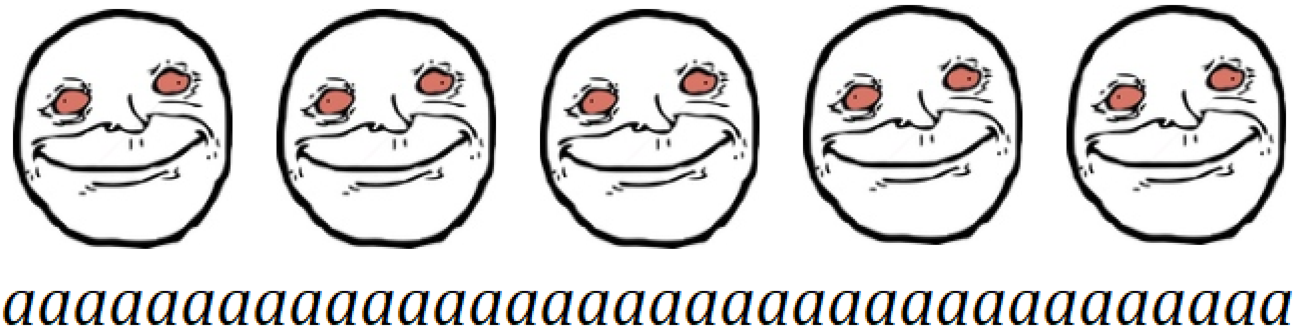
Чёртовы дискретки

Копируйте только *условия* задач. Остальное посмотрите, поймите и перепишите своими словами. А то исключат в два счёта. Писееееееееееееец



Задача 5. Сформулируйте обратное утверждение к утверждению принципа Дирихле. Заметьте, что вполне можно сформулировать это обратное утверждение, хотя оно и будет неверным в общем случае.

Решение. Принцип Дирихле: пусть задана функция $f : A \to B$ на конечных множествах A и B, причём $|A| > n|B|$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда некоторое своё значение функция f примет по крайней мере $n+1$ раз.

Обратное утверждение будет звучать так: пусть задана функция $f : A \to B$ на конечных множествах A и B, причём некоторое своё значение функция принимает хотя бы $n + 1$ раз для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $|A| > n|B|$.

Задача 7. Докажите теорему Дирихле о приближении иррациональных чисел рациональными: для любого иррационального $\alpha \in (0, 1)$ и любого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие целые числа $a, b \in [0, n]$, для которых $\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| < \frac{1}{nb}$. В решении используйте принцип Дирихле в следующей формулировке: "если множества A и B таковы, что $|A| > |B|$, то любое отображение из A в B не является инъекцией"; обязательно укажите, как конкретно для Вашей задачи определяются эти A и B.

Решение. Введем обозначение: $\{x\}$, $\lfloor x \rfloor$ – дробная и целая часть числа x соответственно. Пусть $A = \{\{\alpha \cdot k\} \mid k \in \{0, \dots, n\}\} \cup \{1\}$ – множество точек и $B = \left\{\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right) \mid k \in \{0, \dots, n-1\}\right\} \cup \left\{\left[\frac{n}{n+1}, 1\right]\right\}$ – множество промежутков. Очевидно, $|A| = n + 2 > |B| = n + 1$, следовательно, не существует инъекции из A в B, значит, существует отрезок, в котором лежит как минимум две точки. Возможно два варианта:

1. Этот отрезок $\left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$. Тогда
$$|\{\alpha \cdot x_1\} - 1| = |\alpha \cdot x_1 - (\lfloor \alpha \cdot x_1 \rfloor + 1)| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$
Положим $b = x_1$. Тогда $b = x_1 \leq n$ (по определению множества A) и $a = \lfloor \alpha \cdot x_1 \rfloor + 1$. Так как $\alpha < 1$, то $\lfloor \alpha \cdot x_1 \rfloor < x_1$. Следовательно, $a \leq n$.

2. Этот отрезок находится в промежутке $\left[0, \frac{n}{n+1}\right)$. Пусть он содержит точки $\{\alpha \cdot x_1\}$ и $\{\alpha \cdot x_2\}$, $x_2 > x_1$. Тогда
$$|\{\alpha \cdot x_1\} - \{\alpha \cdot x_2\}| = |\alpha \cdot (x_2 - x_1) - (\lfloor \alpha \cdot x_2 \rfloor - \lfloor \alpha \cdot x_1 \rfloor)| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$
Положим $b = x_2 - x_1 \leq n$ и $a = \lfloor \alpha \cdot x_2 \rfloor - \lfloor \alpha \cdot x_1 \rfloor \leq n$, так как $\lfloor \alpha \cdot x_2 \rfloor < n$.

В обоих случаях мы получаем неравенство $\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| < \frac{1}{nb}$.

Задача 9.1. Задача 9.1 Табличная функция $\{f_i\}$ есть проекция на равномерную сетку с шагом h бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$. Используется приближенный метод вычисления первой производной:
$$f'(x_2) \approx \frac{f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3}{6h}.$$
Каков порядок аппрокисмации этой формулы? Указать оптимальный шаг численного дифференцирования и максимальную точность, с которым может быть найдено значение производной.

Решение. Так как $f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2), f_3 = f(x_3)$, перепишем
$$\hat{f}' = \frac{f(x_2 - 2h)(1 + \varepsilon_1) - 6f(x_2 - h)(1 - \varepsilon_2) + 3f(x_2)(1 - \varepsilon_3) + 2f(x_2 + h)(1 + \varepsilon_4)}{6h} =$$
$$= \frac{f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3}{6h} + \frac{f_0\varepsilon_1 - 6f_1\varepsilon_2 + 3f_2\varepsilon_3 + 2f_3\varepsilon_4}{6h}.$$
Обозначим первую дробь за f_1', а вторую — f_2'. За x возьмем x_2:
$$f'(x) - f_1' = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{f^{(n)}(\xi_k)}{n!} (x_k - x)^n.$$

Обозначим $M_4 = \max\limits_{x\in[x_0,x_3]} f^{(4)}(x)$, $M_0 = \max\limits_{x\in[x_0,x_3]} f(x)$, $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ и оценим погрешность $|f'(x) - \hat{f}'|$:

$$|f'(x) - \hat{f}'| = \left| -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{f^{(n)}(\xi_k)}{n!} (x_k - x)^n + \frac{f_0\varepsilon_1 - 6f_1\varepsilon_2 + 3f_2\varepsilon_3 + 2f_3\varepsilon_4}{6h} \right| \le$$

$$\le \left| -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{f^{(n)}(\xi_k)}{n!} (x_k - x)^n \right| + \left| \frac{\varepsilon(f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3)}{6h} \right| \le \frac{M_4}{24} \left| \sum_{k=0}^{3} a_k \cdot (x_k - x)^4 \right| + \frac{12M_0}{6h} =$$

$$= \frac{M_4 h^3}{12} + \frac{2\varepsilon M_0}{h} = E(h).$$

Дифференцируем $E(h)$ и находим оптимальный шаг:

$$\left(\frac{M_4 h^3}{12} + \frac{2M_0\varepsilon}{h} \right)' = \frac{M_4 h^2}{4} - \frac{2M_0\varepsilon}{h^2} = 0.$$

$$h_0 = \sqrt[4]{\frac{8\varepsilon M_0}{M_4}}.$$

Максимальную точность мы получим, если подставим выражение для оптимального шага в выражение для оценки ошибки:

$$\left| f'(x) - \hat{f}'(x) \right| = \frac{M_4}{12} \sqrt[4]{\left(\frac{8\varepsilon M_0}{M_4} \right)^3} + 2\varepsilon M_0 \sqrt[4]{\frac{M_4}{8\varepsilon M_0}}.$$

Задача 11. На плоскости выбрано конечное количество точек, находящихся в общем положении (никакие три точки не лежат на одной прямой, никакие две не совпадают). Некоторые из выбранных точек соединены отрезками. Если два отрезка пересекаются, то их можно заменить двумя другими с концами в тех же точках (отрезки, имеющие лишь общий конец, не считаются пересекающимися). Может ли этот процесс продолжаться бесконечно? [Необходимо решить задачу непременно методом потенциалов, явно указав, какая функция используется в качестве «потенциала».]

Решение. Введем потенциал — суммарная длина всех отрезков. Очевидно он всегда больше нуля (если бы он был равен нулю то процесс и не идет — ведь не проведено ни одного отрезка). Теперь если два отрезка скрещиваются, то их концы образовывают четырехугольник с диагоналями из этих отрезков. При замене этих скрещивающихся отрезков мы заменяем их на противоположные стороны четырехугольника, значит потенциал уменьшается (следствие неравенства треугольников). Количество всевозможных состояний системы равно количеству всевозможных вариантов существования отрезков. Между любыми двумя точками отрезок либо существует либо нет. Максимальное количество отрезков равняется $\frac{n(n-1)}{2}$. Тогда количество состояний равно $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Так как количество состояний конечно, а потенциал уменьшается, то когда-то наступит ситуация, что потенциал не сможет уменьшиться, значит процесс остановится.

Задача 27. Сколькими способами можно выбрать 4 разномастных карты из колоды в 36 карт, так, чтобы среди вынутых карт оказались хотя бы два валета и ровно один король? Можно дать ответ в виде формулы, не доводя до числа. Способы, отличающиеся только порядком вынимаемых карт, считаются одинаковыми.

Решение. Есть 2 случая:

1. Выбираются три валета.

   В этом случае у нас будут 3 валета и один король. Таких случаев существует всего 4 комбинации ($\binom{1}{4}$) так как валеты однозначно задаются выбранной мастью короля.

2. Выбираются ровно два валета.

   В этом случае последней король выбирается $\binom{1}{4} = 4$ способами, масти двух валетов в каждом случае могут быть выбраны уже $\binom{2}{3} = 3$ способами (одну масть занял король). Масть последней карты задается однозначно, и колличество вариантов ее выбора будет 7.

   В сухом остатке получается $4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ способов.

Суммарно способов будет $4 + 84 = 88$

Ответ: $\binom{1}{4} + \binom{1}{4}\binom{2}{3}(\frac{36}{4} - 2) = 88$.

Задача 31. Сколькими способами можно расселить 20 туристов по 5 домикам, чтобы ни один домик не оказался пустым? Все туристы и домики различимы. Способы расселения, отличающиеся только перестановкой туристов, заселённых в один домик, считаются одинаковыми.

Решение.

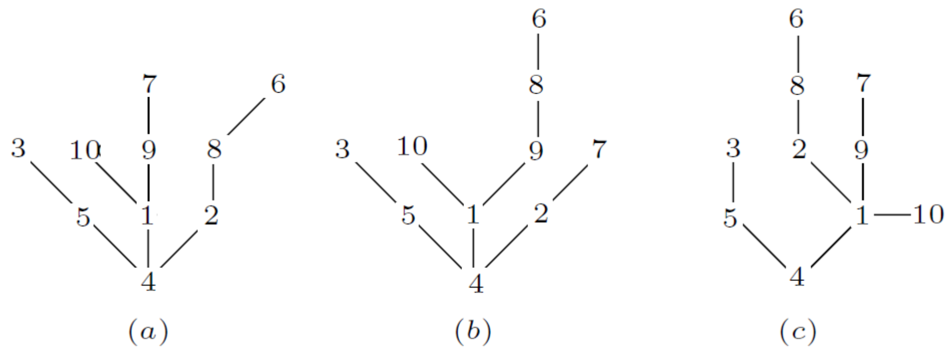
Обозначив количество размещений n туристов по k домикам как $S(n, k)$, можно заметить следующее соотношение. Если в k-м домике живет ровно один человек, то $S(n, k) = S(n-1, k-1)$, а если больше одного, то $S(n, k) = k \cdot S(n-1, k)$. Суммарно, получаем что $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$. Но такие же соотношения верны для **чисел Стирлинга второго рода**. И действительно, по определению это число — число неупорядоченных разбиений n-элементного множества на k непустых подмножеств. Так как в рассматриваемой задаче порядок домиков важен, то ответом будет $k! \cdot S(n, k)$.

То же можно получить и по формуле включения-исключения. Вариантов разместить людей по домикам хоть как-нибудь у нас $\binom{k}{k} \cdot k^n$. При этом надо вычесть варианты с хотя бы одним пустующим домиком. Таких вариантов $\binom{k}{k-1} \cdot (k-1)^n$. Продолжая прибавлять и вычитать количества размещений по формуле включения-исключения, пока количество домиков положительно, получим следующую сумму:

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{k+j} \cdot \binom{k}{j} \cdot j^n,$$

что совпадает с приведенным выше числом Стирлинга, помноженным на $k!$.

Задача 37. Установите соответствие (не обязательно биекцию) между деревьями на рисунке и кодами Прюфера.



1. (5,4,8,9,2,1,4,1);
2. (5,4,8,9,2,1,1,4);
3. (5,4,8,9,2,4,1,1).

Решение.
а) После первых пяти удалений останутся вершины $4, 1, 2, 9, 10$. Дальше должен удаляться лист с минимальным номером, и это лист под номером 2, у которой родительской является вершина под номером 4. Далее удаляются вершины $9, 10$. Из всех вариантов подходит только третий.
б) В момент удаления листа с номером 8 до сих пор будет существовать лист с номером 7. Но это неверно, т.к. в коде вершина под номером 2 (родитель 7 вершины) должна быть записана раньше, чем вершина под номером 9 (родитель 8 вершины). Следовательно ни один из кодов не подходит.
в) После первых пяти удалений останутся вершины $4, 1, 2, 9, 10$. Вершину 1 нельзя удалять до тех пор, пока не будут удалены ее дети: $2, 9, 10$. Не один из кодов не удаляет всех детей. Следовательно ни один из кодов не подходит.

Задача 39. Предположим, на листике тетради в клетку ученик произвольно в узлах клеточек проставил 5 точек. Необходимо доказать, что как минимум один отрезок с вершинами в этих точках пройдет через узел клеточки. В решении используйте принцип Дирихле в следующей формулировке: “если множества A и B таковы, что $|A| > |B|$, то любое отображение из A в B не является инъекцией”; обязательно укажите, как конкретно определяются для Вашей задачи определяются эти A и B.

Решение. Введём произвольную систему координат, расположенную на какой-то вертикальной и горизонтальной линии. А теперь заметим, что для двух произвольных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2), если $|x_2 - x_1|$ и $|y_2 - y_1|$ имеют НОД, не равный 1, тогда отрезок пройдёт через узел.

Для пары (x, y) возможны всего четыре случая с точки зрения четности координат: (Н, Н), (Ч, Н), (Н, Ч) и (Ч, Ч). Тогда если у нас есть две пары одинакового вида, то у них, по крайней мере, НОД равен 2. Следовательно, отрезок проходит через узел.

Так как у нас есть пять точек и всего четыре случая, то из принципа Дирихле обязательно найдётся отрезок, проходящий через узел ($A = \{$пять выставляемых точек$\}$, а $B = \{$случаи чётности координат$\}$).

Задача 41. На кольцевой дороге стоят бензоколонки. Общее количество бензина в них достаточно, чтобы объехать круг. Докажите, что автомобиль с пустым баком может стартовать от некоторой бензоколонки и, заправляясь по дороге, объехать весь круг. (Бак достаточно большой.)

Решение. Будем считать движение по часовой стрелке.

В соответствие каждой бензоколонке ставим число I_i, равное разности между количеством бензина на колонке и количеством бензина, необходимом для проезда до следующей бензоколонки. Число I_i может как положительным, так и отрицательным.

Нам необходимо доказать, что можно найти позицию с числом I_1, такую, что

$$\sum_{i=1}^{k} I_i \geq 0, 1 \leq k \leq n.$$

Возьмем группу значений $I_1, I_2, \ldots, I_k$ — соответствующие I_i бензоколонки стоят подряд и их сумма наибольшая из всевозможных групп. Группа бензоколонок со значениями $I_{k+1}, \ldots, I_n$ следует после. Покажем, что I_1 — искомое начало.

Рассмотрим $\sum\limits_{i=1}^{m} I_i$, где $1 \leq m \leq n$. Далее у нас появляются два случая $m \leq k$ и $m > k$.

Первый случай был разобран на контрольной.

Пусть $m > k$. Если предположить, что

$$\sum_{i=1}^{m} I_i < 0,$$

то

$$\sum_{i=m+1}^{n} I_i + \sum_{i=1}^{k} I_i = \sum_{i=1}^{n} I_i + \sum_{i=1}^{k} I_i - \sum_{i=1}^{m} I_i > \sum_{i=1}^{k} I_i.$$

Получаем противоречие с максимальностью выбранной суммы.

Задача 44. Существует ли унициклический граф, последовательность степеней вершин которого будет равна $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4)$?
Если да, то постройте такой граф. Если такой граф существует, то единственен ли он, с точностью до изоморфизма?

Решение. Да, пример на картинке.

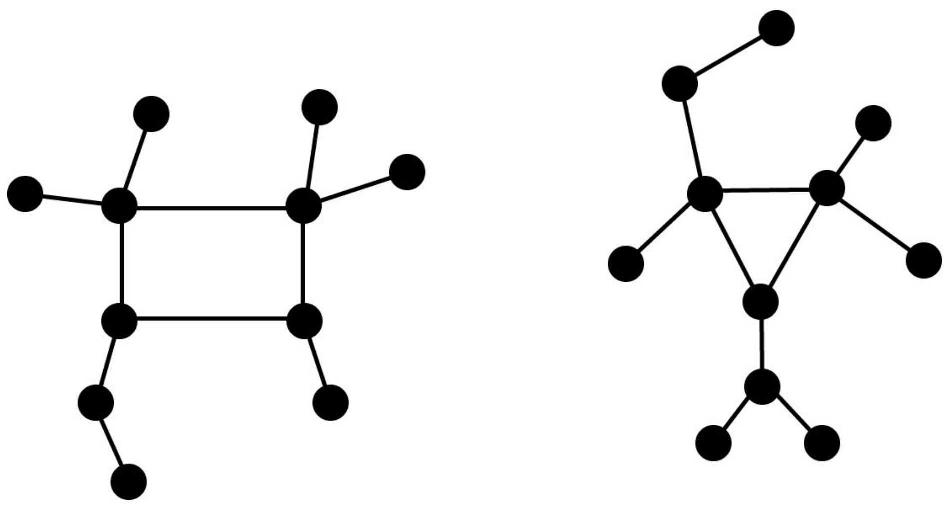


Рис. 1. Два неизоморфных уницикличиских графа с заданными степенями вершин

Задача 50. Докажите, что количество помеченных лесов на n вершинах с r компонентами, каждая из которых содержит ровно по одной вершине из множества $\{1, \ldots, r\}$, в точности rn^{n-1-r} штук.

Решение. Добавим фиктивную вершину $n+1$ и проведём рёбра $(1, n+1)$, $(2, n+1)$, $\ldots$, $(r, n+1)$. Получилось дерево, будем кодировать его, на каждом шаге удаляя лист с наибольшим номером и записывая в код вершину, смежную с ним, при этом будем останавливаться, когда останется дерево с корнем в вершине $n+1$ и листами $1,\ 2,\ \ldots,\ r$. Получится код длины $n-r$. На первых $n-r-1$ позициях могут стоять любые числа из множества $\{1,\ldots,n\}$ (вершины $n+1$ в коде не будет, так как ни один из её соседей не будет удален), тогда различных кодов длины $n-r-1$ получится n^{n-r-1}. На последней же позиции могут находиться только вершины из множества $\{1,\ldots,r\}$, так как после остановки осталось дерево с корнем в вершине $n+1$ и листами $1,\ 2,\ \ldots,\ r$, а из вершины $n+1$ были рёбра только в первые r вершин. Всего получается rn^{n-r-1} вариантов кода.

Мы показали, что одному лесу соответствует один код. Чтобы по коду длины $n-r$ восстановить лес, выписываем вершины от 1 до n и ищем для каждого числа кода в этой последовательности наибольший номер, которого нет в коде, и проводим между этими вершинами ребро, удаляя оба числа. Отсутствие циклов доказывается так же, как и при декодировании Прюфера.

Задача 51. Докажите, что количество неизоморфных деревьев с n вершинами можно оценить сверху величиной 4^n.

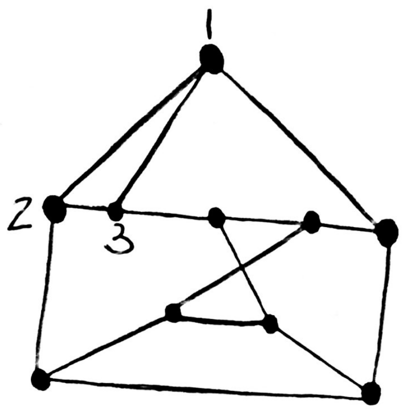
Решение. Сделаем из исходного графа ориентированный граф: если между двумя вершинами A и B было ребро, то вместо него появляются ребра из A в B и из B в A.

Рассмотрим процесс: выберем произвольную стартовую вершину и запустим из нее обход по ребрам таким образом, что по каждому ориентированному ребру он пройдет только один раз, причем если на развилке есть вершина, в которую обход еще не заходил, то обход идет в нее (если таких несколько — в произвольную). Тогда таким образом будет совершен обход по всему графу.

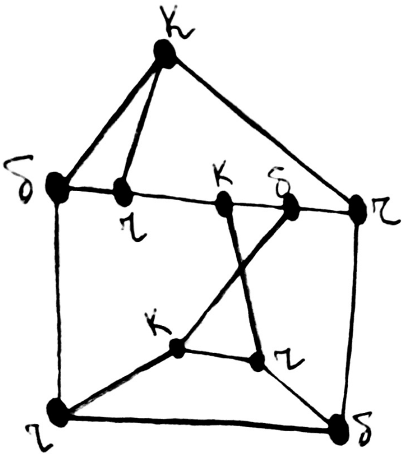
На каждом шаге будем дописывать в последовательность из нулей и единиц нолик, если в вершину обход пришел четный раз, и единичку — если нечетный раз; таким образом образуется последовательность из $2(n-1)$ чисел, причем разные последовательности кодируют неизоморфные графы, тогда всего неизоморфных деревьев не более, чем $2^{2n-2} < 4^n$, что и требовалось доказать.

Задача 60. Найдите хроматическое число и хроматический индекс графа на рисунке. Ответ обоснуйте.

Решение. Вершины 1, 2, 3 образуют цикл из трех вершин, а значит нужно как минимум три цвета, чтобы раскрасить вершины графа.

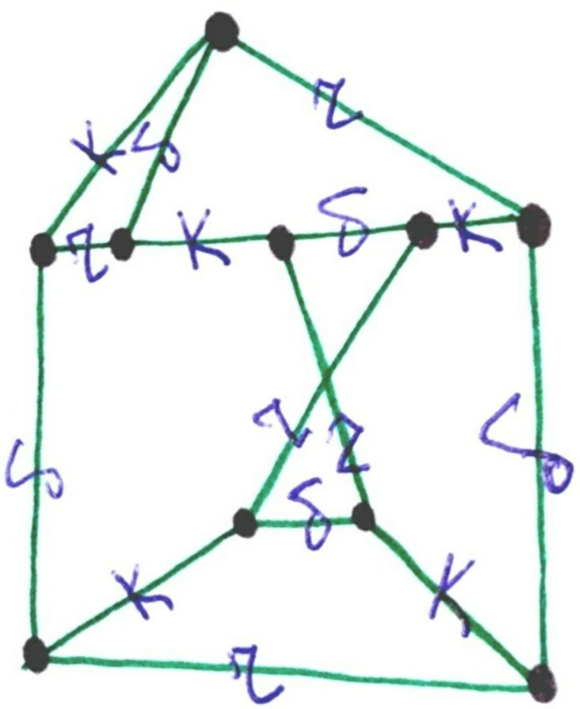


На рисунке представлен пример раскраски в 3 цвета, а значит, трёх цветов достаточно.



Хроматическое число графа равно 3.

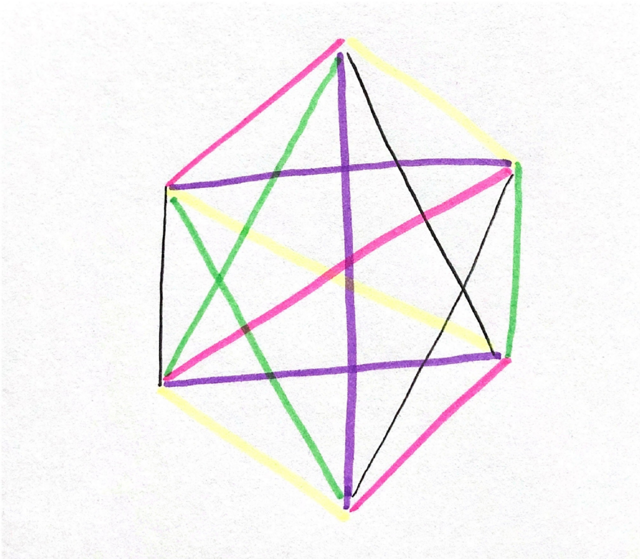
Степень каждой вершины равна трём, поэтому хроматический индекс не меньше трёх. На рисунке представлена раскраска ребер в 3 цвета.



Ответ: Хроматическое число и хроматический индекс графа равны трём.

Задача 63. В каких границах может быть хроматическое число связного графа на 6 вершинах? Тот же вопрос про хроматический индекс. Для каждого граничного значения хроматического числа/индекса необходимо привести пример, на котором это значение достигается.

Решение. Докажем, что максимальный хроматический индекс графа на 6 вершинах равен пяти. Хроматический индекс будет максимальным на полном графе. Приведенная ниже раскраска доказывает, что хроматический индекс может равняться пяти. Меньше хроматический индекс быть не может, так как максимальная степень вершины в полном графе на 6 вершинах равна пяти, а хроматический индекс больше либо равен максимальной степени вершины в графе.



Задача 64. В каких границах может быть хроматическое число связного графа на 7 вершинах? Тот же вопрос про хроматический индекс. Для каждого граничного значения хроматического числа/индекса необходимо привести пример, на котором это значение достигается. (см. комментарий)

Решение. Верхняя граница χ' графа на 7 вершинах равняется 7. Это число можно получить на графе K_7. Пример данной раскраски:

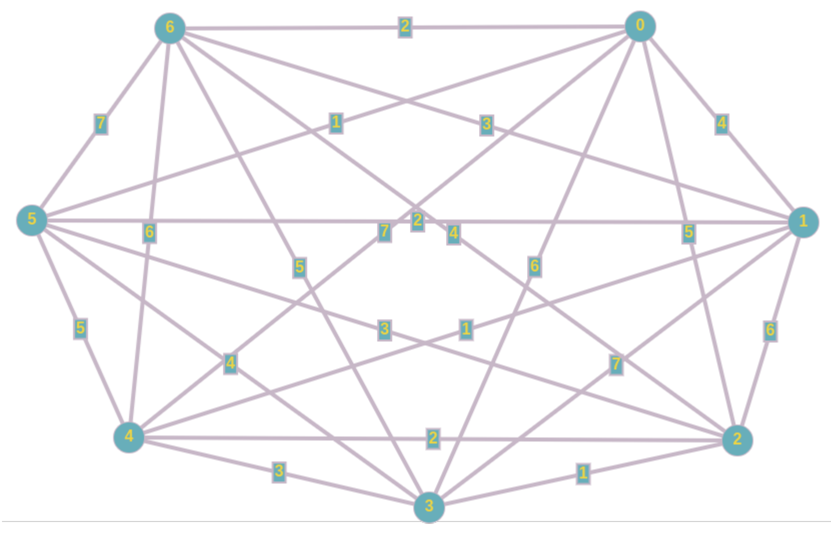


Рис. 2. Раскраска ребер графа K_7 в 7 цветов.

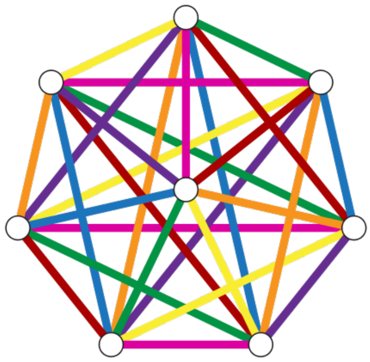
Теперь докажем, что меньше нельзя. Предположим, что можно раскрасить все ребра графа в 6 цветов. Степень каждой вершины графа равна 6, а значит, из каждой вершины исходит по одному ребру каждого цвета. Любое ребро соединяет ровно две вершины, значит ребер каждого цвета должно быть ровно половина от количества всех вершин, однако $2 \nmid 7$, из чего делаем вывод, что невозможно раскрасить ребра графа K_7 в 6 цветов, чтобы все ребра, входящие в одну вершину, были разного цвета.

Задача 65. В каких границах может быть хроматическое число связного графа на 8 вершинах? Тот же вопрос про хроматический индекс. Для каждого граничного значения хроматического числа/индекса необходимо привести пример, на котором это значение достигается.

Решение. Для связного графа на 8 вершинах:

$$2 \leq \chi \leq 8, \qquad 2 \leq \chi' \leq 7.$$

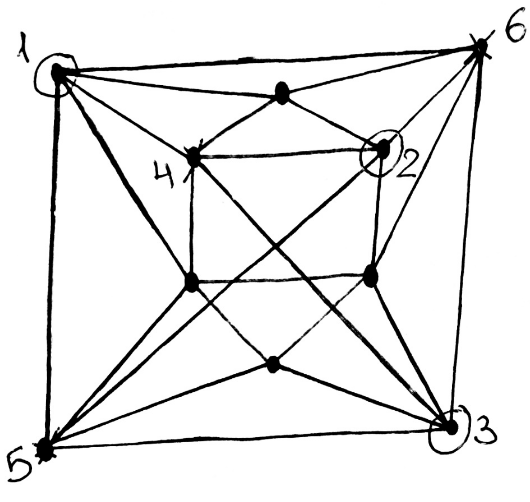
Для случаев $\chi = 2, \chi' = 2$ можно привести тривиальный граф в виде простого пути из 8 вершин. Для случая $\chi = 8$, $\chi' = 7$ — K_8:



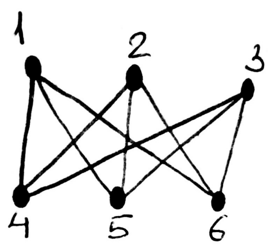
Вершинная раскраска K_8 тривиальна. Из условия $\Delta \leq \chi'$ следует, что меньше 7 цветов для рёберной раскраски быть не может.

Задача 66. Планарен ли следующий граф? Если да, то нарисуйте его без самопересечений, если нет, то обоснуйте непланарность, найдя в нём подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$, и сославшись на теорему Куратовского.

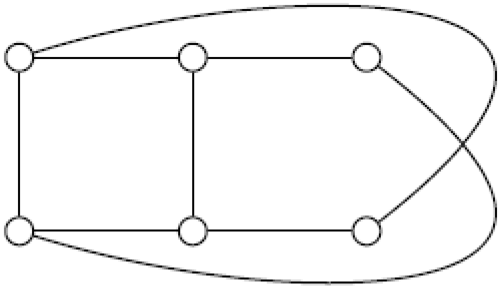
Решение. Первую долю подграфа составят вершины 1, 2, 3, вторую 4, 5, 6.



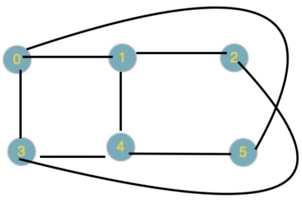
Получаем, что наш граф имеет подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$, а значит по теореме Куратовского не является планарным.

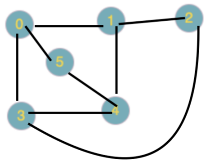


Задача 68. Планарен ли следующий граф? Если да, то нарисуйте его без самопересечений, если нет, то обоснуйте непланарность, найдя в нём подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$, и сославшись на теорему Куратовского.

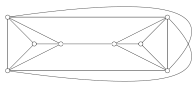


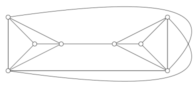
Решение. Да, планарен.



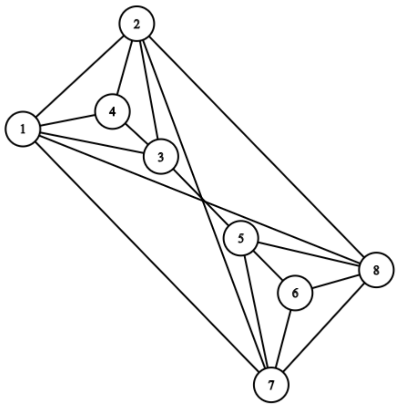


Задача 72. Из двух представленных ниже графов ровно один планарен. Перерисуйте планарный граф без пересечений рёбер, а в непланарном графе найдите подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$. (Нужно сделать часть, связанную с непланарным графом).

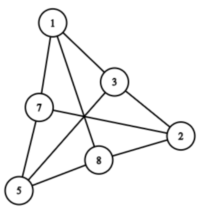




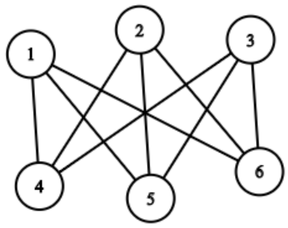
Решение. Воспользуемся следующей нумерацией первого графа:



Рассмотрим следующий подграф первого графа.



Пусть вершины $K_{3,3}$ занумерованы так:



Построим явно биекцию между $K_{3,3}$ и этим подграфом: $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 5, 4 \mapsto 3, 5 \mapsto 7, 6 \mapsto 8$. Таким образом, в исходном графе существует подграф, изоморфный непланарному графу, следовательно, сам подграф непланарен. Тогда и исходный граф непланарен. Заметим, что изоморфизм — частный случай гомеоморфизма, поэтому найденный подграф и является искомым подграфом.

Задача 73. Квадратная таблица $(2n+1) \times (2n+1)$, где $n \in \mathbb{N}$, заполнена числами от 1 до $2n+1$ так, что в каждой строке и в каждом столбце представлены все эти числа. Докажите, что если это расположение симметрично относительно диагонали таблицы, то на этой диагонали тоже представлены все эти числа. В решении используйте принцип Дирихле в следующей формулировке: "если множества A и B таковы, что $|A| < |B|$, то любое отображение из A в B не является инъекцией"; обязательно укажите, как конкретно для Вашей задачи определяются эти A и B.

Решение. Так как в каждой строке и каждом столбце каждое число от 1 до $2n+1$ встречается ровно один раз, то всего в таблице каждое число будет встречаться ровно $2n+1$ раз. Так как таблица симметрична относительно главной диагонали, то каждому элементу можно поставить в соответствие симметричный ему элемент, то есть количество одинаковых чисел вне диагонали будет четным. Очевидно, что число $2n+1$ нечетное, значит, на главной диагонали должно стоять нечетное количество каждого из чисел от 1 до $2n+1$, так как на главной диагонали всего $2n+1$ место, то каждое из чисел от 1 до $2n+1$ встретится на ней ровно один раз. То есть мы воспользовались предоставленной формулировкой принципа Дирихле, где A — клетки на диагонали, $|A| = 2n+1$, а B — наборы, состоящие из нечетного числа повторений одного из чисел от 1 до $2n+1$, распределенных по клеткам диагонали, $|B| \geq 2n+1$. Допустим, какое-то из чисел встречается на диагонали более одного раза, тогда $|B| > 2n+1$. Следовательно, распределение чисел из B по клеткам из A будет неинъективным по принципу Дирихле. Получаем противоречие. Значит, каждое из чисел от 1 до $2n+1$ встретится на диагонали ровно один раз.

Задача 75. Пусть p и q — два произвольных нечетных простых числа, причем
$2^q - 1 \equiv 0 \pmod{p^k}, k \geq 2$. Докажите, что тогда либо $p = q$, либо $p - 1 \equiv 0 \pmod{q}$.

Решение. По теореме Эйлера, для любого простого p выполняется: $2^{p^{k-1}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^k}$. Пусть t – порядок 2 по модулю p^k. Тогда q и $p^{k-1}(p-1)$ делятся на t, но q – простое, а значит, t равняется 1 или q. Так как $p^k > 2$, то $2^1 \equiv 2 \pmod{p^k}$. И тогда $t = q$ и $\exists z \in \mathbb{Z} : z \cdot q = p^{k-1}(p-1) \implies p^{k-1}(p-1) \equiv 0 \pmod{q}$. Тогда либо $p - 1 \equiv 0 \pmod{q}$; либо $p^{k-1} \equiv 0 \pmod{q}$, но так как p и q – простые, то $p = q$.

Задача 78. Пусть p — простое нечётное число, не равное 5. Применив малую теорему Ферма, докажите, что среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на p.

Решение. Зафиксируем простое число p, заметим, что среди чисел, которые записывается только 1, есть два числа равные по модулю p, заметим, что разность этих двух чисел тогда равна 0 по модулю p, обозначим его за k, также заметим, что k записывается, как некоторое число 1 в начале с m нулями на конце, где m — число единиц в наименьшем из двух чисел разностью которых является k — это можно понять, если просто вычесть их друг из друга «столбиком», тогда заметим, что если мы разделим k на 10^m, которое взаимно просто с p, то полученное число также будет делиться на p, но оно будет записано только 1, значит оно подходит.

Приведем другое решение, используя малую теорему Ферма. Зафиксируем простое нечетное p, не равное 5 , заметим, что $10^{p-1}-1 = 9 \cdot 11111\ldots$ (единиц в последнем числе ровно $p-1$) делится на p по малой теореме Ферма. Считаем $p \neq 3$, тогда 9 и p взаимно просты, значит число из $p-1$ единицы делится на p. Пусть $p = 3$, тогда примером будем 111, так как сумма цифр 111 делится на 3.

Задача 79. Весёлая компания из 10 супружеских пар разбивается на 5 групп по 4 человека для лодочной прогулки так, чтобы в каждой лодке мужчин и женщин было поровну. Во скольких случаях Леонид Иванович Комбинаторщиков (один из участников Весёлой компании) окажется в одной лодке со своей женой (все лодки друг от друга неотличимы)?

Решение. Пусть Леонид Иванович вместе со своей женой уже находится в лодке. Требуется посчитать количество способов рассадки оставшихся 18 человек. Выбрать мужчину и женщину в лодку к Леониду Ивановичу можно $9 \cdot 9 = 81$ способами. Поделить оставшихся женщин на четыре пары можно $7!! = 105$ способами. Аналогично с мужчинами. Составить 4 пары из двух групп (в каждой группе 2 мужчины или 2 женщины) можно $4! = 24$ способами. Итого имеем $81 \cdot 105 \cdot 105 \cdot 24 = 21432600$ способов.

Задача 82. Установите соответствие (не обязательно биекцию) между деревьями на рисунке и кодами Прюфера.

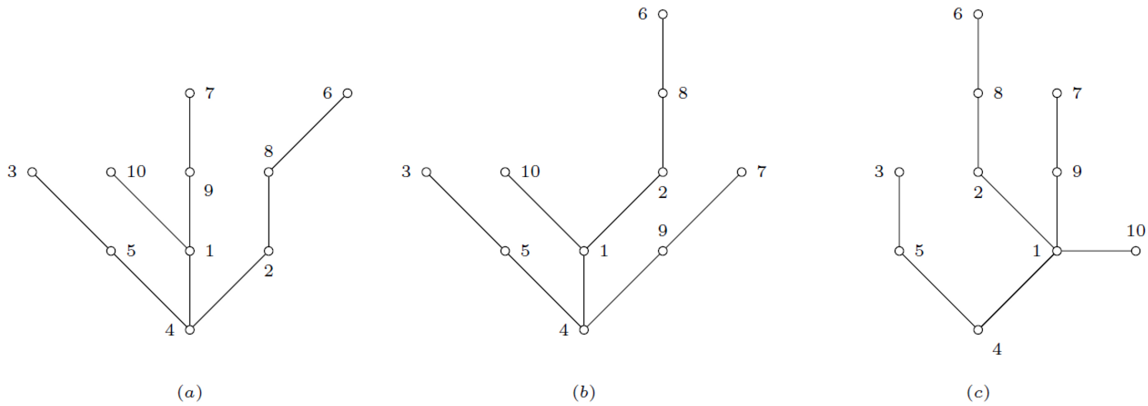


Рис. 3. Исходные графы

$$[(a)](5,4,8,9,2,1,4,1),$$
$$[(b)](5,4,8,9,2,1,1,4),$$
$$[(c)](5,4,8,9,2,4,1,1).$$

Решение. Укажем коды Прюфера данных деревьев.

Граф $a: 5,4,8,9,2,4,1,1,$

Граф $b: 5,4,8,9,2,1,4,1,$

Граф $c: 5,4,1,8,9,2,1,1.$

Ответ.

Граф a — код c.

Граф b — код a.

Граф c — кода нет.

Задача 83. Рёберным графом графа G называется граф G', такой, что вершины графа G'соответствуют рёбрам G, и две вершины в G'смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им рёбра в G имеют общий конец. Докажите или опровергните утверждение: «если в G есть эйлеров цикл, то и в G' также есть эйлеров цикл».

Решение. Посмотрим на степень произвольной вершины $v' \in G'$. Она была получена при помощи каких-то вершин $v_1, v_2 \in G$. Так как в исходном графе G есть эйлеров цикл, то $\deg(v_1), \deg(v_2)$ — чётны. По построению G' ясно, что

$$\deg(v') = (\deg(v_1) - 1) + (\deg(v_2) - 1) = \deg(v_1) + \deg(v_2) - 2.$$

Следовательно, $\deg(v')$ тоже чётна.

Если в графе G были изолированные вершины, то они не влияют на построение графа G'. Если G' будет иметь две компоненты связности, то исходный граф G обязан иметь две нетривиальные компоненты связности, что противоречит эйлеровости исходного графа.

Все условия критерия эйлеровости выполнены. Следовательно, утверждение доказано.

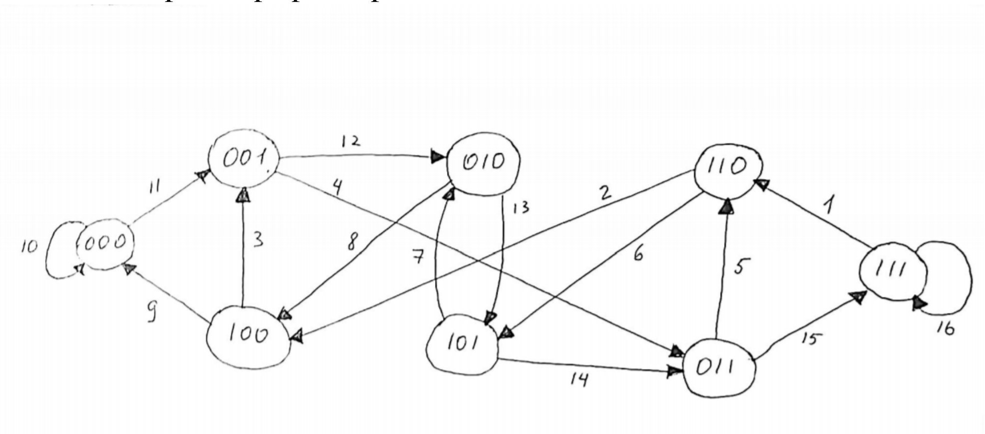
Задача 84. Постройте **троичную** последовательность де Брёйна порядка два, начинающуюся с «220…». Сделайте это, найдя эйлеров цикл в соответствующем графе. (см. комментарий)

Решение. Последовательность де Брёйна с данными параметрами должна иметь длину $3^2 + 2 - 1 = 10$.

Ответ: Троичная последовательность де Брёйна порядка два выглядит так: 2202110012.

Задача 87. С помощью графа де Брёйна постройте двоичную последовательность де Брёйна порядка 4, заканчивающуюся последовательностью 101111.

Решение. Построим граф де Брёйна.



Эйлеров цикл в данном графе: 111 - 110 - 100 - 001 - 011 - 110 - 101 - 010 - 100 - 000 - 000 - 001 - 010 - 101 - 011 - 111 - 111.

Последовательность де Брёйна, соответствующая этому циклу:

1110011010000101111.

Задача 88. С помощью графа де Брёйна постройте двоичную последовательность де Брёйна порядка 4, заканчивающуюся последовательностью 000110.

Решение.

На рис. 4 построен граф де Брёйна для двоичных последовательностей длины 4. Получим последовательность, начинающуюся с обращённой — 011000, и снова обратим.

По обходу с рис. 5, получим обратную последовательность $0110|0001|0011|1101|011$. Тогда искомая — $110|1011|1100|1000|0110$.

Задача 92. Докажите, что если максимальная простая цепь в графе имеет d вершин, то граф можно правильно раскрасить в d цветов.

Решение. Будем решать методом от противного. Предположим, что граф G, в котором максимальная простая цепь имеет d вершин, нельзя правильно раскрасить в d цветов, т. е. нужно хотя бы $d+1$ цветов. Без ограничения общности, положим, что минимальная правильная раскраска требует $d+1$ цветов (случай для $d+k$ цветов рассматривается аналогично). Тогда докажем, что в графе G будет простая цепь из $d+1$ вершины.

Проделаем следующую процедуру: для всех вершин цвета d, не смежных с вершинами цвета $d+1$, поменяем цвет на $d+1$, и так по индукции вплоть до вершин цвета 2. Заметим, что такая процедура

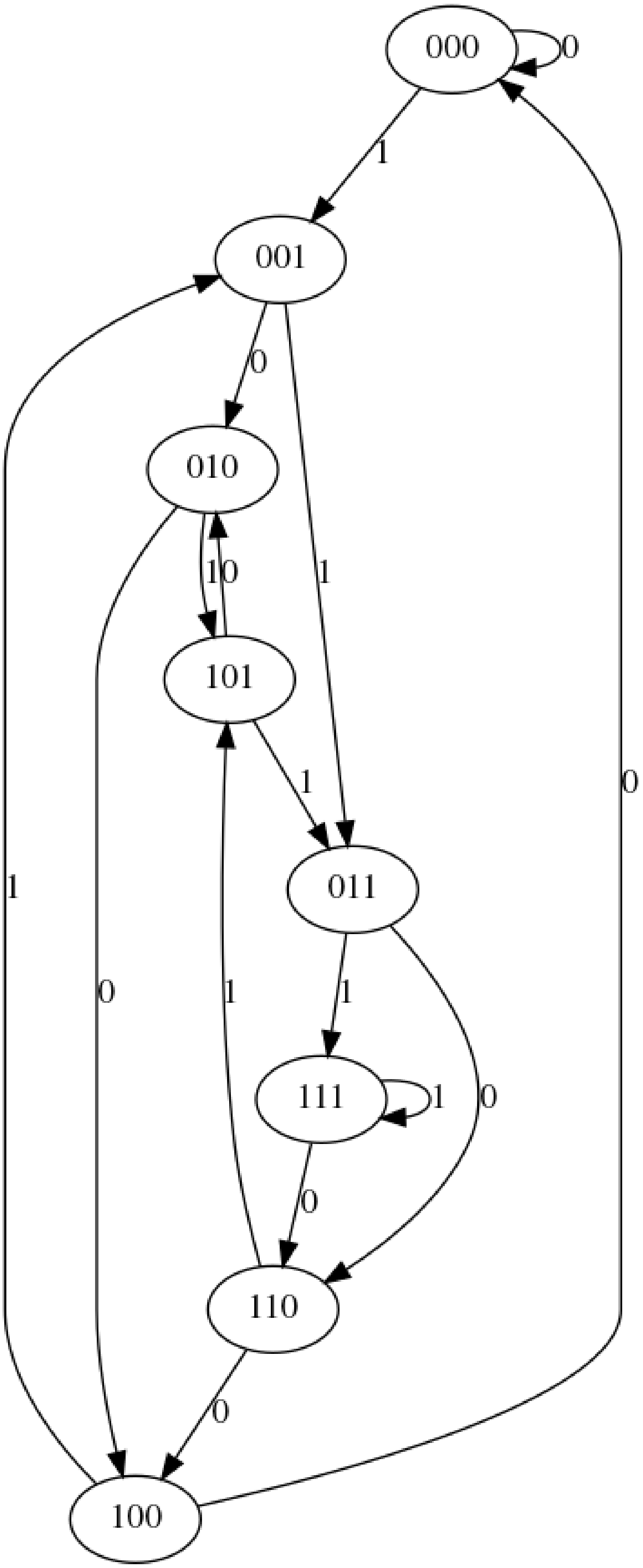


Рис. 4. Задача 88, граф де Брёйна

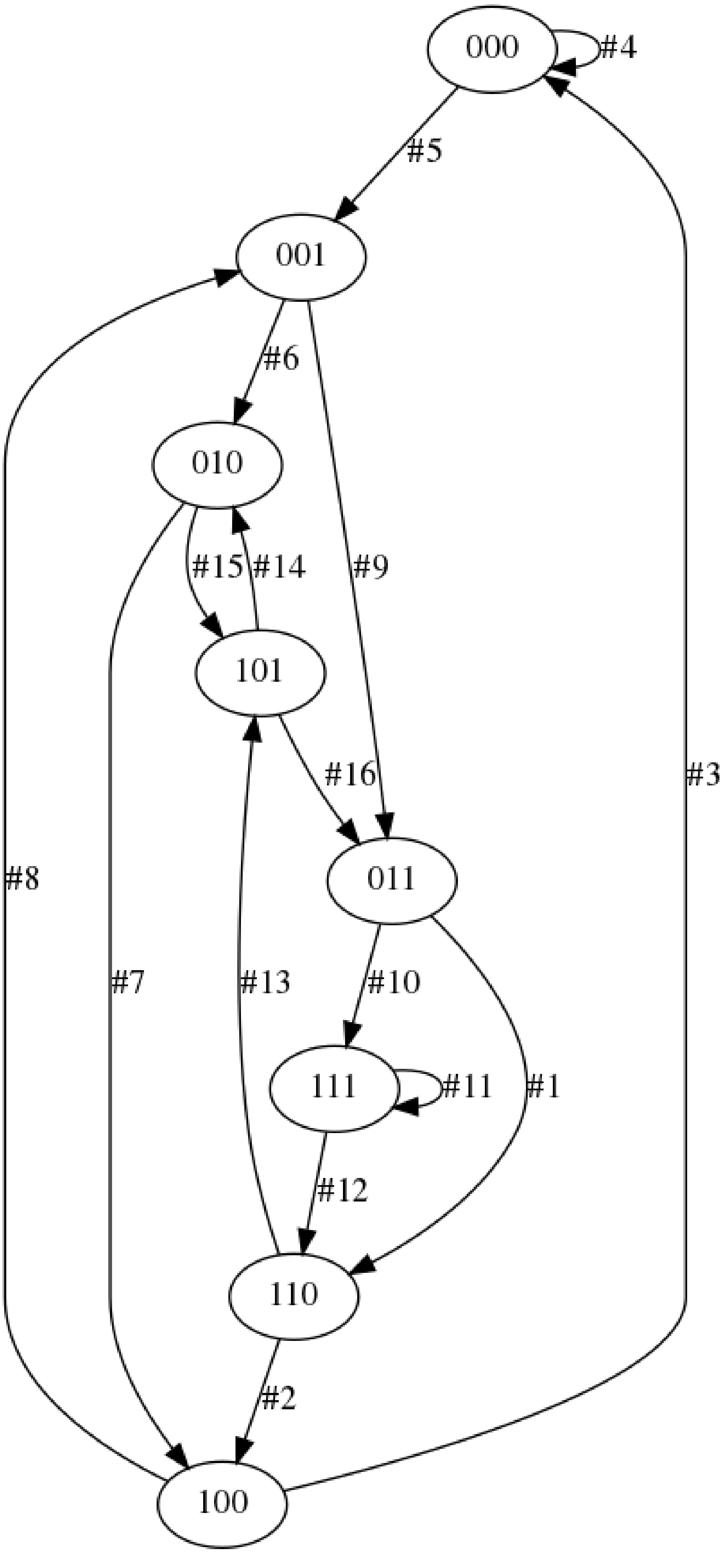


Рис. 5. Задача 88, обход графа де Брёйна

не поменяла правильности раскраски, так как исходная раскраска была правильной и перекрашивание вершины в цвет, отсутствующий у соседей, не нарушает правильности.

Тогда новая раскраска снова содержит $d+1$ цвет, иначе получили бы противоречие с минимальностью цветов в правильной раскраске. Следовательно, стартуя с вершины цвета 1 можно попасть в вершину цвета 2, так как эта вершина не поменяла свой цвет на второй. Таким образом, можно дойти до вершины цвета $d+1$, побывав в каждой вершине такого пути один раз. Следовательно, можно получить простую цепь длины $d+1$, что и требовалось доказать.

Пользуясь сим утверждением, получаем противоречие с максимальностью простой цепи по условию, следовательно, наше предположение неверно, тогда доказано требуемое утверждение.

Задача 95. Все рёбра связного графа раскрашены в два цвета. Из каждой вершины выходит поровну рёбер обоих цветов. Докажите, что тогда из любой вершины до любой другой можно добраться, каждый раз меняя цвет ребра.

Решение. Индукцией по числу ребер докажем более сильное утверждение: для любой пары вершин u, v и для любого цвета существует путь с чередующимися ребрами из u в v, начинающийся ребром заданного цвета.

Пусть цвета ребер — белый и черный.

Рассмотрим произвольную вершину и выйдем из нее по белому ребру. Войдя в вершину по белому ребру, выходить будем по черному, и наоборот. То есть никогда не будем повторять цвет для двух последовательных ребер в нашем пути. Число ребер конечно, следовательно, процесс закончится. В любую вершину кроме первой мы входили и выходили по ребрам разного цвета, а значит в конце попали в начальную. Если в начальную мы вернулись по белому ребру, то выйдем из нее по черному и повторим процесс. Так мы получили цикл C с чередующимися ребрами. Вершины в цикле могут повторяться.

Удалим из графа ребра цикла и получим граф G'. Так как в цикле число ребер белого цвета равно числу ребер черного цвета для каждой вершины, то и для графа G' это условие так же выполняется, но граф G' мог оказаться несвязным.

Рассмотрим произвольные различные вершины u, v. Если они в одной компоненте связности, то построение пути с чередующимися ребрами возможно по предположению индукции.

Пусть они в разных компонентах связности. По построению цикла он содержит вершины из всех компонент связности. Пусть u' лежит в одной компоненте связности с u, v' с v, и u', v' принадлежат удаленному циклу. По предположению индукции существует путь из u в u' начинающийся белым ребром. Пусть мы пришли в u' по ребру e. Так как цикл состоит из ребер чередующихся цветов, то в нем есть пусть из u' в v', начинающийся ребром цвета противоположного цвету e. И так же по предположению индукции существует путь из v' в v, начинающийся ребром цвета противоположного цвету ребра, по которому мы пришли в v'.

Таким образом мы получили, что для любых вершин u, v в графе существует путь с чередующимися ребрами из u в v, начинающийся ребром заданного цвета. А значит, из любой вершины до любой другой можно добраться, каждый раз меняя цвет ребра

Задача 96. Рассмотрим вычеты по модулю 27. Какие значения может принимать порядок элементов по этому модулю? Для каких элементов по модулю 27 определено понятие порядка?

Решение. Предположим, что понятие порядка определено для всех элементов, тогда определено и для не взаимно простых с 27. Тогда мы имеем число α, которое является порядком числа km в поле вычетов kn, тогда $(km)^\alpha \equiv 1 \pmod{kn}$, откуда следует, что $\exists t : (km)^\alpha - 1 = kn \cdot t$, но тогда правая часть делится на k, а левая – нет, получили противоречие. Следовательно понятие порядка определено только для элементов, взамнопростых с 27, так как по теореме Эйлера порядок таких элементов будет равен $\varphi(27) = 18$. На самом деле, если α является порядком элемента в поле по модулю 27, то оно делит $\varphi(27) = 18$, то есть возможные порядки для элементов из класса вычетов по модулю 27 – это $\{2, 3, 6, 9, 18\}$.

Задача 97. Решите сравнение $53x \equiv 49 (\textbf{mod}\ 431)$. Для решения задачи нахождения обратного по умножению элемента продемонстрируйте применение алгоритма Евклида; перебор/угадывание не допускаются.

Решение. Условие задачи может быть переписано в следующем виде: $53x + 431y = 49$. Найдем общее решение: $x = 431t$. Далее найдем частное решение. Решим уравнение $53x + 431y = 1$.

a = [a/b] ·b + c

$53 = 0 \cdot 431 + 53$
$431 = 8 \cdot 53 + 7$
$53 = 7 \cdot 7 + 4$
$7 = 1 \cdot 4 + 3$
$4 = 1 \cdot 3 + 1$
$3 = 3 \cdot 1 + 0$
$1 = 0 \cdot 0 + 1$

a ·x + b ·y = 1

$1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$
$3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$
$4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 1$
$7 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 1$
$53 \cdot 2 + 7 \cdot (-15) = 1$
$431 \cdot (-15) + 53 \cdot 122 = 1$
$53 \cdot 122 + 431 \cdot (-15) = 1$

Получили $x = 122$. Домножим на 49. Получим $x = 122 \cdot 49 = 5974$.

Тогда $x = 431t + 5974 \equiv 431t + 371 \equiv 371$.

Ответ $x = 371$.

Задача 99. Решите сравнение $52x \equiv 48(\bmod 404)$. Решение необходимо записать по модулю 404. Для решения задачи нахождения обратного по умножению элемента продемонстрируйте применение алгоритма Евклида; перебор/угадывание не допускаются.

Решение. Во-первых, заметим, что $GCD(52, 48, 404) = 4$. Следовательно, сравнение имеет четыре решения. Найдем их при помощи алгоритма Евклида.

$$404 = 52 \cdot 7 + 40$$
$$52 = 40 + 12$$
$$40 = 12 \cdot 3 + 4$$
$$12 = 4 \cdot 3 + 0$$
$$4 = 40 - 12 \cdot 3 = (404 - 52 \cdot 7) - (52 \cdot 8 - 404) \cdot 3$$
$$4 = 404 \cdot (4) + 52 \cdot (-31)$$
$$52 \cdot (-31) = 4(\bmod 404)$$
$$52 \cdot 32 = 48(\bmod 404).$$

Следовательно, решения сравнения имеют вид $32 + t \cdot 101, 0 \leq t \leq 3$ так как 52 кратно четырём и слагаемое $t \cdot 101$ при умножении на 52 будет сравнимо с нулем по модулю 404.

Итак, ответ $x = 32 + t \cdot 101, 0 \leq t \leq 3$.

Задача 100. Решите сравнение $90x \equiv 114 \pmod{213}$. Решение необходимо записать по модулю 213. Для решения задачи нахождения обратного по умножению элемента продемонстрируйте применение алгоритма Евклида; перебор/угадывание не допускаются.

Решение.

$$90z \equiv 114 \pmod{213}$$
$$30z \equiv 38 \pmod{71}$$
$$z \equiv 38 \cdot 30^{-1} \pmod{71}$$

Для нахождения 30^{-1} решим диофантово уравнение

$$30x + 71y = 1.$$

Изначально $a = 30, b = 71$. Начнём составлять таблицу:

a	b	x	y
30	71		
11	30		
8	11		
3	8		
2	3		
1	2		
0	1	0	1

В последней строчке находится решение диофантова уравнения $0x + 1y = 1$. Восстановим решение исходного, заполняя x и y снизу вверх по правилу

$$x = y' - \lfloor b/a \rfloor x'$$
$$y = x',$$

где a, b, x и y находятся в одной строчке, а x' и y' — в строчке под ними.

a	b	x	y
30	71	-26	11
11	30	11	-4
8	11	-4	3
3	8	3	-1
2	3	-1	1
1	2	1	0
0	1	0	1

Итак, $x = -26$, что по модулю 71 есть 45. Ответ же на нашу задачу — $z \equiv 38 \cdot 45 \equiv 6 \pmod{71}$, а число по модулю 71 есть число по модулю 213 (но не наоборот).

Задача 101. Решите сравнение $104x \equiv 88(\text{mod}412)$. Решение необходимо записать по модулю 412. Для решения задачи нахождения обратного по умножению элемента продемонстрируйте применение алгоритма Евклида; перебор/угадывание не допускаются.

Решение. $104x \equiv 88(\text{mod}412)$.

Тогда

$$104x - 88 = 412k.$$
$$26x - 22 = 103k.$$
$$26x - 22 = 26 \cdot 3k + 25k.$$
$$26(x - 3k) - 22 = 25k.$$

Переобозначим:

$$x_1 = x - 3k.$$

Тогда

$$25x_1 + x_1 - 22 = 25k \Rightarrow 25(k - x_1) = x_1 - 22.$$

Снова переобозначим:

$$x_2 = k - x_1.$$

Тогда

$$25x_2 = x_1 - 22 \Rightarrow 25x_2 + 22 = x_1.$$

Значит,

$$x_2 = y, y \in \{0\} \cup \mathbb{Z}_+.$$

И тогда разворачиваем всё назад:

$$x_1 = 25y + 22 \Rightarrow k = y + 25y + 22 = 26y + 22 \Rightarrow$$
$$x = 25y + 22 + 3 \cdot 26y + 3 \cdot 22 = 103y + 88.$$

Тогда, если $x \in \mathbb{Z}_{412}$, то $x \in \{88, 191, 294, 397\}$.

Задача 102. Решите сравнение $71x \equiv 12 \pmod{269}$. Для решения задачи нахождения обратного по умножению элемента продемонстрируйте применение алгоритма Евклида; перебор/угадывание не допускаются.

Решение.

$$71z \equiv 12 \pmod{269}$$
$$z \equiv 12 \cdot 71^{-1} \pmod{269}$$

Для нахождения 71^{-1} решим диофантово уравнение

$$71x + 269y = 1.$$

Изначально $a = 71, b = 269$. Начнём составлять таблицу:

a	b	x	y
71	269		
56	71		
15	56		
11	15		
4	11		
3	4		
1	3		
0	1	0	1

В последней строчке находится решение диофантова уравнения $0x + 1y = 1$. Восстановим решение исходного, заполняя x и y снизу вверх по правилу

$$x = y' - \lfloor b/a \rfloor x'$$
$$y = x',$$

где a, b, x и y находятся в одной строчке, а x' и y' — в строчке под ними.

a	b	x	y
71	269	72	-19
56	71	-19	15
15	56	15	-4
11	15	-4	3
4	11	3	-1
3	4	-1	1
1	3	1	0
0	1	0	1

Итак, $x = 72$. Ответ же на нашу задачу — $z \equiv 12 \cdot 72 \equiv 57 \pmod{269}$.

Задача 103. Существует ли k, такое, что 3^k оканчивается на $\ldots 000081$?

Решение. Другими словами, нужно показать, что существует какое-то натуральное k, такое что $3^k \equiv 81 \pmod{10^6}$, причём $3^k \geq 10^6 + 81$. Могло бы подойти число 3^4, но оно меньше необходимого, поэтому попробуем домножить его на какую-нибудь степень тройки с сохранением правой части эквивалентности.

Заметим, что $GCD(3, 10^6) = 1$, поэтому применима теорема Эйлера:
$3^{\varphi(10^6)} \equiv 1 \pmod{10^6}$. Отметим также, что число 10^6 взаимнопросто с каждой степенью тройки, поэтому сразу можно сказать, что $3^{\varphi(10^6)+4} > 10^6$, причём по свойствам сравнений по модулю: $3^{\varphi(10^6)+4} \equiv 81 \pmod{10^6}$.

Ответ: да, существует: $k = \varphi(10^6) + 4$.

Задача 104. Существует ли k, такое, что 13^k оканчивается на $\ldots 0000169$?

Решение. Нужно решить сравнение: $13^k \equiv 169 \pmod{10^7}$.

Воспользуемся теоремой Эйлера для 13^{k-2} и 10^7. Тогда при $k - 2 = \varphi(10^7)$ получим, что $13^{\varphi(10^7)} \equiv 1 \pmod{10^7}$. Поэтому $k = \varphi(10^7) + 2$ удовлетворяет требуемым условиям.

Задача 105. Существует ли k, такое, что 7^k оканчивается на $\ldots 000049$?

Решение. Допустим да, заметим, что $k >= 3$, рассмотрим умножение $7^{k-1} \cdot 7$. Заметим, что 7^{k-1} минимум двузначное число , если $7^{k-1} \cdot 7 = \ldots 000049$, то 7^{k-1} оканчивается на 7, так как единственное число, которое при умножении на 7 по модулю 10 дает 9 это 7. Представим умножение этих чисел столбиком, тогда после

Задача 106. Существует ли k, такое, что 11^k оканчивается на $\ldots 0000121$?

Решение. Напишем условие задачи чуть более формально:

$$11^k \equiv 121 \pmod{10^7}.$$

Тогда по свойству сравнений по модулю:

$$11^{k-2} \equiv 1 \pmod{10^7}.$$

По теореме Эйлера, так как 11 и 10^7 взаимно просты, то можно взять k такое, что:

$$k - 2 = \varphi(10^7),$$

где $\varphi(m)$ — функция Эйлера.

Функция Эйлера существует для любого натурального числа, а значит, такое k существует и равно $\varphi(10^7) + 2$.

Задача 110. Весёлая компания из 10 супружеских пар разбивается на 5 групп по 4 человека для лодочной прогулки так, чтобы в каждой лодке оказались двое мужчин и двое женщин. Во скольких случаях Леонид Иванович Комбинаторкин и Степан Витальевич Дискретов (оба из Весёлой компании) окажутся каждый в одной лодке со своей женой? (Все лодки друг от друга неотличимы.)

Решение. Первый случай. Леонид Иванович и Степан Витальевич в одной лодке. Тогда нам остаётся рассадить остальных людей. Во вторую лодку можно посадить людей $\frac{8 \cdot 7}{2!} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2!}$ способами (можно выбрать первого мужчину 8-ю способами, второго – 7-ю и делим на количество перестановок двух элементов, аналогично для пары из женщин). Для других лодок так же. Тогда общее число способов:

$$\left(\frac{8 \cdot 7}{2!}\right)^2 \cdot \left(\frac{6 \cdot 5}{2!}\right)^2 \cdot \left(\frac{4 \cdot 3}{2!}\right)^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 1}{2!}\right)^2 = 2520^2.$$

Это число получено с учетом различия между лодками. Так как в данной задаче его нет, то нужно разделить это число на количество перестановок из четырех лодок: $2520^2/4! = 264600$.

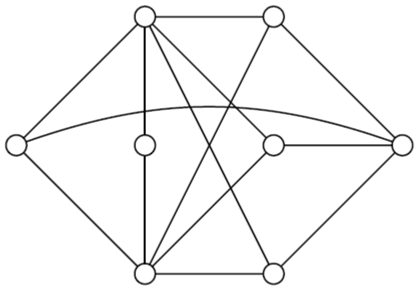
Второй случай. Леонид Иванович и Степан Витальевич в разных лодках. Тогда соседей для них можно выбрать $(8 \cdot 8) \cdot (7 \cdot 7)$ способами. В оставшиеся три лодки, аналогично предыдущему случаю, можно рассадить людей

$$\frac{\left(\frac{6 \cdot 5}{2!}\right)^2 \cdot \left(\frac{4 \cdot 3}{2!}\right)^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 1}{2!}\right)^2}{3!} = 1350.$$

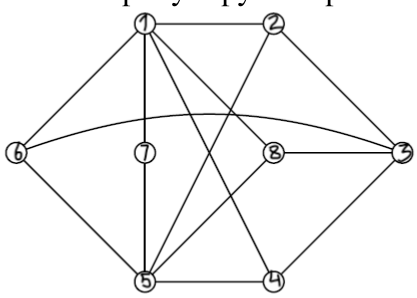
способами. Тогда общее число способов во втором случае: $(8 \cdot 8) \cdot (7 \cdot 7) \cdot 1350$. Складывая это число с количеством рассадок из первого случая, получаем ответ:

$$264600 + (8 \cdot 8) \cdot (7 \cdot 7) \cdot 1350 = 4498200.$$

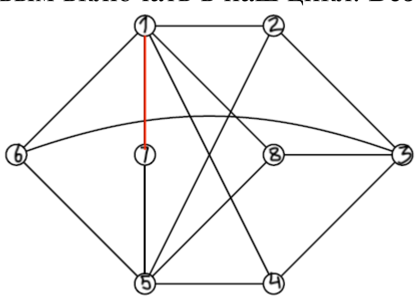
Задача 114. Гамильтонов ли следующий граф? (Если да, то найдите в нём гамильтонов цикл; если нет — докажите.)



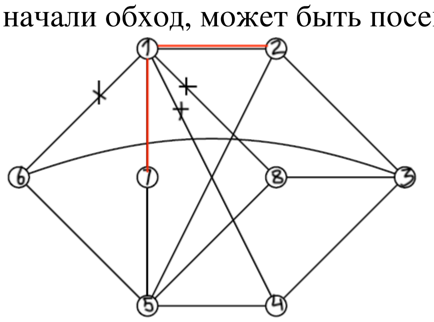
Решение. Пронумеруем вершины.



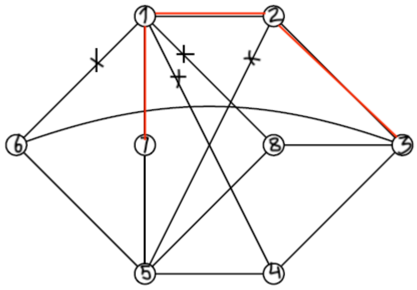
Пусть гамильтонов цикл существует начнем строить его с вершины 7. Заметим, что вершины 1 и 5 связаны с одними и теми же вершинами, значит неважно, в силу симметрии, какое из ребер $7-5$ или $7-1$ первым включать в наш цикл. Без ограничения общности пусть это $7-1$



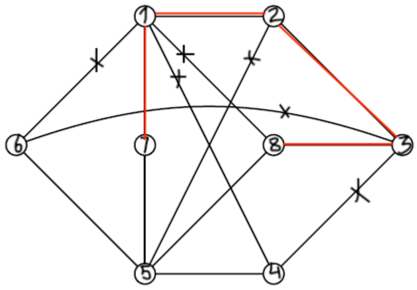
Далее заметим, что вершины $2, 8, 6, 4$ связаны с одними и теми же вершинами, значит не важно, в силу симметрии (это означает, что если можно построить гамильтонов цикл, пойдя на этом этапе в одну из них, то можно пойдя и в другие), какую из них включать в цикл. Без ограничений общности, пусть это вершина 2, сразу удалим ребра, по которым уже нельзя перемещаться в силу того, что только вершина 7, в которой мы начали обход, может быть посещена дважды.



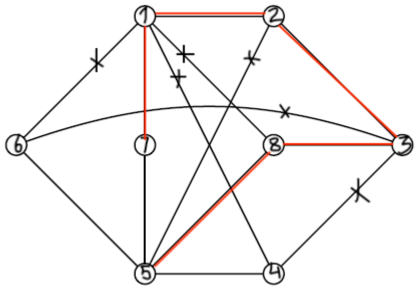
Далее из вершины 2 можно идти только в вершину 3, иначе, если пойти в вершину 5, потом придется идти в вершину 7, потому что других путей обратно в 7 нет, но тогда будут посещены не все вершины. Тогда идем в вершину 3, удаляя все ребра, по которым уже нельзя идти по озвученным выше причинам.



Далее опять-таки в силу симметрии не важно в какую из вершин $8, 4$ или 6 идти. Без ограничений общности, пусть это вершина 8 идем в нее, удаляя ребра, по которым уже нельзя идти.



Далее можно идти только в вершину 5.



Из 5 нужно идти в вершину 7, потому что больше ребер, кроме $7-5$, по которым можно вернуться в 7 нет. Но тогда остаются непосещенными две вершины, значит по построению гамильтонова цикла в данном графе не существует.

Задача 121. Дано нечётное натуральное число p. Докажите, что числа p и $p+2$ одновременно просты тогда и только тогда, когда $4((p-1)!+1)+p \equiv 0 \pmod{p^2+2p}$. [Указание: можно применить китайскую теорему об остатках.]

Решение. Очевидно, что p и $p+2$ взаимно просты, так как p нечетно. Значит, число делится на p^2+2p тогда и только тогда, когда оно делится на p и на $p+2$.

По теореме Вильсона число $p>1$ — простое тогда и только тогда, когда $(p-1)!+1$ кратно p.

Тогда:

$$p \text{ — простое} \iff (p-1)!+1 \equiv 0 \pmod p \iff 4((p-1)!+1)+p \equiv 0 \pmod p.$$

Теперь докажем аналогичное для $p+2$.

Напишем верные утверждения, которые нам понадобятся потом:

$$\begin{gathered} p(p+1) \equiv -2(p+1) \equiv 2 \pmod{p+2}, \\ 2(p+2-1)! \equiv 2(p+1)! \equiv 2(p+1)p\cdot(p-1)! \equiv 4(p-1)! \pmod{p+2}. \end{gathered}$$

Тогда:

$$\begin{gathered} p+2 \text{ — простое} \iff (p+1)!+1 \equiv 0 \pmod{p+2}, \\ (p+1)!+1 \equiv 0 \pmod{p+2} \iff 2((p+1)!+1) \equiv 0 \pmod{p+2}, \\ 2((p+1)!+1) \equiv 0 \iff 4((p-1)!+1)+p \equiv 0 \pmod{p+2}. \end{gathered}$$

Таким образом, утверждение доказано в обе стороны.

Задача 122. Докажите, что $(p-1)! \equiv -1(\mod p)$ тогда и только тогда, когда p — простое.

Решение.

Докажем сначала достаточность, воспользовавшись контрапозицией. Заметим, что если p составное число большее четырёх, то оно делит $(p-1)!$, следовательно остаток $(p-1)!$ по модулю p равен нулю.

Теперь докажем необходимость. Рассмотрим $x : 1 \leq x \leq p-1$. Для каждого такого x найдется y из того же диапазона, что $x \cdot y \equiv 1(\mod p)$. При этом может случиться, что $x = y$, тогда $x^2 \equiv 1(\mod p)$, а значит $(x-1)(x+1) \equiv 0(\mod p)$, следовательно $x = 1$, или $x = p-1$. Из этого следует, что $(p-1)! \equiv 1 \cdot (p-1)(\mod p)$, значит $(p-1)! \equiv -1(\mod p)$, что и требовалось.

Задача 123. Найдите все целочисленные решения системы сравнений

$$\begin{cases} x \equiv 18 \pmod{23}, \\ x \equiv 25 \pmod{29}, \\ x \equiv 1 \pmod{6}. \end{cases}$$

Решите задачи обязательно методом, примененным в доказательстве китайской теоремы об остатках.

Решение. Сначала посчитаем $M = 23 \cdot 29 \cdot 6 = 4002$. Теперь найдем все $M_i^{-1} \pmod{a_i}$, где $M_i = \frac{M}{a_i}$.

Найдем $M_1 = 29 \cdot 6 = 174$, тогда $174 \cdot x + 23 \cdot y = 1$. Находим $x = -7$ и $y = 53$. Тогда получаем, что $M_1^{-1} \equiv 16 \pmod{23}$.

Аналогично находим: $M_2 = 23 \cdot 6 = 138$, $M_2^{-1} \equiv 4 \pmod{29}$, $M_3 = 23 \cdot 29 = 667$, $M_3^{-1} \equiv 1 \pmod{6}$. Решение системы получаем по формуле:

$$x = \sum_{i=1}^{3} r_i \cdot M_i \cdot M_i^{-1} \equiv 547 \pmod{M},$$

где r_i — правая часть i-го уравнения в системе.

Ответ: $x \equiv 547 \pmod{4002}$.

Задача 124. Укажите все целые числа, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} x \equiv 19 \pmod{31} \\ x \equiv 28 \pmod{37} \\ x \equiv 18 \pmod{22} \end{cases}$$

Решите задачи обязательно методом, примененным в доказательстве китайской теоремы об остатках.

Решение. Китайская теорема об остатках:

***Теорема* 1.** *Пусть мы имеем систему:*

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{a_1} \\ x \equiv r_2 \pmod{a_2} \\ \quad \dots \\ x \equiv r_n \pmod{a_n} \end{cases}$$

Обозначим $M_0 = \prod_{i=1}^{n} a_i$. Тогда решение системы запишется как $x \equiv \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot M_i \cdot M_i^{-1} \pmod{M_0}$, где $M_i = \frac{M_0}{a_i}$, а M_i^{-1} это обратный элемент к M_i по модулю a_i.

Найдем коэффициенты M_i. Обозначим $y_i = r_i \cdot M_i^{-1}$. По теореме 1 имеем $x \equiv M_1 \cdot y_1 + M_2 \cdot y_2 + M_3 \cdot y_3 \pmod{M_0}$. Итак:

$$
\begin{gathered}
M_0 = 31 \cdot 37 \cdot 22, \\
M_1 = 37 \cdot 22 = 814, \quad 814 \cdot y_1 \equiv 19 \pmod{31}, \quad 8 \cdot y_1 \equiv 19 \pmod{31}, \quad y_1 = 14, \\
M_2 = 31 \cdot 22 = 682, \quad 682 \cdot y_2 \equiv 28 \pmod{37}, \quad 16 \cdot y_2 \equiv 28 \pmod{37}, \quad y_2 = 11, \\
M_3 = 31 \cdot 37 = 1147, \quad 1147 \cdot y_3 \equiv 18 \pmod{22}, \quad 3 \cdot y_3 \equiv 18 \pmod{22}, \quad y_3 = 50.
\end{gathered}
$$

Тогда $x \equiv 814 \cdot 14 + 682 \cdot 11 + 1147 \cdot 50 \equiv 546 \pmod{31 \cdot 37 \cdot 22}$.

Задача 125.

Укажите все целые числа, удовлетворяющие системе:

$$
\begin{cases}
x \equiv 6 \pmod 9 \\
x \equiv 2 \pmod{17} \\
x \equiv 17 \pmod{23}
\end{cases}
$$

Решите задачи обязательно методом, примененным в доказательстве китайской теоремы об остатках.

Решение.

Используя метод доказательства Китайской теоремы об остатках, найдем в первую очередь число $M = 9 \cdot 17 \cdot 23 = 3519$. Далее найдем все $M_i^{-1} \pmod{a_i}$, если $M_i = \frac{M}{a_i}$. Ищем эти числа расширенным алгоритмом Евклида.

$M_1 = 17 \cdot 23 = 391$, тогда имеет место равенство $391 \cdot x + 9 \cdot y = 1$.

$$391 = 9 \cdot 43 + 4;$$

$$9 = 4 \cdot 2 + 1;$$

$$1 = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - (391 - 9 \cdot 43) \cdot 2 = 9 \cdot 87 + 391 \cdot (-2).$$

Таким образом, мы нашли $M_1^{-1} = -2 \pmod 9 = 7$.

Аналогично находим M_2^{-1} и M_3^{-1} :

$M_2 = 9 \cdot 23 = 207$,

$$1 = 3 - 2 = 3 - (17 - 3 \cdot 5) = 3 \cdot 6 + 17 \cdot (-1) = (207 - 17 \cdot 12) \cdot 6 - 17 = 207 \cdot 6 + 17 \cdot (-73).$$

то есть $M_2^{-1} = 6 \pmod{17}$.

$M_3 = 9 \cdot 17 = 153$,

$$1 = 8 - 7 = 8 - (15 - 8) = (23 - 15) \cdot 2 - 15 = 23 \cdot 2 + (153 - 23 \cdot 6) \cdot (-3) = 23 \cdot 20 + 153 \cdot (-3),$$

то есть $M_3^{-1} = -3 \pmod{23} = 20$.

Далее по формуле из алгоритма:

$$x = \sum_{i=1}^{3} r_i \cdot M_i \cdot M_i^{-1} \pmod M,$$

$$x = 6 \cdot 391 \cdot 7 + 2 \cdot 207 \cdot 6 + 17 \cdot 153 \cdot 20 = 70926 \pmod{3519},$$

$$x \equiv 546 \pmod{3519},$$

что и является решением системы.

Задача 126. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей. В решении используйте принцип Дирихле в следующей формулировке: “если множества A и B таковы, что $|A| > |B|$, то любое отображение из A в B не является инъекцией”; обязательно укажите, как конкретно для Вашей задачи определяются эти A и B.

Решение. Если все ученики попарно дружат, то утверждение верно. Иначе найдутся двое S_1, S_2, не дружащие друг с другом. Поскольку среди каждых троих учеников есть дружащая пара, то любой из 23 оставшихся учеников дружит хотя бы с одним из выбранных.

Пусть A — множество друзей S_1 или S_2, B — весь класс, кроме S_1 и S_2. Пусть у обоих $S_{1,2}$ не более 11 друзей, тогда $|B| = 25 > 2 + 22 = 2 + 2 \cdot 11 \geq 2 + |A|$. По принципу Дирихле, нет инъекции $B \to A$. В то же время каждый ученик является либо одним из $S_{1,2}$, либо их другом — т.е. $B \subseteq A$. Противоречие. Значит, хотя бы у одного из двоих есть хотя бы 12 друзей.

Задача 131. Найдите все целочисленные решения системы сравнений

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod 7 \\ x \equiv 16 \pmod{23} \\ x \equiv 19 \pmod{29} \end{cases}$$

Решите задачи обязательно методом, примененным в доказательстве китайской теоремы об остатках.

Решение.

Числа $7,\ 23$ и 29 – взаимно просты, значит можно применить китайскую теорему об остатках. Обозначим $M = \prod\limits_{i=1}^{n} a_i = 7 \cdot 23 \cdot 29 = 4669$. Тогда получим следующие значение M_i :

$$M_1 = \frac{4669}{7} = 667;\ M_2 = \frac{4669}{23} = 203;\ M_3 = \frac{4669}{29} = 161.$$

Найдем теперь обратные элементы к каждому M_i.

$$M_1^{-1} = 4;\ M_2^{-1} = 17;\ M_3^{-1} = 20.$$

Тогда по формуле из доказательства имеем:

$$x = \sum_{i=1}^{3} r_i M_i M_i^{-1} = 4 \cdot 667 \cdot 4 + 16 \cdot 203 \cdot 17 + 19 \cdot 161 \cdot 20 = 127068 \equiv 1005 \pmod M.$$

Задача 136. Найдите хотя бы один первообразный корень по модулю 23^{1000}.

Решение. Первообразный корень существует, так как 23 является простым числом. По Таблице Гаусса первообразным корнем 23 является число 10. Воспользуемся алгоритмом нахождения первообразных корней. Выпишем следующее уравнение:

$$(10 + 23 \cdot t)^{22} = 1 + 23u.$$

Если, для какого-то t, найденное u не делится на 23, то $10 + 23 \cdot t$ будет искомым корнем. Если $t = 0$, то $u = 434782608695652173913$, и не делится на 23. Следовательно, 10 является искомым первообразным корнем.

Задача 137. Найдите хотя бы один первообразный корень по модулю 29^{1000}.

Решение. Сначала найдем первообразный корень по модулю 29. Покажем, что 2 подходит:

$$\varphi(29) = 28 = 2^2 \cdot 7,$$
$$2^{\frac{28}{2}} = (2^7)^2 = 128^2 \equiv 12^2 \equiv 144 \equiv 28 \not\equiv 1 \pmod{29},$$
$$2^{\frac{28}{7}} = 2^4 = 16 \not\equiv 1 \pmod{29}.$$

То есть 2 — первообразный корень по модулю 29. Поэтому, по теореме, если мы найдем такое t, что $(2+29t)^{28} \not\equiv 1 \pmod{29^2}$, то $(2+29t)$ — первообразный по модулю $29^\alpha, \alpha > 1$. Проверим $t = 0$:

$$2^{28} = (2^{14})^2 \equiv 405^2 \equiv 30 \not\equiv 1 \pmod{29^2}.$$

Значит, 2 — первообразный корень по модулю 29^{1000}.

Задача 138. Найдите хотя бы один первообразный корень по модулю 11^{1000}.

Решение. Заметим, что 11 — простое число, а значит, для 11^{1000} существует первообразный корень. Теперь вспомним теорему, которая доказана в книге «Основы теории чисел» М.И.Виноградова (гл.VI, §2, п.e)

Легко найти первообразный корень по модулю 11 — это 2. Тогда условие теоремы принимает следующий вид:

$$(2+11t)^{10} = 1 + 11u, (u,p) = 1.$$

При $t = 0$ мы получаем $u = 93$, которое на 11 действительно не делится. А значит, 2 — первообразный корень по модулю 11^{1000}.

Задача 139. Найдите хотя бы один первообразный корень по модулю $2 \cdot 23^{1000}$.

Решение. Найдём первообразный корень по модулю 23^{1000}.

Рассмотрим первообразный корень 5 по модулю 23. Он первообразный, так как

$$\varphi(23) = 2 \cdot 11,$$
$$5^2 \equiv 2 \not\equiv 1 \pmod{23},$$
$$5^{11} \equiv 22 \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{23}.$$

Ищем такое число вида $5 + 23t$, что $(5+23t)^{22} \not\equiv 1 \pmod{23^2}$. Для $t = 0$ имеем:

$$5^{22} \equiv 323 \not\equiv 1 \pmod{529}.$$

Значит, 5 — первообразный корень по модулю $23^s, s \geq 2$, в том числе и по модулю 23^{1000}.

Но так как 5 нечётно, то 5 является первообразным корнем по модулю $2 \cdot 23^{1000}$.

Задача 141. Найдите хотя бы один первообразный корень по модулю $2 \cdot 11^{1000}$

Решение.

По критерию первообразный корень существует ($m = 2p^\alpha$, где $p = 11$, $\alpha = 1000$).

$$\varphi(m) = \varphi(2 \cdot 11^{1000}) = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{11}) \cdot 11^{1000} \cdot 2 = 11^{999} \cdot 10.$$

Воспользуемся следующим критерием: $(g, m) = 1$ и g – первообразный корень $\Leftrightarrow g^{11^{999} \cdot 5} \not\equiv 1$, и $g^{11^{999} \cdot 2} \not\equiv 1$, и $g^{11^{998} \cdot 10} \not\equiv 1$.

Проверим, является ли $g = 3$ первообразным корнем:

$$3^{\frac{1}{2} \cdot \varphi(m)} \equiv 3^{5 \cdot 11^{999}} \equiv 243^{11^{999}} \pmod{m}$$

Пусть $g = 2$ – первообразный корень по модулю m, то есть $2^\gamma \equiv 1 \pmod{m}$.

$$x^{\frac{\varphi(m)}{q}} \equiv 1 \pmod{m}$$
$$m = 2 \cdot p^\alpha \text{ and } (q, m) = 1$$
$$\left(\frac{\varphi(m)}{q}, \varphi(m)\right) = \frac{\varphi(m)}{q} \frac{\varphi(m)}{q} \cdot \text{int} x \equiv \text{ind } 1 \pmod{\varphi(m)}$$

Сделаем таблицу первообразных корней по модулю 11.

x|α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
3	3	9	5	4	1					
4	4	5	9	3	1					
5	5	3	2	10	6	8	7	2		

Отсюда видно, что $g = 2$ – первообразный корень по модулю 11. Далее:

$$(2 + 11t)^{10} \not\equiv 1 \pmod{11^2}$$

$$\text{Проверим, что t = 0: } 2^{11} \equiv 128 \cdot 8 \equiv 56 \not\equiv 1 \pmod{121}$$

Значит, 2 – первообразный корень по модулю 11^α $\forall\alpha\geqslant 2$.

$$g = 2 \text{ – первообразный корень} \quad (\text{mod } \frac{m}{2}) = 11^{1000}$$

$$\varphi(\frac{m}{2}) = 10 \cdot 11^{999} = \varphi(m)\ \forall q \in \{2, 5, 11\}$$

$$2^{\frac{\varphi m}{q}} \not\equiv 1 \quad (\text{mod } \frac{m}{2}) \Rightarrow 2^{\frac{\varphi(m)}{q}} \not\equiv 1 \pmod{m}.$$

По теореме о существовании первообразного корня имеем, что итоговый ответ — это нечетное число из пары $\{2, 2 + 11^{1000}\}$. То есть, $g = 2 + 11^{1000}$ — первообразный корень по модулю $2 \cdot 11^{1000}$.

Задача 142. Найдите асимптотику величины $\binom{3n+\log_2 n}{2n}$, при $n \to \infty$.

Решение. Заметим, что $e^{-\frac{1}{6n}\log_2^2 n} \sim e^{o(1)} \to 1$ при $n \to \infty$.

Тогда упростим ответ.

$$\sqrt{\frac{3}{4\pi n}} \cdot \frac{3^{3n+\log_2 n}}{2^{2n}} \cdot e^{-\frac{1}{6n}\log_2^2 n} \sim \sqrt{\frac{3}{4\pi n}} \cdot \frac{3^{3n+\log_2 n}}{2^{2n}} \sim \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot n^{\log_2 3 - \frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{3^3}{2^2}\right)^n.$$

Задача 144. Найдите асимптотику величины $\binom{5n+\log_2 n}{2n}$ при $n \to \infty$. Под нахождением асимптотики понимается нахождение такой формулы, между которой и оцениваемой величиной можно было бы поставить знак $\sim$. Формула внутри себя не должна содержать никаких значков O-символики. Также не допускается наличие в формуле неопределённостей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{\infty}$ и пр.

Решение.

$$\sqrt{\frac{5}{12\pi n}} \cdot \frac{1}{4^n n^{2n}} \cdot \exp\left(n \ln\frac{5^5 n^2}{3^3} + \log_2 n \ln\frac{5}{3} - \frac{2\log_2^2 n}{15n}\right) \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{5}{12\pi n}} \cdot \frac{1}{4^n n^{2n}} \cdot \exp\left(n \ln\frac{5^5 n^2}{3^3} + \log_2 n \ln\frac{5}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{12\pi n}} \cdot \frac{1}{4^n n^{2n}} \cdot \frac{5^{5n} n^{2n}}{3^{3n}} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\log_2 n} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{12\pi n}} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\log_2 n} \cdot \left(\frac{5^5}{4 \cdot 3^3}\right)^n$$

$$= \sqrt{\frac{5}{12\pi n}} \cdot 2^{\log_2 \frac{5}{3} \cdot \log_2 n} \cdot \left(\frac{5^5}{4 \cdot 3^3}\right)^n =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{12\pi}} \cdot n^{\log_2 \frac{5}{3} - \frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5^5}{4 \cdot 3^3}\right)^n.$$

Задача 145. Найдите при $n \to \infty$ асимптотику величины

$$\binom{9n + \log_2 n}{n}$$

.

Решение.

Используя формулу Стирлинга, получим:

$$\binom{9n+\log_2 n}{n} \sim$$

$$\frac{(9n+\log_2 n)!}{n!(8n+\log_2 n)!} \sim$$

$$\frac{\sqrt{2\pi(9n+\log_2 n)}\cdot(9n+\log_2 n)^{9n+\log_2 n}\cdot e^n\cdot e^{8n+\log_2 n}}{e^{9n+\log_2 n}\cdot\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot\sqrt{2\pi(8n+\log_2 n)}\cdot(8n+\log_2 n)^{(8n+\log_2 n)}} \sim$$

$$\frac{1}{n^n\sqrt{2\pi n}}\cdot\frac{\sqrt{9n}\cdot\left(1+\frac{\log_2 n}{9n}\right)^{0.5}}{\sqrt{8n}\cdot\left(1+\frac{\log_2 n}{8n}\right)^{0.5}}\cdot\frac{(9n)^{9n+\log_2 n}\cdot\left(1+\frac{\log_2 n}{9n}\right)^{9n+\log_2 n}}{(8n)^{8n+\log_2 n}\cdot\left(1+\frac{\log_2 n}{8n}\right)^{8n+\log_2 n}} \sim .$$

$$\frac{3}{4\sqrt{\pi n}}\cdot 9^n\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{8n+\log_2 n}\cdot\frac{e^{\ln\left(1+\frac{\log_2 n}{9n}\right)\cdot(9n+\log_2 n)}}{e^{\ln\left(1+\frac{\log_2 n}{8n}\right)\cdot(8n+\log_2 n)}} \sim$$

$$\frac{3}{4\sqrt{\pi n}}\cdot 9^n\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{8n+\log_2 n}\cdot\frac{\left(\frac{\log_2 n}{9n}+o\left(\frac{\log_2 n}{n}\right)\right)\cdot(\log_2 n+9n)}{\left(\frac{\log_2 n}{8n}+o\left(\frac{\log_2 n}{n}\right)\right)\cdot(\log_2 n+8n)} \sim$$

$$\frac{3}{4\sqrt{\pi n}}\cdot 9^n\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{8n+\log_2 n}.$$

Задача 146. Пусть $n\to\infty$. Найдите асимптотику полиномиального коэффициента $P(2n,\ 5n,\ n,\ \sqrt{n})$. Под нахождением асимптотики понимается нахождение такой формулы, между которой и оцениваемой величиной можно было бы поставить знак эквивалентности. Формула внутри себя не должна содержать никаких значков O-символики. Также не допускается наличие в формуле неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, 1^∞ и пр.

Решение.

$$P(2n,\ 5n,\ n,\ \sqrt{n}) \sim \frac{\sqrt{2\pi(8n+\sqrt{n})}(\frac{8n+\sqrt{n}}{e})^{8n+\sqrt{n}}}{\sqrt{4\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n}\sqrt{10\pi n}(\frac{5n}{e})^{5n}\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^{n}\sqrt{2\pi\sqrt{n}}(\frac{\sqrt{n}}{e})^{\sqrt{n}}} \sim$$

$$\frac{2(8n+\sqrt{n})^{8n+\sqrt{n}}}{(2n)^{2n}\cdot n^n\cdot\sqrt{n}^{\sqrt{n}}\cdot(5n)^{5n}\cdot\sqrt{\pi\sqrt{n}}\cdot\sqrt{40}\pi n} =$$

$$\frac{2n^{8n+\sqrt{n}}(8+\frac{1}{\sqrt{n}})^{8n+\sqrt{n}}}{2^{2n}\cdot 5^{5n}\cdot\sqrt{40\pi^3}\cdot n^{8n+\frac{\sqrt{n}}{2}+\frac{5}{4}}} =$$

$$\frac{n^{\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{5}{4}}\cdot(8+\frac{1}{\sqrt{n}})^{8n+\sqrt{n}}}{(2^2\cdot 5^5)^n\cdot\sqrt{10\pi^3}}$$

Распишем через экспоненту:

$$e^{\ln(8+\frac{1}{\sqrt{n}})^{8n+\sqrt{n}}} = e^{(8n+\sqrt{n})\ln(8+\frac{1}{\sqrt{n}})} =$$

$$e^{(8n+\sqrt{n})(\ln 8+\frac{1}{8\sqrt{n}}-\frac{1}{128n}+o(\frac{1}{n})} =$$

$$e^{8n\ln 8+\sqrt{n}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+o(1)} \sim$$

$$e^{\ln 8(8n+\sqrt{n})+\sqrt{n}+\frac{1}{16}} = 8^{8n+\sqrt{n}}\cdot e^{\sqrt{n}+\frac{1}{16}}$$

После подстановки получаем:

$$P \sim \frac{n^{\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{5}{4}} \cdot 8^{8n+\sqrt{n}} \cdot e^{\sqrt{n}+\frac{1}{16}}}{(2^2 \cdot 5^5)^n \cdot \sqrt{10\pi^3}} = \frac{n^{\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{5}{4}} \cdot 2^{22n+3\sqrt{n}-5n\log_2 5} \cdot e^{\sqrt{n}+\frac{1}{16}}}{\sqrt{10\pi^3}}$$

Задача 148. Пусть $n \to \infty$. Найдите асимптотику

$$k = \frac{(6n+2\sqrt{n})!}{n! \cdot (2n)! \cdot (3n+\sqrt{n})! \cdot \sqrt{n}!}.$$

Решение.

$$k \sim \frac{\sqrt{2} \cdot 2^{6n+2\sqrt{n}} \cdot (3n+\sqrt{n})^{3n+\sqrt{n}}}{4\pi n\sqrt{\pi\sqrt{n}} \cdot 2^{2n} \cdot n^{3n}\sqrt{n}^{\sqrt{n}}} \sim$$
$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\left(3n+\sqrt{n}\right) \cdot \ln\left(3n+\sqrt{n}\right) - \sqrt{n} \cdot \ln\left(\sqrt{n}\right) - 3n \cdot \ln(n) - \frac{5}{4} \cdot \ln(n) + \left(4n+2\sqrt{n}\right) \cdot \ln(2)\right).$$

Далее будем работать с показателем экспоненты.

$$\left(3n+\sqrt{n}\right) \cdot \ln\left(3n+\sqrt{n}\right) - \sqrt{n} \cdot \ln\left(\sqrt{n}\right) - 3n \cdot \ln(n) - \frac{5}{4} \cdot \ln(n) + \left(4n+2\sqrt{n}\right) \cdot \ln(2) =$$
$$\left(3n+\sqrt{n}\right) \cdot \ln(3) + \left(3n+\sqrt{n}\right) \cdot \ln(n) + \left(3n+\sqrt{n}\right) \cdot \ln\left(1+\frac{\sqrt{n}}{3n}\right) -$$
$$-\left(3n+\frac{\sqrt{n}}{2}+\frac{5}{4}\right) \cdot \ln(n) + \left(4n+2\sqrt{n}\right) \cdot \ln(2).$$

Вынесем слагаемые $(4n+2\sqrt{n}) \cdot \ln(2)$ и $(3n+\sqrt{n}) \cdot \ln(3)$. Получим

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{(4n+2\sqrt{n})} \cdot 3^{(3n+\sqrt{n})} \cdot n^{\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{5}{4}} \cdot \exp\left(\left(3n+\sqrt{n}\right) \cdot \ln\left(1+\frac{\sqrt{n}}{3n}\right)\right).$$

Раскроем показатель экспоненты по формуле Тейлора:

$$\left(3n+\sqrt{n}\right) \cdot \ln\left(1+\frac{\sqrt{n}}{3n}\right) = \left(3n+\sqrt{n}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{n}}{3n} - \frac{n}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{n} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + o(1) = \sqrt{n} + \frac{1}{6} + o(1).$$

Тогда итоговый ответ

$$k \sim \frac{e^{16}}{2\pi\sqrt{2\pi}} \cdot n^{-54} \cdot (12e)^{\sqrt{n}} \cdot n^{\sqrt{n}2} \cdot \left(2^4 \cdot 3^3\right)^n.$$

Задача 149. Пусть $n \to \infty$. Найти асимптотику полиномиального коэффициента $P(n+\sqrt{n}, 5n, 3n, \sqrt{n}) = \frac{(9n+2\sqrt{n})!}{(n+\sqrt{n})!(5n)!(3n)!\sqrt{n}!}$.

Решение. Будем при решении пользоваться формулой Стерлинга.

$$P(n+\sqrt{n}, 5n, 3n, \sqrt{n}) = \frac{(9n+2\sqrt{n})!}{(n+\sqrt{n})!(5n)!(3n)!\sqrt{n}!} \sim$$
$$\sim \frac{(\frac{9n+2\sqrt{n}}{e})^{9n+2\sqrt{n}}\sqrt{2\pi(9n+2\sqrt{n})}}{(\frac{n+\sqrt{n}}{e})^{n+\sqrt{n}}(\frac{5n}{e})^{5n}(\frac{3n}{e})^{3n}(\frac{\sqrt{n}}{e})^{\sqrt{n}}4\pi^2\sqrt{(n+\sqrt{n})15n^2\sqrt{n}}} \sim$$
$$\sim \frac{\sqrt{9n}(9n+2\sqrt{n})^{9+2\sqrt{n}}}{2\pi\sqrt{2\pi}\sqrt{15}(n+\sqrt{n})^{n+\sqrt{n}}(5^5 \cdot 3^3)^n n^{\frac{7}{4}} n^{8n}(\sqrt{n})^{\sqrt{n}}} \tag{1}$$

Преобразуем $(n+\sqrt{n})^{n+\sqrt{n}} \sim e^{(n+\sqrt{n})\ln n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}}$
и $(9n+2\sqrt{n})^{9n+2\sqrt{n}} \sim e^{(9n+2\sqrt{n})\ln 9n+2\sqrt{n}+\frac{2}{9}}$ Тогда имеем

$$P(n+\sqrt{n},5n,3n,\sqrt{n}) \sim \frac{3\sqrt{n}(9n)^{9n+2\sqrt{n}}e^{2\sqrt{n}+\frac{2}{9}}}{2\pi\sqrt{30\pi}n^{n+\sqrt{n}}e^{\sqrt{n}+\frac{1}{2}}84375^n n^{14}(\sqrt{n})^{\sqrt{n}}} \sim \\ \sim \frac{3}{2\pi\sqrt{30\pi}e^{\frac{5}{18}}} \cdot n^{\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{5}{4}}e^{\sqrt{n}}9^{9n+2\sqrt{n}}84375^{-n} \quad (2)$$

Задача 151. Хирург З.А. Резняк планирует удалить графу $K_{n,n}$ несколько рёбер, так, чтобы у графа не осталось ни одного совершенного паросочетания. Каким минимально возможным количеством рёбер придётся пожертвовать графу?

Ответ обоснуйте, опираясь на теорему Холла.

Решение. Оценка сверху: n (просто отрезаем одну вершину).

В графе без совершенного паросочетания по теореме Холла существует L – подмножество вершин какой-либо доли, что $|L| > |N(L)|$. Вершины из дополнения $N(L)$ до противоположной к L доле графа не соединены с L, значит было удалено минимум $(n-|N(L)|)\cdot|L| \geq (n+1-|L|)\cdot|L|$ рёбер (оценка справа получена благодаря условию вверху). Можно показать, что при фиксированной сумме (а она равна $n+1$), произведение в оценке справа минимально при $|L| = 1 \vee n$, и, следовательно, всегда не менее n, что выступает как нижняя оценка (равная верхней).

Задача 152. Докажите, что в любом двудольном регулярном непустом графе есть хотя бы одно совершенное паросочетание.

Решение. Предположим что паросочетания нет. Для двудольного графа существование совершенного паросочетания равносильно выполнению условия Холла — для любого множества вершин A из одной доли множество $N(A)$ соседних с A вершин имеет не меньшую мощность. Раз совершенного паросочетания нет, то для некоторого множества B это условие нарушается, т.е. для него мощность $N(B)$ строго меньше мощности B. Пусть $|B| = n, |N(B)| = x < n$. Пусть степень вершин графа s. Тогда из каждой вершины множества B выходит s ребер, т.е. всего из B выходит $s\cdot n$ ребер. По предположению из $N(B)$ выходит $x\cdot s < n\cdot s$ ребер. Пусть из них t идет в вершины из B. Очевидно, что $t \leq s\cdot x$. Из B идут $s\cdot n$ ребер, все они идут в $N(B)$, тогда $s\cdot n = t$. Имеем:

$$s\cdot n = t \leq s\cdot x$$
$$n \leq x$$

Однако, по нашему предположению, x строго меньше чем n. Противоречие.

Задача 157. Пусть в двудольном графу G с равномощными долями X и Y существует совершенное паросочетание, и пусть $\deg(v) \geq t$ для каждой вершины $v \in X$. Докажите, что в G найдутся не менее $t!$ различных совершенных паросочетаний.

Решение. Раз в графе существует совершенное паросочетание, то выполняются условия теоремы Холла.

Пусть размер доли равен m. Очевидно, что так как доли равномощные, то $m \geq \deg(v) \geq t$ для каждой вершины $v \in X$. Докажем требуемое утверждение индукцией по m.

- База: $m = 1$.

  Тогда $t = 1$, и, очевидно, есть $1! = 1$ совершенных паросочетаний.

- Переход: пусть утверждения выполнены для $\forall m \leq k-1$. Покажем, что утверждение верно для $m = k$.

  Рассмотрим два случая.

1. $\forall X_1 \subset X : X_1 \neq \varnothing, X_1 \neq X : |\mathcal{N}(X_1)| \geq |X_1| + 1.$

   Фиксируем произвольную вершину $x \in X$ и её соседа $y \in Y$. Рассмотрим двудольный граф с долями $X \setminus \{x\}, Y \setminus \{y\}$. Для нашего нового графа выполнены условия теоремы Холла и степень вершин не меньше $t-1$, а число вершин в каждой из долей равно $m-1$. Поэтому, по предположению индукции, число совершенных паросочетаний в этом графе не меньше $(t-1)!$.

   Возвращая удалённые вершины и добавляя к паросочетаниям ребро xy получим, что в исходном графе не меньше $(t-1)!$ совершенных паросочетаний. Так как степень каждой вершины X не меньше t, то проделывая аналогичные рассуждения для других соседей x, получим, что в исходном графе не меньше, чем $t \cdot (t-1)! = t!$ совершенных паросочетаний.

2. $\exists X_1 \subset X : X_1 \neq \varnothing, X_1 \neq X : |\mathcal{N}(X_1)| = |X_1|.$

   Рассмотрим такое X_1, причём $1 \leq |X_1| \leq m-1$. Рассмотрим двудольный граф с долями X_1 и $Y_1 = \mathcal{N}(X_1)$. Условия теоремы Холла выполнены и по предположению индукции в нём хотя бы $t!$ совершенных паросочетаний. Осталось показать, что в оставшейся части есть хотя бы одно совершенное паросочетание.

   Рассмотрим произвольное $X_2 \subseteq X \setminus X_1$ и оценим $|\mathcal{N}(X_2)|$. В исходном графе были выполнены условия теоремы Холла, поэтому

   $$|\mathcal{N}(X_2 \sqcup X_1)| \geq |(X_2 \sqcup X_1)| = |X_2| + |X_1|.$$

   Заметим, что

   $$|\mathcal{N}(X_2 \sqcup X_1)| = |\mathcal{N}(X_2) \setminus \mathcal{N}(X_1)| + |\mathcal{N}(X_1)|.$$

   Получаем

   $$|\mathcal{N}(X_2) \setminus \mathcal{N}(X_1)| \geq |X_2|.$$

   Значит условия теоремы Холла выполнены и существует совершенное паросочетание, так как размер долей $X \setminus X_1, Y \setminus Y_1$ равны.

Задача 158. Функция $n(s)$ задана в виде $n(s) := \max\{n_0 \mid (n_0!)^{n_0} \leqslant s\}$. Найдите асимптотику этой функции при $s \to \infty$.

Решение.

Запишем условие на максимальность n_0 в виде двойного неравенства.

$$\begin{gathered}
\ln(n_0!)^{n_0} \leqslant \ln s \leqslant \ln((n_0+1)!)^{(n_0+1)} \\
n_0(n_0 \ln n_0) \lesssim \ln s \lesssim (n_0+1)((n_0+1)\ln(n_0+1)) \\
n_0^2 \ln n_0 \lesssim \ln s \lesssim (n_0+1)^2 \ln(n_0+1) \\
n_0^2 \ln n_0 \sim \ln s \\
\ln(n_0^2 \ln n_0) \sim \ln\ln s \\
2\ln n_0 + \ln\ln n_0 \sim \ln\ln s \\
2\ln n_0 \sim \ln\ln s \\
n \sim \sqrt{\frac{\ln s}{\ln n_0}} \sim \sqrt{\frac{2\ln s}{\ln\ln s}}.
\end{gathered}$$

Задача 159. Функция $n(s)$ задана в виде $n := \max\{n_0 \mid (n_0!)^{\ln n_0} \leq s\}$. Найдите асимптотику этой функции при $s \to \infty$.

Решение. Сразу отметим, что при $s \longrightarrow \infty$ также $n_0 \longrightarrow \infty$. Также вспомним, что при $n \longrightarrow \infty$ выполняется эк
$n\ln(n)$.

Теперь поработаем с неравенствами (переход к асимптотическому меньше выполняется при $n_0 \longrightarrow \infty$):

$$\begin{aligned}
&(n_0!)^{\ln(n_0)} \le s < ((n_0+1)!)^{\ln(n_0+1)} \\
&\ln(n_0)\ln(n_0!)) \le \ln(s) < \ln(n_0+1)\ln((n_0+1)!) \\
&n_0\ln^2(n_0) \lesssim \ln(s) \lesssim (n_0+1)\ln^2(n_0+1).
\end{aligned}$$

Так как $n_0+1 \sim n_0$, имеем:

$$\ln(s) \sim n_0\ln^2(n_0). \tag{3}$$

Откуда сразу следует $\ln(\ln(s)) \sim \ln(n_0)$. Теперь, выражая n_0 из (3), получаем ответ: $n_0 \sim \frac{\ln(s)}{\ln^2(\ln(s))}$.

Задача 162. Решите сравнение $x^{18} \equiv 4 \pmod{31}$. Можете без доказательства пользоваться тем, что 3 — первообразный корень по модулю 31. Всю таблицу индексов выписывать не обязательно.

Решение. Раз 3 — первообразный корень, значит, любое решение сравнения представимо в виде 3^n:

$$3^{18n} \equiv 4 \pmod{31}$$

Задача сведена к нахождению индексов числа 4 вида $18n$. Один из них найти легко: $4 \equiv 3^{18n} \equiv 4^n \Leftarrow n = 1$, то есть $\operatorname{ind} 4 = 18$. Известно, что все индексы отличаются друг от друга на $k \cdot \varphi(31) = 30k$, где k целое. Для всеобщей делимости на 18 они должны отличаться на $90k$:

$$18 + 90k = 18n$$

Отсюда $n = 1 + 5k$, т.е. $x = 3^{1+5k}$. Но $3^{31} \equiv 3$ (это легко видно из Малой теоремы Ферма). Поэтому в ответе достаточно перечислить $3, 3^6, 3^{11}, 3^{16}, 3^{21}, 3^{26}$.

Задача 163. Решите сравнение $x^{24} \equiv 23 \pmod{29}$. Можете без доказательства пользоваться тем, что 2 — первообразный корень по модулю 29. Всю таблицу индексов выписывать не обязательно.

Решение. Прологарифмируем выражение: $24\operatorname{ind}_2(x) \equiv \operatorname{ind}_2(23) \pmod{28}$. Тогда $24\operatorname{ind}_2(x) \equiv 20 \pmod{28}$, так как индекс 23 равен 20. Разделим все на 4, получим $6\operatorname{ind}_2(x) \equiv 5 \pmod 7$. Так как $6 \cdot 6 \equiv 1 \pmod 7$, то обратный к 6 равен 6, значит $\operatorname{ind}_2(x) \equiv 30 \equiv 2 \pmod 7$. В системе 28 уравнение будет иметь четыре корня: $\operatorname{ind}_2(x) = 2, 9, 16, 23$. И окончательно решение для x: $2^2 \pmod{29}, 2^9 \pmod{29}, 2^{16} \pmod{29}, 2^{23} \pmod{29}$. Ответ: $x = 4, 19, 25, 10$ по модулю 29.

Задача 166. Докажите, что существует элемент порядка ровно $5 \cdot 11^{100}$ по модулю 11^{200}. Приведите пример элемента такого порядка.

Решение. Как известно, в $\mathbb{Z}_m$ есть первообразный корень тогда и только тогда, когда m представляется в виде $2, 4, p^a$ или $2 \cdot p^a$, где p — простое нечётное, $a \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Поскольку 11 — простое нечётное число, по модулю 11^{200} существует первообразный корень g. Рассмотрим элемент приведённой системы вычетов $g^{2 \cdot 11^{99}}$. Заметим, что $\left(g^{2\cdot 11^{99}}\right)^{5\cdot 11^{100}} = g^{10\cdot 11^{199}}$, а следовательно, $\left(g^{2\cdot 11^{99}}\right)^{5\cdot 11^{100}} \equiv 1 \pmod{11^{200}}$ по теореме Эйлера. Если предположить, что $\exists m < 5 \cdot 11^{100} : \left(g^{2\cdot 11^{99}}\right)^m \equiv 1 \pmod{11^{200}}$, то, поскольку $2 \cdot 11^{99} \cdot m < 10 \cdot 11^{199} = \varphi(11^{200})$, g в таком случае не является первообразным корнем. Полученное противоречие показывает, что порядок рассматриваемого элемента $g^{2\cdot 11^{99}}$ действительно равен $5 \cdot 11^{100}$. Приведём пример. Для этого будем использовать следующую теорему (см., например, И. М. Виноградов «Основы теории чисел», глава 6, §2): если p — простое нечётное и g — первообразный корень по модулю p, то $\exists\, t\, :\, (g+pt)^{p-1} = 1 + pu$, u не делится на p, и для такого t верно, что $g + pt$ является первообразным корнем по модулю p^a для всех $a \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Во-первых, легко убедиться, что 2 — первообразный корень по модулю 11 (т. к. $2^2 \equiv 4$ и $2^5 \equiv 10$ по модулю 11). Теперь найдём подходящее t. Подходит $t = 0$ — действительно, $2^{10} = 1 + 11 \cdot 93$, и 93 не делится на 11. Поэтому, в соответствии с теоремой, 2 — первообразный корень по модулю 11^{200}. Согласно доказанному выше, порядок элемента $2^{2\cdot 11^{99}}$ равен $5 \cdot 11^{100}$.

Задача 167. пусть $p \to \infty$, $s = \binom{p^4}{p}$ и $n = \binom{p^4}{p^2}$. Найдите функцию $f(s)$ в записи $n = (e + o(1))^{f(s)}$

Решение.

Заметим, что $p = o((p^4)^{0.5}))$ и $p^2 = o((p^4)^{2/3})$, тогда имеем

$$s = \binom{p^4}{p} \sim \frac{p^{4p}}{p!} \sim \frac{p^{4p} \cdot e^p}{\sqrt{2\pi p} \cdot p^p} = \frac{e^p \cdot p^{3p}}{\sqrt{2\pi p}},$$
$$n = \binom{p^4}{p^2} \sim \frac{p^{4p^2}}{(p^2)!} \cdot e^{\frac{-(p^2)^2}{p^4}} \sim e^{-0.5} \cdot p^{4p^2} \cdot \frac{e^{p^2}}{\sqrt{2\pi p^2} \cdot (p^2)^{p^2}} = e^{-0.5} \cdot \frac{p^{2p^2} \cdot e^{p^2}}{p\sqrt{2\pi}}.$$

Тогда имеем

$$\ln s \sim p + 3p \ln p - 0.5 \ln 2\pi p \sim 3p \ln p,$$
$$\ln \ln s \sim \ln 3p + \ln \ln p \sim \ln p.$$

Получаем, что

$$p \sim \frac{\ln s}{3 \ln \ln s}.$$

Или

$$p = \frac{\ln s}{3 \ln \ln s} + o(\frac{\ln s}{\ln \ln s}).$$

Представим n немного в другом виде:

$$n = e^{-0.5} \cdot \frac{p^{2p^2} \cdot e^{p^2}}{p\sqrt{2\pi}} + o(\frac{p^{2p^2} \cdot e^{p^2}}{p}) =$$
$$= e^{-0.5(2p^2 \ln p + p^2 - \ln p - \ln \sqrt{2\pi})} + o(e^{(2p^2 \ln p + p^2 - \ln p)}) =$$
$$= (e + o(1))^{-0.5((2p^2-1) \ln p + p^2 - \ln \sqrt{2\pi})}.$$

Теперь будем смотреть на показатель и подставлять туда равенство для p:

$$(2p^2 - 1) \ln p = \left(2 \cdot \frac{\ln^2 s}{9 \ln^2 \ln s} + o\left(\frac{\ln^2 s}{\ln^2 \ln s}\right)\right) \cdot (\ln \ln s + o(\ln \ln s)),$$
$$p^2 = \left(2 \cdot \frac{\ln^2 s}{9 \ln^2 \ln s} + o\left(\frac{\ln^2 s}{\ln^2 \ln s}\right)\right),$$
$$(2p^2 - 1) \ln p + p^2 - \ln \sqrt{2\pi} = (\ln \ln s + o(\ln \ln s)) \left[2 \cdot \frac{\ln^2 s}{9 \ln^2 \ln s} + o\left(\frac{\ln^2 s}{\ln^2 \ln s}\right)\right] =$$
$$= \frac{2 \ln^2 s}{9 \ln \ln s} + o\left(\frac{\ln^2 s}{\ln \ln s}\right).$$

По итогу имеем:

$$n = (e + o(1))^{\frac{2 \ln^2 s}{9 \ln \ln s}} \Rightarrow f(s) = \frac{2 \ln^2 s}{9 \ln \ln s}$$

Задача 169. Дан клетчатый прямоугольник размером $n \times n, n \in \mathbb{N}$. Обозначим символом a_n число способов замостить этот прямоугольник фигурами двух типов: уголками размером 2×2 и доминошками размера 3×1. Никакие две фигуры не должны перекрываться и каждая клетка прямоугольника должна быть покрыта некоторой фигурой. Выведите линейное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами для a_n и укажите начальные условия, необходимые для его корректного задания. Замощения, совмещающиеся отражениями относительно обеих осей симметрии прямоугольника, считаются различными. Считайте, что $a_0 = 1$.

Решение. Оговоримся, что будум называть фигуру 3×1 доской, а другую фигурку уголком. Введем b_n — количество способов замостить прямоугольник $n \times n$ с одной вырезанной клеткой в верхнем правом углу. Тогда $a_n = a_{n-3} + 2b_{n-1}$. Первое слагаемое это три доски, а второе это 2 способа положить уголок и сведение задачи к замощению другой фигуры.
Выразим так же $b_n = a_{n-2} + b_{n-3}$. Первой слагаемое это обычный уголок, второе это две доски — сверху и снизу.
$b_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_{n-2})$
Подстановка даст $a_{n+6} - 4a_{n+3} + a_n = 0$.
Начальные условия:

$$\left[\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 3 \\ a_4 = 0 \\ a_5 = 0 \end{array}\right.$$

Задача 170. Найдите линейное рекуррентное соотношение для последовательности $\{a_n\}$, где a_n – количество двоичных слов длины n, не содержащих подслова «110», и вычислите a_0, a_1, a_2.

Решение.

Простым перебором возможных последовательностей получим начальные условия: $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4$.

Введем вспомогательную последовательность $\{b_n\}$: количество двоичных слов длины n без подслов «110», заканчивающихся на 0. Тогда применим следующие рассуждения для построения рекуррентных соотношений:

1. Если слово длины $n-2$ заканчивается на 0, то есть четыре варианта его «правильного» продолжения. Если слово длины $n-1$ заканчивается на «10», то есть два варианта продолжения. Наконец, правильное слово может заканчиваться на «111». Это исчерпывает все варианты, поэтому имеет соотношение:

$$a_n = 4bn - 2 + 2(b_{n-1} - b_{n-2}) + (a_{n-1} - b_{n-1} - b_{n-2}) = b_{n-2} + b_{n-1} + a_{n-1}.$$

2. Теперь для последовательности $\{b_n\}$. Для последовательности длины $n-2$ есть два продолжения («00» и «10»), а для последовательности, заканчивающейся на «1» – только одно («00»). Тогда рекуррента следующая:

$$b_n = 2b_{n-1} + (b_{n-1} - b_{n-2}) = b_{n-2} + b_{n-1}.$$

Выражая b_n из первого уравнения и подставляя во второе, получаем соотношение:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-2} - a_{n-3}$$
$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-3} = 0$$

Задача 174. Лягушка прыгает по вершинам пятиугольника $ABCDE$ (вершины пятиугольника обозначаются буквами по часовой стрелке), стартовав из вершины A и перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Обозначим через K_n количество способов, которыми лягушка может попасть из вершины A в неё же за n прыжков. В траектории лягушки любые вершины могут повторяться сколько угодно раз (в том числе и вершина A!), главное, чтобы лягушка сделала ровно n прыжков и после n-го прыжка оказалась в вершине A. Выведите линейное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами для K_n.

Решение. Так как лягушка может прыгать только на соседние вершины, можно ограничиться рассмотрением переходов лягушки из соседних вершин. Пусть
A_n, B_n, C_n, D_n, E_n — количество способов попасть за n прыжков в вершины
A, B, C, D, E соответственно. В вершину A можно попасть за два прыжка из вершин C, D, а также из неё самой (сделать один прыжок в соседнюю и вернуться), поэтому $A_n = 2A_{n-2} + C_{n-2} + D_{n-2}$. Аналогично для вершины D имеем $D_n = 2D_{n-2} + A_{n-2} + B_{n-2}$. В вершину B можно за один прыжок попасть из вершин A, C, поэтому $B_n = C_{n-1} + A_{n-1}$.

Из симметрии задачи можно записать: $E_n = B_n, D_n = C_n$, поэтому имеем систему: [left=]align A$_n$ = $2A_{n-2} + 2D_{n-2}$;
$D_n =\ 2D_{n-2} + A_{n-2} + B_{n-2}$;
$B_n =\ A_{n-1} + D_{n-1}$. Подставим уравнение () в (): $D_n = 2D_{n-2} + A_{n-2} + A_{n-3} + D_{n-3}$. Теперь это подставим в (), попутно выразив D_{n-i} оттуда же:

$$\begin{aligned} A_n &= 2A_{n-2} + 2(2D_{n-4} + A_{n-4} + A_{n-5} + D_{n-5}) = \\ &= 2A_{n-2} + 2((A_{n-2} - 2A_{n-4}) + A_{n-4} + A_{n-5} + \frac{1}{2} \cdot (A_{n-3} - 2A_{n-5})) = \\ &= 4A_{n-2} + A_{n-3} - 2A_{n-4}. \end{aligned}$$

Ответ: $K_{n+4} = A_{n+4} = 4A_{n+2} + A_{n+1} - 2A_n$.

Задача 175. Докажите, что матрицу из $\{0, 1\}^{n \times n}$, в каждой строке и столбце которой ровно k единиц, можно представить в виде суммы k матриц, в каждой строке и столбце у которых в точности по одной единице.

Решение. Представим себе, что матрица олицетворяет двудольный граф, и единица в ячейке ij стоит, если i-я вершина из первой доли соединена с j-й вершиной из второй доли. Тогда задачу можно перефразировать: докажите, что двудольный k-регулярный граф можно раскрасить в k цветов так, чтобы инцидентные рёбра имели разные цвета.

Покажем, что выполняется условие теоремы Холла. Пусть A — любое подмножество вершин первой доли, $N(A)$ — множество их соседей. Между A и $N(A)$ проведены $|A|k$ ребёр. Если бы выполнялось $|N(A)| < |A|$, то в какую-то вершину из $N(A)$ по принципу Дирихле входило бы более k рёбер, а так не должно быть в k-регулярном графе. Противоречие. Значит, $|N(A)| \geqslant |A|$. Тогда по теореме Холла в графе есть паросочетание.

Покрасим рёбра из паросочетания в один цвет и мысленно сотрём их. Оставшийся граф $(k-1)$-регулярен. Значит, можно повторить операцию и покрасить ещё одно паросочетание в другой цвет. И так до тех пор, пока граф не станет 0-регулярным, то есть пока всё не будет покрашено. В итоге мы получили, что хотели — раскраску в k цветов, причём инцидентные рёбра окрашены в разные цвета.

Задача 176. Докажите, что эйлеров граф содержит единственный эйлеров цикл тогда и только тогда, когда граф является простым циклом.

Решение. Докажем, что если эйлеров граф содержит единственный эйлеров цикл, то этот граф является простым циклом. Докажем равносильное утверждение: если эйлеров граф не является простым циклом, то он содержит не единственный эйлеров цикл. Так как граф эйлеров, то он удовлетворяет критерию эйлеровости: степени всех вершин четные и граф содержит не более одной нетривиальной компоненты связности. Если эйлеров граф не является простым циклом, то у него есть вершины, степень которых четна и больше двух. Пусть это вершина v_1, без ограничения общности будем считать, что ее степень равна четырём.

Пусть у нас есть какой-то эйлеров цикл, так как степень вершины v_1 равна четырем, то в нее входят и выходят по два ребра, причем в эйлеровом цикле входящее и выходящее ребро будут следовать друг за другом, например, входящие ребра это e_1, e_2, выходящие — e_3, e_4, причем порядок следования ребер — $e_1 e_3, e_2 e_4$. Обход эйлерова цикла начнем с вершины v_1, тогда цикл закончится также в вершине v_1, и в ходе обхода вершина v_1 будет посещена еще один раз в силу того, что у нее есть две пары входящих и выходящих ребер. Следовательно, все ребра можно поделить на две части: те, которые мы обошли от первого посещения v_1 до второго, обозначим ее G_1, и те, которые мы посетили от второго посещения v_1 до третьего, обозначим ее G_2. Теперь в паре идущих друг за другом ребер поменяем входящее ребро на выходящее, а выходящее — на входящее, то есть теперь порядок обхода будет $e_3 e_1$. Будем считать, что e_1 и e_3 принадлежат G_1. Тогда снова начнем обход графа с вершины v_1, сначала обойдем G_2 в порядке, совпадающем с порядком обхода этой части в исходном эйлеровом цикле, а далее при повторном посещении вершины v_1 начнем обход G_1 в порядке, противоположном обходу исходного эйлерова цикла. Таким образом, мы получили новый эйлеров цикл.

Следовательно, если эйлеров граф не является простым циклом, то в нем можно найти несколько эйлеровых циклов.

Задача 178. Пусть ребро uv графа G таково, что при удалении обеих вершин u и v из графа G он становится несвязным. Докажите, что в графе G нет гамильтоновых циклов, проходящих через ребро uv.

Решение. Обозначим за G_i — компоненту связности, образованную после удаления вершин u и v. Таких компонент $n \geq 2$.

Пусть существует гамильтонов цикл проходящий через ребро uv и обход начинаем из произвольной вершины в компоненте G_i.

В какой-то момент мы пройдём по ребру uv. Пусть из вершины $u_i \in G_i$ мы прошли по ребру uv в вершину $v_j \in G_j$ и пусть в G_j мы ещё не были. Но теперь граф «превратился» в несвязный, так как через вершины u и v мы пройти не можем, а это эквивалентно их удалению. Следовательно, вернуться в исходную вершину мы уже не сможем. Противоречие.

Задача 179. Пусть гамильтонов планарный граф G можно уложить так, чтобы все вершины лежали на границе внешней грани. Докажите, что гамильтонов цикл в G единственен.

Решение. Очевидно, что существует как минимум один гамильтонов цикл: соединяет все вершины по границе внешней грани.

Допустим, есть еще один гамильтонов цикл, он будет проходить по какому-то внутреннему ребру, иначе он бы совпадал с исходным гамильтоновым циклом, а других внешних ребер не существует, так как это противоречит тому, что все вершины лежат на границе внешней грани. Пусть это внутреннее ребро e_{12} соединяет вершины v_1 и v_2 и делит внутреннюю грань на части g_1 и g_2.

Начнем обход графа с вершины v_1(можем так сделать, потому что обход в цикле можно начать с любой вершины): сразу же пройдем по ребру e_{12} и начнем обход одной из частей g_1 или g_2. Допустим, мы начали обход вершин части g_1, тогда после того, как мы обойдем вершины этой части, нужно будет перейти в часть g_2, это можно сделать либо пройдя через вершину v_1, что противоречит гамильтоновости данного цикла, либо же пересечь ребро e_{12}, что противоречит планарности графа.

Аналогичные противоречия будут получены и при других порядках обхода. Следовательно, еще одного гамильтонова цикла быть не может. Что и требовалось доказать.

Задача 181. Докажите тождество с числами Фибоначчи: $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.

Решение. Воспользуемся равенством, доказанным на семинаре: $F_{n+m} = F_{m-1} \cdot F_n + F_m \cdot F_{n+1}$, где $m = n+1$. Расписываем F:

$$F_{2n+1} = F_n \cdot F_n + F_{n+1} \cdot F_{n+1},$$
$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 182. Докажите тождество с числами Фибоначчи: $F_{n+1} F_{n+2} - F_n F_{n+3} = (-1)^{n+1}$.

Решение. Преобразуем выражение:

$$(-1)^{n+2} = F_{n+2}F_{n+3} - F_{n+1}F_{n+4} = (F_n + F_{n+1})(F_{n+1} + F_{n+2}) - F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+3}).$$

Еще раз раскроем F_{n+3}:

$$(-1)^{n+2} = F_nF_{n+1} + F_nF_{n+2} + F_{n+1}^2 - F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2}) = F_n^2 + 2F_nF_{n+1} - \\ -F_{n+1}F_{n+2} = F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_{n+2}.$$

Докажем по индукции, что $(-1)^{n+1} = F_{n+1}^2 - F_n^2 - F_nF_{n+1}$.

База: $n = 0$, тогда $-1 = 1^2 - 1^2 - 1$ — выполнено.

Переход: домножим предположение на -1:

$$(-1)^{n+2} = -F_{n+1}^2 + F_n^2 + F_nF_{n+1} = F_n^2 + 2F_nF_{n+1} - F_{n+1}(F_{n+1} + F_n) \\ = F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_{n+2}.$$

Следовательно, $(-1)^{n+1} = F_{n+1}^2 - F_n^2 - F_nF_{n+1} = F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3}$.

Задача 183. Докажите тождество с числами Фибоначчи: $F_{3n} = F_n^3 + F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3, n > 0$.

Решение. Покажем, что тождество выполнено для любого k. Вспомним равенство с семинара и воспользуемся им: $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$. Тогда

$$F_{3k} = F_{k+2k} = F_{k-1}F_{2k} + F_kF_{2k+1}. \tag{4}$$

Вычислим отдельно F_{2k} и F_{2k+1}. Имеем

$$F_{2k} = F_{k+k} = F_{k-1}F_k + F_kF_{k+1}, \\ F_{2k+1} = F_{k+1+k} = F_k^2 + F_{k+1}^2.$$

Подставим полученные выражения в (4):

$$F_{3k} = F_{k-1}(F_{k-1}F_k + F_kF_{k+1}) + F_k^3 + F_kF_{k+1}^2 = F_k^3 + F_k(F_{k-1}^2 + F_{k-1}F_{k+1} + F_{k+1}^2) = \\ = F_k^3 + \frac{F_{k+1} - F_{k-1}}{F_{k-1} - F_{k+1}}(F_{k-1}^3 - F_{k+1}^3) = F_k^3 + F_{k+1}^3 - F_{k-1}^3.$$

Следовательно, исходное тождество доказано.

Задача 184. Существует ли унициклический граф, последовательность степеней вершин которого будет равна $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$? Если да, то постройте такой граф.

Решение.

Определение. Назовем *свободной степенью цикла* максимальное число вершин степени 1, которые можно присоединить к вершинам без превышения заданных степеней вершин, принадлежащим циклу.

Определение. *неизоморфными циклами* назовем такие циклы, свободная степень которых не совпадает.

Определение. *изоморфными циклами* назовем такие циклы, свободная степень которых совпадает.

Очевидно, вершины со степенями 1 не будут принадлежать циклу. Тогда остаются вершины $(2, 2, 3, 3, 4)$. Не будем рассматривать вершины степени 2, так как их добавление очевидно не влияет на возможность построения такого графа. Свободная степень цикла, состоящего из (3, 3, 4) равна 4, поэтому построить такой граф невозможно.

Задача 187. Найдите частное решение рекуррентного соотношения $2u_{n+1} - 5u_n - u_{n-1} + 6u_{n-2} = 0$ при начальных условиях $u_0 = 8, u_1 = 11, u_2 = 22$.

Решение. Ранее было получено, что $u_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n + C_3 \cdot 2^n$. Найдем константы C_1, C_2, C_3 из начальных условий. Тогда

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 8 \\ -C_1 + \frac{3}{2}C_2 + 2C_3 = 11 \\ C_1 + \frac{9}{4}C_2 + 4C_3 = 22 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 8 - C_2 - C_3 \\ 38 = 5C_2 + 6C_3 \\ C_2 = 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 4 \\ C_3 = 3. \end{cases}$$

Итоговое рекуррентное соотношение имеет вид $u_n = (-1)^n + 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3 \cdot 2^n$.

Задача 188. Найдите частное решение рекуррентного соотношения $2u_{n+5} + 9u_{n+4} + 12u_{n+3} + 5u_{n+2} = 0$ при начальных условиях $u_0 = 5, u_1 = -12$ и $u_2 = 28$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$2x^3 + 9x^2 + 12x + 5 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -1; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = -2.5. \end{cases}$$

Тогда имеем общее решение: $u_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n)(-1)^n + \alpha_3(-2.5)^n$, где α_i найдём из начальных условий:

$$\begin{cases} u_0 = 5 = \alpha_1 + \alpha_3; \\ u_1 = -12 = (\alpha_1 + \alpha_2)(-1) + \alpha_3(-2.5); \\ u_2 = 28 = (\alpha_1 + 2\alpha_2) + 6.25\alpha_3; \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 1; \\ \alpha_2 = 1; \\ \alpha_3 = 4. \end{cases}$$

Тогда окончательно: $u_n = (1 + n) \cdot (-1)^n + 4 \cdot (-2.5)^n$.

Задача 189. Найдите частное решение рекуррентного соотношения $y_{n+1} - 4y_n - 5y_{n-1} = 0$ при начальных условиях $y_0 = 5, y_1 = 13$.

Решение. Найдем производящую функцию последовательности в виде

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \cdot z^n.$$

Для $k \geq 2$ соотношение принимает вид $z^k \cdot y_k = z^k \cdot (4y_{k-1} + 5y_{k-2})$.

Тогда после сложения всех соотношений получим

$$G(z) = 5 + 13z + 4\sum_{n=2}^{\infty} y_{n-1} \cdot z^n + 5\sum_{n=2}^{\infty} y_{n-2} \cdot z^n.$$

Приведем суммы к виду

$$G(z) = 5 + 13z + 4z\sum_{n=1}^{\infty} y_n \cdot z^n + 5z^2\sum_{n=0}^{\infty} y_n \cdot z^n = -7z + 5 + (4z + 5z^2)G(z).$$

Следовательно, $G(z) = \frac{-5+7z}{5z^2+4z-1}$.

Разложим $G(z)$ в ряд:

$$G(z) = \frac{3}{1-5z} + \frac{2}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (2(-z)^n + 3(5z)^n),$$

следовательно, $y_n = 2(-1)^n + 3 \cdot 5^n$.

Задача 190. Найдите частное решение соотношения $y_{n+3} - 5y_{n+2} + y_{n+1} + 21y_n - 18y_{n-1}$ при начальных условиях $y_0 = 4, y_1 = 1, y_2 = 28, y_3 = 67.$cc

Решение.

Составим характеристическое уравнение, соответствующее данному рекуррентному соотношению:

$$x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18 = 0.$$

Приведя к более хорошему виду, получим

$$(x-1)(x+2)(x-3)^2 = 0.$$

Откуда получаем $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_{3,4} = 3$. Тогда общее решение рекурренты имеет вид

$$y_n = a_1 + a_2(-2)^n + (a_3 + na_4)3^n.$$

Подставим начальные условия, получим систему линейных уравнений:

$$\{$$

Её решением будет вектор $(2, 2, 0, 1)^T$. То есть частное решение рекуррентного соотношения есть

$$y_n = 2 + 2 \cdot (-2)^n + n3^n.$$

Задача 191. Дана последовательность a_n, заданная линейным рекуррентным соотношением $a_{n+3} - a_{n+2} - 8a_{n+1} + 10a_n = 0$ и начальными условиями $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -4$. Вычислите значение выражения $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} na_n \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Решение.

Найдем сначала производящую функцию данной последовательности:

$$G(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \sum_{n=3}^{+\infty}(a_{n-1} + 8a_{n-2} - 10a_{n-3}) \cdot z^n =$$

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + z\sum_{n=2}^{+\infty} a_nz^n + 8z^2\sum_{n=1}^{\infty} a_nz^n - 10z^3\sum_{n=0}^{+\infty} a_nz^n =$$

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + z(G(z) - a_0 - a_1z) + 8z^2(G(z) - a_0) - 10z^3G(z).$$

Из этих соотношений получаем, что $G(z) = \frac{1-z-12z^2}{1-z-8z^2+10z^3}$.

Воспользуемся тем фактом, что радиус сходимости ряда равен самому маленькому по модулю корню выражения в знаменателе производящей функции. Оставляя попытки найти корни руками и доверяясь Вольфрам Альфа, получим, что радиус сходимости примерно равен 0.34, что больше $\frac{1}{3}$. Это дает нам возможность суммировать ряд:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_nz^n = z \cdot G'(z) = \frac{2z^2(-4 - 13z + 10z^2 + 60z^3)}{(1 - z - 8z^2 + 10z^3)^2}.$$

Тогда $g(\frac{1}{3}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} na_n(\frac{1}{3})^n = -\frac{405}{8} = -50\frac{5}{8}$.

Задача 192. Дана последовательность a_n, заданная линейным рекуррентным соотношением $a_{n+3}+4a_{n+2}+a_{n+1} - 5a_n = 0$ и начальными условиями $a_0 = 2, a_1 = -4, a_2 = 14$. Вычислите значение выражения $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Решение. Решим характеристическое уравнение:

$$x^3 + 4x^2 + x - 5 = 0.$$

Корни этого уравнения $x_1 \approx -3.199, x_2 \approx 0.912, x_3 \approx -1.714$. Отсюда общее решение рекуррентного соотношения: $a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + c_3 x_3^n$. По теореме Коши – Адамара получаем, что радиус сходимости $R = \frac{1}{|x_1|}$. Не трудно видеть, что $\frac{1}{5} < R$, поэтому ряд будет сходиться в этой точке.

Свёртка:

$$G(x) = \frac{2+4x}{1+4x+x^2-5x^3}.$$

Исходный ряд представим как:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n = xG'(x) = x \cdot \frac{-4-4x+26x^2+40x^3}{(1+4x+x^2-5x^3)^2}.$$

В точке $x = \frac{1}{5}$ получаем:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{-4-4\left(\frac{1}{5}\right)+26\left(\frac{1}{5}\right)^2+40\left(\frac{1}{5}\right)^3}{\left(1+4\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)^2-5\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^2} = -\frac{86}{405}.$$

Задача 193. Используя метод производящих функций, вычислите сумму биномиальных коэффициентов: $\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}^2$.

Решение. Рассмотрим произведение таких многочленов: $(1+x)^n$ и $(1-x)^n$. Раскроем их по биному Ньютона: $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$, $(1-x)^n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}x^j$. Тогда, с одной стороны,

$$(1+x)^n(1-x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i \cdot \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}x^j.$$

С другой стороны,

$$(1+x)^n(1-x)^n = \left(1-x^2\right)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{2k}.$$

Значит,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i \cdot \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}x^j = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{2k}.$$

Рассмотрим коэффициенты при x^n. При раскрытии скобок в левой части равенства коэффициентами при x^n будут только те множители, для которых выполнено $i+j=n$. Рассмотрим два случая в зависимости от четности n.

Допустим, что n — нечетное, тогда коэффициент при x^n в правой части будет равен нулю, коэффициент в левой части равен

$$\sum_{i+j=n}(-1)^j\binom{n}{i}\binom{n}{j} = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\binom{n}{n-s} = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\binom{n}{s} = 0.$$

Следовательно, при нечетном n искомая сумма равна нулю.

Пусть n — четное, тогда коэффициент в правой части при x^n равен $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$, а в левой —

$$\sum_{i+j=n}(-1)^j\binom{n}{i}\binom{n}{j} = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\binom{n}{n-s} = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\binom{n}{s}.$$

Приравняв коэффициенты друг к другу, получим, что искомая сумма равна $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$.

Задача 194. Преобразуйте в бесконечный ряд сумму

$$(1+x)^{2n} + 2(1+x)^{2n-1} + 4(1+x)^{2n-2} + \dots + 2^n(1+x)^n,$$

пользуясь формулой для суммы геометрической прогрессии и представлением выражения $1/(1-x)$ в виде бесконечного ряда. Сравнивая коэффициенты при x^n в левой и правой части получившегося выражения, вычислите значение суммы

$$\binom{2n}{n}+2\binom{2n-1}{n}+4\binom{2n-2}{n}+\cdots+2^n\binom{n}{n}.$$

Решение. Начнем решение с следующего равенства:

$$(1+x)^{2n}+2(1+x)^{2n-1}+4(1+x)^{2n-2}+\cdots+2^n(1+x)=\\ \left(2^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k-\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}x^k\right)\sum_{k=0}^{\infty}x^k.$$

Так как при любом $k>n$ выполняется равенство $\binom{n}{k}=0$, запишем пределы суммирования в скобках как ∞:

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k\left(2^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k-\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}x^k\right)=\\ \sum_{k=0}^{\infty}x^k\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{n+1}\binom{n}{k}-\binom{2n+1}{k}\right)x^k\right),$$

и воспользуемся правилом Коши при перемножении двух рядов (n-член ряда $\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}b_k$ равен $\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$), тогда получим при x^n в этом ряду коэффициент

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\left(2^{n+1}\cdot\binom{n}{k}-\binom{2n+1}{k}\right).$$

Теперь воспользуемся равенством $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ и тем, что $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$, тогда

$$\sum_{k=0}^{n}2^{n+1}\cdot\binom{n}{k}=2^{2n+1},$$

а

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2n+1-k}=\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}.$$

Тогда

$$2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}=2^{2n+1}.$$

Из всего выше перечисленного следует, что

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\left(2^{n+1}\cdot\binom{n}{k}-\binom{2n+1}{k}\right)=2^{2n+1}-2^{2n}=2^{2n},$$

и сумма из условия, так как она равна коэффициенту при x^n, равняется 2^{2n}.

Задача 199. Найдите сумму количеств неупорядоченных разбиений натуральных чисел $1\le n\le 40$, таких, что каждое разбиение состоит не более, чем из 6 слагаемых и максимальное слагаемое в каждом из которых не больше 7.

Решение. Количество неупорядоченных разбиений из не более чем шести слагаемых, каждое из которых не превышает 7 равно числу диаграмм Юнга внутри прямоугольника 6×7.

Посчитаем число таких диаграмм. По урновой схеме неупорядоченного выбора с возвращением, будем каждой длине $[0, 7]$ сопоставлять число строк этой длины. Нулевая длина соответствует отсутствию слагаемого.

Подсчитать число возможных кодов поможет следующее представление: поставим столько единиц, сколько строк соответствует нулевой длине, а за тем обозначим конец информации о группе строк нулевой длины терминальным символом 0. Таким же образом поступим с остальными длинами. Информацию о последней группе строк, имеющих длину семь, завершать терминальным символом не нужно. Всего таких кодов имеется C_{6+8-1}^{8-1}, а значит именно столько и диаграмм Юнга в прямоугольнике 6×7.

При этом стоит учесть, что в данном числе диаграмм также содержатся разбиения на слагаемые чисел 0, 42 и 41, которых ровно по одному.

Итого имеем $C_{13}^{7} - 3$ разбиений.

Задача 200. Найдите сумму количеств неупорядоченных разбиений натуральных чисел $1 \leq n \leq 54$, таких, что каждое разбиение состоит не более, чем из 8 слагаемых и максимальное слагаемое в каждом из которых не больше 7.

Решение. Пусть все возможные значения слагаемых — ящики, а появление слагаемого в искомом разложении — шар. То есть k шаров в i-м ящике означает, что в разбиении числа n слагаемое i встречается k раз. По формуле сочетаний с повторениями разложить 8 шаров по 8 ящикам можно $C_{8+8-1}^{8} = C_{15}^{8}$ способами. Но мы учли лишние варианты:

1. 8 шаров в 0-м ящике, это разбиение задаёт число 0, но по условию $n \geq 1$;
2. 8 шаров в 7-м ящике, это разбиение задаёт число 56 (притом однозначно), но по условию $n \leq 54$;
3. 7 шаров в 7-м ящике и 1 шар в 6-м ящике, это разбиение однозначно задаёт число 55, но по условию $n \leq 54$.

Итак, получается $C_{15}^{8} - 3$ неупорядоченных разбиений числа n на слагаемые.

Задача 201. Докажите, что среди любых 4^n натуральных чисел можно выбрать подмножество из n чисел, каждая пара которых взаимно просты, либо выбрать n чисел, каждая пара которых имеет общий делитель.

Решение.

Построим граф на 4^n вершинах из заданных чисел и проведем ребра между теми и только теми числами, которые являются взаимно простыми. Тогда задача сводится к тому, чтобы доказать оценку для числа Рамсея: $R(n, n) \leqslant 4^n$.

$$R(n, n) \leqslant C_{2n-2}^{n-1} < 2^{2n-2} \leqslant \frac{4^n}{4} < 4^n,$$

что и требовалось доказать.

Задача 202. В чемпионате хоккейной лиги расписание регулярного чемпионата составляется по следующему правилу: не обязательно каждый клуб играет со всеми другими, но среди любых трёх клубов хотя бы два из них должны сыграть матч между собой и никакая пара клубов не играет друг с другом больше одного раза. Всего в лиге играют 26 клубов. Верно ли, что, как бы ни было составлено расписание, найдётся семь клубов, каждые два из которых играли матч друг с другом?

Решение. По условию задачи имеем граф G на 26 вершинах. Число независимости графа $\alpha(G) < 3$. Необходимо узнать, верно ли, что число независимости графа $\omega(G) \geq 7$.

Из определения числа Рамсея $r(3, 7)$ – минимальное количество вершин графа G_1, что у графа G_1 выполнено условие: $\alpha(G_1) \geq 3$ или $\omega(G_1) \geq 7$.

Докажем, что $r(3, 7) \leq 26$. Для начала установим тривиальные равенства

$$R(s, 1) = R(1, t) = 1$$
$$R(s, 2) = s, \quad R(2, t) = t$$

Воспользуемся теоремой Рамсея для оценки сверху числа $r(3,7)$:

Теорема 2 (Рамсея). *Для любых $n, m \in \mathbb{N}$ существует число $r(n,m)$, при этом $r(n,m) \leqslant r(n,m-1) + r(n-1,m)$, а также если числа $r(n,m-1)$ и $r(n-1,m)$ четные, то неравенство принимает вид $r(n,m) \leqslant r(n,m-1) + r(n-1,m) - 1$.*

По индукции будем заполнять таблицу, где значение числа $a(i,j)$ будет обозначать верхнюю оценку числа $r(i,j)$:

n, m	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	3
3	1	3	6
4	1	4	9
5	1	5	14
6	1	6	19
7	1	7	26

Так как $r(3,7) \leq 26$, то условие Рамсея выполняется для графа G. Так как $\alpha(G) < 3$, то $\omega(G_1) \geq 7$. Что и требовалось доказать.

Задача 203. На плоскости отметили 17 точек и соединили каждую пару точек цветным отрезком: красным, желтым или зеленым. Докажите, что в полученной картинке есть одноцветный треугольник.

Решение. Проведём доказательство от противного и допустим, что ни одного одноцветного треугольника нет.

Рассмотрим 16 отрезков, проведённых из одной вершины. Из них по меньшей мере 6 имеют один цвет. Без ограничения общности это красный цвет. 6 вершин, к которым ведут эти отрезки, соединены жёлтыми и зелёными отрезками, иначе есть красный треугольник.

Рассмотрим теперь эти 6 вершин и 5 отрезков, проведённых из одной. Из них по меньшей мере 3 зелёных (б.о.о.). Они ведут к 3 вершинам. Какими отрезками могут быть соединены эти вершины? Если среди них есть хоть один зелёный, то образуется зелёный треугольник, а если все жёлтые, то образуется жёлтый.

Полученное противоречие доказывает существование одноцветного треугольника.

Задача 204. Докажите, что если в графе с 13 вершинами нет ни треугольника, ни 5-антиклики, то степень каждой вершины равна 4. **Указание.** Используйте то, что $R(3,4) \leq 9$.

Решение. Пусть есть вершина со степенью три или меньше. Тогда у нас остаётся девять или больше вершин, которые не связаны с исходной. Но $R(3,4) = 9$, поэтому существует либо клика на трёх вершинах и возникает противоречие, либо существует антиклика на четырёх вершинах. Добавляя исходную вершину к антиклике, получаем антиклику на пяти вершинах. Противоречие.

Рассмотрим случай, когда найдётся вершина со степенью пять или больше. Если существует ребро между какими-то соседями рассматриваемой вершины, то получаем противоречие, так как нашлась клика на трёх вершинах. Иначе найдётся антиклика на пяти вершинах. Противоречие.

Из этих рассуждений следует, что не существует вершин со степенью отличной от четырёх.

Задача 205. Определим число $G(k,l)$ как наименьшее возможное натуральное число N такое, что для любого натурального числа $n \leqslant N$ при любой рёберной раскраске полного графа на n вершинах в l цветов обязательно найдётся вершина, из которой исходит хотя бы k одноцветных рёбер. Докажите, что $Q(k,l) \leqslant (k-1)l + 2$ для любых значений параметров $k \geqslant 1$ и $l \geqslant 1$. Свой ответ строго обоснуйте. Пустые ссылки на принцип Дирихле без чёткого и однозначного указания «кроликов» и «ящиков», а также однозначного указания рассадки «кроликов» по «ящикам», приниматься не будут. Докажите также, что в случае, когда оба числа k и l одновременно чётны, оценку задачи можно улучшить: $Q(k,l) \leqslant (k-1)l + 1$.

Решение.

Известно, что для любого графа K_n хроматический индекс не превосходит n. Взяв граф $K_{(k-1)l}$, получим, что его хроматический индекс не превосходит $(k-1)l$. Тогда требование задачи выполнено, и из любой вершины выходит не более $k-1$ одноцветных ребер, и $Q(k,l) > (k-1)l$.

Возьмем теперь граф на $(k-1)l+2$ вершинах. Тогда степень каждой его вершины будет равна $(k-1)l+1$. Итак, у нас $kl-l+1$ ребер и l цветов. Тогда по принципу Дирихле из каждой вершины выходит хотя бы k одноцветных ребер.

Для улучшения оценки для четных k и l оценим минимальное количество ребер, которое равно $\frac{1}{2}\cdot n(l(k-1)+1)$. Из соображений четности можно увидеть, что в указанном случае $Q(k,l) \leqslant (k-1)l+1$.

q

Задача 206. Определим число $Q(s_1, s_2)$ как наименьшее возможное натуральное число N такое, что для любого натурального числа $n \geq N$ при любой рёберной раскраске полного графа на n вершинах в 2 цвета либо найдётся простая цепь на s_1 вершинах, все рёбра которой закрашены в цвет 1, либо есть простая цепь на s_2 вершинах, все рёбра которой закрашены в цвет 2. Докажите, что $Q(s_1, s_2) \leq Q(s_1-1, s_2) + Q(s_1, s_2-1)$. Вычислите значение $Q(3,3)$.

Решение. Сначала докажем, что $Q(s_1, s_2) \leq Q(s_1-1, s_2) + Q(s_1, s_2-1)$ индукцией по s_1+s_2.

База: $Q(1,n) = Q(n,1) = 1$, так как любую вершину можно считать цепью из одной вершины.

Индуктивный переход: рассмотрим клику на $Q(s_1-1, s_2) + Q(s_1, s_2-1)$ вершинах. Пусть ребра графа раскрашены в синий и красный. Рассмотрим произвольную вершину v, через B и R обозначим подграфы инцидентные v в синем и красном подграфах соответственно. Всего в графе $|B|+|R|+1$ вершина, следовательно, по принципу Дирихле, либо $|B| \geq Q(s_1-1, s_2)$, либо $|R| \geq Q(s_1, s_2-1)$. Без ограничения общности $|B| \geq Q(s_1-1, s_2)$. Тогда либо в синем подграфе найдется красная цепь, либо синяя цепь, включающая v по предположению индукции.

Теперь найдем $Q(3,3)$. Оценка, которую дает первый пункт $Q(3,3) \leq 2Q(2,3) \leq 2(Q(1,2)+Q(2,2)) = 6$ не очень то и полезна, так как можно заметить, что трех вершин хватит. По принципу Дирихле, не менее двух ребер будут одного цвета. Соответственно на них и строим простую цепь из трех вершин. Очевидно, что двух недостаточно, так как попросту не хватит вершин для цепи.

Задача 220. Напомним, что в доказательстве теоремы Кэли на произвольной конечной группе $\mathbf{G}$ вводится отображение $f_a(x) = ax$, где a — произвольный элемент группы. Доказывается, что это отображение является перестановкой элементов группы $\mathbf{G}$. Неподвижной точкой отображения $f_a(x_0)$ называется элемент $x_0 \in \mathbf{G}$ такой, что $f_a(x) = x_0$. Сколько неподвижных точек может быть у этого отображения? Найдите количество перестановок $n = |\mathbf{G}|$ элементов, которые имеют столько же неподвижных точек.

Решение. Второй случай, если все точки не неподвижные.

Всего у нас $n!$ перестановок. Рассмотрим множества перестановок A_i, таких, что элемент i переходит сам в себя. Тогда количество перестановок будет равно $n! - S,\ S = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$, так как мы вычитаем из всех перестановок те перестановки, в которых хотя бы один элемент переходит сам в себя. По формуле включений-исключений получаем: $S = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \ldots$.

Первый член суммы отвечает за случай, когда один элемент остается на месте, а остальные как-то переставляются. Вариантов выбрать один элемент из n элементов ровно $\binom{n}{1}$, а количество перестановок в оставшемся множестве из $n-1$ элементов $(n-1)!$.

Аналогично для второго члена суммы. Мы фиксируем два элемента из n, вариантов $\binom{n}{2}$. Вариантов перестановок на остальных элементах $(n-2)!$.

Аналогично для остальных слагаемых. Тогда получаем:

$$n! - S = n! - \binom{n}{1}\cdot(n-1)! + \binom{n}{2}\cdot(n-2)! - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}\cdot 0! =$$
$$n! + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)!.$$

Задача 222. Для многочлена $x^4+x^3+x^2+1$ над полем $\mathbb{Z}_3$ определите, является ли он неприводимым.

Решение. Заметим, что данный многочлен в поле $\mathbb{Z}_3$ корней не имеет. Попытаемся найти методом неопределенных коэффициентов разложение этого многочлена на два: x^2+ax+b и x^2+cx+d, где $a,b,c,d\in\mathbb{Z}_3$. Составим систему, опираясь на $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=x^4+x^3+x^2+1$.

$$\begin{cases} x^4: 1\equiv 1\ (\text{mod} 3),\\ x^3: a+c\equiv 1\ (\text{mod} 3),\\ x^2: b+ac+d\equiv 1\ (\text{mod} 3),\\ x^1: bc+ad\equiv 0\ (\text{mod} 3),\\ x^0: bd\equiv 1\ (\text{mod} 3).\end{cases}$$

Так как b и d из поля $\mathbb{Z}_3$, то они одновременно равняются или 1, или 2.

Случай №1: $b=d=1$. Тогда посмотрим на уравнения для коэффициентов при x^1 и x^3:

$$\begin{cases} x^3: a+c\equiv 1\ (\text{mod}\ 3),\\ x^1: c+a\equiv 0\ (\text{mod}\ 3).\end{cases}$$

Легко видеть, что эта система несовместна.

Случай №2: $b=d=2$. Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} x^3: a+c\equiv 1\ (\text{mod}\ 3),\\ x^2: ac\equiv 0\ (\text{mod}\ 3),\\ x^1: c+a\equiv 0\ (\text{mod}\ 3).\end{cases}$$

Очевидно, что и в этом случае система несовместна.

Значит, этот многочлен неприводим в $\mathbb{Z}_3$.

Задача 223. С помощью алгоритма Евклида найдите наибольший общий делитель многочленов $4x^5+2x^3+4x^2, x^3+x+3\in\mathbb{Z}_5[x]$.

Решение. По алгоритму Евклида последний ненулевой остаток будет наибольшим общим делителем многочленов (все сравнения происходят для $\pmod 5$):

$$\begin{aligned}
&4x^5+2x^3+4x^2+x^2(x^3+x+3)=5x^2+3x^3+7x^2\equiv 3x^3+2x^2;\\
&x^3+x+3+3(3x^3+2x^2)=10x^3+6x^2+x+3\equiv x^2+x+3;\\
&3x^3+2x^2+2x(x^2+x+3)=5x^3+4x^2+6x\equiv 4x^2+x;\\
&x^2+x+3+1(4x^2+x)=5x^2+2x+3\equiv 2x+3;\\
&4x^2+x+3x(2x+3)=10x^2+10x\equiv 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, $2x+3$ – наибольший общий делитель для данных многочленов.

Задача 224. Найдите неприводимый многочлен Q степени 3 над полем $\mathbb{Z}_3$ и вычислите обратный элемент по умножению для $2x+1\in\mathbb{Z}_3[x]/(Q)$.

Решение.

Решение Рассмотри многочлен $g(x)=2x^3+2x^2+2x+1$. Он не раскладывается в произведение, так как не имеет линейного делителя:

$$\begin{aligned} g(0)&\equiv 1 \pmod 3,\\ g(1)&\equiv 1 \pmod 3,\\ g(2)&\equiv 2 \pmod 3.\end{aligned}$$

Если многочлен был бы приводимым, то он либо раскладывался в произведение трех линейных, либо линейного и квадратного, то есть на линейный многочлен должен раскладываться в любом случае.
Поскольку данный многочлен на линейный не делится, то он является неприводимым.
Многочлен $g(x)$ является неприводимым в кольце многочленов $\mathbb{Z}_3[x]$, а значит, фактор-кольцо $\mathbb{Z}_3[x]/(g(x))$ является полем, и у любого элемента этого множества существует обратный элемент.
Теперь вернемся к задаче, нужно найти обратный элемент по умножению к многочлену $r(x)=2x+1$ в поле $\mathbb{Z}_3[x]/(g(x))$, где $g(x)=2x^3+2x^2+2x+1$ – неприводимый многочлен над полем $\mathbb{Z}_3$.
Найдем обратный к $2x+1\in\mathbb{Z}_3/(g(x))$ с помощью обратного хода алгоритма Евклида. Запишем:

$$\begin{aligned} &2x^3+2x^2+2x+1=(2x+1)(x^2+2x)+1;\\ &1=(2x+1)(-x^2-2x)+2x^3+2x^2+2x+1.\end{aligned}$$

Откуда $([2x+1])^{-1}=-x^2-2x=2x^2+x$ (работаем с многочленами над полем $\mathbb{Z}_3$).
Чтобы убедиться в правильности, выполним проверку:

$$(2x+1)(2x^2+x)=4x^3+4x^2+x=x^3+x^2+x=2(2x^3+2x^2+2x+1)+1.$$

Пруфы тут, смотри 25-й слайд.

P.S. лучше взять другой неприводимый многочлен.

Задача 228. Рассмотрим произвольное конечное непустое подмножество $A \subset R$. Для некоторых натуральных k и l обозначим

$$kA - lA = \underbrace{A + A + \cdots + A}_{k \text{ раз}} - \underbrace{A - A - \cdots - A}_{l \text{ раз}}.$$

Пусть A удовлетворяет неравенствам $|kA| \leq c^{k-1}|A|$ для всех натуральных чисел $k \geq 2$. Докажите, что тогда для любых двух натуральных чисел $m \geq 1$, $n \geq 1$ верно неравенство $|mA - nA| \leq c^{m+n}|A|$. В решении допустимо использование только неравенства треугольника Ружи.

Решение. Воспользуемся неравенством Ружи:

$$|-A| \cdot |mA - nA| \leq |mA + A| \cdot |nA + A|. \tag{5}$$

Заметим, что

$$|mA + A| = |\underbrace{A + A + \cdots + A}_{m \text{ раз}} + A| = |\underbrace{A + A + \cdots + A}_{m\ +\ 1 \text{ раз}}| = |(m\ +\ 1)A|,$$

$$|nA + A| = |(n + 1)A|,$$

$$|A| = |-A|.$$

Тогда, используя эти равенства, немного преобразуем (5):

$$|mA - nA| \leq \frac{|(m + 1)A)| \cdot |(n + 1)A|}{|A|}.$$

Минутка занимательной математики: так как $m \geq 1, n \geq 1$, то $m + 1 \geq 2, n + 1 \geq 2$. Значит, применимо неравенство из условия и можно сказать, что $|(m + 1)A| \leq c^m|A|$ и $|(n + 1)A| \leq c^n|A|$.

Подставим эти неравенства в неравенство (5):

$$|mA - nA| \leq \frac{c^m|A| \cdot c^n|A|}{|A|} = c^{m+n}|A|.$$

Собственно, это и просили доказать, если посмотреть на первый и последний член цепочки.

Задача 229. Дано произвольное конечное подмножество $A \subset \mathbb{R}$, мощность которого больше единицы. Докажите, что, равенство $|A + A| = 2|A| - 1$ выполняется тогда и только тогда, когда A является арифметической прогресией.

Решение. Сначала докажем, что если $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, то равенство $|A + A| =$ $= 2|A| - 1$ выполняется. $|A| = n, d = a_2 - a_1$.

Рассмотрим сумму $|A + A| = \{a_1 + a_1, a_1 + a_2, \cdot, a_n + a_n\}$.

Используем свойства арифметической прогрессии и получим $|A + A| =$ $= \{a_1, a_1 + 1 \cdot d, \ldots, a_1 + 2(n - 1) \cdot d\}$. Получаем, что $|A + A| = 2 \cdot n - 1$. Доказано в одну сторону.

Теперь докажем в другую.

Пусть множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ не является арифметической прогрессией, но знаем, что она упорядоченна по возрастанию. Рассмотрим сумму $|A + A| = \{a_1 + a_1, a_1 + a_2, \cdot, a_n + a_n\}$, а затем рассмотрим попарные со всеми суммы у наименьшего и наибольшего из множества A элемен- -тов. Таких сумм ровно $2n - 1$, потому что если существует сумма, такая что $a_1 + a_i = a_n + a_j$, то очевидно, что $a_1 < a_j < a_i < a_n$. Из этого неравенства получаем, что $a_1 < a_j, a_i < a_n$, а значит $a_1 + a_i < a_n + a_j$.

Теперь докажем, что найдется хотя бы еще одна сумма, которая не выражается как сумма с первым или последним элементом. Давайте рассмотрим множество как $A = \{a_1, a_1 + d_1, \ldots, a_1 + d_{n-1}\}$. Тогда скажем, что $d = (d_1, \ldots, d_{n-1})$, то есть это НОД по всем «добавкам» к первому элементу. Значит для любого i элемент $a_i = a_1 + k_i \cdot d$. Скажем, что $a_n = a_1 + M \cdot d$.

Пусть не существует такой суммы, что она не представима как сумма с наибольшим или наименьшем, то есть для любых k_i, k_j или $k_i + k_j$, или $k_i + k_j - M$ равны некоторому k_t, которое соответствуем элементу a_t из A.

Рассмотрим множества $\mathbb{Z}_M$ и $S_d = \{k \mid a_1 + k \cdot d \in A\}$. Для любых $k_1, k_2 \in S_d$ их сумма по модулю $M \in S_d$. Найдем элемент в S_d, такой что он взаимно прост с M и породим им все множество $\mathbb{Z}_M$ сложением с самим с собой по модулю M. Значит для любого $i \in \{0, \dots, M\}$ выполнено, что $i \in S_d$, и так как других элементов в S_d быть не может, то мы получили математическую прогрессию. Значит предположение, что не существует суммы, отличной от суммы с первым или последним – неверно, значит наше утверждение доказано.

Задача 231. Рассмотрим произвольные непустые подмножества $A, B \subset \mathbb{Z}_p$. Для произвольного элемента $\xi \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ обозначим

$$A + \xi B = \{a + \xi b : a \in A, b \in B\}.$$

Также определим множество

$$Q[A, B] = \left\{ \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} : a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2 \right\}$$

(все операции, включая деление, производятся по модулю p). Докажите, что $|A + \xi B| = |A||B|$ тогда и только тогда, когда $\xi \notin Q[A, B]$. Выведите из этого, что при $|A||B| > p$ верно $Q[A, B] = \mathbb{Z}_p$.

Решение. Что означает, что $|A + \xi B| \neq |A||B|$?. Это значит ровно то, что нашлись числа $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$ такие, что $a_2 + \xi b_1 = a_1 + \xi b_2$. Цепочкой равносильных преобразований получаем, что $\xi = \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$, а это и есть ровно условие принадлежности множеству $Q[A, B]$.

Докажем последнее утверждение в условии задачи от противного. Пусть $Q[A, B] \neq \mathbb{Z}_p$. Тогда существует $\xi \notin Q[A, B]$, при этом $|A||B| = |A + \xi B|$. Но $A + \xi B$ подмножество $\mathbb{Z}_p$, поэтому его мощность $\leqslant p$.

Задача 236. В спортивном турнире участвовали 10 игроков. Известно, что к окончанию турнира не нашлось пятёрки игроков, каждые два из которых встречались бы в матчах по ходу турнира. Какое максимальное количество матчей могло быть сыграно в турнире?

Решение. Весь турнир можно представить в виде графа G, в котором вершинами являются участники, а ребрами — матчи между двумя игроками. Из условия ясно, что в этом графе нет клик на пяти и более вершинах. Тогда воспользуемся теоремой Турана, которая гласит, что максимальное число ребер в графе, не содержащем K_n, достигается в $(n-1)$-дольном графе, доли которого различаются размером не более чем на единицу. В данном случае это будет четырехдольный граф, две доли которого содержат три вершины, а другие две содержат две вершины. Так как $n = 5 \leq 8$, воспользуемся упрощенной формулой нахождения максимального количества ребер в графе на v вершинах без K_n, (которое обозначается как ex(v, n)):

$$\text{ex}(v, n) = \left\lfloor v^2 \cdot \frac{n-2}{2n-2} \right\rfloor = \left\lfloor 10^2 \cdot \frac{5-2}{2 \cdot 5 - 2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{300}{8} \right\rfloor = \lfloor 37.5 \rfloor = 37.$$

Задача 237. В предвыборных теледебатах участвовали 11 кандидатов в президенты. Каждая передача длилась полчаса, и в ней участвовали только два кандидата. Никакая пара кандидатов не встречалась в дебатах дважды. Известно, что к моменту выборов не нашлось пятёрки кандидатов, каждые два из которых встречались бы в дебатах. Каково могло быть максимальное эфирное время теледебатов?

Решение.

Условие отсутствия пятерки попарно встречавшихся кандидатов – это условие отсутствия клики размера 5 в графе, где вершины – это кандидаты, а ребра – дебаты (ребро проводится, если данные два кандидата участвовали в дебатах друг с другом).

По теореме Турана наибольшее число ребер будет в 4-дольном графе с почти равными долями. В нашем случае получим три доли размера 3 и одну долю размера 2. Значит, максимальное число ребер равно

$3 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 = 45$. Чтобы получить суммарное время дебатов, умножим максимальное число дебатов на время одного и получим 22.5 часов эфира.

Задача 238. На курсе 100 студентов. Известно, что среди них можно выделить 149 различных пар студентов, которые во время семестра давали друг другу списывать на контрольных. Деканат принял решение отчислить после сессии минимально возможное число студентов, но таким образом, чтобы среди оставшихся студентов не осталось ни одной пары списывающих друг у друга. Докажите, что к следующему семестру на курсе останется не менее 26 студентов.

Решение. Очевидным образом условие задачи представляется графом G. Докажем утверждение задачи от противного. Допустим, в графе нет антиклики размера 26. Рассмотрим дополнение к данному графу $\overline{G}$. В нём нет клики размера 26, то есть $\omega(\overline{G}) \leqslant 25$. Пусть число рёбер в $\overline{G}$ максимально. Тогда по теореме Турана $\overline{G}$ полный 25-дольный с равными долями размера 4. У такого графа $\binom{25}{2} \cdot 4^2 = 4800$ рёбер. Это максимальное число рёбер в $\overline{G}$, но тогда минимально возможное число рёбер в G — $\binom{100}{2} - 4800 = 150$. Но в условии задачи сказано, что их 149. Противоречие. Значит, утверждение задачи выполняется.

Задача 239. Докажите, что максимальное количество рёбер в n-вершинном графе, не содержащем циклов (никакой) чётной длины, в точности равняется $\left\lfloor \frac{3}{2}(n-1) \right\rfloor$.

Решение. Вместо тысячи слов, ссылка на лекцию Солнцеликого.

Задача 241. Дано семейство различных k-элементных подмножеств $\mathcal{S} = \{A_1, A_2, \ldots A_m\}$ множества $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Назовём элементы v_i и v_j соседями, если они вместе входят хотя бы в одно из множеств A_k. Пусть у каждого из элементов v_j существует не более чем $2k$ соседей (включая сам v_j). Докажите, что элементы $v_1, \ldots v_n$ при всех достаточно больших k можно раскрасить пятью красками, так, чтобы никакое подмножество из $\mathcal{S}$ не было одноцветным.

Решение. Будем раскрашивать элементы v_i случайным образом в один из пяти цветов независимо от раскраски других элементов, и вероятность раскрасить элемент в конкретный цвет равна $\frac{1}{5}$. Тогда пусть $B_1, \ldots, B_m$ события означающие, что соответствующие множества $A_1, \ldots A_m$ одного цвета. Вероятность такого события равна:

$$P(B_i) = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k = \left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}.$$

Тогда событие B_i не зависит в совокупности от группы событий, если соответствующие им множества не пересекаются с A_i. Найдем максимальное число зависимых событий для произвольного B_i. Для каждого v_i из $2k$ его соседей выберем k соседей. Таким образом получим $d = k \cdot \binom{2k}{k}$ множеств, имеющих хотя бы один общий элемент с A_i. Заметим, что по формуле Стирлинга $\binom{2k}{k} \sim \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}}$. Но тогда при достаточно больших k для любого B_i выполнено неравенство:

$$P(B_i) \leq \frac{1}{(d+1) \cdot e}.$$

Следовательно, выполнены условия локальной леммы Ловаса и поэтому $P(\overline{B_1}, \ldots, \overline{B_n}) > 0$. То есть существует пятицветная раскраска, что никакое подмножество из $\mathcal{S}$ не будет одноцветным.

Задача 242. Пусть $s \geq 100$. Рассмотрим произвольное семейство $\mathcal{S}$ подмножеств множества $\{v_1, \ldots, v_n\}$, состоящее из множеств мощности s^2, такое, что каждый элемент v_i содержится не более, чем в s подмножествах из $\mathcal{S}$. Докажите, что при достаточно большом s элементы $v_1, \ldots, v_n$ можно раскрасить в s цветов, так, чтобы в каждом множестве из $\mathcal{S}$ присутствовали элементы всех этих цветов.

Решение. Рассмотрим случайную раскраску $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Будем считать, что каждый элемент множества $\{v_1, \ldots, v_n\}$ красится независимо в один из s цветов с вероятностью $\frac{1}{s}$. Пусть количество всех множеств $A_i \in \mathcal{S}$ равно m. Пусть S_i — такое событие, что множество $A_i \in \mathcal{S}$ не содержит элементы всех цветов. Тогда $\overline{S_i}$ — такое событие, что множество A_i содержит элементы всех цветов, а $\overline{S_1} \cdot \dots \cdot \overline{S_m}$ — такое событие, что все множества содержат элементы всех цветов. Тогда если
$P(\overline{S_1} \cdot \dots \cdot \overline{S_m}) > 0$, то искомая раскраска существует.

Событие S_i не зависит в совокупности от $S_{i_1}, \dots, S_{i_t}$, если $A_i \cap A_{i_1} = \varnothing, \dots, A_i \cap A_{i_t} = \varnothing$. Тогда чтобы оценить d, количество событий, от которых зависит S_i, найдем количество множеств, в которые входит какой-нибудь элемент A_i. Выберем случайный элемент из A_i, это можно сделать s^2 способами, по условию он лежит не более, чем в s множествах, значит, есть еще $s-1$ множество, в котором он может лежать. Тогда $d \le s^2(s-1)$, и $d_{\max} = s^2(s-1)$.

Оценим вероятность события S_i. Количество всевозможных раскрасок s^2 элементов в s цветов равно s^{s^2}, количество способов раскрасить s^2 элементов в не более чем $s-1$ цвет не превосходит $s(s-1)^{s^2}$, так как убрать мы можем любой из s цветов, возникает множитель s. Тогда $P(S_i) \le \frac{s(s-1)^{s^2}}{s^{s^2}}$.

Теперь покажем, что $P(S_i) \le \frac{s(s-1)^{s^2}}{s^{s^2}} \le \frac{1}{(s^2(s-1)+1)e}$. При устремлении s к бесконечности $\frac{s(s-1)^{s^2}}{s^{s^2}} = s\left(1-\frac{1}{s}\right)^{s^2}$ стремится к $se^{-s-\frac{1}{2}}$, а $\frac{1}{(s^2(s-1)+1)e}$ стремится к $\frac{1}{es^3}$, но так как se^{-s} быстрее стремится к нулю, чем $\frac{1}{s^3}$, то, начиная с какого-то s, будет выполнено неравенство $\frac{s(s-1)^{s^2}}{s^{s^2}} \le \frac{1}{(s^2(s-1)+1)e}$. Значит, $P(S_i) \le \frac{1}{(s^2(s-1)+1)e}$.

Тогда выполнены условия леммы Ловаса (симметричный случай), значит, $P(\overline{S_1} \cdot \dots \cdot \overline{S_m}) > 0$, и искомая раскраска существует.

Задача 243. Матрицу будем называть занудной, если все элементы в ней равны одному и тому же числу (неважно, какому). Используя локальную лемму Ловаса, докажите, что если $\sum_{t=0}^{a} \binom{a}{t}\binom{n-a}{a-t} \le \frac{k^{a^2/2}}{2\sqrt{k}}$, то можно расставить числа от 1 до k в ячейки $n \times n$-матрицы, так, чтобы в ней не оказалось ни одной занудной подматрицы размера $a \times a$.

Решение. Подматриц у матрицы размера $n \times n$ конечное число. Тогда занумеруем как-то все матрицы размера $a \times a$. Введем случайную раскраску матрицы — будем красить каждый элемент независимо от других, равновероятно и случайно в один из k цветов. Это тоже самое, что и расставить k чисел в клетки матриц независимо и равновероятно. Пусть событие A_i — матрица под номером i оказалась покрашена полностью в один цвет. Вероятность такого события $P(a_i) = \frac{k}{k^{a^2}}$. Мы хотим применить локальную лемму Ловаса, а значит надо оценить такую вероятность сверху: $\frac{k}{k^{a^2}} \le \frac{1}{(d+1)e}$, откуда можем получить неравенство на d : $d \le \frac{k^{a^2}}{ek} - 1$.

Посчитаем от скольких раскрасок матриц (назовем это количество d) может зависеть фиксированная раскраска матрицы с номером i. Пусть матрица i пересекается по t строкам с какими-то матрицами. Назовем множество таких матриц J. Очевидно, тогда событие A_i зависит от любой матрицы из множества J. Также очевидно, что если матрица не пересекается с группой других матриц, то соответствующее событие не зависит в совокупности от соответствующей группы событий.

Посчитаем мощность J для фиксированного t. Во-первых, надо выбрать множество t строк в матрице i, это можно сделать $\binom{a}{t}$ способами. Эти же строки будут принадлежать и матрицам, от которых зависит наша, значит для таких матриц необходимо выбрать $a-t$ строк из оставшихся $n-a$ строк. Итого $\binom{n-a}{a-t}$ способов. Заметим, что мы проводили рассуждения только для строк, на столбцы они переносятся почти дословно. Итого:

$$d \le \left(\sum_{t=0}^{a} \binom{a}{t}\binom{n-a}{a-t}\right)^2 \le \frac{k^{a^2}}{4k} \le \frac{k^{a^2}}{ek} - 1.$$

Мы доказали, что вероятность любого события $P(A_i)$ не превосходит $\frac{1}{(d+1)e}$, где d — максимальное число событий, от которых зависит любое фиксированное событие A_i. Тогда применяя ЛЛЛ, получаем: $P(\overline{A}_1 \cdots \overline{A}_n) > 0$, то есть вероятность того, что все подматрицы не будут покрашены в один цвет не нулевая, то есть с комбинаторной точки зрения существует такая раскраска, что в ней не оказалось ни одной занудной подматрицы размера $a \times a$.

Задача 249. Литералом называется логическая переменная либо её отрицание. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называют любую конъюнкцию нескольких дизъюнкций литералов. Пример КНФ: $x_1(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})(x_3 \vee \overline{x_4})$. Одна из стандартных задач, изучаемых в теории сложности, состоит в том, чтобы для заданной КНФ найти набор значений переменных, на котором она обращается в единицу, либо установить отсутствие такого набора. Если такой набор существует, то КНФ называется выполнимой, а иначе

— невыполнимой. Докажите, что при $k \geq 4$ выполнимой является любая КНФ, в каждой дизъюнкции которой ровно k литералов, и каждая дизъюнкция имеет общие переменные не более чем с 2^{k-2} другими дизъюнкциями.

Решение. Пусть событие A_i — i-ая дизъюнкция литералов ложна. Пусть также каждый литерал принимает значение истинно с вероятностью 0.5 независимо от значений других литералов, тогда $\Pr A_i = (\frac{1}{2})^k$. По условию каждая дизъюнкция имеет общие переменные не более чем с 2^{k-2} другими дизъюнкциями, поэтому событие A_i зависит от не более, чем 2^{k-2} событий.

Рассмотрим выражение: $2^k \geq (2^{k-2}+1)e$, и заметим, что он истинно при всех $k \geq 4$. Из этого выражения следует, что при всех $k \geq 4$ $\Pr A_i = 2^{-k} \leq \frac{1}{(2^{k-2}+1)e}$. Тогда по локальной лемме Ловаса (симметричный случай) $\Pr \overline{A_1 A_2 \ldots} > 0$. Таким образом, при $k \geq 4$ любая КНФ выполнима.

Задача 252. Пусть $n-k+1 < s \leq n$ и пусть $\mathcal{F}$ — семейство всевозможных s-элементных подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$. Докажите, что в $\mathcal{F}$ нет подсолнухов с k лепестками.

Решение. Докажем от противного. Допустим, в $\mathcal{F}$ есть подсолнух с k лепестками, тогда есть ядро Y размера m. Значит, каждое множество подсолнуха будет иметь общее подмножество размера m, тогда всего различных элементов в подсолнухе будет $m + k(s-m)$. Так как по условию исходное множество n-элементное, то количество различных элементов в подсолнухе не может быть больше чем n, то есть $m + k(s-m) \leq n$, или же

$$m(1-k) \leq n - ks.$$

Преобразуем исходное неравенство:

$$\begin{aligned} n-k+1 < s &\leq n, \\ -k+1 < s-n &\leq 0, \\ 1-k < s-n &\leq 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} m(1-k) &\leq s - s + n - ks, \\ (m-s)(1-k) &\leq n - s < k - 1. \end{aligned}$$

Так как ранее было получено, что $1-k<0$, то получим $m-s>-1$, или же $s-m<1$. Тогда так как s и m — натуральные, то $m \geq s$, но и $m \leq s$, так как размер ядра не может быть больше размера множеств, следовательно, $m = s$. Так как $\mathcal{F}$ — семейство всевозможных s-элементных множеств, то найдется такое множество, которое совпадает с ядром. Однако в силу того, что все множества различны, мы не сможем найти другого множества, которое пересекается с каким-то еще по данному ядру. Следовательно, мы получили подсолнух только с одним, а не k лепестками. Получили противоречие.

Задача 253. В группе переводчиков-полиглотов 27 человек. Часть из них нужно отправить на крупный международный саммит, в котором участвуют представители 108 стран, говорящие на разных языках. По каждому из 108 языков в исходной группе из 27 переводчиков выделили семерых, лучше остальных владеющих этим языком. Требуется отправить на саммит как можно меньше переводчиков, но при этом так, чтобы для каждого из 108 языков нашелся среди отправленных переводчик, попадающий в семерку лучших. Докажите, что всегда есть команда из не более чем 15 переводчиков.

Решение. Переведем задачу на язык гиперграфов, в нашем графе будет $n = 27$ вершин, $m = 108$ гиперребер, в каждом из которых ровно $h = 7$ вершин. Необходимо доказать что всегда существует покрытие, не более чем из 15 вершин.

Применим жадный алгоритм в этом частном случае. Пусть мы сделали k шагов алгоритма и осталось непокрытыми $c_k m$ ребер. В каждом ребре по h вершин, а вершин которых мы не выбрали осталось $n-k$. Значит есть вершина, которая содержится хотя бы в $\frac{c_k mh}{n-k} \geq \frac{c_k mh}{n}$. Сделаем еще один шаг, тогда непокрытыми останутся $c_{k+1} m \leq c_k m - \frac{c_k mh}{n}$, то есть $c_{k+1} \leq c_k \left(1 - \frac{h}{n}\right)$. Так как $c_0 = 1$, получаем $c_k \leq \left(1 - \frac{h}{n}\right)^k$.

Пусть алгоритм выполнил $k' = \frac{n}{h} \ln \frac{mh}{n}$ шагов, в нашем случае это 13 шагов (округляем вверх). Тогда $c_{k'} \leq \left(1 - \frac{h}{n}\right)^{13}$, тогда количество не покрытых ребер $c_{k'} \cdot m \leq 2.19$, то есть максимум два непокрытых ребра, на которые понадобится максимум два шага алгоритма. То есть мы показали что жадно выбрав 15 вершин мы покроем все ребра.

vb

Задача 254.

Решение.

Условие задачи {254} В группе переводчиков-полиглотов 27 человек. Часть из них нужно отправить на крупный международный саммит, в котором участвуют представители 108 стран, говорящие на разных языках. По каждому из 108 языков в исходной группе из 27 переводчиков выделили семерых, лучше остальных владеющих этим языком. Требуется отправить на саммит как можно меньше переводчиков, но при этом так, чтобы для каждого из 108 языков нашелся среди отправленных переводчик, попадающий в семерку лучших. Докажите, что при некотором раскладе заведомо нужно взять в команду девятерых.

Решение Рассмотрим матрицу инцидентности $M \in \mathbb{M}_{27\times 108}$:

$$\begin{bmatrix} M' & 0 & 0 \\ 0 & M' & 0 \\ 0 & 0 & M' \end{bmatrix}.$$

Матрица M состоит из трех подматриц $M' \in \mathbb{M}_{9\times 36}$, у которых в каждом столбце находится семь единиц и два нуля. Заметим, что $\tau(M) = 3\tau(M')$. Так же заметим, что $C_9^7 = 36$, то есть матрицу M' можем заполнить столбцами, являющимися всевозможными комбинациями нулей и единиц, для такой матрицы $\tau(M') = 3$. Таким образом $\tau(M) = 3 \cdot 3 = 9$.

https://www.overleaf.com/project/5cd2d2ad0c46a46394195d3a

Задача 256.

Обозначим через $\eta(H)$ количество различных минимальных вершинных покрытий гиперграфа H. Приведите пример k-однородного гиперграфа H на $4n$ вершинах, содержащего ровно $4\binom{n-3}{k-3}$ гиперрёбер, такого, что $\eta(H) = 27,\ \tau(H) = 3$.

Решение. Сырое и непроверенное.

Путём сравнительно недолгого перебора находим, что для параметров искомого графа нам подходят $n = 6,\ k = 5$. Тогда, соответственно, количество рёбер графа $|E| = 4\binom{3}{2} = 12$, а вершин в графе 24.

Разобьём множество вершин графа на три рёберно непересекающихся *кластера*. В каждом *кластере* будет по восемь вершин и по четыре ребра. Рассмотрим каждый *кластер* в отдельности.

Три вершины *кластера* будут входить в каждое из чётырех рёбер, а из остальных пяти каждая не будет входит хотя бы в одно ребро. То есть, если в *кластере* будут вершины $v_1,\ \ldots,\ v_8$, то гиперрёбра в нём будут $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},\ \{v_1, v_2, v_3, v_6, v_7\}$,
$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_8\},\ \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_7\}$, к примеру. Тогда очевидно, что

$$\tau(\textit{кластера}) = 1,$$

так как можно выбрать множество из одной из первых трёх вершин в качестве системы общих представителей. Поэтому же

$$\eta(\textit{кластера}) = 3.$$

Поскольку мы имеем три непересекающихся *кластера*, значит, мы можем в качестве элементов с.о.п выбрать по одному из трёх кандидатов в каждом *кластере*, и поэтому $\eta(H) = 27,\ \tau(H) = 3$, что и требовалось.

Задача 257. Обозначим через $\eta(H)$ количество различных минимальных вершинных покрытий гиперграфа H. Чему равно $\eta(H)$ для k-однородного гиперграфа на n вершинах, содержащего ровно $\binom{n}{k} - 1$ гиперрёбер?

Решение. Мы имеем дело с почти полным k-однородным гиперграфом: для полноты в нём не хватает лишь одного ребра, которое мы обозначим за A. Понятно, что $V \setminus A$ является покрытием. В нём $n - k$ вершин. Докажем, что меньше взять нельзя.

В самом деле, если взять $n-k-1$ вершину, то останется множество из $k+1$ вершин, которое включает в себя $k+1$ множество из k вершин, среди которых найдутся рёбра. И рёбра эти не будут покрыты.

Докажем, что найденное нами покрытие из $n-k$ лишь одно, и других нет. Действительно, если выбрать другие $n-k$ вершин, то оставшиеся k образуют непокрытое ребро.

Итак, $\eta(H) = 1$.

Задача 258. Докажите, что найдутся $(k-1)^s$ подмножеств конечного множества, в каждом из которых s элементов и среди которых нельзя выбрать подсолнух с k лепестками. Считайте, что множество достаточно большое.

Решение. Будем строить множество в явном виде.

Рассмотрим в исходном множестве некоторое подмножество, содержащее s групп по $k-1$ элементу. Так как множество достаточно большое, оно может содержать в себе все возможные комбинации этого подмножества. Берем по одному элементу из каждой группы, все элементы разные, получается в каждой комбинации по s из исходных $s(k-1)$ элементов. Всего таких комбинаций $(k-1)^s$. Таким образом мы получили $(k-1)^s$ подмножеств конечного множества, в каждом из которых s элементов и среди которых нельзя выбрать подсолнух с k лепестками, так как максимальное количество лепестков у подсолнуха будет $(k-1)$, мы взяли подсолнух с пустым ядром.

Оценка обосновывается тем, что в каждой группе ровно $k-1$ различный элемент, а также множества из которых мы составляем подсолнух имеют различных представителей из хотя бы одной группы, в противном случае множества бы совпали, а значит и в подсолнухе не более $k-1$ множеств, из чего можно сделать вывод о том, что максимальное количество лепестков будет $k-1$.

Задача 259. Какое максимальное количество рёбер может иметь n-вершинный граф с хроматическим числом k?

Решение. Обозначим $a = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$, $b = n - ak$, тогда искомое количество

$$\|G\| = C_b^2(a+1)^2 + C_{k-b}^2 a^2 + (k-b)ba(a+1).$$

Больше быть не может, так как по теореме Турана в графе на n вершинах с большим количеством ребер обязательно найдется клика на $k+1$ вершинах и тогда граф не может иметь хроматическое число k.

Покажем, что граф G с найденным максимальным количеством ребер и хроматическим числом k существует. Это будет полный k-дольный граф, b долей которого имеют мощность $(a+1)$ и $(k-b)$ — a и каждая доля раскрашена в один из k цветов.

Задача 263. Сколькими способами можно расставить две ладьи, два слона, два коня, ферзя и короля на первой линии шахматной доски так, чтобы король и ферзь занимали бы клетки разных цветов и стояли бы между ладьями, но не обязательно рядом? [Шахматно-смысловых ограничений типа «слоны обязаны стоять на клетках разного цвета» здесь нет; все фигуры считаются белыми.]

Решение. Найдем количество способ расставить две ладьи на первую линию доски при условии, что между ними будет как минимум две пустых клетки. Максимальное количество клеток между ладьями может быть равно 6, для такой ситуации возможна только единственная расстановка ладей на крайние клетки. Если же между ладьями пять клеток, то всего таких расстановок будет две и так далее. Тогда искомое количество расстановок равно $5+4+3+2+1 = 15$.

Далее рассмотрим случаи в зависимости от количества пустых клеток между ладьями. Пусть между ладьями есть две пустых клетки. На две пустых клетки разного цвета можно расставить короля и ферзя двумя способами. Теперь рассмотрим случай, когда между ладьями три пустых клетки. Очевидно, что две клетки будут одного цвета, расставить на эти клетки ферзя можно двумя способами, тогда короля можно поставить единственным образом на клетку другого цвета. Стольким же количеством способов можем поставить короля на одну из двух одноцветных клеток и ферзя на оставшуюся. Тогда на три пустых клетки можно расставить короля и ферзя $2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$ способами. Аналогично на четыре пустых клетки можно поставить фигуры 8 способами, на пять пустых клеток — 12 способами, на шесть пустых клеток — 18 способами.

На оставшихся четырех клетках слонов и коней можно расставить $4!/(2! \cdot 2!) = 6$ способами.

Тогда всего способов расставить фигуры нужным образом $(5 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 12 + 18) \cdot 6 = 552$ способа.

Ответ: 552 способа.

Задача 264. Дан клетчатый квадратный листок бумаги $n \times n$ клеток. Сколько на этом листе можно нарисовать различных букв «П»? Буквой «П» называется фигура, имеющая верхнюю перекладину толщиной в одну клетку и длиной не менее трёх клеток и две одинаковых ножки толщиной в одну клетку и длиной не менее одной клетки, соединяющиеся с перекладиной в двух её концевых точках (на рисунке эти точки заштрихованы зелёным), не являющихся соседними, а также повороты описанной фигуры на 90, 180 и 270 градусов. Буквы, отличающиеся размерами и/или положением в клетчатом квадрате, считаются различными.

Решение.

1. Посчитаем количество способов выбрать перегородку в букве. Будем брать перегородку длины k, тогда просуммируем число способов начиная с $k = 3$ и заканчивая $k = n$:

$$\sum_{k=3}^{n} n - k + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

2. «Ножки» для буквы однозначно задаются выбранной строкой в квадрате. Так как для конкретного построения перегородки $n - 1$ строка свободна, то и «ножки» выбираются $n - 1$ способом и строка n способами. Таким образом, число букв «П» с учетом разворота на 90 градусов:

$$\frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot n}{2} \cdot (n-1) = \frac{(n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot n}{2}.$$

3. Учитывая поворот на 270 и 90 градусов, умножаем это число на 2 и получаем ответ:

$$\frac{(n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot n}{2} \cdot 2 = (n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot n.$$

Задача 265. Используя исключительно комбинаторные аргументы, докажите справедливость тождества

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1} + n(n-1) \cdot 2^{n-2}.$$

Под “комбинаторными аргументами” понимается построение комбинаторной задачи, такой, что считая двумя разными способами ответ в задаче мы получаем левую и правую части формулы соответственно.

Решение.

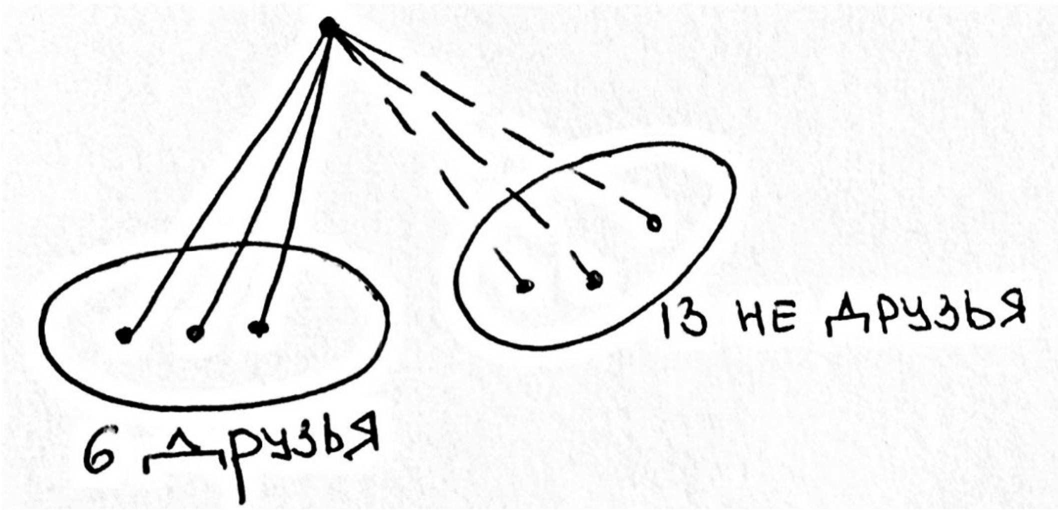
Пусть имеется урна с n шариками. Правую часть уравнения можно интерпретировать следующим образом: первое слагаемое — это количество способов выбрать один шар и некоторую группу для него из оставшихся шаров, а второе слагаемое — количество способов выбрать из урны два различимых шара (т.е. их порядок важен) и некоторую группу шаров для них.

Количество таких способов можно искать итеративно. Пусть на k-м шаге в группе k шаров, включая те два шара, которым данная группа соответствует в предыдущей интерпретации. Таких групп существует $\binom{n}{k}$, а различных комбинаций связанных с подгруппами шаров — k для случая с одним представителем и $k \cdot (k-1)$ для случая с двумя различимыми связанными шарами. Тогда всего вариантов выбрать эту группу со связанными шарами $\binom{n}{k}(k(k-1)+k) = \binom{n}{k} \cdot k^2$. Суммируя по количеству шаров в группе вместе со связанными шарами, получаем требуемое равенство.

Задача 270. В группе 20 студентов, каждый из которых дружит ровно с шестью одногруппниками. Найдите количество компаний из трёх студентов, в которых либо все попарно дружат, либо все попарно не дружат (найти нужно именно суммарное количество «дружащих» и «недружащих» компаний).

Решение.

Представим группу, как граф, где студенты — вершины, а отношения — ребра, причем если студенты дружат, то ребро сплошное, если не дружат — штрихованное.



Будем рассматривать треугольники (компании из трех). Всего их $C_{20}^3 = 1140$. Назовем *вершиной раздора* в треугольнике вершину, одно ребро которой сплошное, а другое — штрихованное. Треугольники, содержащие вершины раздора, — *треугольники раздора*. Посчитаем количество треугольников раздора S.

Пусть $\mathrm{I}(v,t)$ — индикатор того, что вершина v является вершиной раздора для треугольника t. Множество всех вершин графа — V, а T — множество всех треугольников в графе.

Тогда
$$\sum_{v\in V}\sum_{t\in T}\mathrm{I}(v,t) = \sum_{t\in T}\sum_{v\in V}\mathrm{I}(v,t) = 2S,$$
т. к. в любом треугольнике вершин раздора ноль, либо две (тогда и только тогда, когда это треугольник раздора), и от порядка суммирования сумма не меняется.

Для каждой вершины существует $6 \cdot 13 = 78$ треугольников раздора, в которых эта вершина является вершиной раздора.

Тогда треугольников раздора $S = \frac{20\cdot 78}{2} = 780$. А суммарное количество дружащих и недружащих компаний, то есть "безраздорных" треугольников — это число оставшихся треугольников $|T| - |S| = 1140 - 780 = 360$.

Ответ: 360.

Задача 272. На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причём среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

Решение. Пусть количество левых ботинок 41-го размера равно a, 42-го — b, тогда количество левых ботинок 43-го размера равно $300 - a - b$. Допустим, что количество пар меньше 100. Тогда

$$\min(a,\ 200-a) + \min(b,\ 200-b) + \min(300-a-b,\ a+b-100) < 100.$$

Получаем восемь неравенств:

1. $a + b + 300 - a - b < 100 \implies 300 < 100$ — противоречие.
2. $a+b+a+b-100 < 100 \implies a+b < 100$ — противоречие (тогда количество правых ботинок 43-го размера отрицательно).
3. $a + 200 - b + 300 - a - b < 100 \implies b > 200$ — противоречие.
4. $a + 200 - b + a + b - 100 < 100 \implies a < 0$ — противоречие.
5. $200 - a + b + 300 - a - b < 100 \implies a > 200$ — противоречие.

6. $200 - a + b + a + b - 100 < 100 \implies b < 0$ — противоречие.

7. $200 - a + 200 - b + 300 - a - b < 100 \implies a + b > 300$ — противоречие.

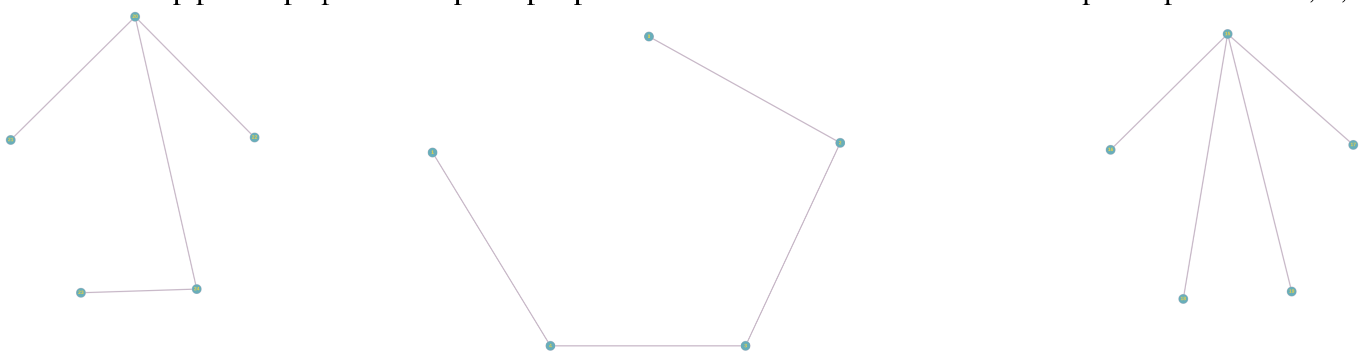
8. $200 - a + 200 - b + a + b - 100 < 100 \implies 300 < 100$ — противоречие.

Следовательно, предположение неверно, и количество пар больше либо равно 100.

Задача 276. Перечислите все попарно неизоморфные связные неориентированные графы без петель и кратных рёбер с пятью вершинами и не более, чем шестью рёбрами.

Решение. Рассмотрим графы содержащие 4, 5 и 6 рёбер, выделяя в них дополнительный критерий для определения изоморфности.

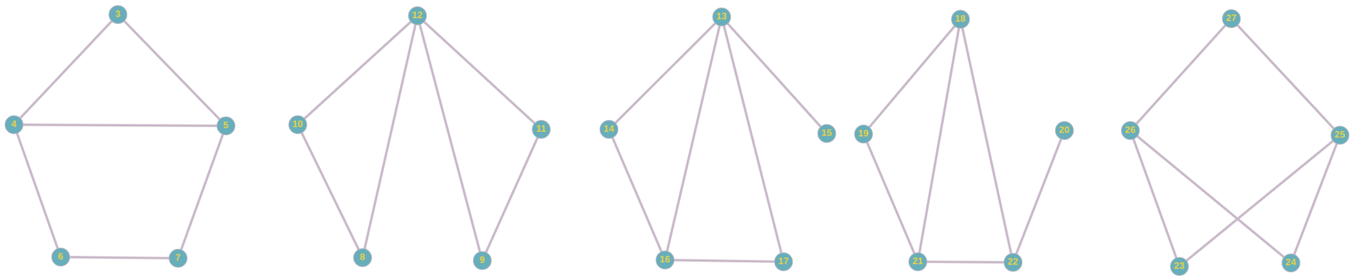
Все неизоморфные графы с четырьмя рёбрами и максимальными степенями вершин равными 4, 3, 2:



Теперь рассмотрим все неизоморфные графы с пятью рёбрами и наличием цикла длины 5, 4, 3:

img/276_2.png

Наконец, рассмотрим все неизоморфные графы с шестью рёбрами и парами циклов 4, 3; 3, 3; 4, 4:



Задача 278. Приведите пример унициклического графа на 2016 вершинах, у которого ровно 1147 центральных вершин.

Решение. Возьмём простой цикл на 1148 вершинах. Все вершины в цикле центральные и эксцентриситет у них 574. Теперь оставшиеся 868 вершин соединим с произвольной вершиной на цикле. Таким образом только у одной (противоположной) вершины эксцентриситет поменяется и станет 575. У всех присоединённых вершин он тоже равен 575. И так мы получили ровно 1147 центральных вершин.

Задача 279. Пусть все рёбра связного графа раскрашены в два цвета, причём из каждой вершины выходит поровну рёбер обоих цветов. Докажите, что из любой вершины графа до любой другой можно добраться, каждый раз меняя цвет ребра.

Решение. Подзадача первая.

Построим какой-либо цикл в графе, так чтобы цвет ребер в нем чередовался. Начнем из какой-то вершины и пойдем, например по ребру первого цвета. Продолжаться процесс построения такого цикла будет, так как у каждой вершины количество ребер первого цвета равно количеству ребер второго цвета, а значит войдя в вершину мы всегда сможем выйти из нее сменив цвет. Если мы придем в стартовую вершину по ребру второго цвета, то искомый цикл найден. Иначе — продолжим цикл из этой вершины со сменой цвета. Такое возможно, так как в этом случае есть целых два ребра второго цвета. В итоге цикл остановим, когда для стартовой вершины количество ребер разных цветов станет одинаковым. Такое произойдет, так как если количество ребер разных цветов не равно друг другу, то в любом случае можно куда-то пойти, а остановиться только в стартовой, так как разница будет нечетна.

Подзадача вторая.

Если остались не посещенные ребра, то увеличим этот цикл следующим образом: начнем из нашего цикла идти по не посещенному ребру, а так как у всех вершин степени разных цветов одинаковы, то выберем для первого шага ребро противоположного цвета, чем тот, по которому мы пришли в эту вершину по уже построенному циклу. Будем ходить только по не посещенным ребрам. Повторяя рассуждения первой подзадачи мы закончим в начальной вершине, причем по ребру противоположного цвета чем тот, с которого мы начали. Таким образом мы расширили наш исходный цикл.

Остальное доказано.

Задача 280. Докажите, что в нарисованном на плоскости эйлеровом планарном графе можно все грани раскрасить в 2 цвета правильно, т.е. так, чтобы граничащие по ребру грани были разных цветов.

Решение. Поскольку (по эйлеровости) степень каждой вершины чётна, то, обходя “вокруг“ каждой вершины, будем пересекать чётное число инцидентных ей рёбер. Это эквивалентно разбиению двойственного графа на простые циклы чётной длины (если $\deg(v) \geq 4$) и отдельные рёбра (если $\deg(v) = 2$).

Заметим, что отдельным рёбрам может быть инцидентна только одна внутренняя грань. Значит, двойственный граф будет объединением циклов чётной длины с “навешенными“ снаружи рёбрами. Любой цикл в двойственном графе будет чётной длины как объединение просты циклов чётной длины. Поэтому двойственный граф двудольный, а его вершины правильно раскрашиваются в два цвета.

Задача 281. Докажите, что если граф G связен и $2\|G\| \geqslant |G|^2 - 3|G| + 6$, то в нём есть гамильтонов цикл.

Решение.

От противного: предположим, что граф G не гамильтонов. Тогда $\exists u, v : (u, v) \notin E :\ \deg u + \deg v < n$, ведь иначе выполнено условие теоремы Оре, и граф гамильтонов. Тогда $2|E| = \sum\limits_{i=1}^{n} \deg v_i < 2n + (n - 2)(n - 3) = n^2 - 3n + 6$. Это противоречит условию, значит граф G — гамильтонов.

Задача 283. Докажите, что при любой раскраске рёбер графа K_n в два цвета в нём найдётся гамильтонов цикл, состоящий из двух одноцветных путей (цвета путей могут быть и одинаковы, и различны).

Решение. Докажем индукцией по n. Для $n = 3$ утверждение очевидно.

При $3 \leq n$ рассмотрим K_{n+1}. Произвольным образом раскрасим его в два цвета и рассмотрим подграф K_n. В нем строим гамильтонов цикл из двух одноцветных путей: a — красного и b — синего. Если цикл одноцветный, то добавим в него $(n + 1)$-ю вершину графа между двумя соседними вершинами цикла, а соединяющее их ребро удаляем из цикла. Понятно, что тогда цикл будет состоять из двух одноцветных путей.

Теперь пусть a, b непустые. Пусть вершина u — конец a и, соответственно, начало b. Без ограничения общности будем считать, что ребро uv красное, где v — оставшаяся $(n + 1)$-я вершина. Смотрим на цвет ребра vz, где z — следующая после u вершина в пути b.

Если оно красное, то имеем цикл, состоящий из красного пути $a(uv)(vz)$ и синего пути b', где b' — b без ребра uz.

Если оно синее, то имеем то имеем цикл, состоящий из красного пути $a(uv)$ и синего пути $(vz)b'$, где b' — b без ребра uz.

Задача 284. Орграф, в котором между любой парой вершин есть ровна одна дуга, называется турниром. Докажите, что при любом $n \geq 3$ существует турнир на n вершинах, в котором не менее $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

Решение. Введём следующие обозначения: $\mathbb{H}_n$ — все гамильтоновы пути на n вершинах, τ — все турниры на n вершинах.

Теперь же воспользуемся двойным подсчётом:

$$\sum_{h\in\mathbb{H}_n} \underbrace{\sum_{t\in\tau} \mathrm{I}(h\in t)}_{P_h} = \sum_{t\in\tau} \underbrace{\sum_{h\in\mathbb{H}_n} \mathrm{I}(h\in t)}_{K_t}.$$

В левой части мы фиксируем гамильтонов путь и считаем число турниров, которые содержат этот путь. С другой стороны, мы фиксируем турнир и считаем число гамильтоновых путей в нём.

Посчитаем число гамильтоновых путей и турниров на n вершинах. Получим:

$$|\mathbb{H}_n| = n!, \qquad |\tau| = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Заметим, что $P_h = 2^{\left(\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)\right)}$. Вычитаем $n-1$, так как зафиксировали какой-то гамильтонов путь. И пусть K – это среднее число гамильтоновых путей в турнире. Тогда из двойного подсчёта получаем следующее равенство:

$$n!\cdot 2^{\left(\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)\right)} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot K.$$

Но по принципу Дирихле найдётся турнир, для которого будет выполнено неравенство: $K_t \geq n!\cdot 2^{-(n-1)}$.

Задача 285. Объединением двух графов (V', E') и $(V", E")$ называется граф $(V'\cup V", E'\cup E")$. Пусть G — простой граф. Укажите граф G', такой, что в объединении графов G и G' найдётся совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда в G найдётся паросочетание мощности k (сам граф G' при этом не должен зависеть от того, есть ли в G паросочетание мощности k).

Решение. Рассмотрим случаи.

Если $2k > n$, то графом G' будет просто одна изолированная вершина.

Если $2k \leq n$, то опишем алгоритм построения графа G'. Для начала сделаем точную копию графа G и соединим ребрами каждую вершину и ее копию. Таким образом в данной конструкции всегда будет совершенное паросочетание.

Затем создадим все возможные $2k$-элементные подмножества графа G. Таких новых графов будет $m = \binom{|G|}{2k}$. В каждом из них построим максимальное паросочетание и удалим все вершины, входящие в него. Понятно, что если в графе G существовало паросочетание мощности k, то в нем существует $2k$-элементное подмножество, покрывающееся парасочетанием. Значит один (или больше) из наших новых графов полностью удалится. Для остатков каждого множества сделаем дубликат и соединим вершину с его копией. Но таких дубликатов сделаем не больше, чем $m-1$. Таким образом, если в графе G существовало паросочетание мощности k, то нам хватит добавить $m-1$ множество-дубликат (возможно меньше) и полученный в итоге граф будет покрываться совершенным паросочетанием. Если же в графе G не существовало k-мощного паросочетания, то нам потребуется сделать ровно m дубликатов, чтобы существовало совершенное паросочетание, но так как мы создаем максимум $m-1$ дубликат, то в итоговом графе не получится построить совершенное паросочетание.

Задача 286. Для произвольного графа G и произвольного множества $A \subseteq V(G)$ обозначим через $q(G, A)$ количество компонент связности с нечётным количеством вершин в графе, получаемом из графа G удалением всех вершин множества A. В частности, $q(G, \varnothing) \geq 1$, если граф G имеет нечётное количество вершин. Докажите утверждение: если в (необязательно двудольном) графе G существует совершенное паросочетание, то для любого подмножества $A \subseteq V(G)$ выполнено неравенство $q(G, A) \leq |A|$.

Решение. Заметим, что в исходном графе G нет компонент связности с нечетным числом вершин, иначе предположим противное, тогда получится нарушение условия совершенного паросочетания, так как таким образом мы найдем вершину без пары. Покажем, что нельзя удалив n вершин из компоненты связности графа G, получить больше чем n компонент связности с нечетным числом вершин. Рассмотрим граф G без ребер, не входящих в паросочетание, а затем вернем ребра после удаления вершин из A, тогда число компонент связности с нечетным числом вершин не увеличится, так как возможны следующие ситуации после добавления ребра:

1. «Нечет» + «Чет» = «Нечет»,
2. «Чет» + «Чет» = «Чет»,
3. «Нечет» + «Нечет» = «Чет».

Следовательно, $q(G, A)$ максимально для заданного $|A|$, если из максимально возможного числа компонент связности удалено хотя бы по одной вершине и таким образом получаем оценку $q(G, A) \leq |A|$.

Задача 289. Докажите, используя теорему Холла, что $\chi'(G) = \delta(G)$ для любого регулярного двудольного графа G.

Решение. Граф G с долями размера n и m является k-регулярным, следовательно из верхней доли выходит $n \cdot k$ ребер, в нижнюю входит $m \cdot k$ ребер. Сумма входящих ребер равна сумме выходящих, значит $n = m$, таким образом доли равномощны, $\delta(G) = k$. Так как минимальная степень вершины k, значит, у каждой вершины минимум k ребер, следовательно, минимальное количество цветов, требуемое для правильной реберной раскраски, k, то есть: $\chi'(G) \geqslant \delta(G) = k$.

Пусть $A \subseteq L$, где L - множество вершин верхней доли. Из A выходит $|A| \cdot k$ ребер, которые входят в $N(A)$, кроме того в $N(A)$ входит $|N(A)| \cdot k$ ребер. Следовательно $|A| \cdot k \leqslant |N(A)| \cdot k \implies A \leqslant N(A)$. Значит по теореме Холла: в графе есть совершенное паросочетание.

Получим двудольный $(k-1)$-регулярный граф G' с помощью удаления паросочетания. Так можно повторять $\delta(G)$ раз, покрасив каждое такой паросочетание в свой цвет, получим искомую раскраску. Следовательно $\chi'(G) = \delta(G)$.

Задача 290. Сколькими способами можно рассадить за круглым девятиместным столом трёх англичан, трёх французов и трёх турок, так, чтобы никакая тройка соотечественников не сидела рядом (сидящие рядом пары соотечественников допустимы)? Рассадки, совмещающиеся поворотами круглого стола, считаются одинаковыми.

Решение. Посчитаем сколько всего существует рассадок, а потом вычтем те, которые нам не подходят.

Так как это круглый стол, то всего рассадок $N_\Sigma = \frac{9!}{9}$. Теперь же посчитаем следующие величины: N_1 — фиксирована одна тройка, N_2 — фиксированы две тройки, N_3 — фиксированы три тройки. Тогда число рассадок с хотя бы одной тройкой находится по формуле включений-исключений, как $N_b = N_1 - N_2 + N_3$. Тогда ответ на задачу равен $N_g = N_\Sigma - N_b$.

$N_1 = \frac{7!}{7} \cdot 3! \cdot 3$, где $\frac{7!}{7}$ — фиксируем одного человека из тройки, два соотечественника автоматически должны сидеть рядом, остаётся рассадить ещё 6 человек за столом; $3!$ — число перестановок внутри тройки; 3 — число способов выбрать тройку (C_3^1).

$N_2 = \frac{5}{5!} \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3$, где $\frac{5}{5!}$ — фиксируем уже по одному человеку для двух троек и садим оставшихся троих; $3!$ — перестановки внутри первой тройки; $3!$ — перестановки внутри второй тройки; 3 — выбор двух троек (C_3^2).

Аналогично получаем $N_3 = \frac{3!}{3} \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!$.

Тогда число случаев, которые нам не подходят, $N_b = 6! \cdot 18 - 4! \cdot 6^2 \cdot 3 + 2 \cdot 6^3$. Отсюда получаем ответ к задаче: $N_g = N_\Sigma - N_b = 29520$.

Задача 291. Рёберным графом графа G называется граф G', такой, что вершины графа G' соответствуют рёбрам G, и две вершины в G' смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им рёбра в G имеют общий конец. Докажите или опровергните утверждение: «если в G есть гамильтонов цикл, то и в G' также есть гамильтонов цикл».

Решение. Пусть в исходном графе $C = v_1 v_2 \dots v_n v_1$ — гамильтонов цикл. В первую очередь заметим, что вершине $v_i \in G$ степени $\deg(v_i) = k$ будет соответствовать граф K_k (в дальнейшем обозначим его через G_{v_i}). Пусть $v'_{v_i v_j}$ — вершина графа G', которая была ребром между вершинами $v_i, v_j \in G$.

Если мы пройдём по всем образовавшимся G_{v_i}, где $i \in [1; n]$, через вершины $v'_{v_i v_{i+1}}$, то в каждую G_{v_i} мы зайдём только однажды, так как соответствующие рёбра соединяли вершины на гамильтоновом пути. Ясное дело, вернуться из G_{v_n} в G_{v_1} можно тоже, получив цикл. Тогда если найти гамильтоновы цепи в G_{v_i}, начинающиеся в $v'_{v_{i-1} v_i}$ и заканчивающиеся в $v'_{v_i v_{i+1}}$, то получим гамильтонов цикл для всего графа G'.

Так как каждый G_{v_i} является полным графом, гамильтонова цепь строится тривиально: стартуем в v_{i-1}, переходим в любую из непосещённых вершин, принадлежащих G_{v_i}, за исключением v_i. Такой переход можно сделать всегда, и переходов будет конечно число, поэтому процесс завершится и гамильтонова цепь будет построена. На последнем шаге идём в v_i.

Существование таких цепей завершает доказательство.

Задача 294. Пусть граф G таков, что в нём степени вершин равны $d_1 \leq d_2 \leq \dots d_n$ и для каждого $i \in \{1, 2, \dots \lfloor n/2 \rfloor\}$ выполнено хотя бы одно из двух неравенств $d_i \geq i + 1$ и $d_{n-i} \geq n - i$. Докажите, что в G есть гамильтонов цикл.

Решение. Докажем от противного. Пусть существует контрпример на n вершинах. Тогда существует и максимальный по количеству ребер контрпример. Назовем его G. Заметим, что любое добавление ребра не нарушает условие на последовательность степеней. Так как G — максимальный контрпример, то любое добавление ребра делает из G гамильтнов граф. Это означает что любые две несмежные вершины являются концами гамильтонова пути. Далее возможны случаи. Рассмотрим случай, когда для всех $i \in \{1, 2, \dots \lfloor n/2 \rfloor\}$ выполнено условие $d_i \geq i + 1$. Тогда:

$$\begin{cases} d_1 \geq 2, \\ d_2 \geq 3, \\ \dots \\ d_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1. \end{cases} \tag{6}$$

Видно, что $\forall k, 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ число вершин со степенями, не превосходящими k, меньше чем k. Тогда по теореме 3 в графе есть гамильтонов цикл.

***Теорема* 3** (Поша). *Для графа на n вершинах, если для $\forall k$ от 1 до $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ количество вершин степени меньше или равной k строго меньше k, то в этом графе существует гамильтонов цикл.*

Или, возможно, что при каком-то k система неравенств (10) нарушится, тогда:

$$\begin{cases} d_1 \geq 2, \\ d_2 \geq 3, \\ \dots \\ d_{k-1} \geq k, \\ d_k = k, \\ \dots . \end{cases} \tag{7}$$

где d_k — степень первой вершины на которой нарушилось $d_i \geq i + 1$. Для этой вершины $d_{n-k} \geq n - k$, затем $d_{n-k+1} \geq n - k, \dots, d_n \geq n - k$. Значит мы нашли $k + 1$ вершину степени больше или равной $n - k$. Посмотрим на вершину степени k. У нее может быть не больше чем k соседей, значит эта вершина не смежна хотя бы с одной вершиной степени больше или равной $n - k$, ведь таких вершин $k + 1$. Пронумеруем вершины графа так, чтобы вершина степени k и не смежная ей вершина степени хотя бы $n - k$ имели соответственно номера 1 и n. Причем по замечанию в начале, эти вершины являются концами гамильтонова пути.

Так как сумма степеней вершин $1, n$ хотя бы n, обязательно есть две подряд идущие вершины i и $i + 1$ в гамильтоновом пути, что существует ребро из вершины i в вершину n, а также существует ребро из вершины $i+1$ в вершину 1. Значит мы можем предоставить гамильтонов цикл $1, 2, \ldots i, n, n-1, \ldots i+1, 1$. Значит этот вариант привел к противоречию. Значит в любом случае в графе есть гамильтонов цикл. Тогда не существует контрпримера. Что и требовалось доказать.

$$\begin{cases} d_1 \geq 2, \\ d_2 \geq 3, \\ \ldots \\ d_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} d_1 \geq 2, \\ d_2 \geq 3, \\ \ldots \\ d_{k-1} \geq k, \\ d_k = k, \\ \ldots \end{cases}$$

Задача 297. Пусть G связный граф. Обозначим через $\kappa(G)$ — минимальное количество вершин, которые можно удалить из графа G, чтобы сделать его несвязным. Докажите, что если $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, то граф G гамильтонов.

Решение.

Пойдём от противного. Пусть G негамильтонов. Рассмотрим максимальный по длине цикл C в нашем G. По предположению этот цикл не является гамильтоновым, то есть в нём содержатся не все вершины.

Пусть $B \subset G$ — компонента связности графа $G \setminus C$. Так как G связен, то между B и C есть рёбра. Пусть C_B — вершины из C, смежные с B, а C_B^+ — вершины из C, следующие за вершинами из C_B в некотором порядке обхода.

Если мы удалим все вершины из C_B, то нарушится связность, поэтому

$$\kappa(G) \leq |C_B| = |C_B^+|.$$

Заметим, что вершины из C_B^+ между собой не смежны, потому что иначе мы бы могли увеличить наш цикл (ну то есть это значит, что есть две смежных из C, тогда мы просто выходим из одной вершины C в B и возвращаемся в смежную, тем самым увеличив длину цикла минимум на один)

Также заметим, что между C_B^+ и B нет рёбер, иначе длину цикла тоже можно было бы увеличить (аналогичным образом, выйти из вершины C (у которой смежная связана с B), пойти B, и вернуться в смежную).

Получаем, что если мы добавим к C_B^+ хотя бы одну любую вершину из B, получится независимое множество размера $|G_B^+| + 1$ в G, что приводит к противоречию.

Что и требовалось доказать.

Задача 305. Дан клетчатый прямоугольник размером $n \times 2, n \in \mathbb{N}$. Обозначим символом a_n число способов замостить этот прямоугольник фигурами трёх типов: уголками размером 3×2, доминошками размера 3×1, и доминошками размера 2×2. Никакие две фигуры не должны перекрываться и каждая клетка прямоугольника должна быть покрыта некоторой фигурой. Выведите линейное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами для a_n и вычислите значения $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Замощения, совмещающиеся отражениями относительно обеих осей симметрии прямоугольника, считаются различными. Считайте, что $a_0 = 1$.

Решение.

Рассмотрим как может развиваться процесс замощения доминошками.

Введем последовательность a_n, обозначающую сколькими способами можно замостить данными доминошками профиль $2 \times n$. На первом шаге можно поставить доминошку-квадрат и ситуация сведется к a_{n-2}. Так же можно поставить палочку, но вертикально она не помещается, так что кладем горизонтально. Но в образовавшуюся дырку ничто кроме палки не поместится. Значит замощаем доминошкой-палкой и сводим ситуацию к a_{n-3}. Осталось разобрать случай, если мы первой ставим доминошку-Г. Поставить ее можно только шляпкой влево, иначе образуется полость. И мы вводим новую последовательность b_n — когда есть профиль $2 \times (n-2)$ и еще два блока торчат столбиком. Но есть две различные позиции — когда столбики выступают из верхнего ряда и из нижнего. Эти ситуации симметричные, поэтому в формулу

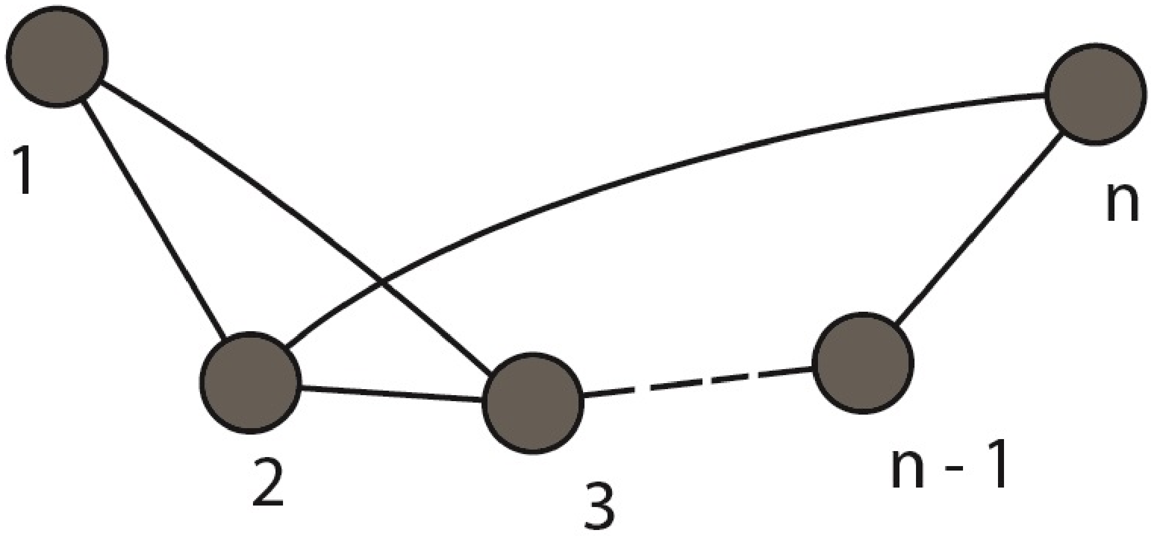


Рис. 6. Пример гамильтонова цикла для $i = 2$

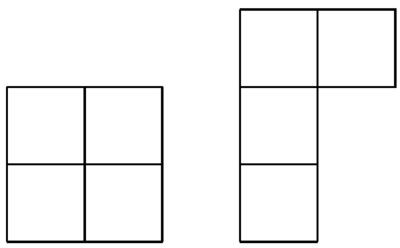


Рис. 7. Возможные фигурки для замощения.

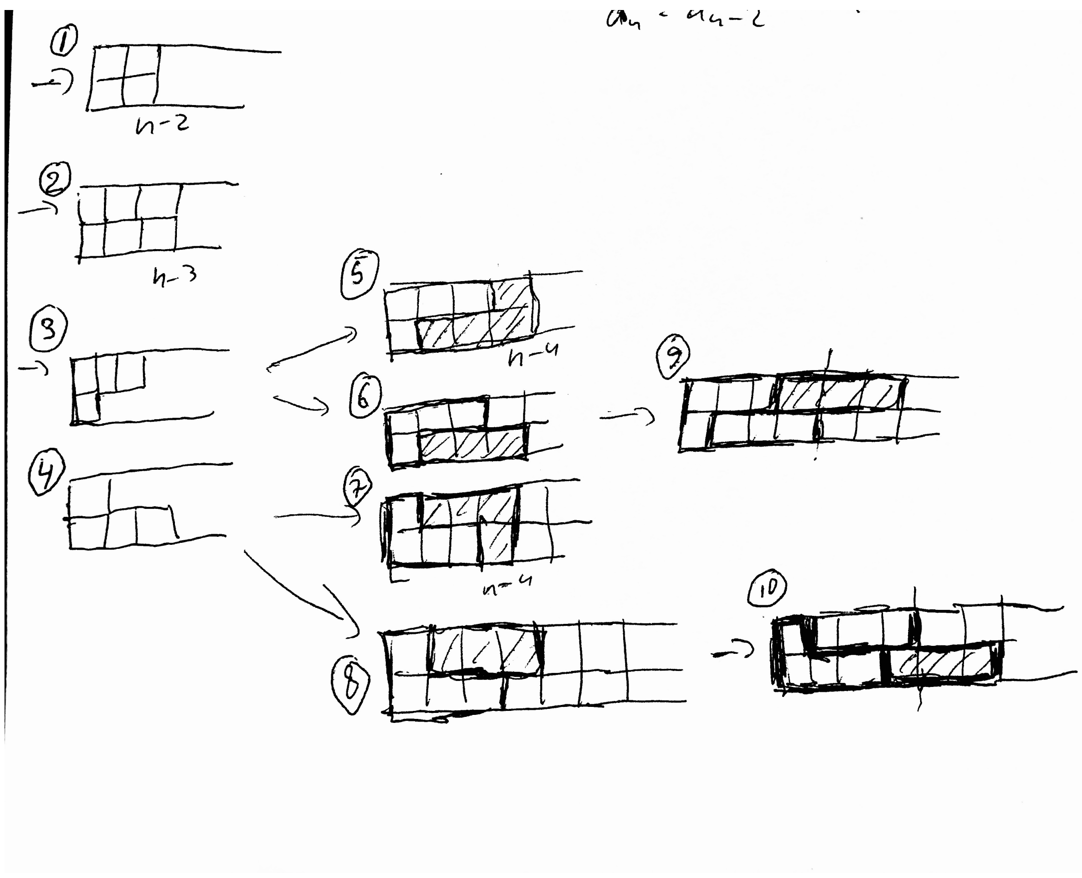


Рис. 8. Граф уникальных состояний.

войдут как одна, но с двойным коэффициентом. Итак:

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-3} + 2b_{n-1}.$$

Теперь рассмотрим, что можно сделать с b_n. Чтобы замостить выступающие блоки мы должны поставить либо доминошку-палочку, либо доминошку-Г (только одно положение допустимо). Если мы ставим доминошку-Г, то получаем ровный профиль, число замощений которого равно a_{n-4}. Если же ставим палочку то приходим к ситуации, когда у нас профиль $2 \times (n-4)$, с выступающим одним блоком. Поместить туда мы можем только доминошку-палку, так как иначе образуется полость. Но поместив туда палку мы придем к ситуации с двумя торчащами блоками, что описывается ситуацией b_{n-4}. (Последовательность b считается по последнему блоку выступа, а не по основанию выступа). Соберем все в одну систему:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + a_{n-3} + 2b_{n-1}, \\ b_{n-1} = a_{n-4} + b_{n-4}. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $2b_{n-1}$:

$$2b_{n-1} = a_n - a_{n-2} - a_{n-3}.$$

И сдвинем в нем все индексы на три:

$$2b_{n-4} = a_{n-3} - a_{n-5} - a_{n-6}.$$

Теперь подставим полученные b_{n-1}, b_{n-4} во второе уравнение:

$$2a_{n-4} = a_n - a_{n-2} - 2a_{n-3} + a_{n-5} + a_{n-6}.$$

Первые шесть значений $a_n : a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4$ можно получить следующими способами: два кубика, две доминошки-Г, но тут два симметричных случая. Итого $a_4 = 3$. Для $n = 5$ мы можем поставить с самого начала кубик и сведем задачу к $n = 3$, то есть один случай. Если же мы первой поставим доминошку-Г, то никак не сможем замостить все пропуски. В случае когда первая ставится палочка у нас есть единственный вариант поставить ей в пару еще одну палочку, и свести задачу к $n = 2$, где только один вариант. Итого два варианта. У $n = 6$ поставим первым кубик, сведем задачу к $a_4 = 3$. Поставив первой палочку придется ставить симметрично ей еще одну и сводить задачу к $a_3 = 1$. Поставив первой доминошку-Г ей в пару придется ставить еще одну такую же, иначе замостить не получилось бы. И в оставшиеся две клеточки вписать квадрат. Но для двух доминошек-Г, лежащих друг на друге есть две разные позиции, так что в случае, когда начинается с доминошки-Г — 2 случая. А всего $a_6 = 6$. Итого: $a_n : a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 3, a_5 = 2, a_6 = 6$. Итоговая рекурентная формула:

$$a_n = a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2a_{n-4} - a_{n-5} - a_{n-6}.$$

Задача 316. [Это дословно одна из задач из курса на Степике] Отметьте все истинные утверждения в списке ниже (обоснование истинности не требуется). Под «любым G» понимается произвольный простой неориентированный граф G, имеющий не менее одной вершины. Для каждого неверного утверждения приведите соответствующий контрпример, а также напишите, как его формулировку можно *немного* подправить, чтобы оно стало верным (изменить некоторый символ, добавить дополнительное условие и т. п.).

- $\chi'(G) \geq \delta(G)$ для любого G.
- $\chi'(G) \leq \Delta(G)$ для любого G.
- $\chi'(G) \leq \omega(G)$ для любого G.
- $\chi'(G) \geq \frac{|G|}{\alpha(G)}$ для любого G.

- $\chi'(K_n) = n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.
- $\chi'(G) \geq \alpha(G)$ для любого G.
- $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ для любого G.
- $\chi'(G) \geq \omega(G)$ для любого G.

Решение.

- $\chi'(G) \geq \delta(G)$ для любого G.

  Это утверждение верно.

- $\chi'(G) \leq \Delta(G)$ для любого G.

  Для $G = K_3$, у которого $\chi'(G) = 3$ и $\Delta(G) = 2$, неравенство не выполняется. Правильное неравенство: $\chi(G) \leq \Delta(G)$ для любого связного G, не являющимся полным графом или циклом нечётной длины (теорема Брукса).

- $\chi'(G) \leq \omega(G)$ для любого G.

  На рис. 9 изображён граф G, у которого $\chi'(G) = 3$ и $\omega(G) = 2$, неравенство не выполняется. Верное неравенство: $\chi(G) \geq \omega(G)$ для любого G.

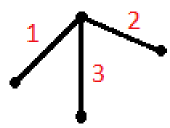


Рис. 9. Контрпример

- $\chi'(G) \geq \frac{|G|}{\alpha(G)}$ для любого G.

  Контрпримером для этого неравенства является граф $G = K_4$. Для него $\chi'(G) = 3$, $\frac{|G|}{\alpha(G)} = \frac{4}{1} = 4$, неравенство не выполняется. Верное неравенство: $\chi(G) \geq \frac{|G|}{\alpha(G)}$ для любого G.

- $\chi'(K_n) = n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

  Для $G = K_2$ утверждение не выполняется: $\chi'(K_2) = 1$. Верное утверждение: $\chi(K_n) = n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

- $\chi'(G) \geq \alpha(G)$ для любого G.

  На рис. 10 изображён граф G, у которого $\chi'(G) = 2$ и $\alpha(G) = 3$, неравенство не выполняется. Верное неравенство: $\chi(G) \geq \frac{|G|}{\alpha(G)}$ для любого G.

- $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ для любого G.

  Это утверждение верно.

- $\chi'(G) \geq \omega(G)$ для любого G.

  Для $G = K_4$ неравенство не выполняется. Для него $\chi'(G) = 3$ и $\omega(G) = 4$. Правильное неравенство: $\chi(G) \geq \omega(G)$ для любого G.

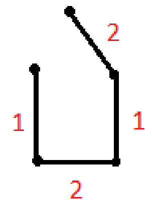


Рис. 10. Контрпример

Задача 318. Сколько перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ представимы в виде композиции чётного количества транспозиций?

Решение. Считаем, что $n \geqslant 2$. Всего различных перестановок $n!$. Пусть a из них представимы в виде композиции чётного количества транспозиций и b — в виде нечетного.

Рассмотрим четные перестановки и домножим каждую из них на транспозицию $(1, 2)$. Получим a различных нечетных перестановок. Откуда,

$$a \leq b. \tag{8}$$

Аналогично рассмотрим нечетные перестановки и домножим каждую на ту же транспозицию, получив b различных четных перестановок, откуда

$$b \leq a. \tag{9}$$

Из неравенств (8) и (9) получаем, что $a = b = \frac{n!}{2}$, т. к. $a + b = n!$.

Ответ: $\frac{n!}{2}$.

Задача 320. Найдите количество таких элементов $x \in S_n$, для которых $x^3 = e$, e — нейтральный элемент группы. Ответ можно выписать в виде формулы со знаком суммирования, и вряд ли получится по-другому.

Решение.

Заметим, что не имеет смысла рассматривать элементы порядка два, а также элементы порядка выше трех. В первом случае нарушится четность, а во втором мы не сможем получить e, возведя элемент в куб, просто по определению порядка элемента.

Нам подходит сам элемент e, который переходит в себя при возведении в любую степень, а также элементы, имеющие в точности порядок три. Посчитаем их количество через полиномиальные коэффициенты, учитывая тот факт, что каждый цикл длины три можно задать ровно двумя различными способами (изменив направление).

$$N = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} 2^k P(3, \ldots, 3, 1, \ldots, 1) \frac{1}{(n-3k)!k!} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \frac{2^k n!}{(3!)^k k!(n-3k)!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \frac{n!}{3^k k!(n-3k)!}.$$

Здесь мы имеем k троек и $n - 3k$ единиц, а суммирование начинается с нуля, чтобы учесть элемент e.

Задача 321. Сколько перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ разлагаются в произведение ровно трёх различных транспозиций?

Решение. Надо рассмотреть 5 различных случаев:

$$(ab)(cd)(ef),$$
$$(ab)(bc)(ed),$$
$$(ab)(bc)(cd),$$
$$(ab)(ac)(ad),$$
$$(ab)(ac)(bc).$$

Остальные случаи сводятся к перечисленным выше.

Рассмотрим случай когда элементы всех трёх транспозиций попарно различны. Тогда таких перестановок $\frac{1}{3!} \cdot C_n^2 \cdot C_{n-2}^2 \cdot C_{n-4}^2$. Так как порядок транспозиций не важен, то делим на 3!.

Случай $(ab)(bc)(ed)$ сводится к $(abc)(ed)$. Поэтому число случаев равно $\frac{A_n^3}{3} \cdot C_{n-3}^2$. Делим на 3, так как циклические сдвиги в цикле изоморфны.

Случай $(ab)(bc)(cd)$ сводится к $(abcd)$. Аналогично, нам не важны циклические сдвиги внутри перестановки, поэтому случаев — $\frac{A_n^4}{4}$.

Случай $(ab)(ac)(ad)$ сводится к $(adcb)$. Значит мы его уже учли на предыдущем этапе.

Случай $(ab)(ac)(bc)$ сводится к (ac). То есть C_n^2.

Итоговый ответ равен:

$$\frac{1}{3!} \cdot C_n^2 \cdot C_{n-2}^2 \cdot C_{n-4}^2 + \frac{A_n^3}{3} \cdot C_{n-3}^2 + \frac{A_n^4}{4} + C_n^2.$$

Задача 322. Пусть n — произвольное натуральное число. Пусть $S_1, \ldots, S_{n^{2017}}$ — произвольные n-элементные множества. Докажите, что при всех достаточно больших значениях n можно покрасить элементы в красный и синий цвета, так, чтобы в каждом множестве S_i нашёлся хотя бы один красный и хотя бы один синий элемент.

Решение. Так как объединение у нас не дизъюнктное, то вероятность объединения меньше либо равна суммы вероятностей. Поэтому:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n^{2017}} \{S_i \text{ — одноцветное}\}\right) \leq \sum_{i=1}^{n^{2017}} \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Задача 323. Докажите, что в любой группе нейтральный элемент единственен.

Решение. Пусть e_1 и e_2 — два нейтральных элемента в некоторой группе $(\mathbb{G}, *)$. Тогда так как e_1 нейтральный, то $e_2 * e_1 = e_2$. Так как e_2 нейтральный, то $e_2 * e_1 = e_1$. Получаем, что $e_1 = e_2$. Что и требовалось доказать. d

Задача 324. Докажите, что в любой группе обратный элемент к любому элементу единственен.

Решение. Пусть a — элемент, а b_1, b_2 — два обратных элемента к a, $b_1 \neq b_2$. Тогда $b_1 a = e = ab_1$ и $b_2 a = e = ab_2$. Покажем, что тогда мы придем к противоречию:

$$ab_1 = e \implies b_2 ab_1 = b_2 e \implies eb_1 = b_2 \implies b_1 = b_2.$$

Противоречие, значит для любого элемента есть единственный обратный элемент.

Задача 326. Докажите экспоненциальную нижнюю асимптотическую оценку чисел Рамсея вида $R(s,s) > c^s$ для любой удобной Вам константы $c > 1$.

Решение. Пусть $G = (V, E)$ — случайный граф на n вершинах. Обозначим за X какое-то s-элементное подмножество вершин. Пусть A_X — событие «X является кликой», а B_X — событие «X является антикликой». Нас интересует вероятность события «в графе есть клика или антиклика размера s». Напишем верхнюю оценку для вероятности такого события:

$$P\left(\bigcup_{X \subseteq V} A_X \cup B_X\right) \leqslant \sum_{X \subseteq V} P(A_X) + P(B_X).$$

Каждое слагаемое равняется одному и тому же числу

$$P(A_X) = P(B_X) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{s}{2}},$$

ведь в полном графе на s вершинах $\binom{s}{2}$ рёбер, и каждое из них существует в вероятностью 1/2. Итак,

$$P\left(\bigcup_{X\subseteq V} A_X \cup B_X\right) \leqslant 2\cdot\binom{n}{s}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{s}{2}} < 2\cdot\left(\frac{en}{s}\right)^s\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{s}{2}}.$$

Нас интересуют такие n, что самое правое число неравенства меньше 1. Если при каком-то n_0 это выполняется, то *не всегда* в графе на n_0 вершинах есть s-клика или s-антиклика, то есть $R(s,s) > n_0$. Начнём искать такое n_0:

$$\begin{aligned} 2\cdot\left(\frac{en_0}{s}\right)^s\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{s}{2}} &< 1\\ \left(\frac{en_0}{s}\right)^s &< 2^{\frac{s(s-1)}{2}-1}\\ \frac{en_0}{s} &< 2^{\frac{s^2-s-2}{2s}}\\ n_0 &< \frac{s}{e}2^{\frac{s^2-s-2}{2s}}. \end{aligned}$$

Например, в качестве такого n_0 подойдёт

$$n_0 = \left\lfloor \frac{s}{e}2^{\frac{s^2-s-2}{2s}}\right\rfloor.$$

Осталось дать нижнюю асимпотическую оценку:

$$R(s,s) > n_0 = \left\lfloor \frac{s}{e}2^{\frac{s^2-s-2}{2s}}\right\rfloor \sim \frac{s}{e}2^{\frac{s^2-s-2}{2s}} > \frac{s}{e}2^{\frac{s}{2}-2} = \frac{s}{4e}\sqrt{2}^s > \frac{1}{4e}\sqrt{2}^s \gtrsim 1,3^s$$

Задача 327. Вычислите в $\mathbb{Z}_7$ значение выражения

$$(2017^{-1}+2018^{-1})^{2018}\cdot 2018.$$

Ответ должен принадлежать множеству $\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Решение. Заметим, что

$$2017 \equiv 1 \pmod 7.$$
$$2018 \equiv 2 \pmod 7.$$

Первообразный корень по модулю 7 – это 3. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} 3^2 &\equiv 2 \pmod 7,\\ 3^0 &\equiv 1 \pmod 7,\\ 3^5 &\equiv 5 \pmod 7,\\ 3^3 &\equiv 6 \pmod 7. \end{aligned}$$

Теперь наш пример – это $((3^0)^{-1}+(3^2)^{-1})^{2018}\cdot 2$.
Применим знания о первообразных корнях: $(1+4)^{2018}\cdot 2$.
Тогда по модулю 7 верно

$$5^{2018}\cdot 2 \equiv 3^{10090}\cdot 2 \equiv 3^4\cdot 2 \equiv 1 \pmod 7.$$

Наш ответ:

$$(2017^{-1}+2018^{-1})^{2018}\cdot 2018 \equiv 1 \pmod 7.$$

Задача 330. Отметьте все истинные высказывания.

1. Применение леммы Ловаса (в общем случае) требует подбора набора констант.
2. Общий случай леммы Ловаса доказывается с помощью неравенства Маркова.
3. Лемма Ловаса применима только к наборам событий, независимых в совокупности.
4. Оценка чисел Рамсея, получаемая при помощи леммы Ловаса, лучше по порядку, чем оценка, полученная «обычным» вероятностным методом.
5. Лемма Ловаса позволяет балансировать между независимостью и маловероятностью событий, которых мы хотели бы избежать.
6. Симметричный случай леммы Ловаса выводится из общего случая при помощи математической индукции.

Решение. Верные утверждения:

1. Применение леммы Ловаса (в общем случае) требует подбора набора констант.
2. Лемма Ловаса позволяет балансировать между независимостью и маловероятностью событий, которых мы хотели бы избежать.

Исправленные высказывания:

- Общий случай леммы Ловаса доказывается с помощью математической индукции;
- Оценка чисел Рамсея, получаемая при помощи леммы Ловаса, лучше в 2 раза, чем оценка с использованием «обычного» вероятностного метода;
- Симметричный случай леммы Ловаса выводится из общего случая явным предъявлением чисел $x_1, \ldots, x_n$.

Задача 332. Зачеркнув лишнее, укажите верную идею доказательства теоремы Фишера: «Для доказательства того, что объектов в некоторой совокупности «немного»/«достаточно много», строим биекцию/инъекцию/сюръекцию множества этих объектов в линейное пространство, так, чтобы векторы, сопоставленные объектам, оказывались линейно зависимыми/независимыми.»

Решение. Для доказательства того, что объектов в некоторой совокупности «немного», строим инъекцию множества этих объектов в линейное пространство, так, чтобы векторы, сопоставленные объектам, оказывались линейно независимыми.

Задача 333. Расскажите о теореме Франкла — Уилсона, ответив на следующие вопросы: 1) что можно сказать об оценке чисел Рамсея, даваемой этой теоремой (она нижняя или верхняя, точнее ли она, чем другие известные Вам оценки), 2) как строится соответствующий граф в доказательстве теоремы.

Решение.

1. Оценка нижняя. Нет, не точнее, так как оценка, полученная вероятностным методом $e^{s(\ln(\sqrt{2})+o(1))}$, точнее оценки из теоремы $e^{\left(\frac{\ln^2 s}{72 \ln\ln s}\right)}$;
2. Для $R(s,s)$ мы строим граф, в котором нет ни клик размера s, ни независимых множеств размера s. Для какого-то простого p рассмотрим:

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{p^3}) : x_i \in \{0,1\}, x_1 + \cdots + x_{p^3} = p^2\},$$
$$E = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod p\}.$$

   Граф $G(V,E)$ – искомый.

Задача 334. Сколько единиц в матрице, задача о покрытии которой эквивалентна задаче о покрытии m-однородного k-регулярного гиперграфа на n вершинах?

Решение. В такой матрице n строк, m столбцов, в каждой строке k единиц, тогда всего в такой таблице nk единиц.

Задача 335. Сформулируйте теорему Эрдёша—Ко—Радо.

Решение. Пусть A – произвольное множество из n элементов. Множество AM – совокупность k-элементных подмножеств множества A, таких, что каждая пара множеств пересекается не менее чем по одному элементу. Тогда мощность максимальной совокупности равна $\binom{n}{k}$, если $n < 2k$, иначе $\binom{n-1}{k-1}$.

Задача 336. Подмножества $X_1, ..., X_n$ и $Y_1, ..., Y_n$ некоторого N-элементного множества таковы, что X_i пересекается с Y_j по пяти элементам при $i = j$ и по четырём элементам иначе. Докажите, что $n \leqslant N$.

Решение. Пронумеруем элементы «некоторого N-элементного множества», назовём его M. Введём две матрицы A и B размера $N \times n$. Элемент a_{ij} матрицы A будет равен 1, если i-й элемент множества содержится в X_j, иначе будет нулём. Матрицу B определим аналогично, но для семейства Y_j.

Тогда что такое матрица $C = A^T B$? Её элемент c_{ij} равен скалярному произведению i-го и j-го столбцов матриц A и B соответственно. Каждый столбец A соответствует какому-то множеству X_i и показывает, какие элементы множества M есть в X_i. Если какой-то элемент есть и в X_i, и в Y_j, то это даст единичный вклад в c_{ij}.

Таким образом, c_{ij} показывает, по скольким элементам пересекаются X_i и Y_j. В условии задачи, по сути, говорится, что матрица C заполнена четвёрками, но имеет пятёрки на диагонали. Значит, $\mathrm{Rg} C = n$. Но $\mathrm{Rg} C \leqslant \min\{\mathrm{Rg} A, \mathrm{Rg} B\} \leqslant \min\{n, N\}$. Значит, $n \leqslant N$.

Задача 337.

1. Какое наибольшее количество рёбер, согласно теореме Турана, может быть в графе на 2018 вершинах, не содержащем четырёхвершинных клик? Можно дать ответ в виде формулы.

2. Найдите точное значение числа Заранкевича $Z_{1,b}(m, bm)$ для произвольных натуральных b и m.

3. Что можно сказать про почти все двудольные графы с равномощными долями: доля таких графов, не содержащих $K_{2,2}$, константная // почти все такие двудольные графы не содержат $K_{2,2}$ в качестве подграфа // почти все такие двудольные графы содержат $K_{2,2}$ в качестве подграфа.

Решение.

1. $672 \cdot 673 \cdot 2 + 673 \cdot 673 = 673 \cdot 2017$.

2. $m \cdot (b - 1)$.
   У каждой вершины из меньшей доли не более чем $b - 1$ смежных с ней вершин большей доли. Чтобы построить данный граф, разобьем большую долю на подмножества размером b так, что каждой вершине из меньшей доли будет соответствовать подмножество из большей. Проведем и каждой вершины меньшей доли ребро в $b - 1$ вершину соответствующего ей подмножества большей доли.

3. Из верхней оценки числа Заранкевича для частного случая $Z_2(n) \lesssim n^{\frac{3}{2}}$: почти все такие двудольные графы содержат $K_{2,2}$ в качестве подграфа.

Задача 338. С помощью теоремы Редфилда – Пойи найдите асимптотику количества различных (не переходящих друг в друга при автоморфизмах графа) раскрасок в n цветов «графа-гантели» G. Раскраски не предполагаются правильными, в данной задаче это произвольные отображения из множества вершин графа в фиксированное n - элементное множество. Граф G имеет 20 вершин. В графе G два цикла, по 7 вершин в каждом, циклы соединены цепью, содержащей 7 рёбер.

Решение. Ранее было вычислено число автоморфизмов, при которых оба цикла остаются на месте, равно четырем. Теперь посчитаем число автоморфизмов, когда циклы переходят друг в друга. Таких автоморфизмов будет тоже четыре, так как один цикл может либо перейти в другой в прямом порядке, либо в обратном, так как цикла два, то всего различных автоморфизмов будет $2 \cdot 2 = 4$. Тогда по теореме Редфилда-Пойи асимптотика различных раскрасок графа в n цветов будет равна $\frac{n^{20}}{8}$.

Задача 339. Обозначим через $G_{s,t}$ полный t - дольный граф с долями размера s каждая. Найдите асимптотику количества раскрасок (необязательно правильных) в k цветов графа $G_{s,t}$ при $k \to \infty$ и фиксированных s, t. Раскраски считаются одинаковыми, если они переходят друг в друга при некотором автоморфизме графа. Пользуйтесь теоремой Редфилда – Пойи.

Решение. Пусть $\mathbb{G}$ — группа автоморфизмов на графе $G_{s,t}$. По следствию из теоремы Редфилда – Пойи для числа раскрасок q имеем при $k \to \infty$: $q \sim \frac{k^{ts}}{|\mathbb{G}|}$.

Посчитаем мощность группы $\mathbb{G}$. Заметим, что вершины можно переставлять внутри одной доли, но перемещать в другие нельзя (иначе граф перестаёт быть автоморфным исходному), также можно переставлять сами доли. Поэтому все имеем вариантов автоморфизмов: $|\mathbb{G}| = t! \cdot (s!)^t$, тогда ответ: $q \sim \frac{k^{ts}}{t! \cdot (s!)^t}$.

Пусть задана нумерация, которая поочерёдно нумерует доли (т. е. сначала все вершины первой доли, потом второй и т. д.). Приведём пример перестановки для $s \equiv 0 \pmod 2$, которая меняет местами первую и вторую доли, причем во второй доле еще меняет местами нечётные элементы со следующими чётными. Пусть σ_2 меняет местами доли, σ_1 меняет местами элементы второй доли, тогда:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_2 \circ \sigma_1 = \\ &= ((1, s+1) \circ (2, s+2) \circ \ldots \circ (s, 2s)) \circ \\ &\circ ((s+1, s+2) \circ (s+3, s+4) \circ \ldots \circ (2s-1, 2s)).\end{aligned}$$

F

Задача 340. Докажите, что если $\|G\| = \lfloor n^2/4 \rfloor + 1$, то в граф G есть по крайней мере $\lfloor n/2 \rfloor$ треугольников.

Решение. Покажем, что для произвольного графа на n вершинах с таким числом рёбер треугольников не может быть меньше, чем $\lfloor n/2 \rfloor$.

Воспользуемся индукцией по n с шагом 2.

База:

$$\begin{gathered} n = 1 \Longrightarrow 1 \text{ ребро} \Longrightarrow \text{таких графов не существует}, \\ n = 2 \Longrightarrow 2 \text{ ребра} \Longrightarrow \text{таких графов не существует}, \\ n = 3 \Longrightarrow 3 \text{ ребра} \Longrightarrow \text{есть треугольник}, \\ n = 4 \Longrightarrow 5 \text{ рёбер} \Longrightarrow \text{есть два треугольника}. \end{gathered}$$

Теперь докажем переход для $n \geq 5$. Рассмотрим два случая.

1. Любое ребро G входит в некоторый треугольник.

   Пусть T — множество всех треугольников, E — множество рёбер. Посчитаем P — число пар (e, t), где $e \in E, t \in T$. Для этого воспользуемся двойным подсчётом:

$$\sum_{e \in E} \underbrace{\sum_{t \in T} \mathrm{I}(e \in t)}_{H_e} = P = \sum_{t \in T} \underbrace{\sum_{e \in E} \mathrm{I}(e \in t)}_{K_t}.$$

   То есть H_e — число треугольников содержащих e, K_t — число рёбер в треугольнике t. При этом $H_e \geq 1$ и $K_t = 3$. Поэтому выполнено:

$$\sum_{t \in T} K_t = 3|T| = \sum_{e \in E} H_e \geq |E| = \lfloor n^2/4 \rfloor + 1.$$

Теперь достаточно показать, что $\lfloor n^2/4+1\rfloor \geq \lfloor 3n/2\rfloor - 2$, так как из него и неравенства $3|T| \geq \lfloor n^2/4\rfloor + 1$ следует, что $|T| \geq \lfloor n/2\rfloor$. Покажем, что:

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4}+1 \right\rfloor \geq 3\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor - 2,$$
$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \geq 3\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor - 3,$$
$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \geq \frac{n^2-1}{4} \geq \frac{3n}{2} - 3 \geq 3\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor - 3,$$
$$n^2 - 6n + 11 \geq 0,$$
$$(n-5)(n-1) + 6 \geq 0.$$

Последнее неравенство верно, так как $n \geq 5$.

2. Существует ребро AB не входящее ни в один треугольник.

   Это значит, что множество соседей A и множество соседей B не пересекаются. Граф без вершин A, B обозначим за $G^{'}$, у него $n-2$ вершины. При этом число рёбер исходящих из A, B не больше $n-2$, не учитывая ребро AB.

   Оценим число рёбер в $G^{'}$.

   (a) Из A и B идёт ровно $n-2$ ребра.
   Любая вершина $G^{'}$ соединена либо с A, либо с B и $\|G^{'}\| = \|G\| - n + 1$. Поэтому:

   $$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n + 2 = \left\lfloor \frac{n^2-4n+4}{4} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor + 1.$$

   Значит, можем применить предположение индукции и верно:

   $$|T^{'}| \geq \lfloor (n-2)/2 \rfloor = \lfloor n/2 \rfloor - 1.$$

   Возьмём произвольный треугольник в $G^{'}$, по принципу Дирихле две вершины будут соединены либо с A, либо с B. Это значит, что в исходном графе G найдётся хотя бы $\lfloor n/2\rfloor$ треугольников.

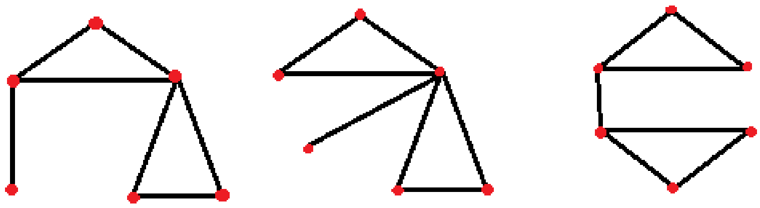
   (b) Рёбер из A и B не больше $n-3$.
   Тогда из предыдущего пункта следует, что в $G^{'}$ рёбер хотя бы $\lfloor (n-2)^2/4\rfloor + 2$. Аналогично, устанавливается, что $|T^{'}| \geq \lfloor n/2\rfloor - 1$.
   Удалим из какого-нибудь треугольника ребро. При этом, предположение индукции будет всё ещё верно. Но тогда, возвращая удалённое ребро, получим, что $|T^{'}| \geq \lfloor n/2\rfloor$. А значит и $|T| \geq \lfloor n/2\rfloor$.

Требуемое утверждение доказано.

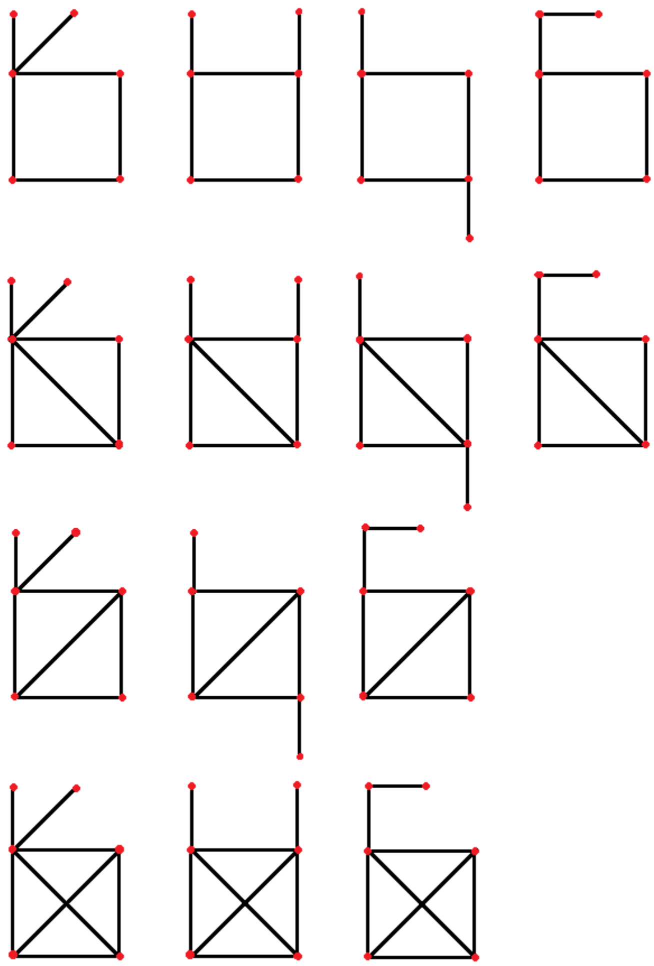
Задача 344. Перечислите все попарно неизоморфные связные простые графы на шести вершинах, в которых ровно три блока. Подробно описывать перебор не нужно, но обязательно стоит указать параметры, по которым перебирались графы (параметров должно быть минимум два, второй из которых позволяет перебирать графы с одинаковым значением первого параметра).

Решение. В случае связного графа блок может быть отдельным ребром (перешейком) или многоугольником (с диагоналями, если они есть). Так как нужно три блока, а вершин шесть, в графе должен быть хотя бы один цикл (блок-многоугольник). Будем перебирать графы по *количеству вершин в блоке-многоугольнике* и *количеству диагоналей*, а в каждом "подтипе" графов, задаваемых этими параметрами, перебирать расположение оставшихся рёбер.

Пусть в многоугольнике три вершины. Понятно, что для получения подходящего графа необходимо ровно два треугольника. Диагоналей в треугольнике быть не может, перебираем расположение оставшегося ребра.



Пусть теперь в многоугольнике четыре вершины. Всего возможно четыре случая расположения (и наличия) диагоналей. Перебираем расположение оставшихся двух рёбер.



Пятиугольника быть не может, так как в таком случае останется только одна вершина, и больше двух блоков сделать не получится. Поэтому перебор окончен.

Задача 345. Приведите пример двудольного графа, в котором 2019 вершин, из которых ровно 1000 центральные.

Решение.

Если два множества X, Y вершин соединены ребром, то из любой точки множества X есть ребро в любую точку множества Y.

Множества B, C образуют множество центральных вершин, т. к. из любой точки множеств B, C можно попасть в любую точку множеств A, D, C, B максимум за два шага, в то время как из множества A в множество D ровно за три шага.

Вывод: множества B, C образуют множество центральных вершин, в котором их ровно тысяча.

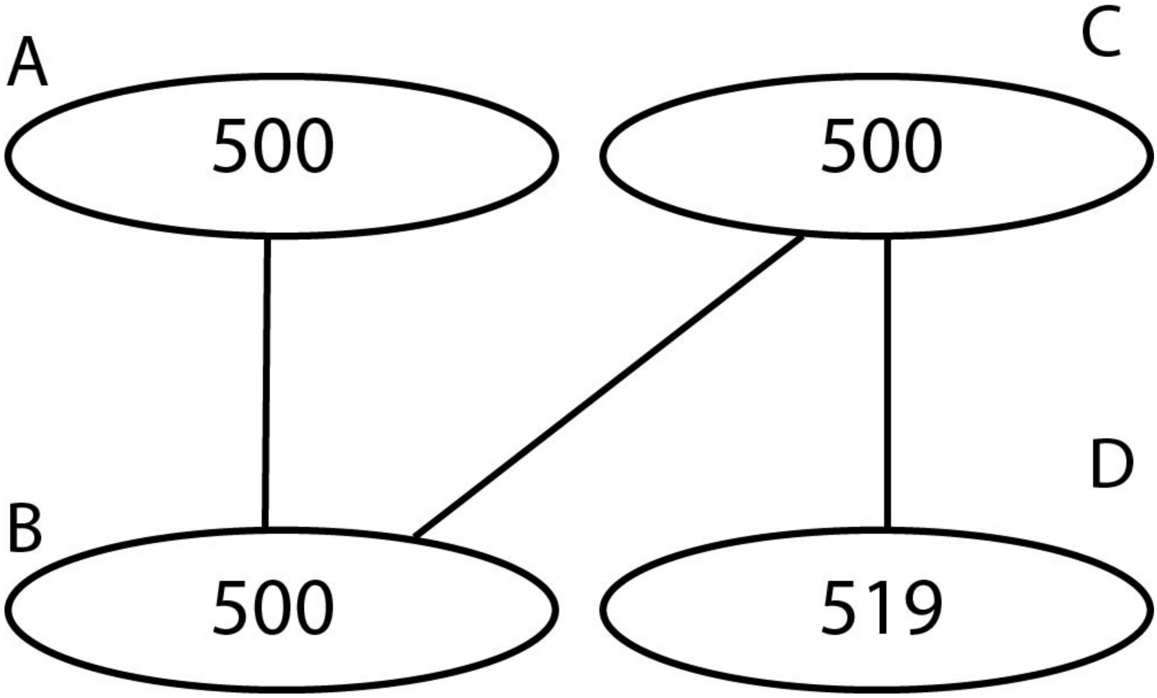


Рис. 11. Двудольный граф с 1000 центральными вершинами.

Задача 349. Инволюцией называется элемент группы, порядок которого равен 2. Пусть $\mathbb{G}$ — группа и пусть x и y — различные инволюции в $\mathbb{G}$. Докажите, что при $k \in \mathbb{N}$ произвольное произведение вида $a_1a_2\ldots a_{2k+1}$, где $a_i \in \{x, y\}$, является инволюцией, сопряженной с x или y.

Решение. Наше произведение будет сопряженно x или y, если найдётся такой g, что произведение представимо как $g^{-1}xg$ или $g^{-1}yg$.

Если в произведении рядом будет стоять две одинаковые инволюции, то они превратятся в e. Тогда после всех таких превращений наше произведение будет иметь одну из следующих форм:

$$\underbrace{a\ldots yxy}_{m}\,x\,\underbrace{yxy\ldots a}_{m}, \tag{10}$$

$$\underbrace{a\ldots xyx}_{m}\,y\,\underbrace{xyx\ldots a}_{m}, \tag{11}$$

где $m \in \mathbb{N}$, a — либо x, либо y.

Тогда в случае (10) следует, что $g = yxy\ldots a$, а в случае (11) — $g = xyx\ldots a$. В обоих случаях, g — это произведение из m инволюций. Следовательно, произведение сопряженно x или y. Из этого делаем вывод, что порядок произведения не может быть равен одному.

Задача 351. Пусть конечная группа $\mathbb{G}$ порядка n такова, что $\min_{a\in\mathbb{G}\{e\}} \operatorname{ord} a = l$. Докажите, что в $\mathbb{G}$ есть по крайней мере $\min\{n, l+1\}$ классов сопряжённости.

Решение. Рассмотрим группу $\mathbb{G}$. Если $C_{\mathbb{G}}(a_i) = \{g \in \mathbb{G} \mid a_ig = ga_i\}$, то известно соотношение для набора представителей a_i всех классов сопряженности:

$$\sum_i \frac{1}{|C_{\mathbb{G}}(a_i)|} = 1. \tag{12}$$

Теперь рассмотрим следующий факт: $\min_{a\in G\{e\}} \operatorname{ord} a = l$. Из него следует, что $e, a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{l-1}$ — различные элементы группы. Также известно, что $a_i^k \cdot a_i = a_i^{k+1} = a_i \cdot a_i^k$, следовательно мы нашли хотя бы l элементов, перестановочных с a_i, из чего следует, что $|C_{\mathbb{G}}(a_i)| \geq l$. Заметим, что в формуле (12) количество слагаемых и является количеством классов сопряженности, но тогда, если обозначить это количество за k, то

$$\sum_i \frac{1}{|C_{\mathbb{G}}(a_i)|} \leq \frac{k}{l}.$$

Из этого следует, что $k \geq l$. В нашей сумме лежит класс сопряженности с e. Тогда при $n > l$ оценка превращается в строгую, из-за того, что $|C_{\mathbb{G}}(e)| = n > l$, то есть условия $k = l$ будет не достаточно. Теперь $k \geq l+1$, если $l < n$, иначе, $k \geq n$, что и требовалось доказать.

Задача 352. Пусть V — совокупность всех 13-элементных подмножеств n-элементного множества, таких, что мощность пересечения любых двух из них равна 5 или 10. Докажите, что максимальное число множеств в этой совокупности не превосходит n.

Решение.

Пусть количество множеств равно m. Для начала сопоставим каждому множеству его n-мерный характеристический вектор: $A_i \to \vec{a_i}$, причём будем считать, что $\vec{a_i} \in \mathbb{Z}_5^n$, и в дальнейшем все вычисления будем производить в $\mathbb{Z}_5$. Заметим, что подобное отображение будет инъективным. Теперь сопоставим каждому характеристическому вектору многочлен $\mathrm{P}_i(\vec{x}) = \langle \vec{a_i}, \vec{x} \rangle$, в котором $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $\mathrm{P}_i(\vec{x}) \in \mathbb{Z}_5[x_1, \ldots, x_n]$, а угловые скобочки обозначают операцию скалярного произведения. Заметим, что и такое отображение инъективно: для разных векторов в многочленах будут встречаться разные переменные.

Докажем, что такие многочлены линейно независимы. Предположим обратное: $\exists\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq \vec{0}$: $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \mathrm{P}_i(\vec{x}) \equiv 0$. Теперь заметим, что $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\, \mathrm{P_i}(\vec{a_i}) = 3 \neq 0$, а $\mathrm{P_i}(\vec{a_j}) = 0$, поскольку 5 и 10 есть 0 по модулю 5 и все вычисления производятся в $\mathbb{Z}_5$. Однако, отсюда следует, что $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \mathrm{P}_i(\vec{a_j}) = \lambda_j \mathrm{P}_j(\vec{a_j}) = 3\lambda_j = 0$, откуда $\lambda_j = 0$. Полученное противоречие с условием $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq \vec{0}$ свидетельствует о линейной независимости многочленов.

В связи с этим фактом количество многочленов (а следовательно, и количество множеств в совокупности V, поскольку отображение из V в множество многочленов было инъективным) можно сверху оценить размерностью линейного пространства, из которого они берутся. Она равна n, поскольку многочлены $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют базис в этом линейном пространстве. Стало быть, $m \leqslant n$, что и требовалось получить.

Задача 356.

При каких $k,\ n,\ t$ будет существовать система различных представителей для совокупности из t различных k -элементных подмножеств n -элементного множества? А при каких $k,\ n,\ t$ заведомо не будет существовать?

Решение.

Сначала подумаем, когда заведомо будет существовать.

Покажем, что для $t \leqslant k+1$ у нас заведомо будет с.р.п.

Рассмотрим случаи:

1. $t \leqslant k$.

   Пусть нет с.р.п., тогда по следствию теоремы Холла есть подмножества $\{S_i\}_{i=1}^{m}$, такие что
   $$|\cup S_i| < m.$$
   Но так как мощность одного множества равна k, то
   $$k \leqslant |\cup S_i| < m \leqslant t \leqslant k.$$
   Получили противоречие.

2. $t = k+1$

   Рассмотрим произвольный набор подмножеств. Если там меньше, чем $k+1$ подмножество, то рассматривается аналогично предыдущему случаю, а если этих подмножеств ровно $k+1$, то
   $$|\cup S_i| \geqslant k+1.$$

Неравенство справедливо, потому что $\binom{k+1}{k} = k+1$, то есть если у нас есть $k+1$ различных k-элементных подмножеств, то всего не может быть меньше, чем $k+1$ элементов. То есть по теореме Холла получаем, что и в этом случае найдется с.р.п.

Пусть у нас $t \geqslant k+2$. Покажем, что мы можем так построить подмножества, что не будет с.р.п.

Возьмем $k+2$ элемент и $k+2$ подмножества. И для удобства первые $k+1$ подмножества — это все возможные на первых $k+1$ элементах. Взяв в качестве набора из $k+1$ подмножеств k первых и последнее, получим покрытие всех $k+2$ элементов, то есть

$$|\cup S_i| = k+1 < k+2.$$

По теореме Холла с.р.п. не будет. (В доказательстве выше n такое, чтобы хватало, то есть $n \geqslant k+2$).

То есть при $t \leqslant k+1$ у нас заведомо будет существовать с.р.п., причем эта оценка максимальна.

Теперь подумаем, когда заведомо у нас не будет с.р.п.

С задачи с семинара мы знаем, что если мощность каждого множества совокупности равна k и каждый элемент содержится в l множествах, то при $k \geqslant l$ у нас найдется с.р.п.

В данном случае нам как раз-таки плохо, если элементы по множествам разнесены равномерно, поэтому худшая ситуация настанет, когда каждый элемент будет в не менее, чем $\lfloor \frac{kt}{n} \rfloor$ элементах (либо столько, либо на один больше, там зависит от чиселок). Тогда исходя из текущего пункта задачи, нам нужно, чтобы

$$k < \lfloor \frac{kt}{n} \rfloor \iff n < t.$$

Пусть $n = t-1$, тогда если взять все t подмножеств, то

$$|\cup S_i| \leqslant n = t-1 < t.$$

Опа, получаем, что по теореме Холла у нас не будет систему различных представителей.

Итого, получаем, что для точно будет существовать при $t \leqslant k+1$, а точно не будет существовать при $n < t$.

Задача 359. Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдётся грань, ограниченная не более пятью рёбрами.

Решение.

Спроецируем вершины многогранника на сферу из точки, лежащей внутри многогранника, такую что все вершины многогранника лежат внутри нее.

Спроецируем точки на сфере на плоскость из точки-полюса, не лежащей на ребрах, и получим планарный граф G (т. к. если граф представим без самопересечений на сфере, то он планарен).

Очевидно, между гранями построенного планарного графа G и гранями многогранника существует биекция.

Построим двойственный граф G'. Воспользуемся тем фактом, что если две грани исходного многогранника смежны, то они граничат только по одному ребру, что следует из выпуклости.

В построенном графе G' найдется вершина степени не более 5, так как двойственный граф сам является планарным, что и означает, что в многограннике найдется грань, ограниченная не более пятью ребрами.

Задача 361. Семиугольник разбили на выпуклые 5- и 6-угольники. Известно, что в каждой вершине семиугольника сходится хотя бы 2 части разбиения и никакая вершина любого многоугольника не является внутренней точкой стороны другого многоугольника. Докажите, что 5-угольников не менее 13.

Решение.

Представим это разбиение как граф, где вершины — точки пересечения, а рёбра — стороны многоугольников. Положим n — число вершин, e — число рёбер, f — число граней. Так как это планарный граф, для него справедлива формула знаменитого математика 18 века Леонарда Эйлера (который, между прочим, более 10 лет работал в Российской Империи):

$$n - e + f = 2.$$

Пусти x — число пятиугольников, а y — число шестиугольников. Тогда количество граней можно выразить так:

$$f = x + y + 1.$$

Также количество рёбер связано с x и y таким образом:

$$5x + 6y + 7 = 2e.$$

То есть пять рёбер у каждого пятиугольника, шесть у каждого шестиугольника, семь внешних рёбер в сумме дают удвоенное число рёбер (так как мы два раза каждое посчитали).

По условию задачи степень каждой вершины не менее трёх. Поэтому согласно лемме о рукопожатиях имеем ограничение на количество вершин:

$$2e \geq 3n \Rightarrow n \leq \frac{2}{3}e.$$

Подставляя всё это в формулу знаменитого математика 18 века Леонарда Эйлера (который, между прочим, более 10 лет работал в Российской Империи), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}e - e + f &\geq 2, \\ \frac{1}{3}e &\leq f - 2, \\ \frac{5x+6y+7}{6} &\leq x + y - 1, \\ x &\geq 13. \end{aligned}$$

Кажется, доказано.

Задача 362. В выпуклом многограннике все грани являются правильными 5-, 6- или 7-угольниками. Докажите, что пятиугольных граней ровно на 12 больше, чем семиугольных.

Решение. Введем обозначения: m, n, k — количество 5-, 6- и 7-угольников соответственно, V, E, G — количество вершин, ребер и граней соответственно.

Сначала посчитаем количество ребер в многограннике: каждое ребро входит в два многоугольника, поэтому $2E = 5m + 6n + 7k$. Допустим, какая-то вершина входит в 4 многоугольника. Тогда сумма плоских углов при ней не меньше $4 \cdot \frac{3 \cdot 180}{5} = 432$ градусов, что больше 360. Докажем, что такого не может быть. Проведем луч внутри многогранного угла и спроецируем все многоугольники, в которые входит рассматриваемая вершина, на плоскость, перпендикулярную этому лучу. Тогда сумма углов при проекции вершины равна 360, но при проектировании углы не уменьшаются — приходим к противоречию. Тогда каждая вершина входит в три многоугольника, поэтому $3V = 5m + 6n + 7k$. Число граней многогранника $G = m + n + k$.

Умножим первое равенство на -3, второе — на 2, третье — на 6 и сложим. Получим

$$6V - 6E + 6G = 10m + 12n + 14k - 15m - 18n - 21k + 6m + 6n + 6k = m - k.$$

Так как многогранник выпуклый, для него работает формула Эйлера $V - E + G = 2$. Тогда $m - k = 6V - 6E + 6G = 12$, то есть количество пятиугольников на 12 больше количества семиугольников, что и требовалось доказать.

Задача 366. Докажите, используя метод производящих функций, что число неупорядоченных разбиений числа n на слагаемые, в которых ни одно слагаемое не повторяется чаще, чем 3 раза, равно числу неупорядоченных разбиений того же числа на слагаемые, ни одно из которых не делится на 4.

Решение. Вспомним, что производящая функция числа неупорядоченных разбиений числа n выглядит так:

$$G_0(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^i + x^{2i} + \ldots),$$

где $x^{m \cdot i}$ в i-й скобке значит, что в нашем разбиении число i встречается m раз. Тогда легко видеть, что число неупорядоченных разбиений числа n в которых ни одно слагаемое не повторяется чаще, чем 3 раза, равняется:

$$G_1(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^i + x^{2i} + x^{3i}) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1-x^{4i}}{1-x^i}.$$

Число неупорядоченных разбиений того же числа на слагаемые, ни одно из которых не делится на 4, равняется:

$$G_2(x) = \frac{\prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^i}\right)}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^{4k}}\right)} = \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1-x^{4k}\right)}{\prod_{i=1}^{\infty} \left(1-x^i\right)} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1-x^{4i}}{1-x^i} = G_1(x).$$

Так как $\sum_{i=0}^{\infty} b_n x^n = G_1(x) = G_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_n x^n$, где a_n, b_n — требуемые в условии задачи числа, то видно, что эти числа равны, что и требовалось доказать.

Задача 368. Используя метод производящих функций, для произвольного натурального t докажите тождество

$$\sum_{s=0}^{2t} (-1)^s C_{s+t}^t C_{3t-s}^t = C_{2t}^t.$$

Решение. Рассмотрим степенной ряд $(1-x^2)$ в степени $-(t+1)$. Запишем для него тождество:

$$(1-x)^{-(t+1)}(1+x)^{-(t+1)} = (1-x^2)^{-(t+1)}.$$

Известно, что для ряда $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{k+1}$ n-й член записывается как $(-1)^n C_{n+k}^n x^n$. Аналогично, для ряда $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{k+1}$ n-й член записывается как $C_{n+k}^n x^n$. Напомним, что по свойству биномиальных коэффициентов $C_{(a+b)}^a = C_{(a+b)}^b$. Тогда запишем наше тождество в следующем виде:

$$\sum_i (-1)^i C_{t+i}^t x^i \cdot \sum_j C_{t+j}^t x^j = \sum_k C_{t+k}^t x^{2k}.$$

Посмотрим на x^{2t}. Тогда:

$$\sum_{i+j=2t} (-1)^i C_{t+i}^t C_{t+j}^t = C_{2t}^t.$$

Заменим $i = s$, тогда $j = 2t - s$:

$$\sum_{s=0}^{2t} (-1)^s C_{s+t}^t C_{3t-s}^t = C_{2t}^t.$$

Задача 370. Докажите асимптотическую оценку чисел Рамсея $R(s, 2^{\sqrt{s}}) \gtrsim 2^{cs\sqrt{s}}$ для любой удобной вам положительной константы c.

Решение. Рассмотрим граф G на n вершинах с вероятностью проведения ребра равной $p = \frac{1}{2^{m\sqrt{s}}}$. Все рёбра проводятся независимо.

Введём событие A — подграф на s вершинах является кликой, и событие B — подграф на $2^{\sqrt{s}} = l$ вершинах является антикликой. Тогда их вероятности равны:

$$P(A) = p^{\binom{s}{2}}, \qquad P(B) = (1-p)^{\binom{l}{2}}.$$

Также введём случайные величины: количество клик размера s в графе и количество антиклик размера l. Обозначим их за X, Y соответственно и найдём их математическое ожидание:

$$E(X) = \binom{n}{s} p^{\binom{s}{2}}, \qquad E(Y) = \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}.$$

Найдём асимптотическую оценку $E(X)$ для $n = 2^{cs\sqrt{s}}$:

$$E(X) \sim \frac{n^s}{s!} \left(\frac{1}{2^{m\sqrt{s}}}\right)^{\frac{s^2}{2}-\frac{s}{2}} \sim \frac{n^s e^s}{\sqrt{2\pi s} \cdot s^s} \frac{2^{\frac{ms\sqrt{s}}{2}}}{2^{\frac{ms^2\sqrt{s}}{2}}} \sim \frac{2^{cs^2\sqrt{s}} e^s}{\sqrt{2\pi s} \cdot s^s} \frac{2^{\frac{ms\sqrt{s}}{2}}}{2^{\frac{ms^2\sqrt{s}}{2}}}.$$

Заметим, что $E(X) \to 0$ при $c - \frac{m}{2} < 0$ и $s \to \infty$.

Найдём асимптотическую оценку $E(Y)$ для $n = 2^{cs\sqrt{s}}$:

$$E(Y) \sim \frac{n^l}{l!} \frac{(1-p)^{\frac{l^2}{2}}}{(1-p)^{\frac{l}{2}}} \sim \frac{n^l}{l!} \frac{e^{\frac{l^2}{2}\ln(1-p)}}{e^{\frac{l}{2}\ln(1-p)}}.$$

Заметим, что $p = l^{-m}$ и $n = l^{cs}$. Поэтому

$$E(Y) \sim \frac{l^{csl} e^l}{\sqrt{2\pi l} \cdot l^l} \frac{e^{\frac{l(1-m)}{2}}}{e^{\frac{l(2-m)}{2}}} \lesssim \frac{e^{csl\ln l} e^l}{\sqrt{2\pi l} \cdot l^l} \frac{e^{\frac{l(1-m)}{2}}}{e^{\frac{l(2-m)}{2}}}.$$

Тогда $E(Y) \to 0$ при $m < 1$ и $s \to \infty$.

Таким образом мы получили, что при $m < 1$ и $2c < m$ с какого-то момента будет выполняться $E(X) + E(Y) < 1$. Это значит, что $R(s, 2^{\sqrt{s}}) \gtrsim 2^{cs\sqrt{s}}$.

Задача 372. Пусть дана матрица M размера 1000×1000, состоящая из нулей и единиц, которых при этом поровну. Используя вероятностный метод, докажите, что в M можно выделить подматрицу размера 7×7, полностью состоящую из единиц. Подматрица образуется, если выбрать несколько строк и столбцов в M, а затем взять все ячейки, лежащие на пересечениях выбранных строк и столбцов.

Решение. Пусть A — набор из семи строк исходной матрицы, выбранный с вероятностью $p = \frac{1}{\binom{1000}{7}}$. Введем случайную величину $X(A)$ — количество столбцов, в которых на пересечениях с A стоят единицы. Тогда чтобы доказать существование матрицы размера 7×7, состоящей только из единиц, достаточно показать, что $\mathbb{E}X(A) > 6$.

Найдем $\mathbb{E}X(A)$. Так как $X(A)$ — количество столбцов, в которых на пересечении с A стоят единицы, а всего столбцов 1000, то

$$X(A) = \sum_{c_i \in C} \mathbb{I}(c_i \text{ пересекается с } A \text{ только по } 1),$$

где C — множество столбцов матрицы. Тогда

$$\mathbb{E}X(A) = \sum_{c_i \in C} P(c_i \text{ пересекается с } A \text{ только по } 1) = \frac{\sum_{i=1}^{1000} \binom{n_i}{7}}{\binom{1000}{7}},$$

где n_i — количество единиц в i-м столбце.

Целочисленную функцию биномиального коэффициента можно легко доопределить до выпуклой на положительных вещественных числах. Воспользуемся выпуклостью, тогда $\sum_{i=1}^{1000} \binom{n_i}{7} \geq 1000 \cdot \binom{\frac{\sum_{i=1}^{1000} n_i}{1000}}{7}$. Заметим, что $\sum_{i=1}^{1000} n_i$ — количество единиц во всех столбцах, по условию их 500000, так как количество единиц равно количеству нулей.

Следовательно,

$$\mathbb{E}X(A) \geq \frac{1000 \cdot \binom{500}{7}}{\binom{1000}{7}} > 6.$$

Тогда подматрица размера 7×7, состоящая только из единиц, найдется в исходной матрице. Что и требовалось доказать.

Задача 374. Вычислите в $\mathbb{Z}_7$ значение выражения

$$(2018^{-1} + 2019^{-1})^{2019} \cdot 2019.$$

Ответ должен принадлежать множеству $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Решение. Воспользуемся свойствами сравнения по модулю:

$$\begin{aligned} 2019 &\equiv 3 \pmod 7, \\ 2018 &\equiv 2 \pmod 7, \\ 2019^{-1} &\equiv 3^{-1} \equiv 5 \pmod 7, \\ 2018^{-1} &\equiv 2^{-1} \equiv 4 \pmod 7. \end{aligned}$$

Тогда исходное выражение сведётся к

$$(4+5)^{2019} \cdot 3 \equiv 2^{2019} \cdot 3 \pmod 7.$$

Из малой теоремы Ферма получаем:

$$\begin{aligned} 2^6 &\equiv 1 \pmod 7, \\ 2^{2019} &\equiv 2^3 \equiv 1 \pmod 7. \end{aligned}$$

Поэтому конечный ответ равняется:

$$(2018^{-1} + 2019^{-1})^{2019} \cdot 2019 \equiv 3 \pmod 7.$$

Задача 375. Вычислите в $\mathbb{Z}_7$ значение выражения

$$(2017^{-1} + 2020^{-1})^{2018} \cdot 2020.$$

Ответ должен принадлежать множеству $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Решение. Воспользуемся свойством (которое вытекает из малой теоремы Ферма) в $\mathbb{Z}_p$: $\underline{a} \cdot \underline{a^{p-2}} \cdot b = \underline{b}$. В нашем случае положим $p = 7$ и $b = 1$, поэтому $\underline{a^{-1}} = \underline{a^5}$:

$$(2017^{-1} + 2020^{-1})^{2018} \cdot 2020 \equiv (2017^5 + 2020^5)^{2018} \cdot 2020 \pmod 7.$$

Выделим остаток от деления на 7:

$$\begin{aligned} (2017^5 + 2020^5)^{2018} \cdot 2020 &\equiv (1^5 + 4^5)^{2018} \cdot 4 \\ &\equiv (1 + 64 \cdot 16)^{2018} \cdot 4 \equiv 3^{2018} \cdot 4 \pmod 7. \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что $3^6 \equiv 1 \pmod 7$ (по малой теореме Ферма):

$$3^{2018} \cdot 4 = 3^2 \cdot (3^6)^3 \cdot 4 \equiv 3^2 \cdot 4 \equiv 1 \pmod 7.$$

Ответ: 1.

Задача 376. Целое число x называется *квадратичным вычетом* по модулю m, если $(x, m) = 1$ и существует такое целое y, что $x \equiv y^2 \pmod m$. Пусть даны взаимно простые числа $m, n \in \mathbb{N}$. Используя китайскую теорему об остатках, докажите, что x является квадратичным вычетом по модулю mn тогда и только тогда, когда x является таковым и по модулю m, и по модулю n.

Решение. Пусть $(x, mn) = 1$ и $\exists y$, т.ч. $x \equiv y^2 \pmod{mn}$. Без ограничения общности считаем $1 < x < mn$. Заметим, что $(x, m) = (x, n) = 1$, иначе $(x, mn) > 1$. Тогда, поскольку m и n взаимно просты, то по китайской теореме об остатках $\exists! a_m, a_n$, т.ч. $a_m \equiv x \equiv y^2 \pmod{m}$, $a_n \equiv x \equiv y^2 \pmod{n}$, $0 \le a_m a_n \le mn$. Тогда по определению x – квадратичный вычет по модулям m и n.

Пусть теперь $(x, m) = (x, n) = 1$, $x \equiv y_m^2 \pmod{m}$, $x \equiv y_n^2 \pmod{n}$. Сразу заметим, что $(x, mn) = 1$. Тогда $y_m^2 - y_n^2 = pn = qm$ для некоторых $p, q \in \mathbb{Z}$, и поскольку $(m, n) = 1$, то $p \,\vdots\, m$ и $q \,\vdots\, n$. Тогда $y_m^2 - y_n^2 \,\vdots\, mn$ $\Leftrightarrow y_m^2 \equiv x \equiv y_n^2 \pmod{mn}$ и по определению x – квадратичный вычет по модулю mn.

Задача 379.

Пусть V — совокупность всех 15-элементных подмножеств n-элементного множества, таких, что мощность пересечения любых двух из них равна 2, 4, 6, 9 или 13. Докажите, что максимальное число множеств в этой совокупности не превосходит $1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$.

Решение.

Рассмотрим для нашего множества характеристические вектора этой совокупности $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s \in \mathbb{R}_7^n$. Тогда получаем, что

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_i) \equiv 15 \equiv 1 \pmod 7;$$
$$(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \in \{2, 4, 6\} \pmod 7 \text{ для } i \neq j.$$

Сопоставим каждому вектору многочлен ($\vec{y}$ — аргумент)

$$\vec{x}_i \mapsto P_{\vec{x}_i}(\vec{y}) = [(\vec{x}_i, \vec{y}) - 2][(\vec{x}_i, \vec{y}) - 4][(\vec{x}_i, \vec{y}) - 6].$$

Видно, что

$$P_{\vec{x}_i}(\vec{y}) = 0 \iff \vec{x}_i \neq \vec{y},$$
$$P_{\vec{x}_i}(\vec{x}_i) = (1-2)(1-4)(1-6) \equiv -15 \equiv 13 \pmod 7. \tag{13}$$

Покажем, что многочлены $P_{\vec{x}_1}(\vec{y}), \dots, P_{\vec{x}_s}(\vec{y})$ линейно независимы.

Пусть не так, тогда у нас существует нетривиальная комбинация, такая, что

$$\forall \vec{y} \sum_{i=1}^{s} c_i P_{\vec{x}_i}(\vec{y}) \equiv 0 \pmod 7.$$

Подставим $\vec{y} = \vec{x}_k$. Тогда все многочлены, кроме одного, будут равны нулю по определению многочлена, останется

$$c_k P_{\vec{x}_k}(\vec{x}_k) \equiv 0 \pmod 7.$$

Но по (3) многочлен равен -1 в $\mathbb{Z}_7$, поэтому $c_k = 0$. В силу произвольности k получаем, что все коэффициенты равны нулю. Получаем противоречие, значит, они линейно независимы и мощность совокупности равна числу элементов в базисе. Найдем базис:

$$\begin{aligned} P_{\vec{x}_i}(\vec{y}) &= [(\vec{x}_i, \vec{y}) - 2][(\vec{x}_i, \vec{y}) - 4][(\vec{x}_i, \vec{y}) - 6] = \\ &= (x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n - 2)(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n - 4)(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n - 6) = \\ &= \sum a_{i,j,k} y_i y_j y_k + \sum b_{i,j} y_i y_j + \sum c_i y_i + \sum d_i. \end{aligned}$$

В силу того, что $y_i \in \{0, 1\}$ выполняется $y_i^l = y_i$, а тогда в суммах игреки можно сделать неповторяющимися, перекинув повторяющиеся в другие суммы, то есть, например, так как $y_1 y_1 y_2 = y_1 y_2$, мы эту тройку мы перекинем во вторую сумму, изменив соответствующий коэффициент $b_{1,2}$.

И получаем базис, состоящий из всевозможных $\{y_i y_j y_k\}_{i,j,k=1}^n$, $\{y_i y_j\}_{i,j=1}^n$ (с попарно различными индексами внутри каждого), $\{y_i\}_{i=1}^n$ и константы. То есть размер базиса

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 380. Приведите пример такого графа на 2020 вершинах, являющегося трёхдольным, но не двудольным, что ровно 1103 вершины в нём являются центральными.

Решение. Построим граф следующим образом: нечетный цикл из 1105 вершин пересечем по одной вершине с циклом из 916 вершин, при этом в меньшем из циклов проведем ребра, соединяющие точку сочленения со всеми остальными вершинами. По построению, граф является трехдольным, а не двудольным так как имеет нечетный цикл, который можно раскрасить в три цвета чередованием двух цветов в цикле, а затем добавлением третьего.

При этом, эксцентриситет 1103 вершин в большем цикле, кроме двух самых удаленных от пересечения циклов, у которых эксцентриситет естественным образом больше, равен $\frac{1105-1}{2}=552$, в то же время эксцентриситет вершин в меньшем цикле так же получится больше, ведь, помимо того что им нужно добраться до вершины пересечения, необходимо еще и дойти до самых удаленных вершин большего цикла. Таким образом, граф имеет 1103 центральные вершины.

Задача 382. Докажите, что если в группе $\mathbb{G}$ для некоторых элементов $e_0, a \in \mathbb{G}$ выполнено $e_0a = a$, то e_0 — нейтральный элемент группы.

Решение. Имеем $e_0a = a$. Для произвольного b покажем $be_0 = b$: пусть $be_0 = c$, тогда $ca = be_0a = ba \implies c = b$.

Имеем $\forall b \in \mathbb{G} \hookrightarrow be_0 = b$. Покажем теперь что и $e_0b = b$:

$$be_0 = b \implies e_0 = b^{-1}b \implies e_0b = b^{-1}bb = b.$$

Задача 384. Докажите, что если в группе $\mathbb{G}$ для некоторых $a,\ b \in \mathbb{G}$ выполнено $ab = e$, где e — нейтральный элемент группы, то a и b взаимно обратны.

Решение. Для каждого элемента группы существует обратный, поэтому мы можем домножить исходное равенство справа на b^{-1}. Получится $abb^{-1} = b^{-1}$, то есть $a = b^{-1}$. Аналогично домножим исходное выражение слева на a^{-1}, получится $a^{-1}ab = a^{-1}$, то есть $b = a^{-1}$. Итак, мы доказали, что a и b взаимно обратны.