

Московский физико-технический университет  
Факультет инноваций и высоких технологий

Вопрос по выбору на тему:

## **Пинч-эффект в плазме**

Работу выполнила:

г. Долгопрудный  
2020 год

## 1. Введение

Плазму можно создать с помощью электрического разряда. Далее возникает задача удерживать образовавшийся плазменный шнур от распыливания, обусловленного существующим в нём газокинетическим давлением. Этой цели можно добиться, используя различные приёмы, к числу которых относится пинч эффект.

**Пинч-эффект** (англ. pinch - сужение, сжатие) — эффект сжатия токового канала под действием магнитного поля, индуцированного самим током. Сильный ток, протекающий в плазме, твёрдом или жидком металле создаёт магнитное поле. Оно действует на заряженные частицы (электроны и/или ионы), что может сильно изменить распределение тока. При больших токах сила Ампера приводит к деформации проводящего канала, вплоть до разрушения. В природе наблюдается в молниях.

Различают два основных типа пинч-эффекта:

- z-пинч — ток течет вдоль плазменного шнура и взаимодействует с собственным магнитным полем;
- $\Theta$ -пинч — на плазменный шнур накладывается продольное магнитное поле, создающее кольцевые токи в результате взаимодействия которых с полем происходит сжатие шнура.

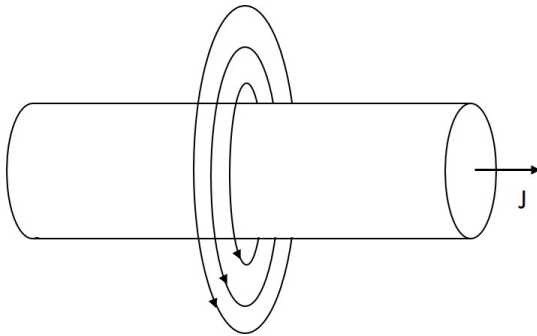


Рис. 1: z-пинч

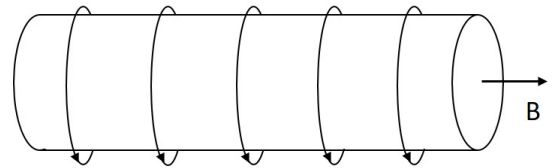


Рис. 2:  $\Theta$ -пинч

## 2. Равновесие z-пинча

Рассмотрим подробнее z-пинч. Будем считать, что:

1. Плотность тока постоянна по сечению плазменного шнура:  $j(\mathbf{r}) = \text{const}$ , так что полный ток  $J = jS = \pi R^2 j$ ;
2. Концентрация частиц постоянна:  $n(\mathbf{r}) = \text{const}$

Магнитное поле внутри шнура находится с помощью теоремы о циркуляции магнитного поля:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = 2\pi r H = \frac{4\pi}{c} J(r) = \frac{4\pi}{c} j \cdot \pi r^2.$$

Отсюда находим:

$$j = \frac{c}{2\pi r} B.$$

Согласно основному уравнению магнитной гидродинамики условие равновесия плазмы можно записать в виде:

$$\text{grad}P = \frac{1}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$$

Поскольку  $j \perp B$ , то, как видно из рисунка 3 вектор  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  направлен к оси цилиндра, причем:

$$(j \times B)_k = -jB = -\frac{2\pi}{c}j^2r$$

Соответственно условие равновесия принимает вид:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{2\pi}{c^2}j^2r \Rightarrow P + \frac{\pi}{c^2}j^2r^2 = \text{const}$$

Заменяя в этом равенстве

$$P = nkT, \quad j = \frac{c}{2\pi r}B,$$

перепишем условие равновесия следующим образом:

$$nkT(r) + \frac{B^2(r)}{4\pi} = \text{const}$$

Полученное равенство можно интерпретировать таким образом, что сумма газокINETического ( $nkT$ ) и магнитного ( $\frac{B^2}{4\pi}$ ) давлений должна быть постоянной в объёме плазмы.

Полагая на внешней границе плазменного шнура  $T(R) = 0$  получаем:

$$T(r) = \frac{1}{4\pi kn} [B^2(R) - B^2(r)].$$

Этому соотношению можно придать другой вид, воспользовавшись формулой

$$B = \frac{2\pi}{c}jr = \frac{2J}{cR^2}r.$$

Это даёт

$$T(r) = \frac{\pi}{nc^2} \left( \frac{J}{\pi R^2} \right)^2 (R^2 - r^2).$$

В частности, отсюда следует

$$N_1 kT(0) = \frac{J^2}{c^2},$$

где введена погонная плотность частиц плазменного шнура на его оси  $N_1 = \pi R^2 n$ .

Полученное равенство называется **условием равновесия Беннета**.

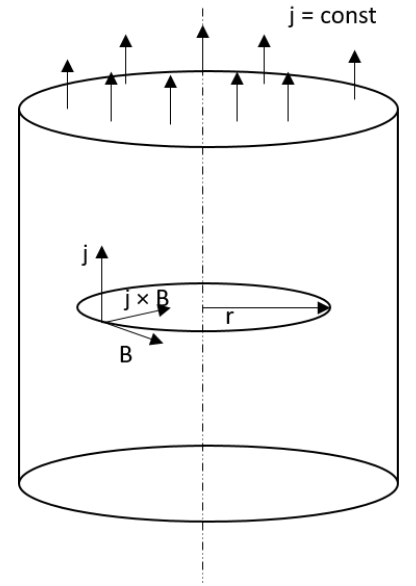


Рис. 3: К выводу условия равновесия z-пинча.

### 3. Неустойчивость z-пинча

Плазма - это объект, в котором наблюдаются различные неустойчивости, приводящие к нарушению её однородности, формы. Неустойчивости в свою очередь ограничивают время жизни плазмы. Данное обстоятельство оказывается особенно критичным в задачах термоядерного синтеза, когда плазму требуется удерживать длительное время, чтобы активировать реакцию.

К числу неустойчивостей пинча относится возникновение и развитие перетяжек, как это проиллюстрировано на рисунке 5. Рассмотрим данное явление на примере z-пинча. Механизм возникновения перетяжек можно пояснить следующим образом. Пусть в каком-то месте шнура случайным образом возникло сужение. Поскольку ток, текущий по шнуру, постоянный, то плотность тока возрастает по закону  $j = J/\pi R^2$ . На поверхности шнура действует магнитное поле  $B(R) = 2J/cR$ . В результате возрастает амперова сила, сжимающая шнур:

$$F_A = \frac{1}{c} j B(R) = \frac{1}{c} \frac{J}{\pi R^2} \frac{2J}{cR} = \frac{2J^2}{c^2 \pi R^3}.$$

Отсюда следует, что сжимающее действие магнитного поля не уравнивается газокинетическим давлением  $P$ , практически не меняющимся в этом месте. В итоге происходит дальнейшее сужение перетяжки — развивается неустойчивость.

Для борьбы с данной неустойчивостью было предложено "вморозить" в плазму продольное магнитное поле  $B_z^{(e)}$ . Поскольку магнитный поток в проводящей среде сохраняется:

$$\Phi = \pi R^2 B_z^{(e)} = \text{const},$$

то при сужении шнура поле возрастает:

$$B_z^{(e)} \sim 1/R^2.$$

Вклад этого поля в плотность энергии  $\Delta U \sim B_z^{(e)2} \sim 1/R^4$ . Считаем систему замкнутой, так что работа поля осуществляется за счёт его энергии:

$$\delta A_{\text{поле}} = f \delta R = -\delta U \sim \delta R/R^5$$

Следовательно,  $f \sim 1/R^5 > 0$ , то есть возникающая сила противодействует сжимающей пучок амперовой силе. Кроме того, при уменьшении радиуса пучка эта сила по величине растёт быстрее, чем амперова сила ( $F_A \sim 1/R^3$ ). Таким способом можно стабилизировать z-пинч.

## 4. Основное уравнение магнитной гидродинамики плазмы

Выделим в плазме элемент объема  $dV = dx dy dz$ . Обозначим газокинетическое давление, действующее в плазме как  $P(x, y, z)$ . Тогда вдоль оси  $x$  на элемент объёма будет действовать сила

$$df_x = [P(x, y, z) - P(x + dx, y, z)] dy dz = -\frac{\partial P}{\partial x} dV.$$

Аналогично вдоль осей  $y$  и  $z$  будут действовать силы

$$df_y = -\frac{\partial P}{\partial y} dV, \quad df_z = -\frac{\partial P}{\partial z} dV.$$

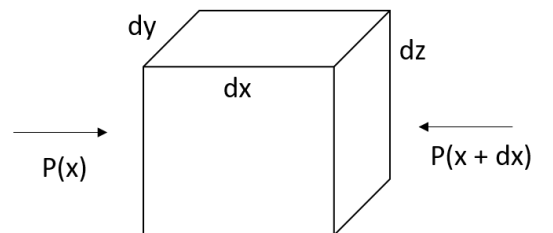


Рис. 5: К расчету сил, действующих на элемент объёма плазмы благодаря газокинетическому давлению.

В векторном виде сила записывается в виде  $d\mathbf{f} = -\text{grad}P \cdot dV$ .

Запишем уравнение движения рассматриваемого элемента объёма. Пусть  $\rho_M$  - массовая плотность плазмы, так что масса элемента объёма равна  $dm = \rho_M dV$ . Тогда согласно второму закону Ньютона имеем

$$dm \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad}P \cdot dV, \text{ или } \rho_M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad}P.$$

Полученное уравнение определяет поведение плазмы в отсутствие каких-либо иных сил, кроме газокINETического давления.

Поскольку в плазме движутся заряды, то они создают токи, которые приводят к появлению магнитных полей. Эти поля в свою очередь создают силы Ампера, действующие на токи.

Сила Ампера, действующая на элемент объема  $dV$ , в котором присутствует ток с плотностью  $j$ , равна

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV.$$

С учётом этого уравнения движения принимает вид

$$\rho_M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad}P + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$