Маятник Капицы с осциллирующим подвесом

20 апреля 2021 г.

1 Введение

Маятник Капицы - это система, состоящая из груза, прикреплённого к лёгкой нерастяжимой спице, которая крепится к вибрирующему подвесу. Особенностью маятника является устойчивость перевёрнутого (вертикального) положения маятника в случае быстрых вибраций подвеса. Ещё в 1908 году это явление наблюдал Эндрю Стефенсон, и только в 1951 году, когда П. Л. Капица экспериментально исследовал такой маятник, им была построена теория динамической стабилизации. Таким образом, Капица открыл новое направление в физике — вибрационную механику.

2 Экспериментальные наблюдения

Исследуя данный маятник, мы можем получать разные колебания, в зависимости от характеристик движения подвеса, а именно частоты и амплитуды. Например, когда частота вынужденных осцилляций точки подвеса приблизительно вдвое больше частоты собственных колебаний маятника, нижнее положение равновесия становится неустойчивым: амплитуда первоначально сколь угодно малых колебаний маятника начинает прогрессивно нарастать со временем. Это явление называется параметрическим резонансом. Другое ключевое свойство маятника - явление динамической стабилизации перевернутого положения. При достаточно больших значениях частоты и амплитуды осцилляций подвеса приведенный в перевернутое положение маятник не опрокидывается, и стремится к этому положению при умеренных отклонениях(устойчивое положение равновесия).

3 Описание физической модели

Опишем физическую модель рассматриваемого маятника Капицы. Будем считать стержень длины l невесомым, с массой m на его свободном конце. За a примем амплитуду колебательного движения подвеса, тогда закон движения подвеса записывается как

$$z(t) = a \cdot \cos wt \tag{1}$$

Таким образом, в нашем случае $z(0) = a$.

Перейдя в неинерциальную систему отсчета, связанную с подвесом, заметим, что на груз действует только две силы: сила тяжести $m\overrightarrow{g}$ вертикально вниз и сила инерции $\overrightarrow{F_и} = -m\overrightarrow{\ddot{z}(t)}$, направление и значение которой зависит от ускорения подвеса в данный момент. Из (1) получим, что

$$\overrightarrow{F_и(t)} = mw^2\overrightarrow{z(t)} \tag{2}$$

4 Параметрический резонанс

Рассмотрим поведение системы в случае частоты принудительных осцилляций подвеса вдвое большей частоты собственных колебаний маятника. Таким образом, при движении маятника от точки максимального отклонения к нижнему положению равновесия, сила инерции действует на него вниз и ускоряет движение груза(рис. 1,a). В момент прохождения нижней точки равновесия подвес проходит положение $z = 0$(рис. 1,б), и далее сила инерции действует на груз вверх, тем самым увеличивая амплитуду колебаний(рис. 1,в). Это явление называется параметрическим резонансом.

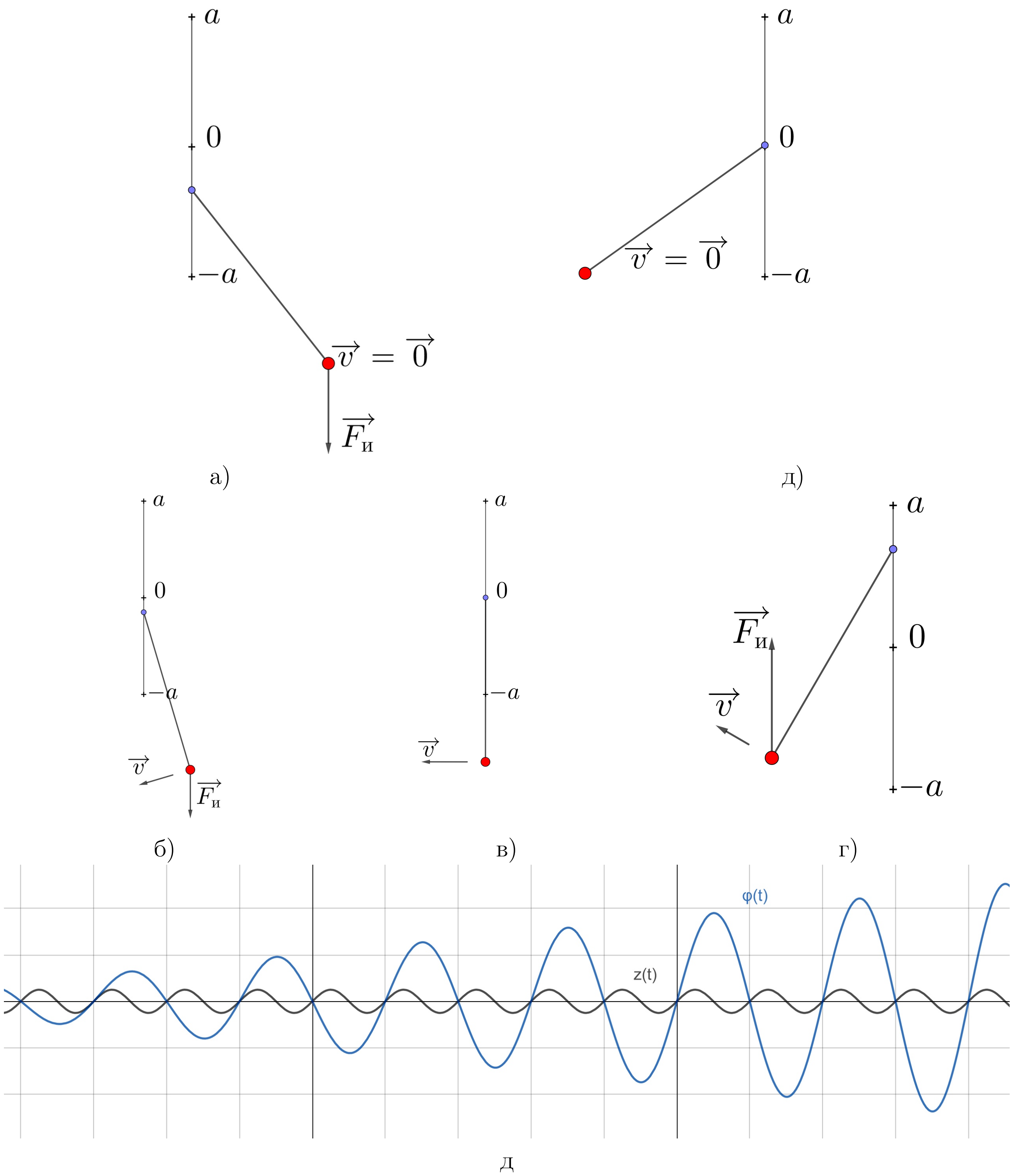

Рис. 1: Явление параметрического резонанса

5 Динамическая стабилизация перевернутого маятника

Рассмотрим маятник, отклоненный на некоторый угол ψ от верхнего вертикального положения, и колеблющийся около новой позиции между точками 1 и 2(рис. $2, a$). В неинерциальной системе отсчета, связанной с подвесом, на груз в крайних положениях 1 и 2 действуют вертикальные силы тяжести и инерции, причем сила тяжести в обоих случаях направлена вниз, а сила инерции в точке 1 направлена вверх.

Так как плечо сил в положении 1 больше, то при достаточном значении силы инерции $F_{и1}$ момент сил, действующих на груз, в первом положении будет больше, причем это верно не только для крайних, но и для промежуточных пар положений грузов. Таким образом, средний момент сил, действующих на груз за время одного колебания подвеса положителен и возвращает маятник в вертикальное перевернутое положение при достаточной силе инерции.

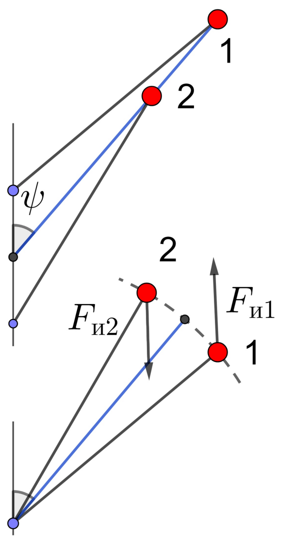

Рис. 2: Маятник, отклоненный на угол ψ от вертикали. Сверху в ЛСО, снизу - в СО подвеса

6 Количественное описание движения маятника

Рассмотрим движение маятника при достаточно быстрых колебаниях подвеса(такие, частота которых много больше частоты собственных колебаний маятника $w_0 = \sqrt{l/g}$). В этом случае его можно рассмотреть как суперпозицию "медленной" и "быстрой" компонент движения. Углы отсчитываются от нижнего положения маятника против часовой стрелки. Таким образом,

$$\varphi(t) = \psi(t) + \delta(t) \tag{3}$$

Здесь $\varphi(t)$ - угол отклонения маятника от нижнего положения, $\psi(t)$ - "медленная" компонента, описывающая движение маятника, усредненное за период одного колебания подвеса, а $\delta(t)$ - "быстрая", происходящая с частотой w вынужденных колебаний подвеса. Геометрически, подставив $z(t)$ из (1) получаем

$$\delta(t) = -\frac{a \sin\psi \cos wt}{l}$$

Поскольку осцилляции подвеса приводят лишь к небольшим отклонениям φ от ψ, то δ достаточно мал для приближения $\sin\delta \approx \delta, \cos\delta \approx 1$. Таким образом,

$$\sin\varphi = \sin\psi\cos\delta + \sin\delta\cos\psi \approx \sin\psi + \delta\cos\psi \tag{4}$$

Длина плеча силы тяжести и инерции равна $l\sin\varphi$. В течение одной осцилляции подвеса, ψ можно считать постоянной, независящий от времени. Таким образом, средние значения момента сил тяжести и инерции равны соответственно

$$\langle M_т \rangle = \langle -mgl\sin\varphi \rangle = -mgl\langle \sin\psi + \delta\cos\psi \rangle = -mgl\sin\psi \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \langle M_{F_и} \rangle &= \langle F_и l \sin\varphi \rangle = \langle mw^2 al(\sin\psi + \delta\cos\psi)\cos wt \rangle = \\ &= mw^2 al(\langle \sin\psi\cos wt \rangle + \langle \delta\cos wt\cos\psi \rangle) = mw^2 al\cos\psi \langle -\frac{a}{l}\cos^2 wt \sin\psi \rangle = \\ &= -mw^2a^2\cos\psi\sin\psi\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2wt \rangle = -\frac{1}{4}mw^2a^2\sin 2\psi \end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что $M_{F\text{и}} > 0 \Leftrightarrow \sin 2\psi < 0$, в этом случае

$$\langle M \rangle = -mgl\sin\psi - \frac{1}{4}mw^2a^2\sin 2\psi = -m\sin\psi(gl - \frac{1}{2}w^2a^2\cos\psi) \tag{7}$$

При $\langle M \rangle > 0 \Leftrightarrow w^2a^2 > 2gl$ верхнее перевернутое положение маятника является устойчивым, и при небольших отклонениях маятник возвращается в это состояние. Подставив $w_0 = \sqrt{g/l}$ получим другой вид условия устойчивости перевернутого положения маятника

$$\frac{a}{l} \cdot \frac{w}{w_0} > \sqrt{2} \tag{8}$$

Для оценки возможных отклонений можем приравнять $\langle M \rangle = 0$. Так мы получим критическое $\psi_{\text{кр}}$, при котором маятник уже не вернется в верхнее положение. Ближайшая такая точка к верхнему положению находится из равенства $\alpha_{max} = \pi - \psi_{\text{кр}}$, где $\cos\psi_{\text{кр}} = -\dfrac{2gl}{w^2a^2}$ $\Rightarrow \cos\alpha_{max} = -\cos\psi_{\text{кр}} = \dfrac{2gl}{a^2w^2} = 2\,(\dfrac{w_0 l}{wa})^2$ Чем больше произведение wa частоты и амплитуды осцилляций подвеса, тем ближе к $\pi/2$ максимально допустимое отклонение маятника α_{max} от перевернутого положения. Если отклонить маятник на угол, меньший α_{max}, то он будет совершать сравнительно медленные колебания около перевернутого положения. Аналогичное поведение маятника наблюдается и при отклонении от нижнего положения равновесия. Но в этом случае частота медленных колебаний маятника больше, чем около перевернутого положения, т к частота увеличивается благодаря осциллляциям подвеса.

7 Энергия маятника

Рассмотрим маятник в СО подвеса. Средний момент сил, действующий на груз, за одно колебание подвеса (7) создает изменение момента импульса $I\ddot{\psi}$, где $I = ml^2$.

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{l}\sin\psi - \frac{1}{4}\frac{a^2}{l^2}w^2\sin 2\psi \tag{9}$$

Или, подставив $w_0^2 = g/l$:

$$\ddot{\psi} = -w_0^2\sin\psi - \frac{1}{4}\frac{a^2}{l^2}w^2\sin 2\psi \tag{10}$$

Движение маятника можно представить как движение частицы в эффективном потенциальном поле. Таком, что $M(\psi) = -dU(\psi)/d\psi$. Компоненты U_{mg} и $U_{\text{и}}$ описывают действие сил тяжести и инерции соответственно. Таким образом, $U_{tot}(\psi) = U_{gr}(\psi) + U_{in}(\psi)$, $U_{gr}(\psi) = mgl(1-\cos\psi), U_{in}(\psi) = \frac{1}{4}ma^2w^2(1-\cos 2\psi)$

Графики показаны на рисунке 3, оба имеют синусоидальную форму, но период $U_{in}(\psi)$ вдвое меньше периода $U_{gr}(\psi)$. Их минимумы при $\psi = 0$ совпадают, образуя абсолютный минимум полной функции $U_{tot}(\psi)$. Этот минимум соответствует нижнему устойчивому положению равновесия маятника. Соседний минимум $U_{in}(\psi)$ расположен при $\psi = \pi$, где $U_{gr}(\psi)$ имеет максимум, соотвествующий перевернутому маятнику. Если выполняется критерий устойчивости перевернутого маятника (8), то полный потенциал имеет дополнительные минимумы($\psi = \pm\pi$), соответствующие перевернутому маятнику. В точке $\psi = 0$ находится абсолютный минимум, соответствующий нижнему положению равновесия. Рассмотрим эти точки. При $\psi = 0$ $sin\psi = \psi$, при $\psi = \pi$ $sin\psi = sin(\pi - \theta) \approx \theta$, $cos\psi = -1$:

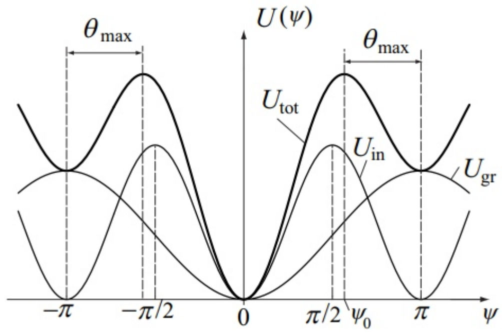

Рис. 3: Графики потенциальных энергий

$$w_{down}^2 = \frac{a^2w^2}{2l^2} + w_0^2 \qquad\qquad w_{up}^2 = \frac{a^2w^2}{2l^2} - w_0^2 \tag{11}$$