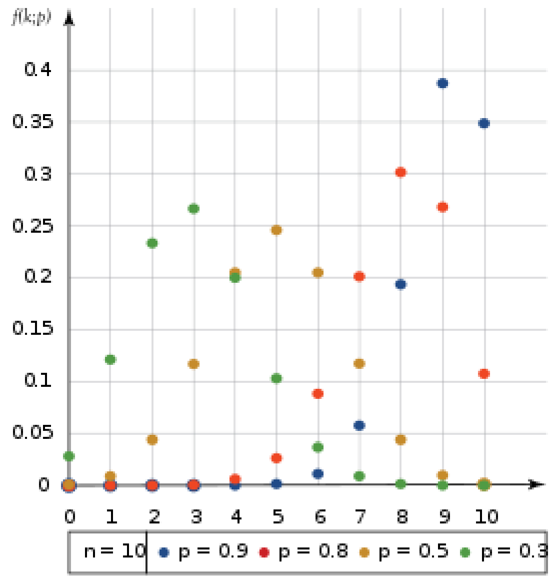
Distribuição binomial

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Em teoria das probabilidades e estatística, a **distribuição binomial** é a distribuição de probabilidade discreta do número de sucessos numa sequência de n tentativas tais que:

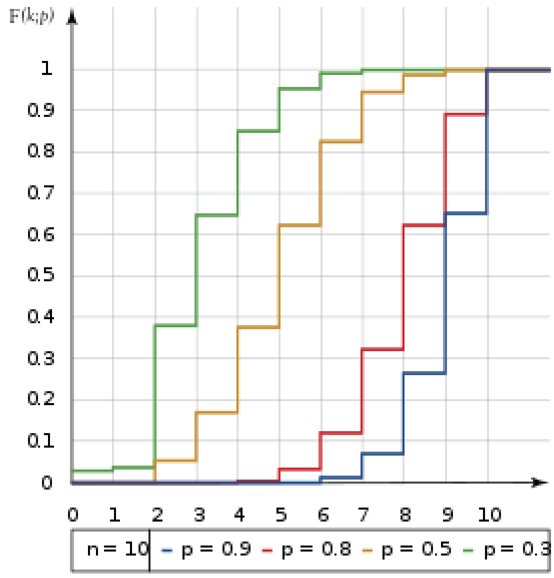
1. Cada tentativa tem exclusivamente como resultado duas possibilidades, sucesso ou fracasso (binomial, a que se chama de tentativa de Bernoulli), e;
2. Cada tentativa é independente das demais, e;
3. A probabilidade de sucesso p a cada tentativa permanece constante independente das demais, e;
4. A variável de interesse, ou pretendida, é o número de sucessos k nas n tentativas.

Distribuição Binomial



Densidade de probabilidade

A cor amarela representa a função ***f*** *de densidade de probabilidade da distribuição Binomial ~ Bin(10,0.5)*



Função de distribuição acumulada

A cor amarela representa a função ***F*** *de distribuição acumulada da distribuição Binomial ~ Bin(10,0.5)*

Índice

Função de probabilidade

Se a variável aleatória X que contém o número de tentativas que resultam em sucesso tem uma distribuição binomial com parâmetros n e p escrevemos $X \sim \mathrm{B}(n, p)$. A probabilidade de ter exatamente k sucessos é dado pela função de probabilidade:

$$f(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ e onde $\binom{n}{k}$ é uma combinação.

Colocando a função completa, incluindo a Combinação:

$$f(k;n,p) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k (1-p)^{n-k}$$

Cada parte da função acima traduz os seguintes dados:

> A combinação $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ contém as ordenações possíveis;
>
> O número de sucesso é p^k, e;
>
> A probabilidade de fracassos é $(1-p)^{n-k}$.

Por meio do desenvolvimento do binômio e algumas operações com expoentes e fatoriais, é possível demonstrar que:

Parâmetros	$n \in \mathbb{N}, n > 0$, número de ensaios $p \in \mathbb{R}, 0 < p < 1$, probabilidade de sucesso em cada ensaio
Suporte	$k \in \{0, 1, \dots n\}$
f.d.p.	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Média	np
Mediana	$\lfloor np \rfloor$ ou $\lceil np \rceil$
Moda	$\lfloor (n+1)p \rfloor$ ou $\lceil (n+1)p - 1 \rceil$
Variância	$np(1-p)$
Obliquidade	$\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$
Curtose	$\frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$
Entropia	$\frac{1}{2}\log_2\left(2\pi e\, np(1-p)\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$
Função Geradora de Momentos	$(1-p+pe^t)^n$
Função Característica	$(1-p+pe^{it})^n$

$$f(k;n,p) = \frac{p}{1-p}\frac{n-k+1}{k} f(k-1;n,p)$$

Exemplos

Exemplo 1

Três dados comuns e honestos serão lançados. A probabilidade de que o número 6 seja obtido mais de uma vez é: A probabilidade de que seja obtido 2 vezes mais a probabilidade de que seja obtido 3 vezes. Usando a distribuição binomial de probabilidade:

Acha-se a probabilidade de que seja obtido 2 vezes:

$$f(2;3,\frac{1}{6}) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2}$$

$$= \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} \times \frac{1}{36} \times (\frac{5}{6})^1 =$$

$$= \frac{3}{1} \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$$

Agora a probabilidade de que seja obtido 3 vezes:

$$f(3;3,\frac{1}{6}) = \binom{3}{3} \times \frac{1}{6}^3 \times (1-\frac{1}{6})^{3-3} =$$

$$= \frac{3!}{3! \cdot (3-3)!} \times \frac{1}{216} \times (\frac{5}{6})^0 =$$

$$= \frac{3!}{3!} \times \frac{1}{216} \times 1 =$$
$$\frac{3!}{3!} = \frac{6}{6} = 1$$
$$= 1 \times \frac{1}{216} \times 1 = \frac{1}{216}$$

Assim, a resposta é:

$$= \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$$

Exemplo 2

Seja X uma variável aleatória que contém o número de caras saídas em 12 lançamentos de uma moeda honesta. A probabilidade de sair 5 caras em 12 lançamentos, $P(X=5)$, é dada por:

$$k = 5, n = 12, p = 0,5$$

$$f(5;12;0,5) = \binom{12}{5} 0,5^5 (1-0,5)^{12-5} = 0,19$$

Valor esperado e variância

Se a X ~ B(n, p) (isto é, X é uma variável aleatória binomialmente distribuida), então o valor esperado de X é

$$E[X] = np$$

e a variância é

$$\mathrm{var}(X) = np(1-p).$$

Ligações externas

- Calculadora - Distribuição binomial (http://www.elektro-energetika.cz/calculations/bi.php?language=portugues)