1,07) = \mathbb{P}[X \leq -1,07] \approx 1 - 0,85769 = 0,14231$, para $X \sim N(0, 1)$.^[16]

Os valores da função de distribuição da distribuição geral é obtido pela fórmula $F(y) = \Phi(\frac{y - \mu}{\sigma})$.^[81] Por exemplo, $F(12, 14) = \mathbb{P}[Y \leq 12, 14] = \mathbb{P}\left[\frac{Y - 10}{2} \leq \frac{12, 14 - 10}{2}\right] = \mathbb{P}[X \leq 1,07] = \Phi(1,07) \approx 0,85769$, para $Y \sim N(10, 2^2)$.^[82]

A tabela de valores também permite obter a probabilidade de uma variável aleatória com distribuição normal $X \sim N(0, 1)$ pertencer a um intervalo $[a, b]$ pela fórmula $\mathbb{P}[X \in [a, b]] = \mathbb{P}[X \leq b] - \mathbb{P}[X < a] = \Phi(b) - \Phi(a)$. Por exemplo, $\mathbb{P}[X \geq 1,07] = 1 - \mathbb{P}[X < 1,07] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 1,07] \approx 0,14231$, para $X \sim N(0, 1)$, e $\mathbb{P}[0 \leq X \leq 1,07] = \Phi(1,07) - \Phi(0) = \Phi(1,07) - 0,5 \approx 0,85769 - 0,5 = 0,35769$, para $X \sim N(0, 1)$.^[83]

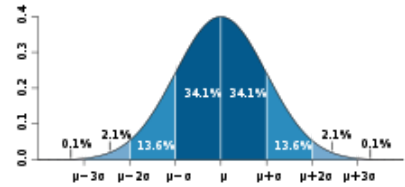
Intervalos normais e intervalos de confiança

Uma das vantagens para calcular probabilidades de intervalos é a utilização de intervalos de confiança para testes estatísticos. A distribuição normal é definida para dois valores, a média μ e o desvio padrão σ . É útil olhar para os intervalos do tipo:

$$[\mu - r\sigma, \mu + r\sigma]. \mathbb{P}[\mu - r\sigma \leq Y \leq \mu + r\sigma] = \Phi(r) - (1 - \Phi(r)) = 2\Phi(r) - 1 \text{ para } Y \sim N(\mu, \sigma^2). \text{ [84]}$$

Tabela de valores dos intervalos de confiança

A tabela seguinte é obtida a partir das tabelas anteriores e fornecem as probabilidades $\mathbb{P}_r = \mathbb{P}[\mu - r\sigma \leq Y \leq \mu + r\sigma] = 2\Phi(r) - 1$ para $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.^[85]

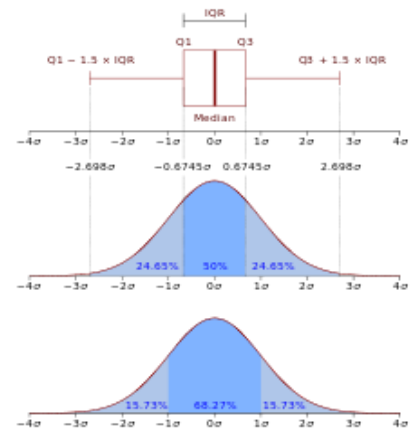


A curva em sino é a densidade de probabilidade. As superfícies das partes coloridas sobre a curva correspondem às probabilidades dos intervalos $[\mu - r\sigma, \mu + r\sigma]$.

r	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
\mathbb{P}_r	0,00	0,3829	0,6827	0,8664	0,9545	0,9876	0,9973	0,9995

A tabela de valores dos valores de confiança permite obter os intervalos de normalidade para um determinado nível de confiança. Para $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, a tabela fornece:

- $P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) \approx 0,6827$, em que $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ é o intervalo de normalidade para o nível de confiança de 68%.^[86]
- $P(\mu - 0,5H \leq Y \leq \mu + 0,5H) \approx 0,76$, em que $[\mu - 0,5H, \mu + 0,5H]$ é o intervalo de normalidade para o nível de confiança de 76% e H é a largura à meia altura.^[86]
- $P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$, em que $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ é o intervalo de normalidade para o nível de confiança de 95%.^[86]
- $P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$, em que $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ é o intervalo de normalidade para o nível de confiança de 99%.^[86]



Representação de um gráfico de caixa e a ligação com os quantis de uma distribuição normal.

Inversamente, quando o valor da probabilidade $\alpha \in [0, 1]$ é fixo, existe um único valor $r > 0$, tal que $\mathbb{P}(\mu - r\sigma \leq Y \leq \mu + r\sigma) = 2\Phi(r) - 1 = \alpha$.^[31] O intervalo $[\mu - r\sigma, \mu + r\sigma]$ é chamado de intervalo de normalidade ou intervalo de confiança para o nível de confiança α . Para uma distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$ e um limiar α , o método para encontrar o valor de r consiste em utilizar a tabela de valores dos quantis, tal que $\Phi(r) = \frac{\alpha + 1}{2}$.

Então, o intervalo de confiança é $[\mu - r\sigma, \mu + r\sigma]$. Por exemplo, o intervalo de normalidade para o nível de confiança de 95% de uma distribuição normal $N(10, 2^2)$ é o intervalo $[10 - 2r, 10 + 2r]$, em que r verifica $\Phi(r) = \frac{0,95 + 1}{2} = 0,975$ ou $r = q_{0,975} \approx 1,96$.

Então, o intervalo de confiança é $[6,08; 13,92]$ após o arredondamento.^[87]

Ligações com outras distribuições

Com papel central entre as distribuições de probabilidade e suas aplicações, a distribuição normal tem muitas ligações com outras distribuições. Certas distribuições ainda são formadas a partir da distribuição normal para melhor corresponder às suas aplicações.^[88]

Distribuições usuais

Distribuição	Em função de variáveis com distribuição normal
Distribuição qui-quadrado	$\sum_{i=1}^k \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$ [89]
Distribuição qui-quadrado não central	$\sum_{i=1}^k \left(\frac{X_i}{\sigma_i} \right)^2$ [90]
Distribuição qui	$\sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2}$
Distribuição qui não central	$\sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\frac{X_i}{\sigma_i} \right)^2}$

Distribuições unidimensionais

- Se uma variável aleatória X segue uma distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$, então a variável aleatória $\exp(X)$ segue uma distribuição log-normal. [91]
- Se U e V são duas variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme $[0, 1]$, então as duas variáveis aleatórias $X = \sqrt{-2 \ln(U)} \cos(2\pi V)$ e $Y = \sqrt{-2 \ln(U)} \sin(2\pi V)$ são distribuições normais padrões. X e Y são independentes. Estas duas fórmulas são utilizadas para simular a distribuição normal. [81]
- Se as variáveis X_1, X_2, \dots, X_n são independentes com distribuição comum $N(0, 1)$, então a soma dos seus quadrados $\sum_{k=1}^n X_k^2$ segue uma distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade $\chi^2(n)$. A formula estende-se para variáveis normal não centradas e não reduzidas. O mesmo tipo de ligação existe com a distribuição qui-quadrado não central, a distribuição qui e a distribuição qui não central. [92]
- Se a variável U segue uma distribuição normal padrão $N(0, 1)$, se V segue uma distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade $\chi^2(n)$ e se U e V são independentes, então a variável $\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$ segue uma distribuição de Student $t(n)$ com n graus de liberdade. [93]
- Se X é uma variável aleatória com distribuição normal padrão e U é uma variável aleatória com distribuição uniforme em $[0, 1]$, então $\frac{X}{U}$ é uma distribuição de Slash. [94]
- Para uma variável aleatória X com distribuição normal padrão $\mathcal{N}(0, 1)$, a variável $\text{signe}(X)|X|^p$ é um distribuição normal com potência p . Para $p = 1$, esta variável é uma distribuição normal padrão. [94]
- Se Z_1 e Z_2 são duas variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão, então o quociente $\frac{Z_1}{Z_2}$ segue a distribuição de Cauchy de parâmetro 0 e 1, $\frac{Z_1}{Z_2} \sim \text{Cau}(0, 1)$. [95] No caso de Z_1 e Z_2 serem duas gaussianas quaisquer (não centradas e não reduzidas), o quociente $\frac{Z_1}{Z_2}$ segue uma distribuição complexa, em que a densidade é expressa em função dos polinômios de Hermite (a expressão exata é dada por Pham-Gia em 2006). [96]

Distribuições multidimensionais

- Há uma versão multidimensional da distribuição normal, chamada distribuição normal multidimensional, distribuição multinormal ou distribuição de Gauss multivariada. Se X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis aleatórias com distribuições normais, então a distribuição de probabilidade do vetor

aleatório (X_1, X_2, \dots, X_n) é uma distribuição normal multidimensional. A densidade de probabilidade assume a mesma forma que a densidade da distribuição normal, porém escrita em forma de matriz. Se o vetor aleatório (X_1, X_2) tem distribuição normal unidimensional $N(\mu, \Sigma)$, em que μ é o vetor das médias e Σ é a matriz de variância-covariância, então a distribuição condicional $(X_1|X_2 = x)$ de X_1 , sabendo que $X_2 = x$ é a distribuição normal $N(\mu_{1|x}, \sigma_{1|x})$ e $(X_1, X_2) \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}\right)$, então $(X_1|X_2 = x) \sim N(\mu_{1|x}, \sigma_{1|x})$ com $\mu_{1|x} = \mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x - \mu_2)$ e $\sigma_{1|x} = \sigma_{11} - \frac{\sigma_{12}\sigma_{21}}{\sigma_{22}}$.^[97]

- A distribuição normal de um vetor, cujas coordenadas são independentes e com distribuições normais padrão, é a distribuição de Rayleigh.^[96]

Nota-se que a distribuição gaussiana inversa e a distribuição gaussiana inversa generalizada não têm ligação com uma fórmula simplesmente criada a partir de variáveis da distribuição normal, mas tem relação com o movimento browniano.^[98]

Distribuições normais generalizadas

Várias generalizações da distribuição normal foram introduzidas para mudar sua forma, sua assimetria, seu suporte, entre outros. Um novo parâmetro de forma $\beta > 0$ foi introduzido à distribuição normal para obter uma distribuição normal generalizada. Esta família de distribuição contém a distribuição normal como é o caso para $\beta = 2$ e também para a distribuição de Laplace para $\beta = 1$. A nova densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{\beta}{2\alpha\Gamma(1/\beta)} e^{-\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)^\beta}.$$
^[10]

Existe uma maneira de mudar a assimetria da distribuição normal a fim de obter a chamada distribuição normal assimétrica (distribuição normal distorcida).^[99] A introdução de um parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$ permite obter a distribuição normal quando $\lambda = 0$, uma assimetria à direita quando $\lambda > 0$ e uma assimetria à esquerda quando $\lambda < 0$. A densidade desta distribuição é dada por $f(x) = 2\varphi(x)\Phi(\lambda x)$.^[100]

Para mudar o suporte e, especialmente, para tornar a distribuição normal limitada, uma modificação possível é a distribuição truncada. Então, ela muda de escala para que as partes cortadas distribuam-se entre todos os valores guardados (ao contrário da distribuição dobrada). A distribuição normal padrão truncada em $-T$ e em T para

$$\text{suportar o intervalo } [-T, T] \text{ e sua função densidade definida por } f(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{2\Phi(T)-1} & \text{se } x \in [-T, T] \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$
^[101]

Também é possível truncar a distribuição normal de um lado. Então, ela é chamada distribuição normal corrigida. Se uma variável aleatória X segue uma distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$, então $\max(X, 0)$ segue a distribuição normal corrigida.^[102]

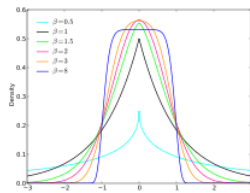
Uma outra maneira de mudar o suporte da distribuição normal é dobrar a densidade a partir de um valor, a distribuição obtida é a distribuição normal dobrada. Os valores retirados, por exemplo, $]-\infty, 0[$ são então distribuídos perto do valor da dobra, aqui, 0 (ao contrário da distribuição truncada). A densidade de probabilidade da distribuição normal dobrada em 0 é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x+\mu)^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$
^[103]

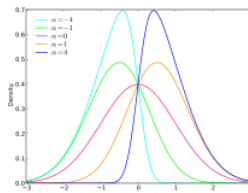
Uma versão generalizada da distribuição log-normal permite obter uma família com distribuição, incluindo a distribuição normal como um caso particular.^[104] A família é definida a partir de três parâmetros: um parâmetro de posição μ , um parâmetro de escala σ e um parâmetro de forma $\kappa \in \mathbb{R}$. Quando $\kappa = 0$, esta distribuição log-normal

generalizada é a distribuição normal. A densidade é dada por $f(x) = \frac{\varphi(y)}{\alpha - \kappa(x - \xi)}$, em que

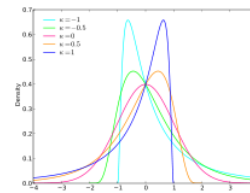
$$y = \begin{cases} -\frac{1}{\kappa} \log \left[1 - \frac{\kappa(x - \xi)}{\alpha} \right] & \text{se } \kappa \neq 0 \\ \frac{x - \xi}{\alpha} & \text{se } \kappa = 0 \end{cases} \quad [105]$$



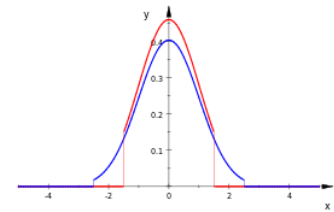
Diferentes formas para a densidade da distribuição normal generalizada.



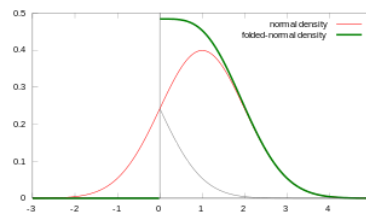
Diferentes formas para a densidade da distribuição normal assimétrica.



Diferentes formas para a densidade da distribuição log-normal.



Distribuição normal padrão truncada em 1,5 para a curva vermelha e em 2,5 para a curva azul.



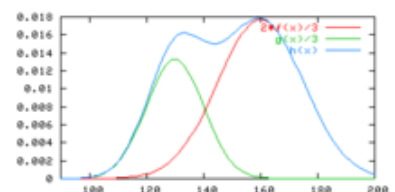
Em verde, a densidade da distribuição normal dobrada em 0.

Construções a partir da distribuição normal

Misturando as distribuições

Uma mistura gaussiana é uma distribuição de probabilidade, cuja densidade é definida por uma combinação linear de duas densidades de distribuições normais. Se nota-se f_1 a densidade de $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e f_2 a densidade de $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, então $\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2$ é a densidade de uma distribuição de probabilidade chamada de mistura gaussiana. [106]

Os modos das duas distribuições normais são dados por μ_1 e μ_2 , então a combinação gaussiana é uma distribuição bimodal. Se os máximos locais são valores próximos e não iguais aos valores μ_1 e μ_2 . [106]



Em azul, a densidade de uma combinação linear de duas densidades normais.

Generalidades

É possível construir outras densidades de probabilidade com a densidade da distribuição normal padrão. Harald Cramér estabeleceu em 1926 um resultado geral: se uma densidade de probabilidade g é duas vezes diferenciável, se a integral $\int (g''(x))^2 e^{x^2/2} dx$ é convergente e se $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, então a função g pode ser desenvolvida

em uma série absolutamente e uniformemente convergente em função das derivadas das densidades da distribuição normal padrão e dos polinômios de Hermite $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(x) \int g(y) H_k(y) dy$.^[107]

Utilizações

Historicamente a distribuição normal é introduzida em estudos sobre os corpos celestes ou em jogos de azar. Ela é estudada, generalizada matematicamente e usada em muitas aplicações em matemática, em outras ciências exatas, em outras ciências mais aplicadas ou em ciências humanas e sociais.^[108] Segue uma seleção de exemplos.

Balística

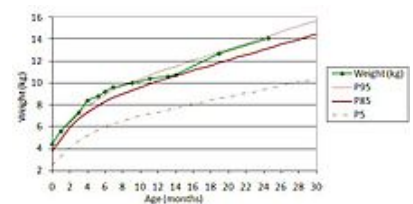
No século XIX, para melhorar a precisão da artilharia de fogo muitos tiros de canhão eram disparados. Observou-se que a direção e o alcance eram semelhantes às distribuições normais.^[109] Esta compreensão permitiu melhor treinar os servos para ajustar os disparos. Esta distribuição normal proveniente de diferentes fatores como as condições climáticas e também o uso do equipamento militar. A dispersão dos pontos de impacto e, portanto, da distribuição, fornece informações sobre o estado do material e sobre o possível número de disparos anormais. O ajuste à distribuição normal é feito pelo teste de Lhoste em uma série de 200 tiros. O matemático Jules Haag aplica o método para 2680 tiros de diferentes escopos e diferentes direções.^[109]

Quociente de inteligência

O quociente de inteligência (QI) visa dar um valor numérico à inteligência humana. Em 1939, David Wechsler deu uma definição estatística ao quociente de inteligência. 100 pontos são dados à média dos valores obtidos de uma população com idade similar e 15 pontos são deduzidos de um intervalo igual ao desvio padrão obtidos a partir dos valores da população testada.^[110] Por esta razão, a curva de distribuição do QI é modelada a curva em forma de sino da distribuição normal padrão em 100 e com desvio padrão 15, $N(100, 15^2)$. Entretanto, este modelo é questionado por alguns cientistas. Em efeito, os resultados dos testes são dependentes das classes sociais da população, a população deixaria de ser homogênea. Isto é, a propriedade de independência dos indivíduos não seria verificada. Então, o QI seria apenas uma medida de aproximação da inteligência humana com erro desconhecido.^[111]

Anatomia humana

Uma característica observável e mensurável de uma população de indivíduos comparáveis muitas vezes tem uma frequência modelada por uma distribuição normal. É o exemplo da altura humana em uma determinada idade (separados entre homens e mulheres)^[112] ou o tamanho do bico de uma população de aves como os pássaros estudados por Charles Darwin.^[113] Mais precisamente, uma característica mensurável de uma população pode ser modelada por uma distribuição normal se ela for codificada geneticamente por vários alelos ou por vários locus^[113] ou se a característica depende de um grande número de efeitos do meio ambiente.^[114]

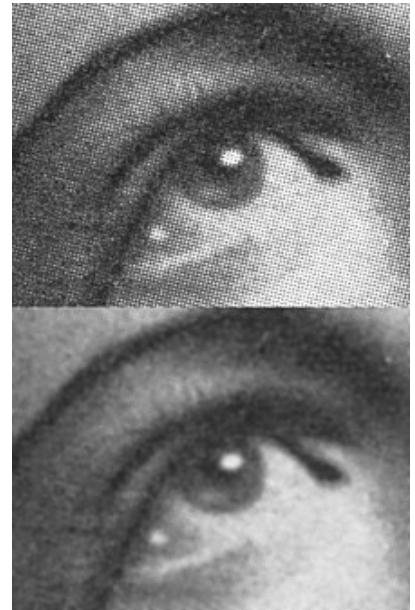


Exemplo da curva de aumento de peso.

As curvas de crescimento apresentadas pela Organização Mundial da Saúde (OMS), presentes em cadernetas de saúde, por exemplo, são derivadas de modelagem pela distribuição normal. Por meio de um estudo detalhado dos percentis medidos em uma população com idade fixa e por meio de testes estatísticos de adequação, as distribuições dos pesos e das alturas por faixa etária foram modeladas por distribuições de probabilidade. Estas distribuições incluem a distribuição normal, a distribuição normal de Box–Cox (generalização da distribuição normal), a distribuição Student de Box–Cox (generalização da distribuição normal de Box–Cox) e ainda a distribuição exponencial com potência Box–Cox. Graficamente, para cada idade ou para cada eixo vertical, a mediana m é representada (linha central) e os dois valores de $m + \sigma$ e $m - \sigma$, em que σ é o desvio padrão, dão as curvas e, assim, representam a evolução de um intervalo de confiança.^[115]

Sinais e medições físicas

Quando um sinal é transmitido, ocorre uma perda de informação devido aos meios de transmissão ou à decodificação do sinal. Quando uma medição física é efetuada, uma incerteza no resultado pode ser proveniente de uma imprecisão do aparelho de medida ou de uma incapacidade de obter o valor teórico. Um método para modelar tais fenômenos é considerar um modelo determinista (não aleatório) para o sinal ou para a medição e adicionar ou multiplicar um termo aleatório que represente a perturbação aleatória, às vezes chamadas de erro ou de ruído. Em muitos casos, este erro é assumido como distribuição normal ou como distribuição log-normal em casos de multiplicação.^[116] É o caso, por exemplo, da transmissão de um sinal através de um cabo elétrico.^[43] Quando o processo depende do tempo, o sinal ou a medição é modelada por um ruído branco. Então, a suavização de imagem com um filtro gaussiano é utilizada.^[117]



Um filtro gaussiano é aplicado à imagem de cima, obtendo-se uma imagem de fundo mais suave e com menos granulados.

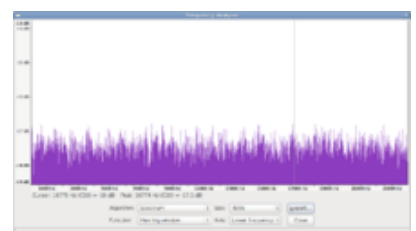
Economia

Os preços de algumas commodities são determinadas por uma bolsa de valores, como é o caso do trigo, do algodão e do ouro. No tempo t , o preço $Z(t)$ evolui até o momento $t + T$, aumentando $Z(t + T) - Z(t)$. Em 1900, Louis Bachelier postulou que este aumento segue uma distribuição normal de média nula, cuja variância depende de t em T . Entretanto, este modelo satisfaz apenas ao mercado financeiro. Então, outros matemáticos propuseram melhorar este modelo, assumindo que é o aumento $\ln Z(t + T) - \ln Z(t)$ que segue a distribuição normal, o que quer dizer que o aumento dos preços segue uma distribuição log-normal. Esta hipótese é a base do modelo e da fórmula de Black-Scholes utilizado massivamente pela indústria financeira.^[118]

Este modelo ainda foi melhorado por Benoît Mandelbrot especialmente, assumindo que o aumento segue uma distribuição estável (a distribuição normal é um caso particular da distribuição estável). Então, parece que o movimento browniano, cujo crescimento é uma distribuição normal, e o processo de Levy, cujo crescimento estável modela as curvas do mercado.^[118]

Matemática

A distribuição normal é utilizada em muitas áreas da matemática. O ruído branco gaussiano é um processo estocástico de tal modo que em qualquer ponto o processo é uma variável aleatória com distribuição normal independente do processo de outros pontos.^[119] O movimento browniano ($B(t), t \geq 0$) é um processo estocástico, cujos aumentos são independentes, estacionários e com distribuição normal.^[118] Incluindo um valor $t > 0$ fixo, a variável aleatória $B(t)$ segue a distribuição normal $N(0, t)$. Este processo aleatório tem muitas aplicações. Ele faz uma ligação entre a equação do calor e a distribuição normal.^[18] Quando a extremidade de uma haste de metal é aquecida em um curto espaço de tempo, o calor se propaga ao longo da barra na forma de uma curva em forma de sino.



Ruído branco gaussiano unidimensional.

A distribuição normal também é aplicada em áreas da matemática não aleatórias como na teoria dos números. Todo número inteiro n pode ser escrito como a multiplicação de potências de números primos. Seja $\omega(n)$ o número de números primos diferentes nesta decomposição. Por exemplo, para $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $\omega(60) = 3$. O teorema de

Erdős–Kac assegura que esta função $n \mapsto \omega(n)$ para $n \leq N$ está relacionada com a densidade da distribuição normal $N\left(\ln \ln(N), \sqrt{\ln \ln(N)}\right)$. Isto é, para um grande número da ordem de $1000000000 = 10^9$, existe uma alta probabilidade que o número de divisores primos seja 3 para $\ln \ln(10^9) \approx 3,03$.^[18]

Testes e estimativas

CrITÉRIOS de normalidade

É importante saber se os valores são distribuídos de acordo com a distribuição normal. Quatro critérios podem ser estudados antes de realizar um teste estatístico.

O primeiro critério (o critério mais simples) consiste em traçar um diagrama em barras da distribuição e verificar visualmente se o diagrama é em forma de sino. Entretanto, este critério subjetivo permite eliminar uma parte das distribuições quando consideradas não gaussianas.^[120]

De maneira mais precisa, a utilização das faixas de normalidade permite comparar com as frequências observadas facilmente calculáveis. O critério consiste em utilizar as faixas de normalidade ou os intervalos de confiança. Quando os valores são normalmente distribuídos, 68% deles estão no intervalo $[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma]$, 95% deles estão no intervalo $[\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma]$ e 99,7% deles estão no intervalo $[\bar{x} - 3\sigma; \bar{x} + 3\sigma]$.^[121]

Se não for o caso, a escolha de modelar a distribuição dos valores observados pela distribuição normal não é aconselhável.

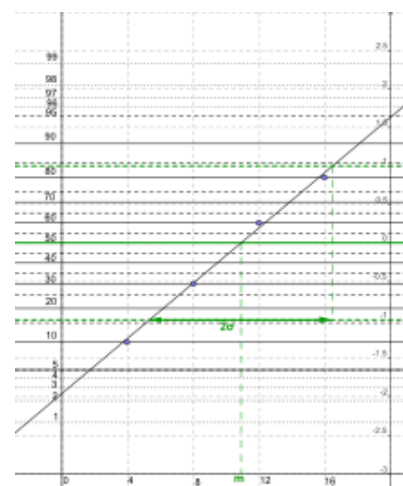
O gráfico de probabilidade normal permite ajustar os valores observados com uma distribuição normal. Isto é, representando o gráfico de probabilidade normal, é possível fazer um diagnóstico sobre a natureza normal da distribuição e, se ela for susceptível a ser normal, é possível determinar a média e o desvio padrão. Os valores $(x_i, i \leq n)$ são observados e representados pela função de distribuição empírica F_n . Elas são gaussianas se os pontos $(x_i, F_n(x_i))$ representados no papel gráfico gaussiano-aritmético estão alinhados em uma reta chamada Henri.^[122] Um papel gaussiano-aritmético é formado por um eixo aritmético das abscissa e é calculada pelo inverso da função de distribuição da distribuição normal padrão de ordem Φ^{-1} .^[123]

Estes critérios são necessários, mas não são suficientes para afirmar que os valores são normalmente distribuídos.^[124]

Testes de normalidade

Com seu papel no teorema central do limite, a distribuição normal é encontrada em muitos dos testes estatísticos chamados gaussianos ou assintoticamente gaussianos. O pressuposto de normalidade é feito sobre uma distribuição a priori em um teste de aderência para indicar que esta distribuição segue aproximadamente uma distribuição normal.^[109] Existem vários testes de normalidade.

- O teste qui-quadrado de aderência para a distribuição normal permite testar se uma série de k valores observados segue uma distribuição normal. Neste tipo de teste, a hipótese nula é que a distribuição observada pode ser aproximada pela distribuição normal. Tendo agrupado os k valores observados, calcular as probabilidades de uma variável aleatória de distribuição normal pertencer a uma classe em estimativa dos parâmetros da distribuição devidos aos valores observados. Estas probabilidades podem ser obtidas com as tabelas numéricas da distribuição normal. Se a hipótese nula for verdadeira, a estatística qui-quadrado calculada a partir dos valores observados e das probabilidades anteriores seguem uma distribuição qui-quadrado. O número do grau de liberdade é $k - 1$ se a média e o desvio padrão são conhecidos, $k - 2$ se um dos dois parâmetros é



Linha de Henry representada em um papel gaussiano-aritmético.

desconhecido ou $k = 3$ se os dois parâmetros são desconhecidos. A hipótese nula é rejeitada se a estatística qui-quadrado é superior ao valor obtido por meio da tabela do limiar da distribuição qui-quadrado α .^[125]

- O teste de Lilliefors é baseado na comparação entre a função de distribuição da distribuição normal e a função de distribuição empírica. É uma adaptação do teste de Kolmogorov–Smirnov. As opiniões sobre o poder do teste são divididas. Ele é eficiente em torno da média, mas nem tanto para a comparação das caudas de distribuição. Os valores observados $(x_i, i \leq n)$ são dispostos em ordem crescente $(x_{(i)}, i \leq n)$. Os valores $F_i = \Phi((x_{(i)} - \bar{x})/s)$ são as frequências teóricas da distribuição normal centrada reduzida associada com os valores normalizados. Se a estatística

$$D = \max_{i=1, \dots, n} \left(F_i - \frac{i-1}{n}; \frac{i}{n} - F_i \right) \text{ for superior a um valor crítico calculado pelo limiar } \alpha \text{ e ao tamanho}$$

da amostra, então o pressuposto de normalidade é rejeitado no limiar α .^[126]

- O teste de Anderson–Darling é outra versão do teste de Kolmogorov–Smirnov mais adequada ao estudo das caudas de distribuição. Usando a mesma notação que o teste de Lilliefors, se a estatística

$$A = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) (\ln(F_i) + \ln(1 - F_{n-i+1})) \text{ for superior a um valor crítico calculado pelo}$$

limiar α e ao tamanho da amostra, então o pressuposto de normalidade é rejeitado no limiar α .^[126]

- O teste D'Agostino é baseado nos coeficientes de simetria e de curtose. É particularmente eficaz a partir de $n \geq 20$ valores observados. Embora a ideia do teste seja simples, as fórmulas são mais complicadas. A ideia é construir modificações dos coeficientes de simetria e de curtose para obter as variáveis z_1 e z_2 da distribuição normal padrão. Então, é realizado um teste qui-quadrado com estatística $z_1^2 + z_2^2$.^[126]

- O teste Jarque–Bera também é baseado nos coeficientes de simetria e de curtose. O teste somente é interessante para um número elevado de valores observados. Considerando os dois estimadores

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \text{ e } b_2 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2}, \text{ deve-se realizar um teste qui-quadrado}$$

com estatística $T = n(b_1^2/6 + (b_2 - 3)^2/24)$.^[126]

- O teste de Shapiro–Wilk proposto em 1965 é eficaz para pequenas amostras com menos de 50 valores. Os valores observados $(x_i, i \leq n)$ são dispostos em ordem crescente $(x_{(i)}, i \leq n)$ e os coeficientes a_i são calculados a partir do quantil, da média, da variância e da covariância de uma

$$\text{distribuição normal. Se a estatística } W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{[n/2]} a_i (x_{(n-i+1)} - x_{(i)}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \text{ for inferior a um valor crítico}$$

calculado pelo limiar α e ao tamanho da amostra, então o pressuposto de normalidade é rejeitado no limiar α .^[126]

Estimativa dos parâmetros

Quando um fenômeno aleatório é observado e considera-se que ele pode ser modelado por uma distribuição normal, uma das perguntas que podem ser feitas é quanto valem os parâmetros μ e σ da distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$? Então, é realizada uma estimativa. As observações coletadas durante a observação do fenômenos são notadas para as variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n . As notações da média aritmética e da média quadrada também são úteis:

$$\bar{S}_n = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n) \text{ e } T_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{S}_n)^2. \text{ [127]}$$

Estes dois valores são respectivamente estimadores da média e do desvio padrão que são calculados a partir dos valores observados. Como variáveis X_1, X_2, \dots, X_n tem distribuição normal, então \bar{S}_n tem distribuição $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ e T_{n-1} tem distribuição qui-quadrado $\chi^2(n-1)$.^[127]

Estimativa da média μ quando o desvio padrão é conhecido

Um método consiste em procurar um limiar α de um intervalo de confiança em torno da média teórica μ . Usando os quantis de ordem $\frac{\alpha}{2}$ e $1 - \frac{\alpha}{2}$, a fórmula que define os quantis permite obter $\mathbb{P}\left(\bar{S}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{S}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_{\alpha/2}\right) \geq 1 - \alpha$. Com os valores observados e as tabelas da distribuição normal padrão, então é possível fornecer os valores numéricos de intervalo $\left[\bar{S}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_{\alpha/2}, \bar{S}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_{1-\alpha/2}\right]$ de limiar α .^[127]

Estimativa da média μ quando o desvio padrão não é conhecido

Um método consiste em usar uma variável intermediária que pode ser escrita com as novas variáveis aleatórias U de distribuição $\chi^2(n-1)$: $\frac{\bar{S}_n - \mu}{T_{n-1}} = \frac{U\sqrt{n-1}}{\sqrt{V}}$ tem distribuição de Student $t(n-1)$. Usando os quantis de ordem $\frac{\alpha}{2}$ e $1 - \frac{\alpha}{2}$, a fórmula que define os quantis permite obter $\mathbb{P}\left(\bar{S}_n + \frac{T_{n-1}}{\sqrt{n}}q_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{S}_n - \frac{T_{n-1}}{\sqrt{n}}q_{\alpha/2}\right) \geq 1 - \alpha$. Com os valores observados e as tabelas da distribuição normal padrão, então é possível fornecer os valores numéricos de intervalo $\left[\bar{S}_n + \frac{T_{n-1}}{\sqrt{n}}q_{\alpha/2}, \bar{S}_n - \frac{T_{n-1}}{\sqrt{n}}q_{\alpha/2}\right]$ para limiar α .^[128]

Estimativa do desvio padrão σ quando a média μ é desconhecida

É o mesmo método que o anterior. A introdução da variável aleatória $T_{n-1}^2 \frac{n-1}{\sigma^2}$ de distribuição qui-quadrado para $n-1$ graus de liberdade permite obter $\mathbb{P}\left(T_{n-1}^2 \frac{n-1}{q_{1-\alpha/2}} \leq \sigma \leq T_{n-1}^2 \frac{n-1}{q_{\alpha/2}}\right) \geq 1 - \alpha$, em que $q_{1-\alpha/2}$ e $q_{\alpha/2}$ são quantis de distribuição qui-quadrado para $n-1$ graus de liberdade que poder obtido pela tabela do qui-quadrado. O intervalo $\left[T_{n-1}^2 \frac{n-1}{q_{1-\alpha/2}}, T_{n-1}^2 \frac{n-1}{q_{\alpha/2}}\right]$ é o intervalo de confiança para o limiar α .^[129]

Simulação

Para estudar um fenômeno aleatório que envolve uma variável normal, cujos parâmetros são conhecidos ou estimados, uma abordagem analítica muitas vezes é muito complexa para ser desenvolvida. Neste caso, é possível utilizar um método de simulação. Particularmente, o método de Monte Carlo que consiste em gerar uma amostra artificial de valores independentes de uma variável com um computador. Geralmente softwares ou linguagens de programação tem um gerador de números pseudoaleatórios com uma distribuição uniforme em $]0, 1[$. Então, transforma-se esta variável de distribuição $U(]0, 1[)$ em uma variável $N(0, 1)$ (adaptação de outros valores dos parâmetros não representa qualquer problema).^[130]

Abordagens para evitar

- De maneira geral, pode-se utilizar a função inversa da função de distribuição: neste caso, a variável aleatória $\Phi^{-1}(U)$ segue a distribuição normal padrão. Entretanto, este método não é conveniente por falta de expressões simples de funções Φ e Φ^{-1} . Além disso, os resultados são numericamente insatisfatórios.^[131]
- Se U_1, U_2, \dots, U_{12} são doze variáveis independentes de distribuição uniforme em $[0, 1]$, então a variável $\sum_{k=1}^{12} U_k - 6$ tem média nula e desvio padrão unitário. Portanto, o devido ao teorema central do

limite, esta variável segue aproximadamente a distribuição normal padrão. Esta é uma maneira simples de gerar uma distribuição normal, porém a aproximação permanece imprecisa.^[132]

Abordagens eficientes

- Um melhor algoritmo é o método de Box–Muller, que utiliza uma representação polar de duas coordenadas uniformes dadas pelas fórmulas seguintes. Se $\begin{cases} U \sim \mathcal{U}(0, 1) \\ V \sim \mathcal{U}(0, 1) \end{cases}$, então

$\begin{cases} \sqrt{-2\ln(U)} \cos(2\pi V) \sim N(0, 1) \\ \sqrt{-2\ln(U)} \sin(2\pi V) \sim N(0, 1) \end{cases}$, em que as duas variáveis resultantes são independentes. Este algoritmo é simples de ser realizado, mas o cálculo de um logaritmo, de uma raiz quadrada e de uma função trigonométrica retarda o processo.^[132]

- Uma melhoria foi proposta por Marsaglia e Bray em 1964, que substitui os cossenos e os senos pelas variáveis V_1/\sqrt{W} e V_2/\sqrt{W} ou V_1 e V_2 independentes de distribuição $U(-1, 1)$ e $W = V_1^2 + V_2^2$ quando $W < 1$ (são rejeitados os pares que não verificarem a última condição).^[133] Portanto,

$\begin{cases} V_1 \sqrt{-2 \frac{\ln W}{W}} \sim N(0, 1) \\ V_2 \sqrt{-2 \frac{\ln W}{W}} \sim N(0, 1). \end{cases}$ Este algoritmo não é mais pesado para ser implementado e a simulação tem ganhado velocidade.^[132]

- Para um grande número de impressões aleatórias, o método Ziggourat é mais rápido, mas a implementação é mais complexa.^[134]

Implementação em software de computação

A distribuição normal foi incorporada em vários softwares de computação.

Planilhas

As planilhas em Microsoft Excel, OpenOffice.org Calc e LibreOffice Calc fornecem as seguintes funções:^{[135][136][137]}

- LOI.NORMALE(x ; mu ; sigma ; cumulative) (em inglês, NORMDIST) : dá
 - se *cumulative* for booleano FAUX, a densidade de probabilidade da distribuição normal de esperança mu e desvio padrão sigma em x.
 - se *cumulative* for booleano VRAI, a função de distribuição da distribuição normal de esperança mu e desvio padrão sigma em x.
- PHI(x) : dá a densidade de probabilidade da distribuição normal padrão ϕ em x.
- LOI.NORMALE.STANDARD(x) (NORMSDIST) : dá a função de distribuição da distribuição normal padrão Φ em x.
- LOI.NORMALE.INVERSE(p ; mu ; sigma) (NORMINV) dá o quantil q de uma distribuição normal para uma probabilidade p.
- LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(p) (NORMSINV)
- CENTREE.REDUITE(x ; mu ; sigma) (STANDARDIZE) retorna $(x - \mu) / \sigma$.

Linguagem de programação estatística S

A linguagem S, implementada no software R e S-PLUS, fornece as seguintes funções:^[138]

- dnorm() : densidade de probabilidade da distribuição normal

- `dnorm(x)` : para uma distribuição normal padrão em x ; `dnorm(x, log=TRUE)` dá o logaritmo natural do valor.
- `dnorm(x, mu, sigma)` ou `dnorm(x, mean = mu, sd = sigma)` : para uma distribuição normal de esperança μ e desvio padrão σ em x ; pode ser adicionado `log = TRUE`,
- `pnorm()` : função de distribuição de uma distribuição normal
 - `pnorm(q)` : para uma distribuição normal padrão; `lower.tail = FALSE` dá o adicional $1 - \Phi$, `log.p = TRUE` dá o logaritmo natural do valor
 - `pnorm(q, mu, sigma)` ou `pnorm(q, mean = mu, sd = sigma)` : idem para uma distribuição normal de esperança μ e desvio padrão σ em x
- `qnorm()` : dá os quantis de uma distribuição normal
 - `qnorm(p)` : para uma distribuição normal padrão; `lower.tail = FALSE` dá o quantil do adicional $1 - \Phi$, `log.p = TRUE` dá o logaritmo natural do valor
 - `qnorm(p, mu, sigma)` ou `qnorm(p, mean = mu, sd = sigma)` : idem para uma distribuição normal de esperança μ e desvio padrão σ
- `rnorm()` : gerador de números aleatórios de acordo com uma distribuição normal
 - `rnorm(n)` : gerador de n números aleatórios em uma distribuição normal padrão
 - `rnorm(n, mu, sigma)` ou `rnorm(n, mean = mu, sd = sigma)` : idem para uma distribuição normal de esperança μ e desvio padrão σ
- `ks.test(A, "dnorm")` : teste de normalidade de Kolmogorov–Smirnov

Matlab / Octave

O Matlab oferece os seguintes comandos:^[139]

- `randn(n)` : gerador de n números aleatórios em uma distribuição normal padrão
`randn(m, n)` : gerador de n números aleatórios em uma matriz $m \times n$
- `normcdf(x, mu, sigma)`, `cdf('norm', x, mu, sigma)` e `cdf('Normal', x, mu, sigma)` : função de distribuição em x da distribuição normal de esperança μ e desvio padrão σ (função de distribuição cumulativa)
- `normpdf(x, mu, sigma)`, `pdf('norm', x, mu, sigma)` e `pdf('Normal', x, mu, sigma)` : densidade de probabilidade em x da distribuição normal de esperança μ e desvio padrão σ (função de distribuição de probabilidade)
- `[mu, sigma] = normfit(X)` : determina a esperança e o desvio padrão de um conjunto de dados X de regressão

Scilab

O Scilab (libre et gratuit) oferece os seguintes comandos:^[140]

- `rand(m, n, "normal")` : matriz $m \times n$ de números aleatórios de distribuição normal padrão;
`rand(A, "normal")` dá uma matriz de mesma dimensão que a matriz A
- `grand(m, n, "nor", mu, sigma)` : matriz $m \times n$ de números aleatórios de distribuição normal de esperança μ e desvio padrão σ
- `cdfnor("PQ", x, mu, sigma)` : valor p da função de distribuição (função de distribuição cumulativa) em x para uma distribuição normal de esperança μ e desvio padrão σ
- `cdfnor("X", mu, sigma, p, 1 - p)` : valor do quantil q para uma probabilidade p
- `cdfnor("Mean", sigma, p, 1 - p, x)` : esperança de uma distribuição normal com desvio padrão σ e probabilidade cumulada em x para p
- `cdfnor("Std", p, 1 - p, x, mu)` : desvio padrão de uma distribuição normal com probabilidade cumulada em x para p e esperança μ

As opções "Mean" e "Std" executam regressão se x e p são vetores.

A extensão Atoms CASCI fornecem outras funções que tem uma escrita mais simples.

- `cdfnormal(x)` : função de distribuição Φ da distribuição normal padrão
`cdfnormal(x, mu, sigma)` : função de distribuição de uma distribuição normal de esperança μ e desvio padrão σ
- `idfnormal(p)` : quantil Φ^{-1} da distribuição normal padrão (função de distribuição cumulativa inversa)
`idfnormal(p, mu, sigma)` : idem para uma distribuição de esperança μ e desvio padrão σ
- `pdfnormal(x)` : densidade de probabilidade ϕ da distribuição normal padrão (função de distribuição de probabilidade)
`pdfnormal(x, mu, sigma)` : idem para uma distribuição de esperança μ e desvio padrão σ
- `rndnormal(n)` : gerador de n números aleatórios em uma distribuição normal padrão;
`rndnormal(m, n)` gera uma matriz $m \times n$
`rndnormal(n, mu, sigma), rndnormal(m, n, mu, sigma)` : idem para uma distribuição de esperança μ e desvio padrão σ

Homenagem

Por sua ampla utilização nas ciências, a distribuição normal, muitas vezes pela utilização da curva em forma de sino, é destacada em diferentes contextos e é utilizada para representar a universalidade da uma distribuição estatística, entre outros. Francis Galton menciona a distribuição normal em seu trabalho *Natural Inheritance* de 1889^[10]:

“ Je ne connais rien d'autre si propre à frapper l'imagination que cette merveilleuse forme d'ordre cosmique donnée par la Loi de Fréquence des Erreurs... Elle règne avec sérénité et en toute abnégation au milieu de la confusion sauvage. ”

—Francis Galton

Em 1989, foi feita uma homenagem à Carl Friedrich Gauss com a impressão de um bilhete com seu rosto e a curva em forma de sino (pedras suportam a curva de sino, e o caso de alguns matemáticos).^[141]

O estatístico William Youden escreveu em 1962 uma explicação sobre a finalidade e a posição da distribuição normal nas ciências. Ele apresentou o caligrama em formato de sino.^[142]

THE
NORMAL
LAW OF ERROR
STANDS OUT IN THE
EXPERIENCE OF MANKIND
AS ONE OF THE BROADEST
GENERALIZATIONS OF NATURAL
PHILOSOPHY ♦ IT SERVES AS THE
GUIDING INSTRUMENT IN RESEARCHES
IN THE PHYSICAL AND SOCIAL SCIENCES AND
IN MEDICINE AGRICULTURE AND ENGINEERING ♦
IT IS AN INDISPENSABLE TOOL FOR THE ANALYSIS AND THE
INTERPRETATION OF THE BASIC DATA OBTAINED BY OBSERVATION AND
EXPERIMENT

Em português, a lei normal do erro destaca-se na experiência da humanidade como uma das mais amplas generalizações de filosofia natural. Ela serve como instrumentos guias em pesquisas nas ciências físicas e sociais, na medicina, na agricultura e na engenharia. Ela é uma ferramenta essencial para a análise e a interpretação dos dados básicos obtidos pela observação e experimentação.

Referências

1. Bittencourt, Hélio Radke; Viali, Lori. «Contribuições para o Ensino da Distribuição Normal ou Curva de Gauss em Cursos de Graduação» (http://www.pucrs.br/famat/viali/mestrado/literatura/artigos/planilhas/Sipem_06.pdf) (PDF). III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Consultado em 10 de abril de 2017
2. «3 – Processos Estocásticos» (http://www.pucrs.br/famat/viali/mestrado/literatura/artigos/planilhas/Sipem_06.pdf) (PDF). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC – Rio). Consultado em 10 de abril de 2017
3. Davila, Victor Hugo Lachos. «Introdução às Séries Temporais» (<http://www.ime.unicamp.br/~hlachos/MaterialSeries.pdf>) (PDF). Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Consultado em 10 de abril de 2017
4. Lestienne, Rémy (2008). *O Acaso Criador*. [S.l.]: edUSP. p. 61. 297 páginas
5. «Distribuição Normal» (https://www.ime.usp.br/~hbolfar/aula_2013/Aula6-A12012.pdf) (PDF). Universidade de São Paulo (USP). Consultado em 10 de abril de 2017
6. «Teorema Central do Limite» (<http://leg.ufpr.br/~silvia/CE001/node38.html>). Universidade Federal do Paraná (UFPR). Consultado em 10 de abril de 2017
7. «Distribuição Normal – Estimação» (https://web.archive.org/web/20170822212659/http://www.fau.usp.br/cursos/graduacao/arq_urbanismo/disciplinas/aut0516/Apostila_2_-_DistribuiCAo_Amostral.pdf) (PDF). Universidade de São Paulo (USP). Consultado em 10 de abril de 2017. Arquivado do original (http://www.fau.usp.br/cursos/graduacao/arq_urbanismo/disciplinas/aut0516/Apostila_2_-_DistribuiCAo_Amostral.pdf) (PDF) em 22 de agosto de 2017
8. Duarte, Marcus Antonio Viana; Meola, Tatiana (Outubro de 2017). «Curso de Planejamento Experimental» (ftp://mecanica.ufu.br/LIVRE/Duarte/PE/Aula1_05_03_2015/apostila_estadistica_Duarte.pdf) (PDF). Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Consultado em 10 de abril de 2017
9. Bru, Bernard (2006). «La Courbe de Gauss ou le Théorème de Bernoulli Raconté aux Enfants» (<http://archive.wikiwix.com/cache/?url=http%3A%2F%2Fwww.ehess.fr%2Frevue-msh%2Fpdf%2F175R1241.pdf>) (PDF). *Mathematics and Social Sciences*. **175** (3): 5 – 23
10. Fuchs, Aimé (1995). «Plaidoyer pour la Loi Normale» (<http://www-irma.u-strasbg.fr/~foata/fuchs/FuchsNormale.pdf>) (PDF). *Pour la Science*: 17
11. Stigler, Stephen (1999). *Statistics on the Table*. [S.l.]: Harvard University Press. p. 407. 499 páginas
12. Stigler, Stephen (1999). *Statistics on the Table*. [S.l.]: Harvard University Press. p. 406. 499 páginas
13. Lévy, Paul (1937). *Théorie de L'Addition des Variables Aléatoires*. [S.l.]: Gauthier – Villars. p. 42
14. Lejeune, Michel (2006). *Analyse Statistique des Données Spatiales*. [S.l.]: Technip. p. 2
15. *A Guide to Tables of the Normal Probability Integral*. National Institute of Standards and Technology: U.S. Government Publishing Office. 1952. p. 16
16. Dodge, Yadolah (2004). *Statistique – Dictionnaire Encyclopédique*. [S.l.]: Springer–Verlag. p. 502. 637 páginas
17. Larson, Ron; Farber, Betsy (2004). *Estatística Aplicada*. [S.l.]: Pearson Education do Brasil. 1 páginas
18. Kahane, Jean–Pierre (1 de julho de 2009). «La Courbe en Cloche» (<http://images.math.cnrs.fr/La-courbe-en-cloche.html?lang=fr>). CNRS – Images des Maths. Consultado em 16 de fevereiro de 2017
19. Lifshits, M. A. (1995). *Gaussian Random Functions*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers. p. 1. 339 páginas
20. Larson, Ron; Farber, Betsy (2004). *Estatística aplicada*. [S.l.]: Pearson Education do Brasil. 1 páginas
21. Larson, Ron; Farber, Betsy (2004). *Estatística aplicada*. [S.l.]: Pearson Education do Brasil. 1 páginas
22. Dodge, Yadolah (2004). *Statistique – Dictionnaire Encyclopédique*. [S.l.]: Springer–Verlag. p. 309. 637 páginas
23. Farias, Ana Maria Lima de; Kubrusly, Jessica Quintanilha; Souza, Mariana Albi de Oliveira. «GET00143 – Teoria das Probabilidades II – Variáveis Aleatórias Unidimensionais» (https://web.archive.org/web/20170411055543/http://www.professores.uff.br/jessica/images/materiais_didaticos/GET00143-0.pdf) (PDF). Universidade Federal Fluminense (UFF). p. 145. 222 páginas. Consultado em 10 de abril de 2017. Arquivado do original (http://www.professores.uff.br/jessica/images/materiais_didaticos/GET00143-0.pdf) (PDF) em 11 de abril de 2017
24. Lifshits, M. A. (1995). *Gaussian Random Functions*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers. p. 2. 339 páginas
25. Araujo, Maria Julieta Ventura Carvalho de. «Capítulo 3: Limite de uma Função e Continuidade» (http://www.ufjf.br/sandro_mazorc

- he/files/2010/08/Cap%C3%ADulo-32.pdf) (PDF). Universidade Federal de Juiz de Fora. p. 52. Consultado em 17 de abril de 2017
26. Tassi, Philippe; Legait, Sylvia (1990). *Théorie des Probabilités en vue des Applications Statistiques*. [S.l.]: Technip. p. 128. 367 páginas
 27. Cramér, Harald (1970). *Random Variables and Probability Distributions*. [S.l.]: Cambridge University Press. p. 50. 123 páginas
 28. Grinstead, Charles Miller; Snell, James Laurie (1997). *Introduction to Probability* 2ª ed. [S.l.]: American Mathematical Society. p. 330. 519 páginas
 29. Marsaglia, George (2004). «Evaluating the Normal Distribution» (<http://www.jstatsoft.org/v11/i05/paper>). *Journal of Statistical Software*. **11** (4): 1 – 11
 30. Geller, Daryl N. «Lebesgue-Stieltjes Integrals» (<https://www.math.stonybrook.edu/~daryl/lis.pdf>) (PDF). Stony Brook University. pp. 1 – 4. Consultado em 17 de abril de 2017
 31. Ministère de l'Éducation Nationale de la Jeunesse et de la Vie Associative (2012). «Ressources pour la Classe Terminale Générale et Technologique – Probabilités et Statistique» (http://media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/11/5/LyceegT_ressources_Math_T_proba-stat_207115.pdf) (PDF)
 32. Droesbeke, Jean-Jacques; Lejeune, Michel; Saporta, Gilbert (2005). *Modèles Statistiques pour Données Qualitatives*. [S.l.]: Technip. p. 104. 295 páginas
 33. Bogaert, Patrick (2006). *Probabilités pour Scientifiques et Ingénieurs*. Paris: Éditions De Boeck. p. 122. 387 páginas
 34. Cramér, Harald (1970). *Random Variables and Probability Distributions* 3ª ed. [S.l.]: Cambridge University Press. p. 51. 123 páginas
 35. Paula, Fábio P. Machado e Gilberto A. (2016). «Teorema do Limite Central» (<https://www.ime.usp.br/~giapaula/Aula%209-Teorema%20do%20Limite%20Central-MAE0219.pdf>) (PDF). IMEUSP. p. 38. Consultado em 17 de abril de 2017
 36. Bogaert, Patrick (2006). *Probabilités pour Scientifiques et Ingénieurs*. Paris: Éditions De Boeck. p. 123. 387 páginas
 37. Protassov, Konstantin (2002). *Analyse Statistique des Données Expérimentales*. [S.l.]: EDP Sciences. p. 27. 148 páginas
 38. Protassov, Konstantin (2002). *Analyse Statistique des Données Expérimentales*. [S.l.]: EDP Sciences. p. 28. 148 páginas
 39. Bussab, Wilton de O.; Pedro A., Morettin (2010). *Estatística básica*. São Paulo: Saraiva. 176 páginas
 40. Ross, Sheldon M. (2007). *Initiation aux Probabilités*. [S.l.]: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. p. 408. 592 páginas
 41. Dodge, Yadolah (2004). *Statistique – Dictionnaire Encyclopédique*. [S.l.]: Springer-Verlag. p. 310. 637 páginas
 42. Bogaert, Patrick (2006). *Probabilités pour Scientifiques et Ingénieurs*. Paris: Éditions De Boeck. p. 116. 387 páginas
 43. Ross, Sheldon M. (2007). *Initiation aux Probabilités*. [S.l.]: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. p. 239. 592 páginas
 44. Viali, Lorí. «Série probabilidade» (http://www.pucrs.br/famat/viali/graduacao/producao/probabilidade/material/apostilas/Prob_2.pdf) (PDF). PUCRS. p. 2. Consultado em 17 de abril de 2017
 45. Weisstein, Eric W. «Gaussian Function» (<http://mathworld.wolfram.com/GaussianFunction.html>). MathWorld. Consultado em 22 de fevereiro de 2017
 46. Droesbeke, Jean-Jacques; Lejeune, Michel; Saporta, Gilbert (2005). *Modèles Statistiques pour Données Qualitatives*. [S.l.]: Technip. p. 85
 47. Bogaert, Patrick (2006). *Probabilités pour Scientifiques et Ingénieurs*. Paris: Éditions De Boeck. p. 120. 387 páginas
 48. Protassov, 2002, p. 28.
 49. SAMPAIO, JOAO CARLOS VIEIRA. «Integração por partes» (http://www.dm.ufscar.br/~sampaio/calculo1_aula16.pdf) (PDF). UFSCAR. p. 141. Consultado em 17 de abril de 2017
 50. Bogaert, Patrick (2006). *Probabilités pour Scientifiques et Ingénieurs*. Paris: Éditions De Boeck. p. 119
 51. «6 – Medidas de Assimetria e Curtose» (<http://wiki.icmc.usp.br/images/0/0d/Parte6AED2012.pdf>) (PDF). Universidade de São Paulo (USP). Consultado em 10 de abril de 2017
 52. Casella, George; Berger, Roger L. (2010). *Inferência Estatística*. [S.l.]: Centage Learning. p. 72
 53. Abramowitz, Milton; Stegun, Irene (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas* 9ª ed. New York: Dover. p. 930
 54. Grinstead, Charles Miller; Snell, James Laurie (1997). *Introduction to Probability* 2ª ed. [S.l.]: American Mathematical Society. p. 345. 519 páginas
 55. Protassov, Konstantin (2002). *Analyse Statistique des Données Expérimentales*. [S.l.]: EDP Sciences. p. 44. 148 páginas
 56. Bussab, Wilton de O.; Morettin, Pedro A. (2010). *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva. 143 páginas
 57. Bussab, Wilton de O.; Morettin, Pedro A. (2010). *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva. 77 páginas
 58. Bogaert, Patrick (2006). *Probabilités pour Scientifiques et Ingénieurs*. Paris: Éditions De Boeck. p. 223. 387 páginas

59. Yger, Alain; Weil, Jacques–Arthur (2009). *Mathématiques Appliquées*. [S.l.]: Pearson Education. p. 651. 890 páginas
60. Waiandt, Euclésio Rangel (2014). «Alguns Teoremas Limites para Sequência de Variáveis Aleatórias» (<http://repositorio.ufes.br/bitstream/101704/1/Alguns%20teoremas%20limites%20para%20sequencias%20de%20variaveis%20aleatorias.pdf>) (PDF). Universidade Federal do Espírito Santo. p. 11. Consultado em 17 de abril de 2017
61. Araujo, Tarciana Liberal Pereira de. «Probabilidade II» (<http://www.de.ufpb.br/~tarciana/Probabilidade2/Aula20.pdf>) (PDF). Universidade Federal da Paraíba. p. 2. Consultado em 17 de abril de 2017
62. Araujo, Tarciana Liberal Pereira de. «Probabilidade II» (<http://www.de.ufpb.br/~tarciana/Probabilidade2/Aula20.pdf>) (PDF). Universidade Federal da Paraíba. p. 3. Consultado em 17 de abril de 2017
63. Araujo, Tarciana Liberal Pereira de. «Probabilidade II» (<http://www.de.ufpb.br/~tarciana/Probabilidade2/Aula20.pdf>) (PDF). Universidade Federal da Paraíba. p. 5. Consultado em 17 de abril de 2017
64. Ross, Sheldon M. (2007). *Initiation aux Probabilités*. [S.l.]: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. p. 299. 592 páginas
65. Gomes, Luís Aguiar. «Convolução e Transformadas de Fourier» (<http://cee.uma.pt/people/faculty/luis.gomes/optica/T/TF%20E%20convoluc%C3%A7%C3%A3o.pdf>) (PDF). Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia. pp. 8 – 10. Consultado em 17 de abril de 2017
66. Lifshits, M. A. (1995). *Gaussian Random Functions*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers. p. 4. 339 páginas
67. Cramér, Harald (1970). *Random Variables and Probability Distributions* 3ª ed. [S.l.]: Cambridge University Press. p. 52. 123 páginas
68. Cramér, Harald (1970). *Random Variables and Probability Distributions* 3ª ed. [S.l.]: Cambridge University Press. p. 53. 123 páginas
69. Ross, Sheldon M. (2007). *Initiation aux Probabilités*. [S.l.]: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. p. 235. 592 páginas
70. Mandelbrot, Benoît (1966). «Nouveaux Modèles de la Variation des Prix (Cycles Lents et Changements Instantanés)» (http://www.jstor.org/stable/20075411?seq=1#page_scan_tab_contents). *Cahiers du Séminaire d'Économétrie* (9): 53 – 66
71. «Distribuição de probabilidade» (https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/7614/7614_3.PDF) (PDF). PUC-RIO. p. 6. Consultado em 19 de abril de 2017
72. McCulloch, J. Huston (1 de janeiro de 1986). «Simple consistent estimators of stable distribution parameters» (<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03610918608812563>). *Communications in Statistics - Simulation and Computation*. **15** (4): 1109–1136. ISSN 0361-0918 (<https://www.worldcat.org/issn/0361-0918>). doi:10.1080/03610918608812563 (<https://dx.doi.org/10.1080%2F03610918608812563>)
73. Lifshits, M. A. (1995). *Gaussian Random Functions*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers. p. 125. 339 páginas
74. IVANISVILI, AATA (16 de maio de 2016). «BOUNDARY VALUE PROBLEM AND THE EHRHARD INEQUALITY» (<https://arxiv.org/pdf/1605.04840.pdf>) (PDF). Cornell University Library. p. 16. Consultado em 19 de abril de 2017
75. Shannon, Claude (1948). «A Mathematical Theory of Communication» (<http://math.harvard.edu/~ctm/home/text/others/shannon/entropy/entropy.pdf>) (PDF). *The Bell System Technical Journal*. **27**: 379 – 423
76. Allison, Lloyd (2012). «Normal, Gaussian» (<http://www.allisons.org/ll/MML/KL/Normal/>). Consultado em 2 de março de 2017
77. Abramowitz, Milton; Stegun, Irene (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas* 9ª ed. New York: Dover. p. 932. 1047 páginas
78. Tassi, Philippe; Legait, Sylvia (1990). *Théorie des Probabilités en vue des Applications Statistiques*. [S.l.]: Technip. p. 126. 367 páginas
79. Bonini, Edmundo Eboli (1979). «Principais tabelas estatísticas aplicadas à contabilidade e à auditoria» (http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-75901979000300009). Principais tabelas estatísticas aplicadas à contabilidade e à auditoria. p. 1. Consultado em 19 de abril de 2017
80. Bogaert, Patrick (2006). *Probabilités pour Scientifiques et Ingénieurs*. Paris: Éditions De Boeck. p. 354. 387 páginas
81. Grinstead, Charles Miller; Snell, James Laurie (1997). *Introduction to Probability* 2ª ed. [S.l.]: American Mathematical Society. p. 213. 519 páginas
82. Grinstead, Charles Miller; Snell, James Laurie (1997). *Introduction to Probability* 2ª ed. [S.l.]: American Mathematical Society. p. 214. 519 páginas
83. «Tabelas Estatística» (http://pessoais.dps.uminho.pt/lac/2007-2008/EST2/tabelas_estatisticas.pdf) (PDF). Universidade do Minho. 2008. p. 26. Consultado em 19 de abril de 2017
84. Protasov, 2002, p. 72.
85. Protasov, Konstantin (2002). *Analyse Statistique des Données Expérimentales*. [S.l.]:

- EDP Sciences. p. 44. 72 páginas
86. Protassov, Konstantin (2002). *Analyse Statistique des Données Expérimentales*. [S.l.]: EDP Sciences. p. 29. 148 páginas
 87. Bogaert, Patrick (2006). *Probabilités pour Scientifiques et Ingénieurs*. Paris: Éditions De Boeck. p. 90. 387 páginas
 88. «Capítulo X – Teste do Qui-quadrado, χ^2 » (http://www.fis.uc.pt/data/20072008/apontamentos/apnt_5_10.pdf) (PDF). Universidade de Coimbra. 2007. pp. 89 – 166. Consultado em 19 de abril de 2017
 89. Viali, Lorí (2008). «Teste de hipótese não paramétrico» (http://www.mat.ufrgs.br/~viali/estatistica/mat2282/material/apostilas/Testes_Nao_Parametricos.pdf) (PDF). UFRGS. p. 8. Consultado em 19 de abril de 2017
 90. Costa, Antônio Fernando Branco; Magalhães, Maysa Sacramento de (18 de maio de 2005). «O uso da estatística de qui-quadrado no controle de processos» (<http://www.scielo.br/pdf/gp/v12n2/26093.pdf>) (PDF). The Scientific Electronic Library Online. 2 páginas. Consultado em 19 de abril de 2017
 91. Ross, Sheldon M. (2007). *Initiation aux Probabilités*. [S.l.]: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. p. 301. 592 páginas
 92. Yger, Alain; Weil, Jacques–Arthur (2009). *Mathématiques Appliquées*. [S.l.]: Pearson Education. p. 703. 890 páginas
 93. Yger y Weil, 2009, p. 703.
 94. Ferrari, Nicolas (2006). «Prévoir l'investissement des Entreprises – Un Indicateur des Révisions dans l'Enquête Investissement» (<https://www.insee.fr/fr/statistiques/1376387?sommaire=1376397>). *Économie et Statistique* (395 – 396): 39 – 64
 95. Bogaert, 2006, p. 330.
 96. Pham–Gia, T.; Turkkan, N.; Marchand, E. (1º de setembro de 2006). «Density of the Ratio of Two Normal Random Variables and Applications» (<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03610920600683689>). *Communications in Statistics – Theory and Methods*. **35**: 1569 – 1591
 97. Bogaert, Patrick (2006). *Probabilités pour Scientifiques et Ingénieurs*. Paris: Éditions De Boeck. p. 341. 387 páginas
 98. Duque, Oscar Mario Londoño (12 de dezembro de 2014). «Uma breve análise do movimento Browniano» (http://portais4.ufes.br/posgrad/tese/s/tese_8192_movimento%20browniano-dissert.%20corrigida%2002-2015.pdf) (PDF). Universidade Federal do Espírito Santo. p. 68. Consultado em 19 de abril de 2017
 99. Henze, Norbert (1986). «A Probabilistic Representation of the 'Skew–Normal' Distribution» (<http://www.jstor.org/stable/10.2307/4616036>). *Scandinavian Journal of Statistics*. **13** (4): 271 – 275
 100. Santos, Caroline Oliveira; Scalón, João Domingos; Ozaki, Vitor Augusto (2014). «A distribuição normal-assimétrica como modelo para produtividade de milho aplicada ao seguro agrícola» (http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-20032014000400006). The Scientific Electronic Library Online. p. 1. Consultado em 19 de abril de 2017
 101. Rouzet, G. (1962). «Étude des Moments de la Loi Normale Tronquée» (<https://eudml.org/doc/105710>). *Revue de Statistique Appliquée*. **10** (2): 49 – 61
 102. Hochreiter, Sepp; Clevert, Djork–Arne; Obermayer, Klaus (2006). «A New Summarization Method for Affymetrix Probe Level Data» (https://oup.silverchair-cdn.com/oup/backfile/Content_public/Journal/bioinformatics/22/8/10.1093/bioinformatics/btl033/2/btl033.pdf?Expires=1488828139&Signature=VZlj1SfTzkXSIV9Pg-XJD571sH1S3uq4xTDqhrw-KnSIFsKNCbhKleC2jZh06-vedt3KtDqDkyd6JM5j6BrunJCX-eYInsojGUufo-e4B6oC16-qhEzPTsBaj70Y2PYh58XUoztUSIONu4i1eRj9Llwm0d-gvBbdVOcXYadwW0Lsa97FoHNYwLrJMapNYDUPXi6D7NP35nyJh732Rf0Eynhh4R7DwwDQHtR-lbfm7jHtcFRh6DGyX9UHwaqt7GGNVuKUJWBEOUhNgcm1WieYwV-b0nMsa2HM1ivgVYeuQ8IJUYKOGqDRoGYFsZ3OxS9PVLhzmqFtrQSVrJyqEKXhg_&Key-Pair-Id=APKAIUCZBIA4LVPVW3Q) (PDF). *Bioinformatics*. **22** (8): 943 – 949
 103. Irvine, Richard (2002). «A Geometrical Approach to Conflict Probability Estimation» (http://www.atmseminar.org/seminarContent/seminar4/papers/p_137_DSTCDM.pdf) (PDF). *Air Traffic Control Quarterly Seminar*. **10** (2): 1 – 15
 104. Hosking, J. R. M.; Wallis, James R. (1997). *Regional Frequency Analysis: An Approach Based on L–Moments*. [S.l.]: Cambridge University Press. p. 197. 224 páginas
 105. «Variáveis aleatórias contínuas: distribuições e aplicações» (http://www.cprm.gov.br/publique/midia/cap5-var_alet_cont.pdf) (PDF). Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais - Serviço Geológico do Brasil. p. 141. Consultado em 19 de abril de 2017
 106. Bogaert, Patrick (2006). *Probabilités pour Scientifiques et Ingénieurs*. Paris: Éditions De Boeck. p. 86. 387 páginas
 107. Zuben, Fernando J. Von; Attux, Romis R. F. (2010). «Polinômios de Hermite e Splines» (ftp://ftp.dca.fee.unicamp.br/pub/docs/vonzuben/ia004_1s10/notas_de_aula/topico1_IA004_1s10_Part_e5.pdf) (PDF). Universidade de Campinas. pp. 20 – 22. Consultado em 19 de abril de 2017
 108. Pasquali, Luiz. «A curva normal» (<https://web.archive.org/web/20081119155349/http://www.psi-ambiental.net/pdf/PasqCap03.pdf>) (PDF). Universidade de Brasília. pp. 1 – 8. Consultado em 19 de abril de 2017. Arquivado do original (<http://www.psi-ambiental.net/pdf/PasqCap03.pdf>)

- tp://www.psi-ambiental.net/pdf/PasqCap03.pdf) (PDF) em 19 de novembro de 2008
109. Seddik-Ameur, Nacira (2003). «Les Tests de Normalité de Lhoste» (<https://msh.revues.org/2886>). *Mathematics and Social Sciences*. **41** (162): 19 – 43
 110. Bogaert, Patrick (2006). *Probabilités pour Scientifiques et Ingénieurs*. Paris: Éditions De Boeck. p. 68. 387 páginas
 111. Mollo, Suzanne (1975). «Tort (Michel). — Le Quotient Intellectuel» ([http://www.persee.fr/doc/rfp_0556-7807_1975_num_33_1_2085_t1_0066_0000_2?](http://www.persee.fr/doc/rfp_0556-7807_1975_num_33_1_2085_t1_0066_0000_2?Prescripts_Search_tabs1=standard&#) [Prescripts_Search_tabs1=standard&#](http://www.persee.fr/doc/rfp_0556-7807_1975_num_33_1_2085_t1_0066_0000_2?Prescripts_Search_tabs1=standard&#)). *Revue Française de Pédagogie*. **33** (33): 66 – 68
 112. Ridley, Mark (2004). *Evolution* 3ª ed. [S.l.]: Blakwell. p. 76. 751 páginas
 113. Ridley, Mark (2004). *Evolution* 3ª ed. [S.l.]: Blakwell. p. 226. 751 páginas
 114. Ridley, Mark (2004). *Evolution* 3ª ed. [S.l.]: Blakwell. p. 252. 751 páginas
 115. Borghi, de Onis; Garza, Van den Broeck; Frongillo, Grummer–Strawn, Van Buuren, Pan; Molinari, Martorell; Onyango, Martines (2006). «Construction of the World Health Organization Child Growth Standards: Selection of Methods for Attained Growth Curves» (<http://www.stefvanbuuren.nl/publications/Construction%20WHO%200-%20Stat%20Med%202006.pdf>) (PDF). *Statistics in Medicine*. **25**: 247 – 265
 116. Hosking, J. R. M.; Wallis, James R. (1997). *Regional Frequency Analysis: An Approach Based on L–Moments*. [S.l.]: Cambridge University Press. p. 157. 224 páginas
 117. Dodge, Yadolah (2004). *Statistique – Dictionnaire Encyclopédique*. [S.l.]: Springer–Verlag. p. 354. 637 páginas
 118. Mandelbrot, Benoît (1966). «Nouveaux Modèles de la Variation des Prix (Cycles Lents et Changements Instantanés)» (http://www.jstor.org/stable/20075411?seq=5#page_scan_tab_contents). *Cahiers du Séminaire d'Économétrie* (9): 53 – 66
 119. Yger, Alain; Weil, Jacques–Arthur (2009). *Mathématiques Appliquées*. [S.l.]: Pearson Education. p. 573. 890 páginas
 120. Filho, Herondino (2014). «Distribuição Normal» (<http://www2.unifap.br/herondino/files/2014/04/7-DISTRIBUI%C3%87%C3%83O-NORMAL.pdf>) (PDF). UNIFAP. p. 2. Consultado em 19 de abril de 2017
 121. Bussab, Wilton de O.; Morettin, Pedro A. (2010). *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva. 311 páginas
 122. Tassi, Philippe; Legait, Sylvia (1990). *Théorie des Probabilités en vue des Applications Statistiques*. [S.l.]: Technip. p. 144. 367 páginas
 123. Dodge, Yadolah (2004). *Statistique – Dictionnaire Encyclopédique*. [S.l.]: Springer–Verlag. p. 228. 637 páginas
 124. Ghasemi, Asghar; Zahediasl, Saleh (1 de janeiro de 2012). «Normality Tests for Statistical Analysis: A Guide for Non-Statisticians» (<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3693611/>). *International Journal of Endocrinology and Metabolism*. **10** (2): 486–489. ISSN 1726-913X (<https://www.worldcat.org/issn/1726-913X>). PMID 23843808 (<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/23843808>). doi:10.5812/ijem.3505 (<https://dx.doi.org/10.5812/ijem.3505>)
 125. Dodge, Yadolah (2004). *Statistique – Dictionnaire Encyclopédique*. [S.l.]: Springer–Verlag. p. 519. 637 páginas
 126. Rakotomalala, Ricco (2011). «Tests de Normalité» (http://eric.univ-lyon2.fr/~ricco/cours/cours/Test_Normalite.pdf) (PDF). Université Lumière Lyon 2. Consultado em 2 de março de 2017
 127. Yger, Alain; Weil, Jacques–Arthur (2009). *Mathématiques Appliquées*. [S.l.]: Pearson Education. p. 715. 890 páginas
 128. Yger, Alain; Weil, Jacques–Arthur (2009). *Mathématiques Appliquées*. [S.l.]: Pearson Education. p. 716. 890 páginas
 129. Yger, Alain; Weil, Jacques–Arthur (2009). *Mathématiques Appliquées*. [S.l.]: Pearson Education. p. 717. 890 páginas
 130. Muller, Ademir (2008). «SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA: O MÉTODO DE MONTE CARLO» (http://www.leg.ufpr.br/lib/exe/fetch.php/disciplinas:ce229:tcc2008_ademir.pdf) (PDF). UFPR. p. 11. Consultado em 19 de abril de 2017
 131. Chhikara, Raj S.; Folks, J. Leroy (1989). *The Inverse Gaussian distribution*. New York: Marcel Dekker. 8 páginas
 132. Atkinson, A. C.; Pearce, M. C. (1976). «The Computer Generation of Beta, Gamma and Normal Random Variables» (<http://www.jstor.org/stable/2344349?seq=6>). *Journal of the Royal Statistical Society*. **139** (4): 431 – 461
 133. Marsaglia, George; Bray, Thomas A. (1964). «A Convenient Method for Generating Normal Variables» (<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1006063>). *SIAM Review*. **6** (3): 260 – 264
 134. Marsaglia, George; Tsang, Wai Wan. «The Ziggurat Method for Generating Random Variables» (<https://core.ac.uk/download/pdf/6287927.pdf>) (PDF). CORE. p. 2. Consultado em 20 de abril de 2017
 135. «Normal Distribution Probability in Excel» (<http://www.statisticshowto.com/how-to-calculate-normal-distribution-probability-in-excel/>). *Statistics How To* (em inglês)
 136. «Documentation/How Tos/Calc: NORMSDIST function - Apache OpenOffice Wiki» (<https://wiki.apache.org/openoffice/Documentation/HowTos/Calc/NORMSDISTfunction>)

- openoffice.org/wiki/Documentation/How_Tos/Calc:_NORMSDIST_function). *wiki.openoffice.org*. Consultado em 23 de abril de 2017
137. «Funções estatísticas - Parte 4 - LibreOffice Help» (https://help.libreoffice.org/Calc/Statistical_Functions_Part_Four/pt-BR). *help.libreoffice.org*. Consultado em 23 de abril de 2017
138. Krause, Andreas; Olson, Melvin (14 de março de 2013). *The Basics of S and S-PLUS* (https://books.google.com.br/books?id=7nfBwAAQBAJ&pg=PA114&lpg=PA114&dq=normal+distribution+%22s-plus%22&source=bl&ots=GnS1mg8kRX&sig=AtqpSHzOPtfXlksZwmXp06lwjqk&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwjl_zKzLnTAhUHK5AKHbboBS4Q6AEIlzAA) (em inglês). [S.l.]: Springer Science & Business Media. p. 114. ISBN 9781475727517
139. «Normal Distribution - MATLAB & Simulink» (<https://www.mathworks.com/help/stats/normal-distribution.html>). *www.mathworks.com*. Consultado em 23 de abril de 2017
140. «cdfnor - Cumulative distribution function normal distribution» (https://help.scilab.org/doc/5.3.3/en_US/cdfnor.html). *help.scilab.org* (em inglês). Consultado em 23 de abril de 2017
141. Michon, Gerard. «Coat-of-arms of Carl Friedrich Gauss (1777-1855) - Numeriana» (<http://www.numericana.com/arms/gauss.htm>). *www.numericana.com* (em inglês). Consultado em 23 de abril de 2017
142. Stigler, Stephen (1999). *Statistics on the Table*. [S.l.]: Harvard University Press. p. 415. 499 páginas

Obtida de "https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Distribuição_normal&oldid=56672958"

Esta página foi editada pela última vez às 15h32min de 8 de novembro de 2019.

Este texto é disponibilizado nos termos da licença Atribuição-Compartilhada Igual 3.0 Não Adaptada (CC BY-SA 3.0) da Creative Commons; pode estar sujeito a condições adicionais. Para mais detalhes, consulte as [condições de utilização](#).